Geheele functies

A. J. J. DUBBELD

GEHEELE FUNCTIES

H. J. PARIS
AMSTERDAM

GEHEELE FUNCTIES

GEHEELE FUNCTIES

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr L. S. ORNSTEIN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TE VERDEDIGEN TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE OP MAANDAG 14 MAART 1932, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

ADRIANUS JOHANNES JOSEPH DUBBELD
GEBOREN TE 'S-HERTOGENBOSCH

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXXII

AAN MIJN OUDERS
AAN MIJNE VROUW

Bij het voltooien van dit proefschrift is het mij een aangename taak U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde mijn oprechten dank te betuigen voor hetgeen Gij tot mijn wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Deze dank geldt in de eerste plaats U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, zoowel voor Uw heldere colleges als voor de steun en leiding, die ik bij de samenstelling van dit proefschrift van U zoo ruimschoots mocht ondervinden. Uw daadwerkelijke belangstelling zal mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Ook U, Hooggeleerde Emeritus DE VRIES, zal ik steeds dankbaar blijven voor Uw interessante colleges.

Hooggeleerde KRAMERS, wil ook Gij mijn dank aanvaarden voor het heldere inzicht, dat Gij mij hebt gegeven in de problemen der moderne theoretische natuurkunde.

Hooggeleerde ORNSTEIN, U ben ik dank verschuldigd voor Uw belangwekkende colleges en in het bijzonder voor Uw leiding en hulpvaardigheid bij mijn practisch werk op Uw laboratorium.

Ten slotte ben ik ook U, Hooggeleerde NIJLAND, zeer erkentelijk voor het vele, dat ik van U heb geleerd.

INHOUD

HOOFDSTUK I

HOOFDSTUK II

HOOFDSTUK III

HOOFDSTUK IV

HOOFDSTUK V

HOOFDSTUK I

§ 1 — Inleidende eigenschappen.

Een *geheele functie* van de complexe variabele z is een functie, die holomorf is in het heele eindige vlak. Zoo'n functie is dus gekarakteriseerd door het feit, dat de convergentie-straal van haar Taylorsche ontwikkeling oneindig groot is.

Daar in het vervolg de nulpunten van zoo'n functie ter sprake zullen komen, maken we daarover even een opmerking vooraf. Zij $f(z)$ een geheele functie, die niet overal nul is, en $a_1, a_2, a_3, \ldots$ haar nulpunten. In ieder afgesloten gebied kunnen deze nu slechts in eindig aantal aanwezig zijn, daar hun verzameling anders een verdichtingspunt zou hebben en dus $f(z) \equiv 0$ zou zijn. Dientengevolge kunnen we ze gerangschikt denken naar de klimmende moduli, wat we dan ook steeds zullen doen, zoodat we onderstellen:

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots,$$

waarbij, ingeval a_k een ν-voudig nulpunt is:

$$a_{k-1} \neq a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+\nu-1} \neq a_{k+\nu}.$$

Beschouwen we nu weer de geheele functie:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

dan hebben we direct de volgende:

Stelling 1:

Iedere begrensde geheele functie is een constante.

Bewijs:

Zij overal $|f(z)| < M$, dan volgt uit de schatting van CAUCHY voor de coëfficiënten a_n:

$$|a_n| < \frac{M}{R^n} \text{ voor iedere } R.$$

Hieruit volgt echter, dat $a_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$, waaruit de stelling blijkt.

Deze stelling kunnen we uitbreiden tot de volgende:

Stelling 2:

Bestaat er een getal q, zoo dat voor $|z| > 0$:

$$\left|\frac{f(z)}{z^q}\right| < M,$$

waarin M een vast getal is en $f(z)$ de geheele functie $\sum_0^\infty a_n z^n$ voorstelt, dan is $f(z)$ een polynoom van den graad q hoogstens.

Bewijs:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n.$$

Deelen we beide leden hiervan door z^{n+q+1} en integreeren we langs een cirkel C om O, dan krijgen we: $(n > 0)$

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+q+1}} = 2\pi i\, a_{n+q}.$$

Daar nu $|f(z)| < MR^q$ volgens het onderstelde, als R de straal voorstelt van cirkel C, volgt hieruit:

$$\left|\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+q+1}}\right| < MR^q \cdot \frac{2\pi R}{R^{n+q+1}} = \frac{2\pi M}{R^n},$$

zoodat dus: $|a_{n+q}| < \frac{M}{R^n}$, wat R ook is, m. a. w. $a_{n+q} = 0$ voor iedere waarde van $n > 0$, waarmee de stelling bewezen is.

Stelling 3:

Iedere geheele functie $f(z)$, waarvan het reëele deel $u(z)$ overal grooter is dan nul, is een constante.

Bewijs:

Stellen we: $g(z) = e^{-f(z)}$,

dan is $g(z)$ ook geheel, maar met $|g(z)| < 1$, omdat:

$$|g(z)| = e^{-u(z)} < 1.$$

We vinden dus, dat $g(z)$ een *begrensde* geheele functie is, dus een constante, waaruit volgt, dat $f(z)$ ook constant moet zijn.

§ 2 – Algemeene stelling over holomorfe functies.

Onderstelling: $f(z)$ *holomorf voor* $|z| \leqq R$;

$$f(z) = u(z) + iv(z);\ v(o) = \beta_0.$$

Bewering: *Voor* $|z| < R$ *geldt:*

$$f(z) = \beta_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{\theta i} + z}{Re^{\theta i} - z}\, u(Re^{\theta i})\, d\theta.$$

Bewijs:

Stellen we: $a_n = \alpha_n + \beta_n i\ ,\ z = \varrho e^{\varphi i}$,

dan is voor $|z| \leqq R$:

$$f(z) = \sum_0^\infty = \sum_0^\infty (\alpha_n + \beta_n i)\, \varrho^n\, (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = u(z) + iv(z).$$

Hieruit volgt:

$$u(Re^{\theta i}) = \sum_0^\infty R^n\, (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta).$$

Door de beide leden van de laatste vergelijking te vermenigvuldigen respectievelijk met:

$$1,\ \cos\theta,\ \sin\theta,\ \ldots.,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta,\ \ldots.$$

en te integreeren tusschen 0 en 2π, leidt men hieruit af:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i})\, d\theta, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i}) \cos n\theta\, d\theta, \\ \beta_n &= -\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i}) \sin n\theta\, d\theta, \end{aligned}\right\} n = 1, 2, \ldots.$$

Substitueeren we deze waarden voor α_n en β_n, dan vinden we:

$$f(z) = \beta_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i})\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n e^{ni(\varphi-\theta)}\right] d\theta,$$

omdat de reeks onder het integraalteeken uniform convergeert voor $\varrho < R$.

De som dier reeks is:

$$\frac{\frac{\varrho}{R}e^{\varphi-\theta)}}{1-\frac{\varrho}{R}e^{(\varphi-\theta)}} = \frac{z}{Re^{\theta i}-z},$$

zoodat:

$$f(z) = \beta_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i})\left[1 + \frac{2z}{Re^{\theta i}-z}\right] d\theta =$$

$$= \beta_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{\theta i})\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\, d\theta$$

w. t. b. w.

Gevolg:

Passen we de gevonden formule toe op de constante functie: $f(z) \equiv 1$, dan vinden we:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\, d\theta = 1.$$

§ 3 – Toepassing op geheele functies. Formule van Jensen.

Onderstelling: $f(z)$ *geheel.*

De nulpunten van $f(z)$ *binnen den cirkel* $|z| = R$ *mogen zijn:* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. *Hun beeldpunten t. o. v.* $|z| = R$: $a_1', a_2', \ldots, a_\nu'$.

Bewering: $$\log f(z) = Ai + \sum_{n=1}^{\nu}\log\frac{z-a_n}{z-a_n'} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\left\{\log|f(Re^{\theta i})|-\sum_{n=1}^{\nu}\log\left|\frac{Re^{\theta i}-a_n}{Re^{\theta i}-a'_n}\right|\right\}d\theta.$$

Bewijs:

Stellen we:

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-a_1)\ldots.(z-a_\nu)}$$

dan is $g(z)$ holomorf en nergens nul voor $|z|\leqq R$. Dus is volgens de vorige stelling:

$$\log g(z)=Bi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\log|g(Re^{\theta i})|\,d\theta,$$

waarin B een op 2π en z'n veelvouden na bepaalde reëele constante is.

Hieruit volgt:

$$\log f(z)=Bi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\left\{\log|f(Re^{\theta i})|-\sum_{n=1}^{\nu}\log|Re^{\theta i}-a_n|\right\}d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{\nu}\log(z-a_n)\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Passen we de formule uit de vorige paragraaf toe op de functie:

$$\sum_{n=1}^{\nu}\log(z-a'_n),$$

dan is:

$$\sum_{n=1}^{\nu}\log(z-a'_n)=Ci+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\left\{\sum_{n=1}^{\nu}\log|Re^{\theta i}-a'_n|\right\}d\theta\ldots\quad(2)$$

Optelling van (1) en (2) levert het beweerde.

Nemen we aan weerszijden van het gelijkteeken in de gevonden formule het reëele deel, dan vinden we:

$$\log|f(z)| = \sum_{n=1}^{\nu} \log\left|\frac{(z-a_n)R}{(z-a_n')\,a_n}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\right)\log|f(Re^{\theta i})|\,d\theta$$

Dit is de *algemeene formule* van JENSEN [5] [1] voor geheele functies.

De *bijzondere* vinden we door $z=0$ te stellen en $f(0)\neq 0$, nl.: (wegens $|a_n\, a_n'| = R^2$),

$$\log|f(0)| = \sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{a_n}{R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{\theta i})|\,d\theta.$$

Deze laatste kunnen we ook als volgt bewijzen:

Daartoe beschouwen we de gelijkheid van Cauchy, gevende het aantal $\nu(R)$ der nulpunten van $f(z)$ binnen den cirkel $|z|=R$:

$$\nu(R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{\theta i}\,\frac{f'(Re^{\theta i})}{f(Re^{\theta i})}\,d\theta.$$

$[f(0)\neq 0]$

Deelt men hiervan beide leden door R en integreert men tusschen 0 en R, dan vinden we:

$$\int_0^R \frac{\nu(R)}{R}\,dR = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{f'(Re^{\theta i})}{f(Re^{\theta i})}\,e^{\theta i}\,d\theta\,dR,$$

dus:

$$\sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{R}{a_n}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{f'(Re^{\theta i})}{f(Re^{\theta i})}\,d(Re^{\theta i}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{-\log f(0) + \log f(Re^{\theta i})\Big\}\,d\theta =$$

$$= -\log f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{\theta i})\,d\theta.$$

---

[1] De getallen tusschen de vierkante haken verwijzen naar de literatuurlijst achterin.

Door het reëele deel te nemen blijkt de bewering.

§ 4 – Gevolgen van de formule van JENSEN.

Onderstelt men $f(0) = 1$, dan gaat de gevonden formule over in:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(Re^{\theta i})|\, d\theta = \sum_{|a_n|<R} \log \frac{R}{|a_n|} = \log \left| \frac{R^\nu}{a_1 a_2 \ldots a_\nu} \right|$$

Zij nu $M(R)$ het maximum van $|f(z)|$ op den cirkel $|z| = R$, dan volgt er uit:

$$\left| \frac{R^\nu}{a_1 a_1 \ldots a_\nu} \right| < M(R), \text{ voor } |a_\nu| < R \leqq |a_{\nu+1}|. \qquad (1)$$

Dit geldt echter voor *iedere* R, want als R b.v. ligt in het interval:

$$|a_{\nu+k}| \leqq R \leqq |a_{\nu+k+1}|,$$

k geheel, positief, dan heeft men vooreerst:

$$\left| \frac{R^{\nu+k}}{a_1 a_2 \ldots a_{\nu+k}} \right| < M(R)$$

ofwel:

$$\left| \frac{R^\nu}{a_1 a_2 \ldots \check{a}_\nu} \right| \cdot \left| \frac{R}{a_{\nu+1}} \right| \ldots \left| \frac{R}{a_{\nu+k}} \right| < M(R).$$

Het eerste lid hiervan is echter minstens gelijk aan dat van (1), dus blijft (1) gelden voor $R > |a_{\nu+1}|$.

Analoog bewijst men, dat (1) geldt voor $R < |a_\nu|$, zoodat we hebben:

Als gegeven is een geheele functie, met $f(0) = 1$ *en nulpunten* $a_1, a_2, \ldots$ (*gerangschikt volgens klimmende moduli*) *dan is:*

$$\frac{1}{|a_1 a_2 \ldots a_n|} < \frac{M(R)}{R^n}$$

voor iedere R *en* n.

§ 5 – Theorema van HADAMARD over het reëele deel van een geheele functie [6].

Onderstelling: *$f(z)$ is een geheele functie met reëel deel $u(z)$. Zij $u(z) < Ar^{\lambda}$ op oneindig veel cirkels om O met onbepaald groeiende stralen, en A een positieve constante, λ een geheel, positief getal of 0.*

Bewering: *a) $f(z)$ is een polynoom van den graad λ hoogstens.*
b) $f(z)$ is een polynoom van een graad lager dan λ, als de onderstelling vervuld is, hoe klein A ook is.

Bewijs:

Nemen we de notatie van § 2, dan hebben we gevonden, wegens

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \text{ en } \cos n\theta - i \sin n\theta = e^{-n\theta i}:$$

$$\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} u\,(re^{\,i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

waaruit volgt:

$$\pi r^n |\, a_n \,| \leqq \int_0^{2\pi} |\, u\,(re^{\,i})\,|\, d\theta.$$

Verder was:

$$2\pi\alpha_0 = \int_0^{2\pi} u\,(re^{\theta i})\, d\theta,$$

zoodat:

$$\pi r^n \,|\, a_n \,| + 2\pi\alpha_0 \leqq \int_0^{2\pi} \{|\, u\,(re^{\theta i})\,| + u\,(re^{\theta i})\}\, d\theta.$$

Omdat nu $|\, u \,| + u = 2u$ of 0, naargelang u positief of negatief is, komt er dus voor $n = \lambda + k$, (k geheel), in verband met het onderstelde:

$$\pi r^{\lambda+k} \,|\, a_{\lambda+k} \,| + 2\pi\alpha_0 < 4\pi A r^{\lambda},$$

ofwel:

$$|\, a_{\lambda+k} \,| < \frac{2\,|\, \alpha_0 \,|}{r^{\lambda+k}} + \frac{4A}{r^k}$$

op iedere cirkel genoemd in de onderstelling.

Als $k > 0$ nadert het tweede lid tot 0 als $r \to \infty$, zoodat

$$a_{\lambda+1},\ a_{\lambda+2} \ldots .$$ nul zijn. Q. E. D.

Het tweede deel van de bewering bewijst men op dezelfde manier, door $k = 0$ te nemen.

Natuurlijk geldt de stelling ook voor het *imaginaire* deel $v(z)$ van $f(z)$.

§ 6 – Constructie van een geheele functie, die sneller groeit dan een gegeven monotoon-stijgende functie.

Uit de stelling van de vorige paragraaf volgt, dat, als de functie $f(z)$ geen polynoom is, niet alleen haar modulus ieder nog zoo groot getal overtreft, maar bovendien, dat haar reëel deel (en natuurlijk ook haar imaginair deel) waarden aanneemt, die voor $|z|$ voldoend groot in absolute waarde grooter zijn, dan ieder vooraf gegeven getal, en zelfs grooter dan Mr^q, wat de vaste getallen M en q ook mogen zijn.

We kunnen zelfs beweren, dat er geheele functies te construeeren zijn, die sneller groeien dan iedere voorafgegeven monotoon stijgende functie:

Onderstelling: $\varphi(r)$ *is voor* $0 < r < \infty$ *monotoon stijgend.*

Bewering: *Er is een geheele functie* $f(z)$ *met* $M(r) > \varphi(r)$.

