

DE POTENTIALFUNCTIE
VAN
GELEIDENDE VLAKKE PLATEN

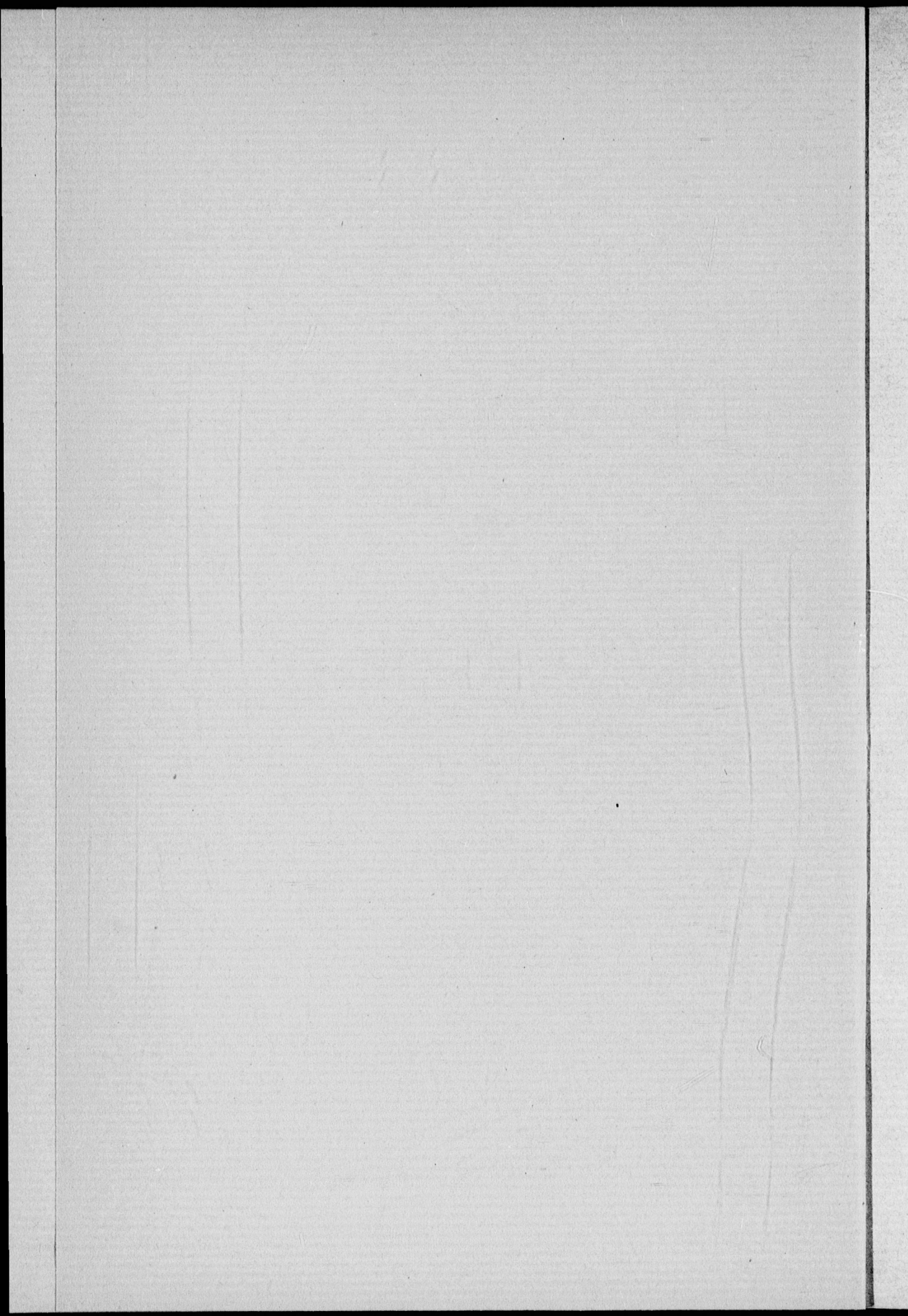
ONDER
INFLUENTIE VAN EENE ELECTRISCHE MASSA,

DOOR
J. K O R S.

TE GRONINGEN BIJ J. B. WOLTERS. 1879.



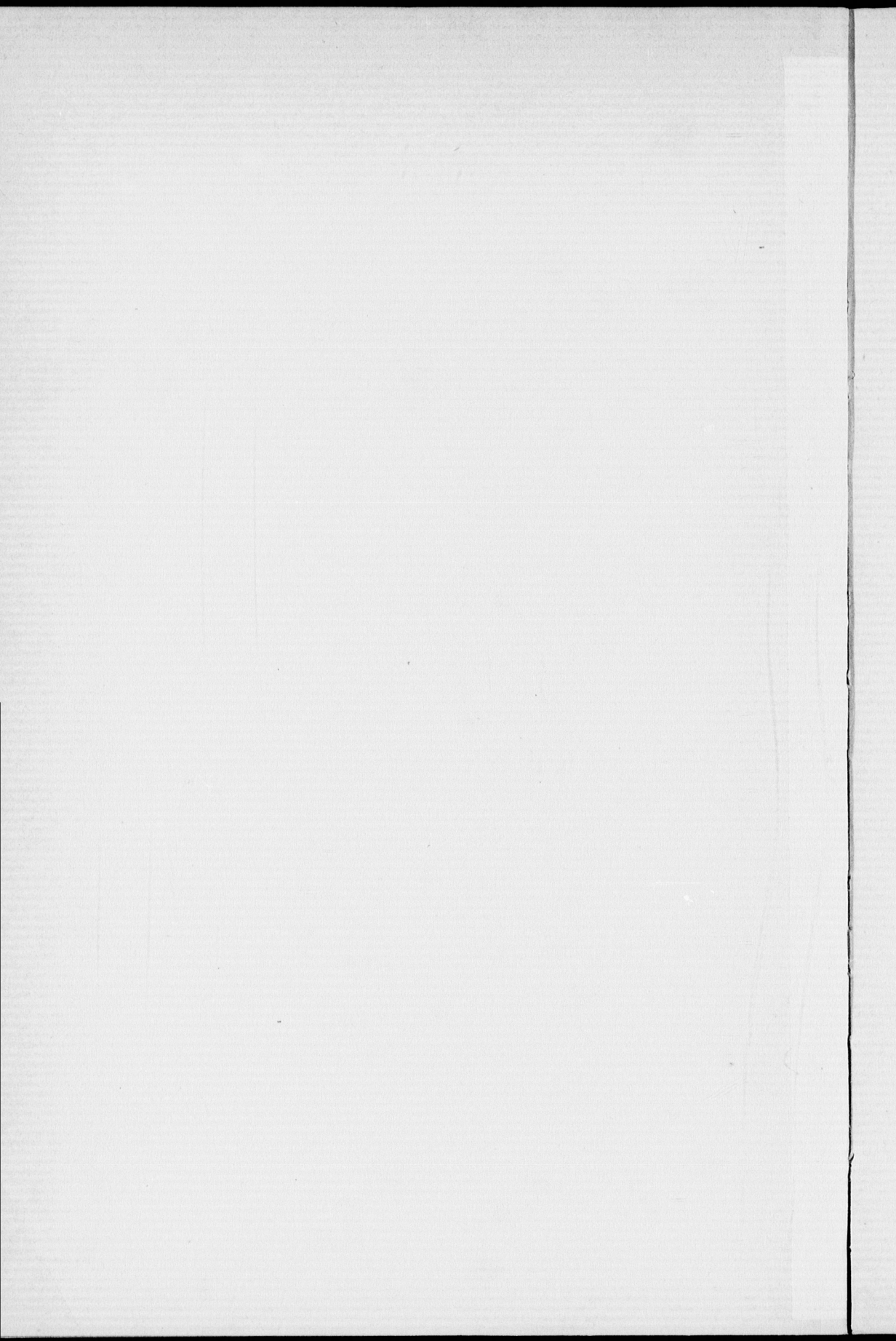




DE POTENTIALFUNCTIE VAN GELEIDENDE VLAKKE PLATEN

ONDER INFLUENTIE

VAN EENE ELECTRISCHE MASSA.



Diss. Groningen 1879

DE POTENTIAALFUNCTIE

VAN GELEIDENDE VLAKKE PLATEN

ONDER INFLUENTIE VAN EENE ELECTRISCHE MASSA.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

J_{HR.} DR. B. H. C. K. VAN DER WIJCK,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE.

TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN,

OP MAANDAG, DEN 7 JULI 1879, TE TWEE UUR.

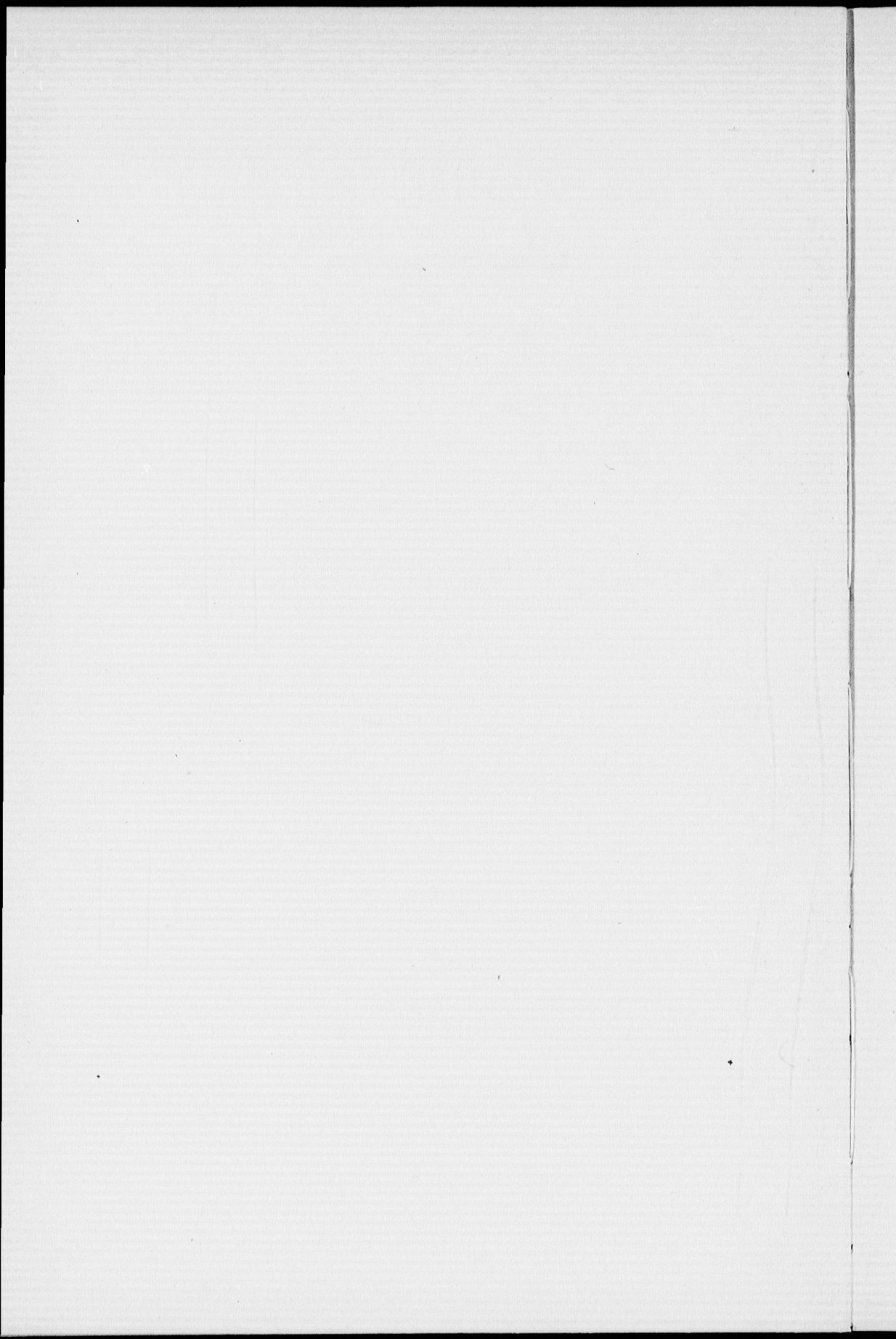
DOOR



JAN KORS,

GEBOREN TE EEXT.

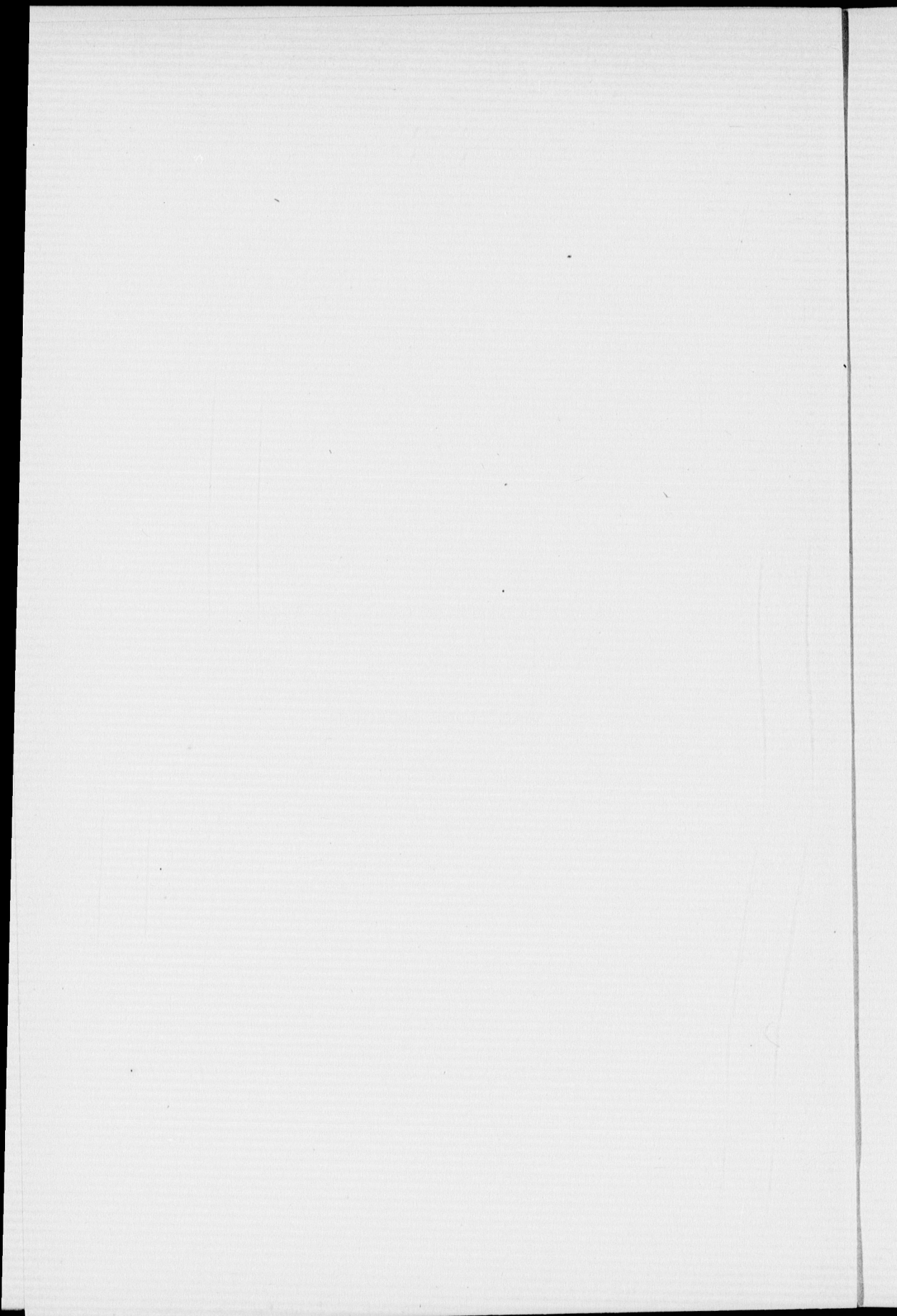
TE GRONINGEN BIJ J. B. WOLTERS, 1879,



AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER

EN

AAN MIJNE MOEDER.



INLEIDING.

In de »Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism» heeft Thomson eene door hem nog niet vroeger uitgegeven verhandeling, opgenomen over de dichtheid van electriciteit op een geïsoleerd geladen segment eener geleidende bolvormige schil, ook voor 't geval, dat dit segment geïncificeerd wordt door een electrisch punt ergens in de nabijheid geplaatst. Door den straal van den bol oneindig groot te nemen, gaat dit segment over in eene cirkelvormige schijf. Aan 't slot van deze beschouwingen zegt hij: »It would be interesting to continue the analytical investigation far enough to determine the electric potential at any point in the neighbourhood of a disc electrified under influence, and so to illustrate further than is done bij the numbers and formulae already obtained, the theory of *electric screens* and of Faraday's celebrated »induction in curved lines.»

Daar voor zooverre mij bekend is, dit geval niet langs wiskundigen weg is onderzocht, heb ik, op aanraden van Prof. Mees beproefd eene oplossing van dit vraagstuk te geven. De verkregen uitkomsten zijn vervolgens aan de waarneming getoetst. Den gang en de resultaten van dit onderzoek vindt men in dit proefschrift opgegeven.

Bij de oplossing van dit vraagstuk ben ik uitgegaan van de door Thomson in bovenvermelde verhandeling verkregen formule voor de dichtheid der electriciteit op 't segment van een geladen bolvormige schil, zonder dat hierop door electrische massa's van buiten influentie wordt uitgeoefend. Het geheele onderzoek berust dus op de wet, dat twee

—

massa's elkander aantrekken of afstooten, met eene kracht evenredig aan die massa's en omgekeerd evenredig met de tweede macht van den afstand. Daar de leer der kogelfunctiën daarbij is toegepast, heb ik gemeend dat gedeelte van die theorie, dat hier zijne toepassing vindt, om zijne belangrijkheid zoo in 't algemeen als hier in 't bijzonder, in een afzonderlijk Hoofdstuk te moeten behandelen. De oorspronkelijke verhandelingen van Legendre en Laplace zijn hierbij gevolgd. Ter bepaling van de potenti-aalfunctie van een geïsoleerd geladen segment van eene bolvormige schil in een willekeurig punt, kan men die functie eerst bepalen in een punt der as. Ontwikkelt men dan de verkregen uitdrukking in eene convergeerende reeks gerangschikt volgens de opklimmende of de afdalende machten van den voerstraal, dan heeft men als coëfficiënten aan de termen dier reeks kogelfunctiën toe te voegen om eene reeks te verkrijgen, die de potenti-aalfunctie voorstelt in het bedoelde punt buiten de as. 't Argument dier kogelfunctiën is dan de hoek, dien de voerstraal naar dit punt met de as maakt.

Wat de tabellen betreft, die aan het vijfde en het zesde Hoofdstuk zijn toegevoegd, ze werden in zeker opzicht overbodig, daar ik later de niveaulijnen besloot te construeeren. Daar ik echter de in die tabellen voorkomende cijfers reeds had berekend, besloot ik ze maar te moeten behouden, te meer om sommige van die cijfers te kunnen vergelijken met de uitkomsten langs experimenteelen weg verkregen.

Met het zesde Hoofdstuk is, zoo ik meen, de analytische beschouwing, zooals ik mij die heb voorgesteld, voltooid. Op aansporing van Prof. Mees heb ik echter beproefd ook langs experimenteelen weg uitkomsten te verkrijgen. In den loop van dit onderzoek heb ik echter ondervonden aan hoeveel storende invloeden dit onderhevig was. In zooverre tijd en plaats dit toelieten, heb ik die storende invloeden in aanmerking genomen of geëlimineerd. Daarenboven dient men in aanmerking te nemen, dat het onderzoek alleen is ondernomen, om aan te toonen, dat de potenti-aalfunctie in eene reeks van punten op die wijze toe- of afneemt, als door berekening is gevonden, en zoo als ook Faraday dit door zijne bekende onderzoekingen heeft geconstateerd. De resultaten, die ik verkregen heb, stemmen hiermede overeen.

In het zevende Hoofdstuk vindt men de wijze van proefneming, benevens de resultaten opgegeven. Tevens heb ik daarbij in 't bijzonder op de onnauwkeurigheden gewezen, die niet te vermijden waren. Hiermee

—

meen ik genoegzaam te hebben aangewezen, uit welk oogpunt men die onderzoekingen heeft te beschouwen.

In het bovenaangehaalde vraagstuk wenscht Thomson verder, dat de bepaling van die potentiaalfunctie moge dienen »to illustrate the theory of electric screens and of Faraday's induction in curved lines." Het blijkt uit de door mij gegeven oplossing, dat de werking eener massa electriciteit zeer wordt verzwakt door die van de door influentie op de afgeleide platen gebonden tegengestelde, en wel voornamelijk naar die zijde van de platen, die van 't influenceerend punt is afgekeerd. (Zie bl. 32). Daardoor werken die platen als *schermen*. Zoodra de plaat echter niet is afgeleid houdt die werking weer op, zooals blijkt uit het geval, waarin de potentiaalfunctie is bepaald van een influenceerend punt en eene niet afgeleide geïnfluenceerde geleidende schijf. Het wegnemen van de bij influentie ontstane vrije, en dus met de influenceerende gelijknamige electriciteit is dus de oorzaak van die zwakkere werking.

Uit den stand der niveauvlakken volgt tevens die der orthogonale trajectorien, die de richting van de Faraday'sche *krachtlijnen* aangeven. Gaat men dus uit van werking op afstand, dan vindt men, dat de richting der kracht dezelfde is als die, waarin Faraday zich voorstelde, dat zijne krachtlijnen werkten in een medium, waarin de electrische werking van deeltje tot deeltje plaats heeft. MAXWELL drukt dit in de voorrede van zijn werk: »A treatise on electricity and magnetism" aldus uit: »Faraday, in his mind's eye, saw lines of force traversing all space where the mathematicians saw centres of force attracting at a distance: Faraday saw a medium where they saw nothing but distance: Faraday sought the seat of the phenomena in real actions going on in the medium, they were satisfied that they had found it in a power of action at a distance impressed on the electric fluids."

Ten slotte betuig ik hier openlijk mijn hartelijken dank aan hen, die mij bij mijne studie behulpzaam zijn geweest.

Inzonderheid hebben Prof. Enschedé en Prof. Salverda aanspraak op mijne erkentelijkheid voor de welwillendheid en de belangstelling mij in alle opzichten betoond, en de hulp, die ik dikwijls van hen mocht ontvangen.

Prof. Mees ontvange mijn hartelijken dank voor de leiding, die ik in 't algemeen bij mijne studie en in 't bijzonder ook bij de samenstelling van dit proefschrift van hem mocht ontvangen.

Prof. Rink, mijn hooggeachten Promotor, dank ik voor de nuttige wenken, die ook hij mij met de meeste welwillendheid heeft gegeven.

De voorkomendheid en vriendelijke hulp mij door Prof. Modderman betoond, gedurende den korten tijd dat ik onder zijne leiding werkte, zullen bij mij in dankbaar aandenken blijven.

De welwillendheid mij dezer dagen door allen, ook door die Hoogleeraren betoond, met wie ik wegens de richting mijner studie minder in aanraking kwam, waardeer ik ten hoogste.

De Heer Deutgen heeft mij bij mijne practische onderzoekingen op het Physisch Laboratorium alhier in vele opzichten met de meeste bereidwilligheid zijne hulp verleend. Ook hem betuig ik hier daarvoor mijn hartelijken dank.

EERSTE HOOFDSTUK.

I.

ONTWIKKELING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE VAN EEN OMWENTELINGS- LICHAAM IN EEN PUNT DAAR BUITEN GELEGEN, VOLGENS EENE REEKS.

De oplossing van het bovengemeld vraagstuk berust, volgens den gang, die hier zal gevolgd worden, op de bepaling der potentiaalfunctie van een agens symmetrisch gelegen om een as, in een willekeurig punt.

Met behulp van eenige eigenschappen der kogelfunctien kan men die potentiaalfunctie gemakkelijk bepalen, wanneer men haar heeft bepaald in een punt der as. Die eigenschappen zijn bewezen en toegepast door Laplace en Legendre bij de bepaling van de attractie van sphaeroïden. Legendre behandelde dit geval in eene verhandeling „Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes” geplaatst in de „Mémoires de Mathématique et de Physique, Tome X, 1785.” Later gaf hij in twee verhandelingen „Recherches sur la figure des planètes” en „Suite des recherches, etc.” voorkomende in de „Histoire de l'académie, 1784 en 1789” eene meer volledig uitgewerkte theorie van de kogelfunctien, ook wel functien van Laplace genoemd. Voor ons doel zullen wij gebruik maken van dat gedeelte der tweede verhandeling 1789, waar hij behandelt de „formules de l'attraction pour les solides hétérogènes” p. 375 v.v. Laplace had intusschen de theorie van die functien ook toegepast in eene verhandeling „Théorie de l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes” gedrukt in de „Histoire de l'académie, 1782”, hoewel minder volledig dan dit door Legendre was gedaan. Deze heeft echter in navolging van Laplace bij zijne onderzoekingen van de potentiaalfunctie gebruik gemaakt.

Met voorbijgang van het meer omslachtige bewijs voor de hier bedoelde eigenschap der kogelfunctien in de „Savants étrangers, Tome X”, bovenvermeld, door Legendre gegeven, volgt hier de wijze waarop deze en Laplace die in de bovenvermelde verhandelingen hebben afgeleid. We beginnen naar tijdsorde met die van Laplace.

Zij OX de as, waarom eene aantrekkende of afstootende massa symmetrisch is gelegen, A het punt waarin een massaelement is geconcentreerd, en P het punt buiten die massa, waarin de potentiaalfunctie zal worden bepaald. Stellen we $OA = r$, $OP = t$, $\angle XOP = \psi$, $\angle XOA = \psi'$ en φ en φ' de hoeken, die de meridiaanvlakken door P en A gaande met een vast vlak maken. Is $AP = R$ gesteld, dan is

$$R = \sqrt{(r^2 + t^2 - 2rt \cos \chi)} \quad (1)$$

$$\text{waarin } \cos \chi = \cos \psi \cos \psi' + \sin \psi \sin \psi' \cos (\varphi' - \varphi) \quad (2)$$

Daar $r^2 dr d\varphi' d\psi' \sin \psi'$ een volumen-element voorstelt, terwijl we de dichtheid door Δ voorstellen, zoo heeft men, ter bepaling der gezochte potentiaalfunctie V

$$V = \int \frac{\Delta r^2 dr d\varphi' d\psi' \sin \psi'}{\sqrt{(r^2 + t^2 - 2rt \cos \chi)}} \quad (3)$$

waarbij ten opzichte van r geïntegreerd wordt van $r = 0$ tot aan 't oppervlak der sphaeroïde, ten opzichte van φ' van 0 tot 2π en ten opzichte van ψ' van 0 tot π .

De dichtheid Δ is een constante en kan dus voor het integraalteeken worden geplaatst, daar de massa homogeen is verondersteld. Stelt men $\cos \psi = x$, dan vindt men door substitutie, dat V voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d \left[(1-x^2) \frac{dV}{dx} \right]}{dx} + \frac{1}{1-x^2} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + t \frac{d^2 (tV)}{dt^2} = 0 \quad . . . (4)$$

Deze differentiaalvergelijking kan dienen om de coëfficiënten te helpen bepalen, die optreden in de reeks voor V, gerangschikt volgens de afdalende machten van t . Stelt men namelijk

$$V = \frac{U^{(0)}}{t} + \frac{U^{(1)}}{t^2} + . . + \frac{U^{(n)}}{t^{n+1}} + . . \text{ enz. } . . . (5)$$

en substitueert men dezen vorm van V in de vergelijking (4), dan vindt men, daar elke term eene uitdrukking oplevert, die nul is,

$$\frac{d \left[(1-x^2) \frac{dU^{(n)}}{dx} \right]}{dx} + \frac{1}{1-x^2} \frac{d^2 U^{(n)}}{d\varphi^2} + n(n+1) U^{(n)} = 0 \quad . . . (6)$$

Uit de ontwikkeling van R^{-1} in eene reeks gerangschikt volgens de afdalende machten van t blijkt, dat de daarbij optredende coëfficiënten, en dus ook de coëfficiënten U geheele rationeele functien zijn

van $\cos \psi$, $\sin \psi \sin \varphi$ en $\sin \psi \cos \varphi$, of van x , $\sqrt{1-x^2} \sin \varphi$ en $\sqrt{1-x^2} \cos \varphi$.

