De meetkundige plaats van de punten op gelijke afstand van twee verzamelingen

https://hdl.handle.net/1874/320746

DE MEETKUNDIGE PLAATS VAN DE PUNTEN OP GELIJKE AFSTAND VAN TWEE VERZAMELINGEN

DOOR

J. DEKNATEL

H. J. PARIS - AMSTERDAM

DE MEETKUNDIGE PLAATS VAN DE PUNTEN OP GELIJKE AFSTAND VAN TWEE VERZAMELINGEN

Diss. Utrecht 1935

DE MEETKUNDIGE PLAATS VAN DE PUNTEN OP GELIJKE AFSTAND VAN TWEE VERZAMELINGEN

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS, DR C. W. VOLLGRAFF, HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DE SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 16 DECEMBER 1935, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JAN DEKNATEL
GEBOREN TE ZUTFEN

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXXV

Bij het voltooien van dit proefschrift wil ik een woord van dank richten tot hen die aan mijn wetenschappelijke opleiding hebben bijgedragen.

Mijn bijzondere dank geldt echter U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, voor het vertrouwen dat ge in mij gesteld hebt, en de vele tijd die ge aan mij hebt willen geven.

AAN DE NAGEDACHTENIS
VAN MIJN VADER

NOTATIE

$U\,(E_1, E_2)$	de meetkundige plaats van de punten evenver van E_1 als van E_2.
$E \prec F$	E is deelverzameling van F.
$E + F$; $E - F$; $E \,.\, F$; $E \dotplus F$	resp. som, verschil, doorsnede en vereniging van E en F.
$[A, B]$	het lijnstuk AB met de eindpunten A en B inbegrepen.
(A, B)	het lijnstuk AB zonder A en B.
$[A, B)$, $(A, B]$	het lijnstuk AB met A wel, B niet, resp. B wel en A niet inbegrepen.
$\overline{E, F}$	de afstand der verzamelingen E en F.
$H\,(E)$	het kleinste convexe omhulsel van E.
$k\,(A, E)$	afstandcirkel met A als middelpunt en $\overline{A, E}$ als straal.
$\varepsilon\,(A, E)$	het op $k\,(A, E)$ gelegen deel van E.

INLEIDING

In dit proefschrift zal de meetkundige plaats $U(E_1, E_2)$ bestudeerd worden van de punten op gelijke afstanden van twee verzamelingen E_1 en E_2 in het Euclidische vlak.

Onder de afstand $\overline{P, E}$ van een punt P tot een verzameling E verstaat men de onderste grens van de afstanden van P tot de punten van E. Uit deze definitie volgt dat $\overline{P, E}$ een tweedimensionaal-continue funktie van P is.

Voor willekeurige E_1 en E_2 is de meetkundige plaats $U(E_1, E_2)$ gesloten. Immers geldt voor een punt P b.v. $\overline{P, E_1} < \overline{P, E_2}$ dan is er wegens de continuïteit van de afstandsfunktie een omgeving van P waarvan ieder punt deze eigenschap heeft. Het complement van $U(E_1, E_2)$ is dus open, $U(E_1, E_2)$ is dus gesloten.

Verder volgt nog uit de afstandsdefinitie dat $\overline{P, E}$ ongewijzigd blijft indien men E afsluit. We mogen voor het bestuderen van $U(E_1, E_2)$ dus aannemen dat E_1 en E_2 gesloten zijn, zonder de algemeenheid te schaden.

Indien men omtrent E_1 en E_2 geen nadere onderstellingen maakt, valt er over $U(E_1, E_2)$, behalve de geslotenheid niets te zeggen. Immers zij F een willekeurige gesloten verzameling dan zijn er twee verzamelingen aan te geven die F als meetkundige plaats opleveren. Is n.l. V het vlak, dan is $F = U(F, V)$.

In hoofdstuk I nemen we E_1 en E_2 gesloten en begrensd, maar overigens willekeurig. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde wordt afgeleid voor de begrensdheid van $U(E_1, E_2)$.

In hoofdstuk II wordt ondersteld dat E_1 en E_2 gesloten, begrensd en zonder gemeenschappelijk punt zijn. Aangetoond wordt, dat $U(E_1, E_2)$ dan bestaat uit een eindig aantal enkelvoudige gesloten Jordankrommen (event. op een inversie na) die een eindig aantal punten gemeen hebben. Verder zijn deze krommen in ieder punt voorzien van twee halftangenten. Doorloopt een punt een der krommen $U(E_1, E_2)$ in bepaalde zin, dan is de hoek die de halftangent in de gekozen doorlopingszin met een vaste rechte maakt een funktie van begrensde variatie. Deze laatste eigenschap is aequivalent met de volgende: de krommen kunnen bij gedeelten opgevat worden als grafische voorstelling van de som van twee funkties, waarvan de grafische voorstellingen convexe krommen zijn. Een verder verband tussen $U(E_1, E_2)$ en convexe krommen geeft nog de volgende stelling: indien E_1 en E_2 gesloten verzamelingen zijn met een gemeenschappelijk punt, dan vormen de inwendige punten van $U(E_1, E_2)$, indien ze er zijn, een convex gebied.

In hoofdstuk III zal de vraag onderzocht worden in hoeverre de gevonden eigenschappen $U(E_1, E_2)$ karakteriseren. Het zal blijken dat de eigenschappen „im Kleinen" de krommen volkomen karakteriseren.

Tenslotte willen we er nog op wijzen dat de beschouwing van de meetkundige plaats $U(C_1, C_2)$ waarbij C_1 en C_2 continua zijn, een toepassing heeft gevonden in een bewijs van de stelling van Jordan omtrent de verdeling van het vlak door een gesloten kromme [1]).

---

1) J. Wolff, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LXIII.

HOOFDSTUK I

Definitie I:

Een verzameling met de eigenschap, dat indien de punten P en Q er toe behoren ook $[P, Q]$ [1]) ertoe behoort, heet convex.

Stelling I:

De doorsnede van een verzameling van convexe verzamelingen is convex.

Bewijs:

Zijn P en Q punten van de doorsnede, dan bevat ieder der beschouwde convexe verzamelingen blijkbaar P en Q, dus ook $[P, Q]$. $[P, Q]$ behoort dus tot de doorsnede.

