Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een randpunt

https://hdl.handle.net/1874/308795

OVER HET GEDRAG VAN EEN CONFORME AFBEELDING BIJ EEN RANDPUNT

OVER HET GEDRAG VAN EEN CONFORME AFBEELDING BIJ EEN RANDPUNT

OVER HET GEDRAG VAN EEN CONFORME AFBEELDING BIJ EEN RANDPUNT

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS **Dr C.G.N. DE VOOYS**, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TE VERDEDIGEN TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE OP **MAANDAG 12 DECEMBER 1932**, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

BASTIAAN GROOTENBOER
GEBOREN TE UTRECHT

1932
DRUKKERIJ Fa. SCHOTANUS & JENS, UTRECHT

AAN MIJN OUDERS.

Het voltooien van dit proefschrift geeft mij een welkome gelegenheid U, Oud-Hoogleeraren en Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde dank te zeggen voor hetgeen ik van U heb mogen leeren.

In het bijzonder dank ik U, Hooggeleerde Wolff, Hooggeachte Promotor. Naast Uw bezielend onderwijs zal de steun en belangstelling, die ik bij de bewerking van mijn proefschrift van U mocht ontvangen, mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Hooggeleerde Emeritus De Vries, ik blijf U erkentelijk voor Uw boeiende colleges, die van veel belang zijn geweest voor mijn wiskundige vorming.

Hooggeleerde Ornstein en Kramers, ik beschouw het als een voorrecht onder Uw leiding de natuurkunde te hebben bestudeerd, terwijl ik met genoegen terugdenk aan den tijd gedurende welke ik in het Physisch Laboratorium mocht werken.

Hooggeleerde Nijland, ik blijf U dankbaar voor hetgeen gij tot mijn wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

INHOUD.

INLEIDING EN LITERATUUROVERZICHT.

In het eerste hoofdstuk van dit proefschrift worden voor de klasse der functies, die holomorf zijn in het rechterhalfvlak en een positief reëel deel hebben, twee belangrijke stellingen afgeleid.

Ten eerste: als $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ holomorf is voor $x > 0$ met $u > 0$, dan is $\left|\frac{d^n w}{d x^n}\right| \leqq \frac{n!\,u}{x^n}$.

Ten tweede: voor deze functies naderen $\frac{u}{x}$, $\frac{w}{z}$ en $\frac{dw}{dz}$ uniform tot een limiet $\lambda \geqq 0$ en $< \infty$, als z tot oneindig nadert binnen een hoek: $|\arg z| = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, waarin $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$.

λ heet de angulaire afgeleide van $w(z)$ in het punt oneindig.

Vergelijk o.a.:

J. Wolff, Comptes Rendus, t. 182, p. 918 (1926) . . . . . . [1]
J. Wolff, C. R., t. 183, p. 500 (1926) . . . . [2]
C. Caratheodory, Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wissensch., 1929, p. 43 . . . . [3]
E. Landau en *G. Valiron*, Journal of the London Math. Society, Vol. IV, p. 15 (1929) . . . . [4]
G. Valiron, Bulletin des Sciences Mathem. 2e serie, t. 33, p. 70 (1929) . . . . [5]
C. Visser, Math. Annalen, Bd. 107, p. 28 (1932) . . . . . [6]

In de volgende hoofdstukken worden eenige vragen over de conformiteit in een randpunt van een conforme afbeelding behandeld en wel in het bijzonder de conformiteit op oneindig in het geval dat we het rechterhalfvlak op een gebied afbeelden waarbij de punten oneindig correspondeeren.

Stilzwijgend wordt daarbij onder „gebied" steeds een enkelvoudig samenhangend gebied en onder „afbeelden" conform afbeelden verstaan.

Een gebied, waarvan de conforme afbeelding op het rechterhalfvlak, waarbij de punten oneindig correspondeeren, conform is op oneindig, noemen we een *deugdelijk* gebied.

In hoofdstuk II wordt bewezen dat een gebied, waarvan de grens ligt tusschen die van twee deugdelijke gebieden, deugt. Hetgeen een uitbreiding is van het criterium van *Caratheodory* en *Valiron* voor conformiteit op oneindig (zie de boven onder [3] en [5] genoemde publicaties).

In hoofdstuk III worden bij beperking van het beeldgebied tot een deelgebied van het rechterhalfvlak eenige voorwaarden voor conformiteit op oneindig, *die alleen van de grens van het beeldgebied afhangen,* besproken.

Aangetoond wordt dat de criteria van *C. Visser, J. G. van der Corput* en *L. Ahlfors* aequivalent zijn en ruimer dan het criterium van *Caratheodory* en *Valiron* en dan een voldoende voorwaarde, die uit het criterium van *L. Ahlfors* volgt.

In het laatste hoofdstuk wordt het criterium van *L. Ahlfors* voor een algemeen gebied bewezen en aangetoond dat dit ruimer is dan alle voor de hand liggende uitbreidingen van bovengenoemde voorwaarden.

Literatuur:

J. Wolff, C. R., t. 191, p. 921 (1930) . . . . [7]
B. F. Wever, Begrensde holomorfe functies (proefschrift 1931) [8]
L. Ahlfors, Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova Series A, t. 1, no. 9 (1930) . . . . [9]
C. Visser, C. R., t. 193, p. 1388 (1931) . . . . [10]
J. G. van der Corput, Kon. Ak. van Wetensch., Vol. 33, p. 330 (1932) . . . . [11]
J. H. Wansink, Eenige randproblemen der conforme afbeelding (proefschrift 1930) . . . . [12]

Opmerking: In het volgende hoofdstuk verwijst een getal tusschen vierkante haken naar de bovengenoemde publicatie met hetzelfde getal.

HOOFDSTUK I.

OVER DE FUNCTIES, DIE HOLOMORF ZIJN IN HET REÇHTERHALFVLAK EN EEN POSITIEF REËEL DEEL HEBBEN.

§ 1. Hulpstelling.

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *is holomorf voor* $|z| \leqq R$.

Bewering: *Voor* $|z| < R$ *geldt:*

$$w(z) = \text{constante} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,\frac{t+z}{t-z}\,d\Theta,$$

waarin $t = R\,e^{i\Theta}$.

Bewijs: Als we $z = r\,e^{i\varphi}$ stellen, is voor $|z| \leqq R$:

$$w(z) = a_0 + b_0 i + \sum_0^{\infty} (a_n + b_n i)\, r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Hieruit volgt: $u(t) = a_0 + \sum_0^{\infty} R^n (a_n \cos n\Theta - b_n \sin n\Theta)$.

Door de beide leden van de laatste vergelijking opvolgend te vermenigvuldigen met: 1, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$, ..., $\cos n\Theta$, $\sin n\Theta$, ..., en te integreeren tusschen 0 en 2π, leidt men af:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,d\Theta,$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(t)\cos n\Theta\,d\Theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(t)\sin n\Theta\,d\Theta. \end{aligned}\right\}\quad n = 1, 2, \ldots$$

Dus:

$$w(z) = b_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, d\Theta + \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(t)(\cos n\Theta - i \sin n\Theta)\, d\Theta =$$

$$= b_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, d\Theta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} u(t)\frac{z^n}{R^n} e^{-in\Theta}\, d\Theta =$$

$$= b_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, d\Theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\left(\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{R^n} e^{-in\Theta}\right) d\Theta,$$

omdat de reeks onder het integraalteeken uniform convergeert voor $|z| \leqq R$.

Wegens:

$$\sum_1^{\infty}\frac{z^n e^{-in\Theta}}{R^n} = \frac{z e^{-i\Theta} R^{-1}}{1 - z e^{-i\Theta} R^{-1}} = \frac{z}{R e^{i\Theta} - z} = \frac{z}{t - z},$$ vinden we:

$$w(z) = b_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, d\Theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\frac{z}{t - z}\, d\Theta =$$

$$= b_0 i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\frac{t + z}{t - z}\, d\Theta,$$ w.t.b.w.

§ 2. Een bovenste grens voor de modulus van de n^e^ afgeleide.

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *is holomorf in het rechterhalfvlak* $(x > 0)$, *terwijl* $u > 0$.

Bewering: $$\left|\frac{d^n w}{d z^n}\right| \leqq \frac{n!\, u}{x^n}$$

Bewijs: Binnen iedere cirkel in het rechterhalfvlak is $w(z)$ holomorf. Volgens § 1 geldt dus binnen (R), een cirkel met middelpunt M op $\mathrm{I}(z) = y$ rechts van z, en zoo groote straal R, dat z erbinnen ligt, zie fig. 1,:

$$w(z) = \text{constante} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{t + z - M}{t - z - M} d\Theta.$$

z-vlak

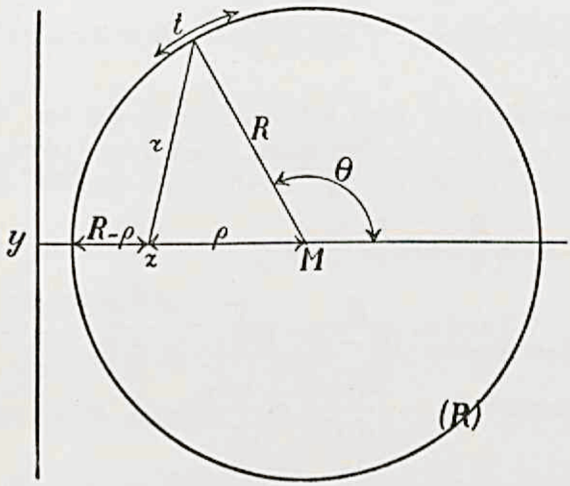

Fig. 1

Hieruit volgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{t - M}{(t - z - M)^2} d\Theta,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{t - M}{(t - z - M)^3} d\Theta,$$

en algemeen:

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \frac{n!}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{t - M}{(t - z - M)^{n+1}} d\Theta.$$

Daar $|t - M| = R$, $|t - z - M| = r$ en $\geqq R - \varrho$, volgt:

$$\left|\frac{d^n w}{d z^n}\right| \leqq \frac{n!}{\pi} \frac{R}{(R-\varrho)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{u(t)\, d\Theta}{r^2} =$$

$$= \frac{n!}{\pi} \frac{R}{(R-\varrho)^{n-1}} \frac{1}{R^2 - \varrho^2}\, 2\pi u(z),$$

omdat volgens *Poisson*: $\int_0^{2\pi} u(t) \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2} d\Theta = 2\pi u(z)$.

Deze schatting geldt voor iedere M en R, die aan de bovengestelde eischen voldoen. We laten M nu over $I(z) = y$ tot oneindig naderen en R tot het reëele deel van M, dan nadert $R - \varrho$ tot x en $\frac{R}{R+\varrho}$ tot $\frac{1}{2}$, zoodat:

$$2u(z)\, n! \frac{R}{(R-\varrho)^n} \cdot \frac{1}{R+\varrho} \rightarrow \frac{n!\, u(z)}{x^n},$$

waarmee bewezen is: $\left|\frac{d^n w}{d z^n}\right| \leqq \frac{n!\, u}{x^n}$.

Opmerking: Voor de functie $w(z) = \frac{1}{z}$, die aan onze onderstellingen voldoet, is voor $z = x$: $\left|\frac{d^n w}{d z^n}\right| = \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{n!\, u}{x^n}$.

§ 3. De angulaire afgeleide in het punt oneindig.

Onderstelling: *$w(z) = w(x + iy) = u + iv$ is holomorf voor $x > 0$, met $u > 0$.*

Bewering: *Voor $z \rightarrow \infty$, angulair, d.w.z.: binnen een hoek $|\arg z| = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$, naderen $\frac{u}{x}$, $\frac{dw}{dz}$ en $\frac{w}{z}$ gelijkmatig tot een limiet $\lambda \geqq 0$ en $< \infty$.*

λ heet de angulaire afgeleide van $w(z)$ in het punt oneindig.

Bewijs: 1. Uit § 2 volgt dat $\frac{\partial u}{\partial x} \leqq \frac{u}{x}$ en hieruit dat op iedere rechte $y = c$, $\frac{u}{x}$ monotoon daalt en dus tot een limiet λ (c), $\geqq 0$ en $< \infty$, nadert.

2. Zij $\lambda (0) = 0$, dus $\frac{u}{x} \to 0$ voor $z \to \infty, y = 0$.

Wegens $\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \leqq \frac{u}{x}$ is $\frac{\partial v}{\partial x} \to 0$ voor $z \to \infty, y = 0$, dus ook $\frac{v}{z} \to 0$.

Hieruit volgt: $\frac{w}{z} = \frac{w}{x} \to 0$ voor $z \to \infty, y = 0$.