Verder vindt men dat R^{-1} aan dezelfde differentiaalvergelijking voldoet als V en zoo men stelt

$$T = R^{-1} = \frac{P^{(0)}}{t} + \frac{P^{(1)} r}{t^2} + \frac{P^{(2)} r^2}{t^3} + \dots + \frac{P^{(n)} r^n}{t^{n+1}} + \dots \quad (7)$$

$P^{(n)}$ aan de vergelijking (6). Even als $U^{(n)}$ is ook $P^{(n)}$ eene geheele rationeele functie van bovenvermelde functien van ψ en φ .

Vervangt men nu in (3) R^{-1} door de reeks (7), dan vindt men, door de komende uitdrukking aan de reeks (5) gelijk te stellen, daar de coëfficiënten van dezelfde machten van t aan elkander gelijk moeten zijn,

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \int r^{n+2} dr P^{(n)} d\varphi' d\psi' \sin \psi' \\ &= \frac{1}{n+3} \int r^{n+3} P^{(n)} d\varphi' d\psi' \sin \psi' \dots \quad (8) \end{aligned}$$

wanneer men den constanten factor Δ voor de dichtheid weglaat. Daar r eene functie is van ψ' en φ' moet die grootheid onder 't integraalteeken blijven.

Is dus $P^{(n)}$ bepaald, dan is volgens (8) $U^{(n)}$ bepaald. Ter bepaling van de functie $P^{(n)}$ wordt deze ontwikkeld in eene reeks voortlopende volgens de cosinussen van de veelvouden van $\varphi' - \varphi$. Men stelt nu

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \beta_{n,0} + \beta_{n,1} \cos (\varphi' - \varphi) + \dots + \beta_{n,m} \cos m (\varphi' - \varphi) \dots + \\ &\beta_{n,n} \cos n (\varphi' - \varphi) \dots \dots \dots \quad (9) \end{aligned}$$

waarin de coëfficiënten β functien moeten zijn van $\cos \psi$ en $\cos \psi'$ of x en x' . Substitueert men deze uitdrukking in de vergelijking (6), waaraan, zooals gezegd is, ook $P^{(n)}$ moet voldoen, dan vindt men, dat $\beta_{n,m}$ moet voldoen aan de vergelijking

$$\frac{d \left[(1-x^2) \frac{d\beta_{n,m}}{dx} \right]}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \beta_{n,m} = 0 \dots \quad (10)$$

Daar deze vergelijking lineair is en van de tweede orde moeten er twee particuliere integralen bestaan, die, ieder met een constante vermenigvuldigd, de volledige integraal opleveren. Daar verder de vergelijking ψ' niet bevat en $\beta_{n,m}$ toch eene functie van ψ' is, zal deze grootheid moeten optreden in die constanten. Verder blijkt, dat slechts

eene der particuliere integralen eene geheele rationeele functie is van $\cos \psi$ of x , al of niet vermenigvuldigd met $\sqrt{1-x^2}$ naarmate m oneven of even is. Eene dergelijke functie hier ook slechts in aanmerking komen. ¹⁾ Substitueert men namelijk een dergelijke functie voor

¹⁾ Ten einde de algemeene integraal van vergelijking (10) te bepalen, begint men met die van de vergelijking

$$(1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} + n(n+1)f = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

te vinden, door substitutie van de reeks

$$f = x^a + a_2 x^{a-2} + a_4 x^{a-4} + \dots \quad (b)$$

Men vindt dan, ter bepaling van den exponent a , de vergelijking

$$a(a+1) = n(n+1) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

waaruit volgt, dat $a = n$ en $a = -n-1$ kan zijn.

Na verder de coëfficiënten a_2 , a_4 , enz. te hebben bepaald, vindt men, dat, zoolang mod. $x > 1$ is,

$$f = aP^{(n)} + bQ^{(n)} \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

de algemeene integraal is van vergelijking (a), waarin de constanten a en b nader moeten bepaald worden. Men heeft

$$P^{(n)} = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2 \dots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right] \quad (e)$$

$$Q^{(n)} = \frac{1.2 \dots n}{1.3 \dots (2n+1)} \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \dots \right] \quad (f)$$

Differentieert men nu (a) m maal ten opzichte van x , en stelt men de m^{de} afgeleide van f voor door g , dan vindt men de vergelijking

$$(1-x^2) \frac{d^2 g}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dg}{dx} + (n+m+1)(n-m)g = 0 \quad . \quad . \quad (g)$$

Stelt men verder

$$\beta = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} g,$$

zoo vindt men de vergelijking (10)

$$(1-x^2) \frac{d^2 \beta}{dx^2} - 2x \frac{d\beta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{4-x^2} \right] \beta = 0.$$

Als particuliere integralen van deze vergelijkingen zullen nu beschouwd kunnen worden de m^{de} afgeleiden van de functien $P^{(n)}$ en $Q^{(n)}$ vermenigvuldigd met den factor $(x^2-1)^{\frac{m}{2}}$. Dus is

$$\begin{aligned} \beta = & a(x^2-1)^{\frac{m}{2}} x^{n-m} F \left[-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -\frac{2n-1}{2}, \frac{1}{x^2} \right] \\ & + b(x^2-1)^{\frac{m}{2}} x^{-n-m-1} F \left[\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{x^2} \right] \quad (h). \end{aligned}$$

β in de vergelijking, dan vindt men, na de coëfficiënten der opvolgende machten van x gelijk nul gesteld te hebben, dat alle coëfficiënten van de functie $\beta_{n,m}$ zoodanig van elkander afhangen, dat ze bepaald zijn, zoodra de coëfficiënt der hoogste macht bepaald is. Stelt men dus de constante voor door H , dan kan men stellen

$$\beta_{n,m} = H\lambda$$

als λ eene functie is van x . Daar echter in $P^{(n)}$ en dus ook in $\beta_{n,m}$ x en x' op dezelfde wijze voorkomen moet H een factor λ' bevatten, die op dezelfde wijze van x' afhangt als λ van x . Men kan dus stellen

$$\beta_{n,m} = \gamma \lambda \lambda' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

waarin γ eene functie van de indices m en n voorstelt en onafhankelijk is van x en x' .

Daar we met een omwentelingslichaam te doen hebben, zullen de termen van $P^{(n)}$ waarin m een andere waarde heeft dan nul, gesubstitueerd in de integraal (8), na integratie nul geven. Men heeft dus te onderzoeken den term

$$P^{(n)} = \beta_{n,0}$$

Om het gedeelte van $P^{(n)}$ te vinden, onafhankelijk van $\varphi - \varphi'$, het eenige wat wij behoeven, stellen wij in $R \varphi' = 0$. Dan geeft de ontwikkeling van R^{-1} in eene reeks als (7) voor den coëfficiënt van $r^n : t^{n+1}$

$$P^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right] \quad (12)$$

Deze uitdrukking zal dan gelijk zijn aan de waarde van β in (11) voor $m = 0$ en $\varphi' = 0$. Nemen wij dus deze uitdrukking voor λ , dan

als volgens de schrijfwijze van Gauss F de hypergeometrische reeks voorstelt, waarvan de 4 daarachter geplaatste uitdrukkingen de elementen zijn.

In 'tgegeven geval zal voor $x=1$ β niet ∞ mogen worden. Daar dit voor die waarden van x wel 'tgeval is met de tweede functie in het tweede lid van de vergelijking (h), zoo moet de constante $b = 0$ zijn. De eerste particuliere integraal komt dus alleen in aanmerking. Daar $x \leq 1$ is, moeten we, als particuliere integraal, die aan de vergelijking (10) moet voldoen, daar die niet imaginair mag zijn, den vorm

$$a(1-x^2)^{\frac{m}{2}} x^{n-m} F \left[-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -\frac{2n-1}{2}, \frac{1}{x^2} \right]$$

aannemen, die met de aangenomene overeenkomt.

(Zie, Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2te Auflage)

is voor $\psi' = 0$ en $m = 0$ $\gamma\lambda' = 1$. Stelt men nu verder in R tegelijk $\psi = 0$ en $\psi' = 0$, zoo geeft de ontwikkeling van R^{-1}

$$P^{(n)} = 1$$

Dus heeft men voor $\psi = 0$ $\lambda = 1$, en op dezelfde wijze voor $\psi' = 0$ $\lambda' = 1$. Hieruit volgt wegens $\gamma\lambda' = 1$ voor $\psi' = 0$, dat $\gamma = 1$ is. Dus is

$$P^{(n)} = \beta_{n,0} = \lambda\lambda' \dots \dots \dots (13)$$

waarin λ wordt voorgesteld door (12) en λ' door dezelfde uitdrukking, wanneer x vervangen wordt door x' .

Deze waarde voor $P^{(n)}$ substitueerende in de vergelijking (8) zoo vindt men, na integratie ten opzichte van φ'

$$U^{(n)} = -\frac{2\pi\lambda}{n+3} \int r^{n+3} \lambda' dx'$$

waarin ten opzichte van x' moet geïntegreerd worden van $+1$ tot -1 .

Stelt men nu

$$\Lambda^{(n)} = -\frac{2\pi}{n+3} \int r^{n+3} \lambda' dx'$$

zoo vindt men, na substitutie in de reeks (5)

$$V = \frac{\Lambda^{(0)} \lambda^{(0)}}{t} + \frac{\Lambda^{(1)} \lambda^{(1)}}{t^2} + \frac{\Lambda^{(2)} \lambda^{(2)}}{t^3} + \dots \dots \dots (14)$$

In 't vervolg leidt Laplace den vorm van den algemeenen coëfficiënt $\beta_{n,m}$ af. Voor ons doel is echter (13) voldoende.

De formule (13) wordt door Legendre in zijne verhandeling „Suite des recherches, etc.” Histoire de l'académie 1789, pag. 426 v.v. afgeleid uit de uitdrukking voor den algemeenen coëfficiënt $\beta_{n,m}$, door hierin $\psi = 0$ te stellen. Die algemeene coëfficiënt wordt op de volgende wijze afgeleid.

Uit de reeks (7) blijkt dat $P^{(n)}$ de coëfficiënt is van $r^n : t^{n+1}$, en zoo men nu R^{-1} of $t^{-1} \left[1 - \left(\frac{2r \cos \chi}{t} - \frac{r^2}{t^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$ ontwikkelt volgens de opklimmende machten van de tusschen haakjes geplaatste uitdrukking, vindt men voor dien coëfficiënt den vorm

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left[\cos^n \chi - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \chi + \dots \right] \dots (15)$$

Substitueert men hierin de waarde voor $\cos \chi$ uit (2), zoo vindt men voor eenige der eerste coëfficiënten P

$$P^{(1)} = \cos \psi \cos \psi' + \sin \psi \sin \psi' \cos (\varphi' - \varphi)$$

$$P^{(2)} = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi' - \frac{1}{2}\right) + 3 \cos \psi \cos \psi' \sin \psi \sin \psi' \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{3}{4} \sin^2 \psi \sin^2 \psi' \cos 2(\varphi' - \varphi)$$

$$P^{(3)} = \left(\frac{5}{2} \cos^3 \psi - \frac{3}{2} \cos \psi\right) \left(\frac{5}{2} \cos^3 \psi' - \frac{3}{2} \cos \psi'\right) + \frac{3}{8} (5 \cos^2 \psi - 1) (5 \cos^2 \psi' - 1) \sin \psi \sin \psi' \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1}{4} 5 \cos \psi \cos \psi' \sin^2 \psi \sin^2 \psi' \cos 2(\varphi' - \varphi) + \frac{5}{8} \sin^3 \psi \sin^3 \psi' \cos 3(\varphi' - \varphi).$$

Men ziet dat in die termen, die de cosinussen van de evene veelvouden van $\varphi' - \varphi$ bevatten, geheele positieve machten van $\cos \psi$ optreden. De overige bevatten daarenboven den factor $\sin \psi$. Stelt men, als boven in $P^{(n)}$, den coëfficiënt van $\cos m(\varphi' - \varphi)$ voor door $\beta_{n,m}$ dan mag men stellen

$$\beta_{n,m} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left(ax^{n-m} + bx^{n-m-2} + \dots \right) \quad (16)$$

daar deze uitdrukking ten opzichte van x van den n^{den} graad moet zijn, terwijl uit de substitutie in de vergelijking (10) volgt, dat de opvolgende exponenten met 2 verminderen. Door die substitutie vindt men dan tevens op welke wijze de coëfficiënten a , b , c , enz. van elkander afhangen. Het blijkt dan, dat alle bepaald zijn, indien de eerste coëfficiënt a bepaald is. Stelt men verder de gelijke functien van x en x' , die $\beta_{n,m}$ bevat, voor door $F^{(m)}(x)$ en $F^{(m)}(x')$, zoo heeft men

$$\beta_{n,m} = a_m F^{(m)}(x) F^{(m)}(x'), \text{ en dus}$$

$$P^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} a_m F^{(m)}(\cos \psi) F^{(m)}(\cos \psi') \cos m(\varphi' - \varphi) \quad (17)$$

Uit het verband der coëfficiënten a , b , c , enz. zal verder blijken, dat

$$F^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left(x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} + \dots \right)$$

is. Stelt men nu

$$F^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} G^{(m)}(x) \quad (18)$$

dan is de tweede factor van het tweede lid dezer vergelijking een functie van dien aard, dat

$$G^{(m+1)}(x) = \frac{1}{n-m} \frac{dG^{(m)}(x)}{dx} \text{ is.} \quad (19)$$

$$\text{Voor } m=0 \text{ is } G^{(0)}(x) = F^{(0)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} X^n. \quad (20)$$

als X^n dezelfde functie van x voorstelt, als $P^{(n)}$ van $\cos \chi$.

We vinden dus $F^{(1)}(x) = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} \frac{dF^{(0)}}{dx}$

en zoo men op die wijze alle volgende functionen F uitdrukt in $F^{(0)}$, vindt men

$$F^{(m)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n(n-1)\dots(n-m+1)} \frac{d^m F^{(0)}}{dx^m} \dots \dots (21)$$

Ter bepaling van den coëfficiënt a stelt men in (15) $x = \cos \psi = 0$ $\sin \psi = 1$ en $x' = \cos \psi' = \infty$, waardoor $\sin \psi'$ den vorm $\sqrt{-x'^2}$ verkrijgt. De uitdrukking (15) wordt dan

$$\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2\dots n} (-x'^2)^{\frac{n}{2}} \cos^n(\varphi' - \varphi)$$

of, als men den laatsten factor in eene reeks ontwikkelt

$$\frac{1.3\dots(2n-1)}{1.2\dots n} \frac{(-x'^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos n(\varphi' - \varphi) + \frac{n}{1} \cos(n-1)(\varphi' - \varphi) + \dots \right] (22)$$

In deze reeks is dus de coëfficiënt van $\cos m(\varphi' - \varphi)$

$$\frac{1.2\dots(2n-1)}{1.2\dots n} \frac{n(n-1)\dots \frac{n+m}{2} + 1}{1.2\dots \frac{n-m}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} (-x'^2)^{\frac{n}{2}} \dots (23)$$

Langs een anderen weg kunnen we nog eene andere uitdrukking voor $\beta_{n,m}$ verkrijgen, voor 't geval, dat men daarin bovenvermelde substitutie uitvoert. Stelt men in

$$\sum a_m F^{(m)}(x) F^{(m)}(x')$$

$\cos \psi$ of $x = 0$, zoo bepalen we ons tot die termen, waarvoor $n+m$ even is. Voor deze termen is dus ook $n-m$ even. $F^{(m)}(x)$ bevat dan één term, waarin x niet voorkomt. Men heeft na deze substitutie

$$F^{(m)}(0) = \frac{1.2\dots(n-m)}{2.4\dots(n-m)} \frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}}}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+m+1)}$$

Stelt men in den anderen factor $x' = \infty$, zoo vindt men

$$F^{(m)}(x') = (-1)^{\frac{m}{2}} x'^n$$

$$\text{en dus } \beta_{n,m} = a_m \frac{1.2\dots(n-m)}{2.4\dots(n-m)} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x'^n}{(2n-1)(2n-3)\dots(n+m+1)} (24)$$

Uit (23) en (24) volgt dus, voor $m + n$ even,

$$a_m = 2 \frac{1.3 \dots (2n-1)(2n-1)(2n-3) \dots (n+m+1)}{2.4 \dots (n+m) \quad 1.2 \dots (n-m)} \quad (25)$$

Voor $m = 0$ heeft men de helft van dezen coëfficiënt te nemen. Men verkrijgt dan

$$a_0 = 2 \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2 \dots n} \right)^2 \dots \quad (26)$$

Daar door de bovenvermelde substitutie de termen, waarin $n + m$ oneven is, verdwijnen, en ook de algemeene coëfficiënt van deze termen moet worden bepaald, differentieert men $P^{(n)}$ ten opzichte van ψ , en stelt daarna $\cos \psi = 0$. Dan zullen alleen die termen blijven bestaan, die bij de vorige substitutie zijn verdwenen, en op dezelfde wijze als boven vindt men dan voor den algemeenen term, voor $m + n$ oneven,

$$a_m = 2 \frac{1.3.5 \dots (2n-1)(2n-1)(2n-3) \dots (n+m+2)}{2.4 \dots (n+m-1) \quad 1.2 \dots (n-m)} \quad (27)$$

De beide formules (25) en (27) verkrijgen door herleiding denzelfden vorm, zoo dat men in alle gevallen heeft

$$a_m = 2 \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2 \dots n} \right)^2 \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+m)} \quad (28)$$

Na invoering der functie $X^{(n)}$ (20), vindt men, als eene dergelijke functie $X'^{(n)}$ op x' betrekking heeft,

$$P^{(n)}(\cos \chi) = \sum_{m=0}^{m=n} 2 \frac{\sin^m \psi \sin^m \psi'}{(n-m+1)(n-m+2) \dots (n+m)}$$

$$\frac{d^m X^{(n)}}{dx^m} \quad \frac{d^m X'^{(n)}}{dx'^m} \cos m(\psi' - \psi) \dots \quad (29)$$

Men vindt hieruit

$$\int_0^{2\pi} P^{(n)}(\cos \chi) d\varphi = 2\pi X^{(n)} X'^{(n)} \dots \quad (30)$$

Dus is hier hetzelfde resultaat verkregen als in (13)..

Substitueert men dus de reeks voor $P^{(n)}$ (29) in de reeks (7) en deze in de integraal (3), zoo vindt men

$$V = 2\pi \int \Delta r^2 dr d\psi' \sin \psi' \left[\frac{1}{t} + \frac{r}{t^2} X^{(1)} X'^{(1)} + \frac{r^2}{t^3} X^{(2)} X'^{(2)} + \dots \right] \quad (31)$$

daar bij de integratie ten opzichte van φ alle termen wegvallen, met uitzondering van den term, die van φ onafhankelijk is.

Substitueert men verder

$$\int_{\Delta r^{m+2}} dr = p^{(m)}$$

$$\text{en } \int p^{(m)} X'^{(m)} dx' = q^{(m)}$$

zoo verkrijgt men

$$V = \frac{2\pi}{t} \left[q^{(0)} + \frac{q^{(1)}}{t} X^{(1)} + \frac{q^{(2)}}{t^2} X^{(2)} + \dots \right] \quad (32)$$

eene uitdrukking overeenkomende met die van Laplace (14).

II.

TOEPASSING DER ALGEMEENE REEKS VOOR 'T GEVAL, DAT HET PUNT
IS GELEGEN OP DE OMWENTELINGSAS.

Gaat men nu na welken vorm de uitdrukking voor V (32) verkrijgt, wanneer het punt, waarin de potentiaalfunctie moet worden bepaald, in de as van symmetrie is gelegen, dan heeft men $\psi = 0$ of $x = 1$ te stellen. Daar $X^{(n)}$ eene dergelijke functie is van x als $P^{(n)}$ van $\cos \chi$, zal men, zoo men in $R^{-1} \cos \chi$ door 1 vervangt en de komende uitdrukking volgens de afdalende machten van t ontwikkelt, als coëfficiënt van den algemeenen term $r^n : t^{n+1}$ verkrijgen 1.

Men verkrijgt dus voor dit geval

$$V = \frac{2\pi}{t} \left[q^{(0)} + \frac{q^{(1)}}{t} + \frac{q^{(2)}}{t^2} + \dots \right] \quad (33)$$

Het verband tusschen de reeksen (32) en (33) valt dadelijk in 't oog. Beide reeksen zijn te gelijk convergent, daar de coëfficiënten X kleiner dan 1 zijn, uitgezonderd wanneer $x = 1$ is, daar in dit geval, zooals opgemerkt is, $X^{(n)} = 1$ is. ¹⁾

¹⁾ Daar men de functie $P^{(n)}(\cos d)$ kan voorstellen door eene reeks van den vorm

$$a \cos nd + b \cos (n-2)d + c \cos (n-4)d + \dots$$

die eindig is, daar n een positief geheel getal voorstelt, terwijl de coëfficiënten a , b , enz. positieve getallen zijn, zoo blijkt, dat voor $d = 0$ de functie de grootste waarde heeft.

Heeft men dus de potentiaalfunctie van een symmetrisch om een as gelegen agens in een punt der as bepaald, en voorgesteld door eene convergeerende reeks, gerangschikt volgens de afdalende machten van den voerstraal t van dat punt, dan kan men door toevoeging van de functien X als factoren aan die termen, en wel zoodanig, dat X^n een factor wordt van den term, die $t^{-(n+1)}$ bevat, eene reeks verkrijgen, die de potentiaalfunctie in een punt voorstelt, dat bepaald is door den voerstraal t en den hoek ψ , als $\cos \psi$ 't argument is van X .

Is het punt zoodanig gelegen, dat men, om de potentiaalfunctie in dat punt door eene convergeerende reeks voor te stellen, die reeks moet rangschikken volgens de opklimmende machten van t , dan zal $X^{(n)}$ een factor worden van den term, die t^n bevat.

Daar nu voor $d = 0$ uit de ontwikkeling van $(1 - 2a \cos d + a^2)^{-\frac{1}{2}}$ volgens de opklimmende machten van a blijkt, dat $P^{(n)}(1) = 1$ is, zoo zal $+1$ de grootste waarde zijn van $P^{(n)}(\cos d)$ en wel voor $d = 0$.

Voor $d = \pi$ heeft men verder, als n een even getal $2k$ voorstelt, blijkens de bovenstaande ontwikkeling $P^{(2k)}(-1) = P^{(2k)}(1) = +1$, en, zoo $n = 2k + 1$ kan worden gesteld, $P^{(2k+1)}(-1) = -P^{(2k+1)}(1) = -1$. Het blijkt dus, dat voor waarden van d van 0 tot π de absolute waarde van de functie $P^{(n)}$ altijd kleiner is dan 1.

TWEEDE HOOFDSTUK.

I.

BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE VAN EEN GEÏSOLEERD
GELADEN SEGMENT EENER GELEIDENDE BOLVORMIGE SCHIL
IN EEN PUNT VAN DE AS VAN 'T SEGMENT.

Zij amb (fig. 1) de doorsnede van 't segment met een vlak gaande door de as om , p een punt van 't segment, q het punt der as, waarin de potentiaalfunctie moet worden bepaald, en $\angle aom = \angle bom = \gamma$. We nemen q in dat gedeelte der as, dat van o afgerekend van 't segment is afgekeerd. Zij $oq = d$. Als coördinaten van 't punt p nemen we aan $op = r$ den straal van den bol, φ den hoek, dien een vlak, gaande door de as en door 't punt p , met een vast vlak door de as maakt, en $\angle mop = \omega$. Dan is

$$pq = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \omega}.$$

Nu heeft Thomson gevonden voor de som der dichtheden van de electriciteit aan weerszijden van 't segment in een punt p , wanneer dat segment geïsoleerd en geladen is tot een potentiaal C ,

$$\sigma = \frac{C}{2\pi^2 r} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\cos \gamma + 1}{\cos \omega - \cos \gamma} \right)} + bg \operatorname{tg} \sqrt{\left(\frac{\cos \omega - \cos \gamma}{\cos \gamma + 1} \right)} \right\}$$

Daar verder een vlakke-element van 't segment in 't punt p voorgesteld wordt door

$$r^2 \sin \omega \, d\omega \, d\varphi,$$

en als men stelt

$$U_1 = \frac{Cr \sqrt{(\cos \gamma + 1)}}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\gamma \frac{\sin \omega \, d\omega}{\sqrt{(r^2 + d^2 + 2rd \cos \omega)} \sqrt{(\cos \omega - \cos \gamma)}}$$

$$\text{en } U_2 = \frac{Cr}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{bg \, tg \, \sqrt{\frac{\cos \omega - \cos \gamma}{\cos \gamma + 1}}}{\sqrt{(r^2 + d^2 + 2rd \cos \omega)}} \sin \omega \, d\omega.$$

zoo vindt men voor de gezochte potentiaalfunctie U in 't punt q

$$U = U_1 + U_2.$$

We integreeren in beide gevallen eerst ten opzichte van φ , en na $\cos \omega = x$ en $\cos \gamma = g$ te hebben gesteld, vinden we

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{C}{\pi} \sqrt{\frac{r(1+g)}{2d}} \int_1^g \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{r^2 + d^2 - 2grd}{2rd} x - \frac{g(r^2 + d^2)}{2rd}\right)}} \\ &= \frac{C}{\pi} \sqrt{\frac{r(1+g)}{2d}} \, l. \, \frac{r+d + \sqrt{2rd(1-g)}}{r+d - \sqrt{2rd(1-g)}} \end{aligned}$$

Door partieel te integreeren vinden we voor de tweede integraal

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{C}{\pi} \left[\frac{r+d}{d} bg \, tg \, \sqrt{\frac{1-g}{1+g}} + \sqrt{\frac{r(1+g)}{2d}} \, l. \, \frac{r+d - \sqrt{2rd(1-g)}}{r+d + \sqrt{2rd(1-g)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r-d}{d} bg \, tg \, \frac{r-d}{r+d} \sqrt{\frac{1-g}{1+g}} \right] \end{aligned}$$

Dus is

$$U = U_1 + U_2 = \frac{C}{\pi} \left[\frac{r+d}{d} \frac{\gamma}{2} - \frac{r-d}{d} bg \, tg \left\{ \frac{r-d}{r+d} tg \frac{\gamma}{2} \right\} \right]$$

Voor $d < r$ is, als $\frac{d}{r} = \rho$ wordt gesteld,

$$U = \frac{C}{\pi} \left[\frac{1+\rho}{\rho} \frac{\gamma}{2} - \frac{1-\rho}{\rho} bg \, tg \left\{ \frac{1-\rho}{1+\rho} tg \frac{\gamma}{2} \right\} \right]. \quad (1)$$

Voor $d > r$ is, als $\frac{r}{d} = \rho$ wordt gesteld,

$$U = \frac{C}{\pi} \left[(1+\rho) \frac{\gamma}{2} - (1-\rho) bg \, tg \left\{ \frac{1-\rho}{1+\rho} tg \frac{\gamma}{2} \right\} \right]. \quad (2)$$

Voor $d = r$ vindt men uit (1) en (2) beide

$$U = \frac{C\gamma}{\pi}$$

De gevonden integralen zijn geldig voor positieve waarden van d . Stelt men in de te integreeren differentiaaluitdrukking $d = 0$, zoo verkrijgt men

$$U = \frac{C}{\pi} (\gamma + \sin \gamma)$$

eene waarde, die we later uit de algemeene uitdrukking, voor U verkregen, afleiden.

