Hoe men uit metingen van willekeurige onderlinge afstanden van de randen en de middelpunten der Zon en andere hemelligchamen de parallax van gene bepalen kan.

(Verg. P. A. HANSEN'S Theorie der Sonnenfinsternisse etc. en Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venus vorübergänge vor der Sonnenscheibe etc.)

DOOR

Jhr. Mr. A. J. SANDBERG.

ZWOLLE,
W. E. J. TJEENK WILLINK.
1875.

Hoe

on

e

(

(Verg.

Bes

II B

gae

Hoe men uit metingen van willekeurige onderlinge afstanden van de randen en de middelpunten der Zon en andere hemelligchamen de parallax van gene bepalen kan.

(Verg. P. A. HANSEN'S Theorie der Sonnenfinsternisse etc. en Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venus vorübergänge vor der Sonnenscheibe etc.)

DOOR

Jhr. Mr. A. J. SANDBERG.

ZWOLLE,
W. E. J. TJEENK WILLINK.
1875.

Bij den laatsten overgang van Venus over de schijf der Zon, is men op verschillende punten, onder anderen te Ispahan niet in staat geweest in- en uitwendige contacten waar te nemen. Zoo heeft men ook de eerste inwendige aanraking te Réunion en te Mauritius, waar lord Lindsay zich bevond, niet kunnen zien, en luidt een telegram van Janssen, die te Nangasaki was: Janssen failed, internal contact uncertain several seconds, ofschoon hij zelf 10 December telegrafeert: Ik heb Venus op de corona gezien zonder ligamenten (banden), inwendig contact maar zonder ligamenten. Ik wil daarom in de volgende formules aantoonen, hoe men niet alleen uit den afstand der randen = o maar oo $\pm$ i s', waar s' de straal der Zon en i een willekeurig getal is, gener parallax bepaalt.

Het is in de eerste plaats noodig uit den afstand den straal des schaduwkegels, dien wij u noemen willen, af te leiden. Men legge door de plaats der waarneming en de middelpunten van de hemelligchamen, waarvoor ik hier de Zon en Venus aanneem, een vlak en trekke eene regte lijn uit de plaats van waarneming naar het middelpunt van Venus. Noemt men dan die lijn Z', dan heeft men in den driehoek VOZ'', wanneer VZ'' = Z', OZ = u en $\angle V = a$, $\mathrm{tg}\ a = \frac{u}{Z'}$, hier duidt V Venus, Z'' het Zenith en u den straal van den schaduwkegel aan, gezien uit het middelpunt van Venus tot aan het Zenith.

Vormt men een dergelijken driehoek voor de Zon dan heeft men evenzoo, zoo men den afstand van Zon en Venus = mr stelt, den hoek in de Zon = a′ in den driehoek ZO Z′ Z V = mr, VO = Z′, ∠ Z. = a′, $\operatorname{tg} a' = \frac{u}{Z' + mr}$ (zie de figuur aan het einde).

Zij b = a′ — a dan is:

$$\operatorname{tg} b = \frac{\rho' u}{Z'(Z' + mr) + u^2}$$ of voor Z′ = Z — z, waar Z de afstand van de Zon tot aan het middelpunt der aarde en z eene lijn evenwijdig aan Z′, die de Z coördinaat van de plaats der waarneming van af het middelpunt gerekend op die lijn is:

$$\operatorname{tg} b' = \frac{mru}{Z(Z + mr) - (2Z + mr)z + z^2 + u^2}$$

Neemt men nu Z = mr, z = $m\rho_0 \sin H$ (waar H bijna de hoogte van het middelpunt der zon aanduidt niet gecorrigeerd voor refractie) en $r_{,} + r = r'$ dan is hier

$$u = (r_{,}\, r' - (r + r')\, \rho_0 \sin H)\frac{m}{r}\, \operatorname{tg.} b.$$

Dit is dus de waarde van het verschil van den straal van den schaduwkegel gezien van uit de Zon of uit Venus. Heeft men nu randenafstanden gemeten en daarvoor de waarde van dien straal = U bevonden, noemt (u) dien straal voor randaanrakingen, dan is:

$$\pm\, U = (u) - (r_{,}\, r' - (r_{,} + r')\, \rho_0 \sin.\, H)\frac{m}{r}\, \operatorname{tg.} b'$$

Hier zijn 4 gevallen waarnaar de teekens moeten gesteld worden:

1. Wanneer de afstand der ruimte van de digtste Venus- en Zonneranden gemeten is, moet de waarde van (U) voor inwendige randcontacten, en het bovenste teeken van U gebruikt worden.

2. Is de afstand van den tegenovergestelden Venusrand van den digtsten Zonnerand gemeten, dan moet de waarde van (u) voor uitwendige contacten, en insgelijks + U gebruikt worden.

3. Is de afstand van de het verst van elkander verwijderde randen van Venus en de Zon gemeten dan moet men de waarde van (u) voor uitwendige randaanrakingen, maar — U gebruiken.

4. Is de afstand van den naast bijgelegen Venusrand van den meest verwijderden Zonnerand gemeten dan moet men (u) voor inwendige randaanrakingen en — U gebruiken.

De vraag blijft nu hoe men (u) voor uit- en inwendige aanrakingen bepalen, en daaruit de parallax der zon afleiden kan, als controle van U, of ook voor zich zelf.

Noemt men de stralen voor den gemiddelden afstand van Venus en van de Zon ms en ms', en de afstand van Venus tot de zon mr, de hoek, die den schaduwkegel doet ontstaan f, dan is

$$\sin f = \frac{s' \pm s}{r}$$

waar het bovenste teeken voor uitwendige, het onderste voor inwendige aanrakingen geldt.

Trekke men nu wederom de overige lijnen door de middelpunten van Venus en de Zon, en eene evenwijdige daaraan door het middelpunt der aarde, die de Z van vroeger is, legge loodregt daarop een vlak, dat ook door het middelpunt der aarde gaat, en waarop de twee andere regthoekige condinaten P en Q, in de doorsnede van dit vlak met de ekliptika gelegen, zich in positieve rigting P Oostelijk en Q Noordelijk uitstrekken. 1)

Laat verder u' de straal van den cirkel zijn, dien de schaduwkegel in het vlak PQ afsnijdt, dan is streng, wanneer men de eenheid van al de lineaire grootheden door m aanduidt:

$$u' = (Z \sin f \pm ms) \sec f$$

maar bij Venus overgangen is het maximum van f ongeveer 22′, men kan dus sec f = 1 stellen, en Z is ongeveer gelijk aan den afstand van Venus tot de aarde. Zij weer Z = mr, dan is daar bijna $r_{,} = r' - r$ is, wanneer r′ den uit de tafelen genomen voerstraal der Zon aanduidt

---

1) De doorsnede der twee genoemde vlakken ligt niet noodwendig in het Oosten men moet dus de uitdrukking Oost en Noord in den zin van rigting links en 90° verder bij eene wending van het Zuiden naar het Noorden door het Oosten verstaan.

De lijn door het middelpunt van Venus en de Zon of liever de evenwijdige daaraan door het middelpunt der aarde zal alleen wanneer de eklips centraal is in de ekliptika vallen. Neemt men nu aan dat deze lijn in den meridiaan valt, dien men tot uitgangspunt kiest, dan ligt op 90° van daar, dus in het Oosten de doorsnede van het vlak, waarvan deze lijn de pool is met de ekliptika. Men moet dus altijd van uit het punt der ekliptika rekenen, waarin de Zon op het oogenblik der centraliteit is, of de afwijking van de lijn door het middelpunt van Venus en de Zon van het vlak der ekliptika buiten aanmerking laten, eene afwijking, die van meer of minder beteekenis is, naar gelang van het oogenblik der eklips; overigens is het bezwaar theoretisch, daar de formules niet veranderen voor een ander punt van doorsnede. De verschillen in R A voor het eerste en laatste contact zijn voor 1874 bijna 14′ — 5′ Zon-Planeet.

$$u' = m\frac{r_{\prime}}{r} \sin \Delta' \pm m \frac{r'}{r} \sin \Delta.$$

wanneer men Δ en Δ' de hoeken noemt, waaronder men op den gemiddelden afstand der aarde van de zon de stralen van Venus en de Zon ziet, en dus $s = \sin \Delta$ $s' = \sin \Delta'$ stelt.

