J. C. Kapteyn

Ueber das Kepler'sche Problem

13

gr

UEBER DAS KEPLER'SCHE PROBLEM.

VON PROFESSOR J. C. KAPTEYN.

In diesem Aufsatze wird eine Reihe entwickelt für die Lösung des Kepler'schen Problems, die für alle Planetenbahnen, auch die am meisten excentrischen, ausserordentlich convergent ist. Diese Convergenz ist so gross, dass eine *directe* Berechnung der excentrischen Anomalie, mit Zuhülfenahme einer mässig grossen Tafel eben so bequem, oder sogar noch etwas bequemer wird, als nach den gebraüchlichen Näherungsverfahren. Aber auch abgesehen von der Frage, in wiefern diese Lösung für den Praxis zu empfehlen ist, möchte die Reihe vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Es sei M die mittlere, E die excentrische Anomalie, e die Excentricität, $\Delta E = E - M$,

$$R = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}, \quad T = \frac{e \cos M}{1 - e \cos M}.$$

Die erwähnte Reihe wird dann erhalten, wenn man $E - M$ entwickelt nach den steigenden Potenzen entweder von cotang M oder von T. Das Ergebniss der ersten Entwickelungsart wird man in die folgende Form bringen können—

$$\begin{aligned}(1)\ E - M = \alpha + \operatorname{cotg} M &\left[-\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{11}{120}\alpha^6 - \frac{337}{5040}\alpha^8 + \frac{16711}{362880}\alpha^{10} - \frac{1279301}{39916800}\alpha^{12} + \frac{138623707}{6227020800}\alpha^{14} - \ldots\right] \\ + \cot^2 M &\left[+\frac{1}{12}\alpha^7 - \frac{13}{120}\alpha^9 + \frac{7517}{60480}\alpha^{11} - \frac{228199}{1814400}\alpha^{13} + \frac{9528949}{79833600}\alpha^{15} - \ldots\right] \\ + \cot^3 M &\left[-\frac{1}{18}\alpha^{10} + \frac{101}{864}\alpha^{12} - \frac{166549}{907200}\alpha^{14} + \ldots\right] \\ + \cot^4 M &\left[+\frac{55}{1296}\alpha^{13} - \frac{403}{3240}\alpha^{15} + \ldots\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

wo—

$$(2) \qquad \alpha = R \cos \alpha$$

Es ist daher α immer kleiner (in absoluten Werth) als $\frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$.

In eine Reihe entwickelt ergiebt sich für α—

$$(3) \qquad \alpha = R - \frac{1}{2}R^3 + \frac{13}{24}R^5 - \frac{541}{720}R^7 + \frac{9509}{8064}R^9 - \frac{7231801}{3628800}R^{11} + \ldots$$

Wird dieser Werth für α in (1) eingeführt, so ist die erhaltene Reihe in Wirklichkeit nicht verschieden von einer Reihe, die schon von Keill

(Introductio ad veram Astronomiam) entwickelt wurde, und die später noch häufig besprochen worden ist. Die Glieder der Keill'schen Reihe aber, welche nach den aufsteigenden Potenzen von e sin M geordnet sind, werden bald sehr verwickelt, und dies ist wohl die Ursache, warum man nirgends (wenigstens so weit mir bekannt ist) eine grössere Zahl von Gliedern entwickelt findet. Wäre dies wohl geschehen, wären z. B. die Glieder bis zur zehnten oder funfzehnten Ordnung berechnet, so hätte man wahrscheinlich schon längst bemerkt, dass diese Reihe sich in eine Form wie die obige bringen liesse. Wie dem auch sei, für eine *directe* Berechnung der excentrischen Anomalie bei einigermassen grossen Excentricitäten ist die Keill'sche Reihe, wie sie bisher gegeben wurde, gewiss nicht geeignet.

