De integraal van Stieltjes en zijn functietheoretische toepassing

DE INTEGRAAL VAN STIELTJES EN ZIJN FUNCTIETHEORETISCHE TOEPASSING

De Integraal van Stieltjes en zijn Functietheoretische Toepassing

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr C. G. N. DE VOOYS, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TE VERDEDIGEN TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE OP MAANDAG 28 NOVEMBER 1932, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

FRANS DE KOK
GEBOREN TE UTRECHT

AAN MIJN OUDERS

Aan het eind van mijn academische studie gekomen zij het mij vergund, mijn welgemeende dank te brengen aan U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die tot mijn academische vorming hebben bijgedragen.

Deze dank geldt in het bijzonder U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, zoowel voor Uw belangwekkende colleges als voor de eminente steun die ik bij de samenstelling van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

Ook U, Hooggeleerde Emeritus DE VRIES en Hooggeleerde BARRAU, zal ik steeds zeer erkentelijk blijven voor de leiding bij mijn studie van de Geometrie.

Tenslotte ben ik ook U, Hooggeleerde KRAMERS, ORNSTEIN en NIJLAND dank verschuldigd voor het vele dat ik van U heb mogen leeren.

INHOUD

HOOFDSTUK I

DE INTEGRAAL VAN STIELTJES

Definitie: Gegeven twee functies $f(x)$ en $\varphi(x)$, begrensd voor $a \leqq x \leqq b$, $a < b$. Beschouw een willekeurige verdeeling van het vak (a, b):

$$a = x_0 < x_1 < \ldots . < x_{k-1} < x_k < \ldots . < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

en zij
$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \; k = 1, 2, \ldots ., n. \quad (2)$$

Stel

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \{ \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \}.$$

Is er nu een getal S zoodanig dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zoodat bij iedere verdeeling (1) van (a, b), waarvoor het maximum subinterval $< \delta$ is en onafhankelijk van de ligging der

$$\xi_k \; (k = 1, 2, \ldots ., n)$$

in de subintervallen geldt:

$$| S_n - S | < \varepsilon,$$

dan is S bij definitie de Stieltjes-integraal van $f(x)$ naar $\varphi(x)$.

Notatie: $S = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ of $\int_a^b f d\varphi$.

Stelling I: *Gegeven:* $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat.*

Bewering: $\int_a^b \varphi df$ *bestaat en* $\int_a^b f d\varphi + \int_a^b \varphi df = f(b)\,\varphi(b) - f(a)\,\varphi(a)$.

Bewijs:

Beschouw een verdeeling van het vak (a, b) waarbij (1) en (2) gelden. Nu is:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\{f(x_k) - f(x_{k-1})\} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1})\{\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k-1})\} + f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a),$$

als $\xi_0 = a$ en $\xi_{n+1} = b$ genomen wordt.

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ zoodanig dat als het maximum subinterval der ξ_k's kleiner dan δ is, geldt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1})\{\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k-1})\} = \int_a^b f d\varphi + \theta\varepsilon, \quad |\theta| < 1.$$

Neem nu het maximumsubinterval der x_k's kleiner dan $\delta/2$, dan dat der ξ_k's kleiner dan δ, dus

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\{f(x_k) - f(x_{k-1})\} = -\int_a^b f d\varphi + f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) + \theta\varepsilon,$$

met $|\theta| < 1$ en hieruit volgt de bewering.

D e f i n i t i e : Bestaat $\int_a^b f d\varphi$ voor iedere $b > a$ en is $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f d\varphi$ aanwezig, dan is bij definitie deze limiet gelijk aan $\int_a^\infty f d\varphi$.

Analoog definieeren we: $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} f d\varphi$.

S t e l l i n g II:

Gegeven: $\int_{-\infty}^{+\infty} f d\varphi$ *bestaat,* $f\varphi \to \alpha$ *als* $x \to +\infty$, $f\varphi \to \beta$ *als* $x \to -\infty$.

Bewering: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi df = -\int_{-\infty}^{+\infty} f d\varphi + \alpha - \beta.$

Bewijs:

$$\int_p^q \varphi df = -\int_p^q f d\varphi + f(q)\,\varphi(q) - f(p)\,\varphi(p), \text{ volgens stelling I.}$$

Laat nu $p \to -\infty$ en $q \to +\infty$.

Stelling IIIa:

Gegeven: $\int_a^b f d\varphi_1$ *en* $\int_a^b f d\varphi_2$ *bestaan. Zij* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Bewering: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat en* $\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f d\varphi_1 - \int_a^b f d\varphi_2$.

Bewijs:

Beschouw een verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\{\varphi_1(x_k) - \varphi_1(x_{k-1})\} - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\{\varphi_2(x_k) - \varphi_2(x_{k-1})\}$$

Laat nu het maximum subinterval $\to 0$.

Stelling IIIb:

Gegeven: $\int_a^b f_1 d\varphi$ *en* $\int_a^b f_2 d\varphi$ *bestaan. Zij* $f = f_1 - f_2$.

Bewering: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat en* $\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f_1 d\varphi - \int_a^b f_2 d\varphi$.

Bewijs:

Beschouw een verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\} - \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\}$$

Laat nu het maximum subinterval $\to 0$.

Stelling IV:

Gegeven: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat.*

Bewering: f *en* φ *hebben geen diskontinuïteitspunt gemeen.*

Bewijs:

Nemen we aan dat f en φ een diskontinuïteitspunt d gemeen hebben. We onderscheiden drie gevallen:

1° $a < d < b$ en de diskontinuïteit van φ voor $x = d$ is niet ophefbaar.
Er zijn puntrijen: λ_n, μ_n, ξ_n, ξ_n' op (a, b), $n = 1, 2, \ldots$; zoodat
$\lambda_n < d < \mu_n$, $\mu_n - \lambda_n \to 0$ als $n \to \infty$, $\lambda_n \leqq \xi_n \leqq \mu_n$, $\lambda_n \leqq \xi_n' \leqq \mu_n$, $|\varphi(\mu_n) - \varphi(\lambda_n)| > p$, $|f(\xi_n) - f(\xi_n')| > q$, p en $q > 0$ en onafhankelijk van n.

2° $a < d < b$ en de diskontinuïteit van φ voor $x = d$ is ophefbaar.
Nu is f minstens links of rechts diskontinu voor $x = d$. Stel b.v. f rechts diskontinu voor $x = d$.
Er zijn puntrijen: μ_n, ξ_n, ξ_n' op (a, b), $n = 1, 2, \ldots$; zoodat $d < \mu_n$, $\mu_n \to d$ als $n \to \infty$, $d \leqq \xi_n \leqq \mu_n$, $d \leqq \xi_n' \leqq \mu_n$, $|\varphi(\mu_n) - \varphi(d)| > p$, $|f(\xi_n) - f(\xi_n')| > q$, p en $q > 0$ en onafhankelijk van n.

3° $d = a$ of $d = b$. Stel b.v. $d = a$.

Er zijn suiten punten: μ_n, ξ_n, ξ'_n, die aan de zelfde voorwaarden voldoen als onder ten 2°.

Hieruit volgt dat in elk van de gevallen: 1°, 2° of 3° er een rij van verdeelingen van (a, b), met maximum subinterval $\rightarrow 0$, aan te geven is en bij ieder van die verdeelingen twee puntrijen ξ en ξ', welke slechts in één subinterval verschillen, zoodanig dat voor de korrespondeerende sommen

$$S = \sum f(\xi_k) \{ \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \}, \quad S' = \sum f(\xi'_k) \{ \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \}$$

bij elk van de verdeelingen geldt: $| S - S' | > pq > 0$ en dit is in strijd met het bestaan van de Stieltjes-integraal: $\int_a^b f d\varphi$.

S t e l l i n g V:

Gegeven: *$\varphi(x)$ monotoon niet afnemend voor $a \leqq x \leqq b$, $f(x)$ begrensd voor $a \leqq x \leqq b$, $a < b$.*

Zij B_k en b_k respectievelijk de bovenste en benedenste grens van $f(x)$ voor $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ en stel

$$\omega_k = B_k - b_k, \quad \Delta\varphi_k = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}).$$

Bewering: *Noodig en voldoende voor het bestaan van $\int_a^b f d\varphi$ is dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zoodanig dat voor iedere verdeeling van (a, b) met maximum subinterval $< \delta$, geldt:* $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \Delta\varphi_k < \varepsilon$.

Bewijs:

Noodig: Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ zoodat voor iedere verdeeling van (a, b) met maximum subinterval $< \delta$ en waarbij aan (1) en (2) voldaan is, geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta\,\varphi_k - \int_a^b f d\varphi = \theta\varepsilon,\ |\,\theta\,| < 1.$$

Dus geldt ook:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\,\Delta\,\varphi_k - \int_a^b f d\varphi = \theta\varepsilon,\ \sum_{k=1}^{n} b_k\,\Delta\,\varphi_k - \int_a^b f d\varphi = \theta\varepsilon \text{ met } |\,\theta\,| \leqq 1.$$

Dus:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\Delta\,\varphi_k \leqq 2\varepsilon \text{ als het maximum subinterval} < \delta \text{ is.}$$

Voldoende: Beschouw een verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden.

$$o_k = \sum_{k=1}^{n} b_k\,\Delta\,\varphi_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta\,\varphi_k \leqq \sum_{k=1}^{n} B_k\,\Delta\,\varphi_k = O_k.$$

Zijn B en b respectievelijk de bovenste en benedenste grens van f op (a, b) dan geldt:

$$b\,\{\varphi(b) - \varphi(a)\} \leqq o_k \leqq O_k \leqq B\,\{\varphi(b) - \varphi(a)\}.$$

Benedenste grens van O_k bij alle mogelijke verdeelingen van (a, b) zij O.