Men kan f ook in functie van u' en Δ uitdrukken en heeft dan

$$\sin f = \frac{1}{mr} (u' \mp m \sin \Delta).$$

De formules voor P, Q en Z zijn:

$$P = mr_{\prime} \cos b \sin (l - \lambda')$$

$$Q = mr_{\prime} (\sin b \cos \beta' - \cos b \sin \beta' \cos (l - \lambda'))$$

$$Z = mr_{\prime} (\sin b \sin \beta' + \cos b \cos \beta' \cos (l - \lambda'))$$

waar l en b de geocentrische lengte en breedte van Venus en λ' en β' de aphrodicentrische lengte en breedte der Zon zijn. Daar $\cos (l - \lambda')$ zeer klein is, kan men schrijven

$$Q = mr_{\prime} \sin (b - \beta')$$

$$Z = mr_{\prime} \cos (b - \beta')$$

of ook $Z = mr_{\prime}$

Men moet nu voor de voorloopige rekeningen uit de Venustafels eenige heliocentrische lengten, breedten en stralen in de nabijheid van den conjunctietijd nemen, en voor dezelfde tijden uit de Zonnetafels de lengten, breedten en stralen, benevens de helling van de ekliptika en de tijdvergelijking. Men kan dan later de waarnemingen gebruiken om de tafelfouten te verbeteren.

De Zonnestraal werd reeds boven met r' aangeduid, de Zonnenlengte moet l' en de Zonnenbreedte b' genoemd worden. Uit deze grootheden moeten vervolgens de geocentrische lengten, breedten en afstanden van Venus berekend worden. Deze noem ik l, b en r.

De volgende vergelijkingen zijn voor deze rekening doelmatig:

$$r_{,} \cos b \sin (l - \lambda) = r' \sin (l' - \lambda)$$

$$r_{,} \cos b \cos (l - \lambda) = r' \cos (l' - \lambda) + r \cos \beta$$

$$r_{,} \sin b = r' \sin b' + r \sin \beta$$

In deze vergelijkingen moet de aberratie ingevoerd worden, want daar het verschijnsel van den Venusovergang op de schijnbare plaatsen van Venus en de Zon berust, zoo moet men van nu af onder l en b de schijnbare geocentrische lengten en breedten van Venus, onder l′ de schijnbare lengte van de Zon verstaan.

Daar de aan te wenden aphrodicentrische lengten en breedten van de Zon, zooals van zelf spreekt aan de zooeven genoemde schijnbare plaatsen beantwoorden moeten, kan men die uit de daartoe betrekkelijke strenge vergelijkingen, die op dezelfde wijze als de vorige vergelijkingen gevormd worden, afleiden, namelijk wanneer men die wederom λ' en β' noemt:

$$r \cos \beta' \sin (\lambda' - l) = r' \sin l' - l)$$

$$r \cos \beta' \cos (\lambda' - l) = r' \cos l' - l) - r_{,} \cos b$$

$$r \sin \beta' = r' \sin b' - r_{,} \sin b.$$

Daar evenwel het onderscheid, dat door invoering der aberratie ontstaat, klein is, kan men deze korter door differentialen bepalen en de formules verkorten. Zij
de aberratie in Zonnenlengte δ l′
in geoc. Venuslengte δ l
in geoc. Venusbreedte δ b
zoo dat zij bij de ware plaatsen gevoegd moeten worden om de schijnbare te vormen, dan verkrijgt men:

$$\lambda' = 180^\circ + \lambda + \delta\, l' + \frac{r_{\prime}}{r}\,(\delta\, l' - \delta\, l)$$

$$\beta' = -\beta - \frac{r_{\prime}}{r}\,\delta\, b$$

die eene genoegzame naauwkeurigheid bezitten.

De geheele duur van den voorbijgang is 4 tot 6 uur, en in die tijdruimte komen de bewegingen van Venus en de Zon der gelijkvormigheid zoo nabij, dat men die gelijkvormig stellen kan. Men behoeft dus niet meer als drie plaatsen van Venus en de Zon te berekenen, met intervallen van 2 à 3 uren. Nadat men deze plaatsen berekend heeft, berekent men voor ieder derzelve vooreerst de coördinaten:

$$P_{\prime} = m r_{\prime} \cos b \sin (l - \lambda')$$
$$Q = m r_{\prime} \sin (b - \beta')$$

Men kan $r_{\prime}$ standvastig nemen, daar er weinig verschil is in den afstand van Venus tot de aarde. Laten de drie waarden van P zijn:

$$P_{-1},\ P_0,\ P_{\prime}$$
$$Q_{-1},\ Q_0,\ Q_{\prime}$$

en P_0 en Q_0 in de nabijheid van den tijd der conjunctie genomen zijn. Zij voorts:

$$n \sin N = \tfrac{1}{4}\,(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{4}\,(Q_1 - Q_{-1})$$

of

$$n \sin N = \tfrac{1}{6}\,(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{6}\,(Q_1 - Q_{-1})$$

en berekene hieruit n en N, evenzoo als:

$$\gamma = Q_0 \sin N - P_0 \cos N$$

$$\mu = 15\, T_0 - \frac{15}{n}\,(Q_0 \cos N + P_0 \sin N)$$

waar T_0 de ware Zonnetijd van den eersten willekeurigen meridiaan is, waarvoor P_0 en Q_0 genomen zijn. Hier is:

n de gemeenschappelijke beweging van de Zon en van Venus van uur tot uur;

N de hoek, dien deze beweging met de projectie van den door het punt (λ', β') 1) gaande breedtecirkel maakt, bepaalt dus in realiteit de veranderingen in den positiehoek van Venus en de Zon van af den breedtecirkel.

γ de kortste afstand van de gemeenschappelijke projectie van het middelpunt van de Zon en Venus van het middelpunt der aarde;

μ de in graden uitgedrukte ware tijd van den eersten meridiaan, in welken de kortste afstand plaats vindt.

Men behoeft dus alleen den conjunctietijd te gebruiken om de drie tijden waarvoor men de plaatsen berekenen moet, zoo te kunnen kiezen dat zij den geheelen duur der eklips omvatten, en het is niet noodig dien meer dan globaal te kennen, terwijl hij evenals de grootheden P_{-1}, P_0, P_1, Q_{-1} enz. verder niet voorkomt.

Laten de coördinaten van een punt der oppervlakte der aarde zijn:

$$p = m\rho \cos B \sin (L - \lambda')$$
$$q = m\rho \{\sin B \cos \beta' - \cos B \sin \beta' \cos (L - \lambda')\}$$
$$z = m\rho \{\sin B \sin \beta' + \cos B \cos \beta' \cos (L - \lambda')\}$$

waar ρ de afstand van de plaats der waarneming van het middelpunt der aarde en L en B deszelfs geocentrische lengte en breedte zijn.

1) (λ', β') of (α' δ') zijn eigenlijk de coördinaten van een punt, op eene lijn uit het middelpunt der aarde evenwijdig aan de lijn door het middelpunt van Venus en de Zon.

Zijn dus de coördinaten van Venus met betrekking tot de plaats der waarneming P', Q', Z', dan worden:

$$P' = P - p$$
$$Q' = Q - q$$
$$Z' = Z - z.$$

Men kan nu de lengte uit de uitdrukkingen voor p, q, z door regte klimming en declinatie vervangen. Laten α' en δ' regte klimming en afwijking zijn van (λ', β'), A en φ' regte klimming en afwijking van het geocentrische Zenith van de plaats der waarneming en h de hoek dien de breedtecirkel met den afwijkingscirkel in het punt (λ', β') of (α', δ') maakt, dan is:

$$p \cos h - q \sin h = m\rho \cos \varphi' \sin A - \alpha')$$
$$p \sin h + q \cos h = m\rho \{\sin \varphi' \sin \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (A - \alpha')$$
$$z = m\rho \{\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (A - \alpha'$$

die men door de coördinaten λ', β' om den hoek h, en φ' en $A - \alpha'$ om δ', daar men van aphrodicentrische tot geocentrische coördinaten overgaat, te laten draaijen verkrijgen kan in welk geval z onveranderd blijft en in het algemeen $x = x' \cos h - y' \sin h$, $y = x \sin h + y \cos h$ wordt.

Hansen geeft hiervan p. 320 § 13 Theorie der Sonnenfinsternisse eene andere veel uitvoeriger ontwikkeling, die op formules uit de spherische trigonometrie berust, waaraan hij verschillende nieuwe vormen gegeven heeft. Legt men door de plaats der waarneming een vlak, hetwelk evenwijdig aan het vroeger vermelde, (loodregt op de lijn, evenwijdig aan de lijn die door het midden van Zon en Venus gaat) en is u de straal van den cirkel, dien de schaduwkegel in dit vlak uitsnijdt, dan is:

$$u \sin \vartheta = P' \cos h - Q' \sin h$$
$$u' \cos \vartheta = P' \sin h + Q' \cos h$$

of daar $P' = P - p$, $Q' = Q - q$, $Z' = Z - z$:

$$u \sin \vartheta = P \cos h - Q \sin h - m\rho \cos \varphi' \sin (A - \alpha')$$

$$u \cos \vartheta = P \sin h + Q \cos h - m\rho \{\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (A - \alpha')\}$$

$$u = u' - m\rho \{\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (A - \alpha') \operatorname{tg} f$$

hier is dus ϑ de positiehoek die, van de Zon af, het punt aangeeft waar Venus op het oogenblik der in- of uittrede is. ϑ is $= o$, wanneer het middelpunt van Venus op dat oogenblik in den door het punt (α', δ') — waarvoor men ook hier het Zonnemiddelpunt kan aannemen — gaanden declinatiecirkel, en tevens noordelijk daarvan is. De hoek ϑ neemt van daar toe in oostelijke rigting.

