Een afbeelding van de lijnelementen in een vlakke driedimensionale ruimte op de punten van een vlakke vijfdimensionale ruimte

https://hdl.handle.net/1874/319229

EEN AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN IN EEN VLAKKE DRIEDIMENSIONALE RUIMTE OP DE PUNTEN VAN EEN VLAKKE VIJFDIMENSIONALE RUIMTE

H. LIJKLEMA

EEN AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN
IN EEN VLAKKE DRIEDIMENSIONALE
RUIMTE OP DE PUNTEN VAN EEN
VLAKKE VIJFDIMENSIONALE RUIMTE

Diss. Utrecht 1934

EEN AFBEELDING VAN DE LIJNELEMENTEN IN EEN VLAKKE DRIEDIMENSIONALE RUIMTE OP DE PUNTEN VAN EEN VLAKKE VIJFDIMENSIONALE RUIMTE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. H. BOLKESTEIN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 17 DECEMBER 1934, DES NAMIDDAGS 3 UUR, DOOR

HENDRIK LIJKLEMA

GEBOREN TE WORKUM

H. VEENMAN & ZONEN — WAGENINGEN — 1934

Aan mijn Ouders
Aan mijn Vrouw

Gaarne maak ik bij het verschijnen van dit proefschrift van de gelegenheid gebruik, U, hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, te danken voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen.

In het bijzonder dank ik U, Hooggeleerde Barrau, voor de bereidwilligheid, waarmee gij de taak van Promotor op U genomen hebt en voor den grooten steun, dien ik bij de samenstelling van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

§ 1. *De methode van afbeelden.*

De lijnelementen van een vlakke driedimensionale ruimte (R_3) kunnen op de volgende manier afgebeeld worden op een vlakke vijfdimensionale verzameling van kwadratische oppervlakken (O^2). We nemen in R_3 vier punten A_1, A_2, A_3 en A_4 aan, die niet in één plat vlak gelegen zijn, een plat vlak α, waarin geen der punten A gelegen is en ten slotte een rechte l in α, die door geen der zes verbindingsrechten van de punten A gesneden wordt. [1])

Indien P het punt en p de rechte van het lijnelement (P, p) is, voegen we aan dit lijnelement dat oppervlak (O^2) toe, dat door de punten A gaat en waarvoor p de poollijn is van l en P de pool van α.

In het algemeen wordt op deze manier aan elk lijnelement één O^2 toegevoegd, want dat l en p wederkeerige poollijnen zijn ten opzichte van O^2 is een lineaire viervoudige voorwaarde voor O^2, terwijl, daar l in α ligt, het geconjugeerd zijn van P met de punten van α een enkelvoudige lineaire voorwaarde is en er dus tenslotte, daar O^2 door de vier punten A moet gaan, in het algemeen een negenvoudige lineaire voorwaarde aanwezig is, die O^2 bepaalt.

§ 2. *Het onderzoek naar de singuliere oppervlakken.*

De rechte l heeft alleen dan meer dan één poollijn ten opzichte van O^2, indien O^2 een dubbelpunt heeft, dat op l ligt. Het platte vlak α heeft alleen dan meer dan één pool ten opzichte van O^2, indien O^2 een dubbelpunt heeft, dat in α ligt.

---

[1]) Zie Prof. Dr J. Wolff: "A representation of the plane pencils in R_3 on the conics of a plane." Amst. Proceedings Vol. XXVIII, pag. 450, 1925.

De singuliere O^2, dit zijn de O^2, die met meer dan één lijnelement correspondeeren, moeten dus gezocht worden onder de O^2 met dubbelpunt in α.

1°. *Als* O^2 *een kegel is met een top in* α, *buiten* l *gelegen* (K_α^2), *heeft* l *één poollijn* λ *ten opzichte van* K_α^2. *Alle punten van* λ *zijn ten opzichte van* K_α^2 *geconjugeerd met* α, *zoodat de kegel* K_α^2 *correspondeert met de* ∞^1 *lijnelementen, waarvan* λ *de rechte is.*

2°. *Indien* O^2 *een kegel is met top op* l (K_l^2) *is er een vlak* π, *waarvan de punten geconjugeerd zijn met* l *en in* π *een rechte* λ, *waarvan de punten geconjugeerd zijn met* α *ten opzichte van* K_l^2, *zoodat* K_l^2 *correspondeert met de* ∞^2 *lijnelementen, waarvan* p *in* π *en* P *op* λ *ligt.*

3°. Er rest ons nog te onderzoeken de singulariteit der kegels, die een rechte van toppen in α hebben, de vlakkenparen.

Elke rechte in een plat vlak door drie punten A is dubbelrechte van een vlakkenpaar, dat bestaat uit genoemd plat vlak en het platte vlak door genoemde rechte en het vierde punt A.

Er zijn vier platte vlakken δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 (die respectievelijk niet het punt A_1, A_2, A_3, A_4 bevatten), waarvan elke rechte dubbelrechte is van een vlakkenpaar door de punten A.

Elke rechte, die transversaal is over twee elkaar kruisende verbindingsrechten van punten A, is dubbelrechte van een vlakkenpaar, dat bestaat uit de beide platte vlakken door genoemde transversaal en genoemde verbindingsrechten. Er zijn drie bilineaire congruenties $\beta_{12,\,34}$, $\beta_{13,\,24}$ en $\beta_{14,\,23}$ (die respectievelijk de drie paren verbindingsrechten $A_1 A_2$, $A_3 A_4$; $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ en $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ tot richtlijnen hebben), waarvan elke rechte dubbelrechte is van een vlakkenpaar door de punten A.

De vier platte vlakken δ *en de drie bilineaire congruenties* β, *bepalen in* α 7 *rechten, die de zijden* d (*bepaald door de vlakken* δ) *en de diagonalen* b (*bepaald door de congruenties* β) *zijn van een volledige vierzijde, waarvan de hoekpunten* (B) *de snijpunten zijn van de verbindingsrechten der punten* A *met* α. *Deze rechten zijn dubbelrechten van evenzooveel vlakkenparen. Bij elk van deze vlakkenparen behoort een plat vlak* π', *waarvan ieder punt geconjugeerd is met* α, *dus ook met* l, *ten opzichte van het vlakkenpaar* *dat π' bepaalt, zoodat elk der genoemde vlakkenparen correspondeert met de ∞^3 lijnelementen van een plat vlak π'.*

De kegels met een bepaald punt van α als top, vormen een bundel, met als basisfiguur de vier verbindingsrechten van dat punt met de punten A, zoodat ieder punt van α dubbelpunt is van singuliere oppervlakken, die een bundel vormen.

De kegels, wier toppen liggen in één der zes punten B, vormen een net van singuliere O^2.

De bundel singuliere O^2, wier dubbelpunten in een bepaald punt C van een rechte d vallen, bestaat uit vlakkenparen, waarvan het door d gaande vlak δ bestanddeel is. Van elke O^2 is het tweede bestanddeel een vlak gaande door P en het punt A, dat niet in genoemd vlak δ ligt.

§ 3. *Het oppervlak Ω.*

We zullen nu de singuliere oppervlakken, waarvan het dubbelpunt op l ligt, nader beschouwen.

We hebben gezien dat de singuliere O^2, met gegeven dubbelpunt D op l, een bundel (ϱ) vormen. De poolvlakken π van l ten opzichte van de exemplaren van deze bundel vormen een vlakkenbundel, gedragen door een rechte u, die l in D snijdt. Zoodoende behoort bij elk punt D van l een rechte u.

Twee rechten u_1 en u_2 kruisen elkaar, want hadden ze een punt gemeen, dan zouden voor twee kegels K_1 en K_2, uit de bij u_1 en u_2 behoorende bundels ϱ_1 en ϱ_2, de poolvlakten π_1 en π_2 samenvallen met het platte vlak door u_1 en u_2. Beide kegels moesten dan volgens l aan $\pi_{1,2}$ raken. Er is echter slechts één kegel, die volgens l aan een vlak door l raakt. Immers indien er twee kegels waren, die volgens l aan $\pi_{1,2}$ raakten, zou de snijfiguur van deze O^2 bestaan uit de dubbelgetelde rechte l en een kegelsnede door de punten A, waarvan aangenomen is, dat ze niet in één plat vlak liggen.

Er is ook geen vlakkenpaar met l als dubbelrechte.

We zullen nu onderzoeken van welke graad het oppervlak (Ω), gevormd door de rechten u, is.

Indien een rechte u_1 een willekeurige rechte p snijdt, gaat ten opzichte van één $K_1{}^2$ uit de bundel ϱ_1, het poolvlak π_1

van l ten opzichte van K_1^2, door p en is dus p poollijn van l ten opzichte van K_1^2. Is omgekeerd p poollijn van l ten opzichte van een kegel K_1^2 met top op l, dan gaat het vlak π_1 door p en wordt dus p door de rechte u_1 gesneden.

De O^2 ten opzichte waarvan l en een willekeurige rechte p wederkeerige poollijnen zijn, vormen een bundel. De rechten l en p zijn overstaande ribben van het gemeenschappelijk poolviervlak van de exemplaren van de bundel, zoodat er twee kegels zijn, die hun top op l hebben en ten opzichte waarvan p poollijn is van l, m.a.w. p wordt door twee rechten u gesneden.

Het oppervlak Ω is dus van de tweede graad en de vlakken π zijn de raakvlakken aan Ω.

Het oppervlak Ω draagt een tweede regelschaar. Beschouwen we de verzameling van de O^2 ten opzichte waarvan een bepaalde beschrijvende (v) van deze regelschaar poollijn is van l, dan bevat deze verzameling ∞^1 kegels, waarvan de toppen op l liggen en die bepaald worden door de vlakken π door v. Elk punt van l is top van één zoo'n kegel.

De kegels vormen geen bundel, want dan zouden ze volgens de rechte l aan eenzelfde vlak π moeten raken. De vlakken π, die behooren bij de kegels die we beschouwen, vormen echter de vlakkenbundel gedragen door de rechte v.

Het net (v), bepaald door drie van deze kegels, behoort tot de te onderzoeken verzameling O^2. Indien nu buiten dit net nog een O_1^2 aanwezig was, ten opzichte waarvan l en v wederkeerige poollijnen waren, dan zouden ten opzichte van alle O^2 uit het kluwen, bepaald door het net v en O_1^2, l en v wederkeerige poollijnen zijn. In een kluwen komt een tweedimensionale verzameling van kegels voor. Hier bestaat de verzameling kegels echter uit exemplaren waarvan slechts één de top heeft in een punt van l of v. De verzameling is dus ééndimensionaal, m.a.w.:

De O^2 ten opzichte waarvan l en v wederkeerige poollijnen zijn, vormen een net.

§ 4. *De vlakke vijfdimensionale ruimte R_5.*

De O^2, en dus ook de lijnelementen van R_3, kunnen afgebeeld worden op de punten van een vlakke vijfdimensionale ruimte (R_5).

De meetkundige plaats van de toppen van de kegels in een kluwen vormen een oppervlak van de vierde graad, dat l in vier punten snijdt. De beeldfiguur van de kegels, waarvan de toppen op l liggen, is in R_5 dus een zoodanige, dat elke R_3 er 4 punten mee gemeen heeft, m.a.w. het is een tweedimensionale variëteit van de vierde graad (V_2^4).

Elk punt van l is top van ∞^1 kegels, die een bundel vormen. Er is geen vlakkenpaar dat l als dubbelrechte heeft, m.a.w. V_2^4 bestaat uit ∞^1 elkaar kruisende rechten ϱ.

De meetkundige plaats van de toppen van de kegels in een net vormen een kromme van de zesde graad, dus de kegels, die hun top in α hebben, vormen in R_5 een driedimensionale variëteit van de zesde graad (V_3^6), die V_2^4 bevat.

§ 5. *Het onderzoek naar de singuliere lijnelementen.*

Indien een lijnelement (P, p) singulier is, correspondeert het met een bundel O^2.

Indien nu (P, p) singulier is, zijn l en p overstaande ribben, P en α hoekpunt en zijvlak van het gemeenschappelijk poolviervlak der exemplaren van de bij (P, p) behoorende bundel O^2. Het snijpunt van p met α is top van een kegel K_α^2 uit de bundel, dus p is poollijn van α ten opzichte van K_α^2.

Is omgekeerd λ de poollijn van α ten opzichte van een kegel K_α^2, dan is voor een willekeurige O^2 uit de bundel ten opzichte waarvan λ de poollijn is van l, een punt P van λ geconjugeerd met α. Echter ook ten opzichte van K_α^2 is P geconjugeerd met α, dus ten opzichte van alle exemplaren van de bundel, m.a.w. het lijnelement (P, λ) is singulier.

Dit singuliere lijnelement correspondeert met een bundel O^2, die drie kegels met top in α bevat. Twee kegeltoppen liggen op l, waaruit volgt:

De singuliere lijnelementen worden afgebeeld op de ∞^3 trisecanten van V_3^6, die bisecanten van V_2^4 zijn.

Elk punt van α is in het algemeen top van ∞^1 kegels die een bundel vormen. De poollijnen van α ten opzichte van die kegels vormen een kwadratische kegel (K^2_λ).

De singuliere lijnelementen worden gedragen door de $\infty^2 K^2_\lambda$.

We zullen nu iets naders trachten te vinden van dit stelsel van ∞^3 singuliere lijnelementen en eerst onderzoeken wat de rechten λ door een willekeurig punt A vormen.

De rechten λ, door het punt A, zijn de poollijnen van α ten opzichte van de kegels met top in α, uit het net (ν) waarvoor A geconjugeerd is met α.

De doorsnijding van het net ν met α, is een net van kegelsneden (ν_α) in α, waarbij elke kegel uit ν een ontaarde kegelsnede in α geeft. Omgekeerd is ten opzichte van de O^2, die α volgens een ontaarde kegelsnede uit het net ν_α snijdt, het platte vlak α geconjugeerd met het dubbelpunt D van de kegelsnede en met het punt A, m.a.w. O^2 is een kegel.

Nu vormen de dubbelpunten van de ontaarde kegelsneden in een net ν_α een kromme van de derde graad, dus de rechten λ door A, vormen een kegel van de derde graad.

De ∞^3 *rechten* λ *vormen dus een stralencomplex van de derde graad.*

Indien het punt A in α ligt, bestaat het met ν uit O^2, die in het punt A aan α raken. De kegels uit dit net zijn die, welke het punt A tot top hebben en die welke volgens de rechten door A in α, aan α raken. De complexkegel is hier dus ontaard in een kwadratische kegel met top A en een waaier in α met top A.

Hier blijkt dus tevens, dat iedere rechte van α een singulier lijnelement draagt. Het punt van dit lijnelement ligt op l.

Iedere rechte van de 7 platte vlakken π' draagt een singulier lijnelement evenals de rechten van de platte vlakken δ (§ 2), zoodat de complexkegels van de punten van deze vlakken ontaard zijn in een waaier en een kwadratische kegel.

Verder is de complexkegel van ieder punt, dat gemeenschappelijk punt is van twee platte vlakken uit de 12 vlakken α, π' en δ ontaard in drie waaiers.

Op ieder der 6 verbindingsrechten van twee punten A ligt een punt H, harmonisch met de punten A en het snijpunt

B der verbindingsrechte met α. Elke rechte p, door een punt H, vormt met het punt H een singulier lijnelement, want ten opzichte van de exemplaren van de bundel, waarvoor l en p wederkeerige poollijnen zijn, is H geconjugeerd met α.

Iedere rechte door een punt B is een rechte λ, zoodat de complexkegel van een willekeurig punt A door de 12 punten H en B gaat.

De O^2, die de afbeelding zijn van de singuliere lijnelementen, vormen een vierdimensionale variëteit van de zesde graad (V_4^6).

Immers de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een bundel vormen een kwadratische regelschaar. Het complex der rechten λ is van de derde graad en heeft dus zes rechten met de regelschaar gemeen. Indien ten opzichte van een O^2 uit de bundel b een beschrijvende t van de regelschaar poollijn is van l en t tevens een rechte λ is, zal O^2 een oppervlak zijn uit de bundel, die behoort bij het singuliere lijnelement, gedragen door λ. M.a.w. de rechte b, die in R_5 de bundel b voorstelt, snijdt de te onderzoeken variëteit in evenveel punten als de regelschaar rechten λ bevat en is dus van de zesde graad.

Nu zullen we onderzoeken hoeveel rechten λ met een willekeurig punt A een singulier lijnelement vormen.

We hebben gezien, dat indien (A, λ) een singulier lijnelement is, de bundel O^2, die bij dit singuliere lijnelement behoort, twee kegels K_1 en K_2 bevat, waarvan de toppen op l liggen, λ de snijlijn van de vlakken π_1 en π_2 is en dat de rechten λ_1 en λ_2 door het punt A gaan. Indien, omgekeerd, de bij twee kegels K_1 en K_2, waarvan de toppen op l liggen, behoorende rechten λ_1 en λ_2 elkaar in een punt A snijden, is het lijnelement, dat men krijgt door het punt A met de snijlijn λ der vlakken π_1 en π_2 te combineeren, een singulier lijnelement. Immers ten opzichte van de kegels K_1 en K_2, dus ten opzichte van de O^2 van de bundel, waarvan K_1 en K_2 exemplaren zijn, is A geconjugeerd met α en zijn λ en l wederkeerige poollijnen.

De rechten λ door het punt A vormen een kegel van de derde graad. Er zijn 3 rechten λ door A, die l snijden. De bij deze rechten behoorende kegels bepalen op hun beurt 3 vlakken π, waarvan de drie onderlinge snijlijnen de rechten zijn, die met het punt A singuliere lijnelementen vormen.

Er zijn drie rechten λ, die met een willekeurig punt A singuliere lijnelementen vormen.

Deze drie rechten zijn ook de drie verbindingsrechten van het punt A met de drie kritieke punten van het net ν_α, behoorende bij de rechte l.

Indien A op Ω ligt, gaat één van de drie vlakken π door de rechte u door A, want voor één O^2 uit de bundel ϱ, die bij u behoort, is A geconjugeerd met α.

De twee andere vlakken π gaan door de rechte v door A. Het lijnelement (A, v) is dus een singulier lijnelement.

Alle lijnelementen gedragen door de rechten v zijn singulier.

Indien het punt A in α gelegen is, is de kromme van de zesde graad, gevormd door de toppen der kegels, die in A aan α raken, ontaard. Een derdegraadsdeel wordt gevormd door de drie rechten, uit de drie bilineaire congruenties β, door A. De rest is een kromme van de derde graad in α en wordt gevormd door de toppen der kegels, die volgens de rechten van de waaier (A, α) aan α raken. Deze kromme heeft een dubbelpunt in A, omdat de $K^2{}_\lambda$, die behoort bij het punt A, het vlak α volgens twee rechten λ snijdt. De drie kegels, waarvan de toppen op l liggen, bepalen de drie vlakken π, waarvan de drie snijlijnen de rechten zijn, die met het punt A singuliere lijnelementen vormen.

Indien het punt A op l ligt, vormt iedere rechte van α door A, met het punt A een singulier lijnelement. De bij dit singuliere lijnelement behoorende bundel bestaat uit oppervlakken, die in A aan α raken.

Verder is het lijnelement, gevormd door een punt A van l en de rechte u door A singulier. De bij dit lijnelement behoorende bundel O^2, wordt gevormd door de kegels, waarvan A de top is.

Ten slotte willen we onderzoeken, welke figuur de singuliere lijnelementen in een plat vlak β vormen.

Door een willekeurig punt A van β gaan drie rechten λ nl. de drie rechten door het complex der rechten λ in de waaier (A, β) bepaald. De rechten λ in β omhullen een kromme van de derde klasse.

Bij het verdere onderzoek zullen we gebruik maken van de theorie der vlakke nulstelsels.

Onder een nulstelsel (μ, ν) van ∞^2 lijnelementen in een plat vlak β, verstaat men een verzameling van lijnelementen zoodanig dat een willekeurig punt voor μ rechten nulpunt is en aan een willekeurige rechte ν nulpunten zijn toegevoegd.

Bij een stelsel (p, q) van ∞^1 lijnelementen (P, p) vormen de punten P een kromme van de graad q, terwijl de rechten p een kromme van de klasse p omhullen.

Om het gemeenschappelijke van stelsels van lijnelementen te vinden, kunnen we de lijnelementen van een plat vlak afbeelden op de punten van een driedimensionale ruimte (R_3), volgens een methode, die analoog is met die, volgens welke de lijnelementen van R_3 afgebeeld worden op de punten van R_5.

We nemen daartoe in het platte vlak een rechte a aan met daarop gelegen een punt A en een kluwen van kegelsneden (k^2), waarvan de exemplaren afgebeeld worden op de punten van een R_3.

Het lijnelement (P, p) correspondeert met die kegelsnede ten opzichte waarvan a geconjugeerd is met P en A met p. De pool en poollijn van a en A ten opzichte van een gegeven kegelsnede, vormen het bij deze kegelsnede behoorende lijnelement.

Singulier zijn de kegelsneden met dubbelpunt op a. Een willekeurig exemplaar van deze kegelsneden correspondeert met de lijnelementen van de rechte t, poollijn van a ten opzichte van deze kegelsnede. De rechten t vormen een kwadratische eendimensionale verzameling, want a is een rechte t, omdat er één k^2 is, die a bevat, terwijl er verder door elk punt van a één rechte t gaat.

De kegelsnede, met dubbelpunt in $A(k_A{}^2)$, correspondeert met de ∞^2 lijnelementen, waarvan het punt P op de poollijn t_A van l ten opzichte van $k_A{}^2$ ligt, een stelsel $S_2(t_A)$ van ∞^2 lijnelementen.

De singuliere kegelsneden correspondeeren in R_3 met een kromme van de derde graad (ϱ^3), omdat in een net de toppen der ontaardingen een kromme van de derde graad vormen, die a in 3 punten snijdt. Met $k_A{}^2$ correspondeert een punt B van ϱ^3.

Opmerking: Als het kluwen twee basispunten heeft, ontaardt ϱ^3 in een kegelsnede en een secant van deze kegelsnede.

De verzameling lijnelementen van een rechte b, een stelsel S_1 (0,1), bevat een element van $S_2(t_A)$ en correspondeert met een bundel k^2, waarvoor A geconjugeerd is met de punten van b en die dus $k_A{}^2$ bevat. Omgekeerd correspondeert een bundel k^2, die $k_A{}^2$ bevat, met een verzameling S_1 (0,1).

De verzameling lijnelementen, waarvan het punt samenvalt met een gegeven punt B, een stelsel S_1 (1,0), bevat twee lijnelementen, gedragen door een rechte t en correspondeert met met een bundel k^2, waarvoor B geconjugeerd is met de punten van a. De bundel bevat twee ontaardingen met dubbelpunt op a. Omgekeerd correspondeert een bundel k^2, die twee ontaardingen bevat met dubbelpunt op a, met een stelsel S_1 (1,0).

De ∞^2 $S_1(0,1)$ correspondeeren met de ∞^2 rechten der schoof B in R_3. De ∞^2 $S_1(1,0)$ correspondeeren met de ∞^2 bisecanten van ϱ^3 in R_3. De lijnelementen der rechten t correspondeeren met de beschrijvenden van de kegel K^2 door welke ϱ^3 uit B wordt geprojecteerd.

Een stelsel S_2 (μ, ν) van ∞^2 lijnelementen heeft met elk stelsel S_1 (0,1) ν en met elk stelsel S_1 (1,0) μ elementen gemeen, zoodat de afbeelding een oppervlak is, dat ϱ^3 ν-voudig bevat (iedere t draagt ν elementen van S_2). Een bisecant van ϱ^3 heeft $\mu + 2\nu$ punten met het oppervlak gemeen dat dus van de graad $\mu + 2\nu$ is en het punt B $\mu + \nu$ voudig bevat.

Een systeem S_1 (p, q) van ∞^1 lijnelementen heeft met elk nulstelsel S_2 (1,0) p en met elk nulstelsel S_2 (0,1) q elementen gemeen. De afbeelding is dus een kromme, die elk plat vlak door B in p punten snijdt, terwijl het punt B q voudig is, daar $S_2(t_A)$ q elementen van $S_1(p,q)$ bevat. De kromme, van de graad $p + q$, snijdt elk der kwadratische oppervlakken door ϱ^3, de afbeeldingen van de stelsels $S_2(0,1)$, in $2p + 2q$ punten, waarvan er buiten B, dus $2p$ op ϱ^3 liggen.

We hebben nu dezelfde afbeelding gekregen als Dr Schaake in Hoofdstuk I van zijn proefschrift „Afbeeldingen van figuren op de punten eener lineaire ruimte”, waarin, met behulp van deze afbeelding, de volgende stellingen worden afgeleid:

Een nulstelsel $S_2(\mu, \nu)$ van ∞^2 lijnelementen en een stelsel $S_1(p, q)$ van ∞^1 lijnelementen hebben $p\mu + q\nu$ lijnelementen gemeen.