Bovenste grens van o_k bij alle mogelijke verdeelingen van (a, b) zij o.

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ zoodat bij alle verdeelingen van (a, b) met maximum subinterval $< \delta$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\Delta\,\varphi_k < \varepsilon \text{ of } O_k - o_k < \varepsilon.$$

Conclusie: $O = o$ en als het maximum subinterval $< \delta$ is geldt dus:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta\,\varphi_k - O\right| < \varepsilon.$$

Dus: $O = o = \int_a^b f d\varphi.$

Opmerkingen:

De voorwaarde: (α) *„Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een verdeeling van (a, b) met $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta \varphi_k < \varepsilon$"* is zonder meer niet voldoende voor het bestaan van $\int_a^b f d\varphi$. Neem b.v. f en φ monotoon stijgend en kontinu uitgezonderd één punt x_0 $(a < x_0 < b)$, waar φ links diskontinu en rechts kontinu is en f links kontinu en rechts diskontinu is. Hier is aan voorwaarde (α) voldaan. (Neem x_0 als deelpunt op). De Stieltjes-integraal $\int_a^b f d\varphi$ is echter volgens stelling IV niet aanwezig.

De voorwaarden: (α) *en „f en φ hebben geen diskontinuïteitspunt gemeen" zijn aequivalent met de voorwaarde in de gegeven stelling.* Men zie:

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een verdeeling V_1 van (a, b) met $\sum_{k=1}^{n_1} \omega_k \Delta \varphi_k < \varepsilon/2$.

Er is een $\delta' > 0$ zoodat ieder subsegment van een verdeeling V van (a, b), met maximum subinterval $< \delta'$, hoogstens één van de deelpunten van V_1 bevat. Er is een $\delta > 0$, $\delta < \delta'$, zoodat $\omega \Delta \varphi < \varepsilon/4n_1$ over ieder subsegment met lengte $< \delta$, dat één van de deelpunten van V_1 bevat. Dit is mogelijk omdat in ieder deelpunt van V_1 minstens een van de functies f of φ kontinu is. Beschouwen we nu een willekeurige verdeeling van (a, b) met maximum subinterval $< \delta$. Over de subsegmenten die geen deelpunt van V_1 bevatten is

$$\sum \omega_k \Delta \varphi_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

en voor de overige, hun aantal bedraagt hoogstens $2n_1$, is

$$\sum \omega_k \Delta \varphi_k < \frac{\varepsilon}{4n_1} \cdot 2n_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dus
$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta \varphi_k < \varepsilon$$

voor iedere verdeeling waarvan het maximum subinterval $< \delta$ is.

Stelling VI:

Gegeven: $f(x)$ *kontinu voor* $a \leqq x \leqq b,\ a < b$.
$\varphi(x)$ *van begrensde variatie voor* $a \leqq x \leqq b$.

Bewering: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat.*

Bewijs:

In verband met stelling III*a* mogen we φ monotoon niet afnemend veronderstellen. Wegens de uniforme kontinuïteit van f op (a, b) is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zoodat als het maximum subinterval $< \delta$ is geldt: $\omega_k < \varepsilon$ voor $k = 1, 2, \ldots . n$. Dus

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \Delta \, \varphi_k < \varepsilon \{ \varphi(b) - \varphi(a) \}$$

en stelling V toepassende volgt de bewering.

Stelling VII:

Gegeven: $f(x)$ *Riemann-integreerbaar voor* $a \leqq x \leqq b$.
$\varphi(x)$ *absoluut kontinu voor* $a \leqq x \leqq b,\ a < b$.

Bewering: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat en is gelijk aan* $\int_a^b f\varphi'$ *opgevat als Lebesgue-integraal.*

Bewijs:

Zij $\varepsilon > 0$ en ω_k de schommeling van $f(x)$ voor $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$. Er is een $\eta > 0$ zoodat $\int_E |\varphi'| < \varepsilon$ als $\mu E < \eta$ is. Er is een $\delta > 0$ zoodat voor iedere verdeeling van (a, b) met maximum subinterval $< \delta$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon\eta.$$

Beschouw nu een verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden en het maximum subinterval $< \delta$ is.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi' = \int_a^b f\varphi' + \theta \sum_{k=1}^{n} \omega_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\varphi'|, \ |\theta| \leqq 1.$$

De laatste som splitsen we: 1° over de vakken met $\omega_k \leqq \varepsilon$, 2° over de vakken met $\omega_k > \varepsilon$, de som van de lengten dezer vakken is $< \eta$. Dus

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\varphi'| \leqq \varepsilon \int_a^b |\varphi'| + 2M\varepsilon, \text{ als } |f| < M \text{ voor } a \leqq x \leqq b.$$

Uitbreiding:

Gelden de gegevens in ieder vak $(-a, +a)$, $a > 0$ en bestaat $\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi'$ als Lebesgue-integraal dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi',$$

hetgeen volgt uit het voorafgaande door de limietovergang: $a \to \infty$.

Stelling VIII:

Gegeven: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat en* f *kontinu voor* $x = a$.

Zij $\psi = \varphi$ *voor* $a < x \leqq b$ *en* $\psi(a) = \varphi(a) + h$.

Bewering: $\int_a^b f d\psi$ *bestaat en* $\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f d\psi + hf(a)$.

Bewijs:

Beschouw een verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \{ \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \{ \psi(x_k) - \psi(x_{k-1}) \} + hf(\xi_1).$$

Laat nu het maximum subinterval $\rightarrow 0$, dan volgt de bewering.

Stelling IX:

Gegeven: $\int_a^b f d\varphi$ *bestaat. Totale variatie van* φ *zij* T *en* $|f| \leqq M$ *voor* $a \leqq x \leqq b$.

Bewering: $\left| \int_a^b f d\varphi \right| \leqq MT$.

Bewijs:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \{ \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) \} \right| \leqq MT$$

voor iedere verdeeling van (a, b) waarbij (1) en (2) gelden.

Stelling X:

Gegeven: $I = \int_a^b f d\varphi$ *bestaat.*

Zij $a < c < b$.

Bewering: $I_1 = \int_a^c f d\varphi$ *en* $I_2 = \int_c^b f d\varphi$ *bestaan en* $I = I_1 + I_2$.

Bewijs:

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ zoodat

$$| S_n - I | < \varepsilon$$

voor alle verdeelingen van (a, b) met de fijnheid δ (d. w. z. waarvan het maximum subinterval $< \delta$ is), onafhankelijk van de keuze der tusschenpunten ξ. Verdeel nu (a, c) met de fijnheid δ en kies daarbij bepaalde tusschenpunten ξ; de korrespondeerende som zij $\sum$. Beschouw nu twee verdeelingen van (c, b) met de fijnheid δ, de korrespondeerende sommen noteeren we:

$$\sum_1 \text{ en } \sum_2.$$

Nu geldt:

$$\left|\sum + \sum_1 - I\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum + \sum_2 - I\right| < \varepsilon \quad \text{en dus}$$

$$\left|\sum_1 - \sum_2\right| < 2\varepsilon,$$

onafhankelijk van de keuze der tusschenpunten ξ.

Beschouwt men nu een bepaalde rij van verdeelingen V_n van (c, b) met bepaalde tusschenpunten ξ, zoodanig dat de fijnheid van de n^{de} verdeeling tot nul nadert als $n \to \infty$. De bijbehoorende sommen duiden we aan met S_n. Is voor $n > n$ de fijnheid van $V_n < \delta$ dan geldt

$$(a) \qquad | S_{n+p} - S_n | < 2\varepsilon, \; n > n_0, \; p = 1, 2, \ldots.$$

Hieruit volgt dat S_n een limiet heeft als $n \to \infty$, zij die limiet I_2. Uit (a) volgt: $| S_n - I_2 | \leqq 2\varepsilon$ voor $n > n_0$.

Is S_δ een som behoorende bij een willekeurige verdeeling van (c, b) met de fijnheid δ dan geldt: $| S_n - S_\delta | < 2\varepsilon$ voor $n > n_0$ en onafhankelijk van de keuze der tusschenpunten ξ bij S_δ.

Dus:

$$| S_\delta - I_2 | < 4\varepsilon.$$

en dus bestaat $I_2 = \int_c^b f d\varphi$. Evenzoo te bewijzen dat $I_1 = \int_a^c f d\varphi$ bestaat.

Beschouwt men nu nog een rij van verdeelingen van (a, b) met c als deelpunt en waarvan de fijnheid $\to 0$, dan blijkt:

$$I = I_1 + I_2.$$

Definitie: Gegeven twee functies $f(x, y)$ en $\varphi(x, y)$, begrensd voor

$$a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2\ ;\ a_1 < b_1,\ a_2 < b_2 \text{ (Rechthoek } R\text{)}.$$

Beschouw een willekeurige verdeeling van de rechthoek R:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_m = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{l-1} < y_l < \dots < y_n = b_2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Zij verder

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{l-1} \leqq \eta_l \leqq y_l,\ l = 1, 2, \dots, n.$$

Stel

$$\varphi(x_k, y_l) - \varphi(x_{k-1}, y_l) - \varphi(x_k, y_{l-1}) + \varphi(x_{k-1}, y_{l-1}) = \triangle_{x_{k-1},\, y_{l-1}}^{x_k,\, y_l}\ \varphi(x, y).$$

en

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} f(\xi_k, \eta_l)\ \triangle_{x_{k-1},\, y_{l-1}}^{x_k,\, y_l}\ \varphi(x, y).$$

Is er nu een getal S zoodanig dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zoodat voor iedere verdeeling (1) van de rechthoek R waarvoor de diameter van alle verdeelingsrechthoeken $< \delta$ is en onafhankelijk van de ligging der ξ_k en η_l in de subintervallen geldt

$$| S_{m,n} - S | < \varepsilon,$$

dan is S bij definitie de Stieltjes-integraal van $f(x, y)$ naar $\varphi(x, y)$.