Definitie II:

Is E een willekeurige verzameling, dan heet de doorsnede $H(E)$ van alle gesloten halfvlakken die E bevatten, het kleinste convexe omhulsel van E.

Stelling II:

$H(E)$ is convex. (volgt uit st. I)

Stelling III:

$H(E)$ is gesloten.

Bewijs:

De doorsnede van gesloten verzamelingen is weer gesloten.

---

1) Zie notatie pag. 8.

Stelling IV:

$H(E)$ is de kleinste gesloten en convexe verzameling die E bevat.

Bewijs:

Stel dat C een gesloten convexe verzameling was, die E bevat en dat er een punt $P \prec H(E)$ was, dat niet tot C behoorde. Zij a de afstand van P tot C, en A een punt van C zodat $\overline{A, P} = a$ (wegens de geslotenheid van C is er zulk een punt). Laat m de middelloodlijn van $[A, P]$ zijn, V_1 het halfvlak door m bepaald dat P bevat en V_2 het andere door m bepaalde halfvlak. V_1 bevat dan geen punt van C. Immers lag er een punt $B \prec C$ in, dan zou $[A, B]$ tot C behoren en een afstand kleiner dan a tot P hebben. V_2 bevat dus C, en a fortiori E, terwijl P er buiten ligt. Dit is in strijd met de definitie van $H(E)$.

Gevolg:

Is C een gesloten convexe verzameling, dan is $C = H(C)$.

Stelling V:

Is P een punt van de grens R van $H(E)$, dan is er minstens één halfvlak dat E bevat en P op de rand heeft.

Bewijs:

Daar P op R ligt, is er een rij halfvlakken $V_1, V_2 \dots V_n \dots$ die E bevatten, en zodanig dat de afstand van P tot de randen $R_1, R_2, \dots R_n \dots$ tot nul nadert. (Ontkenning zou direkt een tegenstrijdigheid opleveren.) Er is een deelrij $R_{n_1}, R_{n_2} \dots R_{n_k} \dots$ welke nadert tot een rechte l door P. Indien aan beide zijden van l punten A en B van E lagen, zou er ook een R_{n_k} zijn die A en B scheidt, wat onmogelijk is. Een der beide halfvlakken door l bepaald bevat dus E.

Definitie III:

Is P een punt van de grens van een convexe verzameling $H(E)$, dan heet de grens van een halfvlak dat E bevat en P op de grens heeft, een raaklijn in P aan $H(E)$.

Stelling VI:

Is E gesloten en begrensd, en is P een punt van de grens van $H(E)$, echter geen punt van E zelf, dan behoort P tot een lijnsegment van de grens van $H(E)$, waarvan de eindpunten tot E behoren.

Bewijs:

Zij l een raaklijn in P aan $H(E)$, en l_1 een der halfrechten door l en P bepaald. Stel dat op l_1 geen punt van E lag. l_1 en E zijn dan gesloten verzamelingen zonder gemeenschappelijk punt, terwijl E begrensd is. E en l_1 zouden dan een positieve afstand hebben [1]). Er zou dan een hoek $\alpha < \pi$ met hoekpunt P bestaan waarbinnen E lag. Daar P niet tot E behoort, is er een omgeving van P waarin E geen punt heeft. Er zou dus een halfvlak te construeren zijn, dat P uitsluit en E bevat, in strijd met de aanname dat P op de grens van $H(E)$ ligt. Evenzo ligt op de andere halfrechte door P en l bepaald een punt van E, waarmee de stelling bewezen is.

Stelling VII:

Is P een inwendig punt van de begrensde, gesloten, convexe verzameling C, dan is de doorsnede van een halfrechte h, met P als beginpunt, met C een segment $[P, Q]$ waarvan alleen Q op de grens R van C ligt.

Bewijs:

Uit definitie I volgt dat de doorsnede een lijnstuk $[P, Q]$ is waarvan Q punt van R is. Een willekeurig punt X van $[P, Q]$

---

1) Onder de afstand $\overline{E_1, E_2}$ van twee verzamelingen E_1 en E_2 verstaat men de onderste grens van afstanden van punten van E_1 tot punten van E_2.

is een inwendig punt van C. Immers, er is een omgeving ω van P welke tot C behoort. De verbindingslijnen van de punten van ω met Q behoren tot C, terwijl hun vereniging X als inwendig punt heeft.

Gevolg:

De rand R van een convexe verzameling met een inwendig punt P is een enkelvoudige gesloten Jordankromme. Immers R is volgens St. VII voor te stellen met poolcoördinaten t.o.v. van P en een halfrechte met P als beginpunt door $r = r(\varphi)$. Hierin is $r(\varphi)$ continu. Immers was in φ_1 een discontinuïteit, dan zou wegens de geslotenheid van R de bijbehorende halfstraal minstens 2 punten van R bevatten, in strijd met St. VII.

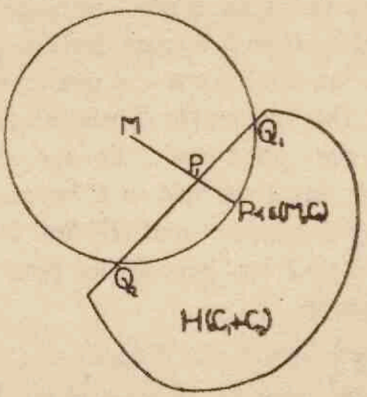

Fig. I

Stelling VIII:

Zijn C_1 en C_2 gesloten, begrensde verzamelingen, dan is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de begrensdheid van $U(C_1, C_2)$, dat indien R de grens van $H(C_1 + C_2)$ is, òf $R \cdot C_1$ òf $R \cdot C_2$ leeg is.

Bewijs:

I. De voorwaarde is voldoende.

Zij $R \,.\, C_1$ leeg. Daar R en C_1 gesloten zijn, is $\overline{R, C_1} = d > 0$. We nemen aan, dat er een punt van $U(C_1, C_2)$ op positieve afstand van $H(C_1 \dotplus C_2)$ bestaat, daar anders niets meer te bewijzen valt.

Zij M zulk een punt en P een punt van $\varepsilon(M, C_1)$ (fig. I). P en M zijn resp. inwendig en uitwendig punt van $H(C_1 \dotplus C_2)$. Volgens st. VII is dus: $[M, P] \,.\, H(C_1 \dotplus C_2) = [P, P_1]$, waarin $P_1 \prec R$.