Is $\gamma = \pi$, zoodat het segment in 't geheele bolvormige oppervlak overgaat, zoo vindt men

$$\begin{aligned} U &= C \quad \text{als } d \leq r \text{ is,} \\ \text{en } U &= C\rho \quad \text{als } d > r \text{ is.} \end{aligned}$$

Wanneer we nu uit (1) en (2) waarden voor U afleiden met betrekking tot een willekeurig punt buiten dat gedeelte der as, voor welks punten de potentiaalfunctie is bepaald, dan kunnen we die functie ook bepalen in een punt van dat gedeelte der as, dat naar 't segment is gekeerd, en in 't verlengde er van.

II.

BEPALING DER POTENTIAALFUNCTIE IN EEN WILLEKEURIG PUNT.

De dichtheid der lading op 't segment is symmetrisch ten opzichte van de as md . We zullen nu de potentiaalfunctie dier lading bepalen in een punt q (fig. 2), dat bepaald is door den afstand $oq = d$ en $\angle doq = \psi$. Daartoe zullen we die functie met betrekking tot een punt der as, op den afstand d van 't middelpunt gelegen en voorgesteld door (1) en (2), ontwikkelen in convergeerende reeksen, gerangschikt volgens de opklimmende machten van ρ . Deze zijn van den vorm

$$U = \frac{C}{\pi} \left[c_0 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + c_3 \rho^3 + \dots \right] \text{ voor } d < r \text{ en } \frac{d}{r} = \rho$$

$$\text{en } U = \frac{C}{\pi} \left[c_0 \rho + c_1 \rho^2 + c_3 \rho^3 + \dots \right] \text{ voor } d > r \text{ en } \frac{r}{d} = \rho.$$

Om nu de reeksen te verkrijgen, die de potentiaalfunctie in q voorstellen, voegt men aan de termen der voor U aangenomen reeksen de coëfficiënten $P_0, P_1 \dots$ toe, waarin

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left\{ \cos^n \psi - \frac{n(n-1)}{2(n-1)} \cos^{n-2} \psi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \psi - \dots \right\}$$

Om aan te toonen, dat de uitdrukkingen (1) en (2) in convergeerende reeksen, volgens de opklimmende machten van ρ gerangschikt, kunnen worden ontwikkeld, stellen we

$$\lg \lg \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \lg \frac{\gamma}{2} \right) = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n + R$$

waarbij R eene functie van ρ , voorgesteld door $R = f(\rho)$.

Na de beide leden dezer identieke vergelijking te hebben gedifferentieerd ten opzichte van ρ , vindt men

$$\frac{-\sin \gamma}{1 + 2\rho \cos \gamma + \rho^2} = a_1 + 2a_2 \rho + 3a_3 \rho^2 \dots + na_n \rho^{n-1} + \frac{dR}{d\rho}$$

Ontwikkelt men nu 't eerste lid dezer vergelijking in eene reeks, gerangschikt volgens de opklimmende machten van ρ , dan vindt men

$$\frac{-\sin \gamma}{1 + 2\rho \cos \gamma + \rho^2} = -\sin \gamma + \rho \sin 2\gamma - \rho^2 \sin 3\gamma + \dots$$

$$+ (-1)^n \rho^{n-1} \sin n\gamma + (-1)^{n+1} \rho^n \{ \sin(n+1)\gamma - \rho \sin(n+2)\gamma + \dots \}$$

Deze reeks is identisch met de voorgaande, als

$$a_1 = -\sin \gamma, a_2 = \frac{\sin 2\gamma}{2}, a_3 = -\frac{\sin 3\gamma}{3}, \dots a_n = (-1)^n \frac{\sin n\gamma}{n}$$

$$\text{en } \frac{dR}{d\rho} = (-1)^{n+1} \rho^n [\sin(n+1)\gamma - \rho \sin(n+2)\gamma + \dots] \text{ is.}$$

De termen der tusschen haakjes geplaatste reeks zijn kleiner dan die van de reeks, welke ontstaat uit de ontwikkeling van $\frac{1}{1-\rho}$, namelijk

$$\frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots$$

Men kan dus stellen

$$\frac{dR}{d\rho} = (-1)^{n+1} \frac{\rho^{n\varepsilon}}{1-\rho} \text{ als } 0 < \varepsilon < +1 \text{ is.}$$

Daar nu $R = f(\rho)$ en $\frac{dR}{d\rho} = f'(\rho)$ continue functiën zijn van ρ voor $\rho < 1$, zoo heeft men, volgens de reeks van Maclaurin,

$$f(\rho) = f(0) + \rho f'(\vartheta\rho) \text{ als } 0 < \vartheta < +1 \text{ is.}$$

Daar nu $f(0) = 0$ is, zoo is

$$R = f(\rho) = \rho f'(\vartheta\rho) = (-1)^{n+1} \frac{\vartheta \rho^{n\varepsilon}}{1-\vartheta\rho}$$

en $\lim. R = 0$ voor $\lim. n = \infty$ en $\rho < 1$.

We vinden dus

$$\text{bg tg } \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \text{tg } \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin \gamma}{1} \rho + \frac{\sin 2\gamma}{2} \rho^2 - \frac{\sin 3\gamma}{3} \rho^3 + \dots$$

en na substitutie dezer waarde in (1) vindt men

$$U = \frac{C}{\pi} \left[\gamma + \sin \gamma - \left(\frac{\sin \gamma}{1} + \frac{\sin 2\gamma}{2} \right) \rho + \left(\frac{\sin 2\gamma}{2} + \frac{\sin 3\gamma}{3} \right) \rho^2 - \dots \right. \\ \left. \dots (-1)^n \left(\frac{\sin n\gamma}{n} + \frac{\sin(n+1)\gamma}{n+1} \right) \rho^n \pm \dots \right]$$

De uitdrukking (2) verkrijgt den vorm

$$U = \frac{C}{\pi} \left[(\gamma + \sin \gamma) \rho - \left(\frac{\sin \gamma}{1} + \frac{\sin 2\gamma}{2} \right) \rho^2 + \dots \right]$$

Na toevoeging der functie P_n verkrijgt men, als V de gezochte potentiaalfunctie in q voorstelt,

$$V = \frac{C}{\pi} \left[\gamma + \sin \gamma - P_1 \left(\frac{\sin \gamma}{1} + \frac{\sin 2\gamma}{2} \right) \rho + P_2 \left(\frac{\sin 2\gamma}{2} + \frac{\sin 3\gamma}{2} \right) \rho^2 - \dots \right] \quad (3)$$

$$\text{voor } \rho = \frac{d}{r} \text{ en } d < r,$$

en

$$V = \frac{C}{\pi} \left[(\gamma + \sin \gamma) \rho - P_1 \left(\frac{\sin \gamma}{1} + \frac{\sin 2\gamma}{2} \right) \rho^2 + \right. \\ \left. P_2 \left(\frac{\sin 2\gamma}{2} + \frac{\sin 3\gamma}{3} \right) \rho^3 - \dots \right] \quad (4)$$

$$\text{voor } \rho = \frac{r}{d} \text{ en } r < d.$$

Stelt men in (3) $\rho = 0$ zoo heeft men, even als vroeger is gevonden

$$V = \frac{C}{\pi} (\gamma + \sin \gamma)$$

Stelt men in (4) $\rho = 0$, d.i. $d = \infty$, dan vindt men

$$V = 0.$$

Ten einde de bepaling van numerische waarden der potentiaalfunctie V volgens (3) en (4), gemakkelijker te maken, zullen we die reeksen sommeeren, en wel vooreerst de reeks (3), daar uit deze de reeks (4) op een eenvoudige wijze wordt afgeleid.

Daar deze reeks convergent blijft, ook voor 't geval dat alle termen positief zijn, zoo mogen we die reeks door andere vervangen, die verkregen zijn, door de termen in eene andere orde te nemen. We verkrijgen dan (3) uitgedrukt in twee reeksen, die door begrensde integralen zijn te vervangen.

De reeks (3) wordt nu voorgesteld door

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\gamma}{n} (-\rho)^n P_n (\cos \psi) + \right. \\ \left. \sum_0^{\infty} \frac{\sin (n+1)\gamma}{n+1} (-\rho)^n P_n (\cos \psi) \right\}$$

Stelt men de hierin voorkomende sommen voor door S en S_1 , zoo is

$$S = -\frac{\sin \gamma}{1} \rho P_1 + \frac{\sin 2\gamma}{2} \rho^2 P_2 - \frac{\sin 3\gamma}{3} \rho^3 P_3 + \dots$$

Na differentiatie ten opzichte van ρ en substitutie van

$$\sin n\gamma = \frac{e^{in\gamma} - e^{-in\gamma}}{2i}$$

als e de basis van 't nep. logarithmenstelsel voorstelt en $+V-1=i$ is gesteld, heeft men

$$\frac{dS}{d\rho} = -\sin \gamma \cdot P_1 + \sin 2\gamma \cdot \rho P_2 - \sin 3\gamma \cdot \rho^2 P_3 + \dots \\ \rho \frac{dS}{d\rho} = -\sin \gamma \cdot \rho P_1 + \sin 2\gamma \cdot \rho^2 P_2 - \sin 3\gamma \cdot \rho^3 P_3 + \dots \\ = \frac{1}{2i} \left[1 - e^{i\gamma} \rho P_1 + e^{2i\gamma} \rho^2 P_2 - \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i} \left[1 - e^{-i\gamma} \rho P_1 + e^{-2i\gamma} \rho^2 P_2 - \dots \right] \\
& = \frac{1}{2i} \sum_0^{\infty} (-e^{i\gamma} \rho)^n P_n - \frac{1}{2i} \sum_0^{\infty} (-e^{-i\gamma} \rho)^n P_n \\
& = \frac{1}{2i} \frac{1}{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2i} \frac{1}{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Na deeling door ρ heeft men

$$\frac{dS}{d\rho} = \frac{1}{2i\rho} \left[\frac{1}{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

De algemeene integraal is

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i} \left[l. \frac{1 + \rho e^{i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)}}{\rho} \right. \\
& \left. - l. \frac{1 + \rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)}}{\rho} \right] + \text{const.}
\end{aligned}$$

$$\text{of } \frac{1}{2i} l. \frac{1 + \rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \rho^2 e^{-2i\gamma})}}{1 + \rho e^{i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + \rho^2 e^{2i\gamma})}} + \text{const.}$$

Daar nu de reeks, die de waarde van S voorstelt, voor $\rho = 0$ ook de waarde nul verkrijgt, zoo is, na substitutie van $\rho = 0$ in de algemeene integraal, de bijgevoegde constante nul, en we vinden dus

$$S = \frac{1}{2i} l. \frac{1 + \rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)}}{1 + \rho e^{i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)}} \quad 1)$$

1) Het is, bij de bepaling van de waarde der begrensde integraal tusschen 0 en ρ noodig de som der algemeene integralen te nemen, omdat de beide differentiaal-uitdrukkingen onder 't integraalteeken afzonderlijk oneindig groot worden voor $\rho = 0$. Dat echter de som der differentiaal-uitdrukkingen eene eindige waarde heeft blijkt uit de reeks voor $\frac{dS}{d\rho}$ gevonden. Die som is $-\sin \gamma \cdot P_1$ voor $\rho = 0$. Men heeft dus ook $S = 0$ voor $\rho = 0$. De discontinuïteit der differentiaal-uitdrukkingen, die geïntegreerd moeten worden, is echter ingevoerd door $\frac{dS}{d\rho}$ met ρ te vermenigvuldigen en daarna de beide daarvoor gevonden reeksen weer door ρ te deelen. Door de som der beide uitdrukkingen, die de waarde

Verder is

$$S_1 = \sin \gamma - \frac{\sin 2\gamma}{2} \rho P_1 + \frac{\sin 3\gamma}{3} \rho^2 P_2 - \dots$$

$$S_{11} = \rho S_1 = \sin \gamma \cdot \rho - \frac{\sin 2\gamma}{2} \rho^2 P_1 + \frac{\sin 3\gamma}{3} \rho^3 P_2 - \dots$$

$$\text{en dus } \frac{dS_{11}}{d\rho} = \sin \gamma - \sin 2\gamma \cdot \rho P_1 + \sin 3\gamma \cdot \rho^2 P_2 - \dots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \left[e^{i\gamma} - e^{2i\gamma} \rho P_1 + e^{3i\gamma} \rho^2 P_2 - \dots \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\gamma} + e^{-2i\gamma} \rho P_1 - e^{-3i\gamma} \rho^2 P_2 + \dots \right] \\ &= \frac{e^{i\gamma}}{2i} \frac{1}{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{e^{-i\gamma}}{2i} \frac{1}{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\text{en dus } S_1 = \frac{1}{2i\rho} \int_0^\rho \left\{ \frac{1}{(e^{-2i\gamma} + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(e^{2i\gamma} + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\rho \\ &= \frac{1}{2i\rho} l. \frac{\cos \psi + \rho e^{i\gamma} + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + \rho^2 e^{2i\gamma})}}{\cos \psi + \rho e^{-i\gamma} + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \rho^2 e^{-2i\gamma})}} \end{aligned}$$

We vinden dus

$$\begin{aligned} V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + \frac{1}{2i} l. \frac{1 + \rho e^{-i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)}}{1 + \rho e^{i\gamma} \cos \psi + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2i\rho} l. \frac{\cos \psi + \rho e^{i\gamma} + \sqrt{(1 + 2\rho e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} \rho^2)}}{\cos \psi + \rho e^{-i\gamma} + \sqrt{(1 + 2\rho e^{-i\gamma} \cos \psi + e^{-2i\gamma} \rho^2)}} \right\} \dots (5) \end{aligned}$$

De reeks (4) wordt dan ook voorgesteld door (5) nadat deze met ρ is vermenigvuldigd.

van $\frac{dS}{d\rho}$ voorstelt, te nemen, verdwijnt weer die discontinuïteit. Daarom strekt zich de integratie uit over de som der beide gebroken vormen en moet men als algemeene integraal beschouwen de som der algemeene integralen, die men na integratie der beide differentiaal-uitdrukkingen verkrijgt.

Daar teller en noemer van elke dezer breuken geconjugeerde complexe uitdrukkingen zijn, kan men deze uitdrukkingen voor V nog een anderen vorm geven.

Door de substitutie

$$1 + 2\rho e^{\pm i\gamma} \cos \psi + e^{\pm 2i\gamma} \rho^2 = r (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^{1)}$$

$$1 + \rho e^{\pm i\gamma} \cos \psi = a \pm ib \quad \text{en} \quad \cos \psi + \rho e^{\pm i\gamma} = c \pm id$$

$$\frac{b + r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \alpha}{a + r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \alpha} = M \quad \text{en} \quad \frac{d + r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \alpha}{c + r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \alpha} = N,$$

verkrijgt men uit (5)

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + \frac{1}{2i} l \cdot \frac{1 - iM}{1 + iM} + \frac{1}{2i\rho} l \cdot \frac{1 + iN}{1 - iN} \right\}$$

of $V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma - bg \operatorname{tg} M + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} N \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$

De reeks (4) wordt dan voorgesteld door

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma\rho - \rho bg \operatorname{tg} M + bg \operatorname{tg} N \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hier zijn M en N dus bekende functien van ρ , γ en ψ , terwijl in

(6) $\rho = \frac{d}{r}$ is en $d < r$, en in (7) $\rho = \frac{r}{d}$ en $r < d$ is.

Is $r = d$, en dus $\rho = 1$, dan gaan (6) en (7) beide over in

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma - bg \operatorname{tg} M + bg \operatorname{tg} N \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

¹⁾ De teekens $+$ en $-$ in het tweede lid van deze vergelijking correspondeeren niet met diezelfde teekens in 't eerste lid. Hier is bedoeld, dat $i \sin \alpha$ het teeken $+$ verkrijgt als het imaginaire gedeelte in 't eerste lid het teeken $+$ heeft, en het teeken $-$ als het imaginaire gedeelte van 't eerste lid het teeken $-$ heeft. Daardoor kan men α altijd tusschen 0 en π , en dus $\frac{1}{2} \alpha$ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ nemen.

In 't eerste lid dezer vergelijkingen is

$$\pm (2\rho \sin \gamma \cos \psi + \rho^2 \sin 2\gamma)$$

of $\pm 2\rho \sin \gamma (\cos \psi + \rho \cos \gamma)$

de coëfficiënt van i . Dus kan $\cos \alpha$ een positief of negatief getal voorstellen; $\sin \alpha$ echter *altijd* een positief getal. Van daar dat men α *altijd* tusschen 0 en π kan nemen.

Men kan uit deze formule omgekeerd weer vinden, dat de potentiaalfunctie in een punt van 't segment de constante waarde C heeft. Dit wordt voor verschillende waarden van γ , terwijl $\rho = 1$ wordt gesteld, op de volgende wijze aangetoond.

Zij $\gamma < \frac{\pi}{2}$ (fig. 3), dan is voor eenig punt van 't segment $\psi > \pi - \gamma$. Dus is $\cos \psi$ negatief en $\cos \gamma$ positief.

Stel $\cos \psi = -m$ en $\cos \gamma = n$, dan zijn m en n positief en $m > n$.

Dan is $1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} = 1 + 2 \cos \psi \cos \gamma + \cos 2\gamma + (2 \cos \psi \sin \gamma + \sin 2\gamma)i$

$$= -2mn + 2n^2 + 2(n-m)i\sqrt{1-n^2} \\ = 2n(n-m) - 2(m-n)\sqrt{1-n^2}i = r(\cos \alpha - i \sin \alpha).$$

Dus is $r \cos \alpha = -2n(m-n)$ en $r \sin \alpha = 2(m-n)\sqrt{1-n^2}$ en $r = 2(m-n)$, $\cos \alpha = -n$, $\sin \alpha = \sqrt{1-n^2}$,

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = +\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{1+n}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = +\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{1-n}{2}}$$

$$r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\alpha = +\sqrt{(1-n)(m-n)} \quad r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\alpha = +\sqrt{(1+n)(m-n)}$$

$$a = 1 + \cos \psi \cos \gamma = 1 - nm \quad c = \cos \psi + \cos \gamma = -m + n \\ b = \cos \psi \sin \gamma = -m\sqrt{1-n^2} \quad d = \sin \gamma = \sqrt{1-n^2}$$

Na substitutie dezer waarden in (8) vindt men

$$V = \frac{C}{\pi} \left[\gamma + bgtg \frac{m\sqrt{1-n^2} + \sqrt{(m-n)(1+n)}}{1-nm + \sqrt{(m-n)(1-n)}} + bgtg \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{m-n}} \right] \\ = \frac{C}{\pi} \left[\gamma + bgtg - \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \right] = \frac{C}{\pi} [\gamma + \pi - \gamma] = C.$$

Dit is dus de waarde van V voor punten van 't segment.

Voor het, tusschen de cirkels ab en ef gelegen gedeelte van 't bolvormig oppervlak, waartoe 't geladen segment behoort, is $\cos \psi$ wel negatief, maar m is dan kleiner dan n . Voor punten behoorende tot den halven bol fde is $\cos \psi$ positief; dan ligt ψ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$.

Voor punten behoorende tot het segment adb is dus n positief, m positief of negatief en $m+n$ positief, als men stelt $\cos \psi = m$ en $\cos \gamma = n$. Dan is

$$1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} = 2n(m+n) + 2i(m+n)\sqrt{1-n^2} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Dus is $r \cos a = 2n(m+n)$ en $r \sin a = 2(m+n)\sqrt{1-n^2}$

$$\text{en } r = 2(m+n), \quad \cos a = n, \quad \sin a = \sqrt{1-n^2},$$

$$\sin \frac{1}{2} a = + \sqrt{\frac{1-n}{2}} \quad \cos \frac{1}{2} a = + \sqrt{\frac{1+n}{2}}$$

$$r^{1/2} \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{(m+n)(1+n)} \quad r^{1/2} \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{(m+n)(1-n)}$$

$$a = 1 + mn, \quad b = m \sqrt{1-n^2}, \quad c = m+n, \quad d = \sqrt{1-n^2}$$

en na substitutie vindt men

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma - b g t g \frac{m \sqrt{1-n^2} + \sqrt{(m+n)(1-n)}}{1+mn + \sqrt{(m+n)(1+n)}} + b g t g \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{m+n}} \right\}.$$

Voor $\psi = 0$ is $m = 1$

$$\text{en } V = \frac{C\gamma}{\pi}.$$

Zij $\gamma > \frac{\pi}{2}$ (fig. 4), dan zal voor eenig punt van 't segment ψ veranderen van $\pi - \gamma$ tot π . Dan is $\cos \psi$ negatief van $\psi = \frac{\pi}{2}$ tot $\psi = \pi$ en positief van $\psi = \pi - \gamma$ tot $\psi = \frac{\pi}{2}$.

In 't eerste geval stellen we $\cos \psi = -m$, terwijl m van 0 tot 1 verandert, en $\cos \gamma = -n$.

In $1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma}$ is $2 \sin \gamma (\cos \psi + \cos \gamma)$ de coëfficiënt van i . Daar deze negatief is, stellen we

$$1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} = r(\cos a - i \sin a)$$

We vinden dan, na bepaling van de waarden van a, b, c, d , $r^{1/2} \cos \frac{1}{2} a$ en $r^{1/2} \sin \frac{1}{2} a$, en na substitutie in M en N,

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + b g t g \frac{m \sqrt{1-n^2} + \sqrt{(m+n)(1-n)}}{1+mn + \sqrt{(m+n)(1+n)}} + b g t g \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{m+n}} \right\}$$

$$= \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + b g t g \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \right\} = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma + \pi - \gamma \right\} = C, \text{ daar}$$

$n = -\cos \gamma = \cos(\pi - \gamma)$ is.

Deze waarde van V geldt voor alle punten van den halven bol $f c e$. Voor dat gedeelte, dat door de cirkels ab en ef is begrensd, is $\cos \psi$ positief. Stellen we nu $\cos \psi = m$ en $\cos \gamma = -n$, dan is hier $m < n$.

De coëfficiënt $2 \sin \gamma (\cos \psi + \cos \gamma)$ is dan gelijk $2(m-n)\sqrt{1-n^2}$ en dus negatief. We hebben dus weer

$$1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} = r(\cos a - i \sin a), \text{ en vinden dan weer}$$

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \gamma - bg \operatorname{tg} \frac{m\sqrt{1-n^2} - \sqrt{(n-m)(1-n)}}{1-mn + \sqrt{(n-m)(1+n)}} + bg \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{n-m}} \right\} = C.$$

Voor een punt van 't segment bda is, als men weer $\cos \psi = m$ en $\cos \gamma = -n$ stelt, $m > n$.

Dan is $2 \sin \gamma (\cos \psi + \cos \gamma) = 2(m-n)\sqrt{1-n^2}$ en dus positief.

Als boven vindt men dan, als men

$$1 + 2e^{i\gamma} \cos \psi + e^{2i\gamma} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ stelt,}$$

$$r = 2(m-n), \quad \cos \alpha = -n, \quad \sin \alpha = \sqrt{1-n^2},$$

$$r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(m-n)(1-n)}, \quad r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(m-n)(1+n)}$$

$$M = \frac{m\sqrt{1-n^2} + \sqrt{(m-n)(1+n)}}{1-mn + \sqrt{(m-n)(1-n)}}, \quad N = \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{m-n}}$$

en voor $\psi = 0$ vindt men dan

$$M = N \quad \text{en dus} \quad V = \frac{C\gamma}{\pi}.$$

Zij $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (fig. 5). Voor een punt op 't segment acb is $\cos \psi$ negatief. Stel $\cos \psi = -m$, dan is

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + bg \operatorname{tg} \sqrt{m} + bg \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{m}} \right\} = C.$$

Voor een punt op 't segment adb is $\cos \psi$ positief.

Stel $\cos \psi = m$, dan is

$$V = \frac{C}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} \sqrt{m} + bg \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{m}} \right\} = \frac{C}{\pi} \left\{ \pi - 2bg \operatorname{tg} \sqrt{m} \right\}.$$

Voor $\psi = 0$ is $V = \frac{C}{2}$, overeenkomende met de algemeene waarde van V in het punt d , nl. $\frac{C\gamma}{\pi}$, als men hierin $\gamma = \frac{\pi}{2}$ stelt.

Voor $\psi = \frac{\pi}{2}$, d. i. $m = 0$ vindt men uit de beide laatste waarden voor de potentiaalfunctie

$$V = C,$$

d. i. de waarde der functie in een punt van den rand van 't segment.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de algemeene waarde voor V gevonden, als $\rho = 1$ is, eene continue functie is van ψ voor het gedeelte van 't bolvormig oppervlak, dat niet tot het segment behoort, en die voor een punt van 't segment V de constante waarde C heeft, waarvan men is uitgegaan.

We zullen nu de formules (6) en (7) herleiden voor 't geval, dat het segment het halve oppervlak van den bol bevat, zoodat $\gamma = \frac{\pi}{2}$ is.

Voor waarden van ψ van 0 tot $\frac{\pi}{2}$ stellen we $\cos \psi = m$, waarin m dus een positief getal.

Is dan $1 - \rho^2 + 2\rho m i = r(\cos a + i \sin a)$

dan is $r = +\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2}$

$$\cos a = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2}} \quad \sin a = \frac{2\rho m}{\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2}}$$

zoodat $\frac{1}{2}a$ in het eerste quadrant kan genomen worden.

We vinden dan $r^{1/2} \cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}} \{ \sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2} + 1 - \rho^2 \} = p$

en $r^{1/2} \sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}} \{ \sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2} - 1 + \rho^2 \} = q$

en $\sqrt{1 - \rho^2 + 2\rho m i} = r^{1/2} (\cos \frac{1}{2}a + i \sin \frac{1}{2}a) = p + iq$.

Verder is $a = 1$, $b = \rho m$, $c = m$, $d = \rho$,

en dus $M = \frac{\rho m + q}{1 + p}$ en $N = \frac{\rho + q}{m + p}$,

en dus $V = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} \frac{\rho m + q}{1 + p} + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} \frac{\rho + q}{m + p} \right]$.

Deze uitdrukking is nog voor vereenvoudiging vatbaar.

Daar $pq = \rho m$ is, zoo is

$$\frac{\rho m + q}{1 + p} = \frac{pq + q}{1 + p} = q$$

$$\text{en } \frac{\rho + q}{m + p} = \frac{\frac{pq}{m} + q}{m + p} = \frac{pq + mq}{m(m + p)} = \frac{q}{m},$$

$$\text{en dus is } V = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \dots (9)$$

Voor waarden van ψ van $\frac{\pi}{2}$ tot π stellen we $\cos \psi = -m$, zoodat m weder een positief getal voorstelt.

We stellen dus $1 - \rho^2 - 2\rho m i = r(\cos a - i \sin a)$,

zoodat we bij het trekken van den vierkantswortel als boven vinden

$$r^{1/2} \cos \frac{1}{2}a = p \quad r^{1/2} \sin \frac{1}{2}a = q$$

en $\sqrt{1 - \rho^2 - 2\rho m i} = p - iq$.