Notatie:

$$S = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\ d\varphi(x, y) \text{ of } S = \int_R f d\varphi.$$

Stelling XI:

Bewering: $\int_R \varphi df = \int_R f d\varphi + \int_{a_2}^{b_2} f(a_1, y)\, d\varphi(a_1, y) - \int_{a_2}^{b_2} f(b_1, y)\, d\varphi(b_1, y)$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} f(x, a_2)\, d\varphi(x, a_2) - \int_{a_1}^{b_1} f(x, b_2)\, d\varphi(x, b_2) + \triangle_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} f \cdot \varphi.$$

als alle integralen die hierin optreden bestaan.

Bewijs:

We stellen $\varphi(x_k, y_l) = \varphi_{k,l}$.

We hebben nu de identiteit:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \varphi_{k,l}\,[f_{k,l} - f_{k-1,l} - f_{k,l-1} + f_{k-1,\,l-1}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f_{k-1,\,l-1}\,[\varphi_{k,l} - \varphi_{k-1,l} - \varphi_{k,l-1} + \varphi_{k-1,\,l-1}] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} f_{o,l-1}\,[\varphi_{o,l} - \varphi_{o,l-1}] - \sum_{l=1}^{n} f_{m,l-1}\,[\varphi_{m,l} - \varphi_{m,l-1}] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} f_{k-1,o}\,[\varphi_{k,o} - \varphi_{k-1,o}] - \sum_{k=1}^{m} f_{k-1,n}\,[\varphi_{k,n} - \varphi_{k-1,n}] +$$

$$+ f_{m,n}\,\varphi_{m,n} - f_{o,n}\,\varphi_{o,n} - f_{m,o}\,\varphi_{m,o} + f_{o,o}\,\varphi_{o,o}$$

Laten we nu de fijnheid van de verdeeling tot nul naderen dan volgt de stelling.

Stelling XII:

Gegeven: φ *sommeerbaar over de rechthoek* $R\ (a_1, a_2\ ;\ b_1, b_2)$.

f *Riemann-integreerbaar over* R. *Zij* $\Phi\,(x, y) = \int\limits_{a_1}^{x}\int\limits_{a_2}^{y} \varphi$.

Bewering: $\int\limits_R f d\Phi = \int\limits_R f\varphi$ *waarin links een Stieltjes-integraal staat en rechts een Lebesgue-integraal.*

Bewijs:

Analoog te geven als de korrespondeerende stelling in één afmeting (Stelling VII, een absoluut kontinue functie is een integraal van Lebesgue en omgekeerd).

HOOFDSTUK II

FUNCTIETHEORETISCHE TOEPASSINGEN

A. – Toepassing op een klasse van Holomorfe Functies

We beschouwen met R. Nevanlinna de volgende klasse van functies:

1° *$f(x)$ holomorf voor $t > 0$ $(x = s + it)$ en $I\{f(x)\} \leqq 0$.*

2° *Voor ieder natuurlijk getal $n \geqq 2$ geldt:*

$$f(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{x^{n-1}} + R_n(x)$$

waarin $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ reëel zijn en $x^{n-1} R_n(x) \to 0$ als $x \to \infty$ in het halfvlak $t > \varepsilon > 0$, voor iedere $\varepsilon > 0$.

Stel $I\{f(x)\} = - V(s, t)$. Dus $V(s, t) \geqq 0$ voor $t > 0$.

Volgens de formule van Poisson is voor $t > v$, wegens de begrensheid van $f(x)$ voor $t > v > 0$:

$$I\{f(x)\} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{u=-\infty}^{+\infty} V(u, v)\, d\psi, \quad \psi = arg\,(x - \xi), \; \xi = u + iv.$$

Wegens de begrensdheid van $xf(x)$ voor $t \geqq v$ is voor $t > v > 0$

$$R\{f(x)\} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} V(u, v) \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \varrho = |\, x - \xi \,|$$

op een reëele constante na, die hier nul is (Neem b.v. $x = it$ en laat $t \to \infty$).

Dus

$$(1) \qquad f(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} \frac{V(u, v)}{\xi - x}\, du, \quad t > v > 0.$$

Voor iedere functie van de klasse geldt:

$$(2) \qquad f(x) = \frac{c_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

uniform voor $v > \varepsilon > 0$, als $x = s + iv$.
Dus

$$(3) \quad V(s, v) = \frac{c_1 v}{s^2 + v^2} + O\left(\frac{1}{s^2 + v^2}\right), \text{ uniform voor } v > \varepsilon > 0.$$

We definieeren nu voor $v > 0$:

$$(4) \qquad \psi(u, v) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{u} V(s, v)\, ds.$$

Deze definitie is geoorloofd wegens (3).
Verder is:

$$\psi(u, v) = \frac{c_1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{v}{s^2 + v^2}\, ds - I \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{u} \left[f(s + iv) - \frac{c_1}{s + iv} \right] ds \right\}$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left(bg\, tg \frac{u}{v} + \frac{\pi}{2} \right) - I \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{u} \left[f(s + iv) - \frac{c_1}{s + iv} \right] ds \right\}.$$

Nu is

$$\int\limits_{-\infty}^{u} \left[f(s + iv) - \frac{c_1}{s + iv} \right] ds$$

holomorf voor $v > 0$, in verband met (2).

Dus $\psi(u, v)$ is harmonisch voor $v > 0$. Bij vaste v is $\psi(u, v)$ een monotoon toenemende functie van u en

$$\psi(u, v) \to c_1 \text{ als } u \to +\infty$$

want $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(s+iv) - \frac{c_1}{s+iv}\right] ds = 0,$ wegens (2).

Aangezien $\psi(u, v)$ harmonisch is voor $v > 0$ en $0 \leqq \psi(u, v) \leqq c_1$ voor $v > 0$, is er volgens een stelling van Fatou een volle maat waar

$$\psi(u, v) \to \psi(u) \qquad \text{als } v \to 0.$$

$\psi(u)$ is monotoon op die volle maat. We completeeren $\psi(u)$ door daaraan in ieder punt dat niet tot die volle maat behoort, de rechtsche limiet van $\psi(u)$, op de volle maat, als waarde toe te kennen. De zoo gecompleteerde functie $\psi(u)$ is monotoon niet afnemend en $0 \leqq \psi(u) \leqq c_1$.

Uit (4) volgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\psi(u, v) = \frac{1}{\pi} V(u, v).$$

Partieele integratie van (1) geeft:

$$(5) \qquad f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u, v)}{(x-\xi)^2}\, du, \qquad t > v > 0.$$

We laten nu in (5) v tot nul naderen.

Op een volle maat

$$\frac{\psi(u, v)}{(x-\xi)^2} \to \frac{\psi(u)}{(x-u)^2} \quad \text{als } v \to 0.$$

Bovendien is

$$\left|\frac{\psi(u, v)}{(x-\xi)^2}\right| < \frac{4c_1}{t^2} \text{ voor } 0 < v < \frac{t}{2}. \qquad (x = s + it).$$

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $T > 0$ zoodanig dat

$$\left| \int_T^\infty \frac{\psi(u, v)}{(x-\xi)^2} du \right| < \varepsilon, \text{ voor } 0 < v < \frac{t}{2} \text{ en } \left| \int_T^\infty \frac{\psi(u)}{(x-u)^2} du \right| < \varepsilon.$$

Evenzoo de correspondeerende integralen van $-\infty$ tot $-T$. Volgens een bekende stelling van Lebesgue geldt

$$\int_{-T}^{T} \frac{\psi(u, v)}{(x-\xi)^2} du \to \int_{-T}^{T} \frac{\psi(u)}{(x-u)^2} du \quad \text{als } v \to 0.$$

Dus

$$f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u)}{(x-u)^2} du, \quad t > 0.$$

Toepassing van de stellingen VII en II van de Stieltjes-integralen geeft dan

$$(6) \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{x-u}, \quad t > 0.$$

Iedere functie van onze klasse is dus te schrijven als een Stieltjes-integraal van de vorm (6).

We zullen thans nog bewijzen dat

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{k-1}\, d\psi(u), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Allereerst:

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(u).$$

Men heeft:

$$0 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(u) = \psi(+\infty) - \psi(-\infty) \leqq c_1 \text{ want } 0 \leqq \psi(u) \leqq c_1.$$

Verder is:

$$xf(x) = c_1 + \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \to 0 \text{ als } x \to \infty \text{ en } t > t_0 > 0.$$

$$(7) \qquad x\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{x - u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{1 - \frac{u}{x}} = c_1 + \varepsilon(x).$$

Zij $x = it$ en neem van beide leden in (7) het reëele deel:

$$(8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{1 + \left(\frac{u}{t}\right)^2} = c_1 + R\{\varepsilon(x)\}. \text{ Nu } t \to +\infty, \text{ dan rechterlid} \to c_1.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $T > 0$ zoodat

$$0 \leqq \int_{T}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{1 + \left(\frac{u}{t}\right)^2} < \int_{T}^{\infty} d\psi < \varepsilon \text{ en } 0 \leqq \int_{-\infty}^{-T} d\psi < \varepsilon.$$

$$\int_{-T}^{T} \frac{d\psi(u)}{1 + \left(\frac{u}{t}\right)^2} \to \int_{-T}^{T} d\psi(u) \text{ als } t \to \infty. \text{ Dus:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{1 + \left(\frac{u}{t}\right)^2} \to \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(u) \text{ als } t \to \infty \text{ en uit (8) volgt nu: } c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(u).$$

Stel nu dat:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^{k-1}\, d\psi(u) \text{ juist is voor } k = 1, 2, \dots . n;$$

dan zal bewezen worden dat:

$$c_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n\, d\psi(u).$$

We hebben de identiteit:

$$\frac{1}{x-u} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u^{k-1}}{x^k} + \frac{u^{n+1}}{x^{n+1}(x-u)}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots . + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^n + \frac{u^{n+1}}{x-u} \right) d\psi(u).$$

Verder is:

$$\frac{1}{x^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^n + \frac{u^{n+1}}{x-u} \right) d\psi(u) = \frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{x^{n+2}} + R_{n+3}(x)$$

waarin: $x^{n+2} R_{n+3}(x) \to 0$ als $x \to \infty$, $t > t_0 > 0$.