Bewijs:

We kiezen de getallen:

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots .$$

alle geheel en zóó, dat:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{n_1} > \varphi(3)\ ;\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} > \varphi(4)\ ;\ \ldots .\ ;\ \left(\frac{k+1}{k}\right)^{n_k} > \varphi(k+2)\ ;\ \ldots .$$

en stellen:

$$f(z) = \left(\frac{z}{1}\right)^{n_1} + \left(\frac{z}{2}\right)^{n_2} + \left(\frac{z}{3}\right)^{n_3} + \ldots ,$$

dan is $f(z)$ geheel en

$$M(r) = \left(\frac{r}{1}\right)^{n_1} + \left(\frac{r}{2}\right)^{n_2} + \left(\frac{r}{3}\right)^{n_3} + \ldots .$$

Zij nu: $k < r \leqq k+1$, k geheel, positief,
dan is:

$$M(r) > M(k) > \left(\frac{k}{k-1}\right)^{n_{k-1}} > \varphi(k+1) \geqq \varphi(r).$$

Voor $r > 1$ is dus $M(r) > \varphi(r)$.

De geheele functie $f(z) + C$, waarin C een constante is, voldoet dan *overal* voor $|C|$ groot genoeg aan $M(r) > \varphi(r)$.

HOOFDSTUK II

§ 7 – Orde en schijnorde van een geheele functie [2].

Zij $f(z)$ een geheele functie met nulpunten a_n:

$$0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots,$$

en ϱ een zoodanig getal, dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}}$$

convergeert of divergeert naargelang ε positief of negatief is.

Dit getal ϱ noemt men de *orde* van de geheele functie, zoodat we de volgende definitie hebben:

Een geheele functie heet van de orde ϱ, als de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}}$$

convergeert voor $\lambda > \varrho$,
en divergeert voor $\lambda < \varrho$.

Opmerkingen:

Men noemt ϱ ook wel de *convergentie-exponent* van de rij der getallen: $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$.

Voor $\lambda = \varrho$ kan de reeks convergeeren, zooals bij $a_n = n \log^2 n$, maar ook divergeeren, zooals bij $a_n = n$.

In het eerste geval noemen we ϱ de *convergentie*-orde, in het tweede geval de *divergentie*-orde van $f(z)$.

HADAMARD heeft nog een ander kenmerkend getal ingevoerd.

Zij $M(r) = \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f(z)|$ en stel, dat er 'n getal σ bestaat, zoo dat voor iedere voldoend groote r geldt:

$$M(r) < e^{r^{\sigma}} \qquad (1)$$

Hierin moet σ een positief getal zijn; immers, was σ negatief of nul, dan zou $f(z)$ in het heele vlak begrensd zijn, dus constant. Zij nu ϱ' de *onderste grens* van de waarden van σ, waarvoor (1) geldt, dan noemt Hadamard ϱ' de *schijnorde* (,,*ordre apparent*'') van $f(z)$.

Zij is dus daardoor gekarakteriseerd, dat bij willekeurig gegeven positieve ε vanaf zekere r geldt:

$$M(r) < e^{r^{\varrho'+\varepsilon}},$$

terwijl bovendien voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$:

$$M(r) > e^{r^{\varrho'-\varepsilon}}.$$

Men heeft klaarblijkelijk:

$$\varrho' = \lim_{r\to\infty}\ \sup.\ \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

In het vervolg beschouwen we alleen geheele functies, waarvoor deze schijnorde *eindig* is, dus $\varrho' < \infty$.

§ 8 – Verband tusschen orde en schijnorde.

Hulpstelling:

Voor iedere geheele functie $f(z)$ met $f(0) = 1$, geldt:

$$\log M(r) \geqq n(\tfrac{1}{2}r)\log 2,$$

waarin $n(r)$ het aantal nulpunten van $f(z)$ binnen den cirkel $|z| = r$ voorstelt.

Bewijs:

Uit de formule van JENSEN volgt:

$$\log M(r) \geqq \int_0^r \frac{n(r)}{r}\,dr \geqq \int_{\frac{1}{2}r}^r \frac{n(r)}{r}\,dr \geqq n(\tfrac{1}{2}r)\log 2.$$

w. t. b. w.

De functie $n(r)$ groeit dus voor $r \to \infty$ niet sneller dan de functie $\log M(r)$.

We kunnen nu bewijzen, dat de schijnorde van een geheele functie altijd *minstens* gelijk is aan de orde der functie.

Stelling van HADAMARD [3]:
Heeft $f(z)$ een eindige schijnorde ϱ', dan is $f(z)$ van eindige orde, terwijl $\varrho \leqq \varrho'$.

Bewijs:
Uit de voorafgaande hulpstelling volgt:

$$n(r) \leqq \frac{\log M(2r)}{\log 2} . \qquad (1)$$

Nu is als $\varepsilon > 0$, wegens het onderstelde, op den duur:

$$M(r) < e^{r^{\varrho'+\varepsilon}},$$

waaruit volgt:

$$\log M(2r) < 2^{\varrho'+\varepsilon}\, r^{\varrho'+\varepsilon},$$

zoodat wegens (1):

$$n(r) \leqq \frac{2^{\varrho'+\varepsilon} r^{\varrho'+\varepsilon}}{\log 2},$$

en dit is op den duur weer kleiner dan $r^{\varrho'+2\varepsilon}$. Daar voor iedere $k > 0$:

$$n \leqq n(r_n + k) < (r_n + k)^{\varrho'+2\varepsilon},$$

waarin $r_n = |a_n|$,

geldt op den duur:

$$r_n > n^{\frac{1}{\varrho'+2\varepsilon}}$$

ofwel:

$$r_n^{\varrho'+3\varepsilon} > n^{\frac{\varrho'+3\varepsilon}{\varrho'+2\varepsilon}},$$

waaruit volgt, dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\varrho'+3\varepsilon}}$$

convergeert voor iedere $\varepsilon > 0$,
waarmee de stelling bewezen is.

§ 9 – Voorbeelden van geheele functies van eindige schijnorde en orde.

Stelling:

Is $g(z)$ een polynoom van den graad q, dan heeft de geheele functie:

$$f(z) = e^{g(z)}$$

de schijnorde q.

Bewijs:

Men heeft: $$|f(z)| = e^{R\{g(z)\}}.$$

Stelt men:

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_q z^q,$$

waarin: $$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad (n = 0, 1, \ldots q)$$

en $$z = re^{i\varphi}$$

dan is: $\Re\{g(z)\} = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots + b_q r^q$

waarin:

$$b_n = \alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi, \quad (n = 0, 1, \ldots q)$$

zoodat:

$$|f(z)| = e^{b_q r^q + \cdots + b_0}.$$

$\sqrt{\alpha_q^2 + \beta_q^2} = \sigma$ is het maximum van b_q voor $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, dus is voor voldoend groote r en $\varepsilon > 0$:

$$|f(z)| \leqq e^{\sigma(1+\varepsilon)r^q}.$$

Verder is voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$ en $\varepsilon > 0$:

$$\underset{|z| = r}{\text{Max.}} |f(z)| \geqq e^{\sigma(1-\varepsilon)r^q},$$

zoodat $f(z)$ van de schijnorde q is.

Bijgevolg is e^z een geheele functie van de schijnorde 1.

Evenzoo: $\sin z$ en $\cos z$.

Immers: $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

zoodat: $$M(r) < \frac{e^r + e^r}{2} = e^r,$$

terwijl voor $z = ir$ bij iedere $\varepsilon > 0$ en iedere voldoend groote r geldt:

$$|f(z)| \geqq \frac{e^r - e^{-r}}{2} > e^{(1-\varepsilon)r}.$$

De geheele functie:

$$f(z) = e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!}$$

is van de schijnorde $\frac{1}{2}$, daar vooreerst:

$$|f(z)| < e^{\sqrt{r}} + e^{\sqrt{r}} = 2e^{\sqrt{r}} < e^{(1+\varepsilon)r^{\frac{1}{2}}}, \quad (\varepsilon > 0),$$

terwijl bovendien voor iedere voldoend groote $z = r > 0$ geldt:

$$|f(z)| = e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}} > e^{(1-\varepsilon)r^{\frac{1}{2}}}. \quad (\varepsilon > 0).$$

Geheele functies van bepaalde orde:

a) Stellen we $|a_n| = \sqrt{n}$, zoodat

$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^2 = n^{-1} \text{ en } \left|\frac{1}{a_n}\right|^{2+\varepsilon} = n^{-(1+\varepsilon/2)},$$

dan is een geheele functie, die deze a_n tot nulpunten heeft, van de orde 2, terwijl $\varrho = 2$, *divergentie-orde* is.

b)
$$|a_n| = \sqrt{n} \cdot \log n.$$
$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^2 = n^{-1} \cdot (\log n)^{-2},$$
$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^{2-\varepsilon} = n^{-(1-\varepsilon/2)} \cdot (\log n)^{-(2-\varepsilon)},$$

zoodat $\varrho = 2$ *convergentie-orde* is.

c)
$$|a_n| = \sqrt[3]{n^2},$$
$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\frac{3}{2}} = n^{-1}; \quad \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\frac{3}{2}+\varepsilon} = n^{-(1+\varepsilon/2)},$$

waaruit volgt, dat $\varrho = \frac{3}{2}$ *divergentie-orde* is.

§ 10 – Schijnorde van de som, respectievelijk het product van 2 geheele functies.

Stelling 1:

Zijn $f_1(z)$ en $f_2(z)$ twee geheele functies, respectievelijk van de schijnorden ϱ_1' en ϱ_2', terwijl $\varrho_1' > \varrho_2'$, dan heeft:

$$g(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

de schijnorde ϱ_1'.

Bewijs:

Vooreerst hebben we voor iedere voldoend groote r en willekeurige $\varepsilon > 0$:

$$\underset{|z|=r}{\text{Max.}} |g(z)| \leqq \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f_1(z)| + \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f_2(z)| <$$

$$< e^{r^{\varrho_1' + \frac{1}{2}\varepsilon}} + e^{r^{\varrho_2' + \frac{1}{2}\varepsilon}} < 2e^{r^{\varrho_1' + \frac{1}{2}\varepsilon}} < e^{r^{\varrho_1' + \varepsilon}}.$$

Verder is voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$ en $\varepsilon > 0$:

$$\underset{|z|=r}{\text{Max.}} |g(z)| \geqq \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f_1(z)| - \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f_2(z)| >$$

$$> e^{r^{\varrho_1' - \frac{1}{2}\varepsilon}} - e^{r^{\varrho_2' + \frac{1}{2}\varepsilon}} = e^{r^{\varrho_1' - \frac{1}{2}\varepsilon}} \left(1 - e^{r^{\varrho_2' + \frac{1}{2}\varepsilon} - r^{\varrho_1' - \frac{1}{2}\varepsilon}}\right)$$

$$> \tfrac{1}{2} e^{r^{\varrho_1' - \frac{1}{2}\varepsilon}} > e^{r^{\varrho_1' - \varepsilon}}, \text{ als } \varrho_1' - \tfrac{1}{2}\varepsilon > \varrho_2' + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

wat we mogen aannemen.

Stelling 2:

Zijn $f_1(z)$ en $f_2(z)$ twee geheele functies, respectievelijk van de schijnorden ϱ_1' en ϱ_2', terwijl $\varrho_1' \geqq \varrho_2'$, dan is

$$g(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$$

hoogstens van de schijnorde ϱ_1'.

Bewijs:

Voor voldoend groote $|z| = r$ en iedere $\varepsilon > 0$ hebben we:

$$|f_1(z)| < e^{r^{\varrho_1' + \frac{1}{2}\varepsilon}} \text{ en } |f_2(z)| < e^{r^{\varrho_2' + \frac{1}{2}\varepsilon}},$$

zoodat wegens $\varrho_1' \geqq \varrho_2'$:

$$|g(z)| < e^{2r^{\rho'+\frac{1}{2}\epsilon}} < e^{r^{\rho'+\epsilon}},$$

waaruit de stelling volgt.

§ 11 – De maximale term in de reeksontwikkeling van f(z).

Onderstelling: $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, *geheel met eindige schijnorde* ϱ'.

$\mu(r)$ *is de grootste der moduli van de termen der machtreeks voor* $|z| = r$.

Bewering: *Voor iedere* $\varepsilon > 0$ *geldt oneindig vaak (d. w. z. voor* ∞ *veel tot* ∞ *groeiende* r*):*

$$\mu(r) > e^{r^{\rho'-\epsilon}}.$$

Bewijs:

Ontkenning beteekent, dat er een $\varepsilon > 0$ is, zóó dat voor r voldoend groot:

$$\mu(r) \leqq e^{r^\sigma} \qquad (\sigma = \varrho' - \varepsilon)$$

ofwel:

$$|a_n| r^n \leqq e^{r^\sigma}$$

en

$$|a_n| \leqq \frac{e^{r^\sigma}}{r^n}.$$

Voor *iedere* $r > 0$ is dan met zekere positieve constante A, die niet van n afhangt:

$$|a_n| < A \frac{e^{r^\sigma}}{r^n}.$$

Het minimum van het rechterlid wordt bereikt voor:

$$r = \left(\frac{n}{\sigma}\right)^{1/\sigma},$$

zoodat:

$$|a_n| < A \frac{e^{n/\sigma}}{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n/\sigma}} = A \left(\frac{e\sigma}{n}\right)^{n/\sigma}.$$

Bepaal nu k uit:

$$k = [2^\sigma e \sigma r^\sigma],$$

dan hebben we:

$$M(r) < A \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{e\sigma}{n}\right)^{n/\sigma} . r^n + A \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{e\sigma}{n}\right)^{n/\sigma} . r^n + B$$

$$< Ak . r^k . e^{k/\sigma} . \sigma^{k/\sigma} + 2A \left(\tfrac{1}{2}\right)^k + B$$

$$< Ak . r^k . e^{k/\sigma} . \sigma^{k/\sigma} + 2A + B,$$

zoodat op den duur:

$$M(r) < e^{r^{\sigma+\epsilon/2}} = e^{r^{\rho'-\epsilon/2}}$$

wat onmogelijk is.

Opmerking:

Natuurlijk is voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$ en $\varepsilon > 0$

ook: $$\mu(r) < e^{r^{\rho'+\epsilon}}.$$

De schijnorde van $f(z)$ wordt dus bepaald door die van de *„maximale term"* $\mu(r)$.

§ 12 – Ongelijkheden, waaraan de coëfficiënten van de reeksontwikkeling van f (z) voldoen.

Stelling:

Heeft de geheele functie $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *de eindige schijnorde* ϱ', *dan is bij willekeurig kleine* $\varepsilon > 0$:

1) *voor n groot genoeg:*

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{n^{1/(\rho'+\epsilon)}}$$

2) *oneindig vaak:*

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{n^{1/(\rho'-\epsilon)}} .$$

Bewijs:

1) Volgens de schatting van CAUCHY is voor iedere $|z| = r > 0$ en iedere n:

$$|a_n| \leqq \frac{M(r)}{r^n} .$$

Er is dus een positief getal A, zoo dat voor alle $|z| = r > 0$

geldt:

$$|a_n| \leqq A \frac{e^{r^{\rho'+\epsilon}}}{r^n}.$$

Nu wordt het minimum van het rechterlid bereikt voor:

$$r = \sqrt[\rho'+\epsilon]{\frac{n}{\varrho'+\varepsilon}}.$$

Vult men deze waarde voor r in, dan blijkt de juistheid der bewering.