Verder is $a = 1$, $b = -\rho m$, $c = -m$, $d = \rho$,

en dus $M = \frac{-\rho m - q}{1 + p}$ en $N = \frac{\rho - q}{-m + p}$,

$$\text{en dus } V = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + bg \operatorname{tg} \frac{\rho m + q}{1 + p} + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} \frac{\rho - q}{-m + p} \right].$$

Even als boven vindt men weer

$$V = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \dots \dots (10)$$

Dat voor positieve en negatieve waarden van $\cos \psi$ de derde term van het tweede lid in de vergelijkingen (9) en (10) onveranderd blijft, volgt ook uit de coëfficiënten P_n in de reeks

$$\sum \frac{\sin(n+1)\gamma}{n+1} (-\rho)^n P_n(\cos \psi)$$

daar n hier voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ slechts evene waarden kan hebben, en

$$P_{2m}(x) = P_{2m}(-x) \text{ is.}$$

Eenzoo is de tweede term van het tweede lid in beide vergelijkingen van verschillend teeken voor positieve en negatieve waarden van $\cos \psi$, omdat de reeks, door dien term voorgesteld, slechts de termen met P_n , als n oneven is, bevat, en

$$P_{2m+1}(x) = -P_{2m+1}(-x) \text{ is.}$$

De formule (6) verkrijgt dus den vorm (9) of (10) naar gelang $\psi < \text{ of } > \frac{\pi}{2}$ is.

Uit deze beide formules vindt men dergelijke uitdrukkingen voor (7) als men ze met ρ vermenigvuldigt en dan $\rho = \frac{r}{d}$ is. ($r < d$).

Voor $\rho = 1$ gaan dus beide stelsels waarden in elkander over. Ook gaan voor $\psi = \frac{\pi}{2}$ de uitdrukkingen (9) en (10) in denzelfden vorm over, namelijk

$$V = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\rho} bg \operatorname{tg} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] = \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\rho} bg \sin \rho \right]$$

door $\frac{q}{m}$ te vervangen door $\frac{\rho}{p}$ en dan $m = 0$ te stellen.

Voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ vinden we dus uit (3) en (4)

$$V = C \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots (9) \\ 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$$\text{en } V = \rho C \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots (9a) \end{array} \right\}$$

en

$$V = C \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots (10) \\ \frac{\pi}{2} < \psi < \pi \end{array} \right\}$$

$$\text{en } V = \rho C \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots (10a) \end{array} \right\}$$

De beide eerste formules gaan weer over in de algemeene waarden voor de potentiaalfunctie van 't geladen segment in een punt der as van het middelpunt des bols gerekend naar die zijde, die van 't segment is afgekeerd, nl. de formules (1) en (2), waarvan we zijn uitgegaan, als men in deze $\gamma = \frac{\pi}{2}$ stelt. Stelt men namelijk in de for-

mules, die voor waarden van ψ gelden, zoodanig, dat $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ is, $\phi = 0$, dus $m = 1$, dan vindt men

$$V = C \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \, tg \, \rho \right]$$

$$\text{en } V = \rho C \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \, tg \, \rho \right].$$

Stelt men in (1) $\gamma = \frac{\pi}{2}$, zoo vindt men

$$\begin{aligned} U &= \frac{C}{\pi} \left[\frac{1+\rho}{\rho} \frac{\pi}{4} - \frac{1-\rho}{\rho} bg \, tg \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \right] \\ &= \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4\rho} - \frac{1-\rho}{\rho} bg \, tg \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \right] \\ &= \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1-\rho}{\rho} \right] \frac{\pi}{4} - bg \, tg \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \left\{ \right\} \\ &= \frac{C}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1-\rho}{\rho} bg \, tg \, \rho \right] = C \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \, tg \, \rho \right] \end{aligned}$$

en (2) wordt nu

$$U = \rho C \left[\frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \, tg \, \rho \right].$$

DERDE HOOFDSTUK.

I.

INVERSIE VAN 'T VLAKE VAN EEN CIRKEL TEN OPZICHTE VAN EEN PUNT
BUITEN DEN CIRKEL ALS INVERSIE-MIDDELPUNT.

Zij AB (fig. 6) de doorsnede van den cirkel met 't xy -vlak, loodrecht op de x -as, terwijl het middelpunt M in dat vlak ligt. De cirkel ligt dus symmetrisch ten opzichte van 't xy -vlak. De z -as wordt in P, 't inversie-middelpunt, loodrecht op de beide andere assen gedacht.

Stel $PG = a$, $AM = BM = r$, de straal van den cirkel. Zijn x , y , z de rechthoekige coördinaten en ρ , φ en ω de polaire coördinaten, ρ de voerstraal, φ de hoek, dien deze met de x -as maakt, en ω de hoek, dien het vlak, gaande door den voerstraal en de x -as met 't vlak xy maakt, dan wordt het verband dezer coördinaten voorgesteld door

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \cos \omega \quad z = \rho \sin \varphi \sin \omega$$

$$\text{of } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{z}{y} \quad \dots (1)$$

De vergelijking van 't vlak van den cirkel AB is

$$\rho = a \sec \varphi \quad \dots \dots \dots (2)$$

Is R de inversie straal, dan heeft men, na inversie,

$$\frac{R^2}{\rho} = a \sec \varphi \quad \text{of} \quad \rho = \frac{R^2}{a} \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (3)$$

Deze vergelijking stelt een bol voor, waarvan de straal r' afhangt van R en a , volgens de vergelijking

$$r' = \frac{R^2}{2a} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Neemt men $\varphi = \frac{\pi}{2}$, zoo is $\rho = 0$, waaruit blijkt, dat het bolvormig oppervlak door den oorsprong gaat.

Voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ volgt echter uit (2)

$$\rho = \infty$$

d. i. de cirkel gaat dan over in een vlak, dat zich naar alle zijden oneindig ver uitstrekt. Wordt dit laatste echter niet bedoeld, dan blijkt hieruit, dat dat gedeelte van den bol (3), dat door inversie van den cirkel is verkregen, niet door den oorsprong kan gaan.

Door de substitutie van (1) in (3) verkrijgt men voor de vergelijking van den bol O'P in rechthoekige coördinaten

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2r'x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Terwijl de omtrek van den cirkel AB kan beschouwd worden als de doorsnede van 't vlak (2) met een bol zoodanig gelegen, dat de oorsprong van coördinaten in 't oppervlak van dien bol is gelegen, zoo kan men den cirkel, die 't bolvormig segment begrenst, beschouwen als de doorsnede van 't bolvormig oppervlak (3) en een plat vlak. Dat platte vlak moet dan door inversie verkregen worden uit 't bolvormig oppervlak, dat door P en den omtrek des cirkels AB gaat. We hebben dus eerst de vergelijking van dit bolvormig oppervlak te vinden. Dat vlak gaat door den oorsprong P en dan is, voor

$$x = 0 \quad \text{ook} \quad y = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Het gaat tevens door den cirkelomtrek AB, die bepaald is door de vergelijkingen

$$x = a, \quad (y - b)^2 + z^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als de coördinaten van 't middelpunt M zijn:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = 0.$$

Is dus

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

de gezochte vergelijking, dan geeft (6) de voorwaarde

$$\delta = 0.$$

De substitutie $x = a$ moet volgens (7) de komende vergelijking identisch maken met de tweede vergelijking (7).

$$\text{Dit geeft } \beta = -2b, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = \frac{b^2 - a^2 - r^2}{a}.$$

Het bolvormig oppervlak (8) wordt dus voorgesteld door

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{b^2 - a^2 - r^2}{a} x - 2by = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

of in polaire coördinaten

$$\rho^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 - r^2}{a} \cos \varphi - 2b \sin \varphi \cos \omega \right) \rho = 0 \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\text{of } \rho = \frac{a^2 + r^2 - b^2}{a} \cos \varphi + 2b \sin \varphi \cos \omega, \text{ als we den wortel } \rho = 0$$

verwaarloozen, die aanwijst dat het bolvormig oppervlak door P gaat.

We vervangen nu ρ door $\frac{R^2}{\rho}$ en vinden dan

$$\left(\frac{b^2 - a^2 - r^2}{a} \cos \varphi - 2b \sin \varphi \cos \omega \right) \rho + R^2 = 0$$

of in rechthoekige coördinaten

$$\frac{a^2 + r^2 - b^2}{a} x + 2by - R^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

als de vergelijking van een plat vlak, dat loodrecht staat op 't xy -vlak en van 't bolvormig oppervlak O'P een segment afsnijdt, dat door inversie van den cirkel AB wordt verkregen.

De stand van de as van 't segment, die in 't xy -vlak ligt, wordt bepaald door den hoek, dien deze as, gericht van 't middelpunt des bols naar 't middelpunt van 't segment, met het positieve gedeelte der x -as maakt. Noemen we den hoek, dien deze beide richtingen met elkander maken, β , dan volgt uit (11)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2ab}{a^2 + r^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Is $b = 0$ en $a^2 + r^2 - b^2$ positief, dan is $\beta = 0$.

„ b positief en $a^2 + r^2 - b^2$ positief, dan ligt β tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$

„ b positief en $a^2 + r^2 - b^2 = 0$, dan is $\beta = \frac{\pi}{2}$

„ b positief en $a^2 + r^2 - b^2$ negatief, dan ligt β tusschen $\frac{\pi}{2}$ en π . ¹⁾

¹⁾ Men kan ook op de volgende wijze aantoonen, dat deze waarden van $a^2 + r^2 - b^2$ en β bij elkander behooren. Daar de cirkel en 't segment ten opzichte van 't xy -vlak symmetrisch liggen, zoo is de stand van beiden bepaald door dien van de rechte lijn AB en van den cirkelboog A'B'. (fig. 7).

Daar $AB = 2r$, zoo is $r = \frac{1}{2} (AD + BD)$ en $b = \frac{1}{2} (AD - BD)$.

Dus is $a^2 + r^2 - b^2 = a^2 - AD \cdot BD$.

Zij $\angle E'PD = 45^\circ$, $\angle APE = \delta$, $\angle EPB = \varepsilon$, de beide laatste hoeken aan weerszijden van PE gelegen, dan is

$$AD = a \operatorname{tg} (45 + \delta) \quad \text{en} \quad BD = a \operatorname{tg} (45 - \varepsilon)$$

en dus $a^2 + r^2 - b^2 = a^2 [1 - \operatorname{tg} (45 + \delta) \operatorname{tg} (45 - \varepsilon)] = a^2 \left[1 - \frac{\operatorname{tg} (45 + \delta)}{\operatorname{tg} (45 + \varepsilon)} \right]$.

Naar gelang nu $a^2 + r^2 - b^2 <, =$ of > 0 is, is $\delta >, =$ of $< \varepsilon$, en dientengevolge $\beta >, =$ of $< \frac{\pi}{2}$, daar β den hoek voorstelt, dien de loodlijn uit 't middelpunt O' des cirkels op A'B' neergelaten, met PD maakt.

In al deze gevallen is het segment ontstaan door inversie van een cirkel. Deze kan echter overgaan in een vlak, dat aan de eene zijde begrensd is door een rechte lijn, loodrecht op 't xy -vlak, en dat zich overigens naar alle zijden tot in 't oneindige uitstrekt. Dan zal de oorsprong van coördinaten juist op den rand van 't daarbij behorende segment zijn gelegen. De gevallen voor negatieve waarden van b behoeven niet te worden nagegaan, daar men deze weer, door de richting der y -as om te keeren, kan brengen tot de bovenvermelde.

Stelt men $\angle A'O'N' = B'O'N' = \gamma$ dan is

$$\cos \gamma = \frac{O'N'}{O'A'}$$

Daar de lengte der loodlijn uit een punt (x', y') op de lijn $Ax + By + C = 0$ neergelaten, voorgesteld wordt door

$$\pm \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

en, voor het punt O' , $x' = \frac{R^2}{2a}$ (zie 4), $y' = 0$,

en voor de lijn $A'B'$ $A = \frac{a^2 + r^2 - b^2}{a}$, $B = 2b$, $C = -R^2$ is, volgens (11),

$$\text{zoo is } ON' = \pm \frac{R^2(r^2 - a^2 - b^2)}{2a \sqrt{((a^2 + r^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2)}}$$

$$\text{en dus } \cos \gamma = \pm \frac{r^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{((a^2 + r^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2)}}$$

Om te beslissen, welk teeken hier moet genomen worden, hebben we te letten op den hoek APB . We hebben $\angle APB = \angle A'O'N' = \gamma$.

Daar $PM = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $AM = BM = r$ is, zoo is, als $\gamma < 90$ is, $PM > AM$ of $a^2 + b^2 > r^2$,

$$\text{" } \gamma = 90 \text{ " } a^2 + b^2 = r^2,$$

$$\text{" } \gamma > 90 \text{ " } a^2 + b^2 < r^2.$$

Deze waarden van γ vereischen resp. $\cos \gamma$ positief, nul, en negatief, en dit wordt volgens bovenstaande formule voor $\cos \gamma$ verkregen, als men het negatieve teeken neemt, want in dat geval wordt de teller dier breuk resp. positief, nul en negatief.

Daar γ tusschen 0 en π ligt, heeft $\text{tg } \gamma$ hetzelfde teeken als $\cos \gamma$, en we vinden dan γ eenvoudiger bepaald door de vergelijking

$$\text{tg } \gamma = \frac{2ar}{a^2 + b^2 - r^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

Is een punt Q door zijne rechthoekige coördinaten x, y, z gegeven, dan vindt men voor de coördinaten x', y', z' van het door inversie verkregen punt Q'

$$x' = \frac{xR^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad y' = \frac{yR^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad z' = \frac{zR^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cdot (14)$$

Verder is $O'Q' = d' = \sqrt{(x' - r')^2 + y'^2 + z'^2}$
 terwijl $O'Q'$ met de drie assen hoeken maakt, wier cosinussen voor-
 gesteld worden door

$$\frac{x' - r'}{d'}, \quad \frac{y'}{d'}, \quad \frac{z'}{d'}$$

Stellen we $\angle Q'O'q = \psi$, zoo wordt deze hoek bepaald door de
 richting, die $O'Q'$ en $O'D'$ van O' uit getrokken met elkander maken.
 De hoeken, die $O'D'$ met de assen maakt, zijn $180 + \beta$, $90 + \beta$ en
 90° , en dus vinden we

$$\cos \psi = -\frac{x' - r'}{d'} \cos \beta - \frac{y'}{d'} \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Daar we in 't vervolg voornamelijk de waarde van $\frac{O'Q'}{OP} = \frac{d'}{r'}$
 (fig. 6), of het omgekeerde hiervan, en die van $\cos \angle Q'O'D' = \cos \psi$
 in de coördinaten van Q moeten uitdrukken, zoo heeft men, als
 Q binnen den bol en dus het punt Q aan de andere zijde van de
 schijf AB ligt, als het punt P ,

$$\frac{d'}{r'} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{t'}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wanneer $PG = GO$ is, daar uit de vergelijking $PQ \times PQ' = PO \times$
 PO' volgt $\triangle PQO \sim \triangle PQ'O'$. Ligt Q' buiten den bol, dan hebben
 we eveneens

$$\frac{r'}{d'} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{t}{t'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Tevens is, voor punten in het vlak, dat door PG en 't middelpunt
 M van den cirkel gaat,

$$\begin{aligned} \angle PQO &= \angle PO'Q' = \psi - \beta \\ \text{of } \psi &= \beta + \angle PQO \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18) \end{aligned}$$

Zijn de stand en de afmetingen van den cirkel AB en van de pun-
 ten P en Q gegeven door de grootheden a , b , r , x , y , z , of t , t'
 en $\angle PQO$ (als deze hoek op bovenvermelde wijze is bepaald, voor
 't geval dat het vlak, dat P en Q bevat, door M gaat) dan zijn het
 door inversie hieruit verkregen bolvormig segment $A'B'$ en 't punt Q'
 bepaald door de formules (4), (12), (13), (14) en (15) of (16), (17)
 en (18). Wel komt in eenige van dezen nog de inversiestraal R
 voor, maar deze valt, zooals later zal blijken, weg, wanneer de
 potentiaalfunctie van den afgeleiden geïnfleueerden cirkel in een
 punt Q bepaald wordt uit die van 't geïsoleerd geladen bolvormig
 segment $A'B'$ in 't punt Q' .

II.

BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE EENER NAAR DE AARDE AFGELEIDE
CIRKELVORMIGE SCHIJF, GEÏNFLUENCEERD DOOR EENE IN EEN PUNT
BUITEN DE SCHIJF GECONCENTREERDE ELECTRISCHE MASSA, IN
EEN WILLEKEURIG PUNT.

Zooals boven is vermeld, kent men de dichtheid eener electrische lading op een geïsoleerd geladen segment A'B' eener bolvormige schil. Wordt dat segment geïnverteerd ten opzichte van een punt P op 't oppervlak van den bol, waartoe dat segment behoort, dan verkrijgt men een cirkel AB. Denkt men zich de schijf zóodanig met electriciteit geladen, dat de dichtheid e in een punt S staat tot de dichtheid e' in 't overeenkomstige punt S' van 't segment, als PS tot R (de inversiestraal) of als R tot PS' (daar $R^2 = PS \times PS'$ is), dan zullen de potentiaalfunctien w en v van die massa's resp. in Q en Q', die elkan- ders beeldpunten zijn, voorgesteld worden door

$$w = \frac{e}{QS} \quad \text{en} \quad v = \frac{e'}{Q'S'}$$

en deze functien staan, zooals zal blijken, in een zeer eenvoudig verband met elkander.

Daar $PS \times PS' = PQ \times PQ'$ is, is $\triangle PQS \sim \triangle PQ'S'$.

Dus heeft men $QS : Q'S' = PS : PQ = PS : PQ' . PQ = PS : PQ : R^2$.

Verder is aangenomen $e : e' = PS : R$.

Uit de beide laatste evenredigheden en de waarden voor v en w volgt

$$w : v = R : PQ.$$

Deze verhouding hangt dus alleen af van den inversiestraal R en den afstand PQ. Voor de electrische massa in twee andere overeenkomstige punten van schijf en segment zou men dus dezelfde verhouding verkrijgen, als men aanneemt dat de dichtheden overal op de bovenvermelde wijze van elkander afhangen. We vinden dus, als we dit laatste aannemen en W en V de potentiaalfunctien van de schijf en van 't segment, resp. in Q en Q', noemen,

$$W = \frac{V \times R}{PQ}$$

Lag het punt Q op de schijf zelve, dan zou Q' ook op 't segment liggen, en voor de potentiaalfunctie der op bovenstaande wijze geladen schijf in een harer punten vindt men, als men C de constante waarde der potentiaalfunctie van 't segment in een harer punten noemt,

$$W = \frac{C \times R}{PQ}.$$

Denkt men zich nu in P eene massa electriciteit geconcentreerd, voorgesteld door $-CR$, dan zal de potentiaalfunctie van die massa, gevoegd bij die van de lading der schijf in een punt der schijf zelve, nul zijn. Dezelfde waarde dier functie verkrijgt men als de schijf naar de aarde was afgeleid, terwijl in P eene massa electriciteit $-CR$ er influenceerend op werkte. De aangenomen dichtheid der electriciteit op de schijf is dus dezelfde als die, welke op de aldus geïfluenceerde en naar de aarde afgeleide schijf zou ontstaan.

Ligt dus 't punt Q buiten de schijf, dan is de potentiaalfunctie van de door influentie op de schijf verkregen lading

$$\frac{V \times R}{PQ}$$

en die der massa $-CR$ in P geconcentreerd

$$\frac{-C \times R}{PQ}.$$

Noemen we X de totale potentiaalfunctie, dan is, als we $-CR = M$ stellen en dus $R = -\frac{M}{C}$ is,

$$X = \frac{M}{PQ} \left(1 - \frac{V}{C} \right) (19)$$

Daar de totale potentiaalfunctie gelijk is aan de som van de potentiaalfunctien van 't electrisch punt en van die der afgeleide schijf, zoo is dus de laatste gelijk aan die eener massa $-\frac{MV}{C}$ geconcentreerd in 't punt, waarin tevens de massa M is geplaatst.

Substitueert men hierin voor V de vroeger verkregen waarden (zie Hoofdst. II, 9, 9a, 10, 10a), zoo vindt men de gezochte potentiaalfunctie, die nu alleen afhangt van de grootheden, die den stand der schijf AB ten opzichte van 't influenceerend punt P aangeven en die de massa electriciteit bepalen in P geconcentreerd.

Men vindt dan, als men $PQ = t$ stelt,

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q - \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} . . . (20) \\ 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right\} \right] \left. \begin{array}{l} . . . (20a) \end{array} \right\}$$

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q - \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right] \left. \begin{array}{l} . . . (21) \\ \frac{\pi}{2} < \psi < \pi \end{array} \right\}$$

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} bg \operatorname{tg} q + \frac{1}{\pi \rho} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \right\} \right] \left. \begin{array}{l} . . . (21a) \end{array} \right\}$$

Voor $m = 0$ gaan (20) en (21) over in

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \rho} bg \sin \rho \right]$$

voor de punten van den boog AO,
en (20a) en (21a) in

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\rho} bg \sin \rho \right\} \right]$$

voor de punten van den boog AP.

Voor $m=1$ gaan de vier uitdrukkingen voor X in die orde over in de volgende

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right]$$

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right\} \right]$$

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1+\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right]$$

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1+\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right\} \right]$$

voor de punten in de as der schijf, en wel voor die, resp. gelegen in OX, X'P, OC en PC.

Uit de eerste en de derde formule volgt voor $\rho=0$ en $t=2$, de waarde van X in 't punt O; uit de tweede en de vierde voor $\rho=0$ en $t=0$ die in 't punt P n.l. $X=\infty$.

Neemt men $\rho=1$, zoo geven de formules (20) en (20a)

$$X = \frac{2M}{\pi t} bg \operatorname{tg} \sqrt{m} \dots \dots \dots (22)$$

terwijl de beide overige waarden van X gelijk nul worden, onafhankelijk van de waarde van m . Hieruit blijkt dus, dat de waarde der potentiaalfunctie op de afgeleide schijf, waarop de waarde $\psi < \pi$ en $> \frac{\pi}{2}$ betrekking heeft, *nul* is. In 't vlak der schijf zal op oneindigen

afstand de waarde der potentiaalfunctie eveneens *nul* zijn, omdat volgens (22) $X=0$ is voor $t=\infty$. Van de schijf tot op oneindigen afstand verandert de potentiaalfunctie van 0 tot 0, zoodat er een maximum waarde moet bestaan, daar die functie niet negatief kan worden.

We zullen voortaan aannemen, dat het influenceerend electrisch punt gelegen is in de as der schijf, op een afstand van 't middelpunt gelijk aan den straal der schijf. Voor dit geval wordt in fig. 6 PG = AM en MG = 0. Dit geval is voorgesteld in fig. 9. We stellen verder PC = AC = 1 en nemen aan, dat in P de eenheid van positieve electriciteit is geconcentreerd.

Bepaalt men dan de punten in 't vlak der schijf door den afstand tot het middelpunt en stelt men dien afstand voor door τ , dan vindt men op de volgende wijze de waarde van τ , waarvoor X een maximum waarde verkrijgt.

Hier is de hoek, dien de voerstraal t naar een zoodanig punt met 't vlak der schijf maakt, $\frac{1}{2} \psi$ en dus

$$t = \frac{PC}{\sin \frac{1}{2} \psi},$$

waarin $PC = 1$ en $\sin \frac{1}{2} \psi = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \psi)} = \sqrt{\frac{1-m}{2}}$ moet worden gesteld.

Daar dus $t = \sqrt{\frac{2}{1-m}}$ is, heeft men

$$X = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1-m} \operatorname{bg} \operatorname{tg} \sqrt{m}$$

Stelt men $\sqrt{m} = n$, zoo is

$$X = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1-n^2} \operatorname{bg} \operatorname{tg} n$$

$$\text{en } \frac{dX}{dn} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\sqrt{1-n^2}}{1+n^2} - \frac{n \operatorname{bg} \operatorname{tg} n}{\sqrt{1-n^2}} \right]$$

Daar m tusschen 0 en 1 ligt, heeft men ook

$$0 < n < 1.$$

Stelt men nu $\frac{\sqrt{1-n^2}}{1+n^2} - \frac{n \operatorname{bg} \operatorname{tg} n}{\sqrt{1-n^2}} = 0$, zoo vindt men

$$0,665 < n < 0,666$$

en daar $\tau^2 = t^2 - 1 = \frac{1+m}{1-m} = \frac{1+n^2}{1-n^2}$ is, zoo is

$$1,606 < \tau < 1,611.$$

Voor $\tau = 1,61$ vindt men tot in 4 decimalen $X = 0,1972$. ¹⁾

Onderzoekt men de waarde der potentiaalfunctie in de as der schijf, dan vindt men, dat zij in C (fig. 9) nul, in P oneindig groot, en in een punt aan weerszijden van C op oneindigen afstand nul is, zooals boven is opgemerkt. Daar verder de waarde dier functie positief is, zal er een maximumwaarde moeten bestaan aan die zijde van de schijf, die van P is afgekeerd. Van C tot P groeit de functie aan van nul tot oneindig groot. Van P in dezelfde richting langs de as neemt ze weer af van oneindig groot tot nul.

Om nu het punt der as te bepalen, waarin de potentiaalfunctie de bovenvermelde maximumwaarde bezit, dienen we te onderzoeken voor welke waarden van ρ de uitdrukkingen voor X volgens (20) en (21) maxima worden.

¹⁾ Bij de constructie van niveaulijnen blijkt, dat die, waarop de waarde van X bij benadering 0,2 bedraagt, de lijn, die 't verlengde uitmaakt van de middellijn der schijf bijna aanraakt op een afstand van 't middelpunt der schijf, die vrij wel met de voor τ gevondene overeenkomt. (Zie fig. 10)

Nu geldt (20) voor dat gedeelte der as, dat in 't verlengde van CO is gelegen, tot op oneindigen afstand. Stelt men in deze uitdrukking

$$m = 1 \quad \text{en} \quad \rho = \frac{t'}{t},$$

terwijl $t' = t - 2$, en dus $t = \frac{2}{1 - \rho}$ is, zoo vindt men

$$X = \frac{1 - \rho}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1 - \rho}{\pi \rho} \operatorname{bg} \operatorname{tg} \rho \right]$$

Voor een punt op oneindigen afstand van O gelegen, is $\lim. \rho = 1$, waaruit volgt

$$\lim. X = 0.$$

Voor $\rho = 0$ vindt men bij benadering $X = 0,091$, welke waarde voor 't punt O geldt. Differentieert men X ten opzichte van ρ , zoo vindt men

$$\frac{dX}{d\rho} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{(1 - \rho)^2}{\rho(1 + \rho^2)} + \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \operatorname{bg} \operatorname{tg} \rho \right]$$

Terwijl $\rho > 0$ en < 1 is, vindt men, na substitutie van daartusschen gelegen waarden voor ρ in de bovenstaande afgeleide functie, dat deze positief wordt voor $\rho = 0,2$, en negatief voor $\rho = 0,3$. Bij nader onderzoek blijkt, dat de afgeleide functie nul wordt als

$$0,24 < \rho < 0,25$$

$$\text{en dus } 2,63 < t < 2,67 \text{ is.}$$

Voor eene waarde van t tusschen deze grenzen verkrijgt dus X eene grootste waarde.

De uitdrukking voor X, volgens (21) geldt voor het gedeelte OC van de as. Gaat men, als boven t vervangen door eene functie van ρ , en zoekt men dan de eerste afgeleide functie, dan vindt men, dat deze voor waarden van ρ , van 0 tot 1, altijd negatief is. Er bestaat dus voor die waarden van ρ geen maximum van X, voor dit gedeelte der as.

VIERDE HOOFDSTUK.

I.

BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE EENER GEÏSOLEERD GELADEN CIRKELVORMIGE SCHIJF IN EEN PUNT VAN DE AS DER SCHIJF.