Omdat $\frac{w}{z}$ nooit negatief is nadert $\frac{w}{z}$ gelijkmatig tot nul als $z \to \infty$, angulair (zie opmerking 2).

Daar $\left|\frac{d\,w}{d\,z}\right| \leqq \frac{u}{x} \leqq \frac{|w|}{|x| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}$, naderen ook $\frac{u}{x}$ en $\frac{d\,w}{d\,z}$ tot nul als $z \to \infty$, angulair.

3. Zij nu $\lambda (0) = \lambda > 0$, dus $\frac{u}{x} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, $y = 0$ en overal op de reëele as $\frac{u}{x} \geq \lambda$.

Daar $\left|\frac{d\,w}{d\,z}\right| \leqq \frac{u}{z}$, is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een X, zoodat voor $x > X$: $\left|\frac{d\,w}{d\,z}\right| < \lambda + \varepsilon$, als $y = 0$.

Nu is $w(x) = w(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\,w}{d\,x}\, d\,x$.

Kies $x > x_0 > X$, dan is:

$$\left|w(x)\right| \leqq \left|w(x_0)\right| + \int\limits_{x_0}^{x} \left|\frac{d\,w}{d\,x}\right| d\,x \leqq \left|w(x_0)\right| + (\lambda + \varepsilon)\ (x - x_0),$$

en: $$\left|\frac{w(x)}{x}\right| \leqq (\lambda+\varepsilon)\frac{x-x_0}{x}+\frac{|w(x_0)|}{x},$$

waaruit blijkt dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een X_1 is, zoodat voor $x > X_1$:

$$\left|\frac{w(x)}{x}\right| < \lambda + 2\,\varepsilon.$$

Ook is echter: $\left|\frac{w(x)}{x}\right| \geqq \frac{u}{x} \geqq \lambda$ voor iedere x, $y = 0$.

Zoodat hieruit volgt: $\left|\frac{w(z)}{z}\right| \to \lambda$ voor $z \to \infty$, $y = 0$.

Daar ook $\frac{u}{x} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, $y = 0$, moet $\frac{v}{x} \to 0$ en dus $\frac{w}{z} = \frac{w}{x} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, $y = 0$.

Omdat $\frac{w}{z}$ nooit negatief is, volgt: $\frac{w}{z} \to \lambda$ gelijkmatig voor $z \to \infty$, angulair (zie opmerking 2).

Beschouw nu $\varphi(z) = w(z) - \lambda z$.

Uit het bovenstaande volgt dat $\frac{\varphi(z)}{z} \to 0$, gelijkmatig voor $z \to \infty$, angulair, dus ook $\frac{R\{\varphi(z)\}}{x} \to 0$.

Hieruit volgt: $\frac{u}{z} = \lambda + \frac{R\{\varphi(z)\}}{x} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, angulair en wegens het monotoon dalen van $\frac{u}{x}$ op lijnen evenwijdig aan de reëele as, is $\frac{u}{x} \geqq \lambda$ in het geheele rechterhalfvlak.

$\varphi(z)$ is dus een functie van de klasse, terwijl voor $z \to \infty$, $y = 0$: $\frac{R\{\varphi(z)\}}{z} \to 0$.

Volgens 2 naderen dus $\frac{\varphi}{z}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ en $\frac{R(\varphi)}{z}$ gelijkmatig tot nul voor $z \to \infty$, angulair, d.w.z. $\frac{w}{z}$, $\frac{d\,w}{d\,z}$ en $\frac{u}{x}$ gelijkmatig tot λ voor $z \to \infty$, angulair.

Opmerkingen:

1. *J. Wolff* (Kon. Ak. van Wetensch., Vol. 33, p. 1185, 1930)

en C. *Visser* (Nieuw Archief, 2e reeks, dl. 17, p. 147, 1932) hebben aangetoond dat de eisch: $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ noodig is, door een voorbeeld te construeeren waarbij $\frac{w}{z}$ niet tot λ nadert, als z over een puntenrij, die buiten iedere hoek komt, tot oneindig nadert.

2. We hebben in het bovenstaande bewijs tweemaal de volgende hulpstelling gebruikt:

Onderstelling: $\frac{w(z)}{z}$ *nooit negatief in het rechterhalfvlak.*

$$\frac{w(z)}{z} \to \lambda \; (\lambda \geqq 0) \text{ voor } z \to \infty, \; y = 0.$$

Bewering: $\frac{w(z)}{z} \to \lambda$ *gelijkmatig voor* $z \to \infty, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$

$$\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0.$$

Bewijs: We zullen hierbij gebruik maken van de volgende stelling van *Vitali*, een uitbreiding van de stelling van *Weierstrass:*

Als in een gebied G een rij gelijkmatig begrensde holomorfe functies gegeven is, die in een zich in het inwendige van G verdichtende puntverzameling tot een limiet nadert, dan zal de functierij in ieder punt van G tot een limiet naderen en de grensfunctie is weer holomorf in G.

In ieder gesloten deelgebied van G is de convergentie gelijkmatig.

We kunnen hierin „gelijkmatig begrensd" vervangen door: „er is een continuum van waarden, die de functies niet aannemen (dus b.v. de negatieve reëele as), daar een transformatie tot het bovenstaande geval terugvoert.

Om nu onze hulpstelling te bewijzen beschouwen we in het gebied G_0, begrensd door de cirkels: $|z| = 1$ en $|z| = 2$ en de rechten $\arg z = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, de functierij $\psi_n(z) = \frac{w(2^n z)}{2^n z}$, welke in ieder punt van de reëele as $\to \lambda$, voor $n \to \infty$.

$\psi_n(z)$ neemt nergens negatieve waarden aan.

Volgens de bovengenoemde stelling van *Vitali* geldt dus binnen $G_0 : \psi_n(z) \to \lambda$, voor $n \to \infty$ en is deze convergentie in G_0 gelijkmatig, waarmee onze bewering bewezen is.

HOOFDSTUK II.

CONFORMITEIT IN EEN RANDPUNT.

§ 4. **Definitie.**

Als $w(z)$ een gebied G uit het z-vlak conform afbeeldt op een gebied H van het w-vlak, dan heet deze afbeelding *conform in het randpunt* a *van* G als $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ \text{angulair}}} \dfrac{w(z) - w(a)}{z - a} \neq 0$ en $\neq \infty$, waarbij z tot a mag naderen binnen iedere hoek met top a waarvan de beenen het gebied G binnendringen.

Uit de conformiteit in a volgt de hoektrouw in a, d.w.z. de beelden van twee krommen, die elkaar in a onder een hoek Θ snijden, snijden elkaar in $w(a)$ onder dezelfde hoek Θ.

Het omgekeerde geldt niet.

§ 5. **Een deelgebied van het rechterhalfvlak, dat een deugdelijk deelgebied heeft, deugt.**

We zeggen dat een gebied G, met het punt oneindig als bereikbaar randpunt, *deugt*, als de conforme afbeelding van het rechterhalfvlak op G, waarbij de punten oneindig correspondeeren, conform is op oneindig (in het randpunt oneindig).

Hulpstelling.

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *is holomorf voor* $x > 0$ *met* $u > 0$.

Er is een puntenrij $z_n \to 0$, $n = 1, 2 \dots$, *waarvoor* $w_n = w(z_n) \to 0$, *terwijl* $\dfrac{u_n}{x_n} < M$.

Bewering: $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ \text{angulair}}} \dfrac{w(z)}{z} \neq \infty$.

Bewijs: Zij z een punt van het rechterhalfvlak ($x > 0$), z_n een punt van de gegeven rij en $w_n = w(z_n)$.

Zij verder: C_n de cirkelomtrek bepaald door:

$$\left|\frac{t - z_n}{t - z_n^*}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z - z_n^*}\right|,$$

en D_n de cirkelomtrek bepaald door:

$$\left|\frac{t - w_n}{t - w_n^*}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z - z_n^*}\right|,$$

waarin z_n^* en w_n^* de spiegelbeelden van z_n en w_n t.o.v. de imaginaire as zijn.

Volgens het contractietheorema van Schwarz ligt w binnen of op D_n voor iedere n.

Wegens $\frac{u_n}{x_n} < M$, $n = 1,2 \ldots.$, is de straal van $D_n < M \times$ die van C_n.

Voor $n \to \infty$ heeft C_n tot limietstand de cirkelomtrek C door z, die in O aan Oy raakt.

Uit één en ander volgt dat w ligt binnen of op de cirkelomtrek D, die door vermenigvuldiging met M met centrum O uit C ontstaat.

Dus: $\frac{u^2 + v^2}{u} < M \frac{x^2 + y^2}{x}$

of voor $y = 0$: $\frac{u^2 + v^2}{u} < M x$

dus a fortiori: $u < M x$ of $\frac{u}{x} < M$.

In verband met § 2, volgt hieruit: $\left|\frac{dw}{dz}\right| < M$ en daar we door $\frac{1}{w}$ als functie van $\frac{1}{z}$ te beschouwen uit § 3 kunnen besluiten dat $\frac{dw}{dz}$ en $\frac{w}{z}$ tot dezelfde limiet naderen als $z \to 0$ binnen een hoek: $|\arg z| = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, volgt uit het bovenstaande dat deze limiet niet oneindig kan zijn — hetgeen we bewijzen wilden.

Stelling.

Onderstelling: *G is deelgebied van H, dat deelgebied is van het rechterhalfvlak van het w-vlak. Het punt O is bereikbaar randpunt van G en H. Voor $w(z)$, die de eenheidscirkel $|z| < 1$ conform afbeeldt op G, terwijl $w(1) = 0$, geldt:*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \text{angulair}}} \frac{w}{1 - z} \neq 0 \text{ en } \neq \infty.$$

Bewering: *Voor $\psi(z)$, die de eenheidscirkel $|z| < 1$ conform afbeeldt op H, met $\psi(1) = 0$, geldt:*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \text{angulair}}} \frac{\psi}{1 - z} \neq 0 \text{ en } \neq \infty.$$

Bewijs: *Zij $w(0) = \psi(0) = a$.*

Zij Φ_H een Greensche functie van H en Φ_G een Greensche functie van G, $\Phi_H(a) = \Phi_G(a) = -\infty$.

Φ_H is nul op de omtrek van H en negatief binnen H, Φ_G evenzoo op en binnen G. Op de omtrek van G is $\Phi_H \leqq 0$ en dus $\Phi_G - \Phi_H \geqq 0$.

Daar $\Phi_G - \Phi_H$ harmonisch is binnen G, geldt hier: $\Phi_G \geqq \Phi_H$.

Hieruit volgt dat als $z_1(w)$ de inverse funtie van w is en $z_2(\psi)$ die van ψ, dat $|z_2(P)| \leqq |z_1(P)|$.

Zij P een punt van de reëele as van het w (en ψ) vlak.

Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een A zoodat als $OP < A$:

$$\arg\{1 - z_1(P)\} < \varepsilon,$$

als $\varepsilon < \frac{1}{2}$ is: $1 - x_2(P) > \frac{1}{2}\{1 - x_1(P)\}$ en $\frac{OP}{1 - x_2} < 2\frac{OP}{1 - x_1}$, dus begrensd, omdat de afbeelding van G conform is in het randpunt 0.

Volgens de in deze paragraaf bewezen hulpstelling, volgt hieruit:

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ \text{angulair}}} \frac{\psi(z)}{1 - z} \neq \infty.$$

Daar uit afbeelding van de eenheidscirkel op het rechterhalfvlak, wegens § 3, volgt dat deze limiet niet nul kan zijn, is onze bewering hiermee bewezen.

Opmerking: Als $w(z)$ het rechterhalfvlak van het z-vlak conform afbeeldt op een deelgebied van het rechterhalfvlak van het w-vlak en $w(\infty) = \infty$, beeldt $W = \frac{1}{w}$ als functie van $Z = \frac{z-1}{z+1}$ het inwendige van den eenheidscirkel $|Z| < 1$ af op een gebied in het W-vlak, terwijl $W(1) = 0$.

Als $\lim\limits_{\substack{Z \to 1 \\ \text{angulair}}} \frac{W}{1-Z} \neq 0$ en ∞, is $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{w}{z} \neq 0$ en ∞, en omgekeerd, waaruit: als een deelgebied G van het rechterhalfvlak een deelgebied H heeft met het punt ∞ als bereikbaar randpunt, terwijl de afbeelding van H op het rechterhalfvlak conform is op oneindig, is dit ook voor G het geval, m.a.w.: een deelgebied van het rechterhalfvlak met een deugdelijk deelgebied, deugt.

§ 6. **Een gebied, dat deelgebied is van een deugdelijk gebied en een deugdelijk deelgebied heeft, deugt.**

Hulpstelling.