Daar binnen $k(M, C_1) = k(M, C_2) = k$ geen punten van $C_1 \dotplus C_2$ liggen, ligt P_1 op een verbindingssegment van $C_1 \dotplus C_2$ (st. VI). Dit segment heeft met k een koorde $[Q_1, Q_2]$ gemeen. Is D de diameter [1]) van $H(E)$, dan is dus $\overline{Q_1, Q_2} \leqq D$. Verder is

$$d \leqq \overline{P, P_1} < \overline{P_1, Q_1} < D.$$

Dus

$$\overline{M, P} = \frac{\overline{P_1 Q_1} \times \overline{P_1 Q_2} + \overline{P P_1}^2}{2\, \overline{PP_1}} < \frac{D^2}{d}.$$

II. De voorwaarde is noodzakelijk.

Onderstel, dat C_1 en C_2 ieder een punt op R hebben, resp. P en Q. Indien $P = Q$ behoort een buitennormaal [2]) in P op R tot $U(C_1, C_2)$.

Indien $P \neq Q$ geldt voor ieder punt X van een buitennormaal in P $\overline{X, C_1} < \overline{X, C_2}$. Voor ieder punt Y van een buitennormaal in Q $\overline{Y, C_2} < \overline{Y, C_1}$. Ieder verbindingssegment van de buitennormalen bevat dus wegens de continuïteit van de afstandfunktie minstens één punt van $U(C_1, C_2)$.

Voor het vervolg zal nog een nadere beschouwing van het gedrag op oneindig van $U(E_1, E_2)$ nodig zijn. We onderstellen

---

1) Onder de diameter van een verzameling E verstaat men de bovenste grens van afstanden van twee punten van E.

2) Onder een buitennormaal in P aan een convexe verzameling C verstaan we een halfrechte loodrecht op een raaklijn in P aan C in het halfvlak dat geen punt van C als inwendig punt heeft.

E_1 en E_2 gesloten, begrensd en zonder gemeenschappelijk punt. Verder onderstellen we nog, dat $H\ (E_1 + E_2)$ een inwendig punt P heeft en dat $U\ (E_1, E_2)$ niet begrensd is.

Wegens het gevolg van St. VII kan de grens R van $H\ (E_1 + E_2)$ voorgesteld worden in poolcoördinaten door $r = r(\varphi)$. Laat $P(\varphi)$ het bij φ behorende punt van R zijn. Volgens St. VIII zijn $R\ .\ E$ en $R\ .\ E_2$ niet leeg. We mogen dus onderstellen, dat $P(o) \prec E_1$. Laat φ_2 de grootste waarde zijn zodat voor $O < \varphi < \varphi_2$, $P(\varphi)$ niet tot $R\ .\ E_2$ behoort. Wegens de geslotenheid van E_2 is dan $P(\varphi_2) \prec R\ .\ E_2$. Laat φ_1 de kleinste waarde van φ zijn, zodat voor $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $P(\varphi)$ niet tot $R\ .\ E_1$ behoort. De boog van punten $P(\varphi)$ waarvoor $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ bevat dan geen punt van $R\ .\ E_1$ of $R\ .\ E_2$. Volgens St. VI bestaat deze boog dus uit een lijnsegment met uiteinden $P(\varphi_1) = A_1 \prec E_1$ en $P(\varphi_2) =$ $= B_1 \prec E_2$. Daar $\overline{A_1, B_1} \geqq \overline{E_1, E_2} > 0$ liggen op R slechts een eindig (even) aantal dergelijke lijnstukken

$$[A_1, B_1],\ [A_2, B_2]\ \ldots .\ [A_k, B_k].$$

De complementaire bogen $B_1 A_2$, $B_2 A_3 \ldots B_k A_1$, waarvan er een of meer in punten kunnen ontaarden, bevatten beurtelings punten van E_1 en E_2. Zij nu G_n het gebied, bepaald door $[A_n, B_n]$ en de buitennormalen in A_n en B_n die loodrecht op $[A_n, B_n]$ staan, dat $H\ (E_1 + E_2)$ niet bevat. Zij $\triangle$ het complement van $H\ (E_1 + E_2) + \Sigma\, G_n$ t.o.v. het vlak. Zij Q, indien mogelijk, een punt van $U\ (E_1, E_2)$ in $\triangle$. $k\ (Q, E_1) = k\ (Q, E_2) = k$ bevat in het binnengebied een boog b van R (anders had $H\ (E_1 + E_2)$ slechts een punt met k gemeen, in strijd met $E_1\ .\ E_2 = O$). b kan niet tot een der segmenten $[A_n, B_n]$ behoren, daar Q dan in G_n zou liggen. b behoort dus tot een boog $B_n A_{n+1}$. Deze bevat slechts punten van E_1 of E_2, stel van E_1. Zij δ_n de afstand van E_2 tot boog $B_n A_{n+1}$, dan is $\delta_n > 0$. Evenals op pag. 15 toont men dan aan, dat de afstand van Q tot $H(E_1 + E_2)$ hoogstens D^2/δ_n is. Daar n slechts een eindig aantal waarden kan doorlopen is $U\ (E_1, E_2)$ in $\triangle$ begrensd.