Nach der Reihe (1) wird dagegen die directe Rechnung sehr bequem ausfallen, denn ihre grosse Convergenz und bequeme Form sind augenscheinlich. Jedes Glied ist (wenn e als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird) um drei Ordnungen kleiner als das unmittelbar vorhergehende. Das Fremdartige einer Entwickelung nach einer Grösse, die unendlich gross werden kann, verschwindet sofort durch die Bemerkung, dass nach (3) die Coefficienten alle R, also auch sin M enthalten, und zwar mit einem Exponenten, der immer viel grösser ist als die von cot M. Es wird dieses noch klarer, wenn man T statt cot M einführt mittelst—

$$\mathrm{T} = \frac{e \cos \mathrm{M}}{1 - e \cos \mathrm{M}} = \mathrm{R} \cot \mathrm{M} = \frac{a}{\cos a} \cot \mathrm{M}$$

Man erhält sofort—

$$\begin{aligned}(4) \qquad \mathrm{E} - \mathrm{M} = a &+ \mathrm{T} \cos a \left[- \frac{1}{6} a^3 + \frac{11}{120} a^5 - \frac{337}{5040} a^7 + \ldots\ldots \right] \\ &+ \mathrm{T}^2 \cos^2 a \left[+ \frac{1}{12} a^5 - \frac{13}{120} a^7 + \ldots\ldots \right] \\ &+ \mathrm{T}^3 \cos^3 a \left[- \frac{1}{18} a^7 + \ldots\ldots \right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wo keine Grössen mehr vorkommen, die unendlich werden können. Es scheint mir aber, dass die Formel (1) für die Berechnung ein wenig bequemer sein wird und ich werde daher bei dieser Reihe stehen bleiben. Es sei kurz—

$$(5) \qquad \mathrm{E} - \mathrm{M} = a + \beta \cot \mathrm{M} + \gamma \cot^2 \mathrm{M} + \delta \cot^3 \mathrm{M} + \varepsilon \cot^4 \mathrm{M} + \zeta \cot^5 \mathrm{M} + \ldots\ldots$$

Die Coefficienten $a, \beta, \gamma \ldots$ sind alle reine Functionen von R und können also mit dem Argumente R in eine Tafel gebracht werden. Mit dieser Tafel wird dann die Berechnung von E sehr einfach. Zur Erleichterung der Uebersicht über die Zahl der noch in Betracht kommenden Glieder und ihrer Grösse, berechnete ich das hier folgende kleine Tableau, worin der beiläufige Werth des Maximums der Glieder für verschiedene Werthe von e angegeben ist (dieses Tableau ist nur roh berechnet)—

Maximal-Werthe.

e	R	R — a *	β cot M	γ cot² M	δ cot³ M	ϵ cot⁴ M	ζ cot⁵ M
0·1	5°·75	1'·8	1''·35	0''·000			
0·2	11·7	14	26	0·055	0''·000		
0·3	18·0	48	156	1·3	0·014	0''·000	
0·4	25·0	2° 0	590	13·5	0·42	0·015	0''·001
0·5	33·1	4 9	1730	90·6	6·30	0·50	0·043

Es wird sonach schon das Glied ϵ cot⁴ M für *alle* bekannte Planetenbahnen immer unter 0''·01 bleiben, denn selbst für die Bahn der Aethra (die am meisten excentrische von allen) wo die Excentricität = 0·383 ist, erreicht dieses Glied im Maximo nur den Werth 0''·007. Sogar das vorige Glied kann nur für sehr wenige Planeten einen merklichen Einfluss haben und zwar nur innerhalb gewisser Grenzen der Anomalie. Wie leicht übrigens die Berechnung der noch übrigbleibenden Glieder ausfallen wird, sieht man sofort ein.

Einige Beispiele werden dieses noch näher beleuchten. Zu dem Ende wurden die folgenden Bruchstücke einer allgemeinen Tafel berechnet: dabei wurde die geschlossene Form der Coefficienten benutzt, die weiter unten gegeben wird. Die Vorzeichen, die den Logarithmen beigesetzt sind, beziehen sich natürlich auf den Zahlen, zu welchen diese Logarithmen gehören†—

R	a — R	log β	log γ	log δ	log ϵ	log ζ
± 8° 17'	∓ 5' 4''·77	— 1·1539	± 8·31			
18	6·59	1·1573	8·32			
± 20 0	∓ 1° 4 49·80	— 2·58661	± 0·8084	— 9·15		
1	58·81	2·58787	0·8106	9·16		
± 32 0	∓ 3 47 55·13	— 3·252757	± 1·95832	— 0·7842	± 9·667	— 8·58
1	48 13·30	3·253434	1·95948	0·7859	9·669	8·59