Zij $x = it$ en nemen we in beide leden respectievelijk het reëele en imaginaire deel, dan volgt:

$$(\alpha) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^n - \frac{u^{n+2}}{t^2 + u^2} \right) d\psi(u) \to c_{n+1} \qquad \text{als } t \to \infty$$

$$(\beta) \qquad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{1 + \left(\frac{u}{t}\right)^2}\, d\psi(u) \right| < K(t_0) \qquad \text{voor } t > t_0 > 0.$$

Is n even dan volgt uit (α):

$$\int_{-t}^{t} u^n \left(1 - \frac{u^2}{t^2+u^2}\right) d\psi(u) < M,$$

waarin M een constante is onafhankelijk van t. Dus stellig

$$\int_{-t}^{t} u^n \, d\psi(u) < 2M, \text{ want } \frac{u^2}{u^2+t^2} < {}^1/_2 \text{ voor } |\, u \,| < t.$$

Dus: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^n d\psi(u)$ bestaat.

Is n oneven dan volgt uit (β):

$$\int_{-t}^{t} u^{n+1} \, d\psi(u) < 2K\,(t_0), \quad t > t_0.$$

Dus $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{n+1} \, d\psi(u)$ bestaat en dus ook $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^n \, d\psi(u)$ (zelfs absoluut).

Uit (α) volgt nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^n \, d\psi(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{n+2}}{t^2+u^2} d(\psi u) \to c_{n+1} \text{ als } t \to \infty$$

en aangezien de 2de integraal tot nul nadert als $t \to \infty$ [wegens het bestaan van $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, u \,|^n \, d\psi(u)$] volgt dus:

$$c_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n d\psi(u).$$

Deze functieklasse treedt op in de oplossing van het momentenprobleem van Stieltjes. Men zie:

R. Nevanlinna: *Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem.*

Annales Academiae Scientiarum Fennicae Serie A. Tom. XVIII, N° 5.

B – Toepassing op Reeksen van Rationale Functies

1. We beschouwen de reeks

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}, \quad A_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty, \quad a_n \text{ reëel.}$$

$f(z) = u + iv, z = x + iy$. $f(z)$ holomorf voor $y > 0$ en voor $y < 0$.
Aan ieder punt a_n kennen we de massa A_n toe. Zij dan $\varphi(u)$ de massa op het interval:

$$-\infty < x \leqq u\,;\ \varphi(u) \text{ is niet dalend, } \varphi(-\infty) = 0, \varphi(+\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zij $\varepsilon > 0$ en $y > 0$. Er is een k zoodat

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n < \varepsilon.$$

Het grootste van de getallen $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|$, plus 1, zij a. Dan is dus

$$\sum A_n < \varepsilon \text{ voor de } A_n \text{ behoorende bij } |a_n| \geqq a.$$

Beschouw een willekeurige verdeeling van het vak $(-a, +a)$:

$$-a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = a$$

en zij

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \text{ voor } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Nu is

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{x_{k-1} < a_n \leqq x_k} \frac{A_n}{z - a_n} + \sum_{a_n > a, a_n \leqq -a} \frac{A_n}{z - a_n}.$$

Is nu δ het maximum van de getallen

$$x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, m;$$

dan is

$$\left| \frac{1}{z - \xi_k} - \frac{1}{z - a_n} \right| \leqq \frac{\delta}{y^2}, \text{ als } x_{k-1} < a_n \leqq x_k.$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})}{z - \xi_k} + \theta \cdot \frac{\delta}{y^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n . + \theta \frac{\varepsilon}{y},\ |\theta| < 1.$$

Dit geldt voor iedere verdeeling van $(-a, +a)$ waarbij het maximum subinterval $\leqq \delta$ is en onafhankelijk van de ligging der ξ_k in de subintervallen. Dus

$$f(z) = \int_{-a}^{+a} \frac{d\varphi(x)}{z - x} + \theta \frac{\varepsilon}{y},\ |\theta| < 1.$$

Is de bovenste grens der $|a_k| : +\infty$ dan $a \to \infty$ als $\varepsilon \to 0$. Dus voor $y > 0$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(x)}{z - x}.$$

2. $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z - u},\ z = x + iy,\ y > 0.$

Volgens de stellingen II en VII van de Stieltjes-integralen is nu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z-u} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, d\,\frac{1}{z-u} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)\, du}{(z-u)^2}.$$

Hieruit volgt dat voor $y > 0$ geldt:

$$v = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)\,(x-u)}{\{(x-u)^2 + y^2\}^2}\, du.$$

3. *Bewering:* Op een volle maat is $\varphi'(u) = 0$.

Bewijs:

Stel

$$\overline{\lim_{x_1 \to x}} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} = \overline{D}_{+}\,\varphi(x), \quad x_1 > x.$$

Zij $\varepsilon > 0$ en $E(\varepsilon)$ de verzameling der punten van een willekeurig interval (p, q) met $\overline{D}_{+}\varphi(x) > \varepsilon$. Stel dat de maat μ van $E(\varepsilon)$ positief was.

Er is een k zoodat

$$\sum_{k+1}^{\infty} A_n < \tfrac{1}{2}\mu\varepsilon.$$

E_1 zij de verzameling die ontstaat door aan E de punten

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ op (p, q) gelegen te onttrekken.

De maat van E_1 is μ. Ieder punt x van E_1 is beginpunt van een rij intervallen (x, x_1), met $x_1 \to x$, waarbinnen geen

$a_n, n = 1, 2, \ldots k$, ligt en waarvoor $\varphi(x_1) - \varphi(x) > \varepsilon\,(x_1 - x)$.

Volgens de overdekkingsstelling van Vitali kan men door middel van een eindig aantal binnen (p, q) en twee aan twee buiten elkaar gelegen intervallen, van de genoemde intervalverzameling, een deel van E_1 overdekken, waarvan de maat $> \frac{1}{2}\mu$ is. Hieruit volgt:

$$\sum_{k+1}^{\infty} A_n > \tfrac{1}{2}\mu \, . \, \varepsilon.$$

Conclusie:

$\mu = 0$. Dus op een volle maat van (p, q) : $\overline{D}_{+}\varphi(x) \leqq \varepsilon$. Hieruit volgt dat er een volle maat van (p, q) is waarop de rechterbovenafgeleide van φ nul is, en dus ook de rechterafgeleide (wegens φ niet dalend).

Evenzoo is te bewijzen dat er een volle maat is waar de linkerafgeleide nul is en dan volgt dus de bewering.

Opmerking:

Men ziet nu dat de in § 1 gevonden Stieltjes-integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(x)}{z - x}$$

niet vervangen mag worden door de Lebesgue-integraal

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{z - x}$$

want deze is identiek nul.

(De Lebesgue-integraal negeert een puntverzameling van de maat nul, in casu de verzameling: $a_1, a_2, \ldots,$ waar de linkerafgeleide van φ gelijk aan $+ \infty$ is).

4. We nemen een punt x, met $\varphi'(x) = 0$ en zullen nu aantoonen dat $v \to 0$ als $y \to 0$ en x constant gelijk aan de gekozen x.

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $h > 0$ zoodanig dat

$$|\varphi(u) - \varphi(x)| < \varepsilon \, |u - x| \quad \text{als} \quad |u - x| < h.$$

Nu is:

$$v = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)(x-u)}{\{(x-u)^2+y^2\}^2}\, du = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)-\varphi(x)}{\{(x-u)^2+y^2\}^2}(x-u)\, du.$$

$(y > 0)$.

Deze laatste integraal splitsen we:

$$\int_{-\infty}^{x-h}, \int_{x-h}^{x}, \int_{x}^{x+h}, \int_{x+h}^{\infty}.$$

$$\left| 2y \int_{x+h}^{\infty} \frac{\varphi(u)-\varphi(x)}{\{(x-u)^2+y^2\}^2}(x-u)\, du \right| \leqq 2y \int_{x+h}^{\infty} \frac{\varphi(u)-\varphi(x)}{|x-u|^3}\, du \to 0$$

als $y \to 0$.

$$\left| 2y \int_{x}^{x+h} \right| \leqq 2\varepsilon y \int_{x}^{x+h} \frac{(x-u)^2\, du}{\{(x-u)^2+y^2\}^2} < 2\varepsilon y \int_{x}^{x+h} \frac{du}{(x-u)^2+y^2} =$$

$$= 2\varepsilon\, bg\, tg \left. \frac{u-x}{y} \right|_{x}^{x+h} < \pi\varepsilon.$$

Evenzoo:

$$2y \int_{-\infty}^{x-h} \to 0, \text{ even snel als } y \text{ en } \left| 2y \int_{x-h}^{x} \right| < \pi\varepsilon.$$

Dus: $v \to 0$ als $y \to 0$.

5. Volgens Fatou is er een volle maat op de x-as waar $f(z) \to \lambda(x)$, $|\lambda(x)| < \infty$, als $y \to 0$ en x constant, aangezien $v < 0$ voor $y > 0$.

Er is ook een volle maat waar $\varphi'(x) = 0$. Dus is er ook een volle maat waar beide gelden en daar is dus $\lambda(x)$ reëel. We beschouwen nu een punt x_0 van die volle maat.