Als een deugdelijk gebied G conform afgebeeld wordt op G^*, zoodat de punten oneindig correspondeeren en de afbeelding in deze punten conform is, deugt G^*.

Bewijs: Zij $w(z)$ de functie, die het rechterhalfvlak van het z-vlak conform op G afbeeldt, dan is $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{w}{z} \neq 0$ en $\neq \infty$, terwijl z angulair correspondeert met w angulair (omdat een afbeelding, die in een randpunt conform is, daar ook hoektrouw is).

Zij $\psi(w)$ de functie, die G conform afbeeldt op G^* met $\psi(\infty) = \infty$ en volgens onderstelling: $\lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi(w)}{w} \neq 0$ en $\neq \infty$.

$\psi\{w(z)\}$ beeldt dan het rechterhalfvlak van het z-vlak conform af op G^*, terwijl: $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi\{w(z)\}}{z} = \lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi(w)}{w} \cdot \lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{w}{z} \neq 0$ en $\neq \infty$ dus de afbeelding conform op oneindig is.

Stelling.

Onderstelling: *Het gebied G heeft een deugdelijk deelgebied G_1 en is deelgebied van een deugdelijk gebied G_2.*
Bewering: *G deugt.*
Bewijs: Beeld G_2 conform af op het rechterhalfvlak, dan wordt G_1 afgebeeld op een deelgebied G_1^* van het rechterhalfvlak, dat volgens bovenstaande hulpstelling deugt.

G wordt hierbij afgebeeld op het gebied G^*, dat deelgebied is van het rechterhalfvlak en het deugdelijke gebied G_1^* tot deelgebied heeft.

Volgens § 5 deugt G^*, volgens de hulpstelling van deze paragraaf ook G.

Opmerkingen:

1. Uit bovenstaande stelling volgt dat een gebied, dat het rechterhalfvlak bevat, deugt als het deelgebied is van een deugdelijk gebied.

2. Omdat een halfvlak een deugdelijk gebied is, volgt uit onze stelling de voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig van *Caratheodory* en *Valiron*, [3] en [5],:

Een gebied deugt als het deelgebied is van een halfvlak en een halfvlak tot deelgebied heeft.

3. *S. Warschawski* bewijst (Math. Zeitschrift Bd.107, p. 321, 1932): een gebied deugt in 0 (d.w.z.: de afbeelding op het halfvlak, waarbij de punten 0 correspondeeren, is conform in 0) als de grens ligt tusschen die van twee andere gebieden, waarbij voor 't buitenste in 0 tweedimensionaal $\lim \frac{w}{z} \neq 0$ en $\neq \infty$ en voor het binnenste er een rij punten $z_n \to 0$ is waarop $\frac{R\{\psi(z_n)\}}{x_n}$ begrensd is, als $w(z)$ en $\psi(z)$ de afbeeldingsfuncties van het rechterhalfvlak van het z-vlak op de genoemde gebieden zijn.

Door het buitenste gebied op het rechterhalfvlak af te beelden blijkt dat het binnenste gebied deugt en dat dit resultaat dus minder ruim is dan het onze.

HOOFDSTUK III.

EENIGE VOORWAARDEN VOOR CONFORMITEIT OP ONEINDIG VAN DE AFBEELDING VAN HET RECHTERHALFVLAK VAN HET *Z*-VLAK OP EEN DEELGEBIED VAN DAT VAN HET *W*-VLAK.

§ 7. Ongelijkheid I en II.

In deze paragraaf worden twee ongelijkheden afgeleid, waarvan de eerste, op eenige beperkende voorwaarden na, identiek is aan de eerste hoofdongelijkheid van *L. Ahlfors* [9], wiens bewijs hier overgenomen wordt, terwijl de tweede met zijn tweede hoofdongelijkheid correspondeert, maar door onze meerdere onderstellingen eenvoudiger bewezen wordt.

Stelling.

Gegeven: In het $\omega = \mu + i\nu$-vlak een gebied H met grens Δ, gelegen binnen de strook $|\nu| \leqq \frac{a}{2}$, terwijl H voor $\mu \geqq \mu_0$ de reëele as bevat.

Voor $\mu > \mu_0$ definieeren we als $\Theta(\mu)$ dàt segment van de lijn $R(\omega) = \mu$ dat tot H behoort en de reëele as snijdt, zie fig. 2.

We onderstellen dat Δ zoo gevormd is, dat $\Theta(\mu)$ slechts geïsoleerde discontinuiteitspunten heeft. Dit beteekent dat Δ geïsoleerde punten met discontinue raaklijn of raaklijn evenwijdig aan de imaginaire as moet hebben, wel mogen deelen van Δ zijn: lijnstukken loodrecht op de reëele as, mits de verzameling μ's waarbij dit voorkomt geïsoleerd is. — Vergl. *Ahlfors* [9] blz. 6, 7.

$\omega(\zeta)$ beelde de strook $|\eta| \leqq \frac{b}{2}$ van het $\zeta = \xi + i\eta$-vlak conform af op het gebied H, waarbij $\omega(+\infty) = +\infty$; $\zeta(\omega)$ zij hiervan de inverse functie.

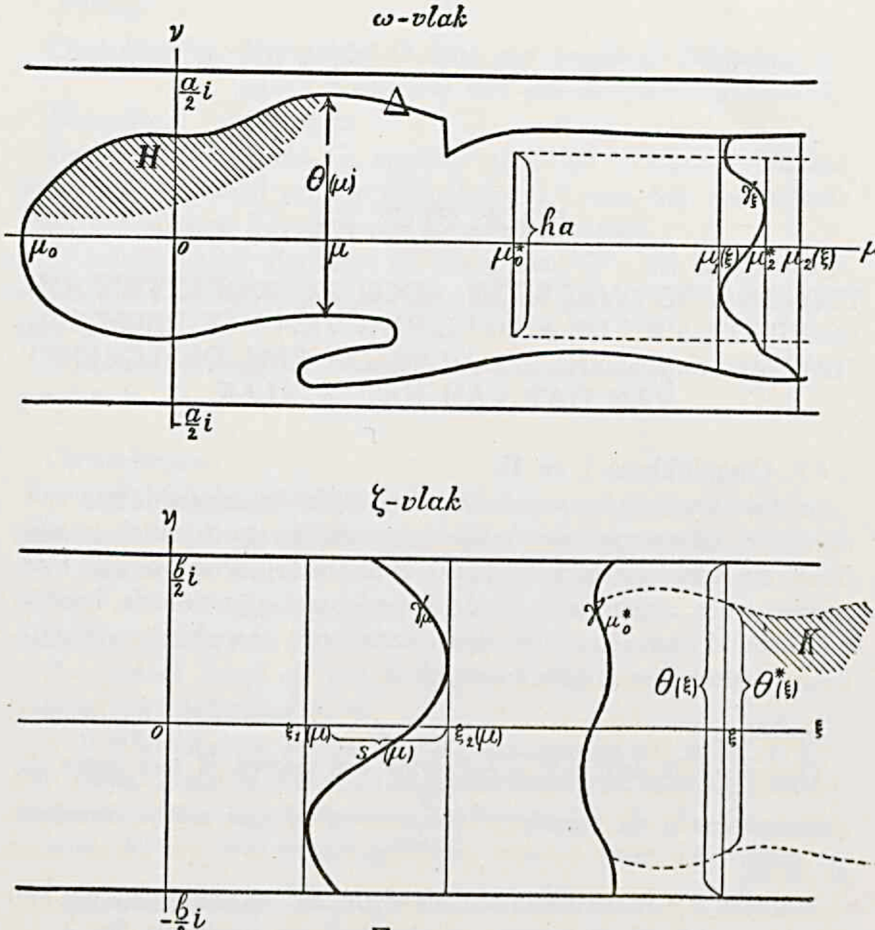

Fig. 2

Zij γ_ξ het beeld van het lijnstuk $\Theta(\xi)$: $R(\zeta) = \xi$, $|I(\zeta)| \leqq \frac{b}{2}$, γ_μ evenzoo van $\Theta(\mu)$.

$\mu_1(\xi)$ en $\mu_2(\xi)$ zij minimale, resp. maximale μ op γ_ξ, evenzoo $\xi_1(\mu)$ en $\xi_2(\mu)$ de kleinste en grootste ξ op γ_μ.

$\xi_2(\mu) - \xi_1(\mu) = s(\mu) =$ schommeling van ξ op γ_μ.

$\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) = s(\xi) =$ schommeling van μ op γ_ξ.

l_ξ en l_μ zij de lengte van γ_ξ, resp. γ_μ.

Bewering: a) $\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq b\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - 4\,b,$

voor $\mu_2 > \mu_1 \geqq \mu_0$, als $\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} > 2$; **ongelijkheid I** *(L. Ahlfors)*

b) als H voor $\mu > \mu_0{}^*$ de strook $|\nu| \leqq h\frac{a}{2}$, $h < 1$, bevat:

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) \geqq \frac{a}{b}\,h\,(\xi_2 - \xi_1) - 12a,$$

voor $\mu_1(\xi_1) \geqq \mu_0{}^*$ en $\xi_2 - \xi_1 > 2\,b$; **ongelijkheid II.**

Bewijs: a) $\quad l^2_\mu \geqq b^2 + s^2(\mu)$, daar $l_\mu \geqq$ diagonaal van de rechthoek met zijden b en $s(\mu)$.

dus: $\left\{\int\limits_{\Theta(\mu)} |\zeta'(\omega)|\,d\,\nu\right\}^2 \geqq b^2 + s^2(\mu)$,

waaruit volgens de *ongelijkheid van Schwarz:*

$$\Theta(\mu)\int\limits_{\Theta(\mu)} |\zeta'(\omega)|^2\,d\,\nu \geqq b^2 + s^2(\mu).$$

Deze ongelijkheid deelen we door $\Theta(\mu)$ en integreeren van μ_1 tot μ_2, waarbij μ_1 zoo groot moet zijn dat $\Theta(\mu) > 0$ voor $\mu \geqq \mu_1$, terwijl we verder onderstellen: $\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} > 2$, waaraan b.v. voldaan is als $\mu_2 - \mu_1 > 2a$.

We vinden:

$$b^2\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\,\mu}{\Theta(\mu)} + \int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{s^2(\mu)}{\Theta(\mu)}\,d\,\mu \leqq \int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\int\limits_{\Theta(\mu)} |\zeta'|^2\,d\,\nu\,d\,\mu \leqq$$
$$\leqq b\,\{\,\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) + s(\mu_1) + s(\mu_2)\,\},$$

welke laatste schatting volgt uit het feit dat de dubbele integraal een deel van het oppervlak tusschen $\xi = \xi_2(\mu_2)$, $\xi = \xi_1(\mu_1)$ en $\eta = \pm\frac{b}{2}$ voorstelt.

Hieruit volgt:

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq b\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} + \left\{\frac{1}{b}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{s^2(\mu)}{\Theta(\mu)}d\mu - s(\mu_1) - s(\mu_2)\right\} \ldots (1)$$

Daar we ondersteldden: $\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} > 2$, geldt voor de waarden μ'_1 en μ'_2

$$\text{waarvoor } \int_{\mu_1}^{\mu'_1}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} = \int_{\mu'_2}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} = 1: \qquad \mu'_1 < \mu'_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Uit (1) volgt: $\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq b\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} + h(\mu_1) + k(\mu_2)$. (3)

waarin: $h(\mu) = \frac{1}{b}\int_{\mu}^{\mu'_1}\frac{s^2(\mu)}{\Theta(\mu)}d\mu - s(\mu)$ en $k(\mu) = \frac{1}{b}\int_{\mu'_2}^{\mu}\frac{s\;(\mu)}{\Theta(\mu)}d\mu - s(\mu)$.

We beweren nu dat $h(\mu)$ en $k(\mu)$ niet in de geheele intervallen (μ_1, μ'_1) resp. (μ'_2, μ_2) kleiner dan $-b$ zijn. Want uit $h(\mu) < -b$

volgt:
$$b + \frac{1}{b}\int_{\mu}^{\mu'_1}\frac{s^2(\mu)}{\Theta(\mu)}d\mu < s(\mu).$$

Stel nu $\alpha(\mu) = \frac{1}{b}\int_{\mu}^{\mu'_1}\frac{s^2(\mu)}{\Theta(\mu)}d\mu$, dan volgt de ongelijkheid:

$$\{b + \alpha(\mu)\}^2 < -b\,\Theta(u)\,\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}$$

$$\text{of: } \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} < -\frac{b\,d\,\alpha(\mu)}{\{b + \alpha(\mu)\}^2} = d\left\{\frac{b}{b + \alpha(\mu)}\right\}$$

Geldt dit in het geheele interval (μ_1, μ'_1), dan is:

$$\int_{\mu_1}^{\mu'_1}\frac{d\mu}{\Theta(\mu)} < \int_{\mu_1}^{\mu'_1} d\left\{\frac{b}{b + \alpha(\mu)}\right\} = 1 - \frac{b}{b + \alpha(\mu_1)} < 1,$$ tegen het onderstelde in (2).