De berekening van α' en δ' uit λ' en β' geschiedt door de vergelijkingen:

$$\sin \eta \sin K = \sin \beta'$$
$$\sin \eta \cos K = \cos \beta' \sin \lambda'$$
$$\cos \eta = \cos \beta' \cos \lambda'$$
$$\cos \delta' \sin \alpha' = \sin \eta \cos (\varepsilon + \varkappa)$$
$$\cos \delta' \cos \alpha' = \cos \eta$$
$$\sin \delta' = \sin \eta \sin (\varepsilon + \varkappa)$$

waar ε de helling der ecliptika aangeeft.

Van h kan men zich altijd met voldoende naauwkeurigheid van de formule:

$$\sin h = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha'}{\cos \beta}$$

bedienen; in het algemeen behoeven α', δ', h niet met de grootste naauwkeurigheid bepaald te worden.

Noemt men de regte klimming der zon a', dan is

$$\operatorname{tg} a' = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l' - \sin b' \sin \varepsilon$$

en zoo men stelt

$$t = A - a'$$

dan is t de in graden uitgedrukte ware zonnetijd van den waarnemer. Laat verder

$$\Delta\,\alpha' = a' - \alpha'$$

dan wordt

$$A - \alpha' = t + \Delta\,\alpha'.$$

Is τ de in graden uitgedrukte ware tijd onder den eersten meridiaan, die gelijktijdig met den tijd van de waarneming bestaat, en is

$$\lambda = t - \tau$$

dan is λ de in graden uitgedrukte oostelijke geographische lengte van de plaats der waarneming met betrekking tot dien meridiaan.

De coördinaten P en Q hebben tot uitdrukking:

$$P \cos h - Q \sin h = -\gamma \cos N' + \frac{t - \lambda - \mu}{15}\, n \sin N'$$

$$P \sin h + Q \cos h = \gamma \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n \cos N'$$

nadat

$$N' = N - h$$

is gesteld, gelijk gemakkelijk is in te zien. Men verkrijgt hieruit

$$u = u' - m\,\rho\,\{\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(t + \Delta\,\alpha')\}\ \mathrm{tg}\, f$$

$$u \sin\vartheta = -\gamma \cos N' + \frac{t - \lambda - \mu}{15}\, n \sin N'$$
$$- m\,\rho \cos\varphi' \sin(t + \Delta\,\alpha')$$

$$u \cos\vartheta = \gamma \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n \cos N'$$
$$- m\,\rho\,\{\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(t + \Delta\,\alpha')\}$$

Moet men de straalbreking hebben, dan moet men m (1 + x) in plaats van m berekenen, waar mx de grootte van het verschil tusschen den schijnbaren en waren afstand aangeeft en uit de tafels van Hansen art. 17 van zijne „Theorie der Sonnenfinsternisse" kan afgeleid worden.

Men moet nu uit de vorige vergelijkingen ρ_0 of de aequatoriaal horizontaal parallax der Zon afleiden, en daarna de correcties invoeren of in de voor de coördinaten voor Venus aangenomen waarden of in de waarde van ρ_0 zelf.

Laat c de afplatting der aarde zijn, de gereduceerde breedte $\varphi_{\prime}$, dan is:

$$\rho \cos \varphi' = \rho_0 \cos \varphi_{\prime}$$
$$\rho \sin \varphi' = (1 - c) \rho_0 \sin \varphi_{\prime}$$

en heet de poolshoogte van de plaats der waarneming φ, dan verkrijgt men die breedte $\varphi_{\prime}$ door de volgende vergelijking:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\prime} = (1 - c) \operatorname{tg} \varphi.$$

De vergelijkingen voor het in- en uittreden worden nu:

$$u = u' - m\rho_0 \{(1 - c) \sin \varphi_{\prime} \sin \delta' + \cos \varphi_{\prime} \cos \delta' \cos (t + \Delta \alpha'\} \operatorname{tg} f$$

$$u \sin \vartheta = -\gamma \cos N' + \frac{t - \lambda - \mu}{15} n \sin N'$$
$$- m \rho_0 \cos \varphi_{\prime} \sin (t + \Delta \alpha')$$

$$u \cos \vartheta = \gamma \sin N' + \frac{t - \lambda - \mu}{15} n \cos N'$$
$$- m \rho_0 \{(1 - c) \sin \varphi_{\prime} \cos \delta' - \cos \varphi_{\prime} \sin \delta' \cos (t + \Delta \alpha')\}$$

waaruit men ρ_0 bepalen kan.

Ik stel nu:

$$d \sin D = \sin \delta'$$
$$d \cos D = (1 - c) \cos \delta'$$

en

$$\cos \varphi_{\prime} \sin (t + \Delta \alpha' = \cos H \sin K$$
$$\cos \varphi_{\prime} \cos (t + \Delta \alpha') = \cos D \sin H - \sin D \cos H \cos K$$
$$\sin \varphi_{\prime} = \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos K$$

waarin H zeer nabij de hoogte van het punt (α', δ') boven den horizon en K de parallaktische hoek in dat punt is. Men verkrijgt nu zoo men c tg f verwaarloost

$$u = u' - m\,\rho_0 \text{ tg } f \sin H$$

$$u \sin \vartheta = -\gamma \cos N' + \frac{t - \lambda - \mu}{15} n \sin N' - m\rho_0 \cos H \sin K$$

$$u \cos \vartheta = \gamma \sin N' + \frac{t - \lambda - \mu}{16} n \cos N' - m\,\rho_0 d \cos H \cos K.$$

Zet men nu:

$$S \sin \Sigma = \gamma$$

$$S \cos \Sigma = \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n$$

dan gaan de beide naastvoorgaande vergelijkingen in de volgende over:

$$u \sin \vartheta = S \sin (N' - \Sigma) - m\rho_0 \cos H \sin K$$

$$u \cos \vartheta = S \cos (N' - \Sigma) - m\rho_0 d \cos H \cos K$$

die men door de substitutie

$$l \sin L = \sin K$$

$$l \cos L = d \cos K$$

tot den vorm

$$u \cos (\theta - L) = S \cos (W' - \Sigma) - m\rho_0 l \cos H$$

$$u \sin (\theta - L) = S \sin (W' - \Sigma)$$

waar

$$W' = N' - L$$

is. Verheft men deze vergelijkingen in het quadraat dan verkrijgt men

$$m^2 \rho_0^2 l^2 \cos H - 2m\rho_0 l S \cos H \cos (W' - \Sigma) + S^2 - u^2 = o,$$

waaruit men ρ_0 bepalen moet.

Hier is wel is waar

$$u = u' - m\rho_0 \text{ tg } f \sin H$$

en dus eene functie van de onbekende ρ_0, maar men kan deze grootheid met de tegenwoordig aangenomene waarde berekenen.

Daar, wanneer men stelt $\sin W = \frac{S}{u} \sin(W' - \Sigma)$ $S \cos(W' - \Sigma)$ veel grooter is dan $u \cos W$ moet men deze door benadering oplossen, terwijl men stelt:

$$\rho_0 = \frac{(S+u)(S-u) + \rho_0^2 m^2 l^2 \cos H}{2ml\, S \cos H \cos(W' - \Sigma)}$$

en in de eerste benadering ρ_0^2 verwaarloost.

Men moet nu de correcties uit de waarnemingen invoeren, òf door verbetering der waarden van Venus, òf door verandering van ρ_0.