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $h > 0$ zoodat

$$|\varphi(u) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\, |u - x_0| \text{ als } |u - x_0| < h.$$

We nemen nu $z = x_0 + iy$ en $0 < y < h$.

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{z-u} = \int_{-\infty}^{x_0-y} + \int_{x_0-y}^{x_0+y} + \int_{x_0+y}^{\infty}$$

$$\left| \int_{x_0-y}^{x_0+y} \frac{d\varphi(u)}{z-u} \right| < \frac{2\varepsilon y}{y} = 2\varepsilon.$$

$$\left| \int_{-\infty}^{x_0-y} \frac{d\varphi(u)}{z-u} - \int_{-\infty}^{x_0-y} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u} \right| = \left| \int_{-\infty}^{x_0-y} \frac{x_0-z}{(x_0-u)(z-u)} \, d\varphi(u) \right| \leqq$$

$$\leqq y \, . \, \sqrt{2} \, . \int_{-\infty}^{x_0-y} \frac{d\varphi(u)}{|z-u|^2}$$

$$\leqq y \, . \, \sqrt{2} \, . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{|z-u|^2} = \sqrt{2} \, . \, |v(z)| \to 0 \text{ als } y \to 0.$$

Evenzoo:

$$\left| \int_{x_0+y}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{z-u} - \int_{x_0+y}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u} \right| \to 0 \text{ als } y \to 0.$$

Dus:

$$f(z) - \int_{-\infty}^{x_0-y} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u} - \int_{x_0+y}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u} \to 0 \text{ als } y \to 0.$$

Definieeren we nu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u}$$

gelijk aan de eventueele limiet van

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{x_0-y} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u} + \int\limits_{x_0+y}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u}\right\} \text{ als } y \to 0$$

dan krijgen we als $y \to 0$:

$$\lambda(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{x_0-u}.$$

De Fatousche limiet $\lambda(x)$ is op een volle maat gelijk aan de hoofdwaarde van de Stieltjes-integraal

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{x-u}.$$

6. We laten de onderstelling $A_n > 0$ vallen en beschouwen het geval dat de A_n algemeen complex zijn en

$$\sum_{1}^{\infty} | A_n | < \infty.$$

De reeks

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$$

laat zich splitsen in vier reeksen, waarop de beschouwingen van de voorafgaande paragrafen van toepassing zijn.

Aangezien de doorsnede van vier volle maten weer een volle maat is, geldt het resultaat van § 5 dus algemeen. Dus op een volle maat

$$\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{z-u}$$

waarin $\varphi(u)$ de „massa" is op het interval $-\infty < x \leqq u$.

7. Zij

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | < \infty,$$

alle a_ν binnen een rechthoek $R(a_1, a_2; b_1, b_2)$ gelegen (geen a_ν op de rand).

Aan ieder punt a_ν kennen we de „massa'' A_ν toe.

Zij $\varphi(u, v)$ de som der A_ν behoorende bij de $a_\nu = a_\nu' + i a_\nu''$ waarvoor $a_\nu' < u$, $a_\nu'' < v$. Dan is:

$$\triangle_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \varphi = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) - \varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) \qquad (x_2 > x_1, \; y_2 > y_1)$$

de „massa'' in de gesloten rechthoek $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ verminderd met de gesloten bovenrand en gesloten rechterrand.

$$(x_1 \leqq a_\nu' < x_2, \; y_1 \leqq a_\nu'' < y_2).$$

Beschouw een verdeeling van de rechthoek R:

$$a_1 = x_0 < x_1 < \ldots . < x_{k-1} < x_k < \ldots . < x_m = b_1.$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \ldots . < y_{l-1} < y_l < \ldots . < y_n = b_2.$$

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \sum \frac{A_\nu}{z - a_\nu}$$

waarin de 3de sommatie uitgestrekt is over de a_ν's waarvoor:

$$x_{k-1} \leqq a' < x_k, \; y_{l-1} \leqq a_\nu'' < y_l.$$

Nu is

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \frac{\triangle_{x_{k-1}, y_{l-1}}^{x_k, y_l} \varphi(u, v)}{z - \varrho_{k,l}} + \theta \, . \sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | \, . \, \frac{\delta}{\varrho^2}$$

met $|\theta| < 1$ als $\varrho_{k,l}$ binnen de rechthoek $(x_{k-1}, y_{l-1}; x_k, y_l)$ ligt, de diameter van alle verdeelingsrechthoeken $< \delta$ is en z een positieve afstand ϱ buiten $\overline{R}$ blijft. Voor z buiten $\overline{R}$ kunnen we dus schrijven:

$$f(z) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)} \text{ of } f(z) = \int_R \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)}.$$

8. Stel

$$\frac{1}{z - (u + iv)} = g(u, v) \qquad \text{voor } z \text{ buiten } \overline{R}.$$

Nu is:

$$g(u, v) = \int_{a_1}^{u}\int_{a_2}^{v} \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u \partial v} + g(a_1, v) + g(u, a_2) - g(a_1, a_2).$$

Volgens stelling XI is nu:

$$f(z) = \int_R g(u, v)\, d\varphi(u, v) = \int_R \varphi(u, v)\, dg(u, v) +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \varphi(u, a_2)\, dg(u, a_2) - \int_{a_1}^{b_1} \varphi(u, b_2)\, dg(u, b_2) +$$

$$+ \int_{a_2}^{b_2} \varphi(a_1, v)\, dg(a_1, v) - \int_{a_2}^{b_2} \varphi(b_1, v)\, dg(b_1, v) + \triangle_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \varphi \cdot g.$$

Volgens stelling XII en VII kunnen we hier nu voor schrijven:

$$f(z) = \int_R \varphi(u, v) \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u \partial v} - \int_{a_1}^{b_1} \varphi(u, b_2) \frac{\partial g(u, b_2)}{\partial u} -$$

$$- \int_{a_2}^{b_2} \varphi(b_1, v) \frac{\partial g(b_1, v)}{\partial v} + \varphi(b_1, b_2)\, g(b_1, b_2).$$

(De beide andere integralen zijn nul, omdat de a's alle binnen R liggen).

9. *Gegeven:* $\sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | < \infty, a'_\nu > a_1, a''_\nu > a_2$ voor $\nu = 1, 2, \ldots.$

Bewering: $$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = 2i \int_{a_1}^{\infty}\int_{a_2}^{\infty} \frac{\varphi(u, v)}{\{z - (u+iv)\}^3} du\, dv$$

$$(a_\nu = a'_\nu + i\, a''_\nu)$$

als z buiten het integratiegebied van de dubbele integraal ligt. ($\varphi(u, v)$ gedefinieerd als onder 7).

Bewijs:

Uit § 8 en

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | < \infty$$

volgt dat voor z buiten het kwadrant $(a_1, a_2 ; \infty, \infty)$ geldt:

$$f(z) = \int_{a_1}^{b}\int_{a_2}^{b} \varphi(u, v) \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u \partial v} - \int_{a_1}^{b} \varphi(u, b) \frac{\partial g(u, b)}{\partial u} -$$

$$- \int_{a_2}^{b} \varphi(b, v) \frac{\partial g(b, v)}{\partial v} + \varphi(b, b)\, g(b, b) + (\to 0)$$

als $b \to +\infty$. Voor b voldoend groot geldt:

$$\left| \int_{a_1}^{b} \varphi(u, b) \frac{\partial g(u, b)}{\partial u} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu| \cdot \int_{a_1}^{b} \frac{du}{| z - (u + ib) |^2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | \cdot \int_{a_1}^{b} \frac{du}{(b - y)^2} \to 0 \text{ als } b \to \infty \;\; (z = x + iy).$$

Evenzoo:

$$\int_{a_2}^{b} \varphi(b, v) \frac{\partial g(b, v)}{\partial v} \to 0 \qquad \text{als } b \to \infty.$$

Nu volgt:

$$f(z) = \lim_{b \to \infty} \int_{a_1}^{b} \int_{a_2}^{b} \varphi(u, v) \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u\, \partial v} = 2i \int_{a_1}^{\infty} \int_{a_2}^{\infty} \frac{\varphi(u, v)}{\{z - (u+iv)\}^3} du dv$$

wegens de absolute konvergentie van de laatste integraal.

10. Onderstel $a_1, a_2, \ldots.$ gelegen in een open puntverzameling O.

$$O = R_1 \dot{+} R_2 \dot{+} \ldots. \dot{+} R_n \dot{+} \ldots.$$

waarin R_n een afgesloten rechthoek is (zijden respectievelijk evenwijdig aan de reëele en de imaginaire as), de doorsnede van twee verschillende R_n bestaat eventueel alleen uit grenspunten en we kunnen er voor zorgen dat geen a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots.$) op de grens van een R_n ($n = 1, 2, \ldots.$) ligt.

Beschouw nu

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{A_\nu}{z - a_\nu}, \qquad \sum_1^\infty |A_\nu| < \infty.$$

Definieer $\varphi(u, v)$ evenzoo als in § 7. Nu is:

$$\sum_1^\infty \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \sum_{n=1}^\infty \sum_{a_\nu < R_n} \frac{A_\nu}{z - a_\nu}$$

in de punten z waar de reeks in het linkerlid absoluut konvergeert.

Volgens § 7 is:

$$\sum_{a_\nu < R_n} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \int_{R_n} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)}.$$

Dus

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{R_n} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)}$$

voor z buiten de afgesloten puntverzameling $O : \overline{O}$.