Dus is er in het interval (μ_1, μ'_1) minstens één punt M_1 met $h(M_1) \geqq -b$, evenzoo in het interval (μ'_2, μ_2) minstens één punt M_2 met $k(M_2) \geqq -b$.

Daar $M_1 < \mu'_1 < \mu'_2 < M_2$ kunnen we in (3) μ_1 en μ_2 door M_1 en M_2 vervangen en krijgen we omdat $h(M_1)$ en $k(M_2) \geqq -b$:

$$\xi_1(M_2) - \xi_2(M_1) \geqq b \int_{M_1}^{M_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - 2b.$$

Wegens $\mu_1 \leqq M_1$ en $\mu_2 \geqq M_2$ is ook: $\xi_2(\mu_1) \leqq \xi_2(M_1)$ en $\xi_1(\mu_2) \geqq \xi_1(M_2)$ en dus stellig:

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq b \int_{M_1}^{M_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - 2b = b \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - b \left\{ \int_{\mu_1}^{M_1} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} + \int_{M_2}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} + 2 \right\}$$

$$\geqq b \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - 4b,$$ wegens (2), waarmee ongelijkheid I bewezen is.

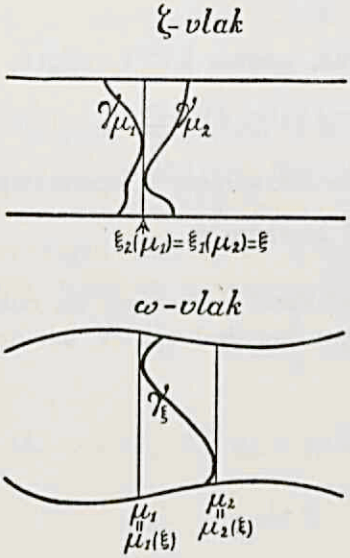

Fig. 3

Opmerking: Daar $\Theta(\mu) < a$ kunnen we schrijven:

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq \frac{b}{a}(\mu_2 - \mu_1) - 4b$$

als $\mu_2 - \mu_1 > 2a$.

Onderstel $\xi_1(\mu_2) = \xi_2(\mu_1) = \xi$, dan geeft dit:

$$0 \geqq \frac{b}{a}\{\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi)\} - 4b$$

als $\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) > 2a$.

Hieruit: $\mu_2(\xi) - \mu_1(\xi) \leqq 4a$, hetwelk dus altijd geldt, d.w.z. $s(\xi) \leqq 4a$.

b) $\zeta(\omega)$ beeldt de strook $|\nu| < h\frac{a}{2}$ af op een gebied K gelegen in de strook $|\eta| < \frac{b}{2}$ en voldoende aan de onderstellingen omtrent H, behalve misschien dat niet voor groot genoege ξ de reëele as geheel binnen K ligt — zie fig. 2, blz. 26.

De rol, die de reëele as bij het definieeren van $\Theta^*(\xi)$ zou moeten spelen kunnen we echter overdragen aan het beeld van de reëele as van het ω-vlak en als $\Theta^*(\xi)$ definieeren het segment van $R(\zeta) = \xi$ dat geheel tot K behoort, de punten $\zeta(\mu_0^*)$ en $+\infty$ scheidt en van links komende over de beeldkromme van de reëele as het eerst bereikt wordt — vergl. L. *Ahlfors* [9] blz. 6, 7.

We mogen nu de eerste ongelijkheid toepassen, waarin ξ en μ van plaats verwisselen, b: ha en a: b wordt, dus:

$$\mu_1^*(\xi_2) - \mu_2^*(\xi_1) \geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 4\,ha, \text{ als } \xi_2 - \xi_1 > 2b \text{ en } \xi_1 > \xi_2(\mu_0^*),$$

waarin $\mu_1^*(\xi)$ en $\mu_2^*(\xi)$ de kleinste en grootste μ op γ_ξ, tusschen $\nu = \pm h\frac{a}{2}$, zijn.

Echter: $\mu_1^*(\xi) \leqq \mu_1(\xi) + s(\xi)$

$\mu_2^*(\xi) \geqq \mu_2(\xi) - s(\xi)$, waaruit, wegens h < 1, volgt:

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) \geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 4a - s(\xi_1) - s(\xi_2) \geqq$$

$$\geqq \frac{ha}{b}(\xi_2 - \xi_1) - 4\,a - 8\,a, \text{ volgens de opmerking}$$

van bldz. 29, waarmee ongelijkheid II bewezen is.

Opmerkingen: 1. In de laatste ongelijkheid kunnen we *ha* ook beschouwen als de minimumbreedte van het deel van H, dat de reëele as bevat, tusschen γ_{ξ_1} en γ_{ξ_2}.

2. Volgens de opmerking van bldz. 29 is:

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq \frac{b}{a}(\mu_2 - \mu_1) - 4\,b \text{ als } \mu_2 - \mu_1 > 2\,a.$$

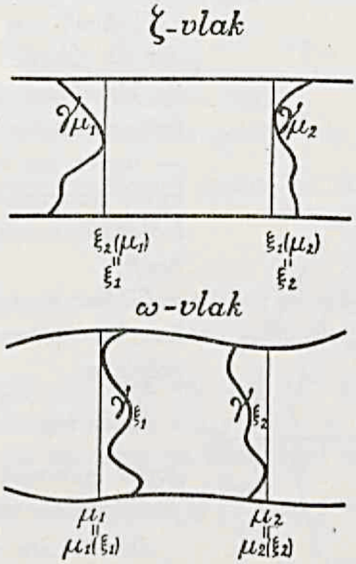

Fig. 4

Volgens ongelijkheid II is:

$$\mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) > 2\,a \text{ als } h(\xi_2 - \xi_1) > 14\,b.$$

Uit bovenstaande figuur volgt dat als we in ongelijkheid I $\xi_1(\mu_2)$ vervangen door ξ_2 en $\xi_2(\mu_1)$ door ξ_1, we μ_1 moeten vervangen door $\mu_1(\xi_1)$ en μ_2 door $\mu_2(\xi_2)$, zoodat we krijgen:

$$\xi_2 - \xi_1 \geqq \frac{b}{a}\{\mu_2(\xi_2) - \mu_1(\xi_1)\} - 4\,b.$$

of:

$$\mu_2(\xi_2) - \mu_1(\xi_1) \leqq \frac{a}{b}(\xi_2 - \xi_1) + 4\,a,$$

$$\text{als } \xi_2 - \xi_1 > \frac{14\,b}{h} \text{ en } \xi_1 \text{ voldoende groot is.}$$

§ 8. **Hulpstelling.**

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak conform af op een deelgebied G van het rechterhalfvlak van het w-vlak, terwijl* $w(\infty) = \infty$.

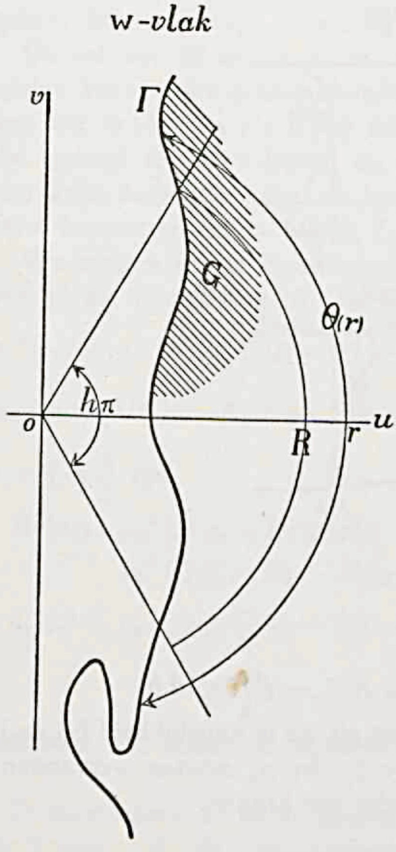

Fig. 5

G heeft een zoodanige grens Γ dat de functie $\Theta(r) =$ *boog van de cirkel met straal r. die tot G behoort en bovendien de reëele as — welke we voor* $u > u_0$, *geheel in G onderstellen — snijdt, geïsoleerde discontinuiteitspunten heeft.*

G bevat voor $|w| > R$ *de hoek* $h\pi$, $h < 1$, *symmetrisch t.o.v. de reëele as.*

Bewering: $\dfrac{lg|v(\pm yi)|}{lg\ y}$ *ligt voor groot genoege y tusschen twee positieve constanten.*

Bewijs: Stel $\omega = \lg w$ en $\zeta = \lg z$ dan beeldt $\omega(\zeta)$ de strook $|\eta| \leqq \frac{\pi}{2}$ conform af op een gebied gelegen in de strook $|\nu| \leqq \frac{\pi}{2}$, welke vanaf $\mu_0^* = \lg R$ de strook $|\nu| \leqq h\frac{\pi}{2}$ bevat.

Dan gelden volgens de gewijzigde ongelijkheid I (opmerking 2, bladz. 31) en ongelijkheid II, daar $a = b = \pi$, de volgende ongelijkheden:

$$(1) \ldots \mu_2(\xi_2) - \mu_1(\xi_1) \leqq \xi_2 - \xi_1 + 4\pi \text{ als } \xi_2 - \xi_1 > \frac{14\pi}{h},$$

$$(2) \ldots \mu_1(\xi_2) - \mu_2(\xi_1) \geqq h(\xi_2 - \xi_1) - 12\pi \text{ als } \xi_2 - \xi_1 > 2\pi,$$

en ξ_1 voldoende groot is.

Uit (1) volgt: $\dfrac{\mu_2(\xi_2)}{\xi_2} \leqq 1 - \dfrac{\xi_1 - 4\pi - \mu_1(\xi_1)}{\xi_2}$

Uit (2): $\frac{\mu_1(\xi_2)}{\xi_2} \geqq h - \frac{h\,\xi_1 + 12\pi - \mu_2(\xi_1)}{\xi_2}$

Stel $\xi_2 = \lg y$, dan zijn de eindpunten van γ_{ξ_2} — vergl. fig. 2, bldz. 26 — de punten $\lg w(+yi)$ en $\lg w(-yi)$ en volgt uit bovenstaande ongelijkheden dat $\frac{\lg|w(\pm yi)|}{\lg y}$ voor voldoend groote y tusschen twee positieve constanten ligt.

Daar we onderstelden dat ons gebied een hoek $h\pi$ bevat, beteekent dit dat voor voldoend groote y: $A < \frac{\lg|v(\pm yi)|}{\lg y} < B$, waarin A en B positief zijn.

§ 9. Een noodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig, bij eenige bijzondere onderstellingen.

Als $w(z)$ het rechterhalfvlak van het $z = x + iy$ vlak conform afbeeldt op het gebied G van het w-vlak, is noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig de eindigheid van $\lg \lambda$, d.w.z. het tot een eindige limiet naderen van $\lg \left|\frac{w}{z}\right|$ als $z \to \infty$ over de reëele as.

Van de harmonische functie $\lg \left|\frac{w}{z}\right|$ is $\arg \frac{w}{z}$ een geconjugeerde, zoodat voor de boven aan $\lg \frac{w}{z}$ gestelde eisch noodig en voldoende is de convergentie van $\int^{\infty} \left\{ \arg \frac{w(y)}{y} - \arg \frac{w(-y)}{-y} \right\} \frac{dy}{y}$.

Zie: *P. Fatou*, Acta Mathematica Bd. 30, 1906.

Daar $\arg y = \frac{\pi}{2}$ en $\arg(-y) = -\frac{\pi}{2}$ kan de laatste integraal vervangen worden door: $\int^{\infty} \{ \pi - \arg w(y) + \arg w(-y) \} \frac{dy}{y}$.

Voor een gebied dat symmetrisch is t.o.v. de reëele as, waarbij dus $\arg w(y) = -\arg w(-y)$, volgt hieruit als *noodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig: de convergentie van*

$$\int^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arg w(y) \right\} \frac{dy}{y}.$$

Bij eenige bijzondere onderstellingen zullen we hieruit een noodige en voldoende voorwaarde afleiden, die alleen afhangt van de grens van het beeldgebied.