Beschouwen we nu het deel van $U\ (E_1, E_2)$ in G_1. Op ieder verbindingssegment van de buitennormalen, evenwijdig aan A_1B_1, ligt minstens één punt van $U(E_1, E_2)$. Laat α en β omgevingen van A_1 resp. B_1 zijn met diameters kleiner dan $\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}$. Zij δ de afstand van $[A_1, B_1]$ tot $E_1 + E_2 - \alpha . E_1 - \beta . E_2$, dan is $\delta > 0$. Zij Q een punt van $U(E_1, E_2)$ in G_1, en zij p de pijl van de boog die A_1B_1 van $k(Q, E_1) = k(Q, E_2)$ afsnijdt. Voor Q op voldoend grote afstand van $H(E_1 + E_2)$ is $p < \delta$, zodat $\varepsilon(Q, E_1) \prec \alpha$ en $\varepsilon(Q, E_2) \prec \beta$. Voor een punt Q', op het verbindingssegment van de buitennormalen door Q evenwijdig aan A_1B_1, geldt dan òf $\overline{Q', E_1} < \overline{Q', E_2}$ òf $\overline{Q', E_2} < \overline{Q', E_1}$, naar gelang Q' aan de kant van A_1 of B_1 ligt. Hieruit volgt, dat indien we een assenkruis aannemen met A_1 als oorsprong, het punt B_1 op de positieve y-as en de buitennormaal in A_1 als pos. x-as, $U(E_1, E_2)$ in G_1 voor voldoend grote x voorgesteld kan worden door $y = f(x)$. Uit de geslotenheid van $U(E_1, E_2)$ volgt nog dat $f(x)$ continu is. Verder nadert voor toenemende x $\varepsilon(Q, E_1)$ tot A_1 en $\varepsilon(Q, E_2)$ tot B_1. De koorde, die $k(Q, E_1) = k(Q, E_2)$ van $[A_1, B_1]$ uitsnijdt, nadert dus tot $[A_1, B_1]$. Hieruit volgt dat $\lim\limits_{x \to \infty} y = \frac{1}{2}\overline{A_1, B_1}$.

Indien $H(E_1 + E_2)$ geen inwendig punt bevat, is gemakkelijk in te zien, dat $U(E_1, E_2)$ uit de middelloodlijnen van lijnstukken $[A_k, B_k]$ bestaat.

Er is dus een afstand M, zodat $U(E_1, E_2)$ op afstand groter dan M van $H(E_1 + E_2)$ verwijderd, bestaat uit een eindig aantal Jordanbogen, ieder voorzien van een asymptoot.

Hieruit volgt nog dat er geen twee gesloten, begrensde verzamelingen zijn zonder gemeenschappelijk punt, die tot meetkundige plaats opleveren een parabool, of een figuur met een parabolische tak.

HOOFDSTUK II

Stelling IX:

Zijn E_1 en E_2 gesloten, begrensde verzamelingen zonder gemeenschappelijk punt, dan bestaat $U(E_1, E_2)$ uit een eindig aantal gesloten Jordankrommen (event. op een inversie na) met een eindig aantal snijpunten, en in ieder punt voorzien van twee niet samenvallende halftangenten.

Bewijs:

Zij P een punt van $U(E_1, E_2)$ en O een punt van $\varepsilon(P, E_1)$. Zij α_1 de grootste hoek in positieve zin tussen PO en een straal PB_1 van $k(P, E_1) = k(P, E_2) = k$, zodanig dat binnen deze hoek geen punt van $\varepsilon(P, E_2)$ ligt. B_1 behoort dan tot E_2. Zij α_2 de grootste hoek in pos. zin tussen PB_1 en een straal PB_2, zodanig dat binnen deze hoek geen punt van $\varepsilon(P, E_1)$ ligt, enz. Daar $\overline{E_1, E_2} = d > 0$ is, onderspannen de bogen OB_1, B_1B_2, B_2B_3.. koorden met lengte minstens d. Er zijn er dus een eindig aantal k. Zij α_1' de kleinste hoek in pos. zin tussen PO en een straal PA_1, zodanig dat binnen $\angle A_1PB_1$ geen punt van E_1 gelegen is. Evenzo α_2' de kleinste hoek in pos. zin tussen PB_1 en een straal PA_2 zodat $\angle A_2PB_2$ geen punt van E_2 bevat. Er ontstaan dus bogen B_1A_2, B_2A_3 . . . B_kA_1 op k, welke afwisselend punten van E_2 en E_1 bevatten, en bogen A_1B_1, A_2B_2.. A_kB_k (k even) die, uitgezonderd de eindpunten, geen punten van E_1 of E_2 bevatten. Van de eerste soort kunnen er een of meer in punten ontaarden.

Onderstel $\angle A_1PB_1 \leqq \pi$ (fig. II). Laat γ_1 en γ_2 cirkels met stralen δ_1 en δ_2 en met middelpunten resp. A_1 en B_1 zijn. Kies δ_1 zo klein dat de raaklijn uit B_1 aan γ_1, welke de punten A_1 en P

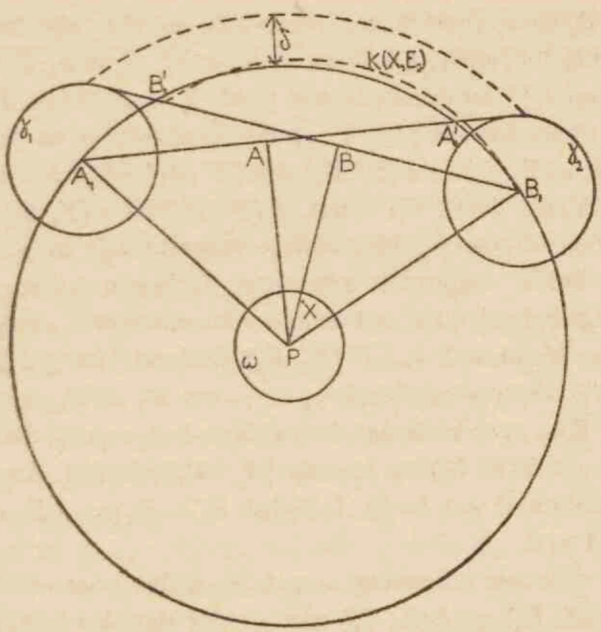

Fig II

niet scheidt, een koorde $[B_1, B_1']$ van k afsnijdt. Evenzo δ_2 zo klein dat de raaklijn uit A_1 aan γ_2, die P en B_1 niet scheidt, een koorde $[A_1, A_1']$ afsnijdt. Zij B het midden van $[B_1, B_1']$ en A het midden van $[A_1, A_1']$.

Zij δ de afstand van boog A_1B_1 tot $E_1 + E_2 - E_1 \cdot \gamma_1 - E_2 \cdot \gamma_2$, dan is $\delta > 0$. Er is een omgeving ω van P, zodat voor een willekeurig punt X ervan, de afstandcirkels $k(X, E_1)$ en $k(X, E_2)$ niet verder dan $\frac{1}{2}\delta$ buiten k uitsteken.