Diese letzten Werthe kommen nur für Kometen in Betracht. Für Planeten wird R nie viel grösser als 20° (für Aethra im Maximo 23°·8). Es sei nun E zu berechnen in den drei folgenden Beispielen—

$$\left.\begin{aligned}\log e &= 9{\cdot}3897262\\ M &= 332^\circ\ 28'\ 54''{\cdot}77\end{aligned}\right\}\ \text{Juno, Theoria Motus, Art. 13.}$$

$$\left.\begin{aligned}\log e &= 9{\cdot}5833466\\ M &= 40^\circ\ 7'\ 20''{\cdot}00\end{aligned}\right\}\ \text{(132) Aethra.}$$

$$\left.\begin{aligned}\log e &= 9{\cdot}7395859\\ M &= 33^\circ\ 27'\ 50''{\cdot}00\end{aligned}\right\}\ \text{Komet Faye—Möller.}$$

Die Berechnung von R nach $R = \dfrac{e \sin M}{1 - e \cos M}$ ergiebt—

1ᵉˢ Beispiel	— 8° 17' 59''·33
2ᵉˢ „	+ 20 0 28·17
3ᵉˢ „	+ 32 0 11·05

* Zur Erleichterung der Interpolation wird es den Vorzug verdienen R — a statt a in eine Tafel zu bringen.

† Wer sich durch noch andere Beispiele von der Bequemheit der Methode überzeugen will, kann natürlich schon mit diesen Bruchstücken eine grosse Menge von Problemen auflösen.

Weiter stellt sich für das erste Beispiel die ganze Rechnung so: mit dem Argumente R findet man in der Tafel + 5′ 6″ 57 ferner ist log cot M, $\cot^2$ M

Argumente R findet man in der Tafel	+ 5′ 6″ 57	− 1·1573	− 8·31
ferner ist log cot M, $\cot^2$ M		− 0·2832	+ 0·57
		+ 1·4405	− 8·88

so darf sich mit nur zweimaligem Eingehen in eine 4 stellige Logarithmentafel ergeben—

M	= 332° 28′ 54″·77	
R		− 8° 17′ 59″·33
α − R	+ 5′ 6·57	
β cot M	+ 27·57	
$\gamma \cot^2$ M		− 08
	332° 34′ 28″·91	
	− 8 17 59·41	
E	= 324 16 29·50	

was vollkommen mit Gauss's Berechnung stimmt. Fast eben so schnell findet man für das zweite Beispiel—

M	40° 7′ 20″·00	
R	20 0 28·17	
R − α		− 1° 4′ 54″·03
β cot M		− 7 38·68
$\gamma \cot^2$ M	9·08	
$\delta \cot^3$ M		− 0·23
	60° 7′ 57″·25	
	− 1 12 32·94	
E	= 58 55 24·31	

richtig innerhalb 0″·01.

Im letzten Beispiele endlich wird gefunden—

M	+ 33° 27′ 50″·00	
R	32 0 11·05	
R − α		− 3° 47′ 58″·48
β cot M		45 8·28
$\gamma \cot^2$ M	3 28·04	
$\delta \cot^3$ M		21·08
$\varepsilon \cot^4$ M	2·43	
$\zeta \cot^5$ M		0·30
$\eta \cot^6$ M	0·04	
	65 31 31·56	
	− 4 33 28·14	
E	= 60 58 3·42	

richtig innerhalb 0″·03; dieser Fehler ist fast ganz den unvermeidlichen Fehlern der siebenstelligen Berechnung von R zuzuschreiben.

Nachdem jetzt, wie ich hoffe, die Bequemlichkeit der Berechnung dargethan ist, gehe ich über zu der Entwicklung der Reihe selbst. Diese ist äusserst leicht und für die Reihe nach Potenzen von T fast identisch mit der der Reihe nach cot M. Ich werde mich daher auf die zweite Form beschränken, weil diese hier in Anwendung kam. Wie schon oben gezeigt wurde, ergiebt sich aus diesen letzteren dann unmittelbar die Reihe nach Potenzen von T.

Die Gleichung $M = E - e \sin E$ kann man auch so schreiben:

$$\Delta E = e \sin (M + \Delta E) = e \sin M \cos \Delta E + e \cos M \sin \Delta E \tag{6}$$

welche, wenn man einführt—

$$R = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M} \qquad S = \cot M \tag{7}$$

in die folgende ungewandelt wird—

$$- R \cos \Delta E + \Delta E = RS (\sin \Delta E - \Delta E). \tag{8}$$

Man setze nun—

$$\Delta E = \alpha + \beta S + \gamma S^2 + \delta S^3 + \varepsilon S^4 + \zeta S^5 + \dots\dots \tag{9}$$

oder kurz—

$$\Delta E = \alpha + \tau \tag{10}$$

so dass man hat—

$$\tau = \beta S + \gamma S^2 + \delta S^3 + \varepsilon S^4 + \zeta S^5 + \dots\dots \tag{11}$$