Dit geldt voor iedere verzameling van R_n's die voldoen aan

$$O = R_1 \dot{+} R_2 \dot{+} \ldots \dot{+} R_n \dot{+} \ldots$$

en aan de bovengenoemde restricties. We definieeren nu:

$$\int\limits_{O} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{R_n} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)}, \; z \text{ buiten } \overline{O}.$$

Dus voor z buiten O geldt:

$$f(z) = \int\limits_{O} \frac{d\varphi(u, v)}{z - (u + iv)}.$$

11. Onderstel $a_1, a_2, \ldots$ gelegen op een kontinue gesloten kromme C zonder dubbelpunten. Zij de kromme C gegeven door $u = u(t)$, kontinu voor

$$a \leqq t \leqq b, \; u(t_1) \neq u(t_2) \text{ voor } a < t_1 < t_2 < b, \; u(a) = u(b).$$

Zij verder: $a_\nu = u(t_\nu)$ en $\varphi(u)$ de som der A_ν behoorende bij de a_ν waarvoor $t_\nu < t$. Gegeven een $\varepsilon > 0$, dan een $\delta > 0$ zoodat $| u(t_2) - u(t_1) | < \varepsilon$ voor ieder tweetal punten t_1 en t_2 van het segment (a, b) waarvoor $| t_1 - t_2 | < \delta$.

Beschouw een verdeeling van (a, b) waarvan het maximum subinterval $< \delta$ is:

$$a = t_0 < t_1 \ldots < t_{k-1} < t_k \ldots < t_n = b,$$

en zij $\quad t_{k-1} \leqq t'_k \leqq t_k, \; k = 1, 2, \ldots n.$

Dan is

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t_{k-1} \leqq t_\nu < t_k} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1})}{z - \xi_k} +$$

$$+ \theta \, . \sum_{\nu=1}^{\infty} | A_\nu | \cdot \frac{\varepsilon}{\varrho^2}$$

met $| \theta | < 1$ en waarin $\xi_k = u\,(t'_k)$ en ϱ de positieve afstand van z tot C is.

Dus voor z niet op C kunnen we schrijven:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = \int_C \frac{d\varphi(u)}{z - u}$$

waarbij we opmerken dat het niet noodig is dat C een integratieweg is.

C – Randvoorstelling van een functie holomorf in het rechterhalfvlak en waarvan het reëele deel positief is

1. We beschouwen dus een functie $f\,(\zeta) = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, holomorf voor $\xi > 0$ en met $u > 0$.

Neem een punt $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi > 0$.

Zij $h > 0$, $0 < x < \xi$, $\alpha = \beta + i\eta$ met $\beta > h + x$ en C de cirkel met middelpunt α en straal $R = \beta - x$.

De formule van Poisson geeft:

$$u\,(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2} \, u\,(t)\, d\varphi$$

waarin $t = \alpha + Re^{\varphi i}$, $\varrho = | \alpha - \zeta |$, $r = | t - \zeta |$. Hieruit volgt:

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{ABC} \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2} \, u\,(t)\, d\varphi < u\,(\zeta)$$

waarin A, B en C de punten op de linkerhelft van cirkel C zijn met de ordinaten: $\eta + h$, η, $\eta - h$.

We houden nu x en ζ vast en laten $R \to \infty$. Dan

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABC}\frac{R^2-\varrho^2}{r^2}\,u\,(t)\,d\varphi \to \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta-h}^{\eta+h}\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,u\,(x,y)\,dy$$

want

$$\frac{R^2-\varrho^2}{R}=\frac{R+\varrho}{R}(\xi-x)\to 2\,(\xi-x) \text{ als } R\to\infty \text{ en op boog } ABC$$

$$r^2 \to (\xi-x)^2+(\eta-y)^2.$$

In verband met (1) volgt nu:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta-h}^{\eta+h}\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,u\,(x,y)\,dy \leqq u\,(\zeta).$$

Dus

$$(2) \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,u\,(x,y)\,dy \leqq u\,(\zeta), \qquad \xi > x > 0.$$

Volgens een bekende formule is:

$$f\,(\zeta) = iv\,(a) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{o}^{2\pi}\frac{Re^{\varphi i}+(\zeta-a)}{Re^{\varphi i}-(\zeta-a)}\,u\,(t)\,d\varphi,\ t=a+Re^{\phi i}.$$

Hieruit volgt:

$$f'(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{o}^{2\pi}\frac{Re^{\varphi i}\,u\,(t)}{\{Re^{\varphi i}-(\zeta-a)\}^2}\,d\varphi = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{o}^{2\pi}\frac{u(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}$$

$$f''\,(\zeta) = \frac{2}{i\,\pi}\int\limits_{o}^{2\pi}\frac{u(t)\,dt}{(t-\zeta)^3}$$

$$f''(\zeta) = \frac{2}{i\pi}\int\limits_{ABC}\frac{u(t)\,dt}{(t-\zeta)^3} + \frac{2}{i\pi}\int\limits_{CDA}\frac{u(t)\,dt}{(t-\zeta)^3} = I_1 + I_2.$$

(D diametraal tegenover B).

Nu is:

$$|I_2| \leqq \frac{2}{\pi h}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u(t)\,Rd\varphi}{r^2} = \frac{2R}{\pi h}\,\frac{2\pi\,u(\zeta)}{R^2-\varrho^2} \leqq \frac{4u(\zeta)}{h\,(\xi - x)}.$$

$$f''(\zeta) = \frac{2}{i\pi}\int\limits_{ABC}\frac{u(t)\,dt}{(t-\zeta)^3} + \theta\,\frac{4u(\zeta)}{h\,(\xi - x)},\quad |\theta| \leqq 1.$$

We houden nu x en ζ vast en laten $R \to \infty$. We krijgen dan

$$f''(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\eta-h}^{\eta+h}\frac{u(x,y)\,dy}{(x+iy-\zeta)^3} + \theta\,\frac{4u(\zeta)}{h\,(\xi-x)},\qquad |\theta| \leqq 1.$$

$h \to +\infty$ geeft nu:

(3) $$f''(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x,y)\,dy}{(x+iy-\zeta)^3},\qquad \xi > x > 0.$$

2. Zij

$$F(z) = \int\limits_1^z f(\zeta)\,d\zeta,\quad z = x + iy.$$

$F(z)$ is holomorf voor $x > 0$ en

$$I\{F(z)\} = \varphi(x,y) = \int\limits_{1,0}^{x,y}\{v dx + u dy\}$$

is harmonisch voor $x > 0$.

Op een volle maat bezit $f(\zeta)$ een eindige limiet als $\xi \to 0$, η constant, omdat $u > 0$ is. Dus $F(z)$ ook op een volle maat een eindige limiet als $x \to 0$, y constant. Dus op volle maat

$$\varphi(x, y) \to \varphi(y) \text{ als } x \to 0, y \text{ constant.}$$

Nu is φ monotoon toenemend met y bij iedere constante $x > 0$, want

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = u > 0.$$

Alzoo is $\varphi(y)$ monotoon niet afnemend op de volle maat waar hij gedefinieerd is.

Zij $h > 0$. Er is een $h' > h$ zoodat $\varphi(x, y)$ een eindige limiet heeft als $x \to 0$, $y = h'$. Dus zijn

$$\varphi(x, -h') \text{ en } \varphi(x, h') \text{ begrensd voor } \quad 0 < x < h.$$

Voor $-h < y < h$ is $\varphi(x, -h') < \varphi(x, y) < \varphi(x, h')$ en dus

$$(\alpha) \qquad \varphi(x, y) \text{ begrensd voor } \quad 0 < x < h, -h < y < h.$$

In een punt waar $\varphi(y)$ nog niet gedefinieerd is kennen we daaraan de waarde

$$\frac{\varphi(y+0) + \varphi(y-0)}{2} \text{ toe.}$$

Nu geldt: $\varphi(x, y) \to \varphi(y)$ als $x \to 0$, y constant, voor iedere y, wegens het harmonisch zijn van $\varphi(x, y)$ en (α). Verder is $\varphi(y)$ monotoon niet afnemend.

3. Zij $a > 0$.

Bewering: $$I_x = \int_{-a}^{a} \frac{d\varphi(x, y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \to \int_{-a}^{a} \frac{d\varphi(y)}{\xi^2 + (\eta - y)^2} \quad \text{als } x \to 0.$$

Bewijs:

Volgens Stelling I is

$$I_x = -\int_{-a}^{a} \varphi(x, y) \frac{2(\eta - y)}{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}^2} dy + \frac{\varphi(x, y)}{(\xi - x)^2 + (n - y)^2} \Bigg|_{-a}^{a}$$

$x \to 0$ geeft volgens de stelling van Lebesgue (wegens het gelijkmatig begrensd zijn van de integrand voor $0 < x < \xi/2$):

$$I_x \to -\int_{-a}^{a} \varphi(y) \frac{2(\eta - y)}{\{\xi^2 + (\eta - y)^2\}^2} dy + \frac{\varphi(y)}{\xi^2 + (\eta - y)^2}\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{d\varphi(y)}{\xi^2 + (\eta - y)^2} . \; q.e.d.$$

Nu is volgens (2) en stelling VII:

$$u(\zeta) \geqq \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \varphi(x, y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\varphi(x, y).$$

Uit hetgeen zoojuist bewezen is volgt nu:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\xi d\varphi(y)}{\xi^2 + (\eta - y)^2} \leqq u(\zeta).$$

Dus:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi d\varphi(y)}{\xi^2 + (\eta - y)^2} \leqq u(\zeta), \qquad \xi > 0. \tag{4}$$

4. *Bewering:*

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(x, y)}{(x + iy - \zeta)^3} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(y)}{(iy - \zeta)^3} \text{ als } x \to 0.$$

Bewijs:

Zij $\varepsilon > 0$, $a > |\eta|$, $0 < x < \xi/2$. Wegens (2) en (4) is:

$$\left|\int_a^\infty \frac{d\varphi(x,y)}{(x+iy-\zeta)^3}\right| \leqq \int_a^\infty \frac{d\varphi(x,y)}{|x+iy-\zeta|^3} < \frac{1}{a-|\eta|}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varphi(x,y)}{|x+iy-\zeta|^2} <$$

$$< \frac{1}{a-|\eta|}\,\frac{\pi u(\zeta)}{\xi-x} < \frac{2\pi u(\zeta)}{(a-|\eta|)\,\xi} < \varepsilon$$

voor $a \geqq a_0$.

$$\left|\int_a^\infty \frac{d\varphi(y)}{(iy-\zeta)^3}\right| \leqq \int_a^\infty \frac{d\varphi(y)}{|iy-\zeta|^3} \leqq \frac{1}{a-|\eta|}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varphi(y)}{|iy-\zeta|^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{a-|\eta|}\,\frac{\pi u(\zeta)}{\xi} < \varepsilon \text{ voor } a \geqq a_0.$$

Evenzoo voor de korrespondeerende integralen van $-\infty$ tot $-a$.