2) Ontkenning beteekent, dat er een $\varepsilon > 0$ is, zoo dat op den duur:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1}{n^{1/(\rho'-\epsilon)}},$$

ofwel: $$|a_n| \leqq n^{-n/(\rho'-\epsilon)} = n^{-\lambda n}. \quad \left(\lambda = \frac{1}{\varrho'-\varepsilon}\right).$$

Er is weer een positief getal A te bepalen, zóó dat *steeds:*

$$|a_n| \leqq A \,.\, n^{-\lambda n},$$

zoodat:

$$M(r) \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n^\lambda}\right)^n + B,$$

waarin B een constante voorstelt.

Bepaal nu k uit: $\quad k = [(2r)^{1/\lambda}]$,

dan vinden we:

$$M(r) \leqq A \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{r}{n^\lambda}\right)^n + A \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{r}{n^\lambda}\right)^n + B$$

$$< A k r^k + 2A \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} + B$$

$$< A\,(2r)^{1/\lambda} \,.\, r^{(2r)^{1/\lambda}} + 2A + B,$$

dus op den duur:

$$M(r) < e^{r^{1/\lambda + \varepsilon/2}} = e^{r^{\rho' - \varepsilon/2}}$$

wat een contradictie oplevert.

Opmerking:

Met deze ongelijkheden bewijst men gemakkelijk de volgende stelling:

De schijnorde van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *is dezelfde als de schijnorde van*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n.$$

§ 13 – Een noodige en voldoende voorwaarde voor eindige schijnorde ϱ' [11].

Uit de ongelijkheden der vorige paragraaf volgt de volgende:

Stelling:

Een noodige en voldoende voorwaarde, waaronder een geheele functie $f(z)$ *de eindige schijnorde* ϱ' *heeft, is, dat*

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n} = \frac{1}{\varrho'}.$$

Bewijs:

De voorwaarde is *noodig*, immers heeft $f(z)$ de schijnorde ϱ', dan is volgens de vorige paragraaf voor voldoend groote n en $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} > n^{1/(\varrho'+\varepsilon)}$$

waaruit volgt:

$$\frac{-\log |a_n|}{n \log n} > \frac{1}{\varrho' + \varepsilon}.$$

Bijgevolg is

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n} \geqq \frac{1}{\varrho'}.$$

Verder is oneindig vaak:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} < n^{1/(\varrho'-\varepsilon)},$$

dus:

$$\frac{-\log |a_n|}{n \log n} < \frac{1}{\varrho' - \varepsilon}$$

m. a. w.

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n} \leqq \frac{1}{\varrho'};$$

zoodat we vinden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n} = \frac{1}{\varrho'}.$$

Dat de voorwaarde ook *voldoende* is, blijkt als volgt:

Is $$\lim_{n=\infty} \frac{-\log |a_n|}{n \log n} = \frac{1}{\varrho'}$$

dan volgen hieruit de ongelijkheden der vorige stelling. Uit de eerste ongelijkheid volgt dan, dat voor voldoend groote n en $\varepsilon > 0$:

$$|a_n| r^n < \left(\frac{r}{n^{1/(\rho'+\varepsilon)}}\right)^n,$$

zoodat „de maximale term" $\mu(r)$ kleiner is dan het maximum van het tweede lid van de ongelijkheid, dat bereikt wordt voor

$$n = \frac{1}{e} r^{\rho'+\varepsilon}.$$

Bijgevolg vinden we, als we deze waarde voor n invullen:

$$\mu(r) < e^{r^{\rho'+\varepsilon}} \text{ vanaf zekere } r.$$

Evenzoo bewijst men, dat voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$ en $\varepsilon > 0$:

$$\mu(r) > e^{r^{\rho'-\varepsilon}}.$$

De schijnorde van $\mu(r)$ is dus ϱ', waaruit in verband met een vorige stelling de bewering volgt.

HOOFDSTUK III

§ 14 – Algemeene gedaante van een geheele functie zonder nulpunten.

Stelling:

De algemeene vorm van een geheele functie zonder nulpunten is:

$$e^{H(z)},$$

waarin $H(z)$ een willekeurige geheele functie voorstelt.

Bewijs:

Zij $G(z)$ een geheele functie zonder nulpunten, dan is $\frac{G'(z)}{G(z)}$ ook een geheele functie, omdat $G(z)$ nergens nul is.

Hieruit volgt, dat

$$H(z) = \int_0^z \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz = \log G(z) - \log G(0)$$

ook een geheele functie is, omdat $\int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz$ over iederen gesloten weg Γ nul is.

We vinden dus:

$$G(z) = e^{H(z)+C},$$

waarin C een constante is.

Daar omgekeerd de functie $e^{H(z)}$ een geheele functie is zonder nulpunten, wanneer $H(z)$ een willekeurige geheele functie voorstelt, levert $e^{H(z)}$ de algemeene gedaante voor geheele functies zonder nulpunten.

Gevolg:

Zijn $f(z)$ en $g(z)$ twee geheele functies met *dezelfde* nulpunten, dan is hun quotiënt weer een geheele functie, echter *zonder* nulpunten, dus van den vorm $e^{H(z)}$, zoodat

$$f(z) = e^{H(z)} \cdot g(z).$$

Zij $f(z)$ een geheele functie *zonder* nulpunten, zoodat:

$$f(z) = e^{H(z)},$$

waarin $H(z)$ een geheele functie is.

Is nu bovendien $f(z)$ van *eindige* schijnorde, dan moet $H(z)$ een *polynoom* zijn. Immers heeft $f(z)$ de schijnorde ϱ', dan is, wegens $\Re H(z) = \log |f(z)|$, voor voldoend groote $|z| = r$ en $\varepsilon > 0$:

$$\Re H(z) < r^{\rho'+\epsilon},$$

dus volgens § 5 is $H(z)$ een polynoom met graad $q \leqq \varrho' + \varepsilon$, dus $q \leqq \varrho'$, waaruit volgt $q \leqq [\varrho']$.

Daar echter volgens § 9 de schijnorde van $e^{H(z)}$, waarin $H(z)$ een *polynoom* voorstelt, gelijk moet zijn aan den graad van $H(z)$, besluiten we hieruit, dat de geheele functie $e^{H(z)}$ zónder nulpunten alleen van *geheele*, eindige schijnorde kan zijn, ofwel:

Alle geheele functies van eindige, niet geheele schijnorde moeten noodzakelijk nulpunten hebben.

Uit stelling 1 van § 10 volgt in het bijzonder, dat de schijnorde van $f(z)$ dezelfde is als van $f(z) + C$, indien C een of andere constante voorstelt. In verband met het voorafgaande kunnen we dus zeggen:

Geheele functies van eindige, niet geheele schijnorde nemen iedere waarde aan.

§ 15 – Geheele functies met een eindig aantal nulpunten.

Beschouwen we nu een geheele functie $f(z)$ van eindige schijnorde met een *eindig* aantal nulpunten. Zijn deze $a_1, a_2, \ldots . a_n$, dan is:

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z - a_1) \ldots . (z - a_n)}$$

een geheele functie *zonder* nulpunten en van *dezelfde* eindige schijnorde als $f(z)$, want voor iedere voldoend groote r en $\varepsilon > 0$ hebben we:

$$\operatorname*{Max.}_{|z|=r} |F(z)| < \frac{e^{r^{\rho'+\epsilon}}}{1} = e^{r^{\rho'+\epsilon}},$$

terwijl voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$:

$$\underset{|z|=r}{\text{Max.}} \mid F(z) \mid > \frac{e^{r^{\rho'}-\epsilon}}{r^n+1} > e^{r^{\rho'}-\epsilon'}.$$

$$(\varepsilon' > \varepsilon > 0)$$

Dan is echter $F(z)$ van den vorm $e^{H(z)}$, ofwel:

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots.(z-a_n)\, e^{H(z)},$$

waarin $H(z)$ een polynoom van den graad ϱ' moet zijn, bijgevolg moet ϱ' *geheel* zijn.

We vinden dus het volgende resultaat:

Geheele functies van eindige schijnorde met een eindig aantal nulpunten moeten van geheele schijnorde zijn.

Opmerking:

Het omgekeerde is niet het geval, bijvoorbeeld:

$\cos(z^q) - \sin(z^q)$ is van de schijnorde q, dus van geheele schijnorde, als q geheel is; heeft echter *oneindig veel* nulpunten, nl.:

$$z = \sqrt[q]{(\pm\nu + \tfrac{1}{4})\pi}. \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots.).$$

Verder vinden we nog in verband met de vorige paragraaf:

Geheele functies van eindige, niet geheele schijnorde nemen iedere waarde oneindig vaak aan.

§ 16 – Geheele functies met een oneindig aantal nulpunten. Stelling van Weierstrasz.

Stelling:

Heeft de geheele functie $f(z)$ de eindige orde ϱ, dan heeft men, als $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ de nulpunten van $f(z)$ voorstellen:

$$f(z) = e^{H(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + \frac{1}{2}(z/a_n)^2 + \ldots. + 1/p\,(z/a_n)^p}$$

waarin $p \leqq \varrho \leqq p+1$, en $H(z)$ een geheele functie voorstelt.

Bewijs:

Stellen we:

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + \ldots. + 1/p\,(z/a_n)^p} = \varphi_n(z),$$

dan behoeven we slechts te bewijzen, dat het oneindige product

$\prod_1^\infty \varphi_n(z)$ uniform convergeert binnen ieder begrensd gebied G, dus een geheele functie voorstelt, klaarblijkelijk met *dezelfde* nulpunten als $f(z)$, waaruit dan in verband met een vorige stelling de bewering volgt.

In ieder begrensd gebied G is $|z| < M$.

Zij nu n_0 zóó, dat $|a_n| > 2M$ voor $n > n_0$. Aangezien voor $n > n_0$:

$$\log \varphi_n(z) = -\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1} - \frac{1}{p+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+2} - \ldots,$$

geldt overal in G voor $n > n_0$:

$$|\log \varphi_n(z)| < \frac{2M^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} < 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{p+1}.$$

$\sum_{n_0}^\infty \log \varphi_n(z)$ convergeert dus uniform in G, dus ook $\prod_{n_0}^\infty \varphi_n(z)$.

Opmerking:

We hebben stilzwijgend $f(0) \neq 0$ ondersteld. Is $f(0) = 0$, dan moet de uitdrukking voor $f(z)$ nog vermenigvuldigd worden met z^ν, als 0 een ν-voudig nulpunt is van $f(z)$.

§ 17 – Definitie van het geslacht. Hulpstelling.

Wanneer in het bijzonder de functie $H(z)$ van de vorige stelling een *polynoom* is van den graad q, dan noemt men het *grootste* der getallen p en q het *geslacht* der functie $f(z)$. (LAGUERRE).

Gevolg:

Is dus het geslacht van een functie p, dan convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1}.$$

Is de functie van het *geslacht nul*, dan is

$$\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|$$

convergent, zoodat $f(z)$ dan te schrijven is in de gedaante:

$$f(z) = C \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

waarin C een constante voorstelt.

We behandelen nu eerst de volgende

Hulpstelling [1]:

Zij p geheel, niet negatief en $p < \sigma \leqq p + 1$, dan is er een getal $K = K(\sigma)$, zoo dat voor iedere complexe u geldt:

$$\left| (1-u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}} \right| \leqq e^{K|u|^\sigma}.$$

Bewijs:

Zij $p > 0$; voor $|u| < 1$ hebben we:

$$(1-u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}} = e^{\log(1-u) + u + \ldots + \frac{u^p}{p}} = e^{-\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \ldots}$$

waaruit volgt:

$$\left| (1-u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots \frac{u^p}{p}} \right| < e^{|u|^{p+1} + |u|^{p+2} + \ldots} \leqq e^{\frac{|u|^\sigma}{1-|u|}} < e^{2|u|^\sigma}$$

voor $|u| \leqq \frac{1}{2}$.

Daar echter $\sigma > p$, groeit voor $|u| \to \infty$ het laatste lid van de vorige ongelijkheid sneller dan de maximale modulus van het eerste lid, zoodat de ongelijkheid ook nog zal gelden voor iedere waarde van u, waarvan de modulus een bepaalde eindige limiet λ overschrijdt, m. a. w. het bovenstaande geldt voor

$$|u| \leqq \tfrac{1}{2} \text{ en voor } |u| \geqq \lambda.$$

Tenslotte kunnen we klaarblijkelijk een positief getal α vinden, zoo dat:

$$\left| (1-u)\, e^{u + u^2/2 + \ldots + u^p/p} \right| < e^{\alpha|u|^\sigma}$$

voor $\frac{1}{2} < |u| < \lambda$.

Kiezen we nu voor K het grootste der getallen 2 en α, dan zal dus de ongelijkheid gelden voor iedere u, waarmee de stelling bewezen is.

Voor $p = 0$ geldt de stelling ook, welke dan als volgt luidt:

Zij $0 < \sigma \leqq 1$, dan bestaat er een getal $K = K(\sigma)$, zoo dat voor iedere complexe u geldt:

$$|1-u| \leqq e^{K|u|^\sigma}.$$

Bewijs:

Voor $|u| < 1$ is:

$$|1-u| \leqq 1 + |u| \leqq 1 + \frac{|u|^\sigma}{1!} \leqq e^{1 \cdot |u|^\sigma} .$$

Bepaal nu k uit:

$$k = \left[1 + \frac{1}{\sigma}\right]$$

en stel $K = \sqrt[k]{k!}$, dan is voor $|u| \geqq 1$:

$$|1-u| \leqq 1 + |u| \leqq 1 + \frac{K^k |u|^{k\sigma}}{k!} < e^{K \cdot |u|^\sigma} .$$

Aangezien $K > 1$ is, is hiermede de stelling bewezen.

§ 18 – Stelling van Poincaré.

Stellen we ter afkorting:

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n + \frac{1}{2}(z/a_n)^2 + \ldots + 1/p\,(z/a_n)^p} = E\left(\frac{z}{a_n} ; p\right)$$

dan gaan we nu een bovenste grens bepalen van de modulus der functie:

$$f(z) = \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n} ; p\right)$$

op den cirkel $|z| = r$.

Onderstellen we eerst, dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho \quad \textit{convergeert,}$$

dan is $p = \varrho - 1$. Zij $\varepsilon > 0$, dan kunnen we een geheel getal m zóó bepalen, dat:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho < \frac{\varepsilon}{2K} ,$$

waarin K het getal is, dat in de hulpstelling van de vorige paragraaf voorkomt, zoodat:

$$\left| \prod_{m+1}^\infty E\left(\frac{z}{a_n} ; p\right) \right| < e^{Kr^\rho \sum_{m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho} < e^{\frac{\epsilon}{2} r^\rho}$$

voor $|z| \leqq r$.

Daar echter in dit geval $\varrho > p$ is, geldt voor het uit een *eindig* aantal factoren bestaande product $\prod_1^m$ voor $|z| < r$:

$$\left| \prod_1^m E\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \right| < e^{\epsilon/2 |z|^\rho} < e^{\epsilon/2 r^\rho},$$

mits r groot genoeg is, zoodat we voor $|z| = r$ zullen hebben, voor r voldoend groot:

$$|f(z)| < e^{\epsilon r^\rho}.$$

Onderstellen we in de tweede plaats, dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^\rho \qquad \textit{divergeert},$$

dan heeft men $\varrho < p + 1$.

Fixeeren we nu $\varepsilon > 0$ zoo, dat

$$\varrho + \frac{\varepsilon}{2} \leqq p + 1,$$

en gebruiken we de vorige hulpstelling met:

$$\sigma = \varrho + \frac{\varepsilon}{2},$$

dan vinden we:

$$\left| E\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \right| < e^{K \left| \frac{r}{a_n} \right|^{\rho + \epsilon/2}}.$$

Omdat echter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho+\epsilon/2} \qquad \textit{convergeert},$$

besluiten we eruit, dat:

$$\left| \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \right| < e^{K r^{\rho+\epsilon/2} \sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho+\epsilon/}}.$$

en bijgevolg: $$|f(z)| < e^{r^{\rho+\epsilon}}$$

vanaf zekere r.