Twee nulstelsels $S_2(\mu, \nu)$ en $S_2'(\mu', \nu')$ hebben een stelsel $S_1(\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu', \mu\nu' + \mu'\nu + \mu\mu')$ van ∞^1 lijnelementen gemeen.

Door een willekeurige rechte p van β gaan twee raakvlakken π aan Ω. Hierbij behooren twee kegels $K_1{}^2$ en $K_2{}^2$, waarvan de toppen op l liggen. Deze twee kegels bepalen de bundel O^2, waarvoor l en p wederkeerige poollijnen zijn. Deze bundel bevat nog twee kegels, waarvan de toppen (T) op p liggen. Op deze manier zijn aan elke rechte p twee punten T toegevoegd.

De lijnelementen (T, p) in β vormen een nulstelsel, waarvan 2 het tweede karakteristieke getal is.

Om het eerste te vinden, bedenken we, dat een willekeurig punt A van β top is van een bundel kegels. Nu vormen de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van deze bundel een kwadratische kegel met top op A, waarvan twee beschrijvenden in β liggen, zoodat de lijnelementen (T, p) in β een nulstelsel $S_2(2,2)$ van ∞^2 lijnelementen vormen.

De lijnelementen van elk der zeven rechten d door de platte vlakken δ en de bilineaire congruenties β in β bepaald, behooren tot het nulstelsel S_2. Ze vormen 7 stelsels (0,1) van ∞^1 lijnelementen.

Uit de beschouwingen aan het begin van deze paragraaf gehouden, blijkt, dat indien van één der beide lijnelementen (T, p) van een rechte, het punt T in α ligt, het andere lijnelement singulier is. We kunnen dus ook zeggen, de singuliere lijnelementen van β zijn lijnelementen van het stelsel S_2, gedragen door de ∞^1 rechten λ in β.

Alle lijnelementen, gedragen door de rechten λ, vormen in β een nulstelsel $S_2'(3,0)$ van ∞^2 lijnelementen.

De nulstelsels S_2 en S_2' hebben een stelsel $S_1'(6, 12)$ van ∞^1 lijnelementen gemeen. Daar de rechten d tevens rechten λ zijn, behooren de 7 stelsels (0,1) ook tot S_1'. De rechten d dragen slechts een eindig aantal singuliere lijnelementen, zoodat ze uit het stelsel S_1' verwijderd moeten worden. Er blijft dan een stelsel $S'(6,5)$ over. Hieronder bevinden zich nog de lijnelementen (T, p), waarvan T op de snijlijn s van α met β ligt en de rechten p de rechten λ zijn. Ze vormen een stelsel (3,2), want elk punt van s is nulpunt voor twee rechten van β.

Ten slotte blijft er in β een stelsel S_1 (3,3) van ∞^1 lijnelementen, die singulier zijn, over.

In een plat vlak π, dat het poolvlak is van l ten opzichte van een kegel K_l^2, ligt een rechte λ, de poollijn van α ten opzichte van K_l^2. In π ligt een rechte v, waarvan alle lijnelementen singulier zijn.

We beschouwen een kegel K_1^2, waarvan de top op de snijlijn van α met π en de poollijn λ_1 van α ten opzichte van K_1^2 in π ligt. Noem het snijpunt van λ en λ_1 S. Nu zijn ten opzichte van K_l^2 en K_1^2 l en λ_1 wederkeerige poollijnen en is het punt S geconjugeerd met α. Dit geldt dus ook voor de bundel O^2, waartoe K_l^2 en K_1^2 behooren m.a.w. het lijnelement (S, λ_1) is singulier.

Door S gaat een derde rechte λ (λ_2). Het lijnelement ($S\lambda_2$) is ook singulier, zoodat ieder punt van λ nulpunt is van twee singuliere lijnelementen.

De punten S van de singuliere lijnelementen in π vormen een kromme van de derde graad, die ontaard is in de rechten v en λ, waarbij λ dubbelgeteld moet worden.

We hebben reeds gezien, dat ieder lijnelement van α, waarvan het punt P op l ligt, singulier is. Verder komen er in α geen singuliere lijnelementen meer voor, want zou een lijnelement (Q, q) van α, waarbij Q buiten l ligt, singulier zijn, dan moest er een bundel O^2 zijn, waarvan de exemplaren in het punt Q en in het snijpunt van q met l aan α raakten. Er is echter slechts één kegel, die q tot dubbelrechte heeft.

De ∞^2 singuliere lijnelementen van α vormen een nulstelsel (0,1).

Iedere rechte van de zeven vlakken π' is een λ, die dus één singulier lijnelement draagt.

Een willekeurig punt A van een vlak π' is nulpunt van twee singuliere lijnelementen van π'. De rechten dezer lijnelementen zijn de snijlijnen van π' met de beide vakken π, die behooren bij de twee K_l^2, die geen van beide het vlakkenpaar W behoorende bij π' zijn, uit het net O^2, waarvoor A geconjugeerd is met α.

De singuliere lijnelementen van π' vormen dus een nulstelsel (2,1). Zoo'n nulstelsel heeft zeven singuliere rechten [1]), dit zijn rechten, waarvan ieder lijnelement tot het nulstelsel behoort. Nu bepalen de platte vlakken δ en de bilineaire congruenties β in π' zeven dubbelrechten, waarvan één behoort bij het vlakkenpaar W. Elk lijnelement van de zes overblijvende dubbelrechten is singulier, want indien q in π' een dubbelrechte van een vlakkenpaar W' is en Q een willekeurig punt van die rechte, is ten opzichte van W en W' Q geconjugeerd met de punten van α en q de poollijn van l.

De zevende singuliere lijn is de rechte v, een deel van de snijfiguur van π' met Ω.

Alle rechten van de platte vlakken δ, dragen één singulier lijnelement. Is A een willekeurig punt van δ, dan is de bij A behoorende complexkegel van rechten behoorende bij singuliere lijnelementen, ontaard in een waaier en een kwadratische kegel, die respectievelijk kegels W^2, K_1^2 en K_2^2, behoorende tot het net ν_α en met toppen op l, bepalen.

Nu zijn de rechten, die met een punt A singuliere lijnelementen vormen, de snijlijnen p van de drie vlakken π, behoorende bij de drie genoemde kegels. De vlakken π snijden elkaar twee aan twee volgens beschrijvenden van de complexkegel. De drie overblijvende snijlijnen van de vlakken π met de complexkegel zijn geen rechten die met A een singulier lijnelement vormen.

Stel dat de poolvlakken van l ten opzichte van W^2, K_1^2 en K_2^2 respectievelijk π, π_1 en π_2 zijn, dan snijdt π de waaier en de kwadratische kegel respectievelijk volgens de rechten p, p_1 en p_2. Hiervan vormen de rechten p_1 en p_2 met A wel en p niet een singulier lijnelement. De vlakken π_1 en π_2 moeten elkaar dus volgens een rechte van de waaier snijden, m.a.w. het punt A vormt met één rechte uit de waaier een singulier lijnelement.

---

[1]) Zie Jan de Vries: „Vlakke lineaire nulstelsels". Verslagen Kon. Ak. v. Wet. XXI, pag. 1070.

In elk der vier platte vlakken δ vormen de singuliere lijnelementen een nulstelsel (1, 1).

Nu heeft zoo'n nulstelsel drie singuliere punten. Dit zijn de drie punten H in ieder vlak δ gelegen. Immers, iedere rechte van δ, door H, vormt met H een singulier lijnelement.

Verder heeft het nulstelsel in δ drie singuliere rechten. Dit zijn de drie verbindingsrechten der punten H. Immers ten opzichte van de exemplaren der bundel, waarvoor een rechte H_1H_2 uit δ en l wederkeerige poollijnen zijn, zijn de punten H_1 en H_2, dus alle punten van de rechte H_1H_2 geconjugeerd met α, m.a.w. ieder lijnelement van H_1H_2 correspondeert met een bundel O^2 en is dus singulier.

Iedere rechte der 12 vlakken α, π' en δ, draagt een singulier lijnelement. Iedere rechte, door een der 12 punten H en B vormt met dat punt een singulier lijnelement.

Resumeerende kunnen we dus zeggen, dat de singuliere lijnelementen een stelsel vormen, zoodanig dat de graad van het complex gevormd door de rechten p, drie is, dat een gegeven punt met drie rechten singuliere lijnelementen vormt en de graad der kromme der punten P van de singuliere lijnelementen in een gegeven vlak, drie is.

De singuliere lijnelementen vormen een stelsel S_3 (3, 3, 3).

§ 6. *De lijnelementen met gegeven rechte.*

Alle lijnelementen, die gedragen worden door een gegeven rechte p, correspondeeren met de O^2, waarvoor p de poollijn is van l. Deze O^2 vormen een bundel. De bundel bevat twee kegels, waarvan de toppen op l liggen en wordt dus in R_5 voorgesteld door een rechte, die V_2^4 in twee punten snijdt.

Omgekeerd is een bisecant van V_2^4 ook de afbeelding van een verzameling lijnelementen met gegeven p, nl. de verzameling, die gedragen wordt door de snijlijn der vlakken π_1 en π_2, behoorende bij de kegels K_1 en K_2 volgens welke de bisecant V_2^4 snijdt.

De ∞^4 verzamelingen lijnelementen, waarvan elke verzameling bestaat uit de lijnelementen met een gegeven rechte, worden afgebeeld op de ∞^4 bisecanten van V_2^4.

Op deze manier zijn de rechten van R_3 afgebeeld op de bisecanten van V_2^4.

Een rechte u is poollijn van de rechte l ten opzichte van de bundel kegels, die het snijpunt van u en l tot top hebben. De ∞^1 beschrijvende rechten u van Ω correspondeeren dus met de ∞^1 beschrijvende rechten van V_2^4.

Het oppervlak Ω heeft nog een tweede stelsel beschrijvenden, de rechten v, waartoe l ook behoort.

Beschouwen we nu de O^2 ten opzichte waarvan een bepaalde rechte v (v_1) poollijn is van l. In § 3 hebben we gezien dat deze O^2 een net vormen. De kernkromme van dit net is ontaard in de rechten l, v_1 en de vier rechten der vlakken δ, die transversalen zijn van l en v_1.

De vlakkenparen, waarvan de dubbelrechten een waaier vormen in een der vlakken δ, met als top het snijpunt A van δ met l, vormen een bundel, waarbij een rechte u_A behoort. Het poolvlak π van l ten opzichte van het vlakkenpaar, waarvan de dubbelrechte door A gaat en v_1 snijdt, gaat door deze dubbelrechte en door u_A, dus door v_1, m.a.w. ten opzichte van dit vlakkenpaar zijn l en v_1 toegevoegde poollijnen.

Een bundel uit het net, waarvoor l en v_1 toegevoegde poollijnen zijn, bevat vier kegels, waarvan twee hun top op l en twee hun top op v_1 hebben, zoodat de netten, ten opzichte waarvan de rechte l en een rechte v wederkeerige poollijnen zijn, in R_5 voorgesteld worden door platte vlakken (ν), die V_2^4 volgens kegelsneden snijden.

Daar een willekeurige bundel vier kegels bevat, worden de kegels, door de punten A, in R_5 afgebeeld op de punten van een vierdimensionale variëteit van de vierde graad (V_4^4).

Een plat vlak ν, dat V_2^4 volgens een kegelsnede k_l^2 snijdt, snijdt V_4^4 verder nog volgens een kegelsnede k_ν^2. Beide kegelsneden hebben vier punten gemeen, die de afbeeldingen zijn van de vier vlakkenparen, waarvan de dubbelrechten in de vlakken δ liggen en die transversalen zijn van l en de bij ν behoorende rechte v.

Het platte vlak ν_l, waarvan de punten de O^2 voorstellen, die l tot beschrijvende hebben, snijdt V_2^4 volgens een kegelsnede (ν_l^2), die tevens, dubbelgeteld, de doorsnijding is van ν_l met

V_4^4, omdat een bundel, met l als beschrijvende, vier kegels bevat, die twee aan twee samenvallen.

Twee platte vlakken ν_1 en ν_2 kunnen geen punt gemeen hebben, daar in dit geval ten opzichte van de door het snijpunt voorgestelde O^2, de punten van l geconjugeerd moesten zijn met de punten van twee kruisende rechten v_1 en v_2, dus met R_3. Er is echter geen vlakkenpaar met l als dubbelrechte.

Indien p een rechte is, die l in T snijdt, raken alle exemplaren van de bundel, waarvoor l en p toegevoegde poollijnen zijn, in T aan het platte vlak V door l en p. Van de vier kegels zijn twee, met top T, samengevallen ($K_{1,\,2}$). Twee kegels K_3 en K_4 raken respectievelijk volgens l en p aan V. (De kegel $K_{1,\,2}$ snijdt V volgens twee rechten t_1 en t_2, die harmonisch liggen met l en p). K_3 behoort dus tot ν_l^2. De bundel wordt in R_4 voorgesteld door een bisecant van V_2^4, die een punt van ν_l^2 bevat.

Omgekeerd stelt een rechte, die een punt van ν_l^2 met een punt van V_2^4, buiten ν_l^2, verbindt, een bundel voor, waarvoor l en een rechte p, die l snijdt, toegevoegde poollijnen zijn. De rechte p is de snijlijn van de bij de beide kegels behoorende platte vlakken π.

Indien een rechte p aan Ω raakt, zijn de twee raakvlakken, die men door een rechte aan Ω kan aanbrengen, samengevallen. Van de vier kegels, die in de bij de lijnelementen van p behoorende bundel voorkomen, zijn er twee samengevallen in een kegel, waarvan de top op l ligt. Omgekeerd stelt een raaklijn aan V_2^4 een bundel voor, die twee samengevallen kegels van V_2^4 bevat, zoodat door de bij deze bundel behoorende rechte p slechts één plat vlak π gaat. De rechte p is dan raaklijn aan Ω.

De ∞^3 verzamelingen van ∞^1 lijnelementen, die op de raaklijnen aan Ω liggen, worden in R_5 afgebeeld op de punten van de raaklijnen van V_2^4.
De tangentenvariëteit van V_2^4 is van de vierde graad, want een willekeurige rechte b in R_5 heeft vier snijpunten met die variëteit. Immers de lijnelementen, waarvan de punten van b de afbeelding zijn, liggen op de beschrijvenden van een kwadratische regelschaar, die vier rechten met het kwadratisch complex, gevormd door de tangenten van Ω, gemeen heeft.

Is de rechte p een raaklijn aan Ω, die l snijdt, dan is het vlak door p en l het eenige vlak π door p, zoodat de bijbehoorende bundel in R_5 voorgesteld wordt door een rechte, die V_2^4 in een punt van v_l^2 raakt.

Opmerking: Door elk punt van R_5 buiten V_2^4 en niet in een plat vlak v gelegen, gaat één bisecant van V_2^4.

§ 7. *Krommen op Ω en V_2^4.*

In een punt van Ω kan men één raakvlak π aan Ω trekken. Dit vlak π is poolvlak van l ten opzichte van één kegel, waarvan de top op l ligt, zoodat met ieder punt van Ω één punt van V_2^4 correspondeert. Het omgekeerde is ook waar. Er is dus een (1,1) correspondentie tusschen de punten van Ω en die van V_2^4, waarbij punten van eenzelfde u correspondeeren met punten van eenzelfde ϱ en punten van eenzelfde v met punten van eenzelfde v^2 en omgekeerd.

Onder een kromme (p, q) van V_2^4 verstaan we een kromme, die elk der beschrijvende rechten ϱ in p en elk der beschrijvende kegelsneden v^2 in q punten snijdt. Een kromme (p, q) op Ω is een kromme die elke beschrijvende u in p en elke beschrijvende v in q punten snijdt.

Uit het voorgaande volgt, dat bij een kromme (p, q) op Ω een kromme (p, q) op V_2^4 behoort en omgekeerd.

Een legioen van O^2 heeft met elke bundel kegels ϱ één exemplaar gemeen, terwijl ten opzichte van een bundel uit het legioen, waarvan twee kegels hun top op l hebben, l en een gegeven rechte v wederkeerige poollijnen zijn.

De raakpunten van de vlakken π behoorende bij de kegels uit het legioen, die hun top op l hebben, vormen dus op Ω een kromme (1, 2).

Het legioen wordt in R_5 afgebeeld op een vlakke vierdimensionale ruimte (R_4), die V_2^4 volgens een kromme (1, 2) snijdt. Omgekeerd is een kromme (1, 2) (τ) van V_2^4 de doorsnede van een R_4 met V_2^4. Neem 5 punten op de kromme. De R_4 bepaald door deze 5 punten snijdt V_2^4 volgens een kromme (1, 2) (τ'). Nu correspondeeren τ en τ' met twee krommen (1, 2) op Ω, die 5 punten gemeen hebben en dus samenvallen, omdat een kromme van de derde graad op een kwadratisch oppervlak, bepaald is door vijf punten. Dus τ en τ' vallen ook samen.

We kunnen nu nog vragen naar de graad van een kromme (p, q) op V_2^4, d.w.z. naar het aantal snijpunten, dat een R_4, dus een kromme (1, 2), met de kromme (p, q) heeft, of ook naar het aantal snijpunten van de krommen (1, 2) en (p, q) op Ω. Dit aantal is gelijk aan $2p+q$ dus:

Een kromme (p, q) op V_2^4 is van de graad $2p+q$.

§ 8. *De lijnelementen waarvan P in een gegeven punt ligt.*

We zullen nu onderzoeken de afbeelding van de lijnelementen (P, p), waarvan P samenvalt met een gegeven punt A. De verzameling van deze ∞^2 lijnelementen wordt voorgesteld door het symbool $(A)_2$. Indien ten opzichte van een O^2, A geconjugeerd is met α, behoort het met O^2 correspondeerende lijnelement tot $(A)_2$ en omgekeerd. De verzameling $(A)_2$ beeldt zich dus af op een net O^2 : $\nu(A)_2$.

De zes verbindingsrechten van A met de punten B in α, vormen met het punt A evenzooveel lijnelementen, die afgebeeld worden op kegels uit de netten ν (B) (§ 2).

In R_5 is het net ν $(A)_2$ een plat vlak, dat met elk der platte vlakken $\nu(B)$ een punt gemeen heeft.

Omgekeerd is elk plat vlak V, dat met elk der platte vlakken $\nu(B)$ een punt gemeen heeft, de afbeelding van een verzameling lijnelementen $(A)_2$. We noemen het snijpunt van V met $\nu(B_{i,j})$ $K_{i,j}$. De punten $B_{1,2}$, $B_{2,3}$ en $B_{1,3}$ liggen op de rechte b_4. De poolvlakken van b_4 ten opzichte van $K_{1,2}$, $K_{2,3}$ en $K_{1,3}$ snijden elkaar in een punt A. Ten opzichte van deze kegels is dus A geconjugeerd met de rechte b_4, dus ook ten opzichte van $K_{1,4}$, $K_{2,4}$ en $K_{3,4}$ omdat $K_{1,2}$, $K_{2,3}$ en $K_{1,3}$ (zoo ze niet tot een bundel behooren) het net bepalen. Dan is echter ten opzichte van $K_{1,4}$, $K_{2,4}$ en $K_{3,4}$ het punt A geconjugeerd met α, dus ten opzichte van alle exemplaren van V.

Een plat vlak V, dat met elk der platte vlakken $\nu(B)$ een punt gemeen heeft, is dus in het algemeen de afbeelding van een verzameling lijnelementen $(A)_2$.

De verzameling lijnelementen $(A_i)_2$ beeldt zich af op een net O^2, dat bestaat uit de ∞^2 kegels met A_i als top. De verzameling lijnelementen $(B_{i,\,j})_2$ wordt afgebeeld op het net $\nu(B_{i,\,j})$.

De verzameling lijnelementen (P, p), waarvan het punt P samenvalt met een bepaald punt H, wordt afgebeeld op de O^2 van een kluwen, want ten opzichte van alle O^2, door de punten A, is het punt H geconjugeerd met een punt B van α. De O^2 ten opzichte waarvan het punt H geconjugeerd is met twee willekeurige punten van α, dus met alle punten van α, vormen een kluwen.

In § 5 hebben we gezien dat de kernkromme van het net O^2, ten opzichte waarvan een punt A geconjugeerd is met α, ontaard is in drie rechten, de stralen van de drie bilineaire congruenties, die door A gaan en een kromme van de derde graad in α, zoodat van de ∞^1 kegels uit het net, er drie zijn, waarvan de top op l ligt. De platte vlakken $\nu(A)_2$ snijden V_2^4 in drie punten.

Indien het punt A in α ligt, kunnen we als volgt tot eenzelfde resultaat komen. Ieder punt P van α is top van twee kegels, die volgens rechten door P aan α raken. Immers van de bij P behoorende λ kegel liggen twee beschrijvenden in α. Verder is er één kegel, die volgens een gegeven rechte aan α raakt. De rechten in α vormen met de daarbij behoorende kegeltoppen een nulstelsel S_2 (2, 1) van ∞^2 lijnelementen. De lijnelementen, waarvan de rechten p door het punt A gaan, vormen een nulstelsel S_2' (1, 0) van ∞^2 lijnelementen, want een willekeurig punt van α is nulpunt van één lijnelement uit het nulstelsel, terwijl een willekeurige rechte van α geen lijnelement uit het stelsel draagt. Het gemeenschappelijke van beide nulstelsels is een stelsel S_1 (1, 3) van ∞^1 lijnelementen, d.w.z. de rechten, volgens welke de kegels uit het net $\nu(A)_2$ aan α raken, vormen de waaier (A, α), terwijl de toppen der bijbehoorende kegels een kromme van de derde graad vormen.

Opmerking: Het nulstelsel S_2 (2, 1) heeft $2^2+2+1 = 7$ singuliere rechten. Dit zijn de 7 dubbelrechten in α die behooren bij zeven vlakkenparen. Ieder punt van zoo'n rechte is kegeltop.

Om in R_5 onderscheid te maken tusschen de netten $\nu(A)_2$, waarbij A al of niet in α gelegen is, vragen we naar de graad van de kromme van V_2^4, die voorstelt de kegels, die volgens rechten aan α raken.

De lijnelementen, waarvan het punt P op l ligt, vormen een nulstelsel S_2'' (0, 1). Dit heeft met S_2 (2, 1) een stelsel S (3, 2) van ∞^1 lijnelementen gemeen. Het karakteristieke getal 2 duidt hier op de dubbelgetelde rechte l als puntkromme. Nu vormen de dubbelrechten, die een willekeurig legioen van O^2 in α bepalen, de tangenten van een kegelsnede. De lijnelementen van deze tangenten vormen een nulstelsel S_2''' (2, 0). Dit nulstelsel heeft met het systeem S zes elementen gemeen, zoodat we kunnen zeggen, dat de kegels van V_2^4, die dubbelrechten in α bepalen, in R_5 worden voorgesteld door een kromme van de zesde graad (τ^6).

De netten $\nu(A)_2$, waarvoor A in α ligt, worden in R_5 voorgesteld door platte vlakken, die τ^6 in drie punten snijden.

§ 9. *De lijnelementen waarvan p door een gegeven punt gaat.*

De ∞^3 lijnelementen (P, p), waarvan p door een gegeven punt A gaat, de verzameling $(A)_3$, beelden zich af op de $\infty^3 O^2$ van een kluwen $\nu(A)_3$, waarvoor A geconjugeerd is met de punten van l. Dit wordt in R_5 voorgesteld door een vlakke drie-dimensionale ruimte.

De verzameling $\nu(A)_3$ bevat ∞^1 punten van V_2^4. Elke beschrijvende rechte ϱ van V_2^4 bevat een punt van $\nu(A)_3$, immers in R_3 wentelt het poolvlak van l ten opzichte van de exemplaren van de bundel kegels met eenzelfde top op l, om een rechte u en één dezer poolvlakken gaat door A.

Een willekeurig plat vlak V van $\nu(A)_3$ bevat drie punten van V_2^4, want in R_3 is voor alle exemplaren van het net V, P geconjugeerd met de punten van l. Het bijbehoorende net kegelsneden in α heeft ontaardingen, waarvan de dubbelpunten een derdegraadskromme vormen. Deze snijdt l in drie punten T_1, T_2 en T_3. Indien we aannemen dat A buiten α ligt, zijn de O^2, die behooren bij de ontaarde kegelsneden met dubbelpunt op l, kegels uit het net V, daar ten opzichte van elk dezer O^2 het bijbehoorende punt T geconjugeerd is met α en met A. In R_5 snijdt $\nu(A)_3$ V_2^4 volgens een ruimtekromme van de derde graad (ϱ^3).