Zij AB (fig. 8) de doorsnede van de schijf met een vlak gaande door de as XY, C het middelpunt, P een punt der schijf en Q' een punt van de as, waarin de gezochte potentiaalfunctie moet worden bepaald.

Is $AC = a$ de straal der schijf, $PC = r$ en $CQ' = d$, zoo vindt men, als σ de dichtheid der electriciteit in P op de beide oppervlakken der schijf samen voorstelt, voor de gezochte potentiaalfunctie U

$$U = \int \frac{\sigma ds}{\sqrt{(d^2 + r^2)}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

als ds een vlakke-element der schijf voorstelt en men de integratie uitstrekt over 't eene oppervlak der schijf.

Ten einde σ te bepalen, gaat men uit van de dichtheid der lading op een geïsoleerde geleidende ellipsoïde, laat dan de eene as afnemen tot nul, waardoor men de dichtheid der lading vindt op eene geïsoleerde elliptische plaat en stelt dan de beide overige assen aan elkander gelijk, waardoor men de dichtheid op de cirkelvormige schijf vindt. Op die wijze vindt men

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a} \frac{1}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

voor het punt P, als Q de totale lading op de schijf voorstelt. Substitueert men nu de waarde voor σ uit (2) in (1), zoo vindt men, als φ den hoek voorstelt, dien de voerstraal CP met een vaste as door C in 't vlak der schijf gelegen, maakt,

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{Q}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 + d^2)}} \\
 &= \frac{Q}{2a} \left[\frac{\pi}{2} + bg \operatorname{tg} \frac{a^2 - d^2}{2ad} \right] \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

Daar de schijf aan weerszijden dezelfde lading bezit, moet op 't verlengde der as op gelijken afstand van 't middelpunt als waarop het punt Q' ligt, de potentiaalfunctie diezelfde waarde hebben.

Is $d < a$ en stelt men $\frac{d}{a} = \rho$, zoo is

$$U = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} \rho \right] \dots \dots \dots (4)$$

Is $d > a$ en stelt men $\frac{a}{d} = \rho$, zoo is

$$U = \frac{Q}{a} bg \operatorname{tg} \rho \dots \dots \dots (5)$$

Voor $d = a$, dus $\rho = 1$ verkrijgt men uit beide waarden

$$U = \frac{Q\pi}{4a} \dots \dots \dots (6)$$

Voor $d = 0$ volgt uit (4)

$$U = \frac{Q\pi}{2a}, \text{ de potentiaalfunctie in C} \dots \dots \dots (7)$$

Voor $d = \infty$ volgt uit (5), daar dan $\rho = 0$ wordt,

$$U = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Ontwikkelt men $bg \operatorname{tg} \rho$ in eene reeks voortlopende volgens de opklimmende machten van ρ , zoo verkrijgt men

voor $d < a$

$$U = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - \rho + \frac{1}{3} \rho^3 - \frac{1}{5} \rho^5 + \frac{1}{7} \rho^7 - \dots \right] \quad 0 \leq \rho \leq +1. \quad (9)$$

en voor $d > a$

$$U = \frac{Q}{a} \left[\rho - \frac{1}{3} \rho^3 + \frac{1}{5} \rho^5 - \frac{1}{7} \rho^7 + \dots \right] \quad 0 \leq \rho \leq 1 \dots \dots (10)$$

II.

BEPALING DER POTENTIAALFUNCTIE V IN EEN WILLEKEURIG PUNT.

Zij $\angle XCQ = \beta$ en $CQ = d$ (fig. 8)

Wanneer we nu aan de termen der reeksen (9) en (10) op de vroeger vermelde wijze de kogelfunctien P als coëfficiënten toevoegen,

dan vinden we voor de potentiaalfunctie V in een punt Q , waarvoor $d < a$ is,

$$V = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - P_1 \rho + \frac{1}{3} P_3 \rho^3 - \frac{1}{5} P_5 \rho^5 + \frac{1}{7} P_7 \rho^7 - \dots \right] = \frac{Q}{a} S. \quad (11)$$

en, zoo $d > a$ is,

$$V = \frac{Q}{a} \left[\rho - \frac{1}{3} P_2 \rho^3 + \frac{1}{5} P_4 \rho^5 - \frac{1}{7} P_6 \rho^7 + \dots \right] = \frac{Q}{a} S' \dots \quad (12)$$

waarin S en S' de tusschen haakjes geplaatste reeksen voorstellen.

Deze reeksen zijn bijzondere gevallen van de vroeger (bl. 16) behandelde meer algemeene

$$\gamma + \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\gamma}{n} (-\rho)^n P_n(\cos \beta) \quad \text{en} \quad \sum_0^{\infty} \frac{\sin(n+1)\gamma}{n+1} (-\rho)^n P_n(\cos \beta)$$

door in beide $\gamma = \frac{\pi}{2}$ te nemen en de laatste met ρ te vermenigvuldigen.

Men heeft dus, voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$,

$$V = \frac{Q}{a} \left[\gamma + \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\gamma}{n} (-\rho)^n P_n(\cos \beta) \right] \dots \quad (13)$$

$$\text{en } V = \frac{Q\rho}{a} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(n+1)\gamma}{n+1} (-\rho)^n P_n(\cos \beta) \dots \quad (14)$$

Op dezelfde wijze vinden we dus uit de vroeger (Hoofdst. II, 5) voor de som dezer reeksen verkregen uitdrukkingen, als men ook

daarin $\gamma = \frac{\pi}{2}$ stelt,

$$V = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} l \cdot \frac{1 - \rho \cos \beta \cdot i + \sqrt{(1 - 2\rho \cos \beta \cdot i - \rho^2)}}{1 + \rho \cos \beta \cdot i + \sqrt{(1 + 2\rho \cos \beta \cdot i - \rho^2)}} \right] d < a. \quad (15)$$

$$\text{en } V = \frac{Q}{2ai} l \cdot \frac{\cos \beta + \rho i + \sqrt{(1 + 2\rho \cos \beta i - \rho^2)}}{\cos \beta - \rho i + \sqrt{(1 - 2\rho \cos \beta i - \rho^2)}} d > a. \quad (16)$$

Daar, zooals boven gezegd is, de gezochte functie in punten symmetrisch ten opzichte van de schijf gelegen dezelfde waarde heeft, hebben we de uitdrukkingen (15) en (16) slechts te herleiden voor waarden van β van 0 tot $\frac{\pi}{2}$. Dus is $\cos \beta$ altijd positief te nemen.

Zoo vindt men uit (15), als, evenals vroeger, (bl. 23)

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2} + 1 - \rho^2 \right\}} = p$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(1 - \rho^2)^2 + 4\rho^2 m^2} - 1 + \rho^2 \right\}} = q$$

en de absolute waarde van $\cos \beta$ gelijk m is gesteld, voor $d < a$,

$$V = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} \frac{m\rho + q}{1 + p} \right] = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} q \right] \dots \quad (17)$$

en uit (16), voor $d > a$,

$$V = \frac{Q}{a} bg \operatorname{tg} \frac{\rho + q}{m + p} = \frac{Q}{a} bg \operatorname{tg} \frac{q}{m} \dots \dots (18)$$

Voor $d = a$, dus $\rho = 1$, gaan beide over in

$$V = \frac{Q}{a} bg \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{m}} \dots \dots \dots (19)$$

Voor $\beta = 0$ vindt men hieruit

$$V = \frac{Q\pi}{4a}.$$

Deze uitdrukking komt met die, welke vroeger uit de formule voor de potentiaalfunctie in de as is gevonden, overeen.

Stelt men $\beta = 0$, dus $m = 1$ en $q = \rho$, dan vindt men volgens (17)

$$V = \frac{Q}{a} \left[\frac{\pi}{2} - bg \operatorname{tg} \rho \right]$$

en volgens (18)

$$V = \frac{Q}{a} bg \operatorname{tg} \rho.$$

Beide vergelijkingen komen overeen met de vroeger gevonden waarden voor die functien volgens (4) en (5).

Stelt men in (17) $\beta = \frac{\pi}{2}$, dus $m = 0$, dan verkrijgt men

$$V = \frac{Q\pi}{2a}.$$

Dit is dus de constante waarde der potentiaalfunctie op de schijf, daar (17) geldt voor $d \geq a$.

Volgens (18) vindt men na dezelfde substitutie

$V = \frac{Q}{a} bg \sin \rho$. Deze waarde gaat weer in de vorige over voor $\rho = 1$, terwijl zij voor $\rho = 0$, d. i. $d = \infty$ de waarde nul verkrijgt.

III.

BEPALING VAN DE POTENTIALFUNCTIE DER VRIJE ELECTRICITEIT OP EENE SCHIJF, WAAROP DE EENHEID VAN POSITIEVE ELECTRICITEIT, GEPLAATST IN EEN WILLEKEURIG PUNT, INFLUENCEEREND WERKT.

Wanneer een geëlectriseerde niet-geleider of eene of meer massa's electriciteit, in een of meer punten geconcentreerd, influentie uitoefenen op een geleider, dan wordt de neutrale electriciteit op dezen daardoor ontbonden in eene lading, die het tegengestelde teeken heeft als de

influenceerende, en eene lading, die van 't zelfde teeken is. Brengt men dan den geleider in geleidend verband met de aarde, dan behoudt hij slechts de eerste lading en de potentiaalfunctie in een punt des geleiders is nul en dus constant. Daar echter ook, zoo de geleider niet naar de aarde afgeleid is, de potentiaalfunctie in een punt er van constant moet zijn, zal de tweede lading zoodanig er over verspreid zijn, dat ook de potentiaalfunctie van die massa in een punt des geleiders constant is. Die lading zal zich dus over den geleider verspreiden alsof deze geïsoleerd en geladen was met eene even groote massa electriciteit. Noemen we die massa Q , dan is volgens de formules (17) en (18) de potentiaalfunctie dier lading in een willekeurig punt bepaald. We hebben deze uitdrukkingen, zooals blijken zal, noodig om te bepalen de waarde van Q , als in een willekeurig punt P een massa q influenceerend op den geleider werkt.

Kent men de potentiaalfunctie V van eene willekeurige lading eens geleiders in een uitwendig punt, zoo heeft men, als in dat punt de eenheid van positieve electriciteit influenceerend op den afgeleiden geleider werkt, de dichtheid der daardoor op dezen gebonden lading in een willekeurig punt σ' en ds een oppervlakte-element is, terwijl de waarde van V voor een punt des geleiders door $\bar{V}$ wordt voorgesteld

$$V = - \int \bar{V} \sigma' ds \quad ^1)$$

Stelt men zich nu voor, dat de lading op den geleider uit zich zelve in evenwicht en dus $\bar{V}$ constant is, dan heeft men

$$V = - \bar{V} \int \sigma' ds.$$

Hier stelt $\int \sigma' ds$ de hoeveelheid electriciteit voor, die door de eenheid van positieve electriciteit op den geleider is geïnfluenceerd. Die hoeveelheid wordt dus voorgesteld door

$$- \frac{V}{\bar{V}}$$

en is dus kleiner dan de hoeveelheid influenceerende electriciteit, uitgezonderd wanneer 't influenceerend punt ligt op den geleider.

Daar we nu de massa vrije electriciteit op een geïsoleerden geleider, geïnfluenceerd door de eenheid van positieve electriciteit in een punt P geplaatst, door Q hebben voorgesteld, en de vrije electriciteit gelijke absolute waarde heeft als de gebondene, en met de influenceerende in teeken overeenkomt, zoo hebben we

$$Q = \frac{V}{\bar{V}}$$

¹⁾ Zie GRINWIS, *Wiskundige theorie der wrijvingselectriciteit*, p. 99 v.v.

Nu is $\overline{V}$ gegeven door (7) en V_u door (17) en (18). De verhouding der beide waarden geeft dus

$$\text{voor } a > d \quad \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - bg \, tg \, q \right) = Q \dots \dots \dots (20)$$

$$\text{voor } a < d \quad \frac{2}{\pi} bg \, tg \, \frac{q}{m} = Q \dots \dots \dots (21)$$

Ligt het influenceerend punt in de as der schijf, op een afstand van 't middelpunt gelijk aan den straal, dan verkrijgt men, daar nu $a = d$ en $\beta = 0$ is,

$$Q = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (22)$$

Overigens is Q direct evenredig met de massa der in P geplaatste influenceerende electriciteit.

Substitueert men de waarde voor Q volgens (22) in (17) en (18), dan verkrijgt men voor de daarbij behoorende waarden van V

$$V = \frac{1}{2a} bg \, tg \, \frac{1}{q} \dots \dots \dots (23)$$

$$\text{en } V = \frac{1}{2a} bg \, tg \, \frac{q}{m} \dots \dots \dots (24)$$

VIJFDE HOOFDSTUK.

BENADERDE WAARDEN VOOR DE POTENTIAALFUNCTIE IN GEVAL DE SCHIJF
ZOOWEL GEÏSOLEERD BLIJFT, ALS DAT ZIJ NAAR DE AARDE IS AF-
GELEID. DOORSNEDE VAN EENIGE NIVEAUVLAKKEN MET EEN
PLAT VLAK, GAANDE DOOR DE AS DER SCHIJF.

Denkt men zich in de as der schijf op een afstand van 't middel-
punt gelijk aan den straal der schijf een electrisch punt, waarin de
eenheid van positieve electriciteit is geplaatst en dit punt influencee-
rend werkende op de naar de aarde afgeleide schijf, dan geven de
formules (20), (20a), (21) en (21a) Hoofdst. III, zoo men hier $M = 1$
stelt de potentiaalfunctie van dit stelsel in een punt dat bepaald is
door de coördinaten ρ en ψ .

Daar (zie fig. 9) $\beta = 0$ is, heeft men (zie (16), (17), (18),
Hoofdst. III).

$$\rho = \frac{O'Q'}{O'P} = \frac{OQ}{QP} = \frac{t'}{t} \quad \text{en} \quad \psi = \angle PQO.$$

Stelt men verder $PC = 1$, dan heeft men ter bepaling van q

$$2tt'm = t^2 + t'^2 - 4$$

$$\text{of } 2\rho m = 1 + \rho^2 - \frac{4}{t^2}, \quad \text{voor } t > t',$$

$$\text{on } 2\rho m = 1 + \rho^2 - \frac{4}{t'^2}, \quad \text{voor } t < t'.$$

Uit $2\rho m$ en ρ kan men verder m bepalen, en dus ook $\frac{q}{m}$.

Wanneer we nu in 't vervolg weer, als vroeger, de absolute waarde
van $\cos \psi$ door m voorstellen, dan vinden we voor punten

P.	$\frac{r}{4} = 0,785$	0,625	0,491	0,393	0,322	0,270	0,232		0,161
		0,617	0,482	0,386	0,317	0,267	0,230	0,201	
		0,586	0,453	0,365	0,303	0,258	0,223	0,196	
		0,505	0,402	0,338	0,282	0,244	0,214	0,189	
		0,424	0,393	0,341	0,295	0,257	0,227	0,201	0,181
		0,322	0,311	0,286	0,258	0,232	0,208	0,188	0,171

Voegt men die verschillende waarden in de overeenkomstige punten samen, dan vindt men de waarde der potentiaalfunctie van 't influenceerend punt en de geïncfluenceerde en geïsoleerde schijf, volgens de volgende tabel.

P.	2,965	1,418	0,668	0,565	0,484	0,420	0,370	0,330		0,249
	2,092	1,278	0,668	0,559	0,479	0,416	0,367	0,329	0,297	
	1,326	1,036	0,646	0,542	0,465	0,406	0,361	0,323	0,292	
	0,945	0,835	0,603	0,510	0,443	0,390	0,349	0,315	0,286	
	0,728	0,676	0,610	0,536	0,469	0,415	0,370	0,334	0,303	0,278
	0,589	0,560	0,519	0,472	0,425	0,384	0,348	0,317	0,290	0,268

Daar het punt Q (fig. 9) bepaald is door ρ , de verhouding van de voorstralen PQ en OQ, en door den hoek PQO, door ψ voorgesteld, zoo kan men gemakkelijker de gezochte potentiaalfunctie bepalen als ρ en $\cos \psi$ eenvoudige waarden hebben, dan wanneer men, zooals boven is geschied, eerst de punten aanneemt volgens een rechthoekig coördinatenstelsel en dan uit de daarbij behorende waarden van ρ en $\cos \psi$ X berekent. Door constructie vindt men tevens, als die grootheden ρ en $\cos \psi$ gegeven zijn, de punten, waarbij ze behooren. De

meetkundige plaats der punten, waarvoor ρ dezelfde waarde heeft, is een cirkel, waarvan 't middelpunt ligt op de as der schijf. Geeft men aan ψ een standvastige waarde, dan vindt men, dat de daarbij behoorende punten liggen op cirkels, die door de punten O en P gaan. In fig. 10 zijn die punten door de snijding van cirkels bepaald, waarvoor ρ de waarden 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 en 1, en $\cos \psi$ de waarden 0, 0,2, 0,4, 0,6 0,8 0,9 en 1 heeft. Construeert men op OP als basis een driehoek, waarvan de verhouding der opstaande zijden OQ : PQ (fig. 9) de voor ρ gegeven waarde heeft, dan vindt men door den tophoek van dien driehoek en zijn supplement middendoor te deelen in de snijpunten van die deellijnen met de as XX' de uiteinden van de middellijn van den cirkel, waarbij die voor ρ aangenomen waarde behoort. Neemt men op PC een stuk Pa, zoodanig dat Pa : PC de voor $\cos \psi$ aangenomen waarde heeft en trekt men ab loodrecht op PC, tot deze den cirkel uit P als middelpunt en met PC als straal beschreven snijdt in b, dan vindt men in 't snijpunt van de lijn Pc, die loodrecht op Pb is getrokken, met AB of haar verlengde 't middelpunt van den cirkel, waarop die punten zijn gelegen, waarvoor $\cos \psi$ de aangenomen waarde heeft. Deze punten liggen echter alleen op dat segment van dien cirkel, dat aan dezelfde zijde van PO ligt als 't middelpunt c. Neemt men c' zoodanig, dat Cc' = Cc is, dan is c' 't middelpunt van den cirkel, die, met denzelfden straal als de eerstgenoemde beschreven, voor zoo verre hij aan dezelfde zijde van PO ligt als c, die punten bevat, waarvoor $\cos \psi$ dezelfde absolute waarde bezit als de eerstgenoemde, maar die op punten betrekking heeft, waarvoor ψ stomp is.

Men kan ook de middelpunten en de stralen dezer coördinaten-cirkels bepalen uit hunne vergelijkingen. Neemt men P aan als oorsprong van rechthoekige coördinaten, PX als de x-as, dan is, zoo x en y de coördinaten van Q voorstellen, terwijl PC = CO = 1 is aangenomen,

$$PQ^2 = x^2 + y^2, \quad OQ^2 = (2 - x)^2 + y^2$$

$$\text{en } \frac{(2 - x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \rho^2, \text{ of}$$

$$\left(x - \frac{2}{1 - \rho^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\rho}{1 - \rho^2}\right)^2$$

De coördinaten van 't middelpunt van dezen cirkel zijn

$$x = \frac{2}{1 - \rho^2}, \quad y = 0$$

De straal wordt voorgesteld door $\frac{2\rho}{1 - \rho^2}$.

Ter bepaling van een cirkel, waarvoor ψ constant is, stellen we $\angle QPO = \alpha$.

Uit de vergelijkingen voor de rechte lijnen PQ en OQ, n.l.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, \quad y = (x - 2) \operatorname{tg} (\alpha + \phi)$$

elimineert men α , waardoor men den cirkel

$$(x - 1)^2 + (y - \cot \phi)^2 = \operatorname{cosec}^2 \phi$$

verkrijgt. Het middelpunt van dezen cirkel is bepaald door

$$x = 1, \quad y = \cot \phi,$$

de straal door $\operatorname{cosec} \phi$.

Met behulp van de coördinaten ρ en ψ is de potentiaalfunctie in een genoegzaam aantal punten van een vlak, gaande door de as der schijf, bepaald, om bij benadering de lijnen te bepalen waarvoor die functie de constante waarden 1, 0,5, 0,3, 0,2, 0,15, 0,12, 0,1 en 0,05 heeft. Bij die lijnen behooren dus waarden van de potentiaalfunctie, die zeer weinig van deze constante waarden verschillen. Door omwenteling dezer lijnen om de as der schijf worden niveauvlakken beschreven (fig. 10).

Het blijkt, dat die vlakken, waarvoor de waarde der potentiaalfunctie grooter is dan 0,1 alleen het influenceerend punt P en niet de schijf omgeven. Verder bestaan er twee stelsels van vlakken, waarvoor die functie eene waarde heeft, die gelegen is tusschen 0 en 0,1. Het eene stelsel omvat uitsluitend de afgeleide schijf, 't andere de schijf en 't influenceerend punt samen. Beide stelsels zijn gescheiden door 't niveauvlak, waarvoor X de in bovengemelden zin genomen waarde 0,1 heeft en dat uit twee gesloten gedeelten bestaat, die een punt gemeen hebben, dat gelegen is op de as der schijf. Het is dit punt, waarvoor vroeger (blz. 35) eene maximum-waarde voor X in de as der schijf is bepaald. Een electrisch deeltje in dit punt geplaatst is onder de gelijktijdige werking van 't punt P en de afgeleide schijf in evenwicht.

ZESDE HOOFDSTUK.

I.

TOEPASSING DER VOORGAANDE BESCHOUWING OP EEN SCHERM AAN DE
EENE ZIJDE BEGRENSD DOOR EENE RECHTE LIJN EN ZICH
OVERIGENS ONBEPAALD VER UITSTREKKENDE.

De methode, die aangewend is tot het oplossen van het gestelde vraagstuk, geeft de oplossing van meer dergelijke. Door inversie van een spherisch segment ten opzichte van een punt gelegen op dit segment, verkrijgt men een vlak, dat zich in zekere richtingen onbepaald ver uitstrekt. Ligt het inversie-middelpunt op den rand der schijf, dan verkrijgt men een vlak, dat aan eene zijde door een rechte lijn is begrensd, die zich aan weerszijden onbepaald ver uitstrekt, terwijl het vlak overigens onbegrensd is. Uit de potentiaalfunctie van 't geïsoleerd geladen segment in een willekeurig punt, zooals die bepaald is (9, 9a, 10, 10a, Hoofdst. II) kan men dan die van een vlak vinden, als op bovenvermelde wijze door inversie ontstaat, wanneer dat vlak naar de aarde is afgeleid, onder influentie van een electrisch punt, geplaatst in 't inversie middelpunt. We zullen dit geval hier behandelen.

Ligt het influenceerend punt in de loodlijn die in een punt der begrenzende lijn op dit vlak is opgericht, dan moet het spherisch segment het halve oppervlak van den bol bevatten en 't inversie middelpunt op den rand van 't segment zijn gelegen (fig. 11). Behalve uit de figuur, volgt dit ook uit de formules voor β en γ volgens (12) en (13) Hoofdst. III. Daar in dit geval $r=b=\infty$ is, heeft men n.l.

$$\operatorname{tg} \beta = \infty \quad \text{en} \quad \operatorname{tg} \gamma = \infty$$

$$\text{en dus } \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

We bepalen ons tot het vlak gaande door P en loodrecht op de rechte lijn, die het aan de andere zijden onbegrensde vlak, gedeeltelijk begrenst.

Wanneer men nu in de formule

$$X = \frac{M}{PQ} \left(1 - \frac{V}{C} \right) \text{ (zie (19) Hoofdst. III)}$$

V vervangt door de daarvoor gevonden waarden (Hoofdstuk II) en daarbij let op de waarden, die $\frac{d}{r}$, $\frac{r}{d}$ en ψ hebben, afhankelijk van de plaats van het punt, waarin de potentiaalfunctie bepaald wordt, dan vindt men voor de punten

binnen den hoek ABX

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{M}{t} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} bg \, tg \, q - \frac{1}{\pi \rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \\ \text{binnen den hoek ABX'} \\ X &= \frac{M}{t} \left[1 - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{\pi} \left(bg \, tg \, q + \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\dots (1) \\ &\frac{\pi}{2} < \psi < \pi \\ &\dots (2) \end{aligned}$$

binnen den hoek XBD

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{M}{t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} bg \, tg \, q - \frac{1}{\pi \rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \\ \text{binnen den hoek X'BD'} \\ X &= \frac{M}{t} \left[1 - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{\pi} \left(bg \, tg \, q - \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\dots (3) \\ &0 < \psi < \frac{\pi}{2} \\ &\dots (4) \end{aligned}$$

Voor (1) en (3) is $\rho = \frac{d}{r}$ en $d < r$. Voor (2) en (4) is $\rho = \frac{r}{d}$ en $r < d$.

Stel $M = 1$.

Voor $\psi = 0$ en $\psi = \pi$ heeft men $m = 1$ en de formules (1), (3), (2) en (4) gaan dan over in

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1+\rho}{\pi \rho} bg \, tg \, \rho \right] \\ X &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-\rho}{\pi \rho} bg \, tg \, \rho \right] \\ X &= \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1+\rho}{\pi \rho} bg \, tg \, \rho \right\} \right] \\ X &= \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi \rho} bg \, tg \, \rho \right\} \right] \end{aligned}$$

Ze gelden voor de punten op de bogen van den cirkel PB binnen de bovenvermelde hoeken.

Voor $\psi = \frac{\pi}{2}$ worden (1) en (3) aan elkander gelijk en eveneens (2) en (4); (1) en (3) gaan dan over in

$$X = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\rho} bg \sin \rho \right]$$

welke waarde behoort bij punten in de lijn BX,
en (2) en (4) in

$$X = \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\rho} bg \sin \rho \right\} \right]$$

met betrekking tot de punten in de lijn X'B.

Voor $\rho = 1$ vindt men voor (1) en (2) $X = 0$ en voor (3) en (4)

$$X = \frac{2}{\pi t} bg \operatorname{tg} \sqrt{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De eerste is de waarde van X voor punten op de plaat AB, de tweede voor die in de lijn BD.

Ter bepaling van ρ en m heeft men de volgende gegevens.

$$\text{Voor } d < r \text{ is } \rho = \frac{d'}{r} = \frac{t'}{t} \text{ en}$$

$$\text{voor } d > r \text{ is } \rho = \frac{r}{d} = \frac{t}{t'},$$

als men de voerstralen van P en O naar Q door t en t' voorstelt.

Uit de algemeene formule (18) (bl. 30)

$$\angle PQO = \psi - \beta$$

volgt in 't gegeven geval, daar $\beta = 90^\circ$ is,

$$\angle PQO = \psi - 90^\circ.$$

Deze formule is geldig voor alle punten in 't beschouwde vlak, in geval men ψ , evenals dit is gedaan in 't algemeene geval (fig. 6), in die richting telt, die de straal O'C' ¹⁾ bij zijne beweging door den stand O'P heen neemt, om met O'Q' samen te vallen.

Voor 't punt S' ligt dan ψ in 't eerste, voor Q' in het tweede, voor R' in het derde en voor T' in het vierde kwadrant. Voor S' is dan $\psi - 90^\circ$ negatief, maar moet ter bepaling van het punt S positief in rekening worden gebracht, voor Q' scherp, voor R' stomp en voor T' grooter dan 180° , zoodat men in dit laatste geval $\psi - 90^\circ$ moet vervangen door $360^\circ - (\psi - 90^\circ)$. Wil men de waarden van ψ in het derde en het vierde kwadrant uitsluiten, dan heeft men voor die gevallen ψ door $360^\circ - \psi$ te vervangen en dus voor 't punt R' $\psi - 90$ door $270 - \psi$, en voor 't punt T, daar dan ψ negatief wordt geteld en de absolute waarde van $\psi - 90$ dan slechts in aanmerking komt, door $\psi + 90$.