Kies X binnen ω en binnen $\triangle BPB_1$. $k(X, E_2)$ snijdt de koorde $[B_1, B_1']$ in twee punten. $k(X, E_2)$ heeft dus geen punt met E_1 gemeen. Hieruit volgt dat binnen de omgeving ω van P, $\angle BPB_1$ en evenzo $\angle APA_1$ geen punten van $U(E_1, E_2)$ bevat. Door δ_1 en δ_2 tot nul te laten naderen, naderen PA en PB tot de bissectrice b van $\angle A_1PB_1$. De halfrechte b' door b en P bepaald, gelegen binnen de uitspringende hoek A_1PB_1, is dus halftangent in P aan $U(E_1, E_2)$.

Laat β_1 en α_1 punten van resp. PB_1 en PA_1 zijn binnen ω, en zodanig dat $[\alpha_1, \beta_1] \perp b$. Daar $\overline{\alpha_1, E_1} < \overline{\alpha_1, E_2}$ en $\overline{\beta_1, E_1} > \overline{\beta_1, E_2}$, bevat $[\alpha_1, \beta_1]$ dan minstens een punt Y van $U(E_1, E_2)$. Stel dat er nog een tweede punt Y' op lag. Laat resp. η_1 en η'_1 punten van resp. $\varepsilon(Y, E_1)$ en $\varepsilon(Y', E_1)$ zijn. $[Y', \eta_1]$ snijdt dan $k(Y', E_1)$ terwijl $[Y, \eta'_1]$ $k(Y, E_1)$ snijdt. $k(Y', E_1)$ en $k(Y, E_1)$ snijden elkaar dus binnen γ_1. Het andere snijpunt ligt in γ_2. Tevens moeten beide snijpunten symmetrisch liggen t.o.v. de lijn $\alpha_1\beta_1$, hetgeen in strijd is met de aanname omtrent δ_1 en δ_2. $[\alpha_1, \beta_1]$ bevat dus één punt Y van $U(E_1, E_2)$. Onderstel nu $\angle A_1PB_1 > \pi$. We beschouwen weer cirkels γ_1 en γ_2 om A_1 en B_1, met stralen δ_1 en δ_2. Kies δ_2 zo klein dat de raaklijn uit A_1 aan γ_2, die B_1 en P scheidt, van $k(P, E_2)$ een koorde $[A_1, A'_1]$ afsnijdt. Analoog δ_1. Zij δ de afstand van boog A_1B_1 tot $E_1 - E_1\gamma_1 + E_2 - E_2\gamma_2$, dan is $\delta > 0$.

Er is weer een omgeving ω van P, zodat voor een punt X ervan $k(X, E_1)$ en $k(X, E_2)$ niet verder dan $\frac{1}{2}\delta$ buiten k uitsteken. Noem de middens van $A_1A'_1$ en $B_1B'_1$ A resp. B, de snijpunten van de verlengden van AP en BP met k resp. A^* en B^*.

Zij X een punt binnen de uitspringende hoek B_1PB^* en in ω. De straal van $k(X, E_2)$ is hoogstens $\overline{X, B_1}$. $k(X, E_2)$ snijdt dus $[B_1, B'_1]$ in twee punten en heeft dus met E_1 geen punt gemeen. X behoort dus niet tot $U(E_1, E_2)$. Evenmin is er een punt in ω en de uitspringende hoek A^*PA_1, dat tot $U(E_1, E_2)$ behoort. Het deel van $U(E_1, E_2)$ in de inspringende hoek A_1PB_1 heeft dus de halfrechte b', door b en P bepaald, gelegen binnen de inspringende hoek A_1PB_1, tot halftangent. Evenals in het vorige geval bevat een lijnstuk $[\alpha, \beta] \perp b$, waarvan de uiteinden α en β op PA^* resp. PB^* gelegen zijn, één en niet meer dan één punt van $U(E_1, E_2)$.

Brengen we nu een assenkruis aan met P als oorsprong en pos. x-as langs b'. Voor $x > 0$ en klein genoeg is het deel van $U(E_1, E_2)$, dat in de bij b' behorende $\angle A_1PB_1$ ligt, voor te stellen door $y = f(x)$. Wegens de geslotenheid van $U(E_1, E_2)$ is $f(x)$ continu.

Ieder punt P van $U(E_1E_2)$ is dus bevat in een gebied, waar $U(E_1, E_2)$ bestaat uit een eindig (even) aantal Jordanbogen, samenkomende in P. Volgens pag. 17 geldt dit event. ook voor het punt op oneindig. $U(E_1, E_2)$ is dus volgens Borel te overdekken met een eindig aantal dergelijke gebieden $g_1, g_2, \ldots g_k$. Zij P_k het vertakkingspunt, of, indien niet aanwezig, een willekeurig punt van $U(E_1, E_2)$, gelegen op g_k. Laat $P_kA_k^1 \ldots P_kA_k^{m_k}$ de op g_k gelegen bogen zijn, waarbij $A_k^1 \ldots\ldots A_k^{m_k}$ randpunten van g_k zijn. We denken ons de nummering zo gekozen, dat van alle halftangenten in P_k aan $U(E_1, E_2)$, die aan de boog $P_kA_k^{l+1}$, de kleinste hoek in pos. zin maakt met de halftangent aan $P_kA_k^l$ $(l = 1, 2 \ldots m_k - 1)$. Stel $P_kA_k^l + P_kA_k^{l+1} = j_k^l$. We onderstellen $g_1 \ldots g_n$ zó gekozen dat geen j_k^l geheel in een j_m^n bevat is. Kies nu een boog $j_{n_1}^{k_1}$. Het eindpunt $A_{n_1}^{k_1+1}$ is in minstens een van de gebieden $g_1, g_2 \ldots\ldots g_n$ gelegen, b.v. in g_{n_2}. Het op g_{n_2} gelegen deel van $j_{n_1}^{k_1}$ is dan gelegen op een der bogen $j_{n_2}^1 \ldots\ldots j_{n_2}^{m_{n_2}}$, stel op $j_{n_2}^{k_2}$. Indien de boog $(j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2}) - j_{n_1}^{k_1}$ na afsluiting slechts $A_{n_1}^{k_1+1}$ met $j_{n_1}^{k_1}$ gemeen heeft, is $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2}$ een boog; is er behalve $A_{n_1}^{k_1+1}$ nog een gemeenschappelijk punt, dan bevat $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2}$ een gesloten Jordankromme.