Als omgekeerd een vlakke driedimensionale ruimte Σ_3 in R_5, V_2^4 volgens een ϱ^3 snijdt, is Σ_3 een $\nu(A)_3$. Neem een willekeurig plat vlak V in Σ_3. Dit snijdt ϱ^3 volgens de punten K_1, K_2 en K_3, die niet op één rechte liggen. In R_3 snijden de poolvlakken van l ten opzichte van de kegels, behoorende bij de punten K, elkaar in een punt A. Dus voor alle exemplaren van het net V, is A geconjugeerd met de punten van l. Neem nu een willekeurig punt B aan in Σ_3. Hierdoor is één bisecant t van ϱ^3 te trekken. Deze snijdt V in een punt C. In R_3 gaat de poollijn p_1 van l ten opzichte van het oppervlak C door A, dus ook die van B, omdat de exemplaren van de bundel t de afbeelding zijn van lijnelementen met eenzelfde rechte p_1. M.a.w. voor het oppervlak B, dus ook voor de oppervlakken van Σ_3, is het punt A geconjugeerd met de punten van l.

Resumeerende: De ∞^3 verzamelingen $(A)_3$ worden afgebeeld op de ∞^3 driedimensionale ruimten, die V_2^4 volgens een kromme van de derde graad snijden.

We kunnen ook gebruik maken van wat in § 7 gevonden is. De kegels, die in de Σ_3, waarvoor een punt A geconjugeerd is met l, voorkomen, bepalen vlakken π, waarvan de raakpunten op Ω een kromme (1, 1) vormen. Deze correspondeert met een kromme (1, 1) op V_2^4, die dus van de derde graad is.

Omgekeerd is er bij elke kromme (1, 1) op V_2^4 een Σ_3 aan te wijzen, die V_2^4 volgens die kromme snijdt, want deze kromme correspondeert met een (1, 1) kromme, d.i. een kegelsnede op Ω. De vlakken π, die volgens de punten van deze kromme aan Ω raken, gaan alle door één punt A, nl. de pool van het vlak der kegelsnede ten opzichte van Ω. De kegels, die bij deze vlakken π behooren, liggen alle in het kluwen, ten opzichte waarvan A geconjugeerd is met de punten van l.

Indien het punt A op Ω ligt, zijn de raakvlakken uit A aan Ω de vlakkenbundels, gedragen door de rechten u en v door P, zoodat de Σ_3, die in R_5 het kluwen ten opzichte waarvan A geconjugeerd is met l, afbeeldt, V_2^4 snijdt volgens een kromme (1, 1), die bestaat uit een beschrijvende rechte ϱ en een beschrijvende kegelsnede ν^2.

Aan elk punt A van R_3 is een kromme (1, 1) van V_2^4 toe te voegen. Op V_2^4 liggen ∞^3 krommen (1, 1).

Daar een vlak π ∞^2 punten bevat, zullen door een punt K van V_2^4 ook ∞^2 krommen (1, 1) gaan, waarvan er ∞^1 ontaard zijn in de rechte ϱ door K en een der kegelsneden ν^2 of de kegelsnede ν^2 door K en een der rechten ϱ.

Omdat twee vlakken π_1 en π_2 ∞^1 gemeenschappelijke punten bevatten, zullen door twee punten K_1 en K_2 van V_2^4 ook ∞^1 krommen (1,1) gaan, waarvan er twee ontaard zijn.

Door drie punten van V_2^4 gaat één kromme (1, 1).

Daar door twee punten in het algemeen twee vlakken π gaan, zullen twee krommen (1, 1) op V_2^4 in het algemeen ook twee snijpunten hebben.

De rechten p der singuliere lijnelementen uit $\nu(A)_3$ vormen een kegel van de derde graad (τ^3) met top A. De meetkundige plaats van de poollijnen van l ten opzichte van een bundel O^2 uit $\nu(A)_3$ is een kwadratische kegel met top A, die zes rechten met τ^3 gemeen heeft. Het oppervlak, waarvan de punten O^2 voorstellen, die behooren bij de singuliere lijnelementen uit $(A)_3$, is dus van de zesde graad.

We kunnen tot hetzelfde resultaat komen met hetgeen in § 5 gevonden is: „de singuliere lijnelementen worden afgebeeld op trisecanten van V_3^6, die secanten van V_2^4 zijn". Indien $\nu(A)_3$ een O_1^2 bevat, die de afbeelding is van een singulier lijnelement, bevat $\nu(A)_3$ de bundel O^2, die behoort bij het singuliere lijnelement, want de poollijn van l ten opzichte van O_1^2, is een rechte λ door A, waarvan de lijnelementen dus tot $(A)_3$ behooren. We kunnen dus zeggen, dat het oppervlak U, gevormd door de punten van $\nu(A)_3$, die de afbeelding zijn van singuliere lijnelementen, bestaat uit de trisecanten van V_3^6, die bisecanten van V_2^4 zijn en in $\nu(A)_3$ liggen.

Nu vormen de toppen van kegels in een kluwen een oppervlak van de vierde graad, dat α volgens een kromme van de vierde graad snijdt. Deze is, voor het kluwen $\nu(A)_3$, ontaard in een kromme van de derde graad en de rechte l. De kegels, die hun top op deze kromme hebben, worden in R_5 afgebeeld op punten van het platte vlak $\nu(A)_2$ in $\nu(A)_3$. Deze punten vormen een kromme van de derde graad (τ^3), want een willekeurige rechte van $\nu(A)_2$ heeft er drie punten mee gemeen. De rechte is nl. de afbeelding van een bundel O^2, waarvoor A en α respectievelijk hoekpunten en zijvlak van het gemeenschappelijk poolviervlak der exemplaren van de bundel zijn. In α liggen dus drie van de vier kegeltoppen. De kegels, die hun toppen op l hebben, vormen in $\nu(A)_3$ een ruimtekromme van de derde graad (ϱ^3).

De kromme τ^3 bevat de drie punten volgens welke ϱ^3 het vlak $\nu(A)_2$ snijdt, want $\nu(A)_2$ bevat buiten de punten van τ^3 geen punten meer, die kegels voorstellen, waarvan de toppen in α liggen.

We vragen nu naar het aantal snijpunten, dat een rechte q van $\nu(A)_3$ heeft met het oppervlak U, m.a.w. naar het aantal koorden van ϱ^3 dat τ^3 en q snijdt. De koorden van ϱ^3 vormen een congruentie (1, 3) en de transversalen van q en τ^3 een congruentie (3, 3). Het aantal gemeenschappelijke stralen is gelijk aan $1 \times 3 + 3 \times 3 = 12$. De zes koorden van ϱ^3, die q snijden en door de drie snijpunten van τ^3 en ϱ^3 gaan, zijn echter geen trisecanten van V_3^6, zoodat het oppervlak U van de zesde graad is, hetgeen overeenstemt met wat in § 5 gevonden is.

Opmerking: Indien het punt A in α ligt, is τ^3 ontaard in een rechte en een kegelsnede.

§ 10. *Verzamelingen van lijnelementen in* $(A)_2$.

De afbeelding van de verzameling van de ∞^1 lijnelementen (A, β), waarvan P samenvalt met een gegeven punt A en p in een gegeven plat vlak β door A gelegen is, ligt in het platte vlak $\nu(A)_2$.

We willen onderzoeken, hoeveel snijpunten de afbeelding van (A, β) heeft met een willekeurige rechte uit $\nu(A)_2$, m.a.w. hoe vaak de poollijn van l ten opzichte van een O^2 uit een bundel O^2, waarvoor A geconjugeerd is met α, in β ligt.

De meetkundige plaats van de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van genoemde bundel is een kwadratische kegel met top A. Van deze kegel liggen twee beschrijvende rechten in β. Dus de verzameling van lijnelementen (A, β) wordt afgebeeld op een kegelsnede van het platte vlak $\nu(A)_2$.

Ieder der kegels K_1, K_2 en K_3, in R_5 voorgesteld door de snijpunten van $\nu(A)_2$ met V_2^4, correspondeert met ∞^2 lijnelementen (§ 2). Deze verzamelingen hebben met $(A)_2$ respectievelijk de verzamelingen (A, π_1), (A, π_2) en (A, π_3) gemeen. Dit zijn de lijnelementen (P, p), waarvan P samenvalt met A en de rechte p de waaiers (A, π_1), (A, π_2) en (A, π_3) doorloopt. Ze bevatten respectievelijk de singuliere lijnelementen (A, p_2), (A, p_3); (A, p_1), $A, p_3)$ en (A, p_1), (A, p_2), zoodat ze zich in $\nu(A)_2$ afbeelden op de ontaarde kegelsneden met dubbelpunten respectievelijk K_1, K_2 en K_3 uit het net met basispunten K_1, K_2 en K_3.

Een willekeurige verzameling (A, β) bevat een lijnelement uit elk der verzamelingen (A, π), zoodat ze afgebeeld wordt op een kegelsnede door de punten K.

Omgekeerd is een kegelsnede door de punten K de afbeelding van een verzameling lijnelementen (A, β), die bepaald wordt door twee lijnelementen uit $(A)_2$, die correspondeeren met twee punten van de kegelsnede buiten de punten K.

De ∞^2 verzamelingen (A, β) in $(A)_2$ beelden zich dus af op de ∞^2 kegelsneden van het net K in $\nu(A)_2$, dat de punten K tot basispunten heeft.

De ∞^2 verzamelingen van lijnelementen (A, β), waarvan de vlakken β een vlakkenbundel vormen, worden afgebeeld op de ∞^2 bundels uit het net K. Hiervan correspondeeren de verzamelingen lijnelementen door (A, p_i) met de ontaarde bundel uit het net K, waarvan het punt K_i en de rechte K_jK_k de basis vormen.

De verzameling kegelsneden, die men krijgt, door de meetkundige plaats van de polen van l ten opzichte van de exemplaren van elke bundel uit het net $\nu(A)_2$ te bepalen, is een net, met als basispunten de kritieke punten van het net behoorende bij l, zoodat de ∞^2 verzamelingen lijnelementen uit $(A)_2$, die de kegels van het net, met als basis de drie rechten, die de singuliere lijnelementen uit $(A)_2$ dragen, afgebeeld worden op de rechten van $\nu(A)_2$, ieder gecombineerd met de drie verbindingsrechten der punten K, want ook omgekeerd snijdt een rechte b van $\nu(A)_2$ elk der rechten K_iK_j in één punt, d.w.z. b is de afbeelding van lijnelementen uit $(A)_2$, waarvan de rechten een kegel vormen, die door de rechten der singuliere lijnelementen gaat.

We willen verder de afbeelding onderzoeken van de lijnelementen uit de verzameling $(A)_2$, waarvan de rechten p een gegeven kwadratische kegel τ^2 vormen.

Daar de meetkundige plaats van de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een bundel uit het net $\nu(A)_2$ vier rechten gemeen heeft met de gegeven kwadratische kegel, wordt de verzameling lijnelementen voorgesteld door een kromme van de vierde graad (ϱ^4) in $\nu(A)_2$. De kegel τ^2 heeft met elk der waaiers (A, π) twee rechten gemeen, dus ϱ^4 heeft in de punten K_1, K_2 en K_3 dubbelpunten.

Omgekeerd is een kromme van de vierde graad in $\nu(A)_2$, die in de punten K dubbelpunten heeft, de afbeelding van een verzameling lijnelementen uit $(A)_2$, waarvan de rechten p een kwadratische kegel vormen. Immers een kromme van de vierde graad is bepaald door 14 punten. Dat de kromme in de punten K dubbelpunten heeft is gelijkwaardig met het geven van 9 punten, zoodat elk vijftal punten, buiten de punten K, een kromme van de vierde graad met dubbelpunten in de punten K bepaalt. Nemen we nu 5 punten op een gegeven ϱ^4, dan correspondeeren deze met 5 lijnelementen uit $(A)_2$. Door de 5 bijbehoorende rechten gaat één kwadratische kegel. Nu is de afbeelding van de lijnelementen uit $(A)_2$, gedragen door deze kegel, een ϱ_1^4 in $\nu(A)_2$, die samenvalt met ϱ^4, omdat beide krommen in de punten K dubbelpunten hebben en buiten de punten K nog 5 punten gemeen hebben.

We hebben hierboven reeds gezien dat, indien τ^2 de drie singuliere lijnelementen bevat, de bijbehoorende ϱ^4 ontaard is in vier rechten.

De verzameling lijnelementen uit $\nu(A)_2$, waarvan de rechten p een kegel van de graad n vormen, hebben als afbeelding in R_5 een kromme van de graad $2n$ in het vlak $\nu(A)_2$ gelegen. De kegel bevat n stralen van elke waaier (A, π), dus de kromme heeft in de punten K n-voudige punten.

Dat een kromme van de graad $2n$ (ϱ^{2n}), met n-voudige punten in de punten K, de afbeelding is van de lijnelementen uit $\nu(A)_2$, waarvan de rechten p een kegel van de graad n

(τ^n) vormen, blijkt uit het feit dat de ϱ^{2n} buiten de punten K bepaald is door $\frac{1}{2} \times 2n(2n + 3) - 3 \times \frac{1}{2}n\,(n + 1) = \frac{1}{2}n\,(n+3)$ punten en dat dit aantal gelijk is aan het aantal beschrijvenden dat τ^n bepaald.

Twee kegels τ^m en τ^n hebben mn gemeenschappelijke rechten. De bijbehoorende ϱ^{2m} en ϱ^{2n} hebben ook, buiten de punten K, $4mn - 3mn = mn$ snijpunten.

Nemen we in α twee krommen aan van de graad m en n (ϱ^m en ϱ^n), dan correspondeeren deze in $\nu(A)_2$ met twee krommen, respectievelijk van de graad $2m$ en $2n$ (ϱ^{2m} en ϱ^{2n}) met m en n voudige punten in de punten K. Nu geldt een m-voudig punt voor $\frac{1}{2}m\,(m-1)$ dubbelpunten, zoodat volgens de formule van Plücker de klasse van ϱ^{2m} gelijk is aan $2m\,(2m-1) - 2 \times 3 \times \frac{1}{2}m\,(m-1) = m\,(m + 1)$. De klasse van ϱ^{2n} is gelijk aan $n\,(n + 1)$, zoodat het aantal gemeenschappelijke raaklijnen van beide krommen gelijk is aan $mn\,(m + 1)\,(n + 1)$. Dit geeft in α de volgende stelling:

Er zijn $mn\,(m + 1)\,(n + 1)$ kegelsneden, die door drie gegeven punten gaan en aan twee gegeven krommen van de graad m en n raken.

Verder is duidelijk, dat wanneer ϱ^m een dubbelpunt heeft, ϱ^{2m} ook een dubbelpunt heeft. Het geslacht van ϱ^{2m} is gelijk aan $\frac{1}{2}\,(2m-1)\,(2m-2) - 3 \times \frac{1}{2}m\,(m-1) - d = \frac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2) - d$, als d het aantal dubbelpunten van ϱ^{2m} voorstelt. *De krommen ϱ^{2m} en ϱ^m zijn dus, zooals dit behoort bij een* (1,1) *verwantschap, van hetzelfde geslacht.*

Een kegelsnede van het vlak $\nu(A)_2$ snijdt elk der verbindingsrechten der punten K in twee punten zoodat ze de afbeelding is van lijnelementen uit de verzameling $(A)_2$, waarvan de rechten een kegel van de vierde graad beschrijven, die de rechten der singuliere lijnelementen tot dubbelrechten heeft.

Als we aannemen, dat het punt A buiten α ligt, bepalen de lijnelementen uit $(A)_2$, die liggen in het vlak door A en een rechte $\varkappa$ in α, in $\nu(A)_2$ een kegelsnede k^2 uit het net met basispunten K_1, K_2 en K_3 en omgekeerd.

Evenzoo kunnen we aan een rechte t van $\nu(A)_2$ een kegelsnede τ van α toevoegen, die behoort tot het net met basispunten S_1, S_2 en S_3, die de snijpunten zijn van de rechten der singuliere lijnelementen met α, en omgekeerd.

De snijpunten van kegelsnede en rechte in het eene vlak correspondeeren met de snijpunten van rechte en kegelsnede in het andere vlak.

Een rechte rakend aan een kegelsnede in het eene vlak correspondeert met een kegelsnede, rakend aan een rechte, in het andere vlak.

Dat door een punt van het eene vlak twee raaklijnen gaan aan een gegeven kegelsnede, komt in het andere vlak overeen met het raken van twee kegelsneden uit een bundel aan een rechte.

Het feit dat twee kegelsneden in het eene vlak vier gemeenschappelijke raaklijnen hebben, geeft in het andere vlak de stelling:

Er zijn vier kegelsneden, die door drie gegeven punten gaan en aan twee gegeven rechten raken.

Nemen we in α een punt P aan en een kegelsnede τ^2, dan krijgen we als analogon in $\nu(A)_2$, een punt Q en een rechte t. De raaklijnen $\varkappa_1$ en $\varkappa_2$ door P aan τ^2, geven in $\nu(A)_2$ de kegelsneden $k_1{}^2$ en $k_2{}^2$ door Q, die aan t raken en de verbindingsrechte $\varkappa$ der raakpunten P_1 en P_2 de kegelsnede k^2 door de raakpunten der rechte t aan $k_1{}^2$ en $k_2{}^2$.

Nu geldt in α de volgende stelling: Ligt een punt P' op de poollijn $\varkappa$ van punt P ten opzichte van τ^2, dan ligt P op de poollijn $\varkappa'$ van P' ten opzichte van τ^2. Dit geeft in $\nu(A)_2$ de volgende stelling:

Indien een punt Q' ligt op de kegelsnede k^2 uit het net met basispunten K_1, K_2 en K_3, die gaat door de punten volgens welke de kegelsneden uit de bundel met basispunten K_1, K_2, K_3 en Q aan een rechte t raken, dan liggen de punten K_1, K_2, K_3 en Q met de punten, volgens welke de kegelsneden uit de bundel met K_1, K_2, K_3 en Q als basispunten aan t raken op één kegelsnede.

De stelling van Pascal in het eene vlak: De drie snijpunten der drie paren overstaande zijden van een enkelvoudige zeshoek, beschreven in een kromme van de tweede graad, liggen op een rechte, geeft in het andere vlak de stelling:

Indien men op een rechte zes punten A aanneemt en door drie punten B zes kegelsneden K legt, telkens door twee punten A, zoodanig dat elk punt A op twee kegelsneden ligt, dan liggen de drie *snijpunten, buiten de punten A en B, der drie paren kegelsneden K, waarvan elk paar zoo gekozen is, dat de snijpunten A van de vier overblijvende kegelsneden niet op eenzelfde kegelsnede K liggen, met de punten B op één kegelsnede.*

Opmerking: Daar de kegelsneden van een net in een vlak β, bepaald zijn door drie homogene coördinaten, kunnen ze afgebeeld worden op de punten van een vlak ε, waarbij de kegelsneden, die aan een gegeven rechte raken, correspondeeren met de punten van een kegelsnede in ε. Een punt A in β bepaalt, als basispunt, een bundel kegelsneden in β, dus een rechte in ε, terwijl het incident zijn van punt en rechte in β, is ε beteekent dat rechte en kegelsnede elkaar raken.

De zoo juist genoemde stelling wordt in ε als volgt gelezen: Indien men zes rechten a aanneemt, die aan een kegelsnede raken en op deze rechten zes punten K, zoodanig dat elk punt op twee rechten ligt, dan gaan de drie verbindingsrechten van de drie punten K, waarvan elk paar zoo gekozen is, dat de verbindingsrechten van de vier overblijvende punten, die rechten a zijn, elkaar niet in een der punten K snijden, door één punt. Dit is de stelling van Brianchon.

De stelling van Brianchon in het eene vlak: De drie verbindingslijnen der drie paren overstaande hoekpunten van een enkelvoudige zeszijde, beschreven om een kromme van de tweede klasse, gaan door een punt, geeft in het andere vlak de stelling:

Indien men zes punten A kiest, zoodanig dat 12 kegelsneden (k^2) door drie punten B en een punt A, die aan een gegeven rechte raken, twee aan twee samenvallen, dan snijden de drie kegelsneden, door de punten B en drie puntenparen A, waarvan elk paar zoo gekozen is, dat de kegelsneden k^2, die twee van de vier overblijvende punten A bevatten elkaar niet in een punt A snijden, elkaar in één punt.

In het vlak ε lezen we deze stelling als volgt: Indien men zes rechten a kiest, zoodanig dat de 12 punten K van deze rechten, welke op een gegeven kegelsnede liggen, twee aan twee samenvallen, dan liggen de drie snijpunten van de drie paren rechten α, waarvan elk paar zoo gekozen is, dat de snijpunten van de vier overblijvende rechten, die punten K zijn, niet op eenzelfde rechte a liggen, op één rechte. Dit is de stelling van Pascal.

Opmerking: Een punt van α correspondeert met een punt van $\nu(A)_2$ en dit weer met een rechte van ε en verder een rechte van α met een kegelsnede van $\nu(A)_2$ en deze weer met een punt van ε, zoodat het zonder meer duidelijk is, dat de stelling van Pascal overgaat is de stelling van Brianchon en omgekeerd.

§ 11. *Verzamelingen van lijnelementen in* $(A)_3$.

We willen nu onderzoeken de afbeelding van de ∞^2 lijnelementen (P, p), waarvan de rechten een waaier (A, β) vormen. A is de top en β het vlak van de waaier. De verzameling dezer lijnelementen zullen we aanduiden met $(A, \beta)_2$. De afbeelding moet in $\nu(A)_3$ liggen en is een oppervlak van de tweede graad $O(A, \beta)$, daar een willekeurige rechte uit $\nu()A_3$ twee punten met de verzameling gemeen heeft. Immers, de meetkundige plaats der poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een bundel uit het kluwen $\nu(A)_3$ is een kwadratische kegel met top A, waarvan twee beschrijvenden in β liggen.

De ∞^1 lijnelementen van een rechte van de waaier (A, β) worden afgebeeld op de punten van een rechte b van het eene stelsel beschrijvenden van O (A, β), terwijl de ∞^1 lijnelementen van $(A, \beta)_2$, die correspondeeren met de O^2 van een bundel b' uit $\nu(A)_3$, waarvoor het vlak β geconjugeerd is met een gegeven punt B van l, zich afbeelden op een rechte van het andere stelsel beschrijvende lijnen van $O(A, \beta)$.

$(A, \beta)_2$ bevat drie singuliere lijnelementen (S_1, s_1), (S_2, s_2) en (S_3, s_3), want de complexkegel der rechten λ van A, heeft drie rechten met de waaier (A, β) gemeen.

Indien voor een niet ontaarde O^2, s_1 en l toegevoegde poollijnen zijn, valt de pool van α ten opzichte van genoemde O^2 in S_1.

De meetkundige plaats van de polen van α ten opzichte van de exemplaren van een bundel b', is een kromme van de derde graad, ontaard in een rechte door B, nl. de poollijn van α ten opzichte van de kegel uit de bundel b', waarvan de top in B ligt, en een kegelsnede door de punten A, S_1, S_2 en S_3. De kegelsnede gaat door A, omdat voor één O^2 uit de bundel b', A de pool is van α.

De drie rechten s in β zijn poollijnen van α ten opzichte van drie kegels. De poollijnen van β ten opzichte van deze kegels liggen dus in α en snijden de rechte l in drie punten C_1, C_2 en C_3. Ten opzichte van de exemplaren van elk der bundels, waarvoor β geconjugeerd is met een punt C, is de meetkundige plaats der polen van α ontaard in drie rechten, zoodat deze drie bundels, rechten van het stelsel b' van $O\ (A, \beta)$, de afbeelding vormen van de lijnelementen uit de verzameling $(A, \beta)_2$, waarbij P een ontaarde kegelsnede uit de bundel met basispunten A, S_1, S_2 en S_3 doorloopt.

Resumeerende krijgen we dus: *De ∞^1 verzamelingen van de ∞^1 lijnelementen, die op een rechte uit een waaier (A, β) liggen, worden afgebeeld op de rechten van het eene stelsel beschrijvende (b) van $O\ (A, \beta)$ en de ∞^1 verzamelingen, ieder bestaande uit ∞^1 lijnelementen (P, p), waarbij p de waaier (A, β) en P een kegelsnede in β uit de bundel met basispunten A, S_1, S_2 en S_3 doorloopt, op de rechten van het andere stelsel beschrijvenden (b').*

Dat twee rechten van hetzelfde stelsel b' geen punt gemeen hebben volgt uit het feit, dat de punten P van de bij deze rechten behoorende lijnelementen twee kegelsneden beschrijven, die buiten de punten A, S_1, S_2 en S_3 geen punt gemeen hebben. Twee rechten van verschillend stelsel hebben een punt gemeen, omdat de punten P van de bijbehoorende verzameling lijnelementen, een rechte door A en een kegelsnede door A beschrijven, die buiten A één punt gemeen hebben.