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak af op een deelgebied G van dat van het w-vlak,* $w(\infty) = \infty$.
De grens Γ *van G zij symmetrisch t.o.v. de reëele as en op het deel van* Γ *boven deze as draaie de raaklijn, voor* $\Theta = \frac{\pi}{2} - \arg w \rightarrow 0$, *continu linksom tot verticaal.*

Bewering: *Noodig en voldoende voor de conformiteit op oneindig is de convergentie van* $\int^{\infty} \frac{u}{v^2}\, dv$, *als hierin* (u, v) *punten van* Γ *zijn.*

Bewijs: Uit het gegeven volgt:

1e. G bevat vanaf $|w| = R$ de hoek $|\arg w| \leq h\,\frac{\pi}{2}$, $h < 1$, zoodat er volgens § 8 een Y_1 is, zoodat voor $y > Y_1$ geldt: $A < \frac{\lg v(y)}{\lg y} < B$, waarin A en B positief zijn.

2e. Er is een Y_2, zoodat voor $y > Y_2$ geldt: $\frac{d\,\Theta(y)}{dy} < 0$.

Er is dus een $Y_0 > Y_1$ en Y_2, zoodat voor $y > Y_0$ aan deze beide voorwaarden voldaan is.

Nu kunnen we de noodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig: $\int^{\infty} \Theta(y)\,\frac{dy}{y}$ convergent, zoo veranderen dat hierin alleen u en v voorkomen, waarbij dan (u, v) punten van Γ zijn.

Voor $Y > Y_0$ is:

$$\text{1e: } \int_{Y_0}^{Y} \frac{\Theta(y)}{y}\,dy = \Theta(Y)\lg Y - \Theta(Y_0)\lg Y_0 - \int_{Y_0}^{Y} \lg y \frac{d\,\Theta(y)}{dy}\,dy <$$

$$< \frac{1}{A}\Theta(Y)\lg v(Y) - \frac{1}{A}\Theta(Y_0)\lg v(Y_0) - \frac{1}{A}\int_{Y_0}^{Y} \lg v\, d\,\Theta(y) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{A}\Theta(Y_0)\lg v(Y_0) - \Theta(Y_0)\lg Y_0 \right\} = \frac{1}{A}\int_{v(Y_0)}^{v(Y)} \Theta(v)\frac{dv}{v} + \text{constante.}$$

$$\text{2e: } \int_{Y_0}^{Y} \frac{\Theta(y)}{y}\,dy > \frac{1}{B}\Theta(Y)\lg v(Y) - \frac{1}{B}\Theta(Y_0)\lg v(Y_0) - \frac{1}{B}\int_{Y_0}^{Y} \lg v\, d\,\Theta(y) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{B}\Theta(Y_0)\lg v(Y_0) - \Theta(Y_0)\lg Y_0 \right\} =$$

$$= \frac{1}{B}\int_{v(Y_0)}^{v(Y)} \Theta(v)\frac{dv}{v} + \text{constante.}$$

Hieruit volgt dat de convergentie van $\int^{\infty} \Theta(v)\frac{dv}{v}$ noodig en voldoende is voor de conformiteit op oneindig van de beschouwde afbeelding.

Daar $\Theta(v) = \text{bg tg}\,\frac{u}{v} \backsim \frac{u}{v}$ kunnen we deze voorwaarde nog vervangen door: $\int^{\infty} \frac{u}{v^2}\,dv$, waarmee we onze bewering bewezen hebben.

Opmerking: Het bovenstaande bewijs is gedeeltelijk gelijk aan dat van *J. Wolff* [7] en *B. F. Wever* [8].

§ 10. Eenige voldoende voorwaarden voor conformiteit op oneindig.

Criterium A.

Voor een deelgebied van het rechterhalfvlak van het w-vlak, waarvan het punt ∞ bereikbaar randpunt is, is voldoende voor de conformiteit op oneindig van de conforme afbeelding op het rechterhalfvlak van het z-vlak, waarbij de punten ∞ correspondeeren, dat er op de positieve imaginaire as een rij punten v_n met $|v_1| < |v_2| < \ldots < |v_n| < \ldots$ *te vinden is, zoodat*

$$\sum^{\infty} \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta(w) \quad \text{en} \quad \sum^{\infty} \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta(w) \; lg \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right|$$

convergeeren, waarin: $\Theta(w) = \frac{\pi}{2} - \arg w$, *als* $\arg w > 0$

$$= \frac{\pi}{2} + \arg w, \text{ als } \arg w < 0$$

en de punten w op de grens van het gebied liggen.

Door $|v_n| = k^n$ te stellen, volgt hieruit de voldoende voorwaarde van *L. Ahlfors* [9], blz. 36, bij beperking tot deelgebieden van het rechterhalfvlak, daar $\lg \frac{k^{n+1}}{k^n}$ constant is, $(k > 1)$.

Bewijs: We zullen weer gebruik maken van de stelling van § 5, dat een gebied met een deugdelijk deelgebied, deugt, en zullen daartoe bewijzen dat een t.o.v. de reëele as symmetrisch gebied in het rechterhalfvlak van het w-vlak, waarbij op de grens $\Theta(w)$, van $|w_{n_1}|$ tot $|w_{n_2}|$, gelijk is aan Θ_n en $|w_{n_2}| = |w_{(n+1)_1}|$, zie fig. 6, terwijl $\sum^{\infty} \Theta_n$ en $\sum^{\infty} \Theta_n \lg \left| \frac{w_{(n+1)_1}}{w_{n_1}} \right|$ convergeeren, deugt.

Dit hulpgebied deugt als: $\int^{\infty} \Theta(y) \frac{dy}{y}$ convergeert — zie bldz. 33.

Zij $y(w_{n_1}) = y_{n_1}$, enz.

$$\int^{\infty} \Theta(y) \frac{dy}{y} = \Sigma_n \int_{y_{n_1}}^{y_{n_2}} \Theta(y) \frac{dy}{y} + \Sigma_n \int_{y_{n_2}}^{y_{(n+1)_1}} \Theta(y) \frac{dy}{y},$$ want alle $\Theta(y)$ zijn positief.

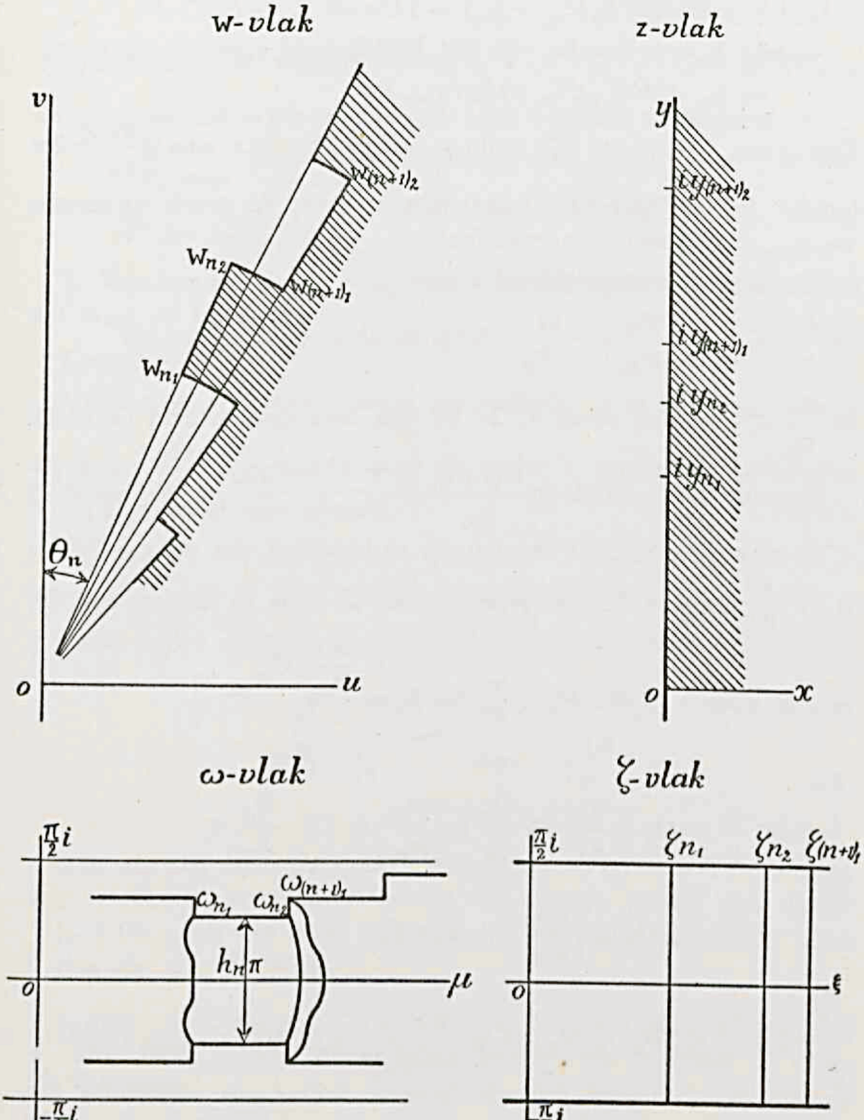
w-vlak
z-vlak
v
u
o
θ_n
W_{n_1}
W_{n_2}
$W_{(n+1)_1}$
$W_{(n+1)_2}$
y
x
iy_{n_1}
iy_{n_2}
$iy_{(n+1)_1}$
$iy_{(n+1)_2}$
ω-vlak
ζ-vlak
$\frac{\pi}{2}i$
$-\frac{\pi}{2}i$
ω_{n_1}
ω_{n_2}
$\omega_{(n+1)_1}$
$h_n\pi$
μ
ζ_{n_1}
ζ_{n_2}
$\zeta_{(n+1)_1}$
ξ

Fig 6

Volgens opmerking 1 van bldz. 30 en ongelijkheid II is:
$\mu_1(\xi_{n_2}) - \mu_2(\xi_{n_1}) \geqq h_n(\xi_{n_2} - \xi_{n_1}) - 12\pi$, als $\xi_{n_2} - \xi_{n_1} > 2\pi$,
waarin $h_n \pi =$ breedte van het beeldgebied tusschen ω_{n_1} en ω_{n_2}
en $\xi_{n_1} = R(\zeta_{n_1}), \zeta_{n_1} = \lg i\, y_{n_1}$, enz.

Dus $\lg|w_{n_2}| - \lg|w_{n_1}| \geqq h_n(\lg y_{n_2} - \lg y_{n_1}) - 12\pi$, mits $\lg \dfrac{y_{n_2}}{y_{n_1}} > 2\pi$
(omdat het hulpgebied symmetrisch is t.o.v. de reëele as mogen we y_{n_1}, enz. positief onderstellen).

Uit de laatste ongelijkheid volgt:
$\lg \dfrac{y_{n_2}}{y_{n_1}} \leqq \dfrac{1}{h_n} \lg \left| \dfrac{w_{n_2}}{w_{n_1}} \right| + \dfrac{12\pi}{h_n}$, hetgeen altijd geldt, want als
$\lg \dfrac{y_{n_2}}{y_{n_1}} < 2\pi$, dan zeker $<$ 2e lid van deze ongelijkheid ($h_n < 1$).

Evenzoo geldt altijd: $\lg \dfrac{y_{(n+1)_1}}{y_{n_2}} \leqq \dfrac{12\pi}{\text{kleinste van } h_n \text{ en } h_{n+1}} <$
$< 24\pi$ als $n > N$, daar we mogen onderstellen dat voor $n > N$:
$h_n > \dfrac{1}{2}$, wegens de convergentie van $\Sigma\, \Theta_n$ is er immers een N,

zoodat voor $n > N$: $\Theta_n < \dfrac{\pi}{4}$, dus $h_n = \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \Theta_n}{\dfrac{\pi}{2}} > \dfrac{1}{2}$.

$$\int_{y_{n_1}}^{y_{n_2}} \Theta(y) \frac{dy}{y} = \Theta_n \lg \frac{y_{n_2}}{y_{n_1}} \leqq \frac{\Theta_n}{h_n} \lg \left| \frac{w_{n_2}}{w_{n_1}} \right| + 12\pi \frac{\Theta_n}{h_n} <$$

$$< 2\,\Theta_n \lg \left| \frac{w_{n_2}}{w_{n_1}} \right| + 24\pi\,\Theta_n, \text{ voor } n > N.$$

$$\int_{y_{n_2}}^{y_{(n+1)_1}} \Theta(y) \frac{dy}{y} < (\Theta_n + \Theta_{n+1}) \lg \frac{y_{(n+1)_1}}{y_{n_2}} \leqq (\Theta_n + \Theta_{n+1}) \cdot 24\pi,$$
voor $n > N$.

Hieruit ziet men dat uit de convergentie van $\Sigma\,\Theta_n$ en $\Sigma\,\Theta_n \lg \left| \dfrac{w_{(n+1)_1}}{w_{n_2}} \right|$ die van $\displaystyle\int^{\infty} \Theta(y) \frac{dy}{y}$ volgt en dus het deugen van het hulpgebied.