Onderstel het eerste. $A_{n_2}^{k_2+1}$ ligt in minstens een der gebieden $g_1, g_2 \ldots\ldots g_n$, b.v. in g_{n_3}, terwijl het op g_{n_3} gelegen deel van $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2}$ gelegen is op $j_{n_3}^{k_3}$. Indien $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2} + j_{n_3}^{k_3} - (j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2})$ na afsluiting slechts $A_{n_2}^{k_2+1}$ met $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2}$ gemeen heeft, is $j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2} + j_{n_3}^{k_3}$ een boog. Na een eindig aantal malen dit proces te hebben voortgezet, komt er een vereniging van bogen

$$j_{n_1}^{k_1} + j_{n_2}^{k_2} + \ldots\ldots j_{n_m}^{k_m}$$

die een gesloten Jordankromme J bevat. We merkten reeds op, dat het aantal takken dat in een vertakkingspunt samenkomt steeds even is. Verwijdert men dus uit $U(E_1, E_2)$ de gevonden Jordankromme op de event. vertakkingspunten na, dan blijft in ieder der verzamelingen $g_1, g_2 \ldots g_n$ òf niets òf een vertakkingspunt met weer een even aantal takken over. Hieruit volgt, dat die overgebleven verzameling weer een gesloten Jordankromme bevat, enz. Hiermee is de stelling bewezen.

Opmerking:

Zijn E_1 en E_2 continua, dan is er een boog B_1A_2 die $\varepsilon(P, E_2)$ en een boog B_2A_1 die $\varepsilon(P, E_1)$ bevat. In ieder punt P van $U(E_1, E_2)$ komen dan twee takken samen, zodat $U(E_1, E_2)$ uit één enkele gesloten Jordankromme bestaat.

Stelling X:

Zijn E_1 en E_2 gesloten, begrensde verzamelingen, dan hebben de Jordankrommen $U(E_1, E_2)$ de eigenschap, dat de hoek die een halftangent in bepaalde zin met een vaste rechte maakt, bij het doorlopen van ieder der krommen, een funktie van begrensde variatie is.

Bewijs:

Laten P en Q punten van $U(E_1, E_2)$ zijn, P' en Q' punten van $\varepsilon(P, E_1)$ resp. $\varepsilon(Q, E_1)$, dan snijden $[P, P']$ en $[Q, Q']$ elkaar niet (event. is $P' = Q'$). Immers onderstel dat $k(P, E_1)$ en $k(Q, E_1)$ niet buiten elkaar liggen, en laat K de vereniging van beide cirkelschijven zijn. De grens R van K bestaat uit twee cirkelbogen p en q resp. behorende tot $k(P, E_1)$ en $k(Q, E_1)$. P' ligt buiten, of op de rand van $k(Q, E_1)$, dus op p, terwijl Q' op q ligt. Hieruit volgt de genoemde eigenschap.

Laat $P(s)$ het punt op een boog van $U(E_1, E_2)$ aanduiden, waarvoor de boogafstand (in positieve zin gemeten) tot een vast punt $P(o)$ van $U(E_1, E_2)$ gelijk s is. Laat $A(s)$, $B(s)$ de boog van $k(P(s), E_1) = k(P(s), E_2)$ zijn waarop nòch E_1, nòch E_2 een punt heeft (behalve de eindpunten die tot resp. E_1 en E_2 behoren), en die met de halftangent in positieve zin in $P(s)$ aan de kromme correspondeert. We beschouwen een boog s' welke geheel binnen $k(P(o), E_1) = k(P(o), E_2) = k$ gelegen is, en die geen vertakkingspunten bevat. Volgens het voorgaande snijden $[P(o), A(o)]$ en $[P(s), A(s)]$ elkaar niet, zodat

$$| \angle P(o)\, A(o),\, P(s)\, A(s) | < | \angle A(o)\, P(o)\, A'(s) | + \\ + | \angle P(o)\, A'(s)\, P(s) |$$

als $A'(s)$ het snijpunt van $A(s)$ $P(s)$ met k is (fig. III). Nu is

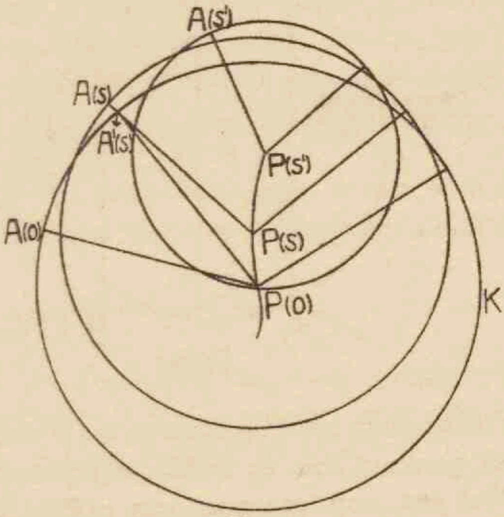

Fig. III

$$| \angle P(o)\, A'(s)\, P(s) | < M \,.\, s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en $$| \angle A(o)\, P(o)\, A'(s) | < M \text{ boog } A(o)\, A'(s) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

waarin M een constante is. Als $P(s)$ de boog van $P(o)$ naar $P(s')$ doorloopt, loopt $A'(s)$ niet terug, zodat boog $A(o)$ $A'(s)$ monotoon toeneemt. Uit (1) en (2) volgt dus dat de richting van $P(s)$ $A(s)$, voor $o \leqq s \leqq s'$, een funktie van begrensde variatie is. Hetzelfde geldt voor $P(s)$ $B(s)$, en dientengevolge eveneens voor de bissectrice van $\angle A(s)\, P(s)\, B(s)$, waarmee de stelling bewezen is voor een eindige boog.

Beschouwen we nu een oneindige tak van U (E_1, E_2), dan kan deze op genoegzaam grote afstand van E_1 en E_2 worden voorgesteld door $y = f(x)$, waarbij evenals op pag. 17 de pos. x-as langs de buitennormaal gekozen wordt in het eindpunt A_n van het lijnstuk $[A_n, B_n]$, dat met de beschouwde tak correspondeert (fig. IV).