De bisecanten t van ϱ^3 in $\nu(A)_3$, zijn de afbeeldingen van de ∞^2 verzamelingen lijnelementen, gedragen door een rechte van de schoof A. De kromme ϱ^3 ligt op $O\ (A, \beta)$, omdat er van de ∞^2 lijnelementen, die bij iedere kegel van ϱ^3 behooren, steeds één tot de verzameling $(A, \beta)_2$ behoort.

We hebben gezien, dat $O\ (A, \beta)$ opgebouwd is uit rechten t (het stelsel b). Een willekeurige $O\ (A, \beta)$, uit het net kwadratische oppervlakken met ϱ^3 als basisfiguur, is de afbeelding van de verzameling lijnelementen $(A, \beta)_2$, waarvan het vlak β bepaald wordt door twee rechten p_1 en p_2 door A, wier lijnelementen correspondeeren met twee rechten t van $O\ (A,\ \beta)$.

Twee oppervlakken $O\ (A_1,\ \beta_1)$ en $O\ (A_2,\ \beta_2)$ hebben behalve ϱ^3 een rechte t gemeen, die de afbeelding is van de ∞^1 lijnelementen gedragen door de gemeenschappelijke rechte der waaiers $(A_1,\ \beta_1)$ en $(A_2,\ \beta_2)$.

Indien het platte vlak β_r een raakvlak π aan Ω is, dat het poolvlak is van l ten opzichte van een kegel K, zullen de beschrijvenden t van $O\ (A,\ \beta_r)$ allen door het punt K gaan. De ∞^1 verzamelingen lijnelementen $(A,\ \beta_r)_2$ beelden zich af op de ∞^1 kegels, waardoor ϱ^3 uit z'n eigen punten geprojecteerd wordt.

Indien men twee verzamelingen $(A,\ \beta_r)_2$ en $(A,\ \beta_r')_2$ heeft, zullen de lijnelementen van de snijlijn s der vlakken β_r en β_r' zich afbeelden op de verbindingsrechte der punten K en K' van ϱ^3.

Valt het platte vlak β_r' met β_r samen, dan is s een raaklijn r aan Ω geworden en de rechte KK' de raaklijn t in K aan ϱ^3, zoodat de lijnelementen van de raakkegel uit A aan Ω, zich afbeelden op de punten van de raaklijnen aan ϱ^3 (verg. § 6).

Dat de rang van ϱ^3 *vier is, volgt uit het feit dat de meetkundige plaats van toevoegde poollijnen van* l *ten opzichte van een bundel* O^2 *in* $\nu(A)_3$ *(d.i. een kwadratische kegel met top* A*), vier beschrijvenden met de raakkegel gemeen heeft.* De ∞^2 lijnelementen gedragen door de beschrijvende lijnen van de raakkegel worden afgebeeld op de punten van een oppervlak van de vierde graad in $\nu(A)_3$, nl. het oppervlak gevormd door de tangenten van ϱ^3.

Indien het punt A op Ω ligt, is ϱ^3 ontaard in een rechte ϱ en een kegelsnede ν^2, die een punt K gemeen hebben. Het punt K correspondeert in R_3 met de kegel K^2, die behoort bij het raakvlak π_A in het punt A aan Ω. De ∞^2 lijnelementen, gedragen door de rechten van een waaier, waarvan de top in A ligt, correspondeeren met de punten van een kwadratisch oppervlak (O^2) uit het net O^2 in $\nu(A)_3$, waarvan ϱ^3 basisfiguur is. Alle oppervlakken hebben ϱ tot beschrijvende. De raaklijn r in K aan de beschrijvende kegelsnede ν^2 van V_2^4, is raaklijn aan alle O^2. Alle O^2 in het net raken in het punt K aan het vlak V door ϱ en r. Daar ook ten opzichte van V_2^4, K geconjugeerd is met de punten van ϱ en r, is V ook raakvlak in K aan V_2^4, zoodat de lijnelementen van de ∞^4 waaiers, wier toppen op Ω liggen, correspondeeren met de punten van O^2, die aan V_2^4 raken.

De vlakken π, die behooren bij de kegels, die voorgesteld worden door de punten van ϱ^3, zijn in het algemeene geval (A niet op Ω) raakvlakken aan een kegel. Ieder raakvlak bevat een raaklijn uit A aan Ω.

In het bijzondere geval, dat A op Ω ligt, bestaat de verzameling der raakvlakken uit de beide vlakkenbundels, gedragen door de rechten u en v door A. Beide vlakkenbundels hebben het vlak π_A gemeen. Alle raaklijnen uit A aan Ω, liggen in π_A. Elk ander raakvlak bevat de raaklijn u of v.

De lijnelementen uit $(A)_3$, in een raakvlak π_u door u gelegen, worden afgebeeld op de punten van een kegel uit het net O^2, met top K_ϱ op ϱ, immers ten opzichte van één kegel K_ϱ uit de bundel ϱ zijn de rechten van de waaier (A, π_A) en l toegevoegde poollijnen.

De lijnelementen uit $(A)_3$, in een raakvlak π_v door v gelegen, worden afgebeeld op de punten van de ∞^1 rechten, waardoor ϱ^3 uit een punt K_ν van ν^2 wordt geprojecteerd, want ten opzichte van een kegel K_ν uit de verzameling ν^2, zijn de rechten van de waaier en l toegevoegde poollijnen.

De lijnelementen uit $(A)_3$ in π_A gelegen, worden afgebeeld op de punten van de O^2, ontaard in het raakvlak V in A aan V_2^4 en het platte vlak ν, dat de kegelsnede ν^2 van V_2^4, door A, bevat. De ∞^1 verzamelingen van ∞^1 lijnelementen van een rechte van de waaier (A, π_A), correspondeeren met de rechten van de waaier (K, V) in R_5, waarbij opgemerkt moet worden, dat de lijnelementen van de rechte v singulier zijn en correspondeeren met de punten van de rechten uit de waaier (A, ν).

De ∞^2 lijnelementen uit $(A)_3$, die liggen op een kwadratische kegel τ^2, worden in R_5 afgebeeld op een oppervlak van de vierde graad (O_2^4) in $\nu(A)_3$, dat ϱ^3 tot dubbelkromme heeft. Immers in R_3 heeft de kegel, beschreven door de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een bundel O^2 in $\nu(A)_3$, vier rechten met τ^2 gemeen. Iedere kegel, die wordt voorgesteld door een punt van ϱ^3, correspondeert met ∞^2 lijnelementen, waarvan de punten P op een rechte λ liggen, die τ^2 in twee punten snijdt, terwijl de rechten p in het vlak π door λ en A liggen. Zoodoende is elk punt van ϱ^3 dubbelpunt van O_2^4.

We kunnen nu vragen naar de lijnelementen van een verzameling $(A, \beta)_2$, waarvan de afbeelding een kegelsnede is, op de bij $(A, \beta)_2$ behoorende $O\,(A, \beta)$ gelegen. Zoo'n kegelsnede $k^2{}_\delta$ is de doorsnijding van $O\,(A, \beta)$ met een plat vlak δ uit $\nu(A)_3$. In R_3 vinden we dus als verzameling lijnelementen behoorende bij de punten van $k^2{}_\delta$, die lijnelementen, welke behooren tot $(A, \beta)_2$ en waarvan de punten P een kromme van de derde graad (τ^3) beschrijven. Deze τ^3 is de doorsnijding van β met een oppervlak van de derde graad (O_2^3), dat de meetkundige plaats is van de polen van α ten opzichte van het net δ.

Het oppervlak O_2^3 is als volgt te bepalen. We nemen in α drie punten B, C en D aan. De punten B en C liggen op l. Verder kiezen we punt A tot oorsprong van een overigens willekeurig assenstelsel. Indien het net voorgesteld wordt door $\lambda O_1 + \mu O_2 + \nu O_3 = 0$, vormen de poolvlakken van B, C en D ten opzichte van de exemplaren van het net respectievelijk de drie vlakkenschoven V, W en U, waarvan de eerste twee gedragen worden door het punt A.

$$\lambda V_1 + \mu V_2 + \nu V_3 = 0$$
$$\lambda W_1 + \mu W_2 + \nu W_3 = 0$$
$$\lambda U_1 + \mu U_2 + \nu U_3 = 0$$

Na eliminatie van λ, μ en ν ontstaat O_2^3 met de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} = 0$$

In V_1, V_2, V_3, W_1, W_2 en W_3 ontbreken de bekende termen, zoodat na ontwikkeling van de determinant, in de vergelijking van O_2^3 geen bekende term voorkomt en ook de termen van de eerste graad ontbreken, zoodat O_2^3 in A een dubbelpunt heeft. Hieruit volgt, dat ook τ^3 in A een dubbelpunt heeft.

Dit kunnen we ook meetkundig bewijzen. In $\nu(A)_3$ ligt namelijk een plat vlak ε, het net waarvan de exemplaren de eigenschap hebben, dat ze A en α als pool en poolvlak aan elkaar toevoegen. Nu snijdt $k^2{}_\delta$ het vlak ε in twee punten, dus voor twee O^2 van de verzameling $k^2{}_\delta$ hebben de bijbehoorende lijnelementen het punt P in A, m.a.w. A is dubbelpunt van τ^3.

In § 11 hebben we gezien, dat $O(A, \beta)$ drie rechten van het stelsel (b) draagt, waarvan de punten de afbeelding zijn van eenzelfde lijnelement (S, s). Nu snijdt $k^2{}_\delta$ ieder van deze rechten in één punt, zoodat $\tau^3{}_\delta$ door de punten S_1, S_2 en S_3 moet gaan.

Omgekeerd is de afbeelding van de lijnelementen van de verzameling $(A, \beta)_2$, waarvan de punten P een kromme van de derde graad met dubbelpunt in A door de punten S $(\tau_1{}^3)$ beschrijven, een kegelsnede gelegen op $O(A, \beta)$. Neem drie lijnelementen uit de te beschouwen verzameling: (P_1, p_1), (P_2, p_2) en (P_3, p_3). Deze bepalen drie O^2. De drie O^2 bepalen een net δ en dit geeft als doorsnede met $O(A, \beta)$ de gevraagde kegelsnede, want de bij deze laatste kegelsnede behoorende $\tau_2{}^3$ zal met $\tau_1{}^3$ moeten samenvallen, daar ze de zes punten P en S met $\tau_1{}^3$ gemeen heeft en beide krommen in A een dubbelpunt hebben.

Indien δ raakvlak is aan $O(A, \beta)$ is $k^2{}_\delta$ ontaard in twee rechten. Deze kegelsnede is de afbeelding van de lijnelementen van een rechte uit de waaier (A, β) en die, waarvan p door A gaat en P een kegelsnede beschrijft door de punten A en S. Beide verzamelingen hebben één lijnelement gemeen, dat afgebeeld wordt op het raakpunt van $O(A, \beta)$.

Resumeerende krijgen we: *De exemplaren van de ∞^3 verzamelingen uit $(A, \beta)_2$, waarvan P een kromme van de derde graad beschrijft, die door de punten S gaat en in A een dubbelpunt heeft, worden afgebeeld op de punten van de kegelsneden op $O(A, \beta)$ gelegen.*

Opmerking: Door twee punten O_1 en O_2 van $O(A, \beta)$ gaan ∞^1 kegelsneden op $O(A, \beta)$ gelegen. O_1 en O_2 correspondeeren met de lijnelementen (P_1, AP_1) en (P_2, AP_2). Aan elke kegelsnede, door de punten O_1 en O_2, is een τ^3 toe te voegen. Deze τ^3 moeten aan de voorwaarde voldoen, dat ze in A een dubbelpunt hebben (dit komt overeen met drie lineaire enkelvoudige gegevens) en verder dat ze door de punten S en P moeten gaan. De τ^3, die aan deze acht gegevens voldoen, vormen een bundel. De stelling van het noodzakelijke punt veronderstelt een negende basispunt. Dit valt echter in A, want in A hebben twee krommen uit de bundel vier snijpunten, zoodat er overeenstemming is met het feit, dat twee kegelsneden op $O(A, \beta)$ door de punten O_1 en O_2 buiten deze punten geen punt meer gemeen hebben.

Indien de punten O_1 en O_2 tot het vlak ε behooren, is aan de ∞^1 kegelsneden door deze punten een bundel van τ^3 in β toe te voegen, waarvan de exemplaren in A dezelfde takraaklijnen hebben.

Tenslotte is een kegelsnede van $O(A, \beta)$, die aan het vlak ε raakt, de afbeelding van de lijnelementen uit de verzameling $(A, \beta)_2$, waarvan de punten P een τ^3 doorloopen, die in A een keerpunt heeft.

De O^2, die kegels zijn, waarvan de toppen op l liggen, vormen in $\nu(A)_3$ een ϱ^3. De bij deze kegels behoorende vlakken π zijn de raakvlakken uit A aan Ω, die α snijden volgens de tangenten van een kegelsnede k^2.

Een rechte van $\nu(A)_3$ stelt een bundel O^2 voor. De poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van deze bundel, vormen een kwadratische kegel met top A, die α snijdt volgens een kegelsnede ν^2. Zoodoende zijn de rechten van $\nu(A)_3$ afgebeeld op kegelsneden van α. Een secant van ϱ^3 correspondeert met een, in twee rechten ontaarde kegelsnede, waarvan één rechte tangent is van k^2. Een bisecant van ϱ^3 correspondeert met een kegelsnede, die ontaard is in twee tangenten van k^2.

We beschouwen een rechte t_1 van $\nu(A)_3$, die met een kegelsnede ν_1^2 van α correspondeert. Een plat vlak V door t_1 snijdt ϱ^3 in drie punten K_1, K_2 en K_3, waarbij vlakken π behooren, die elkaar in α twee aan twee op ν_1^2 snijden. Beschouwen we b.v. de kegels K_1 en K_2, waarvan de bijbehoorende vlakken π_1 en π_2 elkaar volgens een rechte a snijden, dan is voor alle punten van de rechte $K_1 K_2$, a de poollijn van l, dus ook voor het snijpunt S van $K_1 K_2$ met t. Hieruit volgt, dat a op de kegel, die de kegelsnede ν^2 in α bepaalt, ligt.

Een willekeurig plat vlak V door t_1, bepaalt een omgeschreven driehoek van k^2, die ingeschreven is in ν_1^2. Er gaan ∞^1 platte vlakken door t_1, die ∞^1 omgeschreven driehoeken van k^2 bepalen, die ingeschreven zijn in ν_1^2. Er is hier overeenstemming met de stelling die zegt, dat, indien er één driehoek is, die in een kegelsnede en om een tweede kegelsnede beschreven kan worden, dan zijn er oneindig veel van die driehoeken.

We vragen nog naar het aantal kegelsneden ν^2, dat door vier gegeven punten B_1, B_2, B_3 en B_4 gaat. De lijnelementen van de rechten AB_1, AB_2, AB_3 en AB_4 correspondeeren met de punten van vier bisecanten van ϱ^3. Deze hebben twee transversalen. Er gaan dus twee kegelsneden ν^2 door vier willekeurig gekozen punten.

§ 12. *De verzameling lijnelementen van een plat vlak.*

We zullen thans iets trachten te vinden van de afbeelding der ∞^3 lijnelementen, waarvan p in een plat vlak β ligt. We zullen de verzameling $(\beta)_3$ noemen. Indien ten opzichte van een O^2 de toegevoegde poollijn van l in β ligt, ligt de pool van β ten opzichte van O^2 op l en omgekeerd. De meetkundige plaats der polen van β ten opzichte van de exemplaren van een net O^2, is een oppervlak van de derde graad, dat l in drie punten snijdt.

Hieruit volgt, dat de afbeelding van $(\beta)_3$ in de beeldruimte voorgesteld wordt door een driedimensionale variëteit van de derde graad (V_3^3).

V_3^3 bestaat in het algemeen uit ∞^1 elkaar kruisende platte vlakken V. Elk plat vlak V stelt een net O^2 voor, ten opzichte waarvan het vlak β geconjugeerd is met een bepaald punt van l. Door elke beschrijvende ϱ van V_2^4 gaat een plat vlak V, zoodat V_2^4 op V_3^3 ligt.

V_3^3 is ook op te bouwen uit ∞^2 rechten t.

De verzameling $(\beta)_3$ bestaat uit ∞^2 verzamelingen $(A, \beta)_2$, zoodat op V_3^3 ∞^2 $O(A, \beta)$ liggen. Twee $O(A, \beta)$ hebben steeds een rechte gemeen. Deze rechte behoort tot het stelsel (b). De ∞^3 rechten van de stelsels (b') zijn de rechten die in de platte vlakken V liggen.

Indien β raakvlak aan Ω is, zoodat ten opzichte van een kegel K, β het poolvlak is van l, is V_3^3 de kegel waardoor V_2^4 uit het punt K wordt geprojecteerd (K_3^3). Deze K_3^3 bestaat uit de ∞^2 kwadratische kegels, waardoor de ∞^2 ϱ^3 door K uit het punt K geprojecteerd worden (§ 9).

Indien β een plat vlak door l is, ligt de top van de bijbehoorende kegel op de kegelsnede van V_2^4, die voorstelt de kegels, die l tot beschrijvende hebben.

Indien β samenvalt met α, stellen de punten van de bij $(\alpha)_3$ behoorende K_3^3 de O^2 voor, die in de punten van l aan α raken. De ∞^2 singuliere lijnelementen van α correspondeeren met de punten van K_3^3, zoodat K_3^3 op V_4^6 ligt (§ 5).

§ 13. *De lijnelementen gedragen door de rechten van een lineair complex.*

De ∞^4 lijnelementen gedragen door de ∞^3 rechten van een lineair complex $(C)_4$, worden afgebeeld op de punten van een vierdimensionale variëteit van de tweede graad in R_5 (V_4^2). Immers de meetkundige plaats van de poollijnen van l ten opzichte van een bundel O^2, is een kwadratische regelschaar, die twee stralen met het lineair complex gemeen heeft.

We zullen nu onderzoeken of er in $(C)_4$ verzamelingen van lijnelementen voorkomen, waarvan de afbeeldingen beschrijvende platte vlakken V van V_4^2 zijn.

De meetkundige plaats der poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een net O^2, vormen een congruentie (1, 3). Immers ten opzichte van één O^2 uit een net, is een willekeurig punt A geconjugeerd met de rechte l en ten opzichte van drie O^2 uit een net, liggen de polen van een plat vlak β op l. Nu kan een lineair complex geen congruentie (1, 3) bevatten, echter wel een bilineaire congruentie, zoodat de platte vlakken V van V_4^2, V_2^4 in twee punten K_1 en K_2 zullen moeten snijden, want in dat geval behooren de rechten van de poolvlakken π_1 en π_2 van l ten opzichte van de kegels K_1 en K_2 tot de congruentie (1, 3), die dus ontaardt in twee velden en een bilineaire congruentie C.

Stel dat een vlak V bepaald is door K_1, K_2 en een derde O^2. De toppen der kegels K_1 en K_2 zijn respectievelijk T_1 en T_2. De poolvlakken van T_1 ten opzichte van K_1, K_2 en O^2 zijn respectievelijk onbepaald, π_2 en β (T_2 in π_2). Ten opzichte van alle O^2 van het net is T_1 geconjugeerd met de punten van r_2, als r_2

de snijlijn der vlakken π_2 en β is. Evenzoo is er een rechte r_1 in het poolvlak π_1 van T_2 ten opzichte van de kegel K_1 gelegen, waarvan de punten met T_2 geconjugeerd zijn ten opzichte van de exemplaren van het net V. De poolvlakken van T_1 en T_2 ten opzichte van een willekeurige O^2 uit het net, gaan respectievelijk door de rechten r_1 en r_2, dus de poollijn van l ten opzichte van die O^2, is een transversaal van r_1 en r_2.

Omgekeerd is een transversaal t_1 van r_1 en r_2 ook een poollijn van l ten opzichte van een O^2 uit het net en wel voor die O^2, waarvoor een willekeurig punt P van t_1 buiten r_1 en r_2 geconjugeerd is met l. De poollijn van l ten opzichte van deze O^2 gaat door P en is transversaal van r_1 en r_2, dus de rechte t_1.

De transversaal t, snijlijn der vlakken π_1 en π_2, is ten opzichte van alle exemplaren van de bundel O_2, bepaald door K_1 en K_2, poollijn van l.

De poollijnen van l ten opzichte van de ∞^2 bundels uit het net V, bepalen de ∞^2 regelscharen R door t van de congruentie C met richtlijnen r_1 en r_2. De regelschaar die behoort bij een bundel O^2, die de kegel K_1 bevat, is ontaard in π_1 en een waaier, waarvan de top op r_1 ligt en het vlak door r_2 gaat.

In de vlakken π_1 en π_2 liggen respectievelijk de rechten u_1 en u_2, die r_1 en r_2 in de punten S_1 en S_2 snijden. Ten opzichte van een willekeurige O^2 uit het net is T_1 geconjugeerd met S_2 en T_2 met S_1. Echter ook voor de bundels ϱ_1 en ϱ_2 (bestaande uit kegels die respectievelijk T_1 en T_2 tot top hebben). Ten opzichte van de exemplaren van het legioen O^2, bepaald door ϱ_1, ϱ_2 en O^2 (O^2 ligt niet in de R_3 bepaald door ϱ_1 en ϱ_2), is T_1 geconjugeerd met S_2 en T_2 met S_1. Ten opzichte van de exemplaren van een net uit dit legioen is bovendien S_1 geconjugeerd met T_1 en S_2 met T_2 en is dus S_1S_2 de poollijn van l, m.a.w. S_1S_2 is een rechte v.

Indien omgekeerd twee rechten r_1 en r_2 eenzelfde rechte v snijden, zijn ze richtlijnen van een bilineaire congruentie, waarvan de rechten poollijnen van l zijn, ten opzichte van de O^2 van een net. De vlakken π door r_1 en r_2, die v niet bevatten, snijden l respectievelijk in de punten T_1 en T_2, die elk top van een bundel kegels zijn (ϱ_1 en ϱ_2). Indien r_1 en r_2 de rechte v respectievelijk in S_1 en S_2 snijden, is ten opzichte van het legioen, bepaald door het net, waarvoor v de poollijn is van l en de bundels ϱ_1 en ϱ_2, S_1 geconjugeerd met T_2 en S_2 met T_1. Indien A en B respectievelijk punten van r_1 en r_2 zijn buiten S_1 en S_2, is voor een net uit dit legioen, T_2 geconjugeerd met A en T_1 met B, dus T_2 geconjugeerd met de punten van r_1 en T_1 met die van r_2, zoodat de poollijnen ten opzichte van de exemplaren van dit net, de bilineaire congruentie, met richtlijnen r_1 en r_2, vormen.

Resumeerende kunnen we dus zeggen, dat bij de ∞^7 platte vlakken door de ∞^4 bisecanten t van V_2^4, de bilineaire congruenties behooren, die hun richtlijnen hebben onder de ∞^7 paren rechten die eenzelfde rechte v snijden en omgekeerd.

Indien nu een willekeurig lineair complex de rechten v_1 en v_2 van de regelschaar v bevat, zijn er ∞^3 bilineaire congruenties in het complex die de rechte v_1 en ∞^3 bilineaire congruenties, die de rechte v_2 bevatten. Immers, indien één van de ∞^3 rechten, die v_1 snijden, richtlijn is van een bilineaire congruentie uit het complex, dan is de andere richtlijn ook een rechte die v_1 snijdt, omdat v_1 complexstraal is.

De bilineaire congruenties, die de rechte v_1 of v_2 bevatten, bepalen twee stelsels van ∞^3 netten, die voorgesteld worden door de beschrijvende platte vlakken V van V_4^2, die de afbeelding is van $(C)_4$.

De bilineaire congruenties die v_1 bevatten bepalen het eene stelsel beschrijvende vlakken en die, welke v_2 bevatten, het andere.

We beschouwen nu twee bilineaire congruenties C en C' uit $(C)_4$ met richtlijnen r_1, r_2 en r_1', r_2' van hetzelfde stelsel. Omdat ze tot eenzelfde lineair complex behooren, hebben ze een regelschaar R gemeen. (Alle complexstralen die r_1' snijden, snijden ook r_2'.) Bij de congruenties C en C' behooren de netten V en V'. De meetkundige plaats der polen van α ten opzichte van de O^2 van het net V, is een oppervlak van de derde graad (O^3), dat r_1 en r_2 bevat. Ten opzichte van één O^2 uit het net is nl. een willekeurig punt van r_1, geconjugeerd met twee punten van α buiten T_2. Evenzoo behoort bij V' een O_1^3 door de rechten r_1' en r_2'. Beide oppervlakken snijden R volgens een kromme van de zesde graad (ϱ^6 en ϱ_1^6). De kromme ϱ^6 is ontaard in r_1, r_2 en een kromme van de vierde graad (ϱ^4) en ϱ_1^6 in r_1', r_2'

en ϱ_1^4. De snijpunten van ϱ^6 en ϱ_1^6 zijn de snijpunten van ϱ^4 en ϱ_1^4. Nu is, ten opzichte van één O^2 uit het net V, een bepaalde rechte a van R poollijn van l. De vierdegraadskromme snijdt a dus in één punt, m.a.w. ϱ^4 en ϱ_1^4 zijn op het kwadratisch oppervlak dat R draagt (1, 3) krommen. Het aantal snijpunten P van ϱ^4 en ϱ_1^4 is gelijk aan $1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$. Daar de rechten p der singuliere lijnelementen een complex van de derde graad vormen, bevat de regelschaar R zes singuliere lijnelementen. Hiertoe behoort ook v_1, de rechte van de regelschaar (v), die tot C en C' behoort. Daar echter alle lijnelementen van v_1 singulier zijn, zullen ϱ^4 en ϱ_1^4 elkaar niet op v_1 snijden, zoodat van de zes snijpunten er nog vijf het gevolg zijn van de aanwezigheid van singuliere lijnelementen. Het overblijvende snijpunt P vormt, met de door P gaande rechte van R, het lijnelement waarvan de afbeelding zoowel in V als in V' ligt.