Men verkrijgt door differentiering van ρ_0, wanneer men de vergelijkingen van blz. 15 gebruikt, waaruit de vergelijking van den tweeden graad voor ρ_0 gesproten is, en $l = 1$ stelt waardoor $L = K$ is:

$$u \cos(\theta - K) = S \cos(N' - K - \Sigma) - m\rho_0 \cos H$$

$$u \sin(\theta - K) = S \sin(N' - K - \Sigma)$$

waaruit door differentiatie van al de grootheden behalve N' en m:

$$\cos(\theta - K)\, du - u \sin(\theta - K)\, d(\theta - K)$$
$$= \cos(N' - K - \Sigma)\, dS + S \sin(N' - K - \Sigma)\, d(K + \Sigma)$$
$$+ m\rho_0 \sin H\, dH - m \cos H\, d\rho_0$$

$$\sin(\vartheta - K)\, du + u \cos(\theta - K)\, d(\theta - K)$$
$$= \sin(N' - K - \Sigma)\, dS - S \sin(N' - K - \Sigma)\, d(K + \Sigma)$$

Elimineert men $d(\vartheta - K)$, en maakt gebruik van de vergelijking:

$$o = S \sin(N' - \Sigma - \theta) + m\rho_0 \cos H \sin(\theta - K)$$

die uit de naast voorgaande formules afgeleid wordt door de tweede met $\cos(\theta - K)$ en de eerste met $\sin(\theta - K)$ te vermenigvuldigen en af te trekken, dan is:

$$\cos H \cos(\theta - K)\, d\rho_0 = \rho_0 \sin H \cos(\theta - K)\, dH$$
$$- \rho_0 \cos H \sin(\theta - K)\, dK$$

$$+ \frac{1}{m} \cos (N' - \Sigma - \theta) \, d\, S +$$

$$+ \frac{S}{m} \sin (N' - \Sigma - \vartheta) \, d \left(\Sigma - \frac{du}{dm}\right)$$

hier zijn $\frac{du}{dm}$, $d\,H$ en $d\,K = o$. Voorts is

$$d\,P = mr_{,} \cos b \, (d\,l - d\,\lambda')$$
$$d\,Q = mr_{,} \, (d\,b - d\,\beta')$$

waarin $d\,\lambda' = d\,\lambda$ en $d\,\beta' = - d\,\beta$ moeten gesteld worden.

Men verkrijgt verder

$$d\,\gamma = \sin N \, d\,Q - \cos N \, d\,P$$

$$d\,\mu = - \frac{15}{n} \cos N \, d\,Q - \frac{15}{n} \sin N \, d\,P$$

$$d\,S = \sin \Sigma \, d\gamma - \frac{n}{15} \cos \Sigma \, d\,\mu$$

$$S\,d\,\Sigma = \cos \Sigma \, d\,\gamma + \frac{n}{15} \sin \Sigma \, d\,\mu$$

en voor de conjunctie

$$dl - d\,\lambda = \frac{r'}{r_{,} \cos b} (dl' - d\,\lambda)$$

$$d\,b + d\,\beta = \frac{r'}{r_{,}} d\,\beta$$

waar dl' de tafelfout in de Zonnelengte, $d\,\lambda$ en $d\,\beta$ de tafelfouten in de heliocentrische lengte en breedte van Venus aanduiden. Hieruit verkrijgt men:

$$\cos H \cos \theta_0 \, d\,\rho_0 = r' \sin (N' - N - \theta) (d\,\lambda - dl')$$
$$r' \cos (N' - N - \vartheta) \, d\,\beta.$$

Fouten in de geocentrische lengten en breedten van Venus komen niet in aanmerking, terwijl de veranderingen in de waarden van de voerstralen hier door hare kleinheid geen invloed kunnen uitoefenen.

Men bepaalt hieruit dl, d λ en d β, d P en d Q, dan d γ en d μ, hieruit d S en d Σ en hieruit d ρ_0.

Letten wij nader op de bogen N en Σ.

Bij iederen Venusovergang is N een bestendige boog van ongeveer 270 graden, terwijl Σ veranderlijk maar tusschen waarden gemiddeld van 90° of 270°, naarmate γ positief of negatief is, ingesloten is. De grootste afwijking daarvan heeft plaats bij de in- en uittrede (in 1874 31°) de middelwaarde zelve nabij de grootste phase. In den regel is cos $(N' - N - \vartheta)$ grooter dan sin $(N' - N - \vartheta)$ dus de fout in de Venusbreedte zal grooter zijn dan die der lengte, en deze heeft ook in de tafels van de fout der bij de bearbeiding aangenomene parallax meer geleden. Voor gelijke afstanden der middelpunten aan beide zijden van de grootste phase zijn de fouten blijkbaar bijna even groot, terwijl alleen cos ϑ_0 van teeken verandert wanneer φ' negatief is.

De tafelfouten verschillen dus hier in teeken voor beide halfronden en het arithmetische midden uit de resultaten is reeds vrij digt bij de waarheid. Kan dit niet doordien het aantal of gewigt der waarnemingen aan beide zijden niet even groot is, dan kan men altijd de waarnemingen anders verbinden. Men kan echter in dit geval ook de fout der tafels afzonderlijk bepalen.

Laten A en D de regte klimming en declinatie van Venus zijn, dan is de geocentrische declinatie:

$$D \pm \frac{\rho_0}{r_,} \cos H.$$

wanneer H_0 de meridiaanhoogte van Venus aanduidt. Het bovenste teeken moet gebruikt worden als Venus zuidelijk, het onderste als Venus noordelijk van het Zenith der waarneming culmineert. Uit A en D berekene men lengte en breedte, noeme die L en B, dan is de geocentrische lengte:

$$L \pm \frac{\rho_0}{r_{,}} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos b_0}$$

en de geocentrische breedte =

$$B \pm \frac{\rho_0}{r_{,}} \cos H_0 \cos h_0$$

waar h_0 de op het tijdstip der waarneming bestaande hoek tusschen den breedte- en declinatiecirkel is. Uit L en B berekene men de heliocent. lengte en breedte ((λ) en (β)), dan is de tafelfout uit deze waarneming

$$(\lambda) - \lambda_0 \pm \frac{\rho_0}{r} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos \beta_0} \cos (l - \lambda_0)$$

en in helioc. breedte =

$$(\beta) - \beta_0 \pm \frac{\rho_0}{r} \left\{ \cos H_0 \cos h_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos b_0} + \cos H_0 \sin h_0 \sin \beta_0 (\sin l_0 - \lambda_0) \right\}$$

de nul duidt behalve voor ρ_0 aan dat de waarnemingen gelijktijdig zijn.

Men kan nu het arithmetische midden uit de waarnemingen nemen in de veronderstelling dat de tafelfout niet verandert gedurende den tijd waarin de waarnemingen gedaan zijn. Laat (L) het midden uit $(\lambda) - \lambda_0$, a het midden uit de waarden van de coefficienten van ρ_0 die bij de waarden van $(\lambda) - \lambda_0$ hooren, zijn, (B) het midden uit de waarden $(\beta) - \beta_0$ en b het midden uit de daartoe behoorende coefficienten van ρ_0, dan is de tafelfout, wederom $d\lambda$ en $d\beta$ genoemd,

$$d \lambda = (L) \pm \rho_0 a, \quad d \beta = (B) \pm \rho_0 b$$

en men verkrijgt door de vergelijking voor $d\rho_0$ van blz. 17

$$d \rho_0 = U \pm \rho_0 U'$$

waar tot afkorting:

$$U = \frac{(L) r' \sin (N' - N - \vartheta) + (B) r' \cos (N' - N - \vartheta)}{\cos H \cos \theta_0}$$

$$U' = \frac{ar' \sin(N' - N - \vartheta) + (B)\, r' \cos(N' - N - \vartheta)}{\cos H \cos \theta_0}$$

gesteld wordt. Heeft men nu voor ρ_0 de waarde (ρ_0) gevonden dan is de ware waarde van ρ_0:

$$(\rho_0) + d\ \rho_0$$

dus ten gevolge van de vorige uitdrukking

$$\rho_0 = \frac{(\rho_0) + U}{1 \mp U'}$$

Wanneer in de meridiaanwaarnemingen, die volgens het voorgaande gediend moeten hebben om U en U′ te verkrijgen, Venus in de nabijheid van het Zenith geculmineerd heeft, is U′ zeer klein en het teeken van U′ onverschillig, maar culmineert Venus betrekkelijk ver van het Zenith, dan moet de deeler van ρ_0 grooter dan één zijn; dit zal plaats hebben wanneer de waarnemingsplaatsen aan weerszijden van den aequator liggen. Anders wordt de deeler kleiner dan één en kan zelfs nul worden. De tafelfouten van de Zonnelengte moeten bij deze methode afzonderlijk bijvoorbeeld door waarnemingen in den meridiaan bepaald worden. De verbetering van fouten in de stralen van Venus en de Zon, zal met het volgende verbonden worden.

Tot nog toe heb ik de bepaling van de Zonneparallax uit een Venusdoorgang zoo opgevat, dat men uit iedere waarneming door de vroegere verg. de daaruitvolgende Zonneparallax bepaalt terwijl men het ontbrekende door latere en vroegere waarnemingen aanvult. Vervolgens moet men naar de beginselen der waarschijnlijkheidsrekening de waarnemingen zoo verbinden, dat men de waarschijnlijkste waarde van de Zonneparallax daaruit verkrijgt, en de opgave van de beste methode hiervoor is aan geene zwarigheid onderhevig. Men zal namelijk voor de eliminatie der fouten de gewone regels van de methode der kleinste quadraten te volgen hebben, daar de grond dat kleine fouten waarschijnlijker zijn dan groote, hier in het algemeen als bestaande kan aangenomen worden. Het komt in de eerste plaats op de fouten d λ' en d β', in de baan van Venus, alsmede d l' aan; vooreerst moet men d λ' = d λ en d β' = — d β stellen, dat is de aphrodicentrische fout der Zon wordt door de heliocentrische fout van Venus vervangen, zooals die uit eene vergelijking der tafels met de waarneming blijkt te zijn, voorts is $d\,b + d\,\beta = \frac{r'}{r_{\prime}}\, d\,\beta$, d. i. men behoeft de geocentrische fout in de tafels van Venus niet te bepalen.