In het bijzonder volgt uit het voorafgaande, dat voor iedere geheele functie van het *geslacht* p geldt:

$$|f(z)| < e^{\varepsilon r^{p+1}}$$

vanaf zekere r, voor iedere willekeurig kleine $\varepsilon > 0$.

Dit is de stelling van POINCARÉ [9].

Opmerking:

Uit de definitie van de schijnorde volgt in verband met het vorige:

Het geslacht van een geheele functie is hoogstens gelijk aan de schijnorde der functie.

Onder een *kanonisch product* verstaan we een product van den vorm:

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}\,;\,p\right) \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}.$$

Uit het vorige blijkt nog, dat voor een kanonisch product $\varrho' \leqq \varrho$.

Aangezien steeds geldt $\varrho \leqq \varrho'$, hebben we dus de volgende *Stelling:*

Voor een kanonisch product zijn de orde en de schijnorde gelijk.

Hieruit volgt nu, dat bij iedere geheele functie van eindige, *niet geheele* schijnorde, orde en schijnorde gelijk zijn.

Immers, is:

$$f(z) = e^{H(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}\,;\,p\right) = e^{H(z)}\, P(z),$$

waarin $H(z)$ een polynoom in z voorstelt, dan zou, als voor $f(z)$ $\varrho < \varrho'$ was, de schijnorde van $P(z)$ ook kleiner dan ϱ' zijn en moest de factor $e^{H(z)}$ de schijnorde ϱ' hebben, want was deze $< \varrho'$, dan zou de schijnorde van $f(z)$ ook $< \varrho'$ zijn. $e^{H(z)}$ kan echter alleen de schijnorde ϱ' hebben, indien ϱ' geheel is.

Is de schijnorde *geheel*, dan kan de orde kleiner zijn dan de schijnorde.

§ 19 — Geheele functies van 't geslacht nul.

Beschouwen we nu een geheele functie $f(z)$ van *'t geslacht nul* en zij weer $M(r) = \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |f(z)|$.

Stelling 1:

Is van een geheele functie van 't geslacht nul de orde ϱ kleiner dan 1, dan is de orde gelijk aan de schijnorde [1].

Bewijs:

$$\text{Zij } \varepsilon > 0 \text{ en } \varrho + \varepsilon \leqq 1.$$

Uit de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}}$$

volgt, dat er een natuurlijk getal m bestaat zóó, dat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{m+n}} \right|^{\rho+\epsilon} < \varepsilon.$$

Volgens de hulpstelling van § 17 is er een getal K zoo, dat:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z}{a_{m+n}} \right| \leqq e^{K \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_{m+n}|}\right)^{\rho+\epsilon}} < e^{K \epsilon r^{\rho+\epsilon}}.$$

Dan is:

$$M(r) < e^{K\epsilon r^{\rho+\epsilon}} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right),$$

hetgeen voor voldoend groote r kleiner is dan:

$$e^{r^{\rho+2\epsilon}} \cdot e^{r^{\epsilon}} = e^{r^{\rho+2\epsilon} + r^{\epsilon}} < e^{r^{\rho+3\epsilon}}$$

waaruit volgt:

$$\varrho' = \lim_{r \to \infty} \sup. \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leqq \varrho.$$

Aangezien steeds: $\varrho \leqq \varrho'$, volgt er uit, dat $\varrho = \varrho'$.

Stelling 2:

Voor iedere geheele functie van het geslacht nul is:

$$\log M(r) = o(r).$$

---

[1] Deze stelling volgt ook uit § 18, want is $f(z)$ van geslacht nul, dan is $f(z)$ een kanonisch product, dus $\varrho' = \varrho$.

Bewijs:

Omdat $f(z)$ van 't geslacht nul is, hebben we:

$$f(z) = C \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

C = constante, terwijl de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right| \quad \text{convergeert.}$$

Hieruit volgt:

$$M(r) \leqq |C| \left(1 + \frac{r}{|a_1|}\right)\left(1 + \frac{r}{|a_2|}\right) \cdots$$

Zij nu $\varepsilon > 0$, dan is er een natuurlijk getal m zóó, dat:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon,$$

derhalve:

$$M(r) \leqq |c| \prod_1^m \left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) e^{\sum_{m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| r} < |C| e^{\varepsilon r} \prod_1^m \left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right)$$

waaruit voor voldoend groote r volgt:

$$M(r) < e^{2\varepsilon r}, \text{ d. w. z. } \log M(r) = o(r).$$

Opmerking:

Dat de voorwaarde: $\log M(r) = o(r)$ *niet voldoende* is voor het nul zijn van het geslacht van een geheele functie blijkt uit het volgende voorbeeld van POINCARÉ [9].

Stel: $$f(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \log^2 n}\right).$$

Het geslacht $p = 1$.

Echter is toch $\log M(r) = o(r)$, immers:

$$M(r) = \prod_2^\infty \left(1 + \frac{r^2}{n^2 \log^2 n}\right),$$

dus $$\log M(r) = \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 + \frac{r^2}{n^2 \log^2 n}\right).$$

Zij $\varepsilon > 0$, dan bepalen we k uit:

$$\varepsilon r < k \log k \leqq \varepsilon r + 1,$$

dan is: $\log k \sim \log r$.

Nu is:

$$\log M(r) = \sum_{n=2}^{k} \log\left(1 + \frac{r^2}{n^2 \log^2 n}\right) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{r^2}{n^2 \log^2 n}\right)$$

zoodat:

$$\log M(r) < k \log\left(1 + \frac{r^2}{2^2 \log^2 2}\right) + \int_k^{\infty} \log\left(1 + \frac{r^2}{x^2 \log^2 x}\right) dx,$$

dus:

$$\log M(r) < k \log\left(1 + \frac{r^2}{2^2 \log^2 2}\right) + r^2 \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^2 \log^2 x}.$$

Het eerste stuk in het tweede lid dezer ongelijkheid is

$$\sim \frac{\varepsilon r}{\log r} \cdot 2 \log r = 2\,\varepsilon r.$$

Het tweede stuk is kleiner dan:

$$\frac{r^2}{\log^2 k} \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{r^2}{\log^2 k} \cdot \frac{1}{k} \backsim \frac{r^2}{\log^2 r} \cdot \frac{\log r}{\varepsilon r} = \frac{r}{\varepsilon \log r},$$

waaruit volgt, dat

$$\frac{\log M(r)}{r} \to 0 \text{ voor } r \to \infty.$$

§ 20 – Vervolg.

Stelling:

De convergentie van de reeks:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^2}$$

is voldoende voor $p = 0$.

Bewijs:

Is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ een reeks van afnemende positieve termen, die convergeert, dan geldt: $nu_n \to 0$ voor $n \to \infty$.

Passen we dit toe op de gegeven reeks, dan vinden we:

$$\frac{\log M(r)}{r} \to 0 \text{ voor } r \to \infty$$

dus ook:

$$\frac{n(r)}{r} \to 0 \text{ voor } r \to \infty$$

wegens de hulpstelling van § 8.

Stellen we $|a_n| = r_n$, dan is:

$$\sum_{1 \leqq r_n < k} \frac{1}{r_n} = \sum_{1 \leqq r_n < 2} + \sum_{2 \leqq r_n < 3} + \ldots + \sum_{k-1 \leqq r_n < k} \leqq$$

$$\leqq \Big\{n(2)-n(1)\Big\}\frac{1}{1} + \Big\{n(3)-n(2)\Big\}\frac{1}{2} + \ldots + \Big\{n(k)-n(k-1)\Big\}\frac{1}{k-1} =$$

$$= -n(1) + \frac{1}{1.2}n(2) + \frac{1}{2.3}n(3) + \ldots + \frac{1}{(k-2)(k-1)}n(k-1) + \frac{n(k)}{k-1} =$$

$$= -n(1) + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{n(r)}{r(r-1)} + \frac{n(k)}{k-1}.$$

Nu is:

$$\sum_{r=2}^{k-1} \frac{n(r)}{r(r-1)} < \sum_{r=2}^{k-1} \frac{\log M(2r)}{r(r-1)} \leqq \sum_{r=2}^{k-1} \frac{\log M(r)}{r^2},$$

dus begrensd voor $k \to \infty$ wegens de gegeven convergentie.

Verder is:

$$\frac{n(k)}{k-1} \to 0 \text{ voor } k \to \infty,$$

waaruit tenslotte de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \text{ volgt, m. a. w. } p = 0 \text{ volgens § 22.}$$

Noodzakelijk is de voorwaarde echter niet, hetgeen moge blijken uit het volgende voorbeeld:

Stel:
$$f(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n \log^2 n}\right),$$

dan is $f(z)$ een geheele functie met $p = 0$.

Verder is, als we de nulpunten $n \log^2 n$ nog voorloopig r_n stellen,

$$\log M(r) = \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) = \int_2^{\infty} \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) dn =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left[n \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) + \int_2^{r_n} \frac{r\, n(x)}{x(x+r)}\, dx \right] =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{r\, n(x)}{x(x+r)}\, dx.$$

Nu is in ons voorbeeld

$$n(x) \backsim \frac{x}{\log^2 x},$$

zoodat:

$$\log M(r) \backsim \int_2^{\infty} \frac{r dx}{(x+r)\log^2 x}.$$

Fixeeren we k en schrijven we:

$$\log M(r) \backsim \int_2^{kr} \frac{r dx}{(x+r)\log^2 x} + \int_{kr}^{\infty} \frac{r dx}{(x+r)\log^2 x},$$ dan is

volgens de middelwaarde-stelling de eerste integraal gelijk aan:

$$\mu_1 \int_2^{kr} \frac{dx}{\log^2 x} > \frac{\mu_1}{\log^2 kr} \int_2^{kr} dx \backsim \mu_1 \frac{kr}{\log^2 kr} \backsim \mu_1 \frac{kr}{\log^2 r}$$

waarin:

$$\frac{1}{k+1} < \mu_1 < 1.$$

Verder is de tweede integraal gelijk aan:

$$r \int_{kr}^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{r}{x}\right) x \log^2 x} = r\mu_2 \int_{kr}^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = \mu_2 \frac{r}{\log kr} \backsim \mu_2 \frac{r}{\log r},$$

$$\text{met } \frac{k}{k+1} < \mu_2 < 1.$$

Bijgevolg:

$$\log M(r) \backsim \frac{r}{\log r},$$

ofwel

$$\frac{\log M(r)}{r^2} \backsim \frac{1}{r \log r},$$

m. a. w. de reeks $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^2}$ *divergeert.*

Uit het voorafgaande volgt, dat voor het nul zijn van het geslacht geen noodige en voldoende voorwaarde bestaat, waarin alleen de groei van $M(r)$ voorkomt.

§ 21 – Over het tot nul naderen van $\frac{\log M(r)}{r}$ voor geheele functies van het geslacht nul.

We hebben gezien, dat bij een geheele functie van 't geslacht nul

$$\frac{\log M(r)}{r} \to 0 \text{ voor } r \to \infty.$$

Men kan bewijzen, dat dit naderen tot 0 *„zoo traag kan gaan als men wil"*, waaruit dan volgt, dat er ook geen noodige en voldoende voorwaarde voor $p = 0$ op te stellen is, waarin alleen de *„décroissance"* van

$$\frac{\log M(r)}{r} \text{ figureert } [1].$$

Onderstelling: $\varphi(r)$ *monotoon dalend voor* $0 < r < \infty$ *en* $\varphi(r) \to 0$ *voor* $r \to \infty$.

Bewering: *Er is een geheele functie van 't geslacht nul met:*

$$\frac{\log M(r)}{r} > \varphi(r) \text{ voor } 0 < r < \infty.$$

Bewijs:

Bepaal bij $n = 1, 2, 3, \ldots$ het kleinste natuurlijke getal k_n waarvoor:

$$\frac{k_n - 1}{2^n} \leqq \varphi(2^{n-4}) - \varphi(2^{n-3}) < \frac{k_n}{2^n}.$$

---

[1]) We verwijzen verder naar de correspondentie LANDAU—HADAMARD: Rendiconti della R. Acc. dei Lincei. Vol VI, serie 6, 2e sem. 1927, pag. 3; en LINDELÖF, Mathematische Annalen, bd. 58, 1904.

Op het interval $1 < x < 2$ kiezen we k_1 punten,
" " " $2 < x < 2^2$ " " k_2 "
" " " $2^{n-1} < x < 2^n$ " " k_n "
enz.

Van links naar rechts noemen we al deze punten:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

We stellen nu:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{a_k}\right).$$

Nu is de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} \text{ convergent,}$$

omdat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} < k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{2^2} + \frac{k_4}{2^3} + \ldots < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{2^n} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k_n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \leqq 2\,\varphi\left(\tfrac{1}{8}\right) + 2.$$

$f(z)$ is dus een geheele functie van 't geslacht 0.

Verder is:

$$M(r) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2r}{a}\right) > \prod_{a_k > 4r} \left(1 + \frac{2r}{a_k}\right) > \prod_{a_k > 4r} e^{r/a_k}$$

omdat voor $0 < x < \frac{1}{2}$ geldt: $1 + x > e^{\frac{1}{2}x}$, wegens:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots > x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right) =$$

$$= x - \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-x} > x - x^2 = x(1-x) > \tfrac{1}{2}x.$$

Bijgevolg is:

$$\log M(r) > r \sum_{a_k > 4r} \frac{1}{a_k}.$$

Zij nu: $2^{n-4} \leqq r < 2^{n-3}$

dus: $$2^{n-2} \leqq 4r < 2^{n-1},$$

dan vinden we:

$$\frac{\log M(r)}{r} \geqq \sum_{a_k > 2^{n-1}} \frac{1}{a_k} > \frac{k_n}{2^n} + \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} + \ldots . > \varphi\,(2^{n-4}) \geqq \varphi\,(r).$$

Q. E. D.

HOOFDSTUK IV

§ 22 – Stelling van LANDAU.

Onderstelling: $f(z)$ *is geheel met nulpunten* $a_1, a_2, \ldots$.

$$0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \ldots,$$

$$f(0) = 1 \; ; \; \log M(r) = o(r).$$

Bewering: $$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Voorafgaande opmerking:

De onderstelling $f(0) = 1$ doet niets aan de algemeenheid te kort. Inderdaad, is $f(0) \neq 1$, dan kan men schrijven:

$$f(z) = cz^m f_1(z),$$

waarin cz^m de eerste term is in de ontwikkeling van $f(z)$ volgens de opklimmende machten van z, zoodat dan $f_1(0) = 1$ en het theorema voor $f_1(z)$ geldt —.

Bewijs:

Zij R zoodanig, dat binnen den cirkel $|z| = R$, n nulpunten $a_1, a_2, \ldots a_n$ van $f(z)$ liggen. Stellen we:

$$h_n(z) = \frac{f(z)}{\left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)},$$

dan is $h_n(z)$ geheel, $\neq 0$ voor $|z| < R$, en $h_n(0) = 1$.

Zij voor $|z| < R$:

$$g_n(z) = \int_0^z \frac{h_n'(z)}{h_n(z)}\, dz = \log h_n(z),$$

dan is $g_n(z)$ holomorf voor $|z| < R$.