De platte vlakken V en V', van hetzelfde stelsel, snijden elkaar dus in één punt.

Indien C en C' tot verschillend stelsel behooren, zijn de zes snijpunten der beide ϱ^4 het gevolg van evenzooveel singuliere lijnelementen, m.a.w.:

Twee platte vlakken V en V', van verschillend stelsel, kruisen elkaar.

Indien twee platte vlakken V en V' van verschillend stelsel een punt gemeen hebben, zullen ϱ^4 en ϱ_1^4, buiten de zes genoemde snijpunten, een zevende punt gemeen hebben. Beide krommen vallen dan samen m.a.w.:

Indien V en V', van verschillend stelsel, een punt gemeen hebben, hebben ze een rechte gemeen.

V_4^2 bestaat ook uit ∞^3 bisecanten van V_2^4, die in elk punt van V_2^4 een kwadratische kegel vormen, immers elk vlak π bevat een waaier van rechten, waarvan de lijnelementen in R_5 afgebeeld worden op de punten van een kwadratische kegel (§ 11).

Een plat vlak V van V_4^2 heeft twee punten K_1 en K_2 met V_2^4 gemeen. We hebben reeds gezien dat de punten van V correspondeeren met een verzameling lijnelementen (C_V), waarvan de rechten een bilineaire congruentie en de punten een oppervlak van de derde graad (O^3) vormen. In V ligt de rechte K_1K_2, die de afbeelding is van de lijnelementen van een rechte t, die snijlijn is van de vlakken π_1 en π_2, behoorende bij de kegels K_1 en K_2. De rechte t ligt op O^3. Nu snijdt een willekeurige rechte a van V de rechte K_1K_2 in één punt, dus zijn de punten van a de afbeelding van een verzameling lijnelementen waarvan de rechten een regelschaar vormen, die t bevat (R) en de punten een kromme van de derde graad op R. Deze kromme is de restdoorsnede van R met O^3, na verwijdering van de rechten r_1, r_2 en t.

Omgekeerd worden de lijnelementen van C_V, waarvan de rechten een regelschaar door de rechte t vormen, afgebeeld op de punten van een rechte a van V, want twee lijnelementen (P_1, p_1) en (P_2, p_2) uit de verzameling, bepalen twee punten van V en deze een rechte a, die de afbeelding is van de genoemde verzameling van lijnelementen, omdat de regelschaar bepaald is door de rechten p_1, p_2 en t.

De lijnelementen van C_V, waarvan de rechten een willekeurige regelschaar beschrijven, worden afgebeeld op de punten van een kegelsnede in V, door de punten K_1 en K_2. De poollijnen van l ten opzichte van K_1 en K_2, die tot de bilineaire congruentie behooren vormen namelijk waaiers respectievelijk in de vlakken π_1 en π_2, waarvan de toppen op r_2 en r_1 liggen. Een willekeurige regelschaar uit de bilineaire congruentie, heeft met elke waaier één rechte en met een regelschaar R twee rechten gemeen.

Omdat een kegelsnede uit het kluwen met basispunten K_1 en K_2, bepaald is door drie punten en een regelschaar door drie rechten, correspondeert omgekeerd, met een kegelsnede uit het kluwen een verzameling lijnelementen uit C_V, waarvan de rechten een regelschaar vormen.

Resumeerende kunnen we dus zeggen: *De lijnelementen uit C_V, gedragen door een regelschaar, worden afgebeeld op de kegelsneden van het kluwen in V met basispunten K_1 en K_2.* De regelscharen die de rechte t bevatten, correspondeeren met de ontaarde kegelsneden uit het kluwen, waarvan de rechte t bestanddeel is en de lijnelementen van C_V gedragen door twee waaiers met toppen respectievelijk op r_1 en r_2, met ontaarde kegelsneden, die hun dubbelpunt buiten t hebben.

We zullen nu onderzoeken, hoeveel beschrijvende vlakken V van V_4^2 door een gegeven rechte b van V_4^2 gaan. De rechten der lijnelementen, die bij de punten van b behooren, zijn de beschrijvenden van een regelschaar (R). Het oppervlak O, dat R draagt, draagt een tweede regelschaar (R'). Indien R zal behooren tot een congruentie, die correspondeert met een platvlak V van V_4^2, moeten de richtlijnen van deze congruentie beide v_1 of v_2 snijden en behooren tot R'. Nu zijn er twee bilineaire congruenties, die R bevatten namelijk die welke tot richtlijnen heeft de beide rechten van R' die v_1 snijden en die welke tot richtlijnen heeft de beide rechten van R' die v_2 snijden. Deze bilineaire congruenties correspondeeren met twee beschrijvende platte vlakken V_1 en V_2 van V_4^2.

Dat deze vlakken door de rechte b gaan blijkt uit het volgende. In het algemeen vormen de punten P, die behooren bij de lijnelementen uit C, welke gedragen worden door de rechten van R, een kromme (1, 3), die gaat door de zes punten S van singuliere lijnelementen. De bundel b bepaalt op O een kromme (1, 2), die ook door de punten S gaat. De krommen hebben meer dan vijf punten gemeen, zoodat de laatste een bestanddeel is van de eerste en de rechte b dus in het vlak V moet liggen.

Eveneens ligt b in V', zoodat we kunnen zeggen:

Door een rechte van V_4^2 gaat een plat vlak van het eene en een plat vlak van het andere stelsel.

De beide platte vlakken van V_4^2, welke gaan door een rechte b van V_4^2, die bisecant is van V_2^4, worden als volgt bepaald. Bij de rechte b behoort een rechte t in R_3, die complexstraal is. Door t gaan de platte vlakken π_1 en π_2, die door de complexstraal v respectievelijk in de punten A_1 en A_2 gesneden worden. De waaiers (A_1, π_1) en (A_2, π_2) bevatten respectievelijk de complexstralen A_1B_1, en A_2B_2, die t in de punten B_1 en B_2 snijden. We zullen de richtlijnen r_1 en r_2, die een congruentie, behoorende bij een beschrijvend vlak V door b, bepalen, moeten zoeken in de waaiers (A_1, π_1) en (A_2, π_2). De rechte r_1 snijdt v, t en A_1B_1 en de rechte r_2 moet dit dus ook doen. Evenzoo moet r_1 de complexstraal A_2B_2 snijden, omdat r_2 het doet, zoodat

A_1B_2 en A_2B_1 de richtlijnen zijn, die behooren bij de congruentie welke de drager is van de lijnelementen, behoorende bij een vlak door b.

De richtlijnen r_1' en r_2', behoorende bij het andere platte vlak door b, worden op dezelfde manier bepaald.

Opmerking: Daar de toppen van twee door het complex aan elkaar toegevoegde waaiers, op de snijlijn der vlakken, die de waaiers bevatten, liggen, zullen de snijpunten van r_1 en r_1' en van r_2 en r_2' op t liggen. De regelschaar, die twee bilineaire congruenties uit een complex gemeen hebben, is hier ontaard in de waaiers $(B_1\,\pi_1)$ en $(B_2\,\pi_2)$.

Daar door een rechte van V_4^2 twee platte vlakken gaan, wordt een gegeven vlak V door ∞^2 vlakken V' gesneden. Hierbij behooren ∞^2 bilineaire congruenties C'. De bilineaire congruentie C, die behoort bij het platte vlak V, bevat de rechte t, waarvan de lijnelementen zich afbeelden op een rechte b van V. Ieder plat vlak V' heeft een punt met b gemeen, zoodat de richtlijnen van de ∞^2 bilineaire congruenties C' de rechte t moeten snijden, dus de ∞^2 paren richtlijnen der bilineaire congruenties, die de lijnelementen dragen welke de afbeelding zijn der ∞^2 V', die V volgens een rechte snijden, behooren tot een bilineaire congruentie, met t en v' als richtlijnen.

Indien omgekeerd de richtlijnen r_1' en r_2' van een congruentie C', die behoort bij een vlak V' van V_4^2, de rechte t van een bilineaire congruentie C met richtlijnen r_1 en r_2, die behoort bij het vlak V, snijden, hebben V en V' een punt, dus een rechte gemeen en zullen dus ook r_1 en r_2 de rechte t' uit de congruentie C' snijden.

We vragen thans naar de platte vlakken van een bepaald stelsel, die door een punt P van V_4^2 gaan of indien V_1 een plat vlak van het andere stelsel door P is, naar de platte vlakken V', die V_1 volgens een rechte door P snijden, immers als twee vlakken van verschillend stelsel een punt gemeen hebben, dan hebben ze een rechte gemeen.

Het vlak V_1 bevat een bisecant van V_2^4 (a) niet door P, waarvan de punten correspondeeren met de lijnelementen van de rechte t_1. We zoeken nu de platte vlakken V' door P, die de rechten a snijden of in R_3, de bilineaire congruenties, (die verzamelingen C_V dragen) welke de rechten t_1 en p bevatten (p is de rechte van het lijnelement, behoorende bij het punt P).

De ∞^1 paren toegevoegde rechten door het complex bepaald in de regelschaar R', die gedragen wordt door de rechten t_1, p en v' zijn de richtlijnen van de bilineaire congruenties, die correspondeeren met de platte vlakken V' door P.

Evenzoo gaan er ∞^1 platte vlakken van het andere stelsel door P. De richtlijnen der bijbehoorende congruenties zijn de paren toegevoegde rechten van een regelschaar R, die o.a. gedragen wordt door de rechten p en v.

Omgekeerd is ook een willekeurige regelschaar (R) uit het complex, die v bevat, drager van de ∞^1 paren richtlijnen van de ∞^1 bilineaire congruenties, die correspondeeren met ∞^1 platte vlakken V door één punt. Dit punt bepalen we als volgt. De lijnelementen van de rechten t_1 en t_2 van R, correspondeeren met de punten van twee rechten b_1 en b_2 in R_5. Door b_1 gaat een vlak V_1' en door b_2 een vlak V_2'. Het snijpunt P van deze beide vlakken is het gezochte punt. Twee, door het complex aan elkaar toegevoegde rechten r_1 en r_2, die v_1, t_1 en t_2 snijden, bepalen als richtlijnen een bilineaire congruentie C, die een plat vlak V van V_4^2 bepaalt, dat, omdat C de rechten t_1 en t_2 bevat, de platte vlakken V_1' en V_2' volgens een punt, dus volgens een rechte snijdt. V moet dus door P gaan. De ∞^1 vlakken V', door de rechten b, snijden de ∞^1 vlakken V volgens rechten en gaan dus ook door P.

Resumeerende kunnen we dus zeggen:

De ∞^4 regelscharen van het complex, die v of v' bevatten, zijn elk drager van de ∞^1 paren richtlijnen van bilineaire congruenties, die correspondeeren met de ∞^1 platte vlakken V, respectievelijk V', door de ∞^4 punten van V_4^2.

Tenslotte beschouwen we nog een paar door het complex aan elkaar toegevoegde rechten r_1 en r_2, die v en v' snijden. De O^2 ten opzichte waarvan l en v en l en v' toegevoegde poollijnen zijn, vormen respectievelijk netten ν en ν'. Beschouwen we r_1 en r_2 nu eerst als snijlijnen van v, dan zijn de bijbehoorende vlakken π, de vlakken door r_1 en v' en door r_2 en v'. Deze vlakken π bepalen de kegels K_1' en K_2' van V_2^4, volgens welke het vlak V, dat correspondeert met de bilineaire congruentie met richtlijnen r_1 en r_2 die v snijden, V_2^4 en ook v' snijdt. Ten opzichte van één O^2 uit het net V valt de poollijn van l samen met v, zoodat de ∞^2 paren rechten door het complex aan elkaar toegevoegd in de bilineaire congruentie met richtlijnen v en v', de richtlijnen zijn van bilineaire congruenties, die ieder twee verzamelingen lijnelementen dragen, welke zich afbeelden op twee platte vlakken van verschillend stelsel en dus de vlakken v en v' respectievelijk volgens een rechte en een punt of volgens een punt en een rechte snijden (de vlakken v zijn van verschillend stelsel).

We hebben gezien, dat de lijnelementen, gedragen door de rechten van een complex, afgebeeld worden op de punten van een V_4^2 door V_2^4. Omgekeerd zijn de punten van een niet ontaarde V_4^2 door V_2^4, de afbeelding van de lijnelementen, gedragen door de rechten van een lineair complex. Iedere driedimensionale vlakke ruimte, die in R_5 V_2^4 volgens een kromme van de derde graad snijdt, snijdt V_4^2 volgens een O_2^2, waarvan de punten de afbeelding zijn van lijnelementen, waarvan de rechten door een vast punt gaan. Deze rechten vormen een waaier (§ 11). De verzameling lijnelementen is een zoodanige, dat de bijbehoorende rechten in elk punt van R_3 een waaier vormen. De rechten vormen dus een lineair complex.

De afbeelding van de lijnelementen, gedragen door de rechten van een axiaal complex (met as a) is een V_4^2, die singulier is. Op V_4^2 liggen ∞^1 vlakke drie-dimensionale ruimten in twee stelsels. Ten opzichte van de O^2, voorgesteld door punten van een R_3 van het eene stelsel is de rechte a geconjugeerd met een gegeven punt van l en ten opzichte van de O^2 voorgesteld door punten van een R_3 van het andere stelsel, is de rechte l geconjugeerd met een gegeven punt van a.

Twee R_3's van hetzelfde stelsel hebben de bisecant t van V_2^4 gemeen, waarvan de punten de O^2 voorstellen ten opzichte waarvan l en a wederkeerige poollijnen zijn.

Twee R_3's van verschillend stelsel hebben een plat vlak gemeen.

De variëteit V_4^2 bestaat uit de ∞^2 platte vlakken U door de rechte t en een punt van V_2^4. Neem een willekeurig punt O van een willekeurig vlak U. De drie vlakken π, behoorende bij kegels, voorgesteld door de drie snijpunten van U met V_2^4, snijden elkaar in een punt S op a, zoodat ten opzichte van alle exemplaren van het net, bepaald door de drie kegels, dus ook ten opzichte van de O_1^2, behoorende bij punt O, het punt S geconjugeerd is met de punten van l, d.w.z. de poollijn van l ten opzichte van O_1^2 gaat door S, dus het punt O behoort ook tot V_4^2.

Omgekeerd ligt een willekeurig punt O van V_4^2 in één der vlakken U. We hebben slechts te bewijzen dat het platte vlak door de rechte t en het punt O een derde punt van V_2^4 bevat. Ten opzichte van O_1^2, die in R_5 voorgesteld wordt door het punt O, is een punt S van a geconjugeerd met de punten van l. Dus ook ten opzichte van de O^2, voorgesteld door de punten van het vlak door t en O. Dit vlak ligt in de R_3, wiens punten O^2 voorstellen ten opzichte waarvan P geconjugeerd is met l. Deze R_3 snijdt V_2^4 volgens ϱ^3. Het platte vlak snijdt ϱ^3 en dus ook V_2^4, in drie punten.

§ 14. *De lijnelementen gedragen door de stralen van een bilineaire congruentie.*

De verzameling van de ∞^3 lijnelementen, gedragen door de stralen van een bilineaire congruentie (C), wordt in R_5 afgebeeld op de punten van een driedimensionale variëteit van de vierde graad (V_3^4).

Deze variëteit is namelijk de doorsnede van twee V_4^2, wier punten de lijnelementen afbeelden, van twee lineaire complexen door de congruentie C.

V_3^4 bevat V_2^4 omdat een vlak π één rechte van de congruentie bevat en deze één lijnelement van de ∞^2 lijnelementen, die met de kegel, behoorende bij het vlak π, correspondeeren.

Omdat een axiaal complex opgebouwd is uit ∞^1 schoven, is de bijbehoorende V_4^2 opgebouwd uit de ∞^3 bisecanten van de ∞^1 krommen (1, 1), die door de punten K_1 en K_2 gaan (§ 9) als K_1 en K_2 de snijpunten der bisecant van V_2^4, waarvan de punten correspondeeren met de lijnelementen van de as van het complex, met V_2^4 voorstellen.

Indien een bilineaire congruentie de richtlijnen a en a' heeft, waarvan de lijnelementen correspondeeren met de punten van de bisecanten t en t' die V_2^4 in de punten K_1, K_2 en K_1', K_2' snijden, wordt de afbeelding van de lijnelementen, gedragen door de stralen van deze congruentie, gevormd door de verbindingsrechten van de ∞^2 paren snijpunten die de krommen (1, 1) (ϱ^3) door K_1 en K_2 hebben met de krommen (1, 1) (ν^3) door K_1' en K_2'. Door ieder punt van V_2^4 gaat één ϱ^3 en één ν^3, dus één beschrijvende rechte van V_3^4.

Door het punt K_1 gaat, behalve de ∞^1 ϱ^3, nog één ν^3. Buiten K_1 is ieder punt van ν^3 een tweede snijpunt van een ϱ^3 met ν^3. De verbindingsrechten van deze punten met K_1, vormen een kwadratische tweedimensionale kegel met top K_1. Zoo zijn ook de punten K_2, K_1' en K_2' toppen van kegels. De punten van deze vier oppervlakken zijn de afbeeldingen van de lijnelementen, wier rechten p de waaiers vormen, door de congruentie in de vier vlakken π door a en a' bepaald.

De bilineaire congruentie bevat ∞^1 waaiers, die in twee stelsels liggen. Zoo is V_3^4 opgebouwd uit ∞^1 kwadratische oppervlakken, die in twee stelsels liggen. Twee oppervlakken van hetzelfde stelsel hebben geen punt gemeen en twee oppervlakken van verschillend stelsel hebben een rechte gemeen.

Opmerking: Een willekeurig plat vlak V in R_5 heeft vier punten met V_3^4 gemeen. De bij V en V_3^4 in R_3 behoorende congruenties (1, 3) en (1, 1) hebben vier rechten gemeen, die de lijnelementen dragen, welke correspondeeren met de bovengenoemde vier punten.

De verzameling lijnelementen met hun punt P in A, bevat één lijnelement van de verzameling lijnelementen gedragen door de rechten van een bilineaire congruentie. In R_5 hebben de afbeeldingen van beide verzamelingen, V en V_3^4, vier punten gemeen, waarvan echter drie op V_2^4 vallen en dus singulier zijn.

Indien a en a' elkaar snijden, is de congruentie ontaard in een veld en een schoof, dus V_3^4 in een R_3 en een V_3^3.

Opmerking: *Door Prof. Dr J. A. Barrau is bewezen dat er* V_3^4 *in* R_5 *zijn, die vier stelsels van* ∞^2 *rechten dragen (zie tijdschrift Mathematica, 2e jaargang, no IV, „Curved* $(n+1)$ *dimensional varieties containing* 2^n *systems of straight lines").* *We kunnen vier stelsels van* ∞^2 *verzamelingen van* ∞^1 *lijnelementen in de verzameling C aanwijzen, die afgebeeld worden op vier stelsels van* ∞^2 *rechten van* V_3^4*, namelijk de lijnelementen van de* ∞^2 *stralen der congruentie, de* ∞^2 *verzamelingen van* ∞^1 *lijnelementen, waarvan de rechten p een waaier met top op een der richtlijnen vormen, terwijl de punten P een kegelsnede beschrijven* (§ 10), *idem met waaiertop op de andere richtlijn en tenslotte de* ∞^2 *stelsels van* ∞^1 *lijnelementen, waarvan de rechten p een regelschaar uit de bilineaire congruentie beschrijven en de punten P een kromme van de derde graad vormen.*

Tevens blijkt, dat door een punt van V_3^4 *een rechte van elk stelsel gaat.*

§ 15. *De lijnelementen gedragen door de stralen van een kwadratische regelschaar.*

We willen de afbeelding zoeken van de ∞^2 lijnelementen, waarvan de rechten p een kwadratische regelschaar vormen. Nu is een kwadratische regelschaar het gemeenschappelijke van drie lineaire complexen, zoodat de gevraagde afbeelding gezocht moet worden onder de punten van de V_2^8, die gemeenschappelijk is aan drie V_4^2. De V_2^8 bevat V_2^4, zoodat de ∞^2 lijnelementen, waarvan de rechten een regelschaar (R) vormen, afgebeeld worden op de punten van een oppervlak van de vierde graad (O_2^4).

We willen nu onderzoeken volgens welke kromme (ϱ^x) de O_2^4 het oppervlak V_2^4 snijdt. De punten van ϱ^x stellen kegels voor, die behooren bij de gemeenschappelijke raakvlakken van R en Ω. Nu kunnen we door elke rechte v en elke rechte u van Ω twee vlakken aanbrengen, die raken aan R. De raakpunten van deze vlakken π vormen op Ω een kromme (2, 2). Volgens § 7 is ϱ^x een kromme (2, 2) op V_2^4 en dus van de zesde graad.

Ook op de volgende manier kunnen we tot hetzelfde resultaat komen. Beschouwen we de lijnelementen van twee verzamelingen, waarvan de rechten p de regelschaar R en een complex C vormen. Ze correspondeeren in R_5 respectievelijk met O_2^4 en V_4^2, die een kromme van de achtste graad gemeen hebben. De kromme bevat twee bisecanten van V_2^4, waarvan de punten correspondeeren met de lijnelementen van de beide gemeenschappelijke rechten van R en C. De overblijvende kromme, van de zesde graad, moet dus uit punten bestaan, die singuliere oppervlakken afbeelden en wel kegels met toppen op l.

De lijnelementen, waarvan de rechten p een regelschaar R', die met R op hetzelfde kwadratische oppervlak ligt, vormen, beelden zich ook af op een oppervlak van de vierde graad ($O_2'^4$), dat V_2^4 volgens een kromme van de zesde graad snijdt, die samenvalt met de kromme volgens welke O_2^4 de V_2^4 snijdt, daar een vlak π door een beschrijvende van de regelschaar R, een beschrijvende van de regelschaar R' bevat.

In § 11 is afgeleid dat de ∞^2 lijnelementen uit $(A)_3$, die liggen op een kwadratische kegel τ^2, afgebeeld worden op een tweedimensionale variëteit van de vierde graad, die V_2^4 snijdt volgens een kromme van de derde graad, die dubbel geteld moet worden. Dit is een bijzonder geval van het voorgaande.

§ 16. *Lineaire verzamelingen van O^2.*

We willen nu nagaan met welke verzamelingen van lijnelementen de lineaire verzamelingen van O^2 correspondeeren.

Een rechte b van R_5, die een bundel O^2 voorstelt, correspondeert met een verzameling lijnelementen, waarvan de rechten p een kwadratische regelschaar (R) beschrijven en de punten P een kromme van de derde graad (ϱ^3).

Indien b de V_2^4 in één punt snijdt, is R ontaard in twee platte vlakken en ϱ^3 in een rechte en een kegelsnede.

Is b bisecant van V_2^4, dan is R ontaard in twee platte vlakken en ϱ^3 in drie rechten.

De punten van een R_1 in R_5, worden afgebeeld op de lijnelementen van een stelsel S_1 (2, 3).

Een plat vlak V van R_5, dat een net O^2 voorstelt, correspondeert met een verzameling lijnelementen, waarvan de rechten een congruentie (1, 3) vormen en de punten een oppervlak van de derde graad. Indien het platte vlak V één punt met V_2^4 gemeen heeft, wordt de congruentie gesplitst in een congruentie (1, 2) en een veld, en indien V drie punten met V_2^4 gemeen heeft in een schoof en drie velden.

We hebben dus gevonden, dat de punten van een R_2 in R_5 afgebeeld worden op de lijnelementen van een stelsel S_2 (3, 1, 3).

Een R_3 van R_5, die een kluwen O^2 voorstelt, correspondeert met een verzameling lijnelementen, waarvan de rechten een complex van de tweede graad vormen. Immers iedere waaier (A, β) bevat twee rechten uit de kegel die gevormd wordt door de poollijnen van l ten opzichte van de O^2 van R_3, uit het kluwen, waarvoor P geconjugeerd is met de punten van l.