Zijn er nu standvastige of progressieve fouten in de waarden van d l', d λ of d β, dan kan men de fout direct bepalen; zijn zij met toevallige vermengd, dan heeft men de eerste van de laatste te scheiden; men kan altijd vooraf van twee of meer waarnemingen, die gelijktijdig maar aan weerszijden van den aequator genomen zijn, het arithmetische midden gebruiken; zijn de waarnemingen vroeger of later gedaan maar op ongeveer denzelfden meridiaan dan zal men zien of dezelfde regelmaat aanwezig is; zoo de later bepaalde verschillen grooter of kleiner afwijking vertoonen zal men beter doen de methode der kleinste quadraten toe te passen. Heeft men eene regelmatige fout te verbeteren dan moet men de geheele baan veranderen of men kan de fout laten bestaan, en al de waargenomen waarden veranderen zooveel als door de nieuwe metingen wordt aangewezen.

Is de fout niet constant, dan bedient men zich van de formule $\frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{[\Delta\Delta]}}{m} = r$. Heeft men op die manier de meest waarschijnlijke waarde van $d\,l'$, $d\,\lambda$ en $d\,\beta$ bepaald, dan voere men die in de formules voor $d\Sigma$, dS $d\mu$ en $d\gamma$ in, door van $d\,Q$ en $d\,P$ de waarde te bepalen, daaruit $d\,\gamma$ en $d\,\mu$, daaruit $d\,S$ en $d\,\Sigma$ af te leiden, en daaruit $d\,\rho_0$. 1) Men zal op deze wijze veiliger en naauwkeuriger handelen, dan zoo men de fouten ($d\,l - d\,\lambda'$) en ($d\,b - d\,\beta'$) in de formules voor $d\,P$ en $d\,Q$ invoerde, daarna $d\,\gamma$, $d\,\mu$ enz. bepaalde en dus de vorige regels toepastte ter bepaling van de waarschijnlijkste waarde van $d\,\rho_0$ of wel zoo men de waarschijnlijkste waarden van $d\,P$, $d\,Q$, of van $d\,\gamma$, $d\,\mu$ $d\,S$ en $d\,\Sigma$ ging zoeken, want in de waarden die men gevonden heeft voor $d\,\lambda$, $d\,\beta$ en $d\,l$ zijn grootere en kleinere fouten of eene constante, in het eerste geval zullen die fouten ongelijk werken de grootere fout zal in sommige der formules meer vergroot of verkleind worden dan in andere, de fout der fout zal dus vergroot worden. Zoo zal voor $d\,Q < \vartheta\,P$, $n < 15$ en $\cos N = 90^\circ$ de absolute waarde van $d\,\gamma$ kleiner zijn dan die van $d\,\mu$ (alhoewel van een ander teeken); de fout die in $d\,\mu$ zelve blijft, is dus grooter geworden, en men heeft de voorwaarde om de waarschijnlijkste waarde van $d\,\rho_0$ te vinden moeijelijker gemaakt, met andere woorden de kans om die te vinden is kleiner geworden.

Nog verwerpe men fouten die te veel afwijken en bepale het gewigt door aan eene meer vertrouwde bepaling dubbele stem of meer te geven.

---

1) Hansen ziet dit in zijn betoog voorbij, wanneer hij terstond $d\,\rho_0$ bepalen wil.

M. i. begaat Hansen dus eene fout waar hij zegt:

„Alle so erhaltenen Werthe der Sonnenparallaxe sind hierauf nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichheitsrechnung so mit einander zu combiniren, dass schliesslich der wahrscheinlichste Werth der Sonnenparallaxe daraus hervorgeht, und die Angabe dieser Combination unterliegt keiner Schwierigkeit;" men zal trouwens de afzonderlijke bepaling van $d\rho_0$ bij gebrek aan waarnemingen van denzelfden tijd alleen in het geval eener waargenomen progressie in de verschillen met vrucht kunnen maken.

Gewoonlijk evenwel, zoo ook bij den Venusovergang der vorige eeuw, neemt men ρ_0 aan, werkt daarmede voort tot aan de waarnemingen, vergelijkt deze met de aldus berekende grootheden en vormt differentiaal-vergelijkingen tusschen de hierdoor ontstaande verschillen en de verbeteringen in de elementen waarvan men uitgegaan is, die men volgens de methode der kleinste quadraten oplost. Voor de Venusovergangen der vorige eeuw, waar niets als in- en uittredingen werden waargenomen of althans in rekening gebragt, heeft men met eene voorloopige Zonnenparallax de in- en uittredingen berekend, met de waargenomene vergeleken, de differentiaal-vergelijkingen daarop betrekking hebbende gevormd, en door de methode der kleinste quadraten opgelost. Men kan bij waargenomen randafstanden evenzoo handelen, maar de naauwkeurige vergelijkingen zijn in dit geval transcendent; zij bevatten de tijd t zelf zoowel als sin t en cos t, en kunnen dus slechts door benaderingen opgelost worden, terwijl ook de berekening der coefficienten van de onbekende verbeteringen der baan omslagtig wordt. Veel eenvoudiger is de rekening, wanneer men uit de waargenomen tijden en eene aangenomene waarde van ρ_0 den straal u van den schaduwkegel bepaalt in het vlak door de plaats van waarneming; dezen straal bij contacten der randen met de theoretische en bij waargenomene randafstanden met de waargenomene waarde vergelijkt, vervolgens de differentiaal vergelijkingen vormt en volgens de methode der kleinste quadraten oplost.

Ter uitvoering van deze wijze van handelen kan men de uit de waarnemingstijden te berekenen waarde u, die ik u_0 noem, uit de vorige tweedemagtsvergelijking berekenen, nadat men die met betrekking tot u omgezet heeft. Beter is het u uit de eindvergelijkingen voor ρ_0 op te lossen, zonder die evenwel af te korten. Stelt men

$$J = \theta - L$$

dan worden deze verg.

$$u_0 \sin J = S \sin (W' - \Sigma)$$
$$u_0 \cos J = S \cos (W' - \Sigma) - m \rho_0 \, l \cos H$$

en geven niet alleen u_0 maar ook den hoek J, die later in de differentiaal quotienten weer verschijnen en ter berekening daarvan gebruikt zal worden.

Om u_0 en J uit de vorige vergelijking te kunnen berekenen, moet vooreerst de kennis van l, Z en H verkregen worden, hetgeen men zoo doet, terwijl men p en q als hulphoeken invoert:

$$\cos p \sin q = \cos \varphi_{\prime} \cos (t + \Delta \alpha')$$
$$\cos p \cos q = \sin \varphi_{\prime}$$
$$\sin p = \cos \varphi_{\prime} \sin (t + \Delta \alpha_{\prime})$$

door welke men q altijd zoo bepalen kan, dat cos p positief is, dan verkrijgt men:

$$(l \cos H) \sin L = \sin p$$
$$(l \cos H) \cos L = d \cos p \cos (q + D)$$
$$\sin H = \cos p \sin (q + D).$$

De functies L, (l cos H) en sin H zijn de eenige die men hier in plaats van K en H noodig heeft. Heeft men gene berekend, dan is:

$$W' = N' - L$$

en verder:

$$S \sin \Sigma = \gamma$$

$$S \cos \Sigma = (t - \lambda - \mu) \frac{n}{15}$$

waarmede alle grootheden, die ter berekening van u_0 en J uit de vorige vergelijking noodig zijn, gegeven zijn, terwijl voor ρ_0 eene willekeurige benaderde waarde wordt gebruikt.

Men kan γ uit de tafelwaarden voor P_n en Q_n of direct uit de waargenomene lengten en breedten afleiden; het best zal men doen deze grootheden op die twee wijzen te verkrijgen, en vervolgens te verbeteren volgens de daarvoor door mij opgegevene regels.

Daar t de waargenomen ware tijd van de plaats der waarneming is, heeft men, zoo de waarneming naar middelbaren of sterretijd gemaakt en neergeschreven is, dezen in waren zonnetijd te veranderen.