Opmerkingen: 1. *Het criterium van L. Ahlfors*: $\Sigma_n \max\limits_{k^n \leqq |w| \leqq k^{n+1}} \Theta(w)$ convergent, kunnen we wegens $\Theta = \text{bg tg}\,\frac{u}{v} \backsim \frac{u}{v}$ en $|w| \backsim v$, als we nog de grootste van $u(v)$ en $u(-v)$: $\varphi(v)$ noemen, veranderen in:

$$\Sigma_n \max_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v} \text{ convergent.}$$

2. We kunnen nu de volgende voorwaarde bewijzen, die naast § 9 voor de hand ligt.:

Criterium B.

Voldoende voor conformiteit op oneindig is de convergentie van $\int\limits^{\infty} \{ \max\limits_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q} \} \frac{dv}{v}$, waarin $\varphi(q)$ de onder 1 genoemde beteekenis heeft.

Bewijs:

$$\int^{\infty} \{ \max_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} = \Sigma_n \int_{k^n}^{k^{n+1}} \{ \max_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} \geqq \Sigma_n \max_{k^{n+1},\infty} \frac{\varphi(v)}{v} \lg k \geqq$$

$$\geqq \lg k\, \Sigma_n \max_{k^{n+1} \leqq v \leqq k^{n+2}} \frac{\varphi(v)}{v},$$

zoodat als aan onze onderstelling voldaan is, ook aan het criterium van *L. Ahlfors* voldaan is, en het betreffende gebied dus deugt.

In § 15 zullen we laten zien, dat het criterium *B* minder ruim is dan dat van *L. Ahlfors*.

3. Het resultaat van *G. Valiron* in Bull. des Sc. Mathem. 56, p. 208, 1932, is een onmiddellijk gevolg van criterium *B*, want het door hem ingevoerde hulpgebied, met grens $u = |v|\, h(|v|)$, waarin $h(t)$ positief is, niet groeit en tot nul nadert als t tot oneindig nadert, terwijl $\int^{\infty} \frac{h(t)}{t}\, dt$ convergeert, voldoet aan onze voorwaarde.

§ 11. **Het criterium van C. Visser** [10].

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak af op een deelgebied G van het rechterhalfvlak van het w-vlak, dat alle punten van de reëele as waarvoor* $u > u_0$ *bevat, terwijl* $w(\infty) = \infty$.

$\mu(u)$ *zij het maximum van* $\left|\dfrac{w+u}{w-u}\right|$ *als w de grens van het gebied doorloopt.*

Bewering: *Voldoende voor conformiteit op oneindig is de convergentie van* $\displaystyle\int^{\infty} \{\mu(u) - 1\} \frac{du}{u}$.

Bewijs: Zij $z_0 = x_0 + i y_0$ een punt binnen $D(x > 0)$ en $w_0 = u_0 + i v_0 = w(z_0)$.

We stellen $Z = \dfrac{z - z_0}{z - z_0^*}$ en $W = W(Z) = \dfrac{w(z) - w_0}{w(z) - w_0^*}$, waarin z_0^* en w_0^* de spiegelbeelden van z_0 en w_0 tegen de imaginaire as zijn.

$W(Z)$ beeldt $|Z| < 1$ af op een inwendig gebied H, terwijl $W(0) = 0$. $\dfrac{W(Z)}{Z}$ is dus holomorf binnen $|Z| = 1$ en wordt nooit nul, dus kan geen minimale waarde aannemen in een inwendig punt van $|Z| = 1$, of $\left|\dfrac{W(Z)}{Z}\right| \geqq \varrho$, waarin ϱ de kortste afstand van O tot de grens van H is.

In het halfvlak D volgt hieruit:

$\left|\dfrac{w(z) - w_0}{z - z_0} \cdot \dfrac{z - z_0^*}{w(z) - w_0^*}\right| \geqq \varrho(w_0)$, waarin $\varrho(w_0)$ de minimale waarde is van $\left|\dfrac{w - w_0}{w - w_0^*}\right|$ als w de grens van G doorloopt.

$z \to z_0$ laat uit de laatste ongelijkheid volgen:

$$|w'(z_0)| \geqq \varrho(w_0) . \frac{u_0}{x_0}.$$

We beschouwen nu de inverse functie $z = z(w) = z(u)$ op de reëele as.

$\left|\dfrac{dz}{du}\right| \leqq \dfrac{1}{\varrho(u)} . \dfrac{x}{u} = \mu(u) . \dfrac{x}{u}$, volgt uit bovenstaande ongelijkheid, daar z_0 een willekeurig punt was.

Dus voor $0 < u_0 < u_1$ geldt:

$$\left|\frac{z(u_1)}{z(u_0)}\right| = e^{\lg\left|\frac{z(u_1)}{z(u_0)}\right|} \leqq e^{\left|\lg\frac{z(u_1)}{z(u_0)}\right|} = e^{\left|\int\limits_{z(u_0)}^{z(u_1)}\frac{dz}{z}\right|} \leqq e^{\int\limits_{z(u_0)}^{z(u_1)}\left|\frac{dz}{z}\right|} \leqq$$

$$\leqq e^{\int\limits_{u_0}^{u_1}\mu(u)\frac{x}{|z|}\frac{du}{u}} \leqq e^{\int\limits_{u^0}^{u_1}\mu(u)\frac{du}{u}}$$

$$\text{Dus}\ \left|\frac{z(u_1)}{u_1}\right| \leqq |z(u_0)|\,\frac{1}{u_1}\,e^{\int\limits_{u_0}^{u_1}\mu(u)\frac{du}{u}} = \frac{|z(u_0)|}{u_0}\,e^{\int\limits_{u_0}^{u_1}\{\mu(u)-1\}\frac{du}{u}}$$

Als $\int^{\infty}\{\mu(u)-1\}\frac{du}{u}$ convergent is, is het quotiënt $\frac{z(u)}{u}$ begrensd en de afbeelding dus conform in het randpunt oneindig, daar we in § 3 bewezen, dat voor de functies $w(z)$, die holomorf zijn in het rechterhalfvlak en een positief reëel deel hebben, $\frac{w}{z}$ tot een limiet $\lambda \geqq 0$ en $< \infty$ nadert, terwijl nu ook de limiet 0 uitgeschakeld is.

§ 12. Het criterium van J. G. van der Corput [11].

Onderstelling: $w(z) = w(x+iy) = u+iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak af op een gebied G in het rechterhalfvlak van het w-vlak, dat vanaf* u_0 *de reëele as bevat, terwijl* $w(\infty) = \infty$.

$\varphi(v)$ *zij de grootste van* $u(v)$ *en* $u(-v)$, *waarbij* $\{u(v), v\}$ *en* $\{u(-v), -v\}$ *randpunten van G zijn.*

Bewering: *Voldoende voor conformiteit op oneindig is de convergentie van* $\int^{\infty}\{\max\limits_{q\leqq v}\varphi(q)\}\frac{dv}{v^2}$, *waarin met* $\max\limits_{q\leqq v}\varphi(q)$ *de bovenste grens van* $\varphi(q)$ *in het segment* $0 \leqq q \leqq v$ *bedoeld wordt.*

Bewijs: We zullen de voldoendheid van deze voorwaarde bewijzen door aan te toonen dat als hieraan voldaan is, ook voldaan is aan het criterium van *Visser* (§ 11).

Voor iedere $W = U + iV$ en iedere niet met W samenvallende positieve u geldt:

$$\frac{1}{u}\left(\left|\frac{W+u}{W-u}\right| - 1\right) = \frac{1}{u}\left[\frac{\sqrt{(U+u)^2+V^2}}{\sqrt{(U-u)^2+V^2}} - 1\right] =$$

$$\frac{4\,U}{\sqrt{(u-U)^2+V^2}\,\{\sqrt{(u+U)^2+V^2}+\sqrt{(u-U)^2+V^2}\}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4\,U}{\sqrt{(u-U)^2+V^2}.\ \sqrt{u^2+V^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Stel $\Omega(v) = \max\limits_{q \leqq v} \varphi(q)$, dan is $\Omega(v)$ een monotoon niet-dalende functie, terwijl volgens onderstelling $\int^{\infty} \Omega(v) \frac{dv}{v^2}$ convergeert.

Voor $v > 0$ is dus: $\frac{\Omega(v)}{v} = \Omega(v) \int\limits_v^{\infty} \frac{dt}{t^2} \leqq \int\limits_v^{\infty} \frac{\Omega(t)}{t^2}\, dt \to 0$ voor $v \to \infty$,

waaruit volgt dat voor $v > v_0$: $\Omega(v) \leqq \frac{1}{2} v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$

Voor ieder randpunt $U + iV$ van G is: $U \leqq \varphi(V)$, bij voldoend groote u is volgens (2): $U \leqq \varphi(V) \leqq \Omega(u) \leqq \frac{1}{2}\, u$ voor $V \leqq u$.

Uit (1) volgt nu dat voor alle randpunten $W = U + iV$ van G:

$$\max_{V \geqq u} \frac{1}{u}\left(\left|\frac{u+W}{u-W}\right| - 1\right) \leqq \max_{V \geqq u} \frac{4\,\varphi(V)}{V^2}$$

en bovendien voor voldoend groote u:

$$\max_{V \leqq u} \frac{1}{u}\left(\left|\frac{u+W}{u-W}\right| - 1\right) \leqq \max_{V \leqq u} \frac{4\,\varphi(V)}{\sqrt{(u-\frac{1}{2}u)^2}\ \sqrt{u^2}} = \frac{8\,\Omega(u)}{u^2},$$

zoodat dus voor de in de vorige paragraaf gedefinieerde $\mu(u)$, bij voldoend groote u, geldt:

$$\frac{1}{u}\{\mu(u) - 1\} \leqq 8\,\frac{\Omega(u)}{u^2} + 4 \max_{V \geqq u} \frac{\varphi(V)}{V^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Voor $q \geqq t \geqq 1$ is: $\dfrac{\varphi(q)}{q^2} \leqq \dfrac{\Omega(q)}{q^2} = 2\,\Omega(q)\displaystyle\int_q^\infty \frac{du}{u^3} \leqq 2\int_q^\infty \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du \leqq$

$$\leqq 2\int_t^\infty \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du,$$

dus:

$$\max_{q \geqq t} \frac{\varphi(q)}{q^2} \leqq 2\int_t^\infty \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du,$$

waaruit volgt: $\displaystyle\int_1^\infty \{\max_{q \geqq t} \frac{\varphi(q)}{q^2}\}\,dt \leqq 2\int_1^\infty dt \int_t^\infty \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du =$

$$= 2\int_1^\infty \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du \int_1^u dt \leqq 2\int_1^\infty \frac{\Omega(u)}{u^2}\,du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Uit de convergentie van $\displaystyle\int^\infty \frac{\Omega(u)}{u^2}\,du$, volgt, wegens (3) en (4), de convergentie van $\displaystyle\int^\infty \{\mu(u) - 1\}\frac{du}{u}$, waarmee we onze bewering bewezen hebben.

Opmerking: Naar aanleiding van het bovenstaande en van § 9 ligt de vraag voor de hand of voor een t.o.v. de reëele as symmetrisch gebied de convergentie van $\displaystyle\int^\infty \frac{u}{v^2}\,dv$ niet altijd noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig zou zijn (waarbij $u + iv$ de randpunten van het gebied zijn).

Uit een eenvoudig voorbeeld blijkt dit vermoeden echter onjuist te zijn. Neem n.l. als beeldgebied het rechterhalfvlak van het w-vlak verminderd met loodlijnen op de imaginaire as in de punten $i\,n^2$ met lengte n^2, dan is $\displaystyle\int^\infty \frac{u}{v^2}\,dv = 0$ maar het gebied kan niet deugen want het bevat slechts hoeken $\dfrac{\pi}{2}$.

Door de naalden te vervangen door gelijkbeenige driehoeken met basis eén, $\{ i(n^2 - {}^1/_2), i(n^2 + {}^1/_2) \}$, en hoogte n^2 krijgen we een voorbeeld waarbij u een eenwaardige functie van v is en $\int^{\infty} \frac{u(v)}{v^2} dv \backsim \sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert, terwijl het gebied niet deugt.

§ 13. **De criteria van Visser** (§ 11) **en van Van der Corput** (§ 12) **zijn aequivalent.**

In de vorige paragraaf is bewezen: Als aan de voorwaarde van *Van der Corput* voldaan is, is ook aan die van *Visser* voldaan. We zullen nu het omgekeerde bewijzen.