Neemt men dus ψ tusschen 0° en 180° , dan vindt men als uitdrukkingen voor $\psi - 90$ in de punten S', Q', R', en T' $90 - \psi$, $\psi - 90$, $270 - \psi$ en $\psi + 90$.

¹⁾ In fig. 11 is abusievelijk C' aan 't einde van den straal, tusschen OS' en OT' gelegen, weggelaten.

De absolute waarde van m of $\cos \psi$ kan nu gevonden worden uit de formule

$$tt' \sin PQO = 2h$$

als h de loodlijn is, uit Q op de x -as neergelaten. Nu is

$$\sin PQO = \sin PRO = -\cos \psi$$

$$\text{en } \sin PSO = \sin PTO = \cos \psi.$$

Zonder dus op het teeken te letten heeft men

$$m = \cos \psi = \frac{2h}{tt'}$$

$$\text{en } 2\rho m = \frac{4h}{t^2} \text{ voor de hoeken onder (1) en (3)}$$

$$\text{en } 2\rho m = \frac{4h}{t'^2} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad (2) \text{ en } (4) \text{ vermeld.}$$

Daardoor zijn de grootheden, ter bepaling van de numerische waarden van X benodigd, gemakkelijk te berekenen.

In de volgende tabel zijn eenige waarden van X opgegeven in de veronderstelling dat in P de eenheid van positieve electriciteit is geconcentreerd.

Eenvoudiger kan men die waarden van X bepalen, als men de punten zoodanig kiest, dat de daarbij behoorende waarden van ρ en $\cos \psi$ eenvoudige getallen zijn. Daar de absolute waarde van $\cos \psi$ gelijk is aan die van den sinus van hoek PQO, zoo heeft men, als men achtereenvolgens voor $\cos \psi$ bepaalde waarden neemt, cirkelbogen te construeeren die door de punten O en P gaan, en voor ieder van welke de sinus van den hoek in de segmenten, door die bogen begrensd, die waarden heeft. De cirkels waarop die punten liggen, waarvoor ρ bepaalde waarden heeft, worden als in 't vorige geval geconstrueerd (zie Hoofdst. V). Uit die waarden voor $\cos \psi$ of m en ρ vindt men de waarden van X in die punten. Door middel van die waarden zijn de niveaulijnen geconstrueerd, die in fig. 12 zijn aangegeven. Ze stellen de doorsneden voor van de niveaувlakken van 't geheele stelsel met een vlak, gaande door P en loodrecht op de onbegrensde rechte lijn, die 't afgeleide platte vlak aan de eene zijde begrenst.

II.

TOEPASSING OP EEN SCHERM MET CIRKELVORMIGE OPENING.

Wordt het inversie-middelpunt geplaatst in 't midden van 't segment, dan verkrijgt men door inversie een naar alle zijden onbegrensd plat vlak met eene cirkelvormige opening, zoodanig dat het inversie-middelpunt in de as dier opening is gelegen op een afstand van het vlak gelijk aan den straal der opening (fig. 13).

In dit geval is $\beta = \pi$ en $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

De hoek, dien de voerstralen PQ en QO met elkander maken, is volgens de algemeene uitdrukking daarvoor gevonden (bl. 30) $\psi - \beta$.

Voor het tegenwoordige geval is $\beta = 180$ en dus

$$\angle PQO = \psi - 180.$$

Neemt men in het tegenwoordige geval (fig. 13) den hoek ψ in dezelfde richting als bij het vaststellen van de algemeene uitdrukking $\psi - \beta$, dan verkrijgt men, daar de punten boven de middellijn PC' tot het derde en het vierde kwadrant behooren, de juiste uitdrukking voor den hoek PQO. Neemt men echter ψ tusschen 0° en 180° , dan heeft men

$$\angle PQO = 360^\circ - (\psi - 180^\circ) = 180 - \psi.$$

Bij het aannemen van bepaalde waarden voor ψ zullen we van dezen vorm uitgaan.

Dus is ψ scherp te nemen voor punten, die binnen den cirkel zijn gelegen op OP als middellijn beschreven. Voor alle punten buiten dien cirkel is ψ stomp. Voor punten op den omtrek is $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Verder is voor alle punten aan die zijde van 't vlak DE gelegen, die van 't influenceerend punt P is afgewend, $t' < t$, dus $d < r$, terwijl voor die aan de andere zijde gelegen $t' > t$ en dus $d > r$ is.

In 't eerste geval is $\frac{d}{r} = \frac{t'}{t} = \rho$ gesteld, in het tweede geval $\frac{r}{d} = \frac{t}{t'} = \rho$.

Wanneer men dus de waarden voor V gevonden (Hoofdst. II) in de formule voor X ((19) Hoofdst. III) substitueert, dan vindt men voor punten in 't onbegrensde vlak DAOX gelegen

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(bg \, tg \, q + \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \psi \text{ stomp. } \rho = \frac{t'}{t} \dots (6)$$

in het kwadrant ACO

$$X = \frac{M}{t} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(bg \, tg \, q - \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \psi \text{ scherp. } \rho = \frac{t'}{t} \dots (7)$$

in 't onbegrensde vlak DAPX'

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{\pi} \left(bg \, tg \, q + \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \psi \text{ stomp. } \rho = \frac{t}{t'} \dots (8)$$

in het kwadrant ACP

$$X = \frac{M}{t} \left[1 - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{\pi} \left(bg \, tg \, q - \frac{1}{\rho} bg \, tg \, \frac{q}{m} \right) \right] \psi \text{ scherp. } \rho = \frac{t}{t'} \dots (9)$$

Voor $\rho = 1$ gaan (6) en (8) over in $X = 0$. Deze waarde heeft betrekking op de punten van 't vlak AD.

Voor $\rho = 1$ en $M = 1$ gaan (7) en (9) over in

$$X = \frac{2}{\pi t} bg \, tg \, \sqrt{m} \dots (10)$$

welke uitdrukking geldt voor de punten der lijn AB.

Voor $m = 0$ gaan (6) en (7) over in

$$X = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \rho} bg \sin \rho \right]$$

voor de punten van den boog AO,

¹⁾ Hoewel de vorm voor X volgens (10) overeenkomt met die in (5) hebben echter ψ en dus ook m in beide, voor punten, die dezelfde coördinaten bezitten, verschillende waarden, met uitzondering van 't geval, dat $\psi = 45^\circ$ is. Voor die punten zal men in beide gevallen dezelfde waarde der potentiaalfunctie verkrijgen.

en (8) en (9) in

$$X = \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\rho} bg \sin \rho \right\} \right]$$

voor de punten van den boog AP.

Voor $m = 1$ heeft men de volgende uitdrukkingen voor X , afgeleid uit die, welke in (6), (7), (8) en (9) voorkomen:

$$X = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1+\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right] \text{ voor de punten in de lijn OX}$$

$$X = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right] \text{ " " " " " " CO}$$

$$X = \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1+\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right\} \right] \text{ " " " " " " X'P}$$

$$X = \frac{1}{t} \left[1 - \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\pi\rho} bg \operatorname{tg} \rho \right\} \right] \text{ " " " " " " PC}$$

De bepaling van numerische waarden voor X in dit geval wordt op dezelfde wijze uit ρ en m afgeleid als in de vroegere gevallen. Evenals daar kan men ook hier ρ en m berekenen uit de coördinaten t en t' van 't punt, waarin de waarde der potentiaalfunctie moet bepaald worden.

In het vlak, gaande door 't influenceerend punt en loodrecht staande op 't naar de aarde afgeleide vlak, zijn eenige waarden der potentiaalfunctie berekend voor 't geval dat in P de eenheid van positieve electriciteit is geconcentreerd.

2

λ	$P \approx 2,549$	1,239	0,5	0,264	0,149	0,091	0,059	0,041	0,030	0,023	0,018	0,014	0,012	0,010	0,0085	0,0078	0,006	0,005
1,669	0,851	0,441	0,237	0,136	0,085	0,056	0,040	0,029	0,022	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,887	0,554	0,294	0,146	0,103	0,069	0,048	0,036	0,027	0,021	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,498	0,308	.	0,076	0,064	0,049	0,038	0,029	0,023	0,018	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,294	0,169	.	0,028	0,035	0,032	0,028	0,023	0,019	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,183	0,101	.	0,013	0,019	0,021	0,020	0,018	0,015	0,013	.	.	.	.	.	.	.	.	.

2

Door een stelsel coördinaten ρ en ψ als in fig. 10 kan men ook hier op een dergelijke wijze als vroeger eenige punten bepalen en voor deze punten evenals daar de waarden van X berekenen. Gemakkelijk construeert men ook hier de doorsnede van de niveauvlakken met een vlak gaande door 't influenceerend punt en loodrecht op 't onbegrensde vlak (fig. 14). Die vlakken zijn even als in 't eerste geval omwentelingsoppervlakken verkregen door de omwenteling van fig. 14 om de as PO.

ZEVENDE HOOFDSTUK.

PROEFONDERVINDELIJK ONDERZOEK.

Het proefondervindelijk onderzoek naar de waarde der potentiaalfunctie van een stelsel van geëlectriseerde geleiders en niet-geleiders in een willekeurig punt in de nabijheid berust op de eigenschap, dat, zoo men een geleidend bolletje met zijn middelpunt in 't bedoelde punt plaatst en het dan naar de aarde afleidt, de gezochte potentiaalfunctie wordt voorgesteld door de lading, die op 't bolletje is achtergebleven met tegengesteld teeken genomen, gedeeld door den straal van dat bolletje. Dit volgt daaruit, dat, zoo het bolletje naar de aarde is afgeleid, de potentiaalfunctie van 't electrisch stelsel, daaronder dat afgeleide bolletje begrepen, in een punt van dit laatste, dus ook in 't middelpunt, *nul* is. Dus moet de potentiaalfunctie van de lading op het bolletje gelijk en in teeken tegengesteld zijn aan die van de overige omgevende geëlectriseerde lichamen. ¹⁾ Nu is de potentiaalfunctie van eene willekeurige lading op 't oppervlak van een bol in 't middelpunt van dezen gelijk aan de geheele lading gedeeld door den straal des bols. Zijn er echter onder de geëlectriseerde lichamen in de nabijheid geleiders, dan zal door de aanwezigheid van 't proefbolletje de electrische verdeling op die lichamen eenigszins gewijzigd worden en dus een kleine fout in de waarneming ontstaan, die echter te kleiner wordt naarmate men het bolletje kleiner maakt. Men kan het bolletje klein genoeg nemen, opdat de daarop gebonden electriciteit geen merkbaaren influenceerenden invloed op de omringende lichamen uitoefent.

¹⁾ Zie ook GRINWIS *t. a. p.* pag. 103.

Bij de hierna te vermelden proeven is een bolletje gebezigd met een middellijn van 9.34 m.M. Het was door een staafje schellak, lang 4.8 c.M. verbonden aan een glazen staafje lang 18.5 c.M., dat ook weer voor ongeveer de helft met een laagje schellak bedekt was. Deze voorzorgen dienden om het bolletje zoo goed mogelijk te isoleeren. Het moest namelijk door middel van dit staafje met de hand van de eene plaats naar de andere worden overgebracht. Ten einde verder het bolletje zoo nauwkeurig mogelijk op de juiste plaats te brengen, werd het glazen staafje ter lengte van ongeveer 5.5 c.M. in eene uitgeholde staaf van eboniet gestoken. Deze laatste was in horizontalen stand verbonden aan een toestel, die langs een vertikaal geplaatsten en met een schaal voorzienen standaard kon worden op- en neergeschoven. Tevens was het noodig, dat het proefbolletje in eene horizontale lijn kon worden verplaatst en daartoe kon de ebonietstaaf in horizontale richting vooruitgeschoven en teruggetrokken worden. Was op die wijze het bolletje met zijn middelpunt geplaatst in het punt, waarin de potentiaalfunctie moest worden bepaald, dan werd het door een in de hand gehouden geleidenden draad aangeraakt en dus naar de aarde afgeleid. Nadat het daarna weer geïsoleerd was, werd het uit de ebonietstaaf genomen en met 't eene paar kwadranten van een Thomson'schen kwadrantelectrometer in aanraking gebracht.

Zooals uit de vorige hoofdstukken is gebleken, moest de potentiaalfunctie worden bepaald van een stelsel bestaande uit een influenceerend electrisch punt en een al of niet naar de aarde afgeleide geleidende plaat. Er is verondersteld, dat in dat punt de eenheid van electriciteit was geconcentreerd en de plaat geene dikte bezat. Bij de proeven is aan deze voorwaarden bij benadering voldaan door als electrisch punt te nemen de knop van 't binnenbekleedsel eener leidsche flesch en platen van koper en zink, die naar de aarde werden afgeleid. Die knop had een middellijn van ongeveer 2.6 c.M. Daar het onmogelijk was door middel van eene electriseermachine de flesch eene lading te geven, die zij gedurende eene serie van waarnemingen, die soms 45 min. duurde, vrij constant behield, werd zij geladen door een inductiestroom. Deze inductiestroom werd verkregen in eene klos van Rhumkorff door eene batterij van vier chroomzure kali-elementen. De eene draad van de klos werd verbonden met het buitenbekleedsel der leidsche flesch, die vrij op eene tafel was geplaatst. De andere draad was verbonden met de eene stang van een algemeenen ontlader. De tweede stang van dezen was door een geleidenden draad, die vrij in de lucht hing, en onder het deksel der leidsche flesch doorliep, met het binnenbekleedsel van deze in aanraking gebracht. Ten einde eenigszins zeker te zijn, dat de lading der flesch vrij constant was, werd de knop van deze verbonden met de stang

van een electrometer van Peltier. Deze gaf, als de vonken, die bij den algemeenen ontlader oversprongen, niet al te groot waren, eene nagenoeg constante afwijking. Maakte de bewegelijke naald te sterke schommelingen, dan werd de slagwijdte van den algemeenen ontlader verminderd tot de afwijking nagenoeg constant was.

Zooals boven vermeld is, werd het proefbolletje, na geïsoleerd te zijn, met de eene electrode van een kwadrant-electrometer van Thomson in aanraking gebracht. De uitslagen van den spiegel werden afgelezen op eene schaal, die op een afstand van ongeveer 1.3 M. zoodanig was geplaatst, dat de lijn, van den spiegel naar 't midden der schaal getrokken, loodrecht op deze stond en samenviel met de normaal van den spiegel, wanneer deze niet afgeweken was. Vóór elke serie van waarnemingen werd nagegaan of aan deze eischen was voldaan. Meestal bleek deze voorzorg onnoodig, daar die stand van schaal en spiegel onveranderd was gebleven. De schaal was in millimeters verdeeld. Van 't midden tot de uiteinden werd geteld van 0 tot 226 m.M. Wanneer daarna de electrometer eene vrij sterke lading ontving, en 't beeld der vlam weer niet juist met 't nulpunt der schaal samenviel, dan werd dit verkregen door eene der kwadranten een weinig te verplaatsen, terwijl alle kwadranten door middel der gasleiding met de aarde waren verbonden. Gedurig werd onderzocht of de uitslagen van den spiegel naar weerszijden even groot waren. Dit bleek uit de schommelingen wanneer alle kwadranten naar de aarde waren afgeleid. Ook werden daartoe Daniëls of kleine Grove's elementen gebezigd, wier eene pool even als 't eene paar kwadranten naar de aarde was afgeleid, terwijl de andere pool met 't andere paar kwadranten was verbonden. Wanneer dan het beeld eene afwijking had verkregen, werd de orde, waarin kwadranten en polen waren verbonden, omgekeerd en kon men eene nagenoeg gelijke afwijking waarnemen in tegengestelden zin.

De electrometer was op een afstand van ongeveer 1.7 M. geplaatst van de leidsche flesch. Om zeker te zijn, dat de lading van deze geen directen invloed uitoefende op den electrometer, werd de eene electrode van dezen met de aarde in verband gebracht, terwijl de andere in de lucht geïsoleerd was. Werd nu de batterij in werking gesteld en dus de flesch geladen, dan zag men geene de minste afwijking van 't beeld. Bij den minsten invloed van de geladen flesch op 't niet afgeleide paar kwadranten zou de spiegel eene merkbare afwijking verkregen hebben.

De platen, waarop de knop der leidsche flesch influenceerend moest werken, waren van koper of zink, ter dikte van ongeveer 0.86 m.M. De rand was eenigszins afgerond. Voor 't geval, dat in Hoofdstuk V is behandeld, werd eene koperen plaat genomen, waarvan de middel-lijn ongeveer 14 c.M. bedroeg. Zij rustte in horizontalen stand

op drie isoleerende staafjes van glas, die met een laagje schellak waren bedekt en van boven voorzien van knopjes van schellak. Onder de plaat was de leidsche flesch geplaatst, met het middelpunt der knop in de as der plaat op een afstand van 7 c.M. van deze. De plaat, waarvan in het eerste geval van Hoofdstuk VI is gesproken, werd voorgesteld door een plaat van zink lang 1.09 M. en breed 0.645 M. Het middelpunt van de knop der leidsche flesch was loodrecht onder 't midden van den eenen rand geplaatst op een afstand van 3.4 c.M. van dezen. Nadat de proeven met deze plaat waren afgeloopen, werd in 't midden van deze eene cirkelvormige opening gemaakt van dezelfde afmeting als de bovenvermelde koperen plaat en 't middelpunt van de knop der leidsche flesch in de as dezer opening op een afstand van ongeveer 7 c.M. daaronder geplaatst. In de beide laatste gevallen rustte de plaat op glazen steunsels. Hoewel theoretisch een oneindig groote plaat, om haar vrije electriciteit te verliezen, niet naar de aarde behoeft te worden afgeleid, was dit hier toch noodig, daar aan de veronderstelling bij de theorie gemaakt, in de werkelijkheid niet kon worden voldaan. Door een dunnen koperen draad werden de platen gedurende de proefneming met de gasleiding verbonden.

Alvorens de resultaten der gedane waarnemingen mee te deelen, dient hier gewezen te worden op storende invloeden, die niet altijd konden worden geëlimineerd en dus fouten in de uitkomsten moesten veroorzaken. Men kan niet aannemen, dat de electriciteit, die influenceerend op de afgeleide platen werkte, juist in de knop der leidsche flesch was geconcentreerd. Ook het binnenvlak van deze was geladen, en deze lading moest insgelijks een influenceerenden invloed uitoefenen. Dit moest tevens 't geval zijn met den draad, die van den algemeenen ontlander naar de flesch werd geleid. Daarom zijn geene waarnemingen gedaan in punten even hoog of lager gelegen dan de knop der flesch. Ook werkte de aanwezigheid van den draad, waarmee het proefbolletje werd aangeraakt, nadeelig. Van invloed bleek ook vooral te zijn de wijze, waarop deze aanraking geschiedde. Zooveel mogelijk werd dit telkens op dezelfde wijze gedaan. Tevens was gezorgd, dat de duur der aanraking voor elke afzonderlijke waarneming zooveel mogelijk gelijk was. Enkele keeren werden bij te korten of te langen duur der influentie of door verandering in de wijze van aanraking uitslagen verkregen, die van de normale nog al sterk afweken. Ook moest het bolletje, gedurende 't overbrengen naar den electrometer, die zooals boven vermeld is, op een afstand van ongeveer 1.7 M. van de flesch was geplaatst, iets van de verkregen lading verliezen. Deze evenals alle bovengenoemde storende invloeden werkten echter bij *alle* waarnemingen. Kon men nu aannemen, dat voor 't overbrengen van

't bolletje naar den electrometer telkens dezelfde tijd werd besteed, en dat gedurende eene serie van waarnemingen de hygrometrische toestand, de temperatuur en de drukking der lucht niet veranderden, dan zou men voor kleine ladingen, en zoodanige verkreeg men telkens op het bolletje, kunnen aannemen, dat het electriciteitsverlies evenredig is met die ladingen. ¹⁾ Is nu, zooals boven vermeld is, de gezochte potentiaalfunctie evenredig met de op 't bolletje achtergebleven lading onmiddellijk na de aanraking met den geleidenden draad, dan zou zij dit ook zijn met de overgebleven lading, op 't oogenblik, dat het bolletje met eene der electroden van den electrometer in aanraking werd gebracht. Nu werd gezorgd, dat het overbrengen zoo snel mogelijk geschiedde, daar 't electriciteitsverlies dan kleiner is dan bij langzame beweging. Dit alles voorop gezet, zou men kunnen aannemen, dat de lading, die het eene paar kwadranten van den electrometer bij elke aanraking van het geladen bolletje van dit laatste ontving, evenredig was met de op dit bolletje geïnfluenceerde lading, toen het in een punt in de nabijheid van 't electrisch stelsel werd gebracht. Nu berust de aanwijzing van den electrometer op de formule

$$M = a(A - B) \left\{ C - \frac{1}{2}(A + B) \right\}$$

als A en B de potentiaalfunctien op de beide paren kwadranten voorstellen, C die op 't binnenvlak van den electrometer en a een constante is. M is het torsiemoment van den spiegel. Terwijl nu bij de gedane waarnemingen 't eene paar kwadranten naar de aarde was afgeleid, kon b.v. $B = 0$ worden gesteld en gold dus de formule

$$M = aA \left(C - \frac{1}{2}A \right).$$

Voor sterke ladingen van den electrometer en zwakke ladingen op 't eene paar kwadranten zou men dus de afwijking van den spiegel bij benadering evenredig kunnen stellen aan die lading der kwadranten, en dus ook, zooals boven is vermeld, aan de potentiaalfunctie, die gezocht werd. Correctiën voor 't verlies van electriciteit op 't eene paar kwadranten zijn niet aangebracht, omdat onmiddellijk na de lading drie uitslagen van den spiegel werden afgelezen, twee naar de eene, en een naar de andere zijde. Van deze drie werd dan het gemiddelde genomen. Ook de electrometer verloor iets van zijne lading. Daarom werd deze geruimen tijd, vóór dat de waarnemingen zouden gedaan worden, vrij sterk geladen. Op 't oogenblik der waarneming was dan die lading wel eenigszins verminderd, maar bleef zij gewoonlijk gedurende eenige waarnemingen vrij constant.

Na elke waarneming werd het eene paar kwadranten, dat geladen was, ontladen door het met denzelfden draad, waarmee het andere paar naar de aarde was afgeleid, zoolang te verbinden, dat de spiegel

¹⁾ MASCART, *Traité d'électricité statique*, Tom I. pag. 80.

niet meer schommelde, en 't beeld weer op 't nulpunt kwam. 't Spreekt van zelf, dat de duur eener serie van waarnemingen daardoor zeer verlengd werd en sommige der bovengenoemde storende invloeden, als de verandering in de lading van den electrometer, de hygrometrische toestand en de temperatuur der lucht enz., te sterker werkten. Ten einde echter deze en andere nadeelige omstandigheden zooveel mogelijk te elimineeren, werden de waarnemingen herhaald en wel in tegengestelde orde. Voor elk punt werd soms twee à drie keeren de uitslag afgelezen. Had men dit nu gedaan voor eenige, hoogstens zes à zeven punten, dan werd dit voor die zelfde punten gedaan, te beginnen met het laatste om met het eerste te eindigen. Meestal verkreeg men bij die tweede waarnemingen kleinere afwijkingen, 't geen vooral aan de vermindering van de lading des electrometers moest worden toegeschreven. Daarna werd van de verkregen uitkomsten de gemiddelde waarde als de gezochte aangeteekend.

Daar het alleen om de verhouding van de waarden der potentiaal-functie in verschillende punten te doen was, werden daardoor reeds bovendien die fouten geëlimineerd, die evenredig waren aan die gezochte waarden.

Correctiën van den uitslag op de schaal, teneinde daaruit de hoekbeweging van den spiegel af te leiden, bleken onnoodig te zijn. Hoogstens werden in enkele gevallen uitslagen van 60 m.M. waargenomen, die wegens den betrekkelijk grooten afstand van de schaal tot den spiegel, nl. 1.3 M. bij een hoek van $2^{\circ} 38' 30''$ behoorden. Voor een uitslag van 60 m.M. moest nu genomen worden een boog van 59.72 m.M., die dus ongeveer een vierde m.M. van de waargenomene verschilt. Neemt men nu in aanmerking, dat wegens de snelheid van den uitslag, deze niet nauwkeuriger dan tot op 1 m.M. kon worden bepaald, dan behoefde voor benaderde waarden, waarom 't hier te doen was, geene correctie van 0.25 te worden aangebracht. Te minder was dit noodig, omdat de meeste uitslagen nog veel kleiner waren.

Hier volgen nu de resultaten der waarnemingen. Ter vergelijking zijn de vroeger berekende waarden er naast geplaatst. De punten, waarin de potentiaal-functie is bepaald, zijn door de daarbij gevoegde letters aangewezen. Ze zijn gelegen in de vlakken, die in fig. 10, 12 en 14 zijn aangewezen. Het punt P stelt 't middelpunt van de knop der leidsche flesch voor.

I. PROEF MET DE CIRKELVORMIGE PLAAT.

A. in de as der plaat, die naar de aarde is afgeleid.

<i>h.</i>		in de punten.	1e waarn.	2e waarn.	berekend.
<i>g.</i>		<i>a</i>	0,040	0,050	0,043
<i>f.</i>		<i>b</i>	0,064	0,092	0,074
<i>e.</i>		<i>c</i>	0,084	0,093	0,091
<i>d.</i>		<i>d</i>	0,107	0,108	0,098
<i>c.</i>		<i>e</i>	0,106	0,085	0,100
<i>b.</i>	<i>i</i> <i>k</i> <i>l</i> <i>m</i>	<i>f</i>	0,104	0,075	0,098
<i>a.</i>		<i>g</i>	0,091		
	_____ . <i>n</i>	<i>h</i>	0,087		0,088
.	. . . <i>o</i>				
.	. <i>p</i>				
P.					

B. evenwijdig aan de afgeleide plaat.

	in de punten.	waargenomen.	berekend.
<i>a</i>		0,079	0,043
<i>i</i>		0,081	0,046
<i>k</i>		0,090	0,060
<i>l</i>		0,115	0,098
<i>m</i>		0,163	0,143
<i>n</i>		0,166	0,186
<i>o</i>		0,235	0,283
<i>p</i>		0,258	0,330

C. in de as der niet afgeleide plaat.

	in de punten.	waargenomen.	berekend.
<i>a</i>		0,632	0,668
<i>b</i>		0,581	0,565
<i>c</i>		0,459	0,484
<i>d</i>		0,418	0,420
<i>e</i>		0,392	0,370
<i>f</i>		0,328	0,330
<i>h</i>		0,276	0,249

II. PROEF MET DE PLAAT AAN DE EENE ZIJDE DOOR EEN RECHTE LIJN
BEGRENSD EN AFGELEID NAAR DE AARDE.

A. in de lijn uit P loodrecht op den rand der plaat neergelaten.

		in de punten.	waargenomen.	berekend.
c .		a	0,092	0,108
.		b	0,089	0,077
b .		c	0,062	0,058
d .	e f g h			
. . a .				
.				
∞				
.				
.				
P .				