Ten opzichte van één O^2 uit het kluwen is een willekeurig punt A geconjugeerd met α, zoodat er één lijnelement is met A als punt.

Tenslotte kunnen we nog onderzoeken de graad van de kromme, gevormd door de punten P, die behooren bij de ∞^1 lijnelementen in een vlak β. Nu correspondeeren de lijnelementen van β met de punten van een V_3^3 in R_5, die R_3 volgens een kromme van de derde graad (τ^3) snijdt. Dus de punten van τ^3 stellen O^2 voor, ten opzichte waarvan de poollijnen van l in β vallen. We moeten nu de meetkundige plaats van de polen van α ten opzichte van deze O^2 zoeken. De O^2, ten opzichte waarvan de polen van α in een plat vlak γ liggen, vormen een vierdimensionale variëteit van de derde graad in R_5, die τ^3 in negen punten snijdt. De gevraagde meetkundige plaats is dus een kromme van de negende graad. De kromme τ^3 bevat echter vier kegels, waarvan de toppen op l liggen, want de vier punten van V_2^4, die in R_3 liggen, liggen ook op V_3^3, omdat V_2^4 op V_3^3 ligt. De kromme van de negende graad is dus ontaard in vier rechten λ en een kromme van de vijfde graad die in β ligt, welke laatste voorstelt de meetkundige plaats der punten P van lijnelementen die in β liggen.

Opmerking: Tot hetzelfde resultaat kunnen we komen door te vragen naar de polen van de snijlijn (α, β) ten opzichte van de kegelsneden, volgens welke de O^2, van de verzameling τ^3, β snijden. We vinden een kromme van de zesde graad, die verminderd moet worden met de poollijn van (α, β) ten opzichte van de kegelsnede, die de doorsnede is van β met het oppervlak uit het kluwen, dat in het snijpunt van l met β aan β raakt. Het platte vlak α heeft namelijk slechts één pool ten opzichte van dit oppervlak.

Een kluwen snijdt V_2^4 in vier punten K, zoodat het zes bisecanten van V_2^4 bevat. De verzameling lijnelementen, die bij het kluwen behoort, bevat dus ook de lijnelementen van zes rechten, die de ribben zijn van het viervlak, gevormd door de vlakken π, behoorende bij de punten K.

Resumeerende kunnen we dus zeggen, dat de punten van R_3 in R_5 zich afbeelden op een stelsel S_3 (2, 1, 5) van ∞^3 lijnelementen.

Een R_4 van R_5, die een legioen van O^2 in R_3 voorstelt, correspondeert met een verzameling van ∞^4 lijnelementen. De rechten p van de lijnelementen met een gegeven punt A als punt, vormen een kwadratische kegel, want voor een bundel O^2 uit het legioen is A geconjugeerd met α. Verder draagt een willekeurige rechte één lijnelement van de verzameling, die bij het legioen behoort, zoodat:

De punten van een R_4 in R_5 worden afgebeeld op een stelsel S_4 (2, 1) van ∞^4 lijnelementen.

Een legioen (R_4) snijdt V_2^4 volgens een kromme van de vierde graad (ϱ^4). De ∞^2 bisecanten van deze kromme, zijn de bisecanten van V_2^4 die in R_4 liggen. De verzameling lijnelementen, die bij het legioen behoort, bevat dus de lijnelementen van ∞^2 rechten c, die de snijlijnen zijn van de ∞^1 vlakken π, waarvan de raakpunten een kromme (1, 2) op Ω vormen (§ 7).

Het aantal rechten c door een punt A, hangt af van het aantal vlakken π, dat door A gaat. Nu vormen de raakpunten der vlakken π door A op Ω een kromme (1, 1), die drie punten met de kromme (1, 2) gemeen heeft, zoodat er ook drie vlakken en dus ook drie rechten c door A gaan.

We kunnen ook als volgt redeneeren: Indien men de raakvlakken π in twee punten P en Q van Ω aanbrengt, dan is de snijlijn c de poollijn van PQ ten opzichte van Ω. Nu vormen de rechten PQ, die koorden zijn van een kromme (1, 2) een congruentie (1, 3) en is dus het aantal rechten c dat door A gaat gelijk aan het aantal rechten PQ, dat in het poolvlak van A ten opzichte van Ω ligt en het aantal rechten c dat in een plat vlak β ligt gelijk aan het aantal rechten PQ, dat door de pool van β ten opzichte van Ω gaat. De rechten c vormen dus een congruentie (3, 1).

Een tweede R_4 bepaalt eveneens een stelsel van rechten c, die een congruentie (3, 1) vormen. Beide congruenties hebben 10 rechten gemeen. Deze zijn de poollijnen van gemeenschappelijke koorden der beide krommen (1,2) op Ω. Beide krommen hebben vier snijpunten, die zes gemeenschappelijke koorden en de zes rechten c bepalen, die behooren bij het gemeenschappelijk kluwen der beide legioenen. Verder zijn de rechten v gemeenschappelijke koorden van beide krommen. Daar de rechten v, bij polarisatie, aan zichzelf worden toegevoegd, bevat de verzameling der rechten c ook de regelschaar v. Een R_4 snijdt in R_5 elk vlak ν volgens een rechte. De bij de punten van deze rechte behoorende O^2, bepalen lijnelementen, die de bij ν behoorende rechte v tot rechte hebben, zoodat de rechten v ook rechten c zijn. Daar de lijnelementen van v singulier zijn, zullen met een bepaald lijnelement van v in het algemeen twee verschillende punten correspondeeren en dus niet met een punt van de R_3, die de beide R_4 gemeen hebben.

Opmerking: Ieder singulier oppervlak, dat tot R_4 behoort, correspondeert met ∞^1 lijnelementen van een rechte λ.

§ 17. *De lijnelementen gedragen door hoogere complexen, congruenties en regelvlakken.*

De afbeelding van de verzameling lijnelementen, waarvan de rechten een complex van de n-de graad vormen, is een vierdimensionale variëteit van de graad $2n$, want in R_3 heeft een complex van de graad n, $2n$ stralen met een kwadratische regelschaar (de meetkundige plaats der poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een bundel) gemeen.

In § 6 vonden we reeds, dat de lijnelementen waarvan de rechten p de raaklijnen van Ω zijn (dus een kwadratisch complex vormen) afgebeeld worden op een vierdimensionale variëteit van de vierde graad.

De afbeelding van de verzameling lijnelementen, waarvan de rechten een congruentie (m, n) vormen, is een driedimensionale variëteit van de graad $m + 3n$. Een plat vlak in R_5 heeft namelijk $m + 3n$ snijpunten met de variëteit gemeen, omdat in R_3 de congruentie (1, 3), gevormd door de poollijnen van l ten opzichte van de exemplaren van een net, $m + 3n$ stralen gemeen heeft met de congruentie (m, n).

De afbeelding van de verzameling lijnelementen, waarvan de rechten een regelvlak van de n-de graad vormen, is een tweedimensionale variëteit van de graad $2n$, (O_2^{2n}), want het aantal snijpunten van de afbeelding met een kluwen, is gelijk aan het aantal gemeenschappelijke stralen van de regelschaar en het kwadratisch complex, dat gevormd wordt door de poollijnen van l ten opzichte van het kluwen.

Door elke rechte van Ω gaan n vlakken, die een beschrijvende van het regelvlak bevatten, zoodat de raakpunten op Ω van de raakvlakken, door de beschrijvende lijnen van het regelvlak aan Ω, een kromme (n, n) vormen. Deze raakvlakken π bepalen kegels, die in R_5 voorgesteld worden door punten, die op V_2^4 een kromme (n, n) vormen, die dus van de graad $3\,n$ is. Deze kromme is een deel van de doorsnede van V_4^2, die de afbeelding is van de lijnelementen gedragen door de stralen van een willekeurig lineair complex, met O_2^{2n}. Het resteerende n-de graadsdeel is de afbeelding van de lijnelementen, gedragen door de n gemeenschappelijke rechten van complex en regelschaar.

§ 18. *Verzamelingen van lijnelementen met gegeven punten P.*

De lijnelementen, waarvan de punten P in een gegeven plat vlak β liggen, worden afgebeeld op de punten van een vierdimensionale variëteit van de derde graad (V_4^3), want de meetkundige plaats van de polen van α ten opzichte van de O^2 van een bundel is een kromme van de derde graad, zoodat er drie

O^2 in een bundel zijn, die met een lijnelement correspondeeren waarvan het punt P in β ligt.

Indien het punt der lijnelementen in α moet liggen, stellen de punten van de bijbehoorende variëteit de O^2 voor, die aan α raken.

De lijnelementen, waarvan de punten P op een gegeven rechte b liggen, worden afgebeeld op de punten van een driedimensionale variëteit van de derde graad (V_3^3), want de verzameling lijnelementen is te beschouwen als de doorsnede van twee verzamelingen, waarvan de punten der lijnelementen in twee vlakken β en γ door b liggen. De gemeenschappelijke figuur der bijbehoorende variëteiten is van de negende graad, doch moet verminderd worden met V_3^6, daar de kegels met toppen in α singuliere oppervlakken zijn.

Tot hetzelfde resultaat komt men door te bedenken, dat de meetkundige plaats der polen van α ten opzichte van de O^2 van een net een oppervlak van de derde graad is, dat b in drie punten snijdt.

Zoo worden de lijnelementen, waarvan de punten P op een kromme van de n-de graad liggen, afgebeeld op een V_3^{3n}. Twee van deze verzamelingen van lijnelementen hebben in het algemeen geen lijnelement gemeen. De gemeenschappelijke kromme van de bijbehoorende variëteiten in R_5, ligt dan ook op V_3^6. Zoo hebben een verzameling, die bestaat uit de lijnelementen, waarvan de punten een rechte a vormen en een waarvan het punt P samenvalt met een gegeven punt A, geen elementen gemeen. De afbeeldingen namelijk een V_3^6 en een plat vlak hebben drie punten gemeen, die op V_3^6 liggen, want deze punten stellen kegels voor, die behooren bij de drie rechten λ door A, die door b gesneden worden.

§ 19. *Verzamelingen van lijnelementen in een plat vlak.*

We zullen nu de afbeelding trachten te vinden van verzamelingen van lijnelementen in een plat vlak β gelegen.

We hebben in § 5 reeds gezien, dat er in β een stelsel (3,3) van ∞^1 singuliere lijnelementen ligt. Dit kan nu ook als volgt afgeleid worden. Daar een legioen van O^2 met iedere bundel

O^2, die de afbeelding is van een singulier lijnelement, één exemplaar gemeen heeft, zal het nulstelsel van lijnelementen, door het legioen in β bepaald, volgens § 16 een nulstelsel (2, 1), het stelsel S_1 der singuliere lijnelementen bevatten. Twee van deze nulstelsels, bepaald door twee legioenen van O^2, zullen dus behalve het stelsel S_1' (2, 5) der ∞^1 lijnelementen in β (zie § 16), behoorende bij het gemeenschappelijk kluwen der beide legioenen, het stelsel S_1 bevatten. Nu hebben twee nulstelsels (2, 1) een systeem (5, 8) van ∞^1 lijnelementen gemeen. Dit, verminderd met S_1', geeft het stelsel S_1 (3, 3) van ∞^1 singuliere lijnelementen.

De lijnelementen, waarvan het punt P met een punt A samenvalt, vormen een systeem (1, 0) dat met het nulstelsel S (2, 1), door een legioen van O^2 in β bepaald, twee elementen gemeen heeft. De afbeelding is in R_5 dus een kegelsnede (§ 10).

De lijnelementen van een rechte vormen een stelsel (0, 1) dat één lijnelement met het stelsel S gemeen heeft. Ze worden dus afgebeeld op de punten van een rechte (§ 6).

De lijnelementen, waarvan de rechten een waaier met top A vormen en de punten op een rechte b liggen, vormen een stelsel (1, 1), dat met S 3 elementen gemeen heeft en dus afgebeeld wordt op een kromme van de derde graad. Deze kromme is ook de doorsnede van $v\ (A)_3$ en de variëteit V_3^3, die behoort bij de lijnelementen, wier punt P op b ligt.

Volgens § 11 worden de ∞^2 lijnelementen in een vlak β, waarvan de rechten een waaier met top A vormen, afgebeeld op de punten van een kwadratisch oppervlak $O(A, \beta)$ in R_5, dat V_2^4 volgens ϱ^3 snijdt. De kromme is een kromme (2, 1), want de beschrijvenden van $O(A, \beta)$ van het stelsel b zijn bisecanten van V_2^4, dus van ϱ^3.

Dat de rechten van het stelsel b' één punt met ϱ^3 gemeen hebben, blijkt in β als volgt. De punten P van de lijnelementen, die correspondeeren met de punten van ϱ^3, vormen in β een kromme van de vijfde graad (ϱ^5) met een drievoudig punt in A en dubbelpunten in de punten S der singuliere lijnelementen, want er zijn drie lijnelementen in $(A, \beta)_2$ met punt P in A, die behooren bij een punt van V_2^4, terwijl de punten der beide lijnelementen, die behooren bij punten van V_2^4 op de drie rechten

λ gelegen, in de punten S samenvallen. Nu heeft een kegelsnede door de vier punten S en A (§ 11), buiten deze punten, nog één snijpunt P met ϱ^5, dat met de rechte PA het lijnelement vormt, dat afgebeeld wordt op het eenige snijpunt van ϱ^3 en een rechte van het stelsel b'.

Nu bepalen twee stelsels (1, 1) van ∞^1 lijnelementen, behoorende tot de verzameling $(A, \beta)_2$, twee krommen (1, 2) op $O(A, \beta)$. Immers elk der beide rechten b, die doorloopen worden door de punten van de lijnelementen uit de beide stelsels, wordt door elke straal van de waaier in één punt en door elke kegelsnede door de punten S en A, in twee punten gesneden. Beide krommen hebben vier snijpunten. Drie van deze snijpunten vallen in de punten K_1, K_2 en K_3, die voorstellen de singuliere kegels, behoorende bij de drie rechten λ in de waaier. Het overblijvende snijpunt correspondeert met het gemeenschappelijk lijnelement der beide stelsels (1, 2).

Indien de rechte b van een stelsel (1, 1) door A gaat, is de bijbehoorende kromme ontaard in de kegelsnede door de punten K en een beschrijvende van het stelsel b.

Omgekeerd correspondeert met een willekeurige kromme (1, 2) van $O(A, \beta)$, die dus met de kegelsnede door de punten K drie punten gemeen heeft, een verzameling lijnelementen uit $(A, \beta)_2$, waarvan de punten P een kromme van de vierde graad beschrijven met in A een drievoudig punt. Indien een kromme (1, 2) door de punten K gaat is de vierdegraadskromme in β ontaard in vier rechten, waaronder de drie rechten λ. We kunnen dus zeggen, dat de ∞^2 stelsels (1,1) van ∞^1 lijnelementen uit $(A, \beta)_2$ afgebeeld worden op de ∞^2 krommen (1,2) door de punten K_1, K_2 en K_3 op $O(A, \beta)$.

Als aan elke rechte uit de waaier z'n snijpunten met een kromme van de n-de graad worden toegevoegd, krijgen we een stelsel (n, n). Hierbij is de waaier n-voudig. Twee van deze stelsels (n, n) en (m, m) worden respectievelijk afgebeeld op krommen $(n, 2n)$ en $(m, 2m)$ van $O(A, \beta)$, die in de punten K n en m voudige punten hebben. Het aantal snijpunten, buiten de punten K, is gelijk aan $4\,mn - 3\,mn = mn$ hetgeen overeenkomt met het aantal gemeenschappelijke lijnelementen der beide stelsels in β.

Als een kromme van de n-de graad een p-voudig punt in A heeft en we aan elke rechte van de waaier de $n-p$ snijpunten buiten A met de kromme toevoegen, krijgen we een stelsel $(n-p, n)$. De afbeelding is een kromme $(n-p, 2n-p)$ door de punten K. Twee krommen $(n-p, 2n-p)$ en $(m-q, 2m-q)$ behoorende bij twee stelsels $(n-p, n)$ en $(m-q, m)$ van lijnelementen in $(A, \beta)_2$, hebben buiten de punten K nog

$$(n-p)(2m-q)+(m-q)(2n-p)-3(n-p)(m-q)=mn-pq$$

snijpunten, die de afbeelding zijn van de gemeenschappelijke lijnelementen der beide stelsels. De laatste worden bepaald door de $mn-pq$ snijpunten, die de krommen in β buiten A hebben, te combineeren met rechten uit de waaier.

Opmerking: Met behulp van de voorgaande afbeelding kan men de formule, die aangeeft het aantal snijpunten van twee krommen op een kwadratisch oppervlak, afleiden.

Twee krommen (p, q) en (p', q') op een $O(A, \beta)$, zijn de afbeeldingen van verzamelingen lijnelementen uit $(A, \beta)_2$, waarvan de punten P krommen vormen, die in A respectievelijk een $p+q$ en een $p'+q'$ voudig punt hebben, terwijl iedere straal der waaier buiten het punt A in p en p' punten gesneden wordt. De punten S zijn p en p' voudig. Dat er in A een $p+q$ voudig punt aanwezig is, komt doordat de (p, q) kromme de kegelsnede, door de punten K, in $p+q$ punten snijdt. De kromme is namelijk van de graad $p+q$, die $p+q$ snijpunten heeft met het vlak der kegelsnede. Het aantal gemeenschappelijke punten der beide krommen op $O(A, \beta)$ is gelijk aan het aantal gemeenschappelijke punten der beide krommen in β, buiten de punten A en S. De krommen (p, q) en (p', q') op een kwadratisch oppervlak hebben dus

$$(2p+q)(2p'+q')-(p+q)(p'+q')-3pp'=p'q+pq'$$

snijpunten.

De lijnelementen, die men krijgt, door aan elke tangent van een kromme van de n-de graad z'n raakpunt toe te voegen, vormen een stelsel $\{n(n-1), n\}$ dat met het nulstelsel $S\,(2,1)$, door een legioen van O^2 in β bepaald,

$$2n(n-1)+n=n(2n-1)$$

lijnelementen gemeen heeft, zoodat de afbeelding in R_5 een kromme van de graad $n(2n-1)$ is.

De afbeelding (ϱ^x) kan ook als volgt gevonden worden. Het aantal lijnelementen, dat de verzameling gemeen heeft met de verzameling lijnelementen waarvan de rechten een lineair complex vormen, is gelijk aan het aantal gemeenschappelijke punten van ϱ^x met V_4^2, voorzoover deze geen singuliere oppervlakken voorstellen. Daar het lineair complex in β een waaier van rechten bepaalt, is het aantal gemeenschappelijke lijnelementen gelijk aan $n(n-1)$. Nu vormen de lijnelementen in β, die behooren bij de kegels, wier toppen op l liggen een nulstelsel S' (3,2), want door een willekeurig punt A van β gaan drie rechten λ, die bij kegels met top op b behooren. De drie bij deze kegels behoorende vlakken π, bepalen de rechten der lijnelementen in β, behoorende bij het punt A. Verder gaan door elke rechte b van β twee vlakken π, waarbij twee kegels behooren, terwijl deze op hun beurt rechten λ bepalen, wier snijpunten met de rechte b de beide punten geven, die met b lijnelementen vormen, behoorende bij kegels met toppen op l. Nu heeft S' met het stelsel $\{n(n-1), n\}$

$$3n(n-1)+2n=3n^2-n$$

lijnelementen gemeen. We kunnen nu x bepalen uit de volgende vergelijking:

$$2x-(3n^2-n)=n(n-1),$$

dus $x=n(2n-1)$.

Voor n $=1$, krijgen we de afbeelding van de lijnelementen van een rechte.

Indien de n-de graads kromme in α gelegen is, worden de lijnelementen, waarvan de punten P niet op de rechte l liggen, afgebeeld op kegels, die volgens de rechten der lijnelementen aan α raken. Nu vormen de dubbelrechten van een legioen in α de tangenten aan een kegelsnede K_1. De kegelsnede K_1 en ϱ^n hebben $2n(n-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen. Ieder der n lijnelementen, waarvan het punt P op l ligt, is singulier en wordt afgebeeld op een rechte. De afbeelding van de verzameling lijnelementen is dus weer een kromme van de graad n

$(2n-1)$, die ontaard is in een bestanddeel van de graad $2n$ $(n-1)$ en n rechten.

Indien de kromme, ϱ^n in β, d dubbelpunten heeft, wordt de klasse verlaagd met $2d$, zoodat de verzameling lijnelementen een stelsel $\{n(n-1)-2d, n\}$ vormen, dat met het nulstelsel S

$$2n(n-1)-4d+n=n(2n-1)-4d$$

elementen gemeen heeften dus afgebeeld wordt op een kromme van de graad $n(2n-1)-4d$.

Nemen we voor ϱ^n b.v. n rechten, dan is dit een kromme met $\frac{1}{2}n(n-1)$ dubbelpunten. De bijbehoorende verzameling lijnelementen wordt afgebeeld op een kromme van de graad

$$n(2n-1)-2n(n-1)=n.$$

De kromme is ontaard in n bisecanten van V_2^4.

Indien ϱ^n het maximum aantal dubbelpunten heeft is de afbeelding van de bijbehoorende verzameling lijnelementen een kromme van de graad

$$n(2n-1)-2(n-1)(n-2)=5n-4.$$

We willen thans nog onderzoeken de afbeelding van een nulstelsel (μ, ν) van ∞^2 lijnelementen in β. De lijnelementen door een kluwen in β bepaald vormen een stelsel $(2, 5)$ van ∞^1 lijnelementen, dat met het nulstelstel $2\mu+5\nu$ exemplaren gemeen heeft. De afbeelding van het nulstelsel (μ, ν) is in R_5 dus een oppervlak van de graad $2\mu+5\nu$.

Bij een nulstelsel $(1, 0)$, de verzameling lijnelementen $(A, \beta)_2$, behoort dus een O_2^2.

Bij een nulstelsel $(0, 1)$ behoort een O_2^5. Dit laatste is ook als volgt in te zien. Het nulstelsel $(0, 1)$, waarvan de lijnelementen die zijn, waarvan het punt P op een rechte s ligt, is gemeenschappelijk aan een verzameling lijnelementen, waarvan het punt P op s ligt, terwijl de rechte p verder willekeurig is en de lijnelementen, gedragen door de rechten van een axiaal complex, waarvan de as a in β ligt, verminderd met de verzameling lijnelementen, waarvan het punt P samenvalt met het snijpunt van s en a. De gezochte afbeelding in R_5 is dus de doorsnede van een V_3^3 en een V_4^2, verminderd met een R_2, dus een O_2^5.

De lijnelementen, gedragen door de tangenten van een kromme van de graad n, vormen een nulstelsel $\{n(n-1), 0\}$, dat dus afgebeeld wordt op een $O_2^{2n(n-1)}$, dat V_2^4 volgens een kromme van de graad $3n(n-1)$ snijdt. Een rechte u wordt door $n(n-1)$ tangenten gesneden, evenals een rechte v. Door een rechte u of v gaan dus $n(n-1)$ vlakken, die een tangent van ϱ^n bevatten. De raakpunten vormen op Ω dus een kromme $\{n(n-1), n(n-1)\}$ en de overeenkomstige punten op V_2^4, die de bij de raakpunten behoorende kegels voorstellen, dus ook een kromme $\{n(n-1), n(n-1)\}$, die van de graad $3n(n-1)$ is.

Indien ϱ^n d dubbelpunten heeft, is de afbeelding een $O_2^{2n(n-1)-4d}$, die V_2^4 volgens een kromme van de graad $3n(n-1)-6d$ snijdt.

De verzameling lijnelementen, waarvan het punt P een kromme van de graad n doorloopt, is een nulstelsel $(0, n)$, dat zich dus afbeeldt op een O_2^{5n}. Van de ∞^1 lijnelementen in β, die behooren bij de kegels van een beschrijvende ϱ van V_2^4, vormen de rechten p een waaier, met als top het snijpunt van de bij de bundel ϱ behoorende rechte u met β en de punten P een kegelsnede namelijk de doorsnede van β met de λ kegel behoorende bij de kegels van de bundel ϱ. Er zijn dus $2n$ lijnelementen, die zich op een kegel van V_2^4 afbeelden en waarvan het vlak π door een bepaalde rechte u gaat.

Om de graad van de meetkundige plaats der rechten λ, die behooren bij de kegels van een kromme ν^2 op V_2^4, te vinden, bepalen we de doorsnede dezer meetkundige plaats met een willekeurig vlak γ. Deze doorsnede is de meetkundige plaats der polen van de snijlijn s van α met γ ten opzichte van de kegelsneden, volgens welke de verzameling ν^2 het vlak γ snijdt. Deze meetkundige plaats is een kromme van de vierde graad, waartoe echter de rechte behoort, die de poollijn is van s ten opzichte van de doorsnede van γ met de kegel, wiens top in het snijpunt van γ met l ligt. Deze rechte is geen rechte λ. De meetkundige plaats der rechten λ is dus een regeloppervlak van de derde graad.