Entwickelt man jetzt $\sin \tau$ und $\cos \tau$ nach steigenden Potenzen von S (mittelst der Gleichungen $\sin \tau = \tau - \frac{1}{6}\tau^3 + \dots$, $\cos \tau = 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \dots$) und setzt man diese ein in—

$$\sin \Delta E = \sin \alpha \cos \tau + \cos \alpha \sin \tau \tag{12}$$

$$\cos \Delta E = \cos \alpha \cos \tau - \sin \alpha \sin \tau \tag{13}$$

so ergeben sich sofort—

$$\begin{aligned} \sin \Delta E = \sin \alpha &+ S \cdot \beta \cos \alpha + S^2 [\gamma \cos \alpha - \tfrac{1}{2} \beta^2 \sin \alpha] \\ &+ S^3 \left[\delta \cos \alpha - \frac{1}{2 \cdot 3} \beta^3 \cos \alpha - \beta\gamma \sin \alpha\right] \\ &+ S^4 \left[\varepsilon \cos \alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \gamma \cos \alpha - \left(\beta\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^4\right) \sin \alpha\right] \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \cos \Delta E = \cos \alpha &+ S \, [-\beta \sin \alpha] + S^2 [-\gamma \sin \alpha - \tfrac{1}{2} \beta^2 \cos \alpha] \\ &+ S^3 \left[-\delta \sin \alpha + \frac{1}{2 \cdot 3} \beta^3 \sin \alpha - \beta\gamma \cos \alpha\right] \\ &+ S^4 \left[-\varepsilon \sin \alpha + \frac{1}{2} \beta^2 \gamma \sin \alpha - \left(\beta\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^4\right) \cos \alpha\right] \\ &+ \quad \left[-\zeta \sin \alpha + \left(\frac{1}{2} \beta^2 \delta + \frac{1}{2} \beta\gamma^2 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \beta^5\right) \sin \alpha \right. \\ &\qquad \left. - \left(\beta\varepsilon + \gamma\delta - \frac{1}{2 \cdot 3} \beta^3 \gamma\right) \cos \alpha\right] \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Werden jetzt (9), (14), (15) in (8) eingeführt und die Coefficienten der Potenzen von S jeder für sich = 0 gesetzt, so erhalten wir die Gleichungen—

$$
(16)\quad \begin{cases}
\alpha - \mathrm{R}\cos\alpha = 0 \\
\beta(\mathrm{R}\sin\alpha + 1) = \mathrm{R}\,(\sin\alpha - \alpha) \\
\gamma(\mathrm{R}\sin\alpha + 1) + \frac{1}{2}\beta^2\mathrm{R}\cos\alpha = \mathrm{R}\beta\,(\cos\alpha - 1) \\
\delta(\mathrm{R}\sin\alpha + 1) - \frac{1}{2\cdot 3}\beta^3\mathrm{R}\sin\alpha + \beta\gamma\mathrm{R}\cos\alpha = \mathrm{R}\gamma\,(\cos\alpha - 1) - \frac{1}{2}\beta^2\mathrm{R}\sin\alpha \\
\varepsilon(\mathrm{R}\sin\alpha + 1) - \frac{1}{2}\beta^2\gamma\mathrm{R}\sin\alpha + \left(\beta\delta + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\beta^4\right)\mathrm{R}\cos\alpha \\
\qquad = \mathrm{R}\delta\,(\cos\alpha - 1) - \frac{1}{2\cdot 3}\beta^3\mathrm{R}\cos\alpha - \beta\gamma\mathrm{R}\sin\alpha \\
\zeta(\mathrm{R}\sin\alpha + 1) - \left(\frac{1}{2}\beta^2\delta + \frac{1}{2}\beta\gamma^2 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\beta^5\right)\mathrm{R}\sin\alpha + \left(\beta\varepsilon + \gamma\delta - \frac{1}{2\cdot 3}\beta^3\gamma\right)\mathrm{R}\cos\alpha \\
\qquad = \mathrm{R}\varepsilon\,(\cos\alpha - 1) - \frac{1}{2}\beta^2\gamma\mathrm{R}\cos\alpha - \left(\beta\delta + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\beta^4\right)\mathrm{R}\sin\alpha
\end{cases}
$$

u.s.w.