Laat ons nu het geval van den waargenomen randafstand beschouwen, dan moet men tegenover de boven aangegeven waarde van u_0 de uitdrukking van u die vroeger gevonden is, stellen:

$$\pm u = (u) - \{r' r_{,} - (r' + r_{,}) \rho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b'$$

waar

$$(u) = u' - m \rho_0 \sin f \sin H$$

en

$$u' = m \frac{r_{,}}{r} \sin \Delta' \pm m \frac{r'}{r} \sin \Delta$$

$$\sin f = \frac{1}{mr} \left\{ u' \mp m \sin \Delta \right\} = \frac{\sin \Delta' \pm \sin \Delta}{r}$$

zijn. 1) Met betrekking tot de aanwending der bovenste of onderste teekens verwijs ik naar de vroeger gegeven uiteenzetting der 4 mogelijke gevallen. Het onderscheid tusschen u_o en u hetwelk te voorschijn zal komen, is nu een gevolg gedeeltelijk der waarnemingsfouten, gedeeltelijk der fouten van de elementen, die bij de berekening dezer beide grootheden aangewend zijn, en duidt men de som der fouten der laatsten met $d\,u_o$ en $d\,u$ aan, zoodat de ware waarden $u_o + d\,u_o$ en $u + d\,u$ worden, dan moet, wanneer geene fouten van waarneming aanwezig zijn, de voorwaarde

$$u_o + du_o = u + du$$

aanwezig zijn. Maar dezelfde vergelijking moet ook bij voorhanden fouten van waarneming voor iedere voorhanden waarneming gevormd worden, en daar men aan al deze voorwaarden, wegens de fouten van waarneming, niet kan voldoen, moeten, volgens de beginselen der waarschijnlijkheidsrekening daaruit de waarschijnlijkste waarden der fouten der elementen naar de methode der kleinste quadraten worden afgeleid. Men moet nu eerst du_o en du met betrekking tot de daarin bevatte elementen ontwikkelen, en deze zijn: de parallax der Zon, het onderscheid tusschen de Zonnenlengte en de heliocentrische Venuslengte, de heliocentrische Venusbreedte en de stralen van Venus en de Zon, waarbij men de lengte der plaats der waarneming voegen kan, ofschoon deze bij de oplossing der vergelijkingen weggelaten moet worden.

1) sin f en tg f eveneens als sin b′ en tg b′ hebben hier wegens de kleinheid der bogen dezelfde grootte.

In de voorgaande vergelijkingen was λ nu eens $= t - \tau$ = de geographische lengte van de plaats der waarneming, nu eens gelijk de heliocentrische lengte van Venus; ter onderscheiding noem ik $t - \tau\ \lambda_o$.

Differentieert men de verg. voor u_o

$$du_o = - ml \cos H \cos J\ d\rho_o + \cos (W' - \Sigma - J)\, d S + \sin (W' - S - J)\, d\Sigma$$

en uit de verg.

$$S \sin \Sigma = \gamma$$

$$S \cos \Sigma = \frac{n}{15} (t - \lambda_o - \mu)$$

verkrijgt men:

$$d S = \sin \Sigma\ d\gamma - \frac{n}{15} \cos \Sigma\ (d\lambda_o + d\mu)$$

$$S\, d\Sigma = \cos \Sigma\ d\gamma + \frac{n}{15} \sin \Sigma\ (d\lambda_o + d\mu)$$

die, met behulp der vroeger gevonden betrekkingen voor $d\lambda_o$, $d\gamma$, $d\mu$, en na vermenigvuldiging van $\frac{n}{15}$ met $\frac{206265''}{240}$, ten einde $d\lambda_o$ in deelen van een graad uit te drukken en wel niet van den straal maar van den omtrek, in de volgende overgaan:

$$d S = - mr' \sin (N - \Sigma)(d\lambda - d l') + mr' \cos (N - \Sigma)\, d\beta - \frac{n R}{3600} \cos \Sigma\ d\lambda_o$$

$$S\, d\Sigma = mr' \cos (N - \Sigma)(d\lambda - d l') + mr' \sin (N - \Sigma)\, d\beta + \frac{n R}{3600} \sin \Sigma\ d\lambda_o$$

waar $R = 206265''$, en de eenheid van $d\lambda_o$ 15 maal de eenheid van de andere differentialen is.

De verg. van u:

$$\pm\, u = (u) - \{r'\, r_{,} - (r' + r_{,})\, \rho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b'$$

wordt nu:

$$\pm\, du = m \left(\frac{r_{,}}{r} - \frac{\rho_0}{r} \sin H\right) (d\,\Delta' \pm d\,\Delta_{,})$$

$$- m \left(\sin f - \frac{r' + r_{,}}{r} \operatorname{tg} b'\right) \sin H\, d\,\rho_0$$

waar

$$d\,\Delta' = \left(1 + \frac{\rho_0\, r}{r'\, r_{,}} \sin H\right) d\,\Delta$$

Men moet nu deze uitdrukkingen voor du_0 en du stellen in de voorwaardelijke vergelijking

$$u_0 - u + du_0 - du = 0.$$

Het onderscheid $u_0 - u$ geven de vorige uitdrukkingen in deelen van den straal, en de substitutie van de waarden voor du_0 en du gevonden zou dus ten gevolge hebben dat men ook $d\,\rho_0$, $(d\,\lambda - d\,l'_{,})$ $d\,\beta$, $S\, d\,\lambda_0$, $d\,\Delta'$, en $d\,\Delta_{,}$ in deelen van den straal uitgedrukt zou verkrijgen. Daar het evenwel doelmatig is deze verbeteringen in boogsekonden uit te drukken moet men bij het substitueren $u_0 - u$ met $R = 206265''$ vermenigvuldigen. Wanneer wij de twee gevallen opnemen, waarin de afstanden der randen van Venus, van den digtst en verst afgelegen Zonnerand gemeten zijn, dan is

in het eerste geval:

$$o = \frac{R}{m}(u_0 - u) - \left\{l \cos H \cos J - \left(\sin f - \frac{r' + r_{,}}{r} \operatorname{tg} b'\right) \sin H\right\} d\,\rho_0$$

$$+ r' \sin (W' - N - J)(d\,\lambda - d\,l') + r' \cos (W' - N - J)\, d\,\beta$$

$$- U \cos (W' - J)\, d\,\lambda_0 - \left(\frac{r_{,}}{r} - \frac{\rho_0}{r} \sin H\right) (d\,\Delta' \pm d\,\Delta_{,})$$

waar ter afkorting:

$$U = \frac{206265n}{3600m}$$

gesteld, en J de vroeger ingevoerde hulphoek ϑ — L is.

In het tweede geval:

$$o = \frac{R}{m}(u_0 - u) - (l \cos H \cos J + (\sin f - \frac{r' + r}{r} \operatorname{tg} b') \sin H) \, d\rho_0$$

$$+ r' \sin(W' - N - J)(d\lambda - d l') + r' \cos(W' - N - J) \, d\beta$$

$$- U \cos(W' - J) \, d\lambda_0 + \left(\frac{r'}{r} - \frac{\rho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_{\prime})$$

In beide uitdrukkingen moet men het bovenste teeken gebruiken, wanneer de afstand van den versten en het onderste, wanneer de afstand van den naasten Venusrand betrekkelijk van den naasten of van den verstverwijderden Zonnerand gemeten is. Dezelfde regels gelden voor het teeken dat men aan $\sin f = \dfrac{\sin \Delta \pm \sin \Delta'}{r}$ geven moet; negatief wanneer de aanraking inwendig en $s_{\prime} > s$, positief wanneer Venus de Zon uitwendig aanraakt; men moet nu de tweede waarde van sin f gebruiken wanneer men den afstand der tegen elkander aan gelegene, de eerste wanneer men den afstand der van elkander afgelegene randen van Venus en de Zon gemeten heeft. Daar de uitdrukking voor u eenigzins verandert voor waargenomen in- en uitgangen, houd ik het voor doelmatig ook voor deze gevallen de voorwaardelijke vergelijking te vormen.

Daar voor in- en uitgangen

$$u = u' - m\rho_0 \sin f \sin H$$

wordt, waar u' en sin f dezelfde vormen hebben als vroeger, verkrijgen wij nu

$$du = m\left(\frac{r_,}{r} - \frac{\rho_0}{r}\sin H\right)(d\,\Delta' \pm d\,\Delta_,)$$
$$- m \sin f \sin H\, d\rho_0$$

waarmede men verkrijgt:

$$o = \frac{R}{m}(u_0 - u) - \{l \cos H \cos J - \sin f \sin H\}\, d\rho_0$$
$$+ r' \sin(W' - N - J)(d\lambda - dl') + r' \cos(W' - N - J)\, d\beta$$
$$- U \cos(W' - J)\, d\lambda_0 + \left(\frac{r_,}{r} - \frac{\rho_0}{r}\sin H\right)(d\,\Delta' \pm d\,\Delta_,)$$

en het bovenste teeken voor uitwendige, daarentegen het onderste voor inwendige aanrakingen moet aangewend worden, hetwelk evenzeer voor sin f geldt.

Eenige opmerkingen moeten nog bij de voorwaardelijke vergelijkingen gemaakt worden, daar gemeten randafstanden op verschillende wijze behandeld kunnen worden. Wil men iederen gemeten randsafstand afzonderlijk behandelen, dan moet men wel is waar aan deze voorwaarden niets bijvoegen, maar anders is het wanneer men meer dan eene meting vereenigen kan.