Op Ω vormen de raakpunten der vlakken π, behoorende bij kegels van V_2^4, die correspondeeren met een lijnelement van het stelsel $(0, n)$ een kromme $(2n, 3n)$. O_2^5 snijdt dus V_2^4 volgens een kromme $(2n, 3n)$, die van de graad $7n$ is (§ 7).

§ 20. *De afbeelding der stelsels S_1, S_2, S_3 en S_4.*

We zullen nu onderzoeken de afbeelding van een stelsel S_1 (p, n) van ∞^1 lijnelementen, waarvan de rechten een regeloppervlak van de graad p en de punten een kromme van de graad n beschrijven; een stelsel S_2 (α, β, γ) van ∞^2 lijnelementen, waarvan de punten een oppervlak van de graad α en de rechten een congruentie met stergraad β en veldgraad γ vormen; een stelsel S_3 (φ, ψ, χ) van ∞^3 lijnelementen, waarbij φ, ψ en χ respectievelijk zijn de graad van het complex, gevormd door de rechten der lijnelementen, het aantal exemplaren met gegeven punt en de graad der kromme, gevormd door de punten P van de lijnelementen in een plat vlak; en tenslotte van een stelsel S_4 (μ, ν) van ∞^4 lijnelementen, waarbij μ voorstelt de graad van de kegel, gevormd door de rechten, die met een gegeven punt lijnelementen uit de verzameling vormen en ν het aantal lijnelementen met gegeven rechte.

We willen beginnen met de afbeelding te zoeken van een stelsel lijnelementen, waarvan de rechten een kwadratische kegel en de punten P een kromme van de graad $2p$ vormen. Elke beschrijvende draagt p lijnelementen.

Het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van deze verzameling met de lijnelementen, die gedragen worden door de stralen van een lineair complex, is gelijk aan $2p$. Verder vormen de punten S der lijnelementen (S, s), die correspondeeren met kegels van V_2^4, wier rechten beschrijvenden zijn van de kegel, een kromme van de tiende graad. Immers de top T van de kegel draagt drie waaiers van lijnelementen (S, s) en verder draagt iedere beschrijvende van de kegel twee lijnelementen (S, s). De punten P en de punten S vormen op de kegel dus respectievelijk $(p, 0)$ en $(2, 6)$ krommen. Het aantal snijpunten dezer krommen is gelijk aan $4p + 6p = 10p$. Indien de te onderzoeken verzameling zich afbeeldt op een kromme van de graad x is het aantal snijpunten $(2x)$ met een V_4^2 gelijk aan $2p + 10p = 12p$, m.a.w. de verzameling lijnelementen wordt afgebeeld op een kromme van de graad $6p$.

We kunnen ook als volgt tot dit resultaat komen. De gezochte kromme ligt in de R_3, wier punten O^2 voorstellen, ten opzichte waarvan T geconjugeerd is met l. Nu correspondeeren de punten van een plat vlak van R_3 met de O^2 van een net. De punten van de bijbehoorende lijnelementen vormen een oppervlak van de derde graad, met een dubbelpunt in T. Op de kegel ontstaat zoodoende een kromme (1,4), die met de kromme $(p, 0)$ juist $6p$ snijpunten heeft.

We zullen nu onderzoeken de afbeelding van een stelsel lijnelementen, waarvan de rechten een kwadratische regelschaar (R) vormen en de punten P een kromme van de n-de graad. Elke rechte van R wordt door de kromme in p punten gesneden, die met deze rechte evenzooveel lijnelementen van de verzameling vormen. De beschrijvenden van de andere regelschaar (R'), gedragen door het oppervlak (O), dat gevormd wordt door de punten van R, worden door de kromme in $n-p$ punten gesneden.

We beschouwen nu de lijnelementen (S, s), die gedragen worden door de stralen van een bilineaire congruentie, wier richtlijnen beschrijvenden van R' zijn. Iedere straal draagt twee lijnelementen (S, s), terwijl ieder punt der richtlijnen een punt S is van drie rechten s, zoodat de punten S een oppervlak van de 8-ste graad vormen. Nu behooren bij elke beschrijvende van R twee punten S. Deze punten vormen een kromme, die elke beschrijvende van R' in 8 punten snijdt. De verzameling lijnelementen, die we beschouwen, bevat dus

$$2(n-p)+8p=2n+6p$$

lijnelementen (S, s).

Nu heeft de verzameling lijnelementen, gedragen door de stralen van een lineair complex $2p$ lijnelementen gemeen met de verzameling lijnelementen waarvan we de afbeelding (een kromme ϱ^x) zoeken.

Het aantal snijpunten van $V_4{}^2$, de afbeelding van de lijnelementen van het complex, met ϱ^x is dus gelijk aan

$$2n+8p=2x.$$

Hieruit volgt dat de lijnelementen, waarvan de rechten een kwadratische regelschaar vormen en ieder p lijnelementen dragen, terwijl de punten P een kromme van de n-de graad beschrijven, in R_5 worden afgebeeld op een kromme van de graad $n + 4p$, die V_2^4 in $2n + 6p$ punten snijdt. De kromme heeft, omdat de regelschaar 6 rechten λ bevat, 6 punten met V_3^6, buiten V_2^4, gemeen. Deze punten zijn p-voudige punten van de kromme.

De graad van de kromme kan op eenvoudiger manier gevonden worden, door het aantal snijpunten van ϱ^x met een R_4 te bepalen.

Beschouwen we weer de lijnelementen van de verzameling S_4, die behoort bij R_4, welke gedragen worden door de stralen van een bilineaire congruentie, waarvan de richtlijnen beschrijvenden van R' zijn.

De punten P vormen een oppervlak waarvan de beide richtlijnen der congruentie dubbelrechten zijn, want elk punt der richtlijnen vormt met twee stralen uit de congruentie lijnelementen, die zich afbeelden op punten van R_4. Verder draagt een willekeurige straal van de congruentie één zoo'n lijnelement, zoodat de punten P een oppervlak van de vijfde graad vormen.

Elke beschrijvende rechte van R draagt één lijnelement van van S_4.

Elke beschrijvende rechte van R' snijdt bovengenoemd oppervlak in vijf punten, die met de door deze punten gaande stralen der bilineaire congruentie, die tevens beschrijvenden van R zijn, lijnelementen van S_4 vormen.

De punten P van de lijnelementen van S_4, gedragen door de beschrijvenden van R, vormen op het kwadratisch oppervlak, dat R draagt, een kromme (1,5). Deze heeft met de kromme $(p, n-p)$ een aantal van $n + 4p$ punten gemeen, waaruit volgt dat de afbeelding van de verzameling lijnelementen, die we beschouwen, een kromme van de graad $n + 4p$ is.

De afbeelding van een stelsel S_1 (p, n) van ∞^1 lijnelementen, waarvan de rechten een regeloppervlak van de p^e graad en de punten een kromme van de n-de graad beschrijven, kan als volgt bepaald worden. We beschouwen een stelsel S_4 (0,1) van ∞^4 lijnelementen, waarvan de punten P in een gegeven vlak β gelegen zijn. Iedere rechte van R_3 draagt dus één lijnelement van S_4 (0,1). Verder een stelsel S_4 (1,0) van ∞^4 lijnelementen, waarvan de rechten p een lineair complex vormen. Ieder punt van R_3 is dus toegevoegd aan ∞^1 rechten, die een waaier vormen. De verzamelingen worden in R_5 respectievelijk afgebeeld op een V_4^3 en een V_4^2.

Nu heeft S_4 (0,1) met S_1 (p, n) een aantal van n elementen gemeen. De $3p$ rechten λ, die het regeloppervlak bevat, dragen elk één lijnelement van S_4 (0,1) en één lijnelement van S_1. We stellen dat S_1 y lijnelementen (S, s) bevat. De afbeelding van S_1 is een kromme (ϱ^x), die met V_4^3, buiten V_3^6, n en op V_3^6, buiten V_2^4, $3p$ en op V_2^4 y punten gemeen heeft. Verder heeft S_4 (1,0) met S_1 juist p lijnelementen gemeen. Beide verzamelingen zullen in het algemeen geen lijnelementen gemeen hebben, die eenzelfde λ tot rechte hebben. De variëteit V_4^2 heeft dus met ϱ^x, op V_2^4, y punten gemeen, op V_3^6, buiten V_2^4, geen en verder nog p punten gemeen. De waarden van x en y vindt men uit de volgende vergelijkingen, $3x = n + 3p + y$ en $2x = p + y$.

Het stelsel S_1 (p, n) wordt dus afgebeeld op een kromme van de graad $n + 2p$, die V_2^4 in $2n + 3p$ en V_3^6, buiten V_2^4, in $3p$ punten snijdt.

De lijnelementen van een stelsel S_2 (α, β, γ) worden afgebeeld op de punten van een tweedimensionale variëteit (V_2^x). De lijnelementen, waarvan het punt P op een gegeven rechte a ligt, een stelsel S_3 (1, 0, 0), worden in R_5 afgebeeld op een V_3^3, die V_2^4 snijdt volgens een kromme (2,3). Immers vormen de rechten λ, die behooren bij een rechte u een kwadratische kegel die a in twee punten snijdt en de rechten λ, die behooren bij een rechte v een regelschaar van de derde graad, die a in drie punten snijdt.

Het aantal snijpunten van V_2^x met een beschrijvende ϱ van V_2^4, of wel het aantal lijnelementen uit S_2 (α, β, γ), waarvan de rechten p een gegeven rechte u snijden en de bijbehoorende punten P op de bijbehoorende λ kegel liggen, bepalen we als volgt. Indien T het snijpunt van u met l is, projecteeren we het stelsel S_2 (α, β, γ) en de lijnelementen waarvan de rechten p de rechte u snijden en de punten P op de bij u behoorende λ kegel liggen op een willekeurig vlak β. In β ontstaan een stelsel S_2 (α, γ) van ∞^2 lijnelementen en een stelsel S_1 (1,2) van

∞^1 lijnelementen, die $\alpha + 2\gamma$ lijnelementen gemeen hebben. Een gemeenschappelijk exemplaar van de projecties wijst op een gemeenschappelijk exemplaar van de geprojecteerde verzamelingen en omgekeerd, zoodat V_2^x een rechte u in $\alpha + 2\gamma$ punten snijdt.

We stellen dat een kegelsnede ν^2 van V_2^4 door V_2^x in y punten gesneden wordt.

Nu heeft het stelsel S_3 (1, 0, 0) α lijnelementen met S_2 (α, β,γ) gemeen. Het complex der rechten λ, de congruentie (β, γ) en het axiale complex met as a hebben $3\beta + 3\gamma$ rechten gemeen, wat wijst op het aantal snijpunten van V_3^3 en V_2^x op V_3^6, buiten V_2^4.

Het aantal snijpunten van beide variëteiten op V_2^4 is gelijk aan $2y + 3(\alpha + 2\gamma)$, zoodat we de volgende vergelijking krijgen:

$$3x = \alpha + 3\beta + 3\gamma + 2y + 3(\alpha + 2\gamma).$$

De lijnelementen gedragen door de rechten van een schoof met top A, een stelsel S_3 (0, 1, 0) worden afgebeeld op een vlakke R_3, die V_2^4 volgens een kromme (1,1) snijdt. Nu hebben S_2 (α, β, γ) en S_3 (0, 1, 0) een aantal van β lijnelementen gemeen. In R_5 hebben V_2^x en R_3, op V_2^4, $y + \alpha + 2\gamma$ en op V_3^6, buiten V_2^4, in het algemeen geen snijpunten. Dit geeft aanleiding tot de volgende vergelijking:

$$\alpha = \beta + y + \alpha + 2\gamma.$$

Uit beide vergelijkingen volgt

$$x = 2\alpha + \beta + 5\gamma \quad \text{en} \quad y = \alpha + 3\gamma.$$

De rechten λ in de congruentie (β, γ) gelegen, vormen een regelschaar van de graad $3\beta + 3\gamma$. De bijbehoorende kegels vormen op V_3^6 een kromme (ϱ^z). Om de graad van deze kromme te bepalen, zoeken we het aantal snijpunten met een R_4. Nu vormen de rechten λ, die behooren bij de kegels van V_3^6, in een R_4 gelegen, een congruentie (3,6), want voor een bundel O^2 uit R_4, is een punt A geconjugeerd met α. Deze bundel bevat drie kegels van V_3^6. Verder vormen de lijnelementen, die behooren bij R_4, in een vlak β een stelsel (2,1), dat 7 singuliere rechten heeft. Hierbij is volgens § 16 één rechte c. De overige zes rechten zijn rechten λ. De congruentie (β, γ) bevat dus $3\beta + 6\gamma$ rechten λ, die in het stelsel lijnelementen, behoorende bij een R_4, gelegen zijn.

$V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$ heeft buiten $\varrho^{(\alpha+2\gamma,\, \alpha+3\gamma)}$ nog een aantal punten met V_2^4 gemeen, dat we op de volgende manier zullen bepalen.

Het aantal lijnelementen, gemeenschappelijk aan het stelsel $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ en een stelsel $S_3(0, 0, 1)$, de lijnelementen waarvan de rechte in een gegeven plat vlak ligt, is gelijk aan het gemeenschappelijk aantal punten der beide bijbehoorende variëteiten in R_5, voorzoover het geen singuliere punten zijn.

Nu wordt het stelsel $S_3(0, 0, 1)$ afgebeeld op een V_3^3, die V_2^4 bevat. Het aantal snijpunten van deze variëteit met $V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$ is gelijk aan $6\alpha + 3\beta + 15\gamma$. De stelsels $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ en $S_3(0, 0, 1)$ hebben γ elementen gemeen, zoodat $6\alpha + 3\beta + 14\gamma$ punten singulier moeten zijn. Deze punten moeten alle op V_2^4 liggen, omdat in het algemeen geen der rechten, door de congruentie (β, γ) in het vlak van het stelsel $S_3(0, 0, 1)$ bepaald, behooren tot het complex der rechten λ.

Bovenstaande geldt voor alle waarden van α, β en γ, dus ook voor $\beta = 0$. We krijgen dan als afbeelding van het stelsel $S_2(\alpha, 0, \gamma)$ een $V_2^{2\alpha+5\gamma}$, die V_2^4 volgens een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ snijdt. $V_2^{2\alpha+5\gamma}$ heeft deze kromme met V_3^3 gemeen, maar uit het feit, dat het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van $S_2(\alpha, 0, \gamma)$ en $S_3(0, 0, 1)$ gelijk is aan het aantal niet singuliere snijpunten der bijbehoorende variëteiten, volgde reeds dat $V_2^{2\alpha+5\gamma}$ en V_3^3 op V_2^4, $6\alpha + 14\gamma$ snijpunten hebben. We vinden dus dat, indien een variëteit de kromme $(\alpha + \gamma, \alpha + 2\gamma)$ bevat, dit voor $6\alpha + 14\gamma$ snijpunten van de variëteit met $V_2^{2\alpha+5\gamma}$ geldt.

Keeren we nu terug naar het algemeene geval $(\beta \neq 0)$, dan blijkt dat van de $6\alpha + 3\beta + 14\gamma$ snijpunten er $6\alpha + 14\gamma$ het gevolg zijn van de gemeenschappelijke snijkromme $(\alpha + \gamma, \alpha + 2\gamma)$, zoodat $V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$ buiten deze kromme nog 3β punten met V_2^4 gemeen moet hebben.

Resumeerende is dus de afbeelding van $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ een tweedimensionale variëteit van de graad $2\alpha + \beta + 5\gamma$, die V_2^4 in

3β punten en volgens een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ snijdt, die dus van de graad $3\alpha + 7\gamma$ is, en V_3^6 volgens een kromme van de graad $3\beta + 6\gamma$.

De lijnelementen van een stelsel S_3 (φ, ψ, χ) worden afgebeeld op een driedimensionale variëteit (V_3^x).

De lijnelementen, waarvan het punt P in een gegeven punt A valt, een stelsel S_2 (0, 1, 0), hebben tot afbeelding een plat vlak $\nu(A)_2$, dat V_2^4 in drie punten S snijdt. S_3 (φ, ψ, χ) en S_2 (0, 1, 0) hebben ψ elementen gemeen. Verder gaan er 3φ rechten λ door A, die tot het complex, gevormd door de rechten uit S_3, behooren. Dit wijst op evenzooveel snijpunten van V_3^x en $\nu(A)_2$ op V_3^6 gelegen. De variëteit V_3^x bevat V_2^4 χ-voudig, daar elk vlak π juist χ lijnelementen bevat, waarvan het punt P op de bij π behoorende rechte λ ligt. We vinden dus

$$x = 3\varphi + \psi + + 3\chi.$$

Om de graad van het oppervlak te bepalen, volgens hetwelk V_3^6 door V_3^x gesneden wordt, bepalen we de graad van de regelschaar, gevormd door de rechten λ, behoorende bij de kegels van V_3^6 in een R_3 van R_5 gelegen. Nu heeft R_3 4 punten met V_2^4 gemeen, terwijl een kluwen in α vier dubbelrechten heeft, zoodat l door 8 rechten λ gesneden wordt. De regelschaar is van de achtste graad en heeft 8φ rechten met het complex der rechten p uit S_3 gemeen.

Het complex der rechten p van het stelsel S_3 (φ, ψ, χ), heeft met elke kwadratische kegel, gevormd door rechten λ, die behooren bij de kegels van een beschrijvende ϱ van V_2^4, 2φ en met het regelvlak van de derde graad, gevormd door de rechten λ, behoorende bij de kegels van een kegelsnede ν^2 van V_2^4, 3φ rechten gemeen.

Verder vormt elk punt van l met ψ rechten evenzooveel lijnelementen, die afgebeeld worden op ψ punten van een rechte ϱ.

Iedere beschrijvende ϱ van V_2^4 wordt dus in $2\varphi + \psi$ punten gesneden door $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$. We stellen dat iedere beschrijvende kegelsnede ν^2 van V_2^4 door de variëteit in $3\varphi + y$ punten gesneden wordt.

Om y te kunnen bepalen, zoeken we het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van het stelsel S_3 (φ, ψ, χ) met de verzameling lijnelementen, gedragen door de rechten van een waaier, een stelsel S_2 (1, 0, 0). Dit aantal is gelijk aan φ, want het complex der rechten p in het stelsel S_3, bepaalt φ stralen in de waaier.

Het stelsel S_2 (1, 0, 0) wordt afgebeeld op een V_2^2, die V_2^4 volgens een kromme (1,1) snijdt.

V_2^2 en $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$ hebben $6\varphi + 2\psi + 6\chi$ snijpunten, waarvan van φ niet singulier. (Deze niet singuliere punten wijzen op de gemeenschappelijke elementen van S_2 en S_3.) De $5\varphi + 2\psi + 6\chi$ singuliere punten liggen op V_2^4 omdat het complex der rechten λ en het complex der rechten p in het stelsel S_3 ,in het algemeen geen gemeenschappelijke stralen in de waaier van het stelsel S_2 hebben.

Nu ligt de kromme (1,1), die dus van de derde graad is, op V_2^4, terwijl V_2^4 χ-voudig op $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$ ligt. Dit telt voor 6χ snijpunten.

De krommen $(2\varphi + \psi, 3\varphi + y)$ en (1,1) hebben $5\varphi + \psi + y$ snijpunten, zoodat

$$5\varphi + 2\psi + 6\chi = 6\chi + 5\varphi + \psi + y$$

moet zijn. Hieruit volgt $y = \psi$.

Resumeerende is dus de afbeelding van een stelsel S_3 (φ, ψ, χ) een driedimensionale variëteit van de graad $3\varphi + \psi + 3\chi$, die V_2^4 χ-voudig bevat, V_3^6 volgens een oppervlak van de graad 8φ en V_2^4 volgens een kromme $(2\varphi + \psi, 3\varphi + \psi)$ snijdt.

De afbeelding van een stelsel S_4 (μ, ν) van ∞^4 lijnelementen is een vierdimensionale variëteit (V_4^x).

Daar de rechten λ elk ν lijnelementen van S_4 dragen, bevat V_4^x de V_3^6 juist ν-voudig.

We stellen dat V_4^x de V_2^4 y-voudig bevat.

Om x en y te vinden beschouwen we de lijnelementen van een stelsel S_1 (0,1), de lijnelementen met gegeven rechte. Het stelsel S_1 en het stelsel S_4 hebben ν elementen gemeen. Nu wordt S_1 (0,1) afgebeeld op een bisecant van V_2^4, die x punten met V_4^x gemeen heeft. Van deze punten zijn de beide snijpunten van de bisecant met V_2^4, ieder y maal geteld, singulier. Dus $x = \nu + 2y$.

Verder worden de lijnelementen met gegeven punt P, waarvan de rechten een waaier vormen, een stelsel S_1 (1,0), afgebeeld op een kegelsnede die V_2^4 in drie en V_3^6, buiten V_2^4, ook in drie punten snijdt. De waaier bevat namelijk drie rechten λ. Het stelsel S_1 (1,0) heeft met S_4 (μ, ν) μ elementen gemeen. V_4^x en de kegelsnede hebben buiten V_3^6 μ, op V_2^4 $3y$ en op V_3^6, buiten V_2^4, 3ν snijpunten, zoodat $2x = \mu + 3y + 3\nu$.

Uit beide gevonden vergelijkingen volgt $x = 2\mu + 3\nu$ en $y = \mu + \nu$, zoodat we dus kunnen zeggen:

De lijnelementen van een stelsel S_4 (μ, ν) worden afgebeeld op de punten van een vierdimensionale variëteit van de graad $2\mu + 3\nu$, die V_2^4 $(\mu + \nu)$-voudig en V_3^6 ν-voudig bevat.

§ 21. *De afleiding van enkele formules.*

Het onderzoek naar het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van een stelsel S_4 (μ, ν) en een stelsel S_1 (p, n), komt neer op het bepalen van het aantal snijpunten buiten V_3^6, van een $V_4^{2\mu+3\nu}$, die V_2^4 $(\mu + \nu)$-voudig en V_3^6 ν-voudig bevat en een kromme van de graad $2p + n$, die V_2^4 in $3p + 2n$ en V_3^6, buiten V_2^4, in $3p$ punten snijdt.

Dit aantal is gelijk aan

$$(2\mu + 3\nu)(n + 2p) - (\mu + \nu)(3p + 2n) - 3\nu p = \mu p + \nu n.$$

Een stelsel S_4 (μ, ν) van ∞^4 lijnelementen en een stelsel S_1 (p, n) van ∞^1 lijnelementen, hebben $\mu p + \nu n$ lijnelementen gemeen.

Het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van twee stelsels S_3 (φ, ψ, χ) en S_2 (α, β, γ) is gelijk aan het aantal niet singuliere snijpunten van een $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$, die V_2^4 χ-voudig bevat, V_3^6 volgens een oppervlak van de graad 8φ en V_2^4 volgens een kromme $(2\varphi + \psi, 3\varphi + \psi)$ snijdt en een $V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$, die V_2^4 in 3β punten en volgens een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ snijdt en V_3^6 volgens een kromme van de graad $3\beta + 6\gamma$.

Dit aantal is gelijk aan $(3\varphi + \psi + 3\chi)(2\alpha + \beta + 5\gamma) - \{(\alpha + 2\gamma)(3\varphi + \psi) + (\alpha + 3\gamma)(2\varphi + \psi) + 3\beta\chi + 2(3\alpha + 7\gamma)\chi + 3(\beta + \gamma)\varphi\} = \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi$.

Reeds vroeger is afgeleid, dat een kromme $(2\varphi + \psi, 3\varphi + \psi)$ en een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ op V_2^4

$$(\alpha + 2\gamma)(3\varphi + \psi) + (\alpha + 3\gamma)(2\varphi + \psi)$$

snijpunten hebben. De 3β snijpunten van $V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$ met V_2^4, zijn χ-voudige punten van $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$, zoodat beide variëteiten in deze punten $3\beta\chi$ snijpunten hebben. Verder hebben we in de vorige paragraaf gezien dat het gemeenschappelijk zijn van de kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ aan beide variëteiten, voor $2(3\alpha + 7\gamma)$ snijpunten geldt. Bovendien bevat $V_3^{3\varphi+\psi+3\chi}$ de kromme χ-voudig. Tenslotte stelt $3(\beta + \gamma)\varphi$ het aantal snijpunten voor, dat beide variëteiten op V_3^6, buiten V_2^4, hebben. Dit is namelijk gelijk aan het aantal rechten dat de congruentie (β, γ), het complex van de rechten uit het stelsel $S_3(\varphi, \psi, \chi)$ en het complex der rechten λ gemeen hebben. We vinden dus:

Een stelsel $S_3(\psi, \varphi, \chi)$ van ∞^3 lijnelementen en een stelsel $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ van ∞^2 lijnelementen hebben $\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi$ lijnelementen gemeen.