Onderstelling: Omtrent afbeelding, enz. als in beide vorige paragrafen.

$$\int^{\infty} \{ \mu(u) - 1 \} \frac{du}{u} \textit{ convergeert.}$$

Bewering:

$$\int^{\infty} \{ \max_{q \leqq v} \varphi(q) \} \frac{dv}{v^2} \textit{ convergeert.}$$

Bewijs: Op G ligt minstens eén der punten $\{ \varphi(V), V \}$ en $\{ \varphi(V), -V \}$, zoodat $\frac{1}{u} \{ \mu(u) - 1 \} = \max \frac{1}{u} \left\{ \left| \frac{u+W}{u-W} \right| - 1 \right\} \geqq$

$$\geqq \frac{1}{u} \left\{ \left| \frac{\varphi(V) \pm iV + u}{\varphi(V) \pm iV - u} \right| - 1 \right\}.$$

Uit de vergl. (1) van bldz. 42 volgt:

$$\frac{1}{u} \left\{ \left| \frac{\varphi(V) \pm iV + u}{\varphi(V) \pm iV - u} \right| - 1 \right\} =$$

$$= \frac{4\varphi(V)}{\sqrt{\{u - \varphi(V)\}^2 + V^2} . [\sqrt{\{u + \varphi(V)\}^2 + V^2} + \sqrt{\{u - \varphi(V)\}^2 + V^2}]} \geqq$$

$$\geqq \frac{4\varphi(V)}{\{u + \varphi(V)\}^2 + V^2 + \{u - \varphi(V)\}^2 + V^2} = \frac{2\varphi(V)}{u^2 + \varphi^2(V) + V^2}$$

Voor $V \leqq u$ en u voldoend groot volgt hieruit, wegens vergl. (2) van blz. 42: $\frac{1}{u} \{ \mu(u) - 1 \} \geqq \frac{2}{3u^2} \max_{V \leqq u} \varphi(V)$, waarmede onze bewering bewezen is.

§ 14. **De criteria van L. Ahlfors (§ 10) en Van der Corput (§ 11) zijn aequivalent voor deelgebieden van het rechterhalfvlak.**

Onderstelling: $w(z) = w(x+iy) = u + iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak af op een gebied G in het rechterhalfvlak van het w-vlak, terwijl* $w(\infty) = \infty$.
$\varphi(v)$ *zij de grootste van* $u(v)$ *en* $u(-v)$, *waarin* $\{u(v), v\}$ *en* $\{u(-v), -v\}$ *randpunten van G zijn.*

Bewering: *Het criterium van Van der Corput:* $\int^{\infty} \{\max_{q \leqq v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2}$ *convergent, is aequivalent met dat van L. Ahlfors:*

$$\Sigma_n \max_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v} \text{ convergent.}$$

Bewijs:

$$\frac{\max\limits_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \varphi(v)}{k^n} \geqq \max_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v} \quad . \; . \; . \; (1).$$

en

$$\frac{\max\limits_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \varphi(v)}{k^{n+1}} \leqq \max_{k^n \leqq v \leqq k^{n+1}} \frac{\varphi(v)}{v} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Hieruit volgt:

$$\text{1e.} \int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} = \Sigma_n \int_{k^n}^{k^{n+1}} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} \geqq \Sigma_n \{\max_{0,k^n} \varphi(q)\} \left(\frac{1}{k^n} - \frac{1}{k^{n+1}}\right) \geqq$$

$$\geqq \Sigma_n \{\max_{k^{n-1}, k^n} \varphi(q)\} \frac{k-1}{k^{n+1}} = \frac{k-1}{k^2} \Sigma_n \frac{\max\limits_{k^{n-1}, k^n} \varphi(q)}{k^{n-1}} \geqq$$

$$\geqq \frac{k-1}{k^2} \Sigma_n \max_{k^{n-1}, k^n} \frac{\varphi(q)}{q}, \text{ volgens opmerking (1).}$$

$$\text{2e.} \int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} = \Sigma_n \int_{k^n}^{k^{n+1}} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} \leqq \Sigma_n \{\max_{0,k^{n+1}} \varphi(q)\} \frac{k-1}{k^{n+1}}.$$

Nu is:

$$\max_{0,k^{n+1}} \varphi(q) \leqq \max_{0,k} \varphi(q) + \max_{k,k^2} \varphi(q) + \ldots + \max_{k^{n-1},k^n} \varphi(q) + \max_{k^n,k^{n+1}} \varphi(q).$$

Dus:

$$\frac{\max\limits_{0,k^{n+1}} \varphi(q)}{k^{n+1}} \leqq \frac{\max\limits_{0,k} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \ldots + \frac{\max\limits_{k^{n-1},k^n} \varphi(q)}{k^{n+1}} + \frac{\max\limits_{k^n,k^{n+1}} \varphi(q)}{k^{n+1}} \leqq$$

$$< \frac{\max\limits_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^n} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{(q)}}{k^{n-1}} + \ldots + \frac{\max\limits_{k^{n-1},k^n} \frac{\varphi(q)}{q}}{k} + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q},$$

volgens opmerking (2) van bldz. 45.

Hieruit volgt: $\int\limits^{\infty} \{ \max\limits_{0,v} \varphi(q) \} \frac{dv}{v^2} \leqq$

$$\leqq (k-1) \Sigma_n \left\{ \frac{\max\limits_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^n} + \frac{\max\limits_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{q}}{k^{n-1}} + \ldots + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q} \right\} =$$

$$= (k-1) \left[\max_{0,k} \frac{\varphi(q)}{q} \Sigma_m \frac{1}{k^m} + \max_{k,k^2} \frac{\varphi(q)}{q} \Sigma_m \frac{1}{k^m} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \max_{k^n,k^{n+1}} \frac{\varphi(q)}{q} \Sigma_m \frac{1}{k^m} + \ldots \right]$$

$= (k-1) \frac{k}{k-1} \Sigma_n \max\limits_{k^n,k^{n+1}}. \frac{\varphi(q)}{q}$, daar alle $\varphi(q)$ positief zijn.

Uit 1e volgt: als aan 't criterium van *Van der Corput* voldaan is, is aan dat van *L. Ahlfors* voldaan; uit 2e het omgekeerde, dus de aequivalentie van beide criteria.

§ 15. De voorwaarde van Caratheodory-Valiron (§ 6) en het criterium B (§ 10) zijn minder ruim dan de laatste drie aequivalente voorwaarden.

Onderstelling: $w(z) = w(x + iy) = u + iv$ *beeldt het rechterhalfvlak van het z-vlak conform af op een gebied in het rechterhalfvlak van het w-vlak,, terwijl* $w(\infty) = \infty$.

Bewering: *1e. Als het beeldgebied G een halfvlak bevat*

convergeert $\int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2}$

2e. Er is een gebied, waarvoor $\int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2}$ *convergeert en dat geen halfvlak bevat.*

3e. Er is een gebied waarvoor $\int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2}$

convergeert en $\int^{\infty} \{\max_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q}\} \frac{dv}{v}$ *divergeert.*

Door 1e en 2e zal bewezen worden, dat het criterium van *Van der Corput* ruimer is dan dat van *Caratheodory-Valiron*, door 3e dat de voorwaarde van *L. Ahlfors* ($\equiv$ die van *Van der Corput*) ruimer is dan het criterium B, dat er uit volgt (vergl. blz. 39).

Bewijs: 1e. Stel G bevat het halfvlak $u \geqq a$, dan is voor alle randpunten van G $\varphi(v) < a$, dus:

$$\int^{\infty} \{\max_{0,v} \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} < a \int^{\infty} \frac{dv}{v^2},$$ welke convergeert.

2e. Als voor de randpunten van G : $\varphi(v) = v^{1-\varepsilon}$, waarin $0 < \varepsilon < 1$,

convergeert $\int^{\infty} \{\max_{0,v}. \varphi(q)\} \frac{dv}{v^2} = \int^{\infty} \frac{dv}{v^{1+\varepsilon}}$ en het gebied G bevat geen halfvlak.

3e. Beschouw een gebied, symmetrisch t.o.v. de reëele as, bestaande uit het rechterhalfvlak verminderd met de strepen $\overline{(i\, v_n, u_n + i\, v_n)}$, $\overline{(-i\, v_n, u_n - i\, v_n)}$, $n = 1, 2, \ldots$

Stel $v_n = n\,!$ en $u_n = \dfrac{n\,!}{n\,(\lg n)^2}$

Dan is, omdat u_n groeit:

$$\int^{\infty} \{ \max_{0,v} \varphi(q) \} \frac{dv}{v^2} = \Sigma_n\, u_n \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}} \right) =$$

$$= \Sigma_n \frac{n\,!}{n\,(\lg n)^2} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)\,!} \right) = \Sigma_n \frac{1}{n\,(\lg n)^2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) <$$

$$< \Sigma_n \frac{1}{n\,(\lg n)^2} < \infty.$$

En omdat $\dfrac{u_n}{v_n}$ daalt, is:

$$\int^{\infty} \{ \max_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} = \Sigma_n \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \lg \frac{v_{n+1}}{v_n} =$$

$$= \Sigma_n \frac{1}{(n+1)\lg^2(n+1)} \cdot \lg(n+1) = \Sigma_n \frac{1}{n \lg n} = \infty$$

HOOFDSTUK IV.

EENIGE VOORWAARDEN VOOR CONFORMITEIT OP ONEINDIG BIJ AFBEELDING VAN HET RECHTERHALF-VLAK VAN HET Z-VLAK, ZONDER BEPERKING VAN HET BEELDGEBIED BINNEN DAT VAN HET W-VLAK.

§ 16. Een voldoende voorwaarde.

Een gebied G deugt als er een rij punten v_n met $|v_1|<|v_2|<\ldots<|v_n|<\ldots$ te vinden is, zoodat

$$\Sigma_n \max_{|v_n|\leqq|w|\leqq|v_{n+1}|} \Theta^*(w) \quad \text{en} \quad \Sigma_n \max_{|v_n|\leqq|w|\leqq|v_{n+1}|} \Theta^*(w)\, lg\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \quad \textit{convergeeren}$$

en bovendien $\int^{\infty} \{b(r)-\pi\}\frac{dr}{r}$ *convergeert.*

Hierin is w een grenspunt van G en:

$$\left.\begin{aligned}\Theta^*(w)=\Theta(w)&=\frac{\pi}{2}-\arg w, \text{ als } \arg w \text{ positief is,}\\ &=\frac{\pi}{2}+\arg w. \text{ als } \arg w \text{ negatief is,}\end{aligned}\right\}\ \text{als } \Theta(w) \text{ positief is,}$$

$$=0, \text{ als } \Theta(w) \text{ negatief is.}$$

Uit de convergentie van de eerstgenoemde reeks volgt dat er een R is, zoodat G de positieve reëele as voor $u>R$ bevat.

$b(r)=$ de boog van $|w|=r>R$, die geheel tot G behoort en de positieve reëele as snijdt — vergl. met $\Theta(r)$ in fig. 5 (bldz. 32), zie ook fig. 7 (bldz. 53).

Als we $|v_n|=k^n$ kiezen is dit het volledige criterium van *L. Ahlfors*, [9], van wie we het onderstaande bewijs overnemen.

We bewijzen eerst de *hulpstelling*:

Als G een gebied van het w-vlak is, dat een deugdelijk gebied

H bevat, en $\psi(w)$ G conform afbeeldt op het rechterhalfvlak van het ψ-vlak, terwijl $\psi(\infty) = \infty$, dan is: $\lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi(w)}{w} < \infty$.

Bewijs: $w_1(z)$ beelde het rechterhalfvlak van het z-vlak conform af op H, dan is $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{w_1(z)}{z} \neq 0$ en $\neq \infty$.

$\psi\{w_1(z)\}$ is een holomorfe functie van z, voor $x > 0$, met een positief reëel deel, zoodat $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi\{w_1(z)\}}{z} = \mu < \infty$ (volgens § 3).

Dus $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi\{w_1(z)\}}{w_1(z)} = \frac{\mu}{\lambda_1} < \infty$ en omdat uit de conformiteit op oneindig van de afbeelding van het rechterhalfvlak van het z-vlak op H de hoektrouw volgt, is : $\lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \frac{\psi(w)}{w} < \infty$.

Nu kunnen we onze stelling als volgt bewijzen:

Uit § 6 volgt, dat een verandering van de grens van een gebied in het eindige geen invloed heeft op de conformiteit op oneindig.

Uit de convergentie van $\int^{\infty} \{b(r) - \pi\} \frac{dr}{r}$ volgt dat er een $b(r_0) < 2\pi$ is.

We beschouwen nu naast G het gebied G^*, waarvan de grens uit die van G ontstaat door hiervan het deel, dat tusschen de eindpunten A en B van $b(r_0)$ ligt, door de segmenten AO en OB te vervangen.