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{d\varphi(x,y)}{(x+iy-\zeta)^3} \to \int_{-a_0}^{a_0} \frac{d\varphi(y)}{(iy-\zeta)^3} \qquad \text{als } x \to 0$$

hetgeen men op de zelfde wijze bewijst als onder **3.**

Uit formule (3) en Stelling VII volgt:

$$f''(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varphi(x,y)}{(x+iy-\zeta)^3}, \qquad \xi > x > 0$$

en uit hetgeen zoojuist bewezen is volgt nu:

$$f''(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varphi(y)}{(iy-\zeta)^3}, \qquad \xi > 0.$$

Integratie geeft nu:

$$f'(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varphi(y)}{(iy-\zeta)^2} + \lambda, \qquad \xi > 0$$

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{iy-\zeta} - \frac{1}{iy+1}\right\} d\varphi(y) + \lambda\zeta + \mu, \quad \xi > 0.$$

Deze formules zijn juist wegens de convergentie van de integraal

$$\frac{\xi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi(y)}{\xi^2+(\eta-y)^2} = \frac{\xi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi(y)}{|\,iy-\zeta\,|^2} \leqq u\,(\zeta). \text{ (zie (4)).}$$

λ en μ zijn integratieconstanten.

We zullen nog bewijzen dat

a) $f'(\zeta) \to \lambda$ als ζ angulair $\to \infty$.

b) $f(\zeta)/\zeta \to \lambda$ als ζ angulair $\to \infty$.

c) $\lambda \geqq 0$.

Bewijs:

a) Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $k > 0$ zoodat

$$\int_{k}^{\infty}\frac{d\varphi(y)}{y^2} < \varepsilon, \quad \int_{-\infty}^{-k}\frac{d\varphi(y)}{y^2} < \varepsilon.$$

Voor $|\arg\zeta| < \alpha < \pi/2$ is

$$\int_{k}^{\infty}\frac{d\varphi(y)}{|\,iy-\zeta\,|^2} \leqq \int_{k}^{\infty}\frac{d\varphi(y)}{y^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{\varepsilon}{\cos^2\alpha}.$$

Evenzoo

$$\int_{-\infty}^{-k}\frac{d\varphi(y)}{|\,iy-\zeta\,|^2} < \frac{\varepsilon}{\cos^2\alpha}$$

$$\int_{-k}^{k}\frac{d\varphi(y)}{|\,iy-\zeta\,|^2} \leqq \frac{\varphi(k)-\varphi(-k)}{\xi^2} \to 0 \qquad \text{als } \zeta \text{ angulair} \to \infty.$$

b) Het is voldoende aan te toonen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(y)}{|1+iy|\,|iy-\zeta|} \to 0 \text{ als } \zeta \text{ angulair } \to \infty.$$

Bepaal k als onder *a*).

$$\int_{k}^{\infty} \frac{d\varphi(y)}{|1+iy|\,|iy-\zeta|} \leqq \int_{k}^{\infty} \frac{d\varphi(y)}{y^2}\,\frac{1}{\cos\alpha} < \frac{\varepsilon}{\cos\alpha}.$$

Evenzoo $$\left|\int_{-\infty}^{-k}\right| < \frac{\varepsilon}{\cos\alpha}$$

$$\int_{-k}^{k} \frac{d\varphi(y)}{|1+iy|\,|iy-\zeta|} \leqq \frac{\varphi(k)-\varphi(-k)}{\xi} \to 0 \text{ als } \zeta \text{ angulair } \to \infty.$$

Opmerking:

Het volgt ook eenvoudig uit het feit dat

$$f'(\zeta) \to \lambda \text{ als } \zeta \text{ angulair } \to \infty.$$

c) $$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\zeta-iy}+\frac{1}{1+iy}\right\} d\varphi(y) + \lambda\zeta + \mu = J(\zeta) + \lambda\zeta + \mu.$$

Was λ niet $\geqq 0$ dan zou men altijd een halfstraal h

$$\eta = c\xi \ (\xi > 0, -\infty < c < \infty)$$

kunnen vinden zoodanig dat voor ζ op h $\lambda\zeta$ op een halfstraal in het linkerhalfvlak ligt. Maar dan zou

$$\frac{u}{|\zeta|} = \frac{R\{J(\zeta)+\mu\}}{|\zeta|} + \frac{R\{\lambda\zeta\}}{|\zeta|}$$

een negatieve limiet hebben als $\zeta \to \infty$ langs h $\left(\frac{J(\zeta)}{\zeta} \to 0\right)$ en dit is in tegenspraak met $u > 0$.

Tenslotte merken we nog op dat de Stieltjes-integraal voorkomende in de formule voor $f(\zeta)$ niet vervangen mag worden door de Lebesgue-integraal

$$(L) \qquad -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{iy-\zeta}-\frac{1}{iy+1}\right\}\varphi'(y)\,dy$$

hetgeen we zien aan het volgende voorbeeld.

Neem

$$f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}.$$

Dan

$$F(z)=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}=\log z,\ \varphi=\arg z.$$

Dus

$$\varphi(y)=\frac{\pi}{2}\text{ voor }y>0\text{ en }\varphi(y)=-\frac{\pi}{2}\text{ voor }y<0.$$

De integraal (L) is hier nul en dus zou $f(\zeta)=\mu$ zijn, hetgeen niet het geval is.

Het eindresultaat is dus dat een functie holomorf in het rechterhalfvlak en waarvan het reëele deel positief is, voorgesteld kan worden door de formule

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\zeta-iy}+\frac{1}{1+iy}\right\}d\varphi(y)+\lambda\zeta+\mu,\qquad \xi>0.$$

waarbij de integraal te nemen is in de zin van Stieltjes. Verder wordt $\varphi(y)$ *bepaald door de randwaarden van het imaginaire deel van de integraalfunctie van* $f(\zeta)$; λ *en* μ *zijn constanten, waarvan* $\lambda \geqq 0$ *is en* $f(\zeta)/\zeta \to \lambda$ *als* ζ *angulair* $\to \infty$.

D – Toepassing op Fourier-Reeksen

Algemeene onderstelling:

(O) $f(x)$ *Riemann-integreerbaar voor* $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $f(x)=f(x+2\pi m)$ *voor iedere* x *en* $m = 1,2,\ldots.$

Stelling I:

Gegeven: (*O*).

Bewering: $a_k = -\frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \sin kt\, d\, f(t)$, $b_k = \frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \cos kt\, d\, f(t)$ voor $k = 1,2, \ldots.$

Bewijs:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(t) \cos kt\, dt = \frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(t)\, d \sin kt = -\frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \sin kt\, d\, f(t).$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(t) \sin kt\, dt = -\frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} f(t)\, d \cos kt = \frac{1}{k\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \cos kt\, d\, f(t).$$

volgens de stellingen VII en I van de Stieltjes-integralen.

Stelling II:

Gegeven: (*O*) en $f(x)$ van begrensde variatie voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$ en zijn totale variatie zij T.

Bewering: $|ka_k| \leqq \frac{T}{\pi}$, $|kb_k| \leqq \frac{T}{\pi}$ voor $k = 1,2, \ldots.$

Bewijs:

Uit Stelling I en Stelling IX (*S . I*) volgt de bewering.

Stelling III:

Gegeven: $V_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$

Bewering: Er is een constante K zoodanig dat $|V_n(x)| < K$ voor iedere x en $n = 1, 2, \ldots.$ (K onafhankelijk van x en n)

Bewijs:

Uit $V_n(x) = -V_n(-x)$ en $V_n(x + 2\pi) = V_n(x)$ volgt dat we mogen nemen: $0 \leqq x \leqq \pi$.

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int\limits_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt\, .\, dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^x \left\{ \frac{\sin (n+{}^1\!/_2)\, t}{\sin {}^1\!/_2\, t} - 1 \right\} dt =$$

$$= -\frac{x}{2} + {}^1/_2 \int_0^x \frac{\sin (n+{}^1/_2)\, t}{\sin {}^1/_2\, t} dt = -\frac{x}{2} + \int_0^{x/2} \frac{\sin (2n+1)\, t}{t} \frac{t}{\sin t}\, dt =$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{x/2}{\sin x/2} \int_\xi^{x/2} \frac{\sin (2n+1)\, t}{t}\, dt.$$

$$| V_n (x) | \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} G = K \quad \text{want } \left| \int_a^b \frac{\sin \mu\, t}{t} dt \right| < G \text{ voor alle } a,$$

b en μ.

Stelling IV:

Gegeven: (O).