durch welche die Coefficienten von (9) bestimmt werden. Werden diese Coefficienten β, γ, δ . . . . hieraus nach steigenden Potenzen von α entwickelt, so ergeben sich die Reihen, die oben (in der Gleichung (1)) für diese Grössen angesetzt sind. Man sieht aber auch schon unmittelbar aus den Formeln (16), dass wenn e, also auch R, als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird—

α	eine	Grösse	1er	Ordnung sein wird	
β	„	„	4er	„	
γ	„	„	7er	„	
δ	„	„	10er	„	u.s.w.

Es ist leicht zu beweisen, dass ganz allgemein die Ordnung eines Coefficienten um drei Ordnungen höher ist als die des unmittelbar vorhergehenden. Dazu führe ich statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . . . . die Bezeichnungen $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ . . . . ein; es ist demnach—

$$(17)\qquad \Delta\mathrm{E} = \alpha + \tau$$

$$(18)\qquad \tau = \beta_1\mathrm{S} + \beta_2\mathrm{S}^2 + \beta_3\mathrm{S}^3 + \ldots\ldots\ldots$$

und ich werde nun zeigen, dass wenn bis β_m inclusive die Ordnung der Coefficienten β_n $3n + 1$ ist, dann auch noch β_{m+1} von der Ordnung $3(m + 1) + 1 = 3m + 4$ sein wird. Es bedarf keines näheren Nachweises dass, sobald es gelungen ist dieses zu zeigen, damit auch der gewünschte Beweis geliefert ist.

Bei den hier folgenden Reihen wird man jedesmal die Ordnung des allgemeinen Gliedes angegeben finden. Diese Ordnung wird aber im Voraus nur als gültig anzusehen sein bis auf das letzte noch angesetzte Glied inclusive. Es wird also die Bezeichnung—

$$(19)\qquad \tau = \beta_1\mathrm{S} + \beta_2\mathrm{S}^2 + \ldots + \beta_m\mathrm{S}^m + \ldots \quad (\beta_n \text{ Ordnung } 3n + 1)$$

diese Bedeutung haben: bis auf β_m inclusive ist die Ordnung der Coefficienten β_n $3n + 1$.

Entwickelt man die Potenzen von τ so kommt zuerst—

$$\tau^2 = \beta_1^2 S^2 + \ldots + [\beta_1\beta_m + \beta_2\beta_{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\beta_2 + \beta_m\beta_1]\, S^{m+1} + \ldots$$

Es wurde aber vorausgesetzt, dass β_1 von der vierten, β_2 von der siebenten Ordnung, β_m von der $(3m + 1)$ten Ordnung ist, folglich ist, wenn die Coefficienten mit γ_n bezeichnet werden—

$$(20) \qquad \tau^2 = \gamma_2 S^2 + \gamma_3 S^3 + \ldots + \gamma_{m+1} S^{m+1} + \ldots \quad (\gamma_n \text{ Ordnung } 3n + 2).$$

Ganz ebenso wird gefunden—

$$(21) \qquad \tau^3 = \delta_3 S^3 + \delta_4 S^4 + \ldots + \delta_{m+2} S^{m+2} + \ldots \quad (\delta_n \text{ Ordnung } 3n + 3).$$

$$(22) \qquad \tau^4 = \epsilon_4 S^4 + \epsilon_5 S^5 + \ldots + \epsilon_{m+3} S^{m+3} + \ldots \quad (\epsilon_n \text{ Ordnung } 3n + 4).$$

Werden mit Hülfe dieser Formeln und der Gleichungen—

$$\cos\tau = 1 - \tfrac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\tau^4 \ldots\ldots$$

$$\sin\tau = \tau - \frac{1}{2\cdot 3}\tau^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\tau^5 \ldots\ldots$$

die Werthe von $\cos\tau$ und $\sin\tau$ nach steigenden Potenzen von S entwickelt so ergiebt sich leicht—

$$(23) \quad \begin{cases} \cos\tau = 1 + A_2 S^2 + A_3 S^3 + \ldots\ldots + A_{m+1} S^{m+1} + \ldots & (A_n \text{ Ordnung } 3n + 2) \\ \sin\tau = B_1 S + B_2 S^2 + \ldots\ldots + B_m S^m + \ldots & (B_n \text{ Ordnung } 3n + 1). \\ \sin\tau - \tau = C_3 S^3 + C_4 S^4 + \ldots\ldots + C_{m+2} S^{m+2} + \ldots & (C_n \text{ Ordnung } 3n + 3). \end{cases}$$