Zij $t(x)$ die halftangent in het punt $P(x)$ van de beschouwde

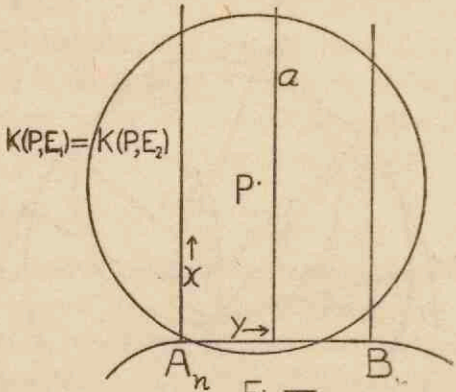

Fig. IV

tak, die met toenemende x corresponpeert. $t(x)$ is dan bissectrice van een hoek gevormd door de verbindingslijnstukken $l(x)$ en $m(x)$ van $P(x)$ met resp. een punt van $\varepsilon(P(x), E_1)$ en van $\varepsilon(P(x), E_2)$. Laat $\alpha(x)$ de scherpe hoek tussen $l(x)$ en de asymptoot a zijn. Daar geen twee segmenten $l(x)$ elkaar snijden (blz. 22), is de positieve variatie van $\alpha(x)$, als x vanaf zekere positieve waarde x_1 naar ∞ loopt, hoogstens gelijk aan de scherpe hoek tussen $l(x_1)$ en $P(x_1)\,A_n$. Daar $0 < \alpha(x) < \pi/2$ voor $x > x_1$, is $\alpha(x)$ dus van begrensde variatie. Hetzelfde geldt voor de scherpe hoek tussen a en $m(x)$, dus ook voor de scherpe hoek tussen $t(x)$ en a. $U(E_1, E_2)$ kan nu volgens Borel overdekt worden met een eindig aantal bogen waarvoor de eigenschap geldt. Hiermee is het bewijs geleverd.

De eigenschap van stelling X kan nog in een andere, ermee gelijkwaardige vorm gegoten worden: $U(E_1, E_2)$ kan bij gedeelten opgevat worden als grafische voorstelling van de som van twee funkties, waarvan de grafische voorstellingen convexe krommen zijn. Beschouw daartoe een boog J van $U(E_1, E_2)$ waarover de variatie van de richting der halftangent in bepaalde zin minder dan $\pi/4$ is. Neem een coördinatenstelsel met oorsprong in een beginpunt van J, waarbij de positieve x-as langs de beschouwde halftangent aan J valt. J kan dan worden voorgesteld door $y = f(x)$, $0 \leqq x \leqq \delta$. Zij $R(x) = \operatorname{tg} \alpha$ de rechter afgeleide van $f(x)$ in x, dan kan, daar α van begrensde variatie is en tussen $-\pi/4$ en $\pi/4$ ligt, $R(x) = P(x) + N(x)$ gesteld worden, waarbij $P(x)$ een monotoon groeiende, $N(x)$ een monotoon dalende funktie is. Zij $f_1(x) = \int_0^x P(t)dt$ en $f_2(x) = \int_0^x N(t)dt$, dan is $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ waarin $f_1(x)$ een convexe kromme is met de holle zijde naar „boven", $f_2(x)$ een convexe kromme met de holle zijde naar „beneden".

Stelling XI:

Bestaat de doorsnede van twee gesloten verzamelingen E_1 en E_2 uit een punt S, dan vormen de event. inwendige punten van $U(E_1, E_2)$ een convexe verzameling.

Bewijs:

Laat P een inwendig punt van de $U(E_1, E_2)$ zijn. Stel dat $\varepsilon(P, E_1)$ een punt $A \neq S$ bevatte. Voor een punt B van (P, A) geldt dan $\overline{B, A} = \overline{B, E_1} < \overline{B, E_2}$. P zou dus geen inwendig punt van $U(E_1, E_2)$ kunnen zijn. Er geldt dus $\varepsilon(P, E_1) = \varepsilon(P, E_2) = S$. Zij Q een van P verschillend inwendig punt van $U(E_1, E_2)$, dan is $\varepsilon(Q, E_1) = \varepsilon(Q, E_2) = S$. Ieder exemplaar van de cirkelbundel door $k(Q, E_1)$ en $k(P, E_2)$ gevormd, waarvan het middelpunt tussen P en Q gelegen is, heeft S op de rand en geen punt van E_1 of E_2 als inwendig punt. $[P, Q]$ behoort dus tot $U(E_1, E_2)$. Tevens is ieder punt van $[P, Q]$ inwendig punt van $U(E_1, E_2)$: verbind alle punten van een tot $U(E_1, E_2)$ behorende omgeving van P met die van een tot $U(E_1, E_2)$ behorende omgeving van Q; deze verbindingslijnstukken behoren tot $U(E_1, E_2)$ en hun vereniging heeft $[P, Q]$ in het inwendige.

HOOFDSTUK III

We zullen thans de vraag stellen in hoeverre de gevonden eigenschappen de meetkundige plaats karakteriseren, en bewijzen daartoe de volgende stelling:

Stelling XII:

Is J een enkelvoudige Jordanboog met de eigenschap dat in ieder punt P twee halftangenten zijn, zodanig dat als P de boog J doorloopt, de hoek die een vaste halfrechte maakt met de, bij de bewegingszin van P behorende, halftangent in P een funktie van begrensde variatie is — dan zijn er twee buiten elkaar gelegen continua E_1 en E_2 te construeren zodat er een deelboog van J bestaat die een deel van $U(E_1, E_2)$ is.