Nu is voor $|z| < R$:

$$|h_n(z)| \leqq \text{Max. van } |h_n(z)| \text{ voor } |z| = 2R \leqq \frac{M(2R)}{1.1 \ldots 1} = M(2R),$$

zoodat: $\qquad \Re\, g_n(z) < \log M(2R).$

Volgens § 2 is voor $|z| < r < R$:

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{\theta i} + z}{Re^{\theta i} - z} \log |h_n(Re^{\theta i})|\, d\theta.$$

Ook is: $0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |h_n(Re^{\theta i}|d\theta$, waaruit door optelling volgt:

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{Re^{\theta i} - z} \log |h_n(Re^{\theta i})|\, d\theta,$$

zoodat: $\qquad |g_n(z)| \leqq \frac{2r}{R-r} \log M(2R),$

m. a. w.: $\qquad |\log h_n(z)| \leqq \frac{2r}{R-r} \log M(2R).$

Uit $\log M(2R) = o(R)$ volgt dan voor $|z| < r$:

$$|\log h_n(z)| \to 0 \text{ voor } R \to \infty, \text{ d. i. voor } n \to \infty,$$

zoodat: $\qquad h_n(z) \to 1$ voor $n \to \infty$,

ofwel: $\qquad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ $\qquad$ Q. E. D.

Opmerking:

De convergentie blijkt tevens uniform te zijn voor $|z| < r$. Echter mogen we *niet* besluiten tot

$$\sum_1^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| < \infty,$$

m. a. w. dat het geslacht nul is. LANDAU formuleerde dan ook de stelling (voor *willekeurig* geslacht) op de volgende manier [4]: *Een noodige en voldoende voorwaarde, waaronder een geheele functie*

$f(z)$ is van het geslacht $\leqq k$, is, dat zij voldoet aan de volgende 2 condities:

a) De reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{k+1} \quad \textit{convergeert.}$$

b)

$$\underline{lim.}_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} = 0.$$

Bewijs:

We onderstellen weer $f(0) = 1$.

I. Zij $f(z)$ van het geslacht $\leqq k$, zoodat aan de eerste conditie voldaan is, terwijl

$$f(z) = e^{H(z)} \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right),$$

waarin $H(z)$ een polynoom is van den graad $\leqq k$ en

$$E(u ; k) = (1 - u)\, e^{\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{u^\lambda}{\lambda}}.$$

Voor een willekeurige waarde van u heeft men:

$$| E(u ; k) | \leqq e^{c(k)\,|u|^{k+1}},$$

waarin $c(k)$ een constante is, alleen afhangend van k. Immers, voor $| u | \leqq \frac{1}{2}$ is:

$$| E(u ; k) | = \left| e^{-\sum_{\lambda=k+1}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda}} \right| \leqq e^{\frac{|u|^{k+1}}{1-|u|}} \leqq e^{2|u|^{k+1}};$$

terwijl voor $| u | \geqq \frac{1}{2}$ geldt:

$$| E(u ; k) | \leqq (1 + | u |)\, e^{|u| + \ldots + |u|^k} \leqq e^{c_1(k)\,|u|^{k+1}}.$$

Gebruiken we deze schatting, dan is voor iedere $t > 0$:

$$\log \underset{|z|=r}{\text{Max.}} \left| \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right) \right| \leqq \sum_{|a_n| \leqq t} \left\{ \log\left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{r}{|a_n|}\right) \right\} + c(k) \sum_{|a_n| > t} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k+1};$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \underset{|z| \leqq r}{\text{Max.}} \left| \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right)\right|}{r^{k+1}} \leqq c(k) \sum_{|a_n|>t} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$$

en als men t onbepaald laat toenemen volgt er uit, dat:

$$\log \underset{|z| \leqq r}{\text{Max.}} \left| \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right)\right| = o(r^{k+1}),$$

dus

$$\log \underset{|z| \leqq r}{\text{Max.}} |f(z)| \leqq \underset{|z| \leqq r}{\text{Max.}} |H(z)| + \log \underset{|z| \leqq r}{\text{Max.}} \left| \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right)\right| = o(r^{k+1})$$

en is dus zeker aan de tweede conditie voldaan.

II. Zij omgekeerd voldaan aan de 2 condities. Daar in deze onderstelling $f(z)$ zeker van den vorm

$$f(z) = e^{H(z)} \prod_{a_n} E\left(\frac{z}{a_n} ; k\right)$$

is, waarin $H(z)$ een geheele func is, moeten we dus laten zien, dat:

$$H^{(l)}(0) = 0 \text{ voor } l \geqq k+1.$$

Nu is:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = H'(z) + \sum_{a_n} \left(-\frac{1}{a_n - z} + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{z^{\lambda-1}}{a^{\lambda}} \right),$$

en derhalve:

$$H^{(l)}(z) = \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(l-1)} + (l-1)! \sum_{a_n} \frac{1}{(a_n - z)^l} =$$

$$= \lim_{R=\infty} \left\{ \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(l-1)} + (l-1)! \sum_{|a_n| \leqq R} \frac{1}{(a_n - z)^l} \right\} =$$

$$= \lim_{R=\infty} h^{(l)}(z ; R),$$

waarin $h(z ; R)$ een holomorfe functie is voor $|z| \leqq R$, gedefinieerd door:

$$\frac{f(z)}{\prod_{|a_n| \leqq R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} = e^{h(z;R)} ; \qquad h(0 ; R) = 0.$$

Op den omtrek $|z| = 2R$ heeft men:

$$\left| \prod_{|a_n| \leqq R} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \right| \geqq \prod_{|a_n| \leqq R} (2 - 1) = 1,$$

waaruit voor $|z| \leqq R$ volgt:

$$e^{Rh(z;R)} \leqq M(2R), \text{ dus } \Re h(z\,;R) \leqq \log M(2R).$$

Zij de Taylorsche ontwikkeling van $h(z\,;R)$:

$$h(z\,;R) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n;R}\, z^n\ ,$$

dan is: $$|h^{(l)}(0\,;R)| = l!\,|a_{l;R}| \leqq \frac{2\,.\,l!\log M(2R)}{R^l}$$

waaruit wegens de 2de conditie volgt:

$$\lim_{R=\infty} |h^{(l)}(0\,;R)| = 0 \text{ voor } l \geqq k+1$$

zoodat

$$H^{(l)}(0) = \lim_{R=\infty} h^{(l)}(0\,;R) = 0 \text{ voor } l \geqq k+1,$$

waarmee de stelling bewezen is.

MINETTI [7] heeft dit resultaat nog eenigszins verruimd door voor $E(u\,;k)$ de schatting van § 17 te gebruiken en vindt dan *dat $f(z)$ de orde ϱ en het geslacht $\leqq \varrho$ heeft, dán en dán alleen als voldaan is aan:*

a) $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon_1}}$ *convergeert,* $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho-\epsilon_2}}$ *divergeert.*

b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho+\epsilon_3}} = 0$

waarin ε_1, ε_2 en ε_3 willekeurig en positief zijn.

Toepassing van de stelling van LANDAU:

Zij: $$f(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}}$$

dan is $f(z)$ geheel en nul voor $z = 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$.

Hierbij is: $\frac{\log M(r)}{r} \to 0 \quad \text{voor } r \to \infty$

zoodat: $$\frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

dus: $$\sin \pi z = \pi z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

§ 23 – Twee stellingen over de convergentie van de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k}.$$

De eerste conditie in de stelling van LANDAU, nl. dat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{k+1} \quad \text{convergeert,}$$

kunnen we vervangen door een andere, die de a_n niet bevat. Daarvoor behandelen we eerst de volgende stelling, waarbij we $|a_n|$ gemakshalve vervangen door r_n.

Stelling 1 [10]:

Een noodige en voldoende voorwaarde, opdat de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k} \tag{1}$$

convergeert, is dat de integraal:

$$\int_0^{\infty} \frac{n(r)}{r^{k+1}}\, dr \tag{2}$$

convergeert, waarin $n(r)$ weer het aantal nulpunten van $f(z)$ voorstelt binnen den cirkel $|z| = r$.

Bewijs:

Men ziet terstond in, dat men heeft:

$$\sum_1^n \frac{1}{r_n^k} = k \int_0^{r_n} \frac{n(r)}{r^{k+1}}\, dr + \frac{n}{r_n^k} \tag{3}$$

Als nu de reeks (1) convergeert, is het 2de lid van (3) begrensd, wat n ook is, dus *a fortiori* de integraal.

Omgekeerd, als de integraal (2) convergeert, dan nadert de integraal:

$$k\int_{r_n}^{2r_n}\frac{n\,(r)}{r^{k+1}}\,dr \qquad \text{tot } 0, \text{ als } n \to \infty,$$

waaruit voor n voldoend groot en $\varepsilon > 0$ volgt:

$$\varepsilon > k\int_{r_n}^{2r_n}\frac{n\,(r)}{r^{k+1}}\,dr > kn(r_n)\int_{r_n}^{2r_n}\frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{n}{r_n^k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

zoodat

$$\frac{n}{r_n^k} \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

Het 2de lid van (3) is dus begrensd, m. a. w. de reeks (1) convergeert.

Stellen we nu:

$$\lambda\,(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\,|\,f\,(re^{\theta i})\,|\,d\theta\,,$$

dan volgt uit de voorgaande stelling de volgende:

S t e l l i n g 2:

Wanneer voor een gegeven waarde van k de integraal:

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,(r)}{r^{k+2}}\,dr$$

convergeert, dan convergeert ook de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{k+1}}\,.$$

Bewijs:

Onderstellen we weer $f\,(0) = 1$, dan gaat de formule van JENSEN over in:

$$\lambda\,(r) = \int_0^{r}\frac{n\,(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho.$$

Omdat nu:

$$\int_0^r \frac{n(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho \geqq \int_{\frac{1}{2}r}^r \frac{n(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho \geqq n\left(\tfrac{1}{2}r\right)\log 2,$$

kunnen we schrijven:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(r)}{r^{k+2}}\,dr = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{k+2}} \int_0^r \frac{n(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho \geqq \int_0^\infty \frac{n\left(\frac{1}{2}r\right)}{r^{k+2}}\,dr,$$

zoodat uit de convergentie van de gegeven integraal die van

$$\int^\infty \frac{n(r)}{r^{k+2}}\,dr$$

volgt, waarmee in verband met de vorige stelling het bewijs geleverd is.

Onderstellen we dus in de stelling van LANDAU op blz. 38 *bovendien*, dat de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(r)}{r^2}\,dr \text{ convergeert,}$$

dàn kunnen we besluiten, dat de functie het geslacht 0 moet hebben.

§ 24 – Vervolg.

Stelling 1:

Zijn $a_1, a_2, \ldots$ de nulpunten der geheele functie $f(z)$, met moduli $r_1, r_2, \ldots$ en stellen we:

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

dan zijn voor een gegeven $k > 0$ de integralen:

$$\int^\infty \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr \quad , \quad \int^\infty \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

en de reeks: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}\right)^k$$

gelijktijdig convergent of divergent.

Bewijs:

Door partiële integratie vindt men, dat voor $0 < \beta_0 < \beta$:

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{N(\beta_0)}{k\beta_0^k} - \frac{N(\beta)}{k\beta^k} + \frac{1}{k}\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr \qquad (1)$$

waaruit men ziet, dat de integraal

$$\int^{\infty} \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr \text{ convergeert, als } \int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr \text{ convergeert.}$$

Is omgekeerd de eerste integraal convergent, dan is voor een willekeurige $\varepsilon > 0$ vanaf een zekere waarde van β:

$$\varepsilon > \int_{\beta}^{\infty} \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr \geqq N(\beta)\int_{\beta}^{\infty} \frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{N(\beta)}{k\beta^k}\,.$$

De 2de term in het 2de lid van (1) ligt dus beneden een eindige, van β onafhankelijke grens, waaruit de convergentie van de integraal

$$\int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr \text{ volgt.}$$

In verband met stelling 1 der vorige paragraaf is dus de geheele bewering bewezen.

Opmerking:

We kunnen zelfs bewijzen, dat bij convergentie, de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k}$$

en de integraal: $$\int^{\infty} \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

op de constante factor k^2 na gelijk zijn.

Immers uit formule (1) volgt met $0 < a < r$:

$$\int_a^r \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{1}{k}\left\{\frac{N(a)}{a^k} - \frac{N(r)}{r^k} + \int_a^r \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr\right\}.$$

Kiezen we nu $a < r_1$, dan is $N(a) = 0$, terwijl:

$$\int_a^r \frac{n(r)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{1}{k}\left\{-\frac{n(r)}{r^k} + \int_a^r \frac{dn(r)}{r^k}\right\}.$$

Merken we op, dat:

$$\int_a^\infty \frac{dn(r)}{r^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k}$$

(de reeks *convergent* ondersteld) en dat de termen:

$$\frac{N(r)}{r^k} \text{ en } \frac{n(r)}{rk} \to 0 \text{ als } r \to \infty,$$

dan vinden we bij de limiet voor $r \to \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k}$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k} = k^2 \int_0^\infty \frac{N(r)}{r^{k+1}}\,dr.$$

Stelling 2:

Wanneer voor een gegeven $k > 0$ de integraal

$$\int^\infty \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

convergeert, dan is ook de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n}\right)^k$$

convergent.

Bewijs:

Uit de formule van JENSEN:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{\theta i})|\, d\theta = \log |f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$$

volgt, dat:

$$\log M(r) \geqq \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt \equiv N(r),$$

zoodat uit het onderstelde volgt, dat voor voldoend groote r en willekeurige $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > \int_r^{2r} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\, dr > \log M(r) \int_r^{2r} \frac{dr}{r^{k+1}} > N(r) \int_r^{2r} \frac{dr}{r^{k+1}} > \int_r^{2r} \frac{N(2r)}{r^{k+1}}\, dr,$$

bijgevolg convergeert ook de integraal

$$\int^{\infty} \frac{N(r)}{r^{k+1}}\, dr.$$

Hieruit volgt, in verband met stelling 1, dat dan ook de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k} \text{ convergeert.}$$

Opmerking:

In dit geval is $M(r) = o(r^k)$, want met $1 < R$ is:

$$\int_1^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\, dr \geqq \int_R^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\, dr \geqq \log M(R) \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{\log M(R)}{kR^k},$$

waaruit de bewering volgt.

§ 25 – Stelling van HADAMARD.

Hulpstelling:

Voor q geheel en positief heeft $x^q - 1 = 0$
q wortels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ met modulus 1,
waarvoor geldt: ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\sum_{\nu=1}^{q} \alpha_\nu^k = \begin{cases} q \text{ als } k \text{ een } q\text{-voud is.} \\ 0 \text{ als } k \text{ geen } q\text{-voud is.} \end{cases}$$

Bewijs:

Uit de identiteit:

$$\frac{qz^{q-1}}{z^q-1}=\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\ldots.+\frac{1}{z-a_q},$$

ofwel:

$$\frac{qz^q}{z^q-1}=\frac{z}{z-a_1}+\frac{z}{z-a_2}+\ldots.+\frac{z}{z-a_q},$$

volgt door machtreeksontwikkeling:

$$q\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^q}\right)^k\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sum_{\nu=1}^{q}a_\nu^k}{z^k}\quad\text{voor}\quad|z|>1,$$

waaruit de bewering onmiddellijk volgt.

Stelling van HADAMARD.

Onderstelling: $f(z)$ *is geheel, met eindige schijnorde* ϱ' *en nulpunten* a_n*:*

$$0<|a_1|\leqq|a_2|\leqq|a_3|\leqq\ldots.$$

Verder is $f(0)=1$.

Bewering: *In de formule van* WEIERSTRASZ:

$$f(z)=e^{H(z)}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots.+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

$$\text{met}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}<\infty\;;\;p\leqq\varrho'\;;\;H(0)=0,$$

is $H(z)$ *een polynoom met graad* $k\leqq\varrho'$.

Bewijs:

Zij q geheel en $>\varrho'$.