B. evenwijdig aan de plaat.

	in de punten.	waargenomen.	berekend.
d	0,053		0,041
a	0,102		0,108
e	0,179		0,180
f	0,216		0,187
g	0,183		0,180
h	0,129		0,166

III. PROEF MET DE PLAAT, MET EEN CIRKELVORMIGE OPENING,
EN AFGELEID NAAR DE AARDE.

A. in de as der opening.

		l .	in de punten.	waargen.	berekend.
d .	.	a		0,271	0,264
c .	k .	b		0,136	0,149
b .	e f g h i	c		0,106	0,091
a .		d		0,50	0,059
∞		∞			

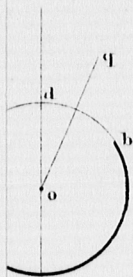
B. in de overige aangegeven punten.

in de punten.	waargenomen.	berekend.
<i>a</i>	0,260	0,264
<i>c</i>	0,221	0,237
<i>f</i>	0,158	0,146
<i>g</i>	0,083	0,076
<i>h</i>	zeer kleine uitslag.	0,028
<i>i</i>	niet waarneembaar.	0,013
<i>k</i>	zeer kleine uitslag.	0,021
<i>l</i>	niet waarneembaar.	0,018

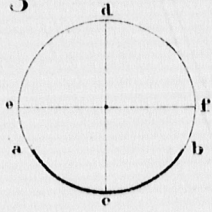
Ter beoordeeling van de wijze, waarop de cijfers dezer tabellen verkregen zijn, volgt hier eene opgave voor die van tabel C proef I. Kolom I bevat de letters, die de punten aanwijzen waarmee het middelpunt van 't proefbolletje moest samenvallen. Kolom II bevat de uiterste standen van het beeld aan dezelfde zijde van 't nulpunt op de schaal in m.M. In kolom III is het gemiddelde van die standen opgegeven en in kolom IV het gemiddelde van de voor elk punt bij herhaalde waarneming verkregen cijfers. Kolom V is uit de vorige verkregen door deze cijfers met een constant getal te vermenigvuldigen, zoodanig dat de som der verkregen producten gelijk was aan die der door berekening vroeger verkregen cijfers.

I.	II.	III.	IV.	V.
<i>a</i>	10 28 30	19,5	17,19	0,632
<i>b</i>	15 20 22	18	15,81	0,581
<i>c</i>	8 15 16	11,75	12,50	0,459
	5 20 21	12,75		
<i>d</i>	5 17 18	11,25	11,37	0,418
<i>e</i>	4 18 20	11,5	10,68	0,392
	7 13 14	10,25		
<i>f</i>	5 13 14	9,25	8,93	0,328
	4 15 17	10		
<i>h</i>	4 11 12	7,75	7,5	0,276
	3 11 12	7,25		
<i>f</i>	4 12 13	8,25		
<i>e</i>	5 15 17	10,5		
<i>d</i>	5 17 19	11,5		
<i>c</i>	4 20 23	12,75		
<i>b</i>	5 20 23	13,25	13,62	
	8 19 21	14		
<i>a</i>	9 21 22	15,25	14,87	
	6 22 24	14,5		

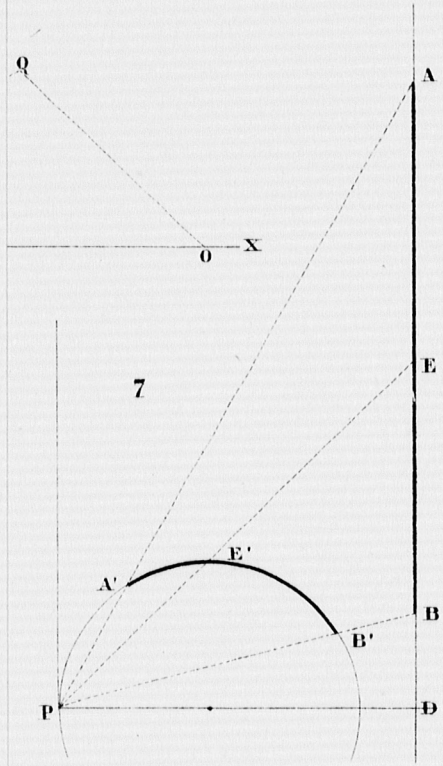
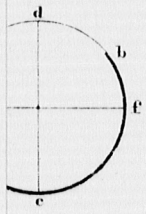
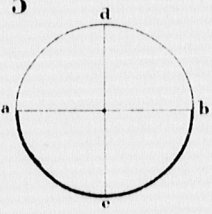
Uit de vergelijking van de uitkomsten der waarneming met die van de berekening blijkt, dat waar de laatste een toe- en afnemen van de waarde der potentiaalfunctie constateert, dit door de waarneming wordt bevestigd. Daarentegen wijken de numerische waarden door de laatste verkregen, soms zoo zeer van die door berekening verkregen af, dat ze volstrekt niet mogen gelden als de betreffende waarde der potentiaalfunctie in die verschillende punten voor te stellen. Trouwens eene volkomene overeenstemming zal uit den aard der zaak nimmer kunnen verkregen worden, aangezien de gegevens, waarop de berekening steunt, zooals boven reeds is aangemerkt, nooit volkomen verwezenlijkt kunnen worden. Tevens dient men in 't oog te houden, tot welke onnauwkeurigheden een onderzoek als het bovenvermelde aanleiding geeft. In weerwil van dit alles blijkt echter genoegzaam, dat ook zonder behulp van de voorstelling door krachtlijnen, de uitkomsten van Faraday kunnen verkregen worden, wanneer men alleen uitgaat van *werking op afstand*.



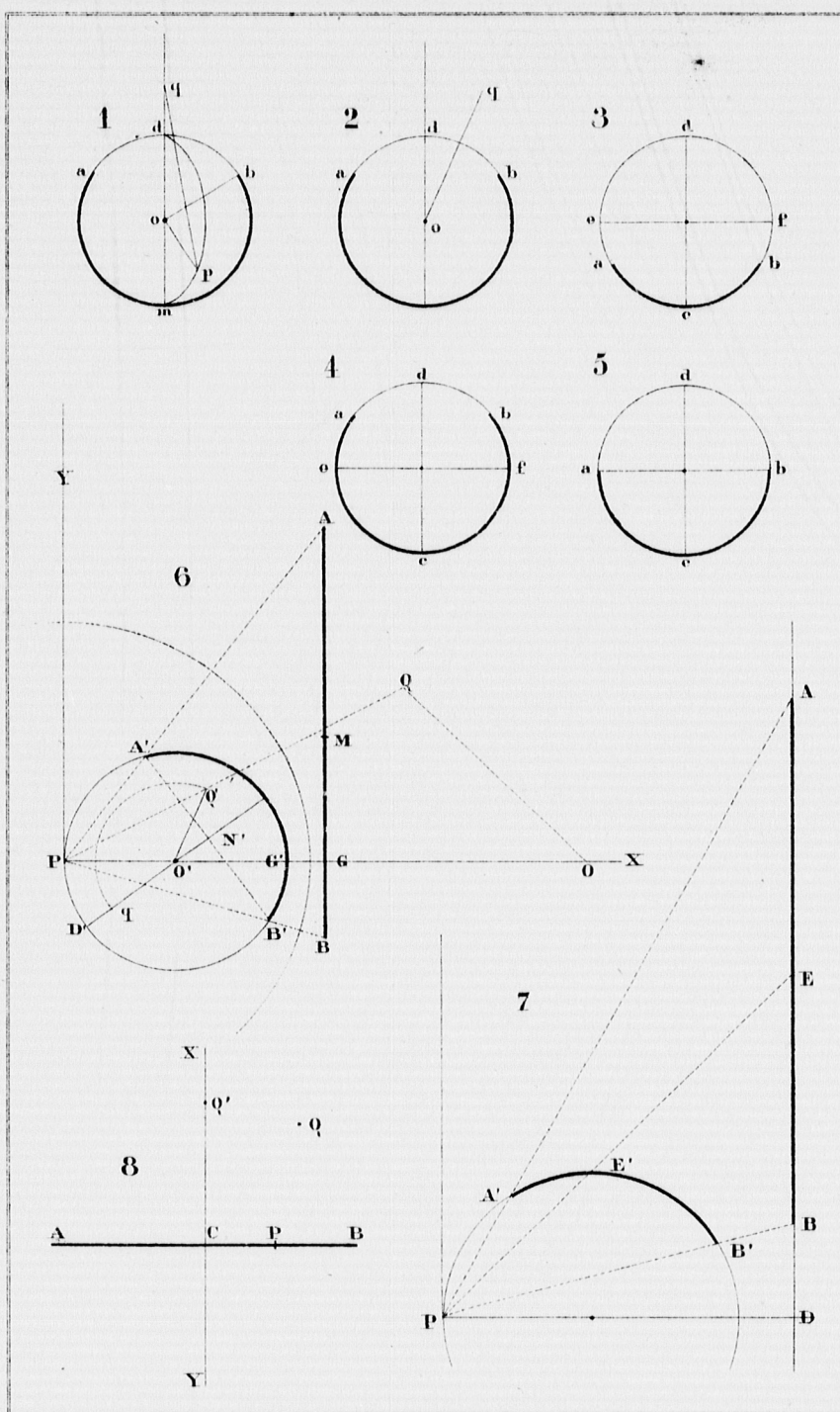
3

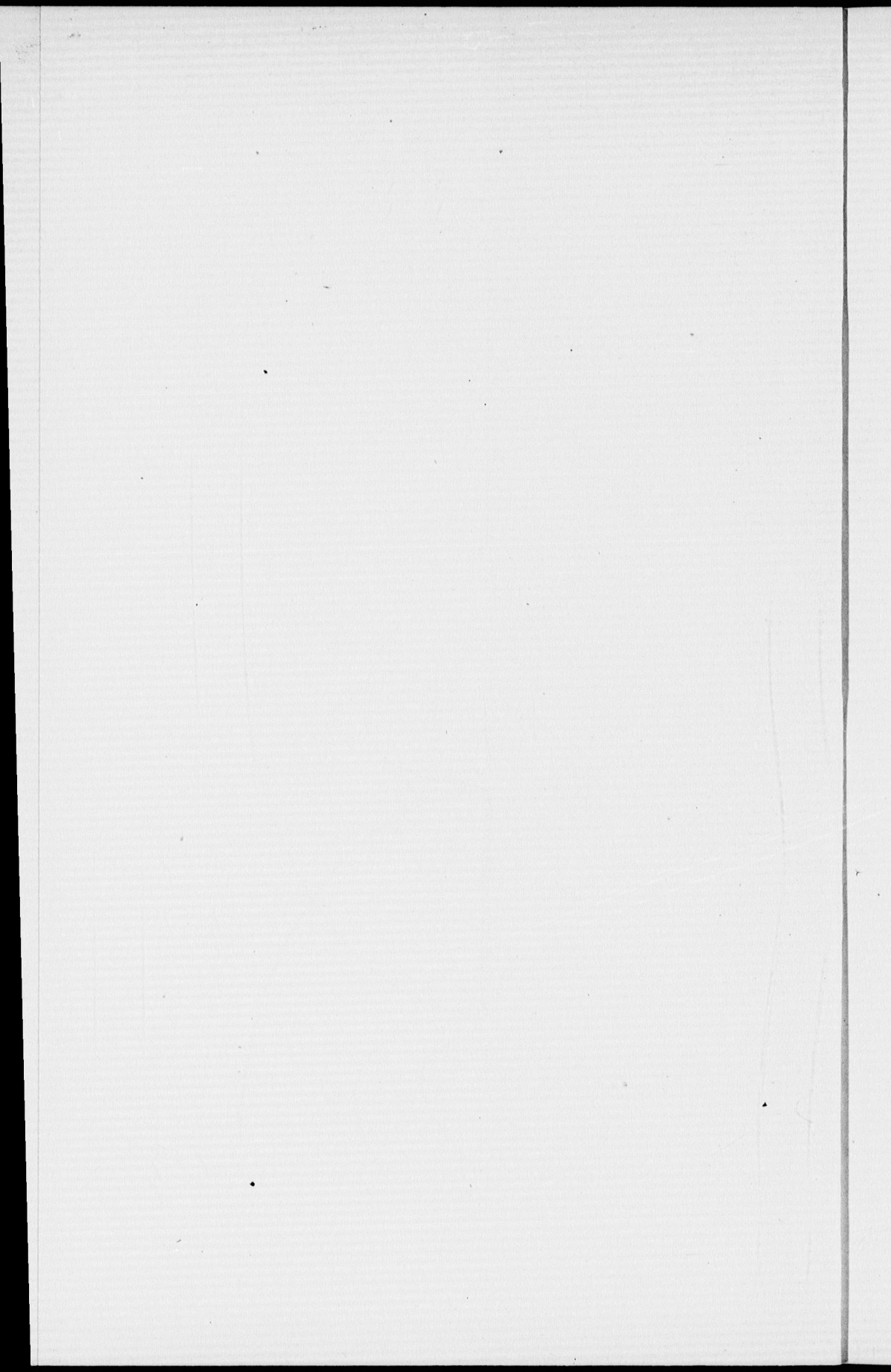


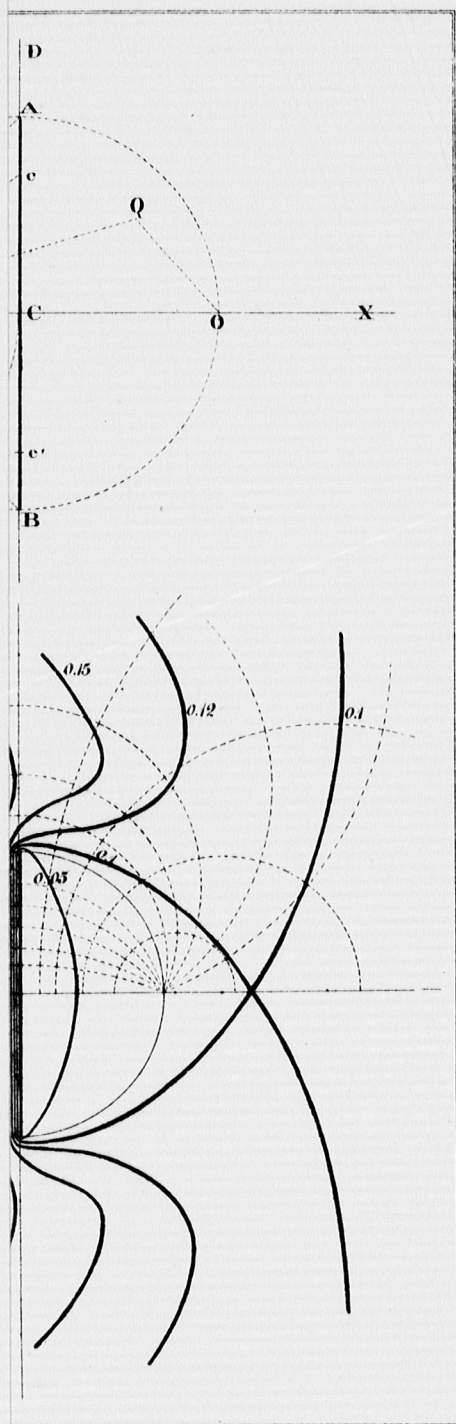
5

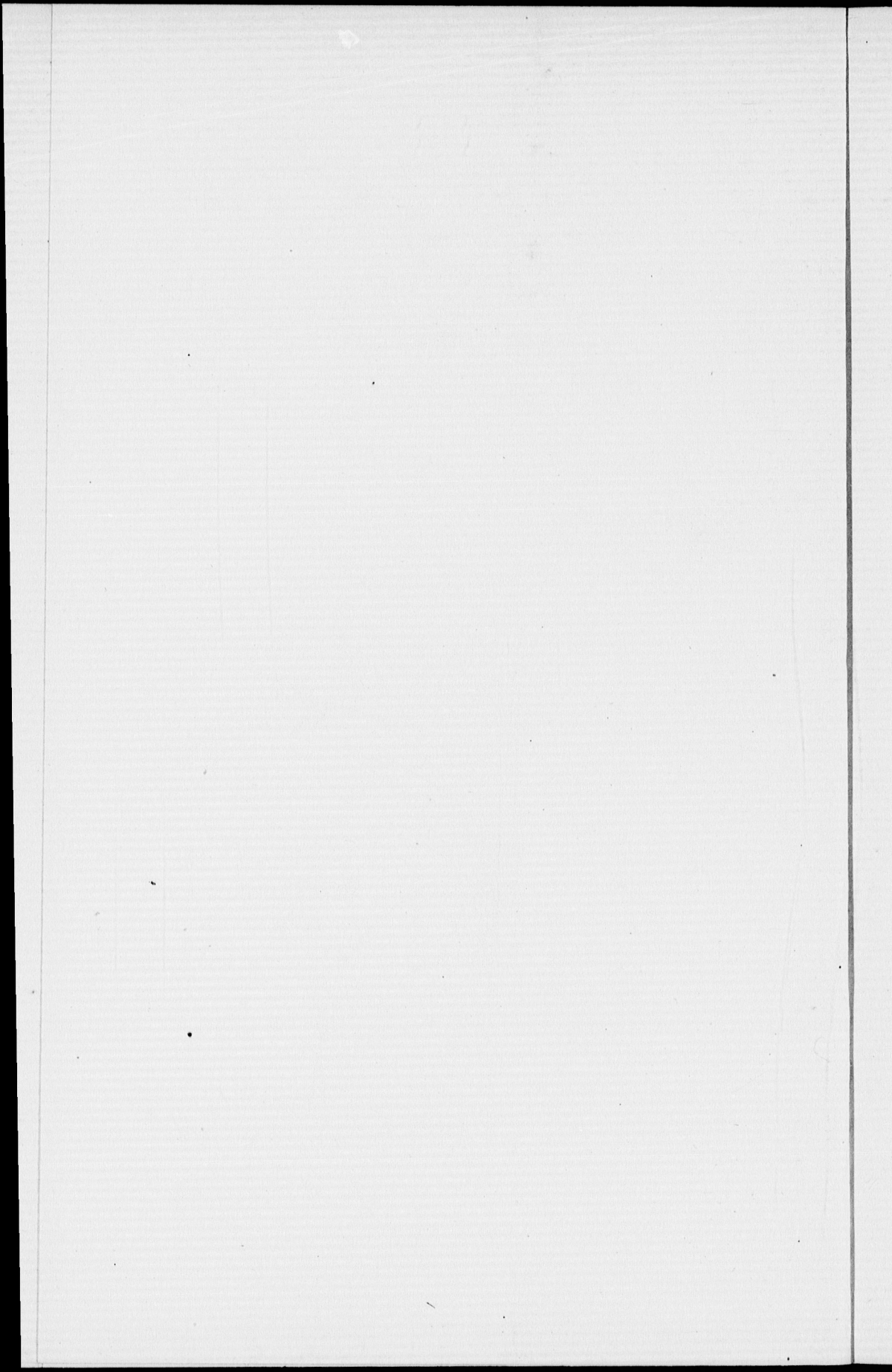


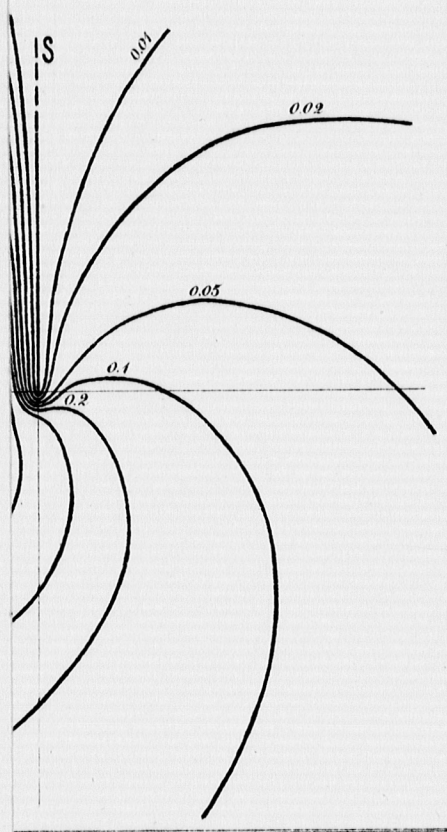
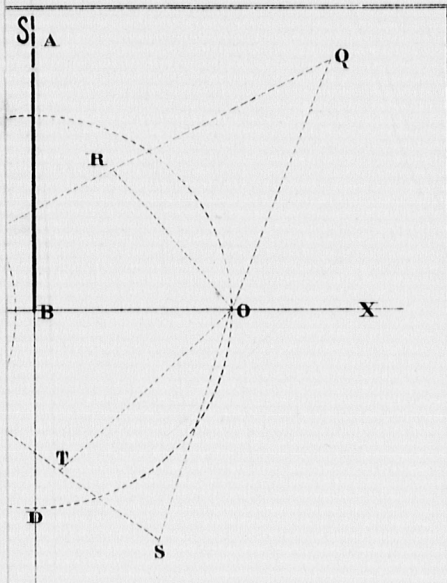