Als G deugt. deugt G^* en omgekeerd, terwijl de grens van G^* voldoet aan de voorwaarden, die we in het begin van deze paragraaf voor die van G stelden.

$w(z)$ beelde het rechterhalfvlak van het z-vlak af op G^*, terwijl $w(\infty) = \infty$.

Als we $\omega = \lg w$, $\zeta = \lg z$, $\omega = \mu + i\nu$, $\zeta = \xi + i\eta$ stellen, beeldt $\omega(\zeta)$ de strook $|\eta| \leqq \frac{\pi}{2}$ af op een gebied, dat ligt in de strook $|\nu| \leqq 2\pi$ en de reëele as bevat.

Volgens ongelijkheid I (§ 7, bldz. 27) is dus:

$$\xi_1(\mu_2) - \xi_2(\mu_1) \geqq \pi \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} - 4\pi, \text{ als } \mu_2 > \mu_1 \text{ en} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} > 2,$$

waarin de verschillende letters dezelfde beteekenis hebben als in § 7.

$$\pi \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\Theta(\mu)} = \mu_2 - \mu_1 - \frac{1}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \{\Theta(\mu) - \pi\}\, d\mu + \frac{1}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\{\Theta(\mu) - \pi\}^2}{\Theta(\mu)}\, d\mu \geqq$$

$$\geqq \mu_2 - \mu_1 - \frac{1}{\pi} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \{\Theta(\mu) - \pi\}\, d\mu.$$

Dus $\xi_1(\mu_2) - \mu_2 \geqq -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\mu_1}^{\mu_2} \{\Theta(\mu) - \pi\}\, d\mu - \mu_1 - 4\pi + \xi_2(\mu_1)$.

Wegens het convergent onderstellen van $\displaystyle\int^{\infty} \{b(r) - \pi\} \frac{dr}{r}$, waarin $b(r) = \Theta(\lg r)$, volgt hieruit dat $\xi_1(\mu_2) - \mu_2$, voor μ_2 voldoend groot, boven een eindige grens ligt, d.w.z. $\left|\dfrac{z(w)}{w}\right|$ blijft op de cirkelbogen $b(r)$ grooter dan een positief getal.

Uit de convergentie van

$$\Sigma_n \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta^*(w) \quad \text{en} \quad \Sigma_n \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta^*(w) \lg \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$$

volgt dat G^* een gebied bevat, dat deelgebied is van het rechterhalfvlak en volgens § 10 deugt. Wegens de boven bewezen hulpstelling is dus: $\lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \dfrac{z(w)}{w} < \infty$.

Hiermee is bewezen: $\lim\limits_{\substack{w \to \infty \\ \text{angulair}}} \dfrac{z(w)}{w} \neq 0$ en $\neq \infty$, d.w.z. de conforme afbeelding van het rechterhalfvlak op G^*, waarbij de punten oneindig correspondeeren, is conform op oneindig.

§ 17. Over mogelijke veranderingen van de criteria, die in de §§ 10 en 12 bewezen werden.

1. Als *het beeldgebied G een halfvlak bevat,* liggen de volgende veranderingen voor de hand:

a. Het criterium A (§ 10, bldz. 36) in
G deugt als er een puntenrij v_n met $|v_1| < |v_2| < \ldots < |v_n| < \ldots$ te vinden is, zoodat

$$\Sigma_n \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta(w) \text{ en } \Sigma_n \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta(w) \lg \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \text{ convergeeren,}$$

waarin w een randpunt van G is en

$$\Theta(w) = \frac{\pi}{2} - \arg w, \text{ als } \arg w > 0$$
$$= \frac{\pi}{2} + \arg w, \text{ als } \arg w < 0.$$

b. Het criterium B (§ 10, bldz. 39) in:

$$G \text{ deugt als } \int^{\infty} \{ \max_{v,\infty} \frac{\psi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} \text{ convergeert, waarin } \psi(q) \text{ de kleinste}$$

is van $u(q)$ en $u(-q)$, als $\{u(q), q\}$ en $\{u(-q), -q\}$ randpunten van G zijn.

c. Het criterium van *Van der Corput* (§ 12, bldz. 41) in:

$$G \text{ deugt als } \int^{\infty} \{ \max_{0,v} \psi(q) \} \frac{dv}{v^2} \text{ convergeert, waarin } \psi(q) \text{ de boven-}$$

genoemde beteekenis heeft.

Uit de §§ 14 en 15 volgt dat als er aan de voorwaarden *b* en *c* voldaan is, er een puntenrij (nl. $|v_n| = k^n$) is, waarvoor de onder *a* genoemde reeksen convergeeren.

We zullen laten zien dat dan ook $\int^{\infty} \{ b(r) - \pi \} \frac{dr}{r}$ convergeert, waaruit wegens de vorige paragraaf het deugen van G volgt en waarmee dan de drie bovenstaande criteria bewezen zijn.

$$\int^{\infty} \{ b(r) - \pi \} \frac{dr}{r} = \Sigma_n \int_{|v_n|}^{|v_{n+1}|} \{ b(r) - \pi \} \frac{dr}{r} \leqq$$

$$\leqq - \Sigma_n \, 2 \max_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta(w) \lg \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|.$$

2. Dat de voorwaarde uit § 16 ruimer is dan de drie bovenstaande volgt uit het volgende voorbeeld (vergl. *Caratheodory*, [3] bldz. 16 en *J. H. Wansink*, [12] bldz. 82).

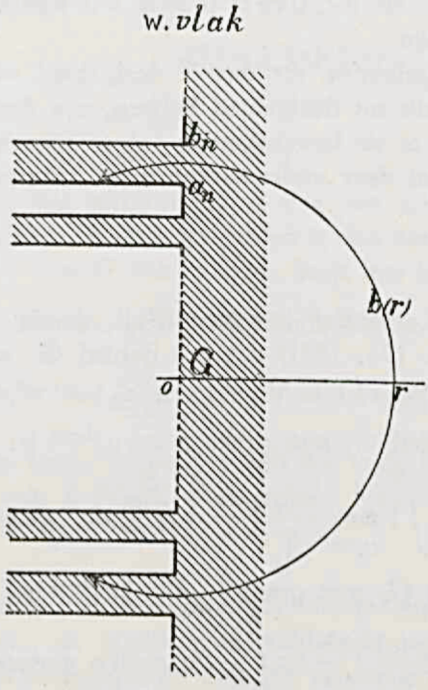

Fig. 7

Zij G het gebied bestaande uit het rechterhalfvlak van het w-vlak vermeerderd met een verzameling oneindig lange horizontale strooken uit het linkerhalfvlak, die aan het rechterhalfvlak aansluiten in de intervallenverzameling (a_n, b_n) en $(-a_n, -b_n)$, terwijl $|b_n| > |a_n| \to \infty$ voor $n \to \infty$ en $\sum^{\infty} \lg \left|\frac{b_n}{a_n}\right|$ convergeert, zie fig. 7.

Als we $|v_n| = \frac{1}{2} |a_n + b_n|$ kiezen is $\max\limits_{|v_n| \leqq |w| \leqq |v_{n+1}|} \Theta^*(w) = 0$, en

$$\int^{\infty} \{ b(r) - \pi \} \frac{dr}{r} < \pi \sum_{1}^{\infty} \int_{|a_n|}^{|b_n|} \frac{dr}{r} = \pi \sum_{1}^{\infty} \lg \left| \frac{b_n}{a_n} \right|,$$ zoodat G deugt, terwijl

aan geen van de bovengenoemde criteria voldaan is.

3. De grens van een willekeurig gebied G kunnen we insluiten tusschen die van twee hulpgebieden met grenspunten (U_1, V_1) resp. (U_2, V_2), waarbij $V_1 = V_2 = v$, $U_1 = u$ als $u > 0$ en $= 0$ als $u < 0$ en $U_2 = u$ als $u < 0$ en $= 0$ als $u > 0$, waarin (u, v) de grenspunten van G zijn.

Op deze hulpgebieden, die dus òf deelgebied van het rechterhalfvlak zijn òf dit tot deelgebied hebben, zijn dan de criteria van de §§ 10 en 12 of de bovenstaande toe te passen.

Uit 2 volgt dat deze voorwaarden nooit scherper zijn dan die uit § 16.

Opmerking:

Bessonof en *Lavrentieff* bewijzen (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 58, p. 175, 1931) dat een gebied G, waarbij voor de grenspunten (u, v) met $|v| > V$ geldt: $|u| \leqq |v|^{1-\varepsilon}$, $1 \geqq \varepsilon > 0$, deugt.

Voor het gebied G, met grens $u = |v|^{1-\varepsilon}$ is:

$$\int^{\infty} \{ \max_{v, \infty} \frac{\varphi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} = \int^{\infty} \frac{u}{v^2}\, dv, \text{ welke convergeert en}$$

voor het gebied G_2 met grens $-u = |v|^{1-\varepsilon}$ is

$$\int^{\infty} \{ \max_{v, \infty} \frac{\psi(q)}{q} \} \frac{dv}{v} = \int^{\infty} \frac{u}{v^2}\, dv, \text{ welke eveneens convergeert.}$$

Volgens criterium B deugt G_1, volgens de voorwaarde die we onder 1*b* noemden eveneens G_2; zoodat, wegens § 6, G deugt, waarmee het bovenstaande resultaat bewezen is.

STELLINGEN.

I.

Als $w(z)$ het rechterhalfvlak van het z-vlak conform afbeeldt op een gebied G, dat deelgebied is van dat van het w-vlak, terwijl de grens Γ van G één snijpunt heeft met iedere rechte evenwijdig aan de reëele as en op den duur buiten de hoek $|\arg w| = \frac{\pi}{4}$ komt, dan is $\arg \frac{dw}{dz}$ begrensd in G, ook als $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \textit{angulair}}} \frac{w}{z} = 0$.

Als deze limiet grooter is dan nul is de bovenstaande bewering bewezen door *J. Wolff*, K. A. v. W., Vol. 33, bldz. 1024, 1930.

II.

Met behulp van bovenstaande uitbreiding is een tweede bewijs te geven van de noodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig in § 9 (bldz. 33) van het voorgaande proefschrift.

III.

Uit de §§ 10 en 14 van dit proefschrift volgt:

$$\int^{\infty} \left\{ \max_{0,v} \varphi(q) \right\} \frac{dv}{v^2} \leqq \int^{\infty} \left\{ \max_{v,\infty} \frac{\varphi(q)}{q} \right\} \frac{dv}{v}.$$

Een direct bewijs hiervan is opgesloten in stelling V van *J. G. van der Corput*, „Einige Ungleichungen bei bestimmten Integralen", K. A. v. W., Vol. 35, bldz. 335, 1932.

IV.

Ten onrechte meent *Osgood* in „Lehrbuch der Funktionentheorie" I, bldz. 660, uit de waarden van een harmonische functie op een cirkel de coëfficiënten van de reeksontwikkeling dezer functie binnen een cirkelring te kunnen afleiden.

V.

Analytisch is eenvoudig te bewijzen:

De determinant, die ontstaat door in een orthogonale determinant met de waarde — 1 de termen van de hoofddiagonaal met 1 te vermeerderen, heeft de waarde 0 en een rang, die een oneven getal met de graad verschilt.

Vergl.: *G. Schaake*, K. A. v. W., Vol. 35, bldz. 501, 1932.

VI.

Het bewijs van *L. Scheeffer* voor zijn Theorema V in „Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven", Acta Mathematica Bd. 5, bldz. 66, 1884, is onvolledig.

VII.

Bij de viervlakken met twee paar overstaande ribben gelijk aan a, terwijl van het laatste paar de éëne ribbe gelijk is aan ka, de ander aan xa, is er bij iedere k één $x \neq k$, zoodat de zwaartepunten van „draadfiguur" en „kartonfiguur" van dit viervlak samenvallen.

Vergl.: *F. Schuh*, Christiaan Huygens, jrgng. 9, bldz. 6 en 102, 1930—'31.

VIII.

Door de experimenten van *Becker, Kipphan, Nacken* en *Weidner* is niet bewezen dat de Bunsen-Roscoesche reciprociteitswet voor de zwarting van de fotografische plaat door kathodestralen geldt.

A. Becker en *E. Kipphan*, Annalen der Physik, [5], bd. 10, bldz. 15, 1931; *M. J. Nacken*, Physik. Zeitschrift, bd. 31, bldz. 296, 1930; *V. Weidner*, Annalen der Physik, [5], bd. 12, bldz. 239, 1932.

IX.

De definitie van „waarschijnlijkheid" door *E. Kamke* is onbruikbaar.

E. Kamke, „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie", bldz. 2.