Zijn de wortels van $x^q-1=0$: $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots.\ \omega_q$ dan is wegens de vorige hulpstelling, als $H(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$:

$$f(\omega_1 z)\,f(\omega_2 z)\ldots f(\omega_q z)=e^{H(\omega_1 z)+\ldots.+H(\omega_q z)}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{\omega_1 z}{a_n}\right)\ldots\left(1-\frac{\omega_q z}{a_n}\right)=$$

$$=e^{qc_q z^q+qc_{2q}z^{2q}+\ldots.}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z^q}{a_n^q}\right).$$

Stellen we nu $z^q = \xi$ en:

$$F(\xi) = e^{qc_q\xi + qc_{2q}\xi^2 + \cdots} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\xi}{a_n^q}\right).$$

Zij nu $\varepsilon > 0$ en $M_1(R)$ het maximum van

$$|F(\xi)| \text{ voor } |\xi| \leqq R,$$

dan is op den duur:

$$M_1(R) < e^{q r^{\rho'+\epsilon}} \text{ (met } r = \sqrt[q]{R}) < e^{r^{\rho'+2\epsilon}} = e^{R^{(\rho'+2\epsilon)/q}}.$$

Dus is op den duur:

$$\frac{\log M_1(R)}{R} \leqq R^{(\rho'+2\epsilon)/q - 1} = R^{\frac{2\epsilon-(q-\rho')}{q}}$$

Kies nu $\varepsilon < \frac{1}{2}(q - \varrho')$, dan blijkt dat:

$$\frac{\log M_1(R)}{R} \to 0 \text{ voor } R \to \infty.$$

Passen we nu de stelling van LANDAU toe, dan krijgen we:

$$F(\xi) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\xi}{a_n^q}\right)$$

dus: $$e^{qc_q\xi + qc_{2q}\xi^2 + \cdots} = 1$$

waaruit volgt: $c_q = 0$.

Daar q een willekeurig geheel getal $> \varrho'$ was, is hiermee de stelling bewezen.

§ 26 – Verband tusschen orde, schijnorde en geslacht van geheele functies.

We stellen ons nu de volgende vraag:

Gegeven zijnde een geheele functie $f(z)$ van eindige schijnorde ϱ', wat is er dan te zeggen van de orde ϱ en het geslacht p van $f(z)$?

We onderscheiden hierbij 2 gevallen:

1e Geval: ϱ' is *niet geheel*, dus de graad k van $H(z)$ is *kleiner* dan ϱ'.

Nu is de orde $\varrho = \varrho'$, want uit $\varrho < \varrho'$ zou wegens § 18 volgen, dat van af zekere r:

$$M(r) < e^{r^{\rho'-\sigma}}$$

waarin σ een zoodanig positief getal is, dat

$$\varrho' - \sigma > \varrho \text{ en } \varrho' - \sigma > k,$$

hetgeen echter in strijd is met het onderstelde, dat

$$M(r) > e^{r^{\rho'-\epsilon}}$$

voor oneindig veel waarden van $r \to \infty$. Daar steeds $\varrho \leqq \varrho'$ was, besluiten we dus tot $\varrho = \varrho'$ en bijgevolg is het geslacht p gelijk aan het grootste geheele getal, dat in ϱ' begrepen is.

2e Geval: ϱ' is *geheel.*

Nu moet een der getallen k en ϱ gelijk zijn aan ϱ', anders zijn we weer in strijd met het onderstelde, dat $M(r) > e^{r^{\rho'-\epsilon}}$ voor ∞ veel $r \to \infty$.

Is $k = \varrho'$, dan heeft ϱ een willekeurige waarde $\leqq \varrho'$. In dit geval is $p = \varrho'$.

Is $k < \varrho'$, dan moet noodzakelijk $\varrho = \varrho'$ zijn. Voor het geslacht is in dit geval onzekerheid. Men heeft $p = \varrho' - 1$ ofwel $p = \varrho'$ naargelang de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho} \text{ convergeert of divergeert.}$$

Samenvattend hebben we dus het volgende resultaat:

Bij iedere geheele functie van niet geheele schijnorde ϱ' *is de orde* $\varrho = \varrho'$ *en het geslacht* $p = [\varrho']$.

Is de functie van geheele schijnorde, dan kan de orde gelijk zijn aan of kleiner zijn dan de schijnorde. In het eerste geval is $p = \varrho'$ *of* $\varrho' - 1$, *in het tweede geval is* $p = \varrho'$.

§ 27 – Andere definitie van de schijnorde als in § 7.

Zij de integraal

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr \text{ convergent.}$$

Omdat voor een niet constante geheele functie $M(r)$ monotoon toeneemt, volgt uit deze convergentie, dat voor iedere $\varepsilon > 0$ en iedere voldoend groote r:

$$M(r) < e^{\varepsilon r^{\lambda}} .$$

Immers, ontkenning beteekent, dat er willekeurig groote waarden van r zijn, waarvoor:

$$\log M(r) > \varepsilon r^{\lambda}.$$

Zij nu:

$$R_0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots .$$

met $r_n > 2r_{n-1}$ een rij getallen, waarvoor

$$\log M(r_k) > \varepsilon r_k^{\lambda}.$$

Dan is:

$$\int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr > \frac{\varepsilon r_{n-1}^{\lambda}}{\lambda}\left(\frac{1}{r_{n-1}^{\lambda}} - \frac{1}{r_n^{\lambda}}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\lambda}\left\{1 - \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\lambda}\right\} > \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{2^{\lambda}}\right),$$

zoodat de integraal:

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

niet kan convergeeren.

Hieruit volgt deze definitie van de schijnorde:

Een geheele functie $f(z)$ heeft de schijnorde ϱ', als de integraal:

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

convergeert voor $\lambda > \varrho'$ en divergeert voor $\lambda < \varrho'$. (Voor $\lambda = \varrho'$ kan de integraal convergeeren of divergeeren).

HOOFDSTUK V

§ 28 – De karakteristieke functie T (r) van R. NEVANLINNA [8].

Zij $f(z)$ een *meromorfe* functie van z, d. w. z. een in het geheele eindige vlak holomorfe functie van z met uitzondering alleen van eventueele polen.

Zij $z = 0$ noch nulpunt, noch pool van $f(z)$. De nulpunten van $f(z)$ binnen den cirkel $|z| = R$ stellen we voor door $a_1, a_2, \ldots a_n$ en de polen door $\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_p$; hun aantal respectievelijk door $n(R)$ en $p(R)$. We voeren nu de volgende notaties in:

$$N(R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = \sum_{|a_n|<R} \log \left| \frac{R}{a_n} \right|,$$

$$P(R) = \int_0^R \frac{p(t)}{t}\, dt = \sum_{|\beta_p|<R} \log \left| \frac{R}{\beta_p} \right|,$$

$$m(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} {}^{+} \log |f(Re^{\varphi i})|\, d\varphi,$$

waarin $\overset{+}{\log} u$ beteekent $\begin{cases} \log u & \text{als } u > 1 \\ 0 & \text{als } 0 \leqq u \leqq 1. \end{cases}$

We stellen verder:

$$T(R) = m(R) + P(R).$$

Is in 't bijzonder $f(z)$ *geheel*, dus $P(R) \equiv 0$, dan is:

$$T(R) = m(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} {}^{+} \log |f(Re^{\varphi i})|\, d\varphi.$$

De formule van JENSEN voor geheele functies:

$$\log |f(0)| = \sum_{|a_n|<R} \log \left|\frac{a_n}{R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(Re^{\theta i})|\, d\theta \qquad (1)$$

kunnen we nu anders schrijven.

Vooreerst is:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(Re^{\theta i})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^{+}\log |f(Re^{\theta i})|\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^{+}\log \left|\frac{1}{f(Re^{\theta i})}\right| d\theta =$$

$$= m_f(R) - m_{1/f}(R).$$

Maar voor $f(z)$ geheel is

$$m_f(R) \equiv T_{1/f}(R),$$

terwijl:

$$m_{1/f}(R) = T_{1/f}(R) - P_{1/f}(R) = T_{1/f}(R) - N_f(R),$$

omdat de polen van $\frac{1}{f(z)}$ de nulpunten zijn van $f(z)$, zoodat:

$$P_{1/f}(R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = N_f(R).$$

Verder is:

$$\sum_{|a_n|<R} \log \left|\frac{a_n}{R}\right| = -N_f(R);$$

zoodat tenslotte (1) overgaat in:

$$\log |f(0)| = T_f(R) - T_{1/f}(R)$$

ofwel:

$$T_{1/f}(R) = T_f(R) + O(1) \qquad (2)$$

waarin $O(1)$ voor $R \to \infty$ begrensd is.

§ 29 – Eigenschap der karakteristieke functie. Verband met log M (r).

Stelling:

$T(r)$ is een positieve, niet dalende functie van r.

Opmerking:

Deze stelling, die ook geldt voor meromorfe functies, zullen we alleen bewijzen voor het geval $f(z)$ geheel is.

Bewijs:

Volgens de algemeene formule van JENSEN is voor $|z| < R$:

$$\log|f(z)| = \sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{(z-a_n)\,R}{(z-a_n')\,a_n}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\right)\log|f(Re^{\theta i})|\,d\theta.$$

Nu is echter voor $|z| < R$, $|a_n| < R$:

$$\left|\frac{(z-a_n)\,R}{(z-a_n')\,a_n}\right| < \frac{|a_n|}{R} < 1.$$

Hiervan gebruikmakend vinden we wegens

$$\Re\left(\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\right) > 0 \text{ voor } |z| < R:$$

$$\log|f(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}-z}\right)\overset{+}{\log}|f(Re^{\theta i})|\,d\theta \qquad (1)$$

dus wegens $|f(z)| \leqq 0$:

$$\overset{+}{\log}|f(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+z}{Re^{\theta i}+z}\right)\overset{+}{\log}|f(Re^{\theta i})|\,d\theta.$$

Nemen we nu aan beide zijden der gevonden ongelijkheid het gemiddelde over een cirkel met straal $r < R$, dan vinden we:

$$T(r) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+re^{\varphi i}}{Re^{\theta i}-re^{\varphi i}}\right)\overset{+}{\log}|f(Re^{\theta i})|\,d\theta\right\} d\varphi.$$

Nu is:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{\theta i}+re^{\varphi i}}{Re^{\theta i}-re^{\varphi i}}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{Re^{\theta i}+re^{\varphi i}}{Re^{\theta i}-re^{\varphi i}}\cdot\frac{dz}{z} = 1$$

zoodat we vinden:

$$T(r) \leqq T(R),$$

waarmee de stelling bewezen is.

Is $z = re^{\varphi i}$,
dan volgt nog uit de ongelijkheid (1) wegens:

$$\Re\left(\frac{Re^{\theta i} + z}{Re^{\theta i} - z}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)},$$

voor $0 < r < R$:

$$\log |f(re^{\varphi i})| \leqq \frac{R + r}{R - r} T(R),$$

waaruit voor $M(r) > 1$ volgt:

$$\log M(r) \leqq \frac{R + r}{R - r} T(R).$$

Verder volgt uit de definitie van $T(r)$ nog, dat voor $M(r) \geqq 1$ geldt:

$$T(r) \leqq \log M(r)$$

zoodat we hebben:

Is $f(z)$ een geheele functie met $M(r) > 1$, dan geldt voor iedere $0 < r < R$:

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq \frac{R + r}{R - r} T(R).$$

Nemen we in het bijzonder $R = 2r$, dan is:

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq 3T(2r).$$

Deze ongelijkheden bewijzen, dat *de rol van $T(r)$ in de theorie der geheele functies wordt overgenomen door $\log M(r)$.*

Uit het voorgaande volgt nog, dat we de schijnorde ϱ' van een geheele functie ook kunnen definieeren als:

$$\varrho' = \lim_{r \to \infty} \sup \frac{\log T(r)}{\log r};$$

en dat de integralen:

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr \quad \text{en} \quad \int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

gelijktijdig convergeeren of divergeeren, zoodat we in verband met § 27 kunnen zeggen:

De geheele functie $f(z)$ heeft de schijnorde ϱ', als de integraal:

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

convergeert voor $\lambda > \varrho'$ en divergeert voor $\lambda < \varrho'$.

§ 30 – De functie T (r) voor functies samenhangend met f(z).

Hulpstelling:

Zijn $a_1, a_2, \ldots . a_n$ positieve getallen, dan is:

$$\overset{+}{\log}(a_1 a_2 \ldots . a_n) \leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \ldots . + \overset{+}{\log} a_n.$$

$$\overset{+}{\log}(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) \leqq \overset{+}{\log} a_1 + \ldots \quad + \overset{+}{\log} a_n + \log n.$$

Bewijs:

Het eerste volgt onmiddellijk uit de definitie van $\overset{+}{\log}$, terwijl we voor het bewijs van het tweede gebruik maken van:

$$a_1 + a_2 + \ldots . + a_n \leqq n a_{k+1}\, a_{k+2} \ldots . a_n,$$

indien de eerste k getallen a kleiner zijn dan 1, de overige minstens 1. —

Gebruik makend van deze hulpstelling vinden we de volgende stellingen voor de functie T:

Stelling 1:

Is A een constante, dan is:

$$T_{f+A}(R) = T_f(R) + O(1).$$

Bewijs:

$$T_{f+A}(R) - T_f(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \overset{+}{\log} \left| f(Re^{\phi i}) + A \right| - \overset{+}{\log} \left| f(Re^{\phi i}) \right| \right\} d\varphi$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \overset{+}{\log} |A| + \log 2 \right\} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} O(1)\, d\varphi = O(1)$$

Stelling 2:

Is A een van nul verschillende constante, dan is:

$$T_{Af}(R) = T_f(R) + O(1).$$

Bewijs:

$$T_{Af}(R) - T_f(R) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \overset{+}{\log} |A| + \overset{+}{\log} |f(Re^{\phi i})| - \overset{+}{\log} |f(Re^{\phi i})| \right\} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |A| \, d\varphi = O(1).$$

Stelling 3:

Is $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d *constanten*)

dan is:

$$T_{\frac{af+b}{cf+d}}(R) = T_f(R) + O(1).$$

Bewijs:

Deze stelling volgt door combinatie der twee vorige stellingen en van (2) van § 28, indien we schrijven:

$$\frac{af+b}{cf+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cf+d}.$$

Opmerking:

De vorige stellingen zijn bewezen voor het geval $f(z)$ geheel is; ze gelden eveneens indien $f(z)$ meromorf is.

§ 31 – Belang van het voorafgaande. — Toepassingen.

Bepaalt men $m(r)$ en $P(r)$ voor de functie

$$\frac{1}{f(z) - a},$$

waarin a een van z onafhankelijk eindig complex getal voorstelt, en stelt men kortheidshalve:

$$m(r\,;a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{\theta i}) - a} \right| d\theta$$

$$P(r\,;a) = \int_0^r \frac{n(t;a)}{t}\, dt,$$

waarin $n(t\,;\,a)$ het aantal binnen den cirkel $|z| = t$ gelegen nulpunten van de functie $f(z) - a$ voorstelt, terwijl als $a = \infty$ we de vroeger gedefinieerde $m(r)$ en $P(r)$ nemen, dan volgt dus uit de vorige stellingen, dat voor iedere a geldt:

$$m(r\,;\,a) + P(r\,;\,a) = T_f(r) + O(1). \qquad (1)$$

We kunnen zeggen, dat de som $m(r\,;\,a) + P(r\,;\,a)$ de *„attractie"* meet van de complexe waarde a op de functie $f(z)$ voor $r \to \infty$. Deze som bestaat uit 2 *„componenten"* m en P, waarvan de eerste des te grooter is, naarmate de som van de bogen van cirkel $C(r)$, waar $f(z)$ dicht bij a ligt, grooter is, aangezien het gemiddelde $m(r\,;\,a)$ alleen van de bogen van $C(r)$ belangrijke bijdragen krijgt, waarop de functiewaarde dicht bij a ligt; terwijl de tweede component bepaalt, hoe dicht de punten liggen, waar de functie deze waarde a werkelijk aanneemt.