Ik neem aan dat men eerst den afstand van de naaste randen van Venus en de Zon, en terstond daarna den afstand van Venus' versten rand van denzelfden zonnerand gemeten heeft. Wegens het korte interval tusschen deze beide metingen is men geregtigd het arithmetische midden daaruit te nemen, en als ééne waarneming op te vatten voor het arithmetische midden uit de tusschentijden. Laten de beide gemeten afstanden d en d′ zijn, en

$$b' = \tfrac{1}{2}(d + d')$$

dan is b′ de afstand van het middelpunt van Venus van den digtsten zonnerand, en wanneer het instrument dat men gebruikt, doelmatig ingerigt is, kan men de beide waarnemingen zoo inrigten dat in de vorige uitdrukking van b′ de collimatiefout daarvan van zelf vervalt. In ieder geval is hier de straal van Venus verdwenen en men heeft weder voor u de uitdrukking:

$$u = (u) - \left\{r_{\prime} \, r' - (r' + r_{\prime}) \, \rho_0 \sin H\right\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b'$$

waar

$$(u) = u' - m\rho_0 \sin f \sin H\,;$$

maar nu wordt

$$u' = m \frac{r_{\prime}}{r} \sin \Delta'$$

$$\sin f = \frac{u}{mr_{\prime}} = \frac{\sin \Delta'}{r}.$$

Daar hier de straal van Venus $mr_{\prime}$ geheel en al verdwenen is, wordt de laatste vergelijking:

$$o = \frac{R}{m}(u_0 - u) - \left\{l \cos H \cos J - (\sin f - \frac{r' + r_{\prime}}{r} \operatorname{tg} b' \sin H\right\} d\,\rho_0$$
$$+ r' \sin(W' - N - J)(d\,\lambda - d\,l') + r' \cos(W' - N - J)\, d\,\beta$$
$$- U \cos(W' - J)\, d\,\lambda_0 - \left(\frac{r_{\prime}}{r} - \frac{\rho_0}{r} \sin H\right) d\,\Delta'$$

die gebezigd wordt wanneer de beide randen van Venus en de naastbij gelegen rand der Zon gemeten zijn.

Heeft men daarentegen de afstanden van de beide Venusranden van den versten Zonnerand in een korten tusschentijd gemeten, dan zal men voor het midden uit de beide waarnemingstijden:

$$b'' = \tfrac{1}{2}(d'' + d'')$$

moeten stellen, waar d″ en d″′ deze beide afstanden aanduiden. Verder is b″ de afstand van het middelpunt van Venus van den verstverwijderden Zonnerand, en

$$u = -(u) + \{r_, r' - (r' + r') \rho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b''$$

terwijl (u) dezelfde uitdrukking krijgt als in het naast voorgaande geval. In de vergelijking van bl. 29 voor het tweede geval voor den afstand van de beide randen van Venus van den meest verwijderden rand der Zon, moet men nu b″ voor b′ substitueren en $d \Delta_, = o$ stellen.

Kan men de vier metingen vereenigen en voor het artihmetische midden uit de vier tijden van waarneming laten gelden, dan moet men stellen:

$$b = \tfrac{1}{2} (b'' - b') = \tfrac{1}{4} (d''' + d'' - d' - d)$$

dan wordt b de afstand van het middelpunt van Venus van het middelpunt der Zon, die onafhankelijk van de beide stralen is gevonden. De uitdrukking die men nu voor de berekening van u moet aanwenden is

$$u = \{r' r_, - (r' + r_,) \rho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b$$

en daar het differentiaal dezer vergelijking

$$du = - \frac{r' + r_,}{r} m \sin H \operatorname{tg} b \, d \rho_0$$

is, nemen de voorwaardelijke vergelijkingen de volgende vormen aan:

$$o = \frac{R}{m}(u_0 - u) - \{l \cos H \cos J - \frac{r' + r_,}{r} \sin H \operatorname{tg} b\} d \rho_0$$
$$+ r' \sin W' - N - J) (d \lambda - d l') + r' \cos W' - N - J) d \beta$$
$$- U \cos (W' - J) d \lambda_0$$

waarin dus $d \Delta'$ en $d \Delta_,$ niet voorkomen.

Zoo men meenen mogt, dat de aanname van het bij elkander hooren van het midden uit de metingen en uit de tijden tot onnaauwkeurigheden aanleiding geven zou, kan men evenals voor metingen van hoogten rondom den meridiaan eene verbeteringsformule construeren, met wier behulp men meer dan 4 afzonderlijke waarnemingen met elkander verbinden kan.

Heeft men namelijk z, z' z'' enz. te vinden die de ware zenithsafstanden aanduiden in de nabijheid der culminatie, noemt die in den meridiaan ζ, ζ', ζ'' enz. dan is $\zeta = z - x$ $\zeta' = z' - x'$ enz. voor x, x' x'' het horizontaal verschil tusschen z en ζ, z' en ζ' enz.

Heeft men nu N waarden voor circummeridiaanhoogten en dus ook N reducties op den meridiaan, dan kan men $\zeta = \frac{\Sigma z}{N} - \frac{\Sigma x}{N}$ stellen en dan de waarde van x invoerende $= \frac{\Sigma z}{N} - \frac{p}{N} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} + \frac{p^2}{N} \operatorname{cotg.} \zeta \, \Sigma \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} t}{\sin 1''}$

waar $p = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \zeta}$ verg. Abriss der pract. Astr. von Dr. A. Sawitsch Erst. Band p. 255, men zal dus evenzeer hier alle waargenomen afstanden tot één punt bijv. den eersten gemeten rand of het middelpunt der zon moeten reduceren, vervolgens x, x', x'', x''', de afstanden van den gemeten rand van Venus tot aan den rand of het middelpunt der zon bepalen en heeft dan in het eerste geval

$$d = d,\ x = o$$
$$d_, = d',\ x' = o$$
$$d_{,,} = d'' + x''$$
$$d_{,,,} = d''' + x'''$$

en

$$D = \frac{\Sigma d}{n} - \frac{\Sigma x}{n} \text{ enz.}$$

Ik merk nog op dat de eerste methode om $d\rho_0$ te berekenen zeker korter dan de laatste en even naauwkeurig is, terwijl men du niet behoeft te kennen; men schijnt daaraan dus de voorkeur te moeten geven maar kan zich desverkiezende van beide methoden bedienen en dan vergelijken.

Voorts is de verandering van ρ_0 π'_0 ten gevolge van die van sin π'_0 relatief zeer groot, wordt de hoek van 8.″5766 8.″8903 dan vermindert volgens Hershel ρ_0 3,400,000 Engelsche mijlen dus ongeveer 1,000,000 uren. Laat nu de verandering (+ of —) van de aangenomen waarde $\frac{6}{1000}$ zijn, dus ongeveer $\frac{1}{50}$ van de vorige, dan is de verandering in den afstand Aarde-Zon *ongeveer* 20,000 dus 15000 geog. mijlen of *ongeveer* $\frac{1}{1333}$ van den afstand; verandert π'_0 $\frac{4}{10000}$ dan de afstand 11400 geog. mijlen voor d π'_0 $\frac{2}{10000}$ 5700 ongeveer enz. en wel in omgekeerden zin. De veranderingen van m zijn = 3,2, 1,6 enz. voor eene verandering van 100, 50,000 enz. van ρ_0 = 20 millioen g. m., of men moet de waarden der grootheden waarmede men m vermenigvuldigt veranderen. Verdere vermoedens laat ik na daar zelfs de lengten en breedten van vele stations nog bekend gemaakt moeten worden.

Ik deel thans eene algemeene beschouwing mede over het verband tusschen de verschillende methoden om den afstand ρ_0 te bepalen, vooraf deze vraag: welk is het juiste oogenblik van contact? Ik doe deze vraag met opzet omdat Héraud te Saïgon 1) met Bonifay, een scheepsvaan-

1) Bij deze gelegenheid heeft hij de breedte en lengte van Saïgon bepaald:

Latitude 10°46′40″.

Longitude 104°21′00″ Oost. van Parijs.

drig, die in zijne buurt waarnam, een tijdverschil van ongeveer 1 sekonde heeft in de bepaling van het eerste inwendig contact.

Héraud zegt: 1 minuut na berekening $20^h58'$ nam ik eene duidelijke uitronding (échancrure visible) waar op de schijf der Zon, $21^h17'$ was de intrede voor meer dan $^2/_3$ voltooid. Nu ziet hij de hoornen der Zon (deelen der Zon tusschen Venus en den rand der Zon aan de buitenzijde) steeds meer tot elkander naderen, eindelijk blijven die stilstaan, op dat oogenblik geeft hij het sein aan den chronograaf dat de ingang voltooid is. Tegelijkertijd kan hij de franjes aan de randen van Venus, wier afscheiding van Venus vroeger, zooals hij zegt, zelfs duidelijker zigtbaar was dan die van de Zon daarvan, niet meer zien, misschien naar hij meent een gevolg van den zwarten druppel 1). 20 sekonden later, voegt hij er bij, was er licht tusschen het zwarte beeld en de Zon, de zwarte vlek wordt kleiner; eindelijk keeren de franjes aan den buitenrand van Venus terug.