Es genügt aber ΔE der Gleichung (8), die hier mit Zuhülfenahme von (10) geschrieben wird—

$$\Delta E = R\cos\alpha\cos\tau - R\sin\alpha\sin\tau + RS\sin\alpha\cos\tau + RS\cos\alpha\sin\tau - RS\alpha - RS\tau$$

oder—

$$(24) \quad \Delta E = R\cos\alpha\cos\tau - R\sin\alpha\sin\tau + RS\sin\alpha\cos\tau + RS(\sin\tau - \tau) + RS\sin\tau(\cos\alpha - 1) - R\alpha S$$

R und α sind beide erster Ordnung. Wird also durch Einführung der Formeln (23) das zweite Glied dieser Gleichung entwickelt nach steigenden Potenzen von S, so wird man bemerken dass in der Entwicklung aller Glieder, mit alleiniger Ausnahme von der des zweiten Gliedes, die Coefficienten von S^{m+1} von der Ordnung $3m + 4$ oder höher sind. Allein auch dieses Glied wird in die gewünschte Form gebracht, wenn man die Identität—

$$R\sin\alpha\Delta E = R\alpha\sin\alpha + R\tau\sin\alpha$$

addirt, wodurch die Form erhalten wird—

$$(25) \quad \Delta E(1 + R\sin\alpha) = R\alpha\sin\alpha - R\alpha S + R\cos\alpha\cos\tau - R\sin\alpha(\sin\tau - \tau) + RS\sin\alpha\cos\tau + RS(\sin\tau - \tau) + RS\sin\tau(\cos\alpha - 1).$$

Setzt man hierin die Werthe (23) ein, so wird die Ordnung der Coefficienten von S^{m+1} sein—

im 3^{en} Gliede	$3(m+1)+3 =$	$3m+6$
„ 4^{en} „	$3(m+1)+5 =$	$3m+8$
„ 5^{en} „		$3m+4$
„ 6^{en} „		$3m+4$
„ 7^{en} „		$3m+4$

Es ist also der Coefficient von S^{m+1} in der Entwickelung von $\Delta E\,(1 + R \sin \alpha)$ von der Ordnung $3m+4$; die nämliche Ordnung wird dieser Coefficient also auch in der Entwickelung von ΔE nach steigenden Potenzen von S haben.

Zum Schluss erlaube ich mir noch ein Paar Bemerkungen hinzufügen über die Construction der Tafeln, die für die hier gegebene Lösung des Kepler'schen Problems erforderlich sind. Die Berechnung dieser Tafeln ist nicht schwierig, mag man dazu (wenigstens für kleinere R) die Reihenentwicklungen der Coefficienten verwenden, die in der Gleichung (1) gegeben sind oder mit den geschlossenen Formen (9) rechnen. Letzteres verdient wohl im Allgemeinen den Vorzug. Die Lösung der in beiden Fällen auftretenden transcendenten Gleichung $\alpha = R \cos \alpha$ (die nur einen besondern Fall der Kepler'sche Aufgabe bildet) wird nicht die geringste Schwierigkeit darbieten. Wenn α_1 eine erste Annäherung ist (wenn man keine bessere hat kann dafür R selbst genommen werden) so ist—

$$(26) \qquad \alpha = \alpha_1 + \frac{R \cos \alpha_1 - \alpha_1}{1 + R \sin \alpha_1} = R \cos \alpha_1 - \frac{R \sin \alpha_1}{1 + R \sin \alpha_1}(R \cos \alpha_1 - \alpha_1)$$

d. h. α wird, wenn der Fehler der Näherung eine Grösse dritter Ordnung ist (was schon bei der Näherung $\alpha_1 = R$ der Fall ist) nur um eine Grösse fünfter Ordnung von $R \cos \alpha_1$ verschieden sein. Man wird also sehr leicht erst eine kleine Tafel etwa von Grad zu Grad berechnen können (mit 4 oder 5 stelligen Logarithmen) worin genäherte Werthe für α_1 und $\frac{R \sin \alpha_1}{1 + R \sin \alpha_1} = P$ angegeben werden. Mit Hülfe einer solchen kleinen Tafel wird dann die Berechnung einer ausführlichen Tafel für α, selbst wenn diese zehnstellig geführt wird, fast nie mehr als eine directe Rechnung nach—

$$(27) \qquad \alpha = R \cos \alpha_1 - P\,(R \cos \alpha_1 - \alpha_1)$$

erfordern.