Bewijs:

Zij $P(o)$ een vast punt van J, $P(s)$ het punt van J dat tot $P(o)$ een boogafstand s heeft, en $t(s)$ de halftangent in $P(s)$ aan J in pos. s-richting. Kies s' zodanig dat de variatie van de richting van $t(s)$ over het vak $o \leqq s \leqq s'$ hoogstens $\pi/16$ is, dan zullen we aantonen dat bij de boog J', tussen $P(o)$ en $P(s')$, de gevraagde continua zijn te construeren. Stel $v(s_1)$ de variatie van de scherpe hoek tussen $t(s)$ en $t(o)$ over het vak $o \leqq s \leqq s_1 \leqq s'$. We verklaren een bepaalde draaiingszin in het vlak als de positieve, en construeren in ieder punt $P(s)$ van J' twee halfstralen $h_1(s, o)$ en $h_2(s, o)$ met $P(s)$ als beginpunt, zodanig dat vanuit $t(s)$ gerekend de hoek met $h_1(s, o)$ gelijk is aan $+\alpha(s)$, de hoek met $h_2(s, o)$ gelijk is aan $-\alpha(s)$. We kiezen:

$$\alpha(s) = \frac{\pi}{2} - v(s).$$

Twee halfstralen $h_1(s_1, o)$ en $h_1(s_2, o)$, $o \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq s'$, snijden elkaar niet, immers de hoek tussen $t(s_1)$ en $t(s_2)$ is hoogstens $v(s_2) - v(s_1) < \pi/16$, terwijl $a(s_1) - a(s_2) = v(s_2) - v(s_1)$. Evenmin snijden de halfstralen $h_2(s_1, o)$ en $h_2(s_2, o)$ elkaar. Zij $P(s_k)$ een dakpunt [1]) van J' en stel $v(s_k) - v(s_k - o) = \omega_k$. Dan maakt òf de richting van $h_1(s, o)$ òf die van $h_2(s, o)$ in $P(s_k)$ een sprong ω_k; onderstel dat het $h_1(s, o)$ is, dan voegen we toe de verzameling halfstralen $h_1(s_k, \varphi)$ met beginpunt in $P(s_k)$, die met $t(s_k)$ hoeken $a(s_k) + \varphi$ maken, waarbij $o < \varphi \leqq \omega_k$ (fig. V).

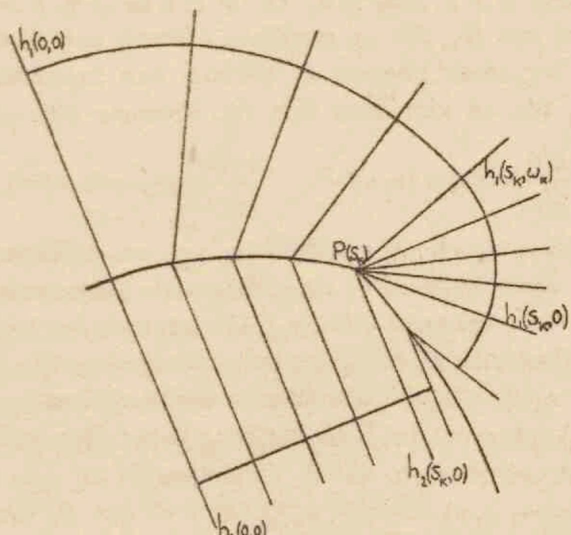

Fig. V

Een dergelijk stel halfstralen $h_2(s_k, \varphi)$ voegen we toe indien de richting van $h_2(s, o)$ een sprong in $P(s_k)$ maakt. Een der delen H_1 van het vlak dat begrensd wordt door J', $h_1(o, o)$ en $h_1(s', o)$, heeft de eigenschap dat door ieder punt ervan één en niet meer dan één halfrechte $h_1(s, \varphi)$ gaat. Evenzo heeft een der delen H_2 van het vlak, begrensd door J', $h_2(o, o)$ en $h_2(s', o)$ de eigenschap dat door ieder punt een halfrechte $h_2(s, \varphi)$ gaat. Zij

1) $P(s_k)$ is een dakpunt indien de beide halftangenten niet in elkaars verlengde liggen.

$P(x, y)$ een inwendig punt van b.v. H_1 en $\beta(x, y)$ de hoek die de door $P(x, y)$ gaande halfstraal $h_1(s, \varphi)$ met de positieve x-as maakt. Dan is $\beta(x, y)$ een tweedimensionaal continue funktie. Dit volgt uit het feit dat twee halfstralen elkaar niet snijden (hoogstens een beginpunt gemeen hebben). Verder is aan de Lipschitz conditie voldaan dat $\frac{\triangle \beta(x, y)}{\triangle x}$ en $\frac{\triangle \beta(x, y)}{\triangle y}$ begrensd zijn; immers, is P een punt van H_1, ϱ de lengte van het stuk van de halfstraal waar P op ligt, gerekend van het beginpunt tot P, dan is $\varrho \triangle \beta \leqq \triangle x$ en $\varrho \triangle \beta \leqq \triangle y$, $\varrho > 0$ en in een gebied van H_1, dat op positieve afstand van J' ligt, naar onderen begrensd. Volgens de Stelling van Lipschitz [1]) is er nu in H_1 één en niet meer dan één kromme $x(t)$, $y(t)$ zodat

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = \sin \beta\,(x, y) \qquad \frac{d\,y(t)}{dt} = -\cos \beta\,(xy).$$

terwijl $x(o) = x_0$ $y(o) = y_0$, als $P(x_0, y_0)$ een willekeurig punt in H_1 is. Deze kromme is de orthogonale trajectorie van de h_1 stralen door het punt $P(x_0, y_0)$. We beweren dat twee orthogonale trajectoriën E_1 en E_2, die van $h_1(o, o)$ resp. $h_2(o, o)$ gelijke stukken $a_1(o) = a_2(o)$ afsnijden, een meetkundige plaats $U\,(E_1, E_2)$ opleveren die J' als deelboog bevat. We onderstellen $a_1\,(o)$ zo groot gekozen, dat $E_1\,J'$ niet snijdt. Zij $a_1(s)$ het stuk dat E_1 van $h_1\,(s, o)$ afsnijdt, $a_2(s)$ het stuk dat E_2 van $h_2(s, o)$ afsnijdt, dan beweren we, dat $a_1(s) = a_2(s)$. Uit de constructie volgt dat als $P(s_k)$ een dakpunt is, òf E_1 een cirkelboog beschrijft tussen de stralen $h_1(s_k, o)$ en $h_1(s_k, \omega_k)$ òf E_2 tussen de stralen $h_2(s_k, o)$ en $h_2(s_k, \omega_k)$. $a_1(s)$ en $a_2(s)$ zijn dus continue funkties van s. Verder is uit figuur VI af te lezen, dat voor de rechter afgeleide $R\,\{a_1(s)\}$ van $a_1(s)$ geldt

$$R\,\{a_1(s)\} = -\cos \alpha(s)$$

en evenzo: $$R\,\{a_2(s)\} = -\cos \alpha(s).$$

Twee continue funkties