Bewering: $f(x) - S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} - \frac{\pi - t}{2} \right\} d\, f(x+t).$

Bewijs:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k\pi} \int_x^{x+2\pi} (\sin kt \cos kx - \cos kt \sin kx)\, d\, f(t) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_x^{x+2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\,(t-x)}{k}\, d\, f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} \cdot d\, f(x+t).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t\, d\, f(x+t) + \frac{1}{\pi}\, t\, f(x+t) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t\, d\, f(x+t) + 2 f(x)$$

$$S_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} + \frac{t}{2}\right\} d\, f(x+t).$$

Nu is:

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\, d\, f(x+t) = 0.$$

Dus:

$$f(x) - S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} - \frac{\pi - t}{2}\right\} d\, f(x+t).$$

S t e l l i n g V:

Gegeven: *Als in Stelling II en f kontinu voor $x = x_0$.*

Bewering: $S_n(x_0) \to f(x_0)$ *als* $n \to \infty$.

Bewijs:

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ ($\delta < \pi$) zoodanig dat de totale variatie van $f(x_0 + t)$ op $(0, \delta)$ en $(2\pi - \delta, 2\pi)$ kleiner is dan ε.

Verder een N zoodat voor $n > N$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} - \frac{\pi - t}{2}\right| < \varepsilon, \qquad \delta \leqq t \leqq 2\pi - \delta$$

$$f(x_0) - S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} = I_1 + I_2 + I_3.$$

$|I_1| < \frac{\varepsilon}{\pi}\left(K + \frac{\pi}{2}\right)$ volgens Stelling III. Evenzoo:

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{\pi}\left(K + \frac{\pi}{2}\right).$$

$|I_2| < \frac{T}{\pi}\varepsilon$ als $n > N$, volgens Stelling IX $(S.I)$.

Dus:

$$f(x_0) - S_n(x_0) = \theta\, \frac{\varepsilon}{\pi}(T + 2K + \pi)$$

met $|\theta| < 1$ als $n > N$.

Opmerking:

$$|S_n(x)| \leqq |f(x)| + \frac{K+\pi/2}{\pi} T \leqq M + \left(\frac{K}{\pi} + \tfrac{1}{2}\right) T$$

als $|f(x)| \leqq M$ voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Dus $|S_n(x)| < C$, C onafhankelijk van x en n.

Stelling VI:

Gegeven: *Als in Stelling II en $f(x)$ kontinu voor $a \leqq x \leqq b$.*

Bewering: $S_n(x)$ *uniform* $\rightarrow f(x)$ *als* $n \rightarrow \infty$ *voor*

$$a < \alpha \leqq x \leqq \beta < b.$$

Bewijs:

In het bewijs van Stelling V is een δ aan te geven die goed is voor alle x die voldoen aan: $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Stelling VII:

Gegeven: *Als in Stelling II.*

Bewering: $S_n(x) \rightarrow \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *als* $n \rightarrow \infty$.

Bewijs:

Stel:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} - \frac{\pi - t}{2} = \psi(t, n).$$

Dan:

$$f(x) - S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t, n)\, d f(x+t).$$

Op $0 \leqq t \leqq \pi$ definieeren we de functie:

$$g(x+t) = f(x+t), \text{ voor } 0 < t \leqq \pi \text{ en } g(x) = f(x+0).$$

Volgens Stelling VIII $(S.I)$ is nu:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t,n)\, d f(x+t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t,n)\, d g(x+t) + \frac{1}{\pi}\, \psi(0,n) \,\{ f(x+0) - f(x) \}$$

In verband met Stelling V volgt nu:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(t,n)\,d\,f(x+t) \to -\frac{f(x+0)-f(x)}{2} \text{ als } n \to \infty.$$

Evenzoo te bewijzen:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\psi(t,n)\,d\,f(x+t) \to \frac{f(x)-f(x-0)}{2} \text{ als } n \to \infty.$$

Dus:

$$S_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\psi(t,n)\,d\,f(x+t) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ als } n \to \infty.$$

S t e l l i n g VIII:

Gegeven: (*O*). *Verder is er een* $\alpha > 0$ *zoodanig dat* $f(x)$ *van begrensde variatie is voor*

$$\left.\begin{matrix} x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 - \varrho \\ x_0 + \varrho \leqq x \leqq x_0 + \alpha \end{matrix}\right\}$$

voor iedere ϱ *die voldoet aan* $0 < \varrho \leqq \alpha$.

$$\psi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0), \qquad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}|\psi| = 0 \qquad (a)$$

De totale variatie van $\dfrac{\psi(t+2\delta)}{(t+2\delta)} - \dfrac{\psi(t)}{t}$ *op* (δ,α) *zij* $o\left(\dfrac{1}{\delta}\right)$.

Bewering: $S_n(x_0) \to f(x_0)$ *als* $n \to \infty$.

Bewijs:

$$\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{\psi(t)}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{\psi(t)}{t}\right\}\sin(n+{}^1\!/_2)\,t\,dt \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

Stel:

$$\frac{\pi/2}{n+{}^1\!/_2} = \mu. \quad \int_{0}^{\pi}\frac{\psi(t)}{t}\sin(n+{}^1\!/_2)\,t\,dt = \int_{0}^{\mu} + \sum_{k=0}^{2p}\int_{(2k+1)\mu}^{(2k+3)\mu} + \int_{(4p+3)\mu}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} =$$

$$= I_1 + \sum + I_2 + I_3.$$

$$(4p+3)\,\mu \leqq \alpha < (4p+5)\,\mu.$$

$$| I_1 | \leqq (n + {}^1/_2) \int_0^{\mu} | \psi(t) | \, dt \to 0 \text{ als } n \to \infty \text{ wegens } (a)$$

$$| I_2 | \leqq \int_{(4p+3)\mu}^{a} \left| \frac{\psi(t)}{t} \right| dt \to 0 \text{ als } n \to \infty \text{ want } (4p+3)\,\mu \to a \text{ als } n \to \infty.$$

$| I_3 | \to 0$ als $n \to \infty$.

$$\int_{\mu}^{3\mu} \frac{\psi(t)}{t} \sin(n + \tfrac{1}{2})\, t \, dt = -\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\mu}^{3\mu} \frac{\psi(t)}{t} \, d \cos(n + \tfrac{1}{2})\, t =$$

$$= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\mu}^{3\mu} \cos(n + \tfrac{1}{2}) t \, d \, \frac{\psi(t)}{t}.$$

$$\int_{3\mu}^{5\mu} \frac{\psi(t)}{t} \sin(n + \tfrac{1}{2})\, t \, dt = -\int_{\mu}^{3\mu} \frac{\psi(t + 2\mu)}{t + 2\mu} \sin(n + \tfrac{1}{2})\, t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{n + {}^1/_2} \int_{\mu}^{3\mu} \cos(n + \tfrac{1}{2})\, t \, d \, \frac{\psi(t + 2\,\mu)}{t + 2\,\mu}.$$

De eerste 2 termen van $\sum$:

$$-\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\mu}^{3\mu} \cos(n + \tfrac{1}{2})\, t \, d \left[\frac{\psi(t + 2\mu)}{t + 2\mu} - \frac{\psi(t)}{t} \right]$$

$$\left| \sum \right| \leqq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\mu}^{a} \left| d \left[\frac{\psi(t + 2\mu)}{t + 2\mu} - \frac{\psi(t)}{t} \right] \right| \to 0 \text{ als } n \to \infty$$

volgens onderstelling.

Opmerking:

Men bewijst gemakkelijk dat Stelling V in Stelling VIII bevat is.

18650.

STELLINGEN

I

In de stelling van FATOU zooals deze voorkomt bij E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Zweite Auflage, 1929, pag. 40), kan de onderstelling

$$\text{„}\textit{Es existiere} \int_0^1 \underset{|x| \leqq R}{Max} |f(x)|\, dR \quad \textit{oder auch nur} \int_0^1 f(Re^{i\phi})\, dR$$

gleichmässig in φ" gemist worden.

II

De universeele positieve constante C voorkomende in: J. WOLFF, Séries de fractions rationelles (Comptes Rendus, Februari 1928), is kleiner dan

$$\tfrac{1}{3} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\pi} = 0{,}56\ldots.$$

III

Zijn $z_1, z_2, \ldots.$ de nulpunten van een functie $f(z)$, holomorf en begrensd voor $|z| < 1$, gelegen in het angulaire gebied G bepaald door

$$z = 1 - re^{i\phi},\ \cos\varphi > \delta > 0,\ 0 < r < \delta$$

dan konvergeert de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |1 - z_n|$.

IV

Iedere functie holomorf binnen de eenheidscirkel en waarvan de integraalfunctie Riemann-integreerbare randwaarden bezit is een integraal van Cauchy—Stieltjes, over de eenheidscirkel berekend.

V

Is $u(\varphi)$ Riemann-integreerbaar voor $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ dan stelt de Stieltjes-integraal

$$f(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\varrho^2}{r^2}\, du(\varphi) \qquad (r^2 = 1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos(\varphi - \theta))$$

een functie voor die harmonisch is voor $0 \leqq \varrho < 1$ en in ieder punt waar $u'(\varphi)$ bestaat en eindig is bezit $u(\varrho, \theta)$ de angulaire limiet $u'(\varphi)$.

VI

De cilinder is het eenige ontwikkelbare oppervlak waarop de kromtelijnen tevens geodetische krommen zijn.

VII

De energiestelling voor een wrijvingslooze vloeistof laat zich in de gedaante brengen.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\tfrac{1}{2}q^2 + \Omega + E\right\}\varrho\, d\tau = -\int\left\{\tfrac{1}{2}q^2 + \Omega + E\right\}\varrho\,(\underline{v}\, d\underline{f}) - \int p\,(\underline{v}\, d\underline{f}),$$

bij een vast gedacht volumen in de vloeistofruimte. (Hierin stelt E de interne energie per massa-eenheid voor en Ω de potentiaal van de volumekrachten).

VIII

Reeksen van het type

$$\sum \frac{A_k}{z - a_k}, \qquad \sum |A_k| < \infty,$$

leenen zich tot het construeeren van zoogenaamde „multiforme'' functies.