Was nun den Umfang der erforderlichen Tafel betrifft, so geht aus den hier gegebenen Bruchstücken hervor, dass ein Intervall von $1'$ in den Argumenten ausreicht. Wird nun ein Tafel berechnet *nur* für Planetenbahnen (es scheint mir zweckmässig für die weniger excentrischen Kometenbahnen eine besondere Tafel zu besitzen) so bleibt R unter 24° und die Zahl der Argumente also unter 1440. Die Grösse R hat man in Bogensekunden zu berchnen, weshalb es vielleicht vortheilhafter ist das Argument R in der Tafel in Sekunden ausgedrückt zu geben, und bei dieser Einrichtung würde ein Intervall von 100″ vorzuziehen sein, wodurch die Zahl der Argumente auf 864 herabsinken würde. Eine solche Tafel wird also auf keinen Fall eine sehr grosse Ausdehnung zu haben brauchen.

Nachdem das obige geschrieben wurde, kam mir die neue Auflage des vorzüglichen Lehrbuchs zur Bahnbestimmung von Herrn Oppolzer zu Gesicht. Daselbst wird ein Näherungsverfahren benutzt und auf ein Beipsiel angewendet, das mir eine sehr erwünschte Gelegenheit anbietet die Bequemlichkeit der hier vorgetragenen Methode mit einer der besten Näherungsmethoden zu vergleichen. Denn das dort gegebene "Encke'sche durch Herz wesentlich erweiterte Verfahren" stützt sich gerade auf eine Modification der Keill'schen, also auch der hier gegebenen Reihe; davon wurden aber die Glieder siebenter Ordnung "die schon etwas mehr zusammengesetzt sind" weggelassen.

Ich werde um diese Vergleichung sofort ganz übersichtlich zu machen, die Coefficienten der Reihe (1) angeben mit dem Argument das bei Oppolzer S. 55 mit $\alpha\eta$ bezeichnet wird. Die Berechnung des Arguments wird dadurch zwar ein wenig länger, dagegen wird die Hülfstafel noch ein wenig einfacher, so dass man die Werthe der Coefficienten fast auf den ersten Blick der Tafel entnehmen kann.

Die Berechnung wird von Herrn Oppolzer geführt nach den Formeln (die Buchstaben α, β, γ, δ sind hier, um Verwirrung vor zu beugen mit Accente versehen)—

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned}
\operatorname{tg} y &= \frac{e \sin \mathrm{M}}{1 - e \cos \mathrm{M}} \\
\eta &= \operatorname{tg} y \cos y \\
x'' &= \alpha'\eta + \beta' \cot \mathrm{M}\eta^4 + \gamma'\eta^5 + \delta' \cot \mathrm{M}\,.\,\eta^6 \\
\text{wo } \log \alpha' &= 5{\cdot}3144251 \qquad \log \beta = 4{\cdot}5363_n \\
\log \gamma' &= 4{\cdot}5363 \qquad \log \delta = 4{\cdot}2766
\end{aligned} \right.
$$

Nach der Formel (1) wird man, wenn man das Argument $\alpha'\eta$ gebrauchen will, zu rechnen haben nach ($\alpha - \alpha'\eta = \mathrm{A}$ gesetzt)—

$$
(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned}
\operatorname{tg} y &= \frac{e \sin \mathrm{M}}{1 - e \cos \mathrm{M}} \\
\eta &= \operatorname{tg} y \cos y \\
x'' &= \alpha'\eta + \mathrm{A} + \beta \cot \mathrm{M} + \gamma \cot^2 \mathrm{M}
\end{aligned} \right.
$$

wo A, $\log \beta$ und $\log \gamma$ aus einer kleinen Tafel mit dem Argument $\alpha'\eta$ zu nehmen sind. Nach diesen Formeln mag nun das oben behandelte erste Beispiel, das auch Oppolzer gewählt hat, berechnet werden. Es wird sich dabei zeigen, dass aus der Tafel das folgende Stück erforderlich ist—