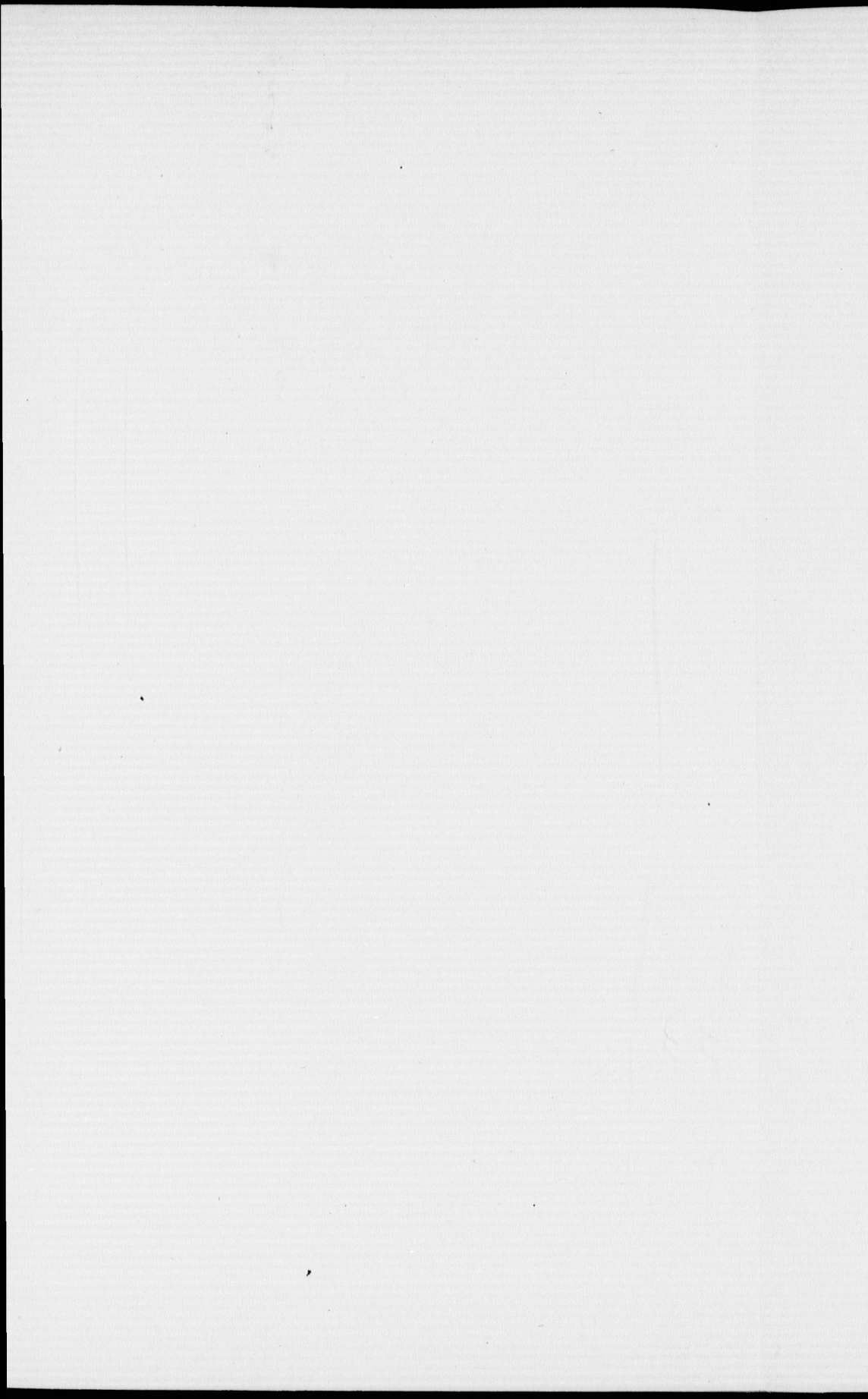


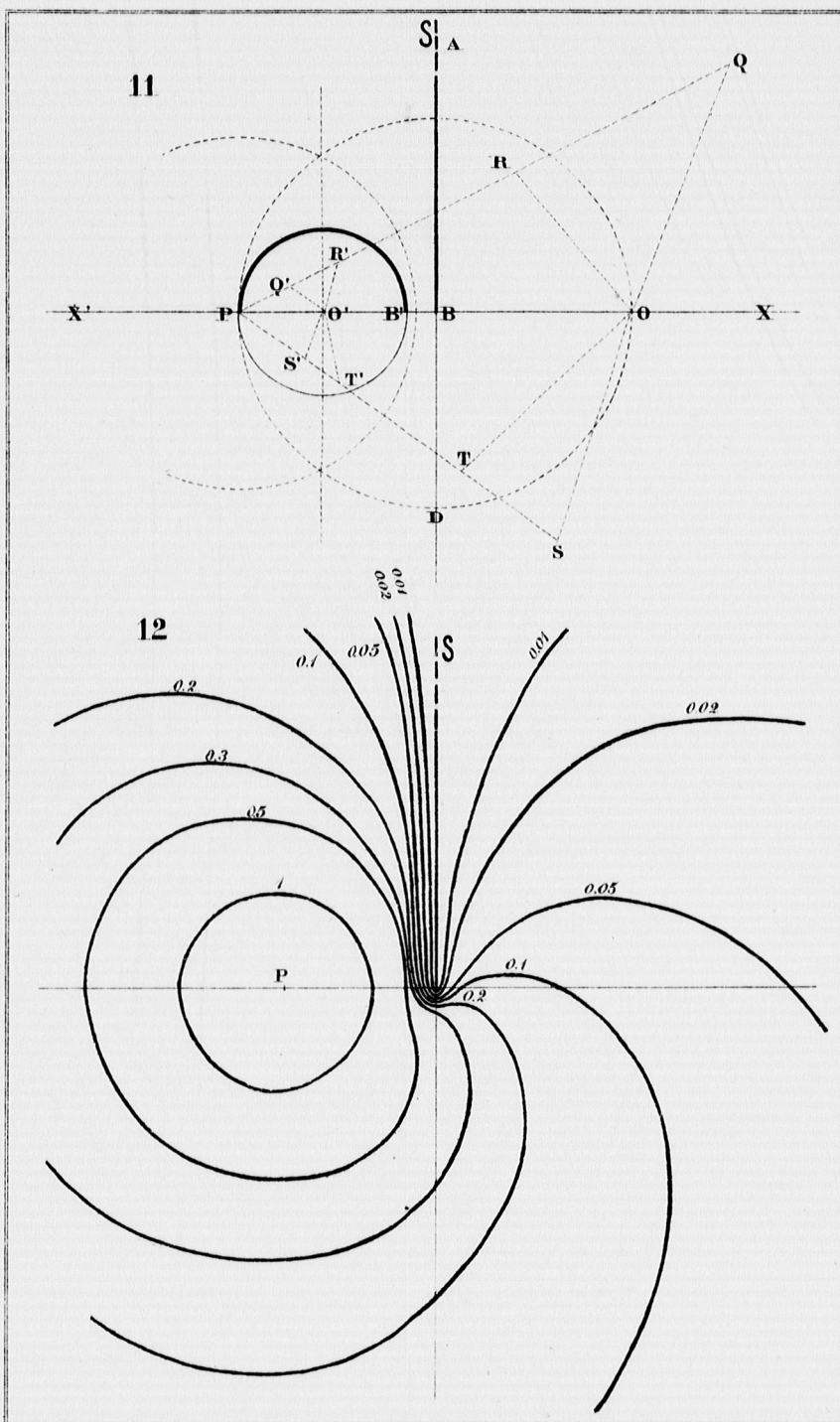




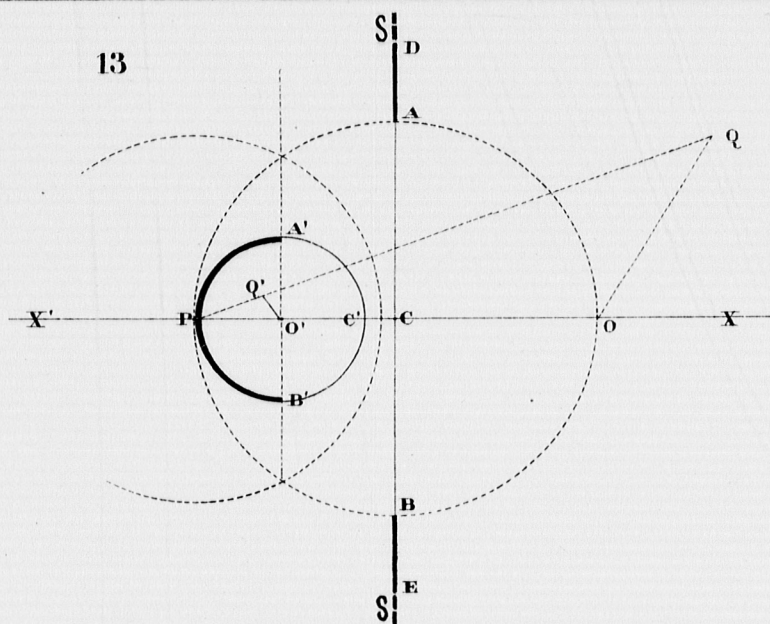




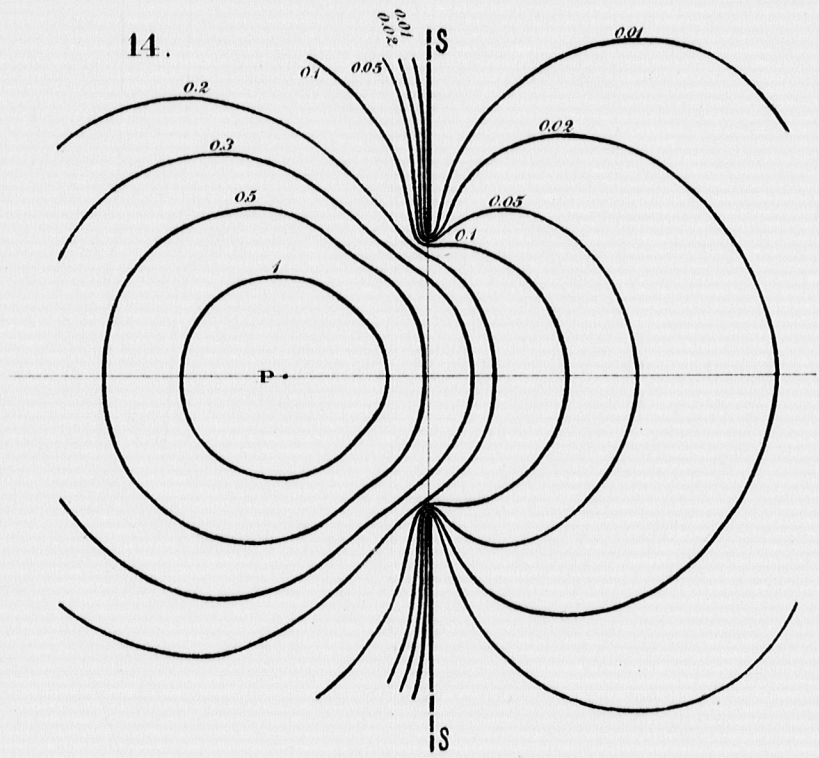


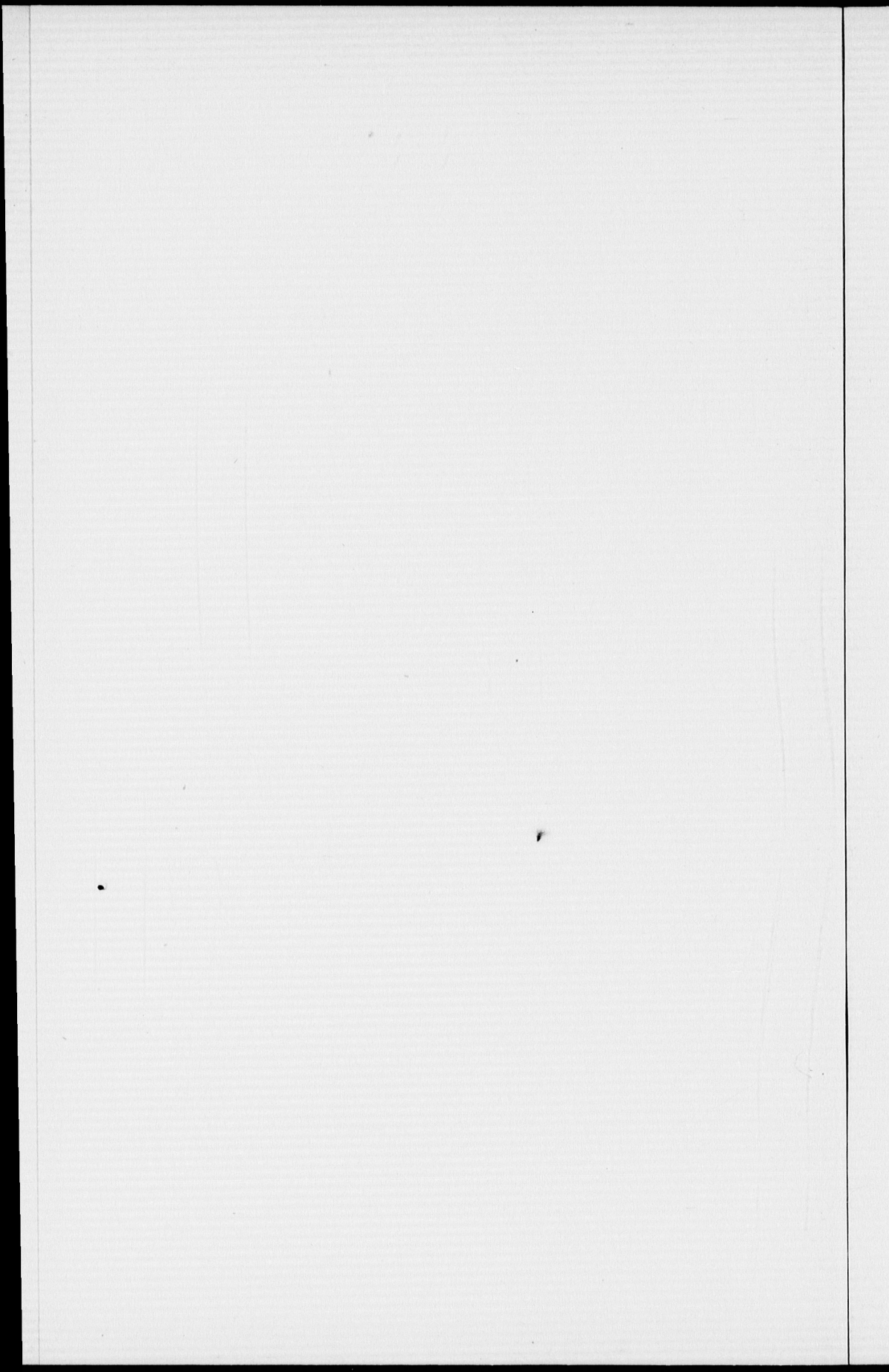


13



14.





STELLINGEN.

I.

De redeneering, waardoor Carnot (*Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*) zoekt te constateeren, dat de volkomen juistheid der uitkomsten, door toepassing der differentiaal- en integraalrekening verkregen, berust op 't beginsel van compensatie van gemaakte fouten, mist de noodige strengheid.

II.

De definitie van differentiaal eener functie als de oneindig kleine aangroeiing dier functie is af te keuren.

III.

Ten onrechte stelt Lagrange de methode, die hij volgt in zijne „*Théorie des fonctions analytiques*” boven die, welke gevolgd wordt in de differentiaal- en integraalrekening.

IV.

Terecht zegt Durège („Elemente der Théorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse):

„Die äussere Consequenz und die harmonische Uebereinstimmung in allen ihren Theilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dass man jedesmal wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann nog als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme is so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen.”

V.

De proef door middel der torsiebalans van Coulomb als bewijs voor de wet van electrische aantrekking en afstooting is niet de eenvoudigste en de zekerste.

VI.

De uitkomsten door Faraday verkregen bij zijne onderzoekingen over de werking eener electrische massa aan de tegengestelde zijde eener afgeleide plaat, bewijzen nog niet, dat er een medium noodig is om die werking tot op een afstand voort te planten.

VII.

Eene in alle opzichten voldoende verklaring van de werking van den radiometer ontbreekt nog.

VIII.

Ten onrechte wordt in sommige leerboeken beweerd, dat licht en warmte onmiddellijk scheikundige verbindingen tot stand brengen.

IX.

De methode van Wanklijn en Chapman ter bepaling van 't gehalte aan stikstofhoudende stoffen in drinkwater, geeft geene zekere uitkomsten.

X.

De verklaring door Reye gegeven van 't ontstaan van cyclonen is de meest waarschijnlijke.

XI.

Bathybius bestaat niet.

XII.

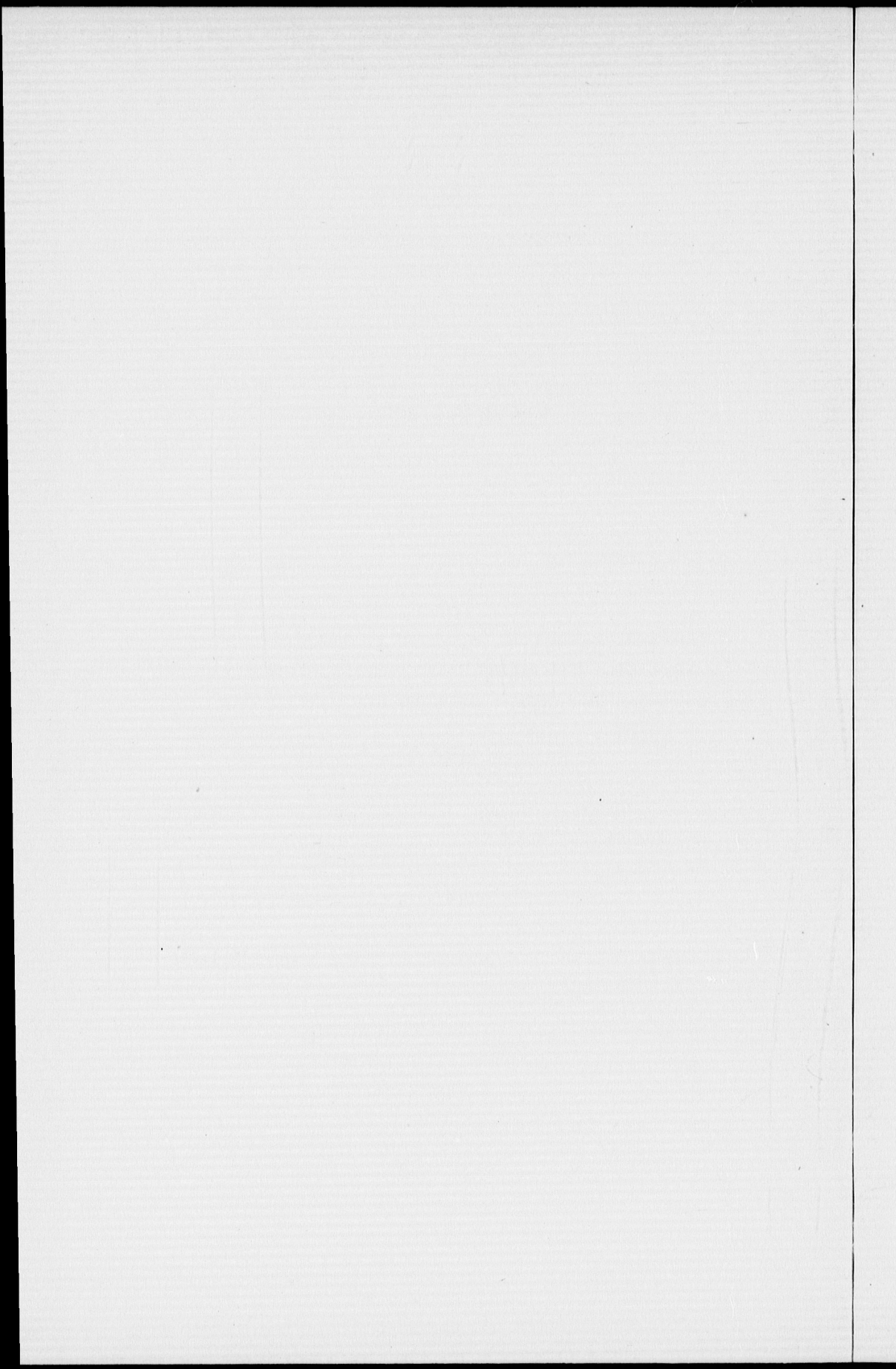
Asparagine komt waarschijnlijk in 't algemeen in de plant voor als ontledingsproduct door oxidatie van eiwitstoffen.

XIII.

Het gezicht is voldoende om ons het denkbeeld van eene ruimte in drie afmetingen te verschaffen.

XIV.

Bij 't eerste onderwijs in de wiskunde is 't af te keuren alle daarbij behandelde eigenschappen te bewijzen.



INHOUD.

Bladz.

INLEIDING.

EERSTE HOOFDSTUK.

- I. ONTWIKKELING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM IN EEN PUNT DAAR BUITEN GELEGEN VOLGENS EENE REEKS ' 1.
- II. TOEPASSING DER ALGEMEENE REEKS VOOR 'T GEVAL, DAT HET PUNT IS GELEGEN OP DE OMWENTELINGSAS 10.

TWEEDE HOOFDSTUK.

- I. BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE VAN EEN GEÏSOLEERD GELADEN SEGMENT EENER GELEIDENDE BOLVORMIGE SCHIL IN EEN PUNT VAN DE AS VAN 'T SEGMENT 12.
- II. BEPALING DER POTENTIAALFUNCTIE IN EEN WILLEKEURIG PUNT 14.

DERDE HOOFDSTUK.

- I. INVERSIE VAN 'T VLAKE VAN EEN CIRKEL TEN OPZICHTE VAN EEN PUNT BUITEN DEN CIRKEL ALS INVERSIE-MIDDELPUNT . 26.
- II. BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE EENER NAAR DE AARDE AFGELEIDE CIRKELVORMIGE SCHIJF, GEÏNFLUENCEERD DOOR EENE IN EEN PUNT BUITEN DE SCHIJF GECONCENTREERDE ELECTRISCHE MASSA, IN EEN WILLEKEURIG PUNT 31.

VIERDE HOOFDSTUK.

- I. BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE EENER GEÏSOLEERD
GELADEN CIRKELVORMIGE SCHIJF IN EEN PUNT VAN DE AS
DER SCHIJF 36.
- II. BEPALING DER POTENTIAALFUNCTIE V IN EEN WILLEKEURIG PUNT 37.
- III. BEPALING VAN DE POTENTIAALFUNCTIE DER VRIJE ELECTRICI-
TEIT OP EENE SCHIJF, WAAROP DE EENHEID VAN POSITIEVE
ELECTRICITEIT, GEPLAATST IN EEN WILLEKEURIG PUNT, IN-
FLUENCEEREND WERKT 39.

VIJFDE HOOFDSTUK.

BENADERDE WAARDEN VOOR DE POTENTIAALFUNCTIE IN GEVAL
DE SCHIJF ZOOWEL GEÏSOLEERD BLIJFT, ALS DAT ZIJ NAAR
DE AARDE IS AFGELEID. DOORSNEDE VAN EENIGE NIVEAU-
VLAKKEN MET EEN PLAT VLAKE GAANDE DOOR DE AS DER
SCHIJF 42.

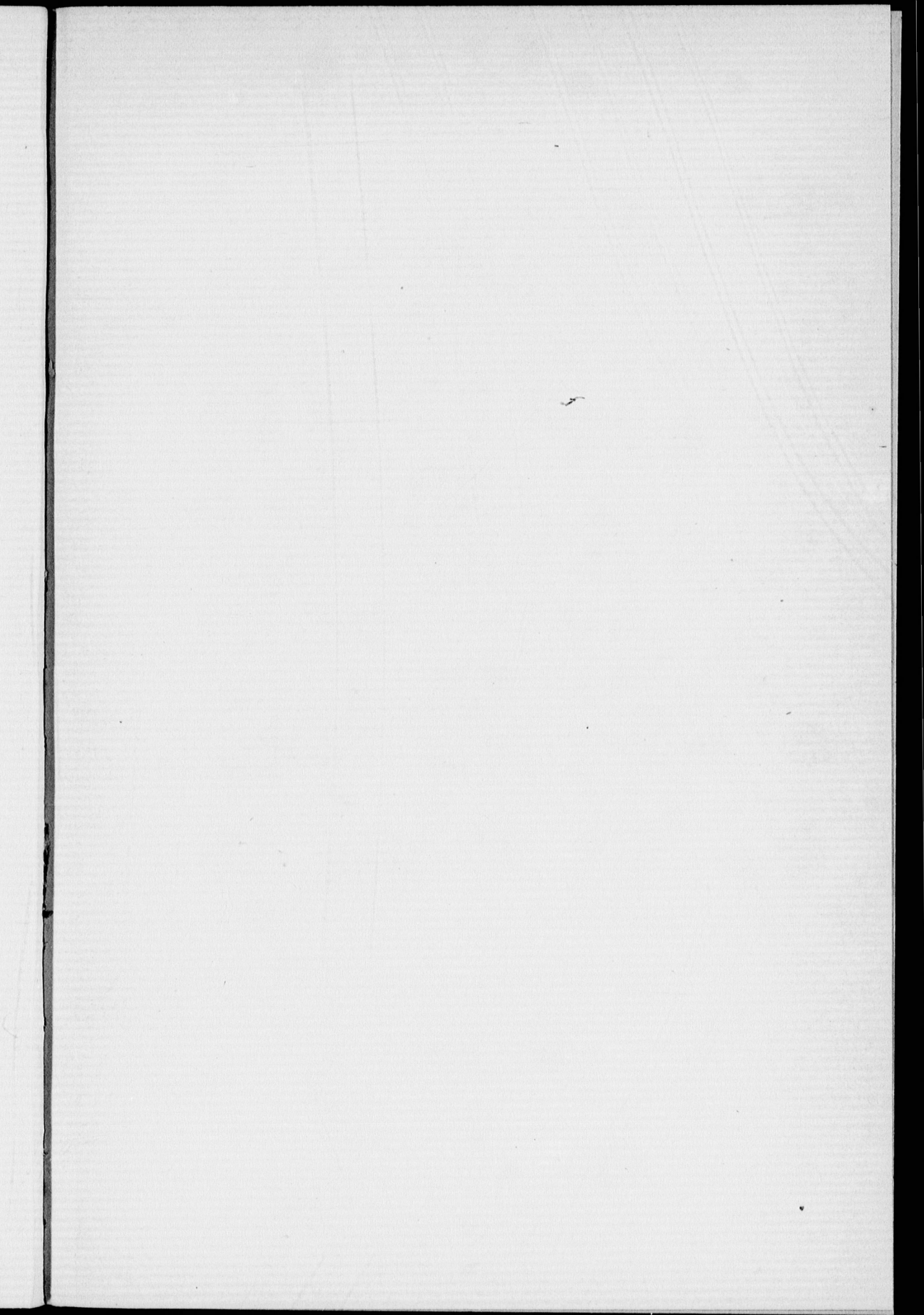
ZESDE HOOFDSTUK.

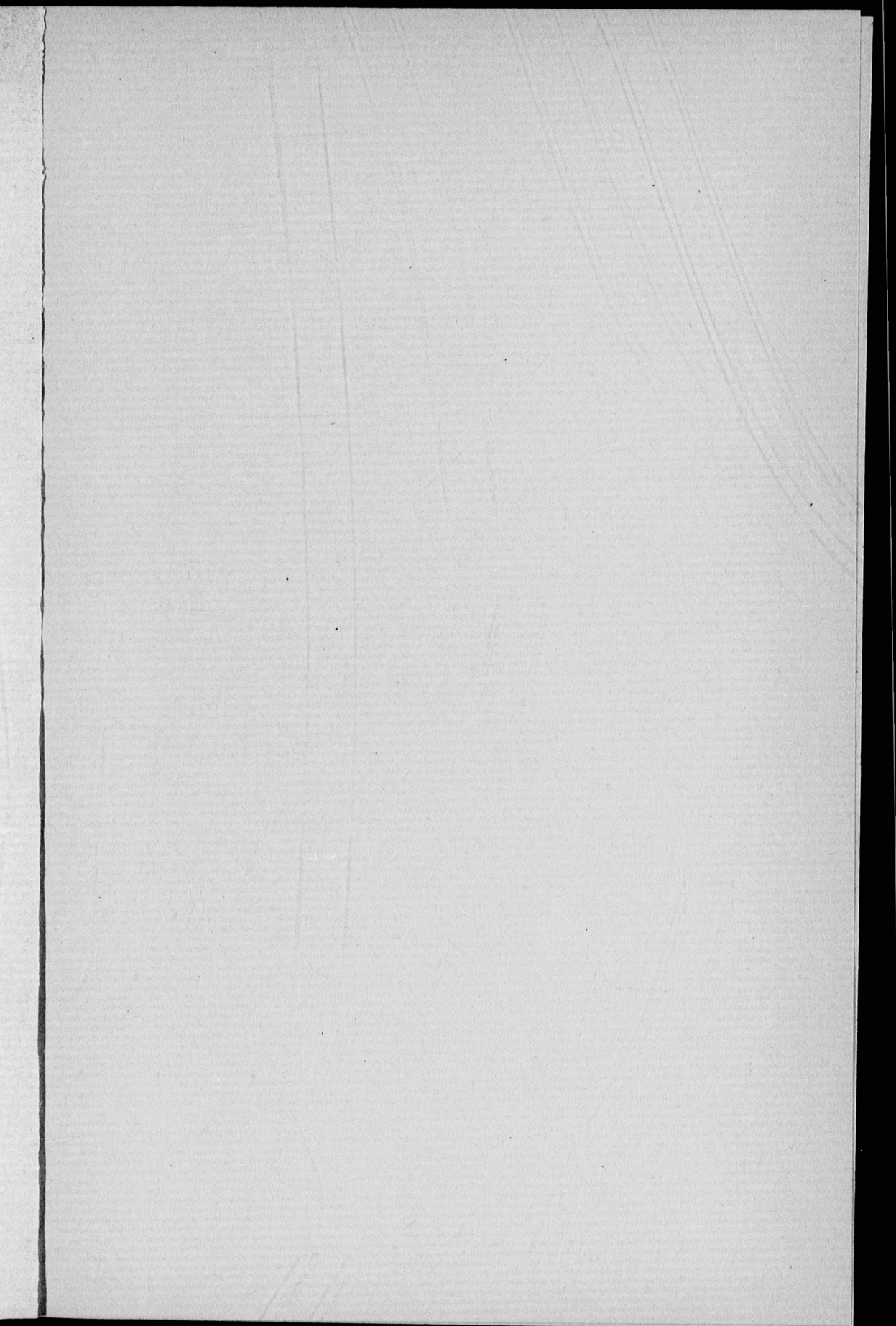
- I. TOEPASSING DER VOORGAANDE BESCHOUWING OP EEN SCHERM
AAN DE EENE ZIJDE BEGRENSD DOOR EENE RECHTE LIJN EN
ZICH OVERIGENS ONBEPAALED VER UITSTREKKENDE 47.
- II. TOEPASSING OP EEN SCHERM MET CIRKELVORMIGE OPENING . 52.

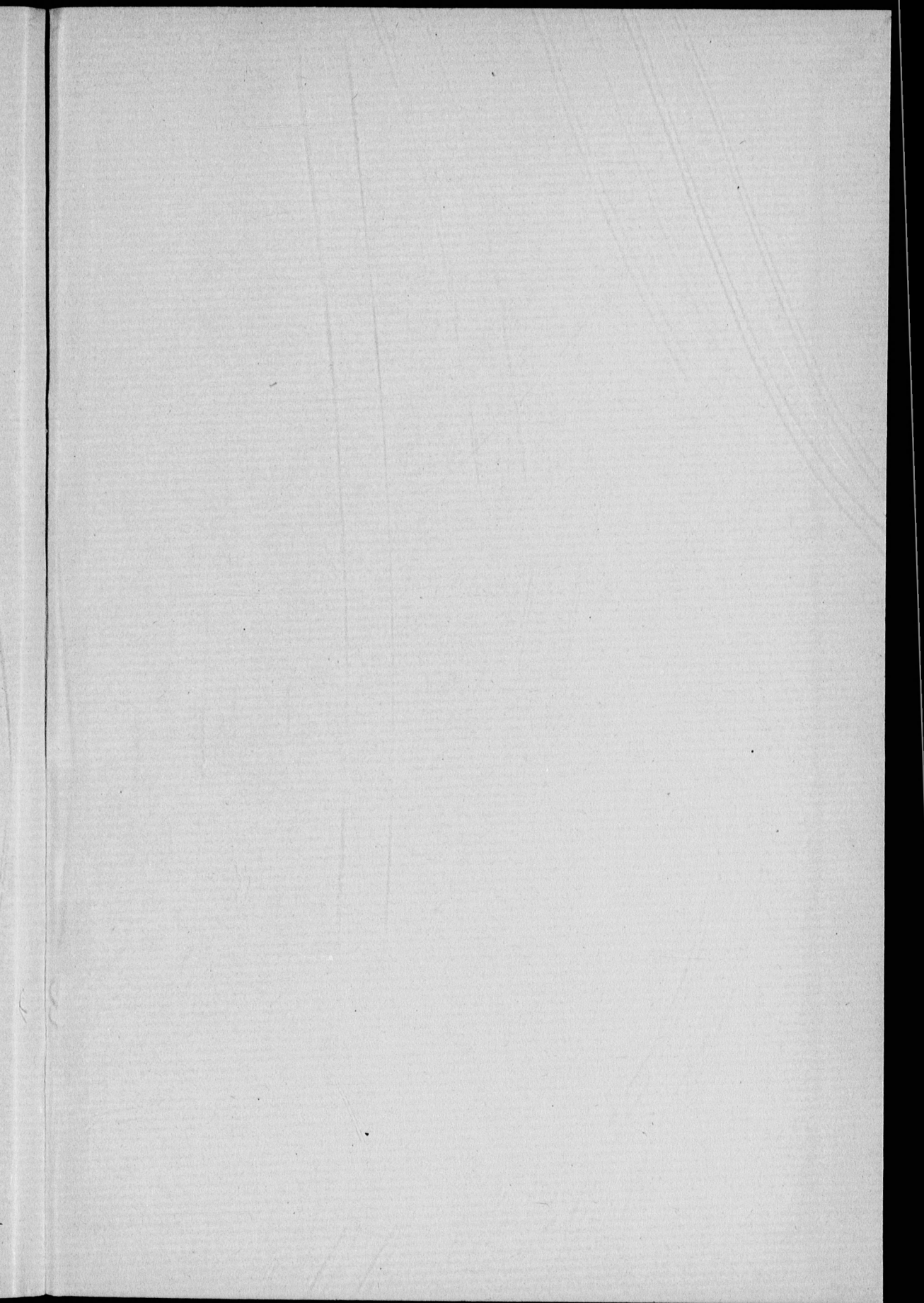
ZEVENDE HOOFDSTUK.

PROEFONDERVINDELIJK ONDERZOEK 57.

STELLINGEN 67.







Dis
Groni

18