(1) zegt nu, dat deze attractie voor alle waarden van a even sterk is, op een voor iedere r *begrensde* term na —.

Liggen dus bij een gegeven geheele functie $f(z)$ voor een zekere waarde van a de punten, waar $f(z) = a$, niet zeer dicht,dan moet dit gecompenseerd worden door een sterkere *„gemiddelde convergentie"* van $f(z)$ naar die waarde a; omgekeerd wordt een zwakke *„gemiddelde convergentie"* naar een of andere waarde a door een grootere dichtheid der punten, waar $f(z) = a$, gecompenseerd, zóó dat de totale som $m + P$ toch de door de fundamentaalgrootheid $T(r)$ der beschouwde functie bepaalde grootte bereikt.

Opmerking:

Is $f(0) = a$, dan wordt $P(r\,;\,a)$ oneindig; we definieeren daarom in dit geval:

$$P(r\,;\,a) = \int_0^r \frac{n(t\,;\,a) - \nu}{t}\,dt + \nu \log r$$

als $z = 0$ een ν-voudig nulpunt is van $f(z) - a$.

In het bijzonder kunnen we de stelling:

$$T_{1/f}(r) = T_f(r) + O(1)$$

als volgt interpreteeren:

T_f en $T_{1/f}$ blijken dus even snel te groeien.

Als nu $f(z)$ *„weinig nullen"* heeft, d. w. z. $|a_n|$ sterk groeit met n, dan heeft $1/f(z)$ weinig polen, dus groeit $P_{1/f}$ niet snel. Bijgevolg moet $m_{1/f}$ snel groeien om te zorgen, dat $T_{1/f}$, T_f kan bijhouden. Dus moet het minimum van $|f|$ snel dalen. Heeft daarentegen $f(z)$ veel nullen, dan blijkt door een analoge redeneering, dat het maximum van $|f|$ snel moet groeien.

We kunnen zeggen:

T_f meet de attractie van de waarde ∞ op de functie $f(z)$ voor $r \to \infty$, terwijl $T_{1/f}$ de attractie meet van de waarde 0 op $f(z)$ voor $r \to \infty$.

Toepassingen:

In het voorafgaande hebben we steeds stilzwijgend ondersteld, dat $f(z)$ niet constant is. Immers is $f(z) \equiv a$ (a constant), dan worden $m(r\,;a)$ en $P(r\,;a)$ oneindig en zijn dus niet meer te gebruiken. Voor iedere $\alpha \neq a$ is in dit geval

$$P(r\,;\alpha) = 0 \text{ en } m(r\,;\alpha) = \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{a-\alpha} \right|$$

en de som $m + P$ dus constant en *eindig*.

Omgekeerd geldt de *stelling:*

Als voor de geheele functie $f(z)$ de som $m(r\,;\alpha) + P(r\,;\alpha)$ voor één waarde van α begrensd is, dan is $f(z)$ constant.

Bewijs:

Zij $f(0) = a$, dan moeten we dus bewijzen, dat $f(z) \equiv a$. Is dit niet het geval, dan zou volgens (1) de som $m + P$ voor *iedere* α begrensd zijn, dus speciaal voor $\alpha = a$, wat echter niet zoo is, daar $P(r, a) \to \infty$ voor $r \to \infty$. (Voor P de uitdrukking te nemen gegeven in de opmerking!)

Is $f(z)$ een *rationale* geheele functie, dus een *polynoom*, dan is

$$T(r) = O(\log r).$$

Immers is:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_q z^q$$

dan is: $m(r) = q \log r + O(1)$, terwijl $P(r) = 0$.

Omgekeerd is *iedere geheele functie, waarvoor* $T(r) = O(\log r)$ *een polynoom.*

Bewijs:

Uit $T(r) = O(\log r)$ volgt, dat de integraal:

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^2} \text{ convergeert,}$$

bijgevolg is de schijnorde van $f(z) < 1$ wegens de definitie van ϱ' gegeven in § 29, zoodat volgens de stelling van HADAMARD

$$f(z) = e^C P_1(z),$$

waarin C een constante voorstelt en $P_1(z)$ het uit de nulpunten gevormde kanonische product. We moeten dus nog alleen bewijzen, dat het aantal nulpunten van $f(z)$ *eindig* is. Nu is:

$$N_f(r) = P_{1/f}(r) \leqq T_{1/f}(r) + O(1) = T_f(r) + O(1) = O(\log r),$$

zoodat uit de definitie van $N_f(r)$ mede volgt, dat $n(r)$ voor iedere r begrensd is, waaruit de bewering blijkt.

§ 32 – Hulpstelling over de logarithmische afgeleide van f(z).

Hulpstelling:

Is $f(z)$ een geheele functie, dan is voor $0 < r < R$:

$$m_{\frac{f'}{f}}(r) < 2 \overset{+}{\log} R + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{R - r} + 2 \overset{+}{\log} T_f(R) + O(1).$$

Bewijs:

We onderstellen, dat op $|z| = r$ en $|z| = R$ geen nulpunten van $f(z)$ en $f'(z)$ liggen.

Stellen we: $$g(z) = \frac{f(z)}{\Pi (z - a_n)}$$

waarin $a_1, a_2, \ldots . a_n$ de nulpunten van $f(z)$ binnen cirkel $|z| = R$ voorstellen, dan is $g(z)$ holomorf en $\neq 0$ voor $|z| \leqq R$, zoodat volgens de stelling van § 2 voor $|z| < R$:

$$\log g(z) = Ci + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(t)| \frac{t + z}{t - z} d\theta \qquad \text{met } t = Re^{\theta i},$$

waaruit volgt:

$$\log f(z) = Ci + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\log|f(t)| - \sum_{|a_n|<R}\log|t-a_n|\right\}\frac{t+z}{t-z}d\theta +$$

$$+\sum_{|a_n|<R}\log(z-a_n) =$$

$$= A + Bi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(t)|\frac{t+z}{t-z}d\theta + \sum_{|a_n|<R}\log\frac{z-a_n}{z-a_n'}.$$

Dus:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(t)|\frac{t}{(t-z)^2}d\theta + \sum_{|a_n|<R}\left(\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-a_n'}\right).$$

Bijgevolg is voor $|z| = r < R$:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \frac{R}{\pi(R-r)^2}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(t)|\right|d\theta + \sum_{|a_n|<R}\left|\frac{a_n'-a_n}{(z-a_n)(a_n-z)}\right|$$

Nu is:

$$\left|\frac{a_n'-a_n}{(z-a_n)(a_n'-z)}\right| \leqq \frac{R^2-|a_n|^2}{|z-a_n||R^2-a_n z|} =$$

$$= \frac{R(R^2-|a_n|^2)}{|R^2-a_n z|^2}\cdot\left|\frac{R^2-a_n z}{R(z-a_n)}\right| < \frac{R}{(R-r)^2}\cdot\left|\frac{R^2-a_n z}{R(z-a_n)}\right|$$

wegens:

$$|R^2 - a_n z| \geqq R^2 - |a_n| r > R(R-r),$$

zoodat we vinden

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(t)|\right|d\theta + \sum_{|a_n|<R}\left|\frac{R^2-a_n z}{R(z-a_n)}\right|\right\}$$

Nu is, als $x > 0$, steeds

$$|\log x| = \overset{+}{\log} x + \overset{+}{\log}\frac{1}{x}$$

zoodat:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{T_f(R) + m_{1/f}(R) + \sum_{|a_n|<R}\left|\frac{R^2 - a_n z}{R(z-a_n)}\right|\right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{\sum_{|a_n|<R}\left|\frac{R^2 - a_n z}{R(z-a_n)}\right| + 2T_f(R) + O(1)\right\},$$

wegens:

$$m_{1/f}(R) = T_{1/f}(R) - N_f(R) \leqq T_{1/f}(R) = T_f(R) + O(1).$$

Hieruit volgt:

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \overset{+}{\log} R + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + \sum_{|a_n|<R}\overset{+}{\log}\left|\frac{R^2 - a_n z}{R(z-a_n)}\right| +$$

$$+ \overset{+}{\log} n(R) + \overset{+}{\log} T_f(R) + O(1).$$

bijgevolg:

$$m_{f'/f}(r) < \overset{+}{\log} R + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + \sum_{|a_n|<R} m_{\frac{R^2-a_n z}{R(z-a_n)}}(r) +$$

$$+ \overset{+}{\log} n(R) + \overset{+}{\log} T_f(R) + O(1).$$

Nu bewijst men gemakkelijk, dat de formule van JENSEN voor een *meromorfe* functie $f(z)$ luidt:

$$\log|f(0)| = \sum_{|a_n|<r}\log\left|\frac{a_n}{r}\right| + \sum_{|\beta_n|<r}\log\left|\frac{r}{\beta_n}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{\theta i})|\,d\theta$$

ofwel:

$$\log|f(0)| = -N_f(r) + N_{1/f}(r) + m_f(r) - m_{1/f}(r).$$

Passen we nu deze formule toe op de functie:

$$F(z) = \frac{R^2 - a_1 z}{R(z-a_n)}$$

met $|z| = r < R$, dan is voor $|z| \leqq R$:

$$|F(z)| \geqq 1, \text{ dus } \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{F}\right| = 0 \text{ ofwel } m_{1/F}(r) = 0.$$

Verder heeft $F(z)$ in $|z| < R$ geen nulpunten, zoodat ook $N_F(r) = 0$, waaruit tenslotte volgt dat:

$$m_F(r) = \log \frac{R}{|a_n|}, \text{ voor } r < |a_n| < R, \text{ en}$$

$$m_F(r) = \log \frac{R}{|a_n|} - \log \frac{r}{|a_n|} = \log \frac{R}{r} \text{ voor } |a_n| < r.$$

Bijgevolg:

$$m_{f'/f}(r) < \overset{+}{\log} R + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log} n(R) + \overset{+}{\log} T_f(R) +$$

$$+ n(r) \log \frac{R}{r} + \sum_{r<|a_n|<R} \log \frac{R}{|a_n|} + O(1).$$

Nu is echter:

$$n(r) \log \frac{R}{r} + \sum_{r<|a_n|<R} \log \frac{R}{|a_n|} = n(r) \log \frac{R}{r} +$$

(1)

$$+ \int_r^R \frac{n(x) - n(r)}{x}\, dx = \int_r^R \frac{n(x)}{x}\, dx = N(R) - N(r) = O(1)$$

dus:

$$m_{f'/f}(r) < \overset{+}{\log} R + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log} n(R) + \overset{+}{\log} T_f(R) + O(1).$$

We kiezen nu een getal R' in het interval $R < R' \leqq 2R$ en passen (1) toe met

$$\begin{Bmatrix} R' \\ R \end{Bmatrix} \text{ in plaats van } \begin{Bmatrix} R \\ r \end{Bmatrix},$$

onderstellende, dat ook op cirkel $|z| = R'$ geen nulpunten van $f(z)$ liggen.

We vinden dan:

$$n(R) \log \frac{R'}{R} < N(R'), \quad \text{dus:}$$

$$n(R) \leqq \frac{N(R')}{\log \frac{R'}{R}} < \frac{R'}{R'-R} \left\{ T_f(R') + O(1) \right\},$$

wegens:

$$\log \frac{R'}{R} = -\log \frac{R}{R'} = -\log\left(1 - \frac{R'-R}{R'}\right) > \frac{R'-R}{R'},$$

zoodat:

$$\overset{+}{\log} n(R) < \overset{+}{\log} R' + \overset{+}{\log} \frac{1}{R'-R} + \overset{+}{\log} T^f(R') + O(1),$$

waaruit volgt:

$$m_{f'/f}(r) < \overset{+}{\log} R + 2\overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log} T_f(R) +$$

$$+ \overset{+}{\log} R' + \overset{+}{\log} \frac{1}{R'-R} + \overset{+}{\log} T_f(R') + O(1).$$

Dit geldt nu ook zonder de aanname, dat

$$f(z) \neq 0 \text{ is op } |z| = R',$$

omdat $T_f(R)$, dus ook $\overset{+}{\log} T_f(R)$ een monotoon niet dalende functie van R is.

Kiest men nu R' zoo, dat:

$$R' - R = R - r, \text{ dus } R = \frac{R'+r}{2} \text{ en } R' - R = \frac{R'-r}{2},$$

dan gaat de bovenstaande ongelijkheid over in:

$$m_{f'/f}(r) < \overset{+}{\log} R + \overset{+}{\log} R' + 3\overset{+}{\log} \frac{1}{R'-r} + \overset{+}{\log} T_f(R) +$$

$$+ \overset{+}{\log} T_f(R') + O(1),$$

$$m_{f'/f}(r) < 2\overset{+}{\log} R' + 3\overset{+}{\log} \frac{1}{R'-r} + 2\overset{+}{\log} T_f(R') + O(1)$$

waarmee de stelling bewezen is.

§ 33 – Toepassingen van de hulpstelling.

Uit de vorige hulpstelling volgen de onderstaande stellingen.

Stelling 1:

Is $f(z)$ geheel en van eindige schijnorde, dan is:

$$m_{f'/f}(r) = O(\log r).$$

Bewijs:

Is $f(z)$ van eindige schijnorde, dan is:

$$\log T_f(r) = O(\log r).$$

Neemt men $R = 2r$, dan is $\log R = \log r + \log 2$, verder is dan:

$$\overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} = O(1)$$

en $$\log T_f(R) = O(\log r),$$

zoodat in verband met de hulpstelling de bewering juist blijkt.

Stelling 2:

Is de geheele functie $f(z)$ van eindige schijnorde, dan heeft $f'(z)$ dezelfde schijnorde.

1e Bewijs:

Schrijft men: $$f' = \frac{f'}{f} \times f,$$

dan volgt hieruit: $$m_{f'} \leqq m_{f'/f} + m_f,$$

wegens de hulpstelling van § 30; omdat

$$m_{f'} \equiv T_{f'} \text{ en } m_f \equiv T_f \text{ is,}$$

vinden we dus: $T_{f'} \leqq O(\log r) + T_f$.

Hieruit volgt de stelling in verband met de definitie van de schijnorde gegeven in § 29.

2e Bewijs:

Is ϱ' de schijnorde van

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

en ϱ_1' de schijnorde van

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}.$$

Zij verder $M_1(r)$ het maximum van $|f'(z)|$ op $|z| \leqq r$.

Volgens CAUCHY is voor $|z| < r < R$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt,$$

zoodat voor $R = 2r$:

$$|f'(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\pi r\, M(2r)}{r^2} = \frac{2M(2r)}{r},$$

ofwel $$M_1(r) \leqq \frac{2M(2r)}{r},$$

waaruit volgt: $\varrho_1' \leqq \varrho'$.

Verder is:

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(z)\, dz,$$

bijgevolg:

$$|f(z)| \leqq |f(0)| + |z|\, M_1(|z|),$$

dus: $$M(r) \leqq |f(0)| + rM_1(r),$$

waaruit volgt: $$\varrho' \leqq \varrho_1'.$$

Dus moet $\varrho_1' = \varrho'$ zijn.

§ 34 – Onderste grens van een geheele functie.

Stelling van HADAMARD.