$\alpha\eta$	A	$\log \beta''$	$\log \gamma''$
$\pm$ 8° 12′	$\pm$ 2″·06	$-$ 1·1543	$\pm$ 8·31
13′	2·08	1·1578	8·32

wo die Vorzeichen, die den Logarithmen beigesetzt sind, sich wieder auf den dazu gehörigen Zahlen beziehen. Man sieht, dass man wirklich fast auf den ersten Blick die Werthe von A, $\log \beta''$, $\log \gamma''$ der Tafel entnehmen kann. Ich setze nun die beiden Rechnungen einander gegenüber, die des Herrn Oppolzer so, wie man sie S. 56 seines Lehrbuchs findet, die nach den Formeln (B) genau eben so vollständig (bei Oppolzer sind die α', β', γ', δ', die eins für allemal auf einem Streifen Papier geschrieben werden, weggelassen; bei meiner Rechnung ist dies nur mit α' den Fall). Ein Versehen in der Oppolzer'schen Berechnung, wodurch er zu dem unrichtigen Schlusse geführt wurde, dass schon die erste Näherung das richtige Resultat ergiebt, ist hier verbessert—

Nach den Formeln A (Oppolzer's Näherung).			Nach den Formeln B (direct).		
$\sin M$	9·664	6693_n	$\sin M$	9·664	6693_n
$\cos M$	9·947	8574	$\cos M$	9·947	8574
$e \cos M$	9·337	5836	$e \cos M$	9·337	5836
$1 : (1 - e \cos M)$	0·106	5502	$1 : (1 - e \cos M)$	0·106	5502
$e \sin M$	9·054	3955_n	$e \sin M$	9·054	3955^n
$\operatorname{tg} y$	9·160	9457_n	$\operatorname{tg} y$	9·160	9457_n
$\cos y$	9·995	4905	$\cos y$	9·995	4905
η	9·156	4362_n	η	9·156	4362^n
$\log \alpha'\eta$	4·470	8613_n	$\log \alpha'\eta$	4·470	8613_n

So weit sind die beiden Berechnungen identisch.

$\cot M$	$0{\cdot}2832_n$		$\alpha'\eta =$	$-\ 8^\circ\ 12'\ 50''{\cdot}68$
$\beta' \cot M$	4·8195	Tafel	$A =$	2·08
η^4	6·6257	Tafel	$\log \beta$	$1{\cdot}1573_n$
		Tafel	$\log \gamma$	$8{\cdot}32_n$
η^5	$5{\cdot}7822_n$		$\cot M$	$0{\cdot}2832_n$
			$\cot^2 M$	0·57
$\delta' \cot M$	$4{\cdot}5598_n$			
η^6	4·9386			

$\alpha'\eta =$	$-\ 8^\circ\ 12'\ 50''{\cdot}68$	$\alpha'\eta + A =$	$-\ 8^\circ\ 12'\ 52''{\cdot}76$
$\beta' \cot M\,\eta^4$	$+\ 27{\cdot}87$	$\beta \cot M$	$+\ 27{\cdot}57$
$\gamma\eta^5$	$-\ 2{\cdot}08$	$\gamma \cot^2 M$	$-\ 0{\cdot}08$
$\delta' \cot M\,\eta^6$	$-\ 0{\cdot}32$		
$x'' =$	$-\ 8^\circ\ 12'\ 25''{\cdot}21$	$x'' =$	$-\ 8^\circ\ 12'\ 25''{\cdot}27$

Wie man sieht, ist die Arbeit in den beiden Fällen kaum verschieden. Die Zahl der Operationen die im Kopfe oder auf dem Papiere auszuführen sind, ist für die Formeln (B) noch etwas geringer, aber dabei wird eine *besondere* Tafel erfordert, was bei der Berechnung nach den Formeln (A) nicht der Fall ist. *Dagegen* aber erlangt man nach dem Oppolzer'schen Verfahren auch nur eine *Näherung*, die zwar immer nur wenig von der Wahrheit entfernt ist (in den extremsten Fällen unseres Planetensystems nur wenige Sekunden), dennoch eine weitere Rechnung nach den Formeln—

$$M_1 = E_1 - e'' \sin E_1$$
$$E_2 = E_1 + \frac{M - M_1}{1 - e \cos E_1}$$

nothwendig macht, indem nach den Formeln (2) die Rechnung immer den Werth von E sofort richtig giebt.

Durch diese Vergleichung wird also, wie ich glaube, die am Anfange dieses Aufsatzes aufgestellte Behauptung genügend gerechtfertigt.

Gröningen, Holland,
December 1882.