We vragen nu naar het gemeenschappelijke stelsel lijnelementen van een stelsel $S_4(\mu, \nu)$ en een stelsel $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$.

Eerst zullen we echter bewijzen dat een kromme van de graad $2p + n$ in R_5, die V_2^4 in $3p + 2n$ en V_3^6, buiten V_2^4, in $3p$ punten snijdt, de afbeelding is van een stelsel $S_1(p, n)$ van ∞^1 lijnelementen.

De meetkundige plaats van de poollijnen van l ten opzichte van de O^2, die afgebeeld worden op de punten van ϱ^{2p+n}, is een regelvlak van de graad $4p + 2n$, terwijl de polen van α ten opzichte van deze O^2, een kromme van de graad $6p + 3n$ bepalen, op het regelvlak gelegen.

We gaan nu de lijnelementen, die correspondeeren met de singuliere punten van de kromme, uit het verkregen stelsel van lijnelementen verwijderen. De $3p + 2n$ punten, volgens welke ϱ^{2p+n} V_2^4 snijdt, bepalen $3p + 2n$ vlakken π. Indien deze uit de oorspronkelijke regelschaar verwijderd worden, blijft er een regelschaar van de graad p over. De $6p + 2n$ punten, volgens welke de kromme V_3^6 snijdt, bepalen O^2 ten opzichte waarvan de meetkundige plaats der polen van α bestaat uit $6p + 2n$ rechten λ. Na verwijdering van deze rechten uit de oorspronkelijk gevonden kromme, die van de graad $6p + 3n$ was, blijft er een kromme van de graad n over, zoodat iedere kromme van de graad $2p + n$, die V_3^6 in $6p + 2n$ punten snijdt, waarvan er $3p + 2n$ op V_2^4 liggen, de afbeelding is van een stelsel S_1 (p, n) van ∞^1 lijnelementen.

Een stelsel S_4 (μ, ν) werd afgebeeld op een $V_4^{2\mu+3\nu}$, die V_2^4 $(\mu + \nu)$-voudig en V_3^6 ν-voudig bevat en een stelsel $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ op een $V_2^{2\alpha+\beta+5\gamma}$, die V_2^4 snijdt in 3β punten en volgens een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$ en V_3^6, buiten V_2^4, volgens een kromme van de graad $3\beta + 6\gamma$.

Niet singuliere gemeenschappelijke punten van beide variëteiten wijzen op gemeenschappelijke lijnelementen van de stelsels S_4 (μ, ν) en S_2 (α, β, γ).

Nu hebben beide variëteiten een kromme van de graad $(2\mu + 3\nu)$ $(2\alpha + \beta + 5\gamma)$ gemeen. Van deze kromme ligt echter een deel op V_2^4 en een deel op V_3^6, buiten V_2^4, en wel een kromme $(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma)$, die van de graad $3\alpha + 7\gamma$ is, $(\mu + \nu)$-voudig op V_2^4 en een kromme van de graad $3\beta + 6\gamma$, ν-voudig op V_3^6, buiten V_2^4. Na verwijdering van deze krommen uit de snijkromme der beide variëteiten, blijkt dat deze, buiten V_3^6, een kromme van de graad $(2\mu + 3\nu)$ $(2\alpha + \beta + 5\gamma) - (\mu + \nu)$ $(3\alpha + 7\gamma) - \nu$ $(3\beta + 6\gamma) = \mu\alpha + 2\mu\beta + 3\mu\gamma + 3\nu\alpha + 2\nu\gamma$ is.

Om het gemeenschappelijke stelsel S_1 van S_4 (μ, ν) en $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ verder te bepalen, is het noodig, dat het aantal snijpunten van deze kromme (ϱ) met V_2^4 en met V_3^6, buiten V_2^4, bekend is.

We stellen dat de kromme V_2^4 in x en V_3^6, buiten V_2^4, in y punten snijdt. De waarden van x en y bepalen we als volgt: We zoeken het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van de stelsels S_4 (μ, ν), S_2 (α, β, γ) en een stelsel S_4 $(1, 0)$. Het laatste stelsel wordt gevormd door de lijnelementen, gedragen door de stralen van een lineair complex.

Nu hebben de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 $(1, 0)$ een stelsel $S_3(\nu, \mu, \mu + \nu)$ van ∞^3 lijnelementen gemeen, want elke straal van het lineaire complex draagt ν lijnelementen, dus het lineaire complex wordt in het gemeenschappelijke stelsel ν-voudig geteld.

Verder is een willekeurig punt P van R_3, punt van lijnelementen van het stelsel S_4 (μ, ν), waarvan de rechten een kegel van de graad μ vormen en punt van lijnelementen van het stelsel S_4 $(1,0)$, waarvan de rechten een waaier vormen, zoodat het punt P met μ rechten lijnelementen vormt, die behooren tot het gemeenschappelijke stelsel.

In een willekeurig plat vlak zijn de lijnelementen van $S_4(1,0)$ die, welke gedragen worden door de stralen van een waaier. Elke straal van de waaier draagt ν elementen uit het stelsel $S_4(\mu, \nu)$, terwijl dit stelsel de top van de waaier aan μ rechten van de waaier toevoegt. De kromme, gevormd door de punten P, behoorende bij lijnelementen van het gevraagde stelsel in een gegeven vlak, is dus van de graad $\mu + \nu$.

Het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van de stelsels $S_4(\mu, \nu)$, $S_4(1,0)$ en $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ is gelijk aan het aantal gemeenschappelijke, niet singuliere punten van de bijbehoorende variëteiten in R_5.

V_4^2, de afbeelding van het stelsel $S_4(1,0)$, bevat V_2^4 en dus ook de x snijpunten van de kromme ϱ met V_2^4. De variëteit V_4^2 zal in het algemeen geen der snijpunten y van ϱ met V_3^6, buiten V_2^4, bevatten, omdat V_3^6 niet op V_4^2 ligt, doch slechts volgens een oppervlak gesneden wordt. Nu is het aantal gemeenschappelijke lijnelementen der drie stelsels gelijk aan het aantal gemeenschappelijke punten van de variëteit V_4^2 en de kromme ϱ, verminderd met x. Het gemeenschappelijk aantal lijnelementen van de stelsels $S_4(\mu, \nu)$, $S_4(1,0)$ en $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ is gelijk aan dat van de stelsels $S_3(\nu, \mu, \mu + \nu)$ en $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$, dus $\nu\alpha + \mu\beta + \mu\gamma + \nu\gamma$ lijnelementen.

We krijgen de volgende vergelijking:

$$\nu\alpha + \mu\beta + \mu\gamma + \nu\gamma = 2(\mu\alpha + 2\mu\beta + 3\mu\gamma + 3\nu\alpha + 2\nu\gamma) - x,$$

waaruit volgt,

$$x = 2\mu\alpha + 3\mu\beta + 5\mu\gamma + 5\nu\alpha + 3\nu\gamma.$$

Om het getal y te bepalen, merken we op, dat het aantal gemeenschappelijke lijnelementen van de stelsels $S_4(\mu, \nu)$, $S_4(0,1)$ (dit zijn de lijnelementen waarvan P in een gegeven vlak β ligt) en $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$ gelijk is aan het aantal niet singuliere gemeenschappelijke punten der bijbehoorende variëteiten.

De stelsels $S_4(\mu, \nu)$ en $S_4(0,1)$ hebben een stelsel $S_3(\mu + \nu, 0, \mu)$ van ∞^3 lijnelementen gemeen.

Om de graad van het complex der rechten, die gemeenschappelijke lijnelementen van beide stelsels dragen, te bepalen nemen we een proefpunt A in β aan. Alle rechten door A vormen met A lijnelementen van S_4 (0,1). De lijnelementen, gedragen door de rechten in de waaier (A, β), behooren ook tot het stelsel S_4 (0,1). De rechten, die lijnelementen uit het stelsel S_4 (μ, ν) dragen, waarvan A het punt is, vormen een kegel van de graad μ, terwijl elke straal van de waaier ν lijnelementen uit dit stelsel draagt. De waaier is een ν-voudig bestanddeel van de complexkegel, die dus van de graad $\mu + \nu$ is.

Een willekeurig punt van R_3 is niet toegevoegd aan gemeenschappelijke rechten der beide stelsels.

In een willekeurig vlak γ, vormt elke rechte van dat vlak met z'n snijpunt met de snijlijn (β, γ) een lijnelement van S_4 (0,1). Elk punt van (β, γ) is punt van μ lijnelementen van S_4 (μ, ν), zoodat de μ-voudige rechte (β, γ), de kromme is, gevormd door de punten van de lijnelementen door het gemeenschappelijk stelsel in γ bepaald.

Hiermee is bewezen, dat de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (0,1) een stelsel S_3 ($\mu + \nu$, 0, μ) gemeen hebben, waaruit volgt dat de stelsels S_4 (μ, ν), S_4 (0,1) en S_2 (α, β, γ) een aantal van $(\mu + \nu)\,\alpha + \mu\gamma$ lijnelementen gemeen hebben.

Het stelsel S_4 (0,1) wordt afgebeeld op een V_4^3, die V_3^6, en dus ook de punten x en y bevat. We krijgen dus de volgende vergelijking:

$$\mu\alpha + \nu\alpha + \mu\gamma = 3\,(\mu\alpha + 2\mu\beta + 3\mu\gamma + 3\nu\alpha + 2\nu\gamma) - x - y,$$

waaruit volgt

$$x + y = 2\mu\alpha + 6\mu\beta + 8\mu\gamma + 8\nu\alpha + 6\nu\gamma$$

en in verband met de gevonden waarde voor x

$$(x = 2\mu\alpha + 3\mu\beta + 5\mu\gamma + 5\nu\alpha + 3\nu\gamma),$$

$$y = 3\mu\beta + 3\mu\gamma + 3\nu\alpha + 3\nu\gamma.$$

Resumeerende kunnen we dus zeggen, dat de variëteiten, behoorende bij een stelsel S_4 (μ, ν) en een stelsel S_2 (α, β, γ) een kromme van de graad $2\,(\mu\beta + \mu\gamma + \nu\alpha + \nu\gamma) + \mu\alpha + \nu\alpha + \mu\gamma$ gemeen hebben, die V_2^4 in $3\,(\mu\beta + \mu\gamma + \nu\alpha + \nu\gamma) + 2\,(\mu\alpha + \nu\alpha + \mu\gamma)$ en V_3^6, buiten V_2^4, in $3\,(\mu\beta + \mu\gamma + \nu\alpha + \nu\gamma)$ punten snijdt.

We hebben reeds bewezen, dat de lijnelementen, die hiermee correspondeeren en waaruit de lijnelementen, die behooren bij de singuliere punten, verwijderd zijn een stelsel

$$S_1\,(\mu\beta + \mu\gamma + \nu\alpha + \nu\gamma, \mu\alpha + \nu\alpha + \mu\gamma)$$

vormen.

Er is dus bewezen, dat een stelsel S_4 (μ, ν) *van* ∞^4 *lijnelementen en een stelsel* S_2 (α, β, γ) *van* ∞^2 *lijnelementen een stelsel*

$$S_1\,(\mu\beta + \mu\gamma + \nu\alpha + \nu\gamma, \mu\alpha + \nu\alpha + \mu\gamma)$$

van ∞^1 *lijnelementen gemeen hebben.*

We hebben de vier soorten stelsels van lijnelementen afgebeeld op variëteiten van R_5 en de singuliere punten, die behooren tot deze variëteiten, aangegeven. Deze resultaten zijn algemeen, d.w.z. ze gelden ook voor ontaarde stelsels van lijnelementen. De gemeenschappelijke figuur van twee of meer variëteiten zal dus, wat graad en dimensie betreft, ook als de singuliere punten eruit verwijderd zijn, onafhankelijk zijn van het al of niet ontaard zijn van de stelsels lijnelementen, waarvan de variëteiten de afbeeldingen vormen.

Hieruit mogen we de conclusie trekken, dat ter bepaling van de doorsnijding van stelsels van lijnelementen, het beginsel van het behoud van het aantal toegepast mag worden.

Volgens deze methode zullen we ten slotte nog de doorsnijding bepalen van een stelsel S_4 (μ, ν) met een stelsel $S_4\,(\mu', \nu')$, van een stelsel $S_4\,(\mu, \nu)$ met een stelsel $S_3\,(\varphi, \psi, \chi)$ en van een stelsel S_3 (φ, ψ, χ) met een stelsel S_3 (φ', ψ', χ').

Om het gemeenschappelijke stelsel van lijnelementen van de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (μ', ν') te bepalen, denken we ons het stelsel S_4 (μ', ν') vervangen door een stelsel S_4' (μ', ν'), bestaande uit μ' stelsels S_4 (1,0) en ν' stelsels S_4 (0,1).

In deze paragraaf is reeds bewezen, dat de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (1,0) een stelsel S_3 $(\nu, \mu, \mu + \nu)$ en de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (0,1) een stelsel S_3 $(\mu + \nu, 0, \mu)$ gemeen hebben. De doorsnede van de stelsels S_4 en S_4' is dus een stelsel

$$S_3\,(\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu', \mu\mu', \mu\mu' + \mu'\nu + \mu\nu').$$

We hebben hier bewezen:

Een stelsel S_4 (μ, ν) *van* ∞^4 *lijnelementen en een stelsel*

S_4 (μ', ν') van ∞^4 lijnelementen hebben een stelsel

$$S_3\ (\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu',\ \mu\mu',\ \mu\mu' + \mu'\nu + \mu\nu')$$

van ∞^3 lijnelementen gemeen.

Opmerking: De laatste uitkomst is, zonder gebruik te maken van de afbeelding als volgt te bepalen.

Elke rechte van een schoof met top A, draagt ν elementen van het stelsel S_4 (μ, ν) en ν' elementen van het stelsel S_4' (μ, ν). Het punt A vormt met μ rechten uit de schoof, lijnelementen van het stelsel S_4 (μ, ν) en met μ' rechten, lijnelementen van het stelsel S_4 (μ', ν').

De punten, welke beide stelsels toevoegen aan de rechten van de schoof, vormen respectievelijk een oppervlak van de graad $\mu + \nu$ met μ-voudig punt in A en een oppervlak van de graad $\mu' + \nu'$ met een μ'-voudig punt in A. Beide oppervlakken hebben een kromme van de graad $(\mu + \nu)$ $(\mu' + \nu')$ gemeen. Elk punt van de kromme vormt met het punt A een gemeenschappelijk lijnelement van de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (μ', ν'), behalve het $\mu\mu'$-voudige punt A. In een plat vlak door A, liggen dus $\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu'$ rechten door A, die lijnelementen van het gemeenschappelijke stelsel van S_4 (μ, ν) en S_4 (μ', ν') dragen, zoodat het complex der rechten van het gezochte stelsel S_3 van de graad $\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu'$ is.

Een willekeurig punt B is toegevoegd aan rechten van de stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (μ', ν'), die kegels, respectievelijk van de graad μ en μ' vormen, zoodat B met $\mu\mu'$ rechten lijnelementen van het stelsel S_3, dat we wenschen te bepalen, vormt.

De stelsels S_4 (μ, ν) en S_4 (μ', ν') bepalen in een willekeurig plat vlak twee stelsels S_2 (μ, ν) en S_2 (μ', ν') van ∞^2 lijnelementen, die een stelsel S_1 gemeen hebben, waarvan de punten der lijnelementen een kromme van de graad $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ vormen (zie § 5).

Als gemeenschappelijk stelsel van beide stelsels S_4 hebben we weer het stelsel

$$S_3\ (\mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu',\ \mu\mu',\ \mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$$

gevonden.

Ter bepaling van het gemeenschappelijke stelsel van de stelsels $S_4(\mu,\nu)$ en $S_3(\varphi,\psi,\chi)$, vervangen we deze respectievelijk door het stelsel $S_4'(\mu,\nu)$, bestaande uit μ stelsels $S_4(1,0)$ en ν stelsels $S_4(0,1)$ en het stelsel $S_3'(\varphi,\psi,\chi)$, bestaande uit φ stelsels $S_3(1,0,0)$, ψ stelsels $S_3(0,1,0)$ en χ stelsels $S_3(0,0,1)$. Een stelsel $S_3(1,0,0)$ wordt gevormd door de lijnelementen, waarvan P op een gegeven rechte ligt, een stelsel $S_3(0,1,0)$ door de lijnelementen, waarvan de rechte door een gegeven punt gaat en een stelsel $S_3(0,0,1)$ door de lijnelementen van een gegeven plat vlak.

De μ stelsels $S_4(1,0)$ hebben met de φ stelsels $S_3(1,0,0)$, de ψ stelsels $S_3(0,1,0)$ en de χ stelsels $S_3(0,0,1)$ respectievelijk $\mu\varphi$ stelsels $S_2(0,1,1,)$, $\mu\psi$ stelsels $S_2(1,0,0)$ en $\mu\chi$ stelsels $S_2(1,0,0)$ gemeen. Dit zijn dus stelsels $S_2(0,\mu\varphi,\mu\varphi)$, $S_2(\mu\psi,0,0)$ en $S_2(\mu\chi,0,0)$.

De ν stelsels $S_4(0,1)$ hebben met de φ stelsels $S_3(1,0,0)$, de ψ stelsels $S_3(0,1,0)$ en de χ stelsels $S_3(0,0,1)$ respectievelijk de stelsels $S_2(0,\nu\varphi,0)$, $S_2(\nu\psi,\nu\psi,0)$ en $S_2(0,0,\nu\chi)$ gemeen, zoodat de stelsels $S_4'(\mu,\nu)$ en $S_3'(\varphi,\psi,\chi)$ een stelsel

$$S_2(\mu\psi+\mu\chi+\nu\psi,\ \mu\varphi+\nu\varphi+\nu\psi,\ \mu\varphi+\nu\chi)$$

gemeen hebben, waaruit volgt dat in het algemeene geval geldt:

Een stelsel $S_4(\mu,\nu)$ van ∞^4 lijnelementen en een stelsel $S_3(\varphi,\psi,\chi)$ van ∞^3 lijnelementen hebben een stelsel

$$S_2(\mu\psi+\mu\chi+\nu\psi,\ \mu\varphi+\nu\varphi+\nu\psi,\ \mu\varphi+\nu\chi)$$

van ∞^2 lijnelementen gemeen.

Om te bepalen wat een stelsel $S_3(\varphi,\psi,\chi)$ en een stelsel $S_3(\varphi',\psi',\chi')$ gemeen hebben, vervangen we het stelsel $S_3(\varphi,\psi,\chi)$ door een stelsel $S_3'(\varphi,\psi,\chi)$, bestaande uit φ stelsels $S_3(1,0,0)$, ψ stelsels $S_3(0,1,0)$ en χ stelsels $S_3(0,0,1)$ en het stelsel $S_3(\varphi',\psi',\chi')$ door een stelsel $S_3'(\varphi',\psi',\chi')$ bestaande uit φ' stelsels $S_3(1,0,0)$, ψ' stelsels $S_3(0,1,0)$ en χ' stelsels $S_3(0,0,1)$.

De φ stelsels $S_3(1,0,0)$ hebben geen lijnelementen gemeen met de φ' stelsels $S_3(1,0,0)$. De φ stelsels $S_3(1,0,0)$ hebben $\varphi\psi'$ stelsels $S_1(1,1)$, dus een stelsel $S_1(\varphi\psi',\varphi\psi')$ met de ψ' stelsels $S_3(0,1,0)$ gemeen en met de χ stelsels $S_3(0,0,1)$, $\varphi\chi'$ stelsels $S_1(1,0)$, dus een stelsel $S_1(\varphi\chi',0)$.

Evenzoo vinden we dat de ψ stelsels S_3 (0, 1, 0) met de φ' stelsels S_3 (1, 0, 0), de ψ' stelsels S_3 (0, 1, 0) en de χ' stelsels S_3 (0, 0, 1) respectievelijk de stelsels S_1 $(\psi\varphi', \psi\varphi')$, S_1 $(0, \psi\psi')$ en geen lijnelementen gemeen hebben.

De χ stelsels (0, 0, 1) hebben met de φ' stelsels S_3 (1, 0, 0), de ψ' stelsels S_3 (0, 1, 0) en de χ' stelsels S_3 (0, 0, 1) respectievelijk het stelsel S_1 $(\chi\varphi', 0)$, geen lijnelementen en het stelsel S_1 $(0, \chi\chi')$ gemeen.

Resumeerende hebben de stelsels S' (φ, ψ, χ) en S' (φ', ψ', χ') een stelsel

$$S_1\,(\varphi\psi' + \varphi\chi' + \psi\varphi' + \chi\varphi',\ \varphi\psi' + \psi\varphi' + \psi\psi' + \chi\chi')$$

gemeen, waaruit volgt, dat in het algemeene geval geldt:

Een stelsel S_3 (φ, ψ, χ) *van* ∞^3 *lijnelementen en een stelsel* S_3 (φ', ψ', χ') *van* ∞^3 *lijnelementen hebben een stelsel*

$$S_1\,(\varphi\psi' + \varphi\chi' + \psi\varphi' + \chi\varphi',\ \varphi\psi' + \psi\varphi' + \psi\psi' + \chi\chi')$$

van ∞^1 *lijnelementen gemeen.*

INHOUD

STELLINGEN

I

De kegelsneden, beschreven om de omgeschreven driehoeken van een gegeven kegelsnede, vormen een kwadratische vierdimensionale verzameling.

II

Indien een punt Q' ligt op de cirkel C door het punt K, die gaat door de punten, volgens welke de cirkels uit de bundel met basispunten K en Q aan een rechte t raken, dan liggen de punten K en Q met de punten, volgens welke de cirkels uit de bundel met K en Q' als basispunten aan t raken, op één cirkel.

III

Er zijn $mn\ (m+1)\ (n+1)$ kegelsneden, die door drie gegeven punten gaan en aan twee gegeven krommen van de graad m en n raken.

IV

De vijf transversalen, door een gegeven punt, van de vijf paren transversalen van de groepen van vier rechten in een verzameling van vijf gegeven rechten, liggen in een plat vlak.

V

Uit hetgeen Prof. Dr J. Wolff behandelt in „A representation of the plane pencils in R_3 on the conics of a plane" [1]), volgt dat een stelsel $S_4\ (\mu, \nu)$ van ∞^4 vlakelementen en een stelsel $S_1\ (p, q)$ van ∞^1 vlakelementen worden afgebeeld, respectievelijk op een $V_4^{\mu+3\nu}$, die V_3^6 ν-voudig en de rechte ϱ_0 $(\mu+\nu)$-voudig bevat en een V_1^{p+2q}, die V_3^6, buiten ϱ_0, in $3p+3q$ en ϱ_0 in $2q$ punten snijdt. Beide variëteiten hebben $p\mu+q\nu$ snijpunten buiten V_3^6, waaruit volgt dat de stelsels $S_4\ (\mu, \nu)$ en $S_1\ (p, q)$ een aantal van $p\mu+q\nu$ vlakelementen gemeen hebben.

---

[1]) Amst. Proceedings Vol. XXVIII, pag. 450, 1925.

VI

De verbindingsrechten van de kritieke punten, behoorende bij een gegeven rechte l, van een net kegelsneden, snijden deze rechte in de snijpunten van l met de kernkromme van het net.

VII

Indien de elementen van een bepaalde soort in een ruimte R_n, door een (1,1) verwantschap afgebeeld zijn op de punten van een ruimte R_m en stelsels van bedoelde elementen in R_n correspondeeren met variëteiten in R_m, waarvoor geldt dat de gemeenschappelijke figuur van twee of meer dezer variëteiten, buiten de singuliere punten, wat betreft graad en dimensie, onafhankelijk is van het al of niet ontaard zijn van de bijbehoorende stelsels in R_n, mag men in R_n de kenmerkende aantallen van twee of meer stelsels bepalen, door deze stelsels te laten ontaarden.

VIII

Het bewijs, dat Borel in ,,Leçons sur les fonctions entières'' (2e druk, pag. 55 en 56) geeft van de bewering

$$\lim_{\mu \to \infty} A_\mu \left(\mu! \right)^{\frac{1}{p+1}} \to 0,$$

waarbij A_μ voorstelt de coëfficient van z^μ in de reeks, waarin de functie.

$$F(z) = e^{\varphi(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots\dots\dots\dots \frac{z^p}{pa_n^p}}$$

ontwikkeld kan worden, is foutief.

IX

De stelling: ,,Heeft een onbegrensde niet monotone getallenrij een grootsten (kleinsten) term, dan is er uit deze rij een monotone dalende (klimmende) rij te lichten, die de bovengrens (benedengrens) van de oorspronkelijke rij tot grens zal hebben,'' voorkomend in ,,De grondslagen der rekenkunde'' door Dr G. Schouten (2e druk, pag. 65) is onjuist.