Legt men om de nulpunten a_n van een geheele functie $f(z)$ van de schijnorde ϱ' cirkels met stralen

$$|a_n|^{-h},\ (h > \varrho'),$$

dan geldt buiten deze cirkels bij willekeurig gegeven $\varepsilon > 0$ en voor voldoend groote $|z| = r$:

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho'+\epsilon}}.$$

Bewijs:

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen onderstellen we

$$f(0) = 1.$$

De formule van JENSEN geeft voor

$$z = re^{\phi i},\ |a_n| < R \text{ en } 0 < r < R:$$

$$\log|f(z)| = \sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{(z-a_n)\,R}{(z-a_n')\,a_n}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)} \log|f(Re^{\theta i})|\, d\theta$$

zoodat:

$$\log|f(z)| \geqq \sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{z-a_n}{z-R}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)} \log\left|\frac{1}{f(Re^{\theta i})}\right| d\theta$$

$$> \sum_{|a_n|<R} \log|z-a_n| - \sum_{|a_n|<R} \log(R-r) - \frac{R+r}{R-r} T_{1/f}(R).$$

Leggen we nu om de nulpunten a_n cirkels met stralen $|a_n|^{-h}$ waarin $h > \varrho'$, dan bedekken deze cirkels niet het geheele vlak, omdat de reeks $\sum_0^\infty |a_n|^{-h}$ convergeert. Nemen we $R = 2r$ en onderstellen we, dat op $|z| = R = 2r$ geen nulpunten van $f(z)$ liggen, dan is, als we de genoemde cirkels uitsluiten, voor voldoend groote $|z| < R$:

$$\sum_{|a_n|<R} \log|z-a_n| > -n(2r) \cdot h \cdot \log 2r,$$

zoodat we wegens $T_{1/f} = T_f + O(1)$ vinden:

$$\log|f(z)| > -n(2r)\, h \log 2r - n(2r) \log r - 3T(2r) - O(1).$$

Nu is echter volgens de hulpstelling van § 8:

$$n(2r) \log 2 \leqq \log M(4r)$$

terwijl verder:

$$T(2r) \leqq \log M(2r),$$

bijgevolg wordt:

$$\log|f(z)| > -\frac{h}{\log 2} \log M(4r) \log 2r - \frac{\log M(4r)}{\log 2} \log r -$$
$$- 3 \log M(2r) - O(1),$$

zoodat voor willekeurige $\varepsilon > 0$ en voldoend groote r geldt:

$$\log|f(z)| > e^{-r^{\rho'+\varepsilon}}.$$

§ 35 – De stelling van Borel [2].

In § 18 hebben we gezien, dat bij iedere geheele functie van eindige, *niet geheele* schijnorde, orde en schijnorde gelijk zijn, terwijl als de schijnorde *geheel* is, de orde kleiner kan zijn dan de

schijnorde. Dit laatste resultaat kunnen we nu verscherpen door de volgende stelling van BOREL:

Is de schijnorde van de geheele functie $f(z)$ geheel, dan is de orde van de functies $f(z) - \lambda$, waarin λ een willekeurig complex getal voorstelt, gelijk aan de schijnorde, hóógstens voor één waarde van λ uitgezonderd.

Bewijs:

Onderstel er zijn 2 uitzonderingswaarden a en b voor λ. Dan is:

$$f(z) - a = e^{H_1(z)}\, P_1(z),$$
$$f(z) - b = e^{H_2(z)}\, P_2(z),$$

waarin H_1 en H_2 polynomen zijn van den graad ϱ' en P_1 en P_2 kanonische producten van de orde $< \varrho'$.

Aftrekking levert:

$$P_1 e^{H_1} - P_2 e^{H_2} = b - a, \tag{1}$$

waaruit volgt:

$$P_1 e^{H_1 - H_2} = P_2 + (b - a)\, e^{-H_2}. \tag{2}$$

Omdat H_2 een polynoom is van den graad ϱ' geldt:

$$\left| e^{-H_2} \right| > e^{-K r^{\varrho'}}$$

waarin K een constante is.

Het linkerlid van (2) moet dus van de schijnorde ϱ' zijn en daar P_1 van een orde $< \varrho'$ is, volgt er uit, dat $H_1 - H_2$ een polynoom is van den graad ϱ'.

Differentiëeren we (1), dan vinden we:

$$(P_1 H_1' + P_1')\, e^{H_1} - (P_2 H_2' + P_2')\, e^{H_2} = 0. \tag{3}$$

Daar de schijnorde van P_1 volgens § 33 gelijk is aan die van P_1', is dus de schijnorde van P_1' ook $< \varrho'$, zoodat de coëfficiënt van e^{H_1} in (3) een schijnorde $< \varrho'$ heeft, terwijl voor de coëfficiënt van e^{H_2} hetzelfde geldt. Verder zijn die coëfficiënten niet identiek nul, daar anders $P_1 e^{H_1}$ en $P_2 e^{H_2}$ constanten zouden zijn, dus ook $f(z)$.

Na uitrekening kunnen we (3) schrijven als:

$$P_3\, e^{H_1 + H_3} - P_4\, e^{H_2 + H_4} = 0,$$

waarin H_3 en H_4 polynomen zijn van den graad $\leqq \varrho' - 1$ en P_3 en P_4 kanonische producten van een orde $< \varrho'$,

ofwel: $$e^{H_1 - H_2 + H_3 - H_4} \equiv \frac{P_4}{P_3} . \qquad (4)$$

Nu is, als ϱ_3 en ϱ_4 de orden zijn respectievelijk van P_3 en P_4, voor voldoend groote r:

$$| P_4 | < e^{r^{\varrho_4 + \epsilon}},$$

terwijl oneindig vaak:

$$| P_3 | > e^{-r^{\varrho_3 + \epsilon}},$$

zoodat oneindig vaak:

$$\left| \frac{P_4}{P_3} \right| < e^{r^{\varrho_4 + \epsilon} + r^{\varrho_3 + \epsilon}}$$

ofwel:

$$\left| \frac{P_4}{P_3} \right| < e^{r^{\sigma}},$$

waarin $\sigma < \varrho'$, immers ϱ_3 en ϱ_4 zijn beide $< \varrho'$, dus ook $\varrho_3 + \hat{\varepsilon}$ en $\varrho_4 + \varepsilon$, als ε klein is.

Maar op iederen voldoend grooten cirkel ligt een punt, waar:

$$\left| e^{H_1 - H_2 + H_3 - H_4} \right| > e^{K r^{\varrho'}} \qquad (K = \text{constante}),$$

want $H_1 - H_2 + H_3 - H_4$ is een polynoom van den graad ϱ', dus:

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 = a z^{\varrho'} + \ldots = | a | e^{\alpha i} r^{\varrho'} e^{\varrho' \varphi i} (1 + \varepsilon (r)).$$

Dus het reëele deel van $H_1 - H_2 + H_3 - H_4$ is gelijk aan $| a | r^{\varrho'} (1 + \varepsilon (r)) > K r^{\varrho'}$, als op iederen cirkel (r) het argument φ van z zóó genomen wordt, dat $\alpha + \varrho' \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

We vinden dus, dat (4) een contradictie oplevert, waarmee de bewering bewezen is.

Opmerking:

Een waarde van λ, waarvoor de orde van $f(z) - \lambda$ kleiner is dan de schijnorde van $f(z)$, zullen we een

B — uitzonderingswaarde voor $f(z)$

noemen.

§ 36 – Hulpstelling.

Als $f(z)$ een geheele functie is van de schijnorde ϱ', dan geldt in het gebied buiten de cirkels met stralen r_n^{-h}, $(h > \varrho')$, om de nulpunten a_n beschreven $(r_n > 1)$:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < r^K \qquad (K \text{ constant})$$

Bewijs:

Gaan we uit van den vorm volgens WEIERSTRASZ:

$$f(z) = e^{H(z)} P(z),$$

waarin $H(z)$ een polynoom is van den graad q en $P(z)$ een kanonisch product, dan is:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = H'(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

Nu is $\quad |H'(z)| < K_1 r^{q-1},$

terwijl:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^p}{(z-a_n)a_n^p}$$

We fixeeren een vast getal k en stellen $N = n(kr)$, dan is:

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{N}\frac{r_b}{r_n^p|r-r_n|} < r^p \sum_{n=1}^{N} r_n^{h-p} < N k^{h-p} r^h < K_2 r^{h+\rho'+\epsilon}$$

voor voldoend groote r, omdat:

$$N = n(kr) < \log M(2kr) < (2kr)^{\rho'+\epsilon}$$

Verder is, daar de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{p+1}}$$

convergeert, de rest:

$$(2)\qquad r^p \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r_n(r_n-r)} < \frac{k}{k-1} r^p \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{r^{p+1}} < K_3 r^p$$

omdat:

$$r_n - r > r_n - \frac{r_n}{k} = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{r_n}.$$

Uit (1) en (2) volgt direct de bewering.

§ 37 – De stelling van BOREL voor de enkel- en tweevoudige nulpunten.

We beschouwen nu alleen de *enkelvoudige* nulpunten en bewijzen de volgende:

Stelling:

Als $f(z)$ een geheele functie is van de eindige schijnorde ϱ', dan zijn er niet meer dan twee waarden van λ, waarvoor de convergentie-exponent van de enkelvoudige nulpunten van $f(z) - \lambda$ kleiner is dan ϱ'.

Bewijs:

Om dit te bewijzen, onderstellen we, dat er 3 zulke waarden van λ zijn, b.v. a, b en c.

Een nulpunt van $f(z) - a$, dat k-voudig is $(k > 1)$, is een $(2k-2)$-voudig nulpunt van $[f'(z)]^2$. Is $P(z, a)$ het kanonisch product gevormd met de enkelvoudige nulpunten van $f(z) - a$, en $P(z, b)$, $P(z, c)$ de analoge producten voor $f(z) - b$ en $f(z) - c$, dan is, omdat $2k - 2 \geqq k$, het product:

$$P(z, a)\ P(z, b)\ P(z, c)\ [f'(z)]^2$$

deelbaar door het product

$$(f(z) - a)\ (f(z) - b)\ (f(z) - c),$$

m. a. w.

$$\frac{P(z, a)\ P(z, b)\ P(z, c)\ [f'(z)]^2}{(f(z) - a)\ (f(z) - b)\ (f(z) - c)} = \varphi(z)\ ,$$

waarbij $\varphi(z)$ een geheele functie is.

Volgens de onderstelling is $P(z, a)\ P(z, b)\ P(z, c)$ van de orde $< \varrho'$ en uit de hulpstelling volgt, dat:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z) - a}\right| \cdot \left|\frac{f'(z)}{f(z) - b}\right| < r^{2K}$$

op oneindig veel cirkels.

Hieruit leiden we af, dat de functie $(f(z) - c)\ \varphi(z)$ is van de schijnorde $< \varrho'$, dus ook van de orde $< \varrho'$, dus *a fortiori* $f(z) - c$ van de orde $< \varrho'$. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de functies $f(z) - a$ en $f(z) - b$. We zijn dus in strijd met de stelling van BOREL, waaruit onze bewering volgt.

Stelling:

Als de geheele functie $f(z)$ de eindige schijnorde ϱ' heeft, dan is er niet meer dan één waarde van λ, waarvoor de convergentie-exponent van de reeks der enkel- en tweevoudige nulpunten van $f(z) - \lambda$ kleiner is dan ϱ'.

Bewijs:

Onderstel, dat voor $\lambda = a$ de genoemde convergentie-exponent kleiner is dan ϱ'. Het kanonisch product $P(z, a)$ gevormd met de enkel- en tweevoudige nulpunten is dan van de orde $< \varrho'$. Het product:

$$[f'(z)]^3 . [P(z, a)]^2$$

is deelbaar door $(f(z) - a)^2$, omdat een k-voudig nulpunt $(k > 2)$ van $f(z) - a$ een $(3k - 3)$-voudig nulpunt is van $[f'(z)]^3$, terwijl

$$3k - 3 \geqq 2k.$$

Als de convergentie-exponent van de reeks der enkelvoudige nulpunten van $f(z) - b$ ook $< \varrho'$ en $P(z, b)$ het correspondeerende kanonische product voorstelt, dan is het quotiënt:

$$\frac{[f'(z)]^6 [P(z, a)]^4 [P(z, b)]^3}{[f(z) - a]^4 [f(z) - b]^3}$$

weer een geheele functie. Herhalen we nu de redeneering als in de vorige stelling, dan leidt dit tot de onmogelijkheid, dat beide waarden a en b B — uitzonderingswaarden (dus voor de reeks van àlle nulpunten) zijn.

Resumeerend:

Het theorema van Borel, *volgens welk de orde van $f(z) - \lambda$ hoogstens voor één waarde van λ kleiner kan zijn dan de schijnorde, gaat ook door, indien we alleen letten op de enkel- en tweevoudige nulpunten van $f(z) - \lambda$.*

LITERATUUR

[1] L. Bieberbach — Lehrbuch der Funktionentheorie, 1927, bd. II, pag. 239.

[2] E. Borel — Leçons sur les fonctions entières, *Paris, Gauthier-Villars, 2e éd. 1921.*

[3] J. Hadamard — Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier une fonction étudiée par Riemann. *Journal de Math.* t. IX, 1893.

[4] J. Hadamard — E. Landau — Sulle Funzioni intere di genere finito. *Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei. Vol. VI, serie 6, 2e sem., fasc.* 1—2, 1927, *pag.* 3.

[5] J. L. Jensen — Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. *Acta Mathematica.* t. 22.

[6] E. Lindelöf — Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* t. 31, § 10.

[7] S. Minetti — *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Vol. VI, serie 6, 2e sem.* 1927, *pag.* 267.

[8] R. Nevanlinna — Zur Theorie der meromorphen Funktionen. *Acta Mathematica,* bd. 46, 1925.

[9] H. Poincaré — Sur les fonctions entières. *Bulletin de la Société Math. de France,* T. 11, 1883.

[10] G. Valiron — Sur les fonctions entières d'ordre fini, *Bulletin des Sciences Mathématiques,* T. 45, 1921.

[11] — — Lectures on the general theory of integral functions. (*Toulouse,* 1923).

G. Vivanti: Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche e delle Funzioni transcendenti intere (1928).

STELLINGEN

STELLINGEN

I

Het bewijs van SILVIO MINETTI (Comptes Rendus, 1928, t. 187, pag. 372), dat de

$$\text{reeks} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho+\epsilon}} \quad \text{en de integraal} \quad \int_0^{\infty} \frac{M_r\, dr}{r^{\rho+1+\epsilon}}$$

op de constante factor $(\varrho + \varepsilon)^2$ na gelijk zijn, is onjuist.

II

Het bewijs, dat R. NEVANLINNA geeft inHoofdstuk II, § 1 van zijn artikel: Zur Theorie der meromorphen Funktionen (Acta Mathematica, bd. 46, 1925) is te vereenvoudigen voor het geval $q = 0$.

III

Voor de constante C, die Prof. Dr. J. WOLFF vindt bij zijn beschouwingen over „Séries de fractions rationnelles" (Comptes Rendus, 1928, t. 186, pag. 565), zijn twee grenzen aan te geven.

IV

De stelling van D'ALEMBERT is gemakkelijk af te leiden uit de formule van JENSEN voor geheele functies.

V

De verwijzing van WANSINK in § 11 van zijn dissertatie: „Eenige randproblemen der conforme afbeelding", naar aanleiding van niet-euclidische beschouwingen, naar Hoofdstuk VI van de Analytische Meetkunde van Prof. BARRAU, verwekt misverstand, daar in 't proefschrift uit niets blijkt, dat de maatbepalingen uit de dissertatie en genoemd leerboek geheel dezelfde zijn.

VI

Het zou nuttig zijn in leerboeken over Anal. Meetkunde er op te wijzen, wat het ontbreken van een der coördinaten in vergelijkingen leerde aangaande den aard van de kromme of het oppervlak, door die vergelijkingen voorgesteld.

VII

De stellingen van § 137 en § 141 in de „Inleiding tot de Nieuwere Meetkunde van het platte vlak" van J. VERSLUYS zijn onvolledig.

VIII

Het is wenschelijk de begrippen „totale dispersie" en „dispergeerend vermogen" scherp te onderscheiden en beter te omschrijven dan in de meeste natuurkundeboeken voor het M.O. geschiedt.

IX

De Kosmografie komt als „Wiskundige Aardrijkskunde" op het leerplan van het Gymnasium te zeer in het gedrang.