Tot hiertoe Héraud. Ik vergelijk nu zijne keuze voor het oogenblik van het inwendig contact met die van Bonifay, die het oogenblik na de intrede van Venus waarop de Zonnerand wederom een geheel vormt, uitkiest.

Geeft men al aan Héraud de voorkeur, de grootste naauwkeurigheid in de bepaling van het tijdstip van ingang is zeer moeijelijk bereikbaar; het oogenblik van de vermoedelijke vorming van den zwarten druppel is welligt te vroeg, daar die zich waarschijnlijk aan den buitenrand reeds voor dat

---

1) De zwarte druppel vormt zich op het oogenblik dat de beide randen in contact zijn, bij verwijdering verdwijnt die.

het contact geheel voltooid is, begint te vormen. Ziet men toch twee randen van voorwerpen waarvan het eene lichtgevend is nabij elkander, dan wordt het licht van het eene tegen den rand van het andere gebroken waar de afstand van die randen zeer klein is, en men verkrijgt daar eene donkere plek; maar de twee randen op zeer kleinen afstand van het contact zijn digt bij elkander en dus kan de zwarte druppel reeds vóór het contact tot vorming komen. Bij het oogenblik van den uitgang zegt Héraud: „alle lichtverschijnselen verdwijnen op het oogenblik van het contact, het zwarte gedeelte van Venus is op een schat baren afstand van de Zon eenige oogenblikken later is de afstand nul. Ik zie de franjes van den ingang niet terug, maar wel is het lichtnet tusschen de planeet en de randen zwart gekleurd," dat zwart gekleurde lichtnet moet dus hetzelfde verschijnsel onder eene eenigzins andere voorwaarde zijn. Om die verduistering bij den rand zijn andere afstandsmetingen van onschatbaar belang.

Ik wil hierbij een algemeene beschouwing voegen over de andere methoden om den straal der aardbaan te bepalen, waaruit men, afgezien van de waarnemingen van 1874, den stand van dit vraagstuk volgens eene discussie der naauwkeurigste gegevens alleen kan zien.

Er zijn drie methoden, kan men zeggen, om den straal der aardbaan te bepalen:

1. De analytische methode; hier wil ik in de eerste plaats de laatste proeven en uitkomsten van Cornu aanvoeren, die met een getand rand dat 1600 ronddraaijingen in de seconde kan doen, genomen zijn. Is n = het getal tanden dat tusschen een heen- en weergang van het licht verloopen, het instrument als bekend verondersteld, de afstand 23 kilo-

meters (2 maal de afstand van het observatorium naar de tour Monthéry) dan heeft men

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$ tot $n = 21$
V	300130	300530	300730	300820	300060
$k(2n - 1)$	15×7	33×9	20×11	10×13	36×41

waaruit het gemiddelde 300,330 is, met eene middelbare refractie van de lucht 1,0003, is dus de snelheid $V = 300,400$ kilometers in de sekonde met eene waarschijnlijke fout $= 0,001$ waaruit voor den tijd ϑ, dien het zonnelicht noodig heeft om tot ons te komen $= 473,2$ in den driehoek, waarvan ε de parallaxhoek ρ de aardstraal en R de straal der aardbaan is, voor $\rho = 6378,233$ kil., $R = V\vartheta$, $\rho = R\,\mathrm{tg}\varepsilon$,

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{\rho}{V\vartheta},\ \varepsilon = 8'',878 \text{ wordt.}$$

2. De physische methode: eklipsen van Jupiter, of aberratie der vaste sterren. Hiermede stemt de constante van aberratie van Delambre overeen $\alpha = 20'',25$ waaruit, daar $T = 365.26 \times 86400''$,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{u}{V} = \frac{2\,\pi\,\rho}{V\,T} = \frac{2\,\pi\,\rho}{V\,T\,\mathrm{tg}\,\varepsilon},\ \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{2\,\pi\,\rho}{V\,T\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

$d = 20.25$, $\varepsilon = 8,881$, (met 20,445 Stuve 8,797) sekonden.

3. Geometrische methode: parallaxberekeningen uit overgangen van Venus van 1761 en 1769 $\varepsilon = 8.859$, en van meridiaan-observaties van Venus gedurende 106 jaar; $\varepsilon = 8.866$ sekonden.

Neemt men het gemiddelde uit Cornu, Struve, Delambre en de meridiaan- en overgangswaarnemingen van Venus dus 8,878,8.881, 8,7977,8859 en 8.866, dan is de voorloopige waarde van den parallaxhoek $= 8.856$ sekonden.

Men zal evenwel m. i. aan de proeven van Cornu en de bepaling van Struve eene hooge waarde moeten toe-kennen en dan niet het getal 473,2 waartoe Delambre gekomen, en dat dus bij de Franschen nog in gebruik is, maar 493.78 in de waarde van R in 1 bl. 37 moeten invoeren. Dusdoende verkrijgt men voor den parallaxhoek: 8,809 (Cornu) en 8,797 (Struve), dus de waarschijnlijke fout ± 0,006 voor het gemiddelde 8.803.

Ik laat de noodelooze opsomming van andere waarden van π'_0 weg.

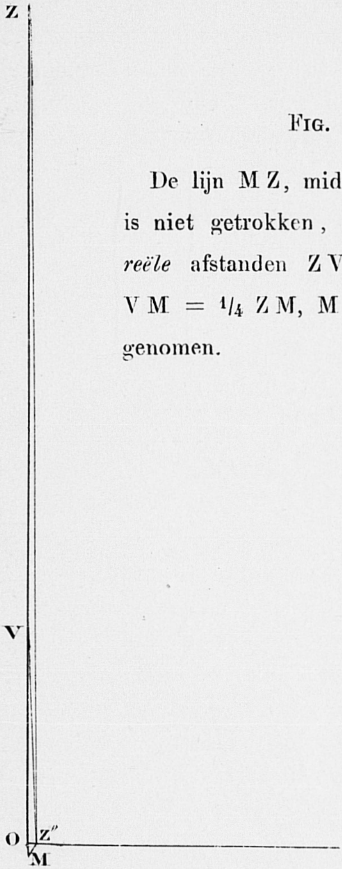

FIG. bij bladz. 4.

De lijn M Z, middelpunt der aarde tot Zon, is niet getrokken, daarop verhouden zich de *reëele* afstanden Z V en M V als 3 : 1, dus V M = $^1/_4$ Z M, M Z'' en O M zijn op het oog genomen.

OPMERKING,

omtrent de berekening van d ρ_0.

Men kan d ρ_0 ook direct uit de laatste verg. van bl. 17 afleiden maar merke op dat deze formules alleen gelden voor de conjunctie waarbij $\vartheta - K = \vartheta_0$ gesteld is.

VERBETERINGEN EN BIJVOEGSELEN.

bl.	4	reg.	6	v. b.	ZO Z′	lees : ZO Z′
,,	5	,,	10	v. o.	zon	,, Zon
,,	11	,,	1	v. o.	u′	,, u
,,	14	,,	10	v. o.	$\Lambda\ \alpha'$	,, $\Delta\ \alpha'$
,,	15	,,	7	v. b.	16	,, 15
,,	15	,,	9	v. b.	τ	,, t
,,	16	,,	7	v. b.	deze	,, deze tweedemagts vergelijking.
,,	16	,,	4	v. b.	tweede eerste	,, eerste tweede
,,	17	,,	3	v. b.	$d\left(\Sigma - \frac{du}{dm}\right)$	,, $d\ \Sigma - \frac{du}{dm}$

bl. 18	reg.	1 v. b. dl	lees :	dl'
„ 18	„	6 v. b. cos H	„	cos H_0
„ 19	„	11 v. b. cos $(l - \lambda_0)$	„	cos $(l_0 - \lambda_0)$
„ 20	„	8 v. o. uiʇ	„	uit
„ 23	„	12 v. o. Zonnen	„	Zonne
„ 24	„	4 v. o. dan verkrijgt men:	„	waaruit men verkrijgt:
„ 27	„	5 v. b. u_0	„	u_0 dan is
„ 28	„	8 v. o. Venus,	„	Venus
„ 32	„	11 en 10 v.o. de volgende vormen	lees :	den volgenden vorm.
„ 33	„	12 v. b. sin $4\frac{1}{2}$ t	lees:	sin $^4 \frac{1}{2}$ t
„ 35	„	10 v. o. vormt,	„	vormt
„ 37	„	6 v. b. is,	„	is;

λ_o)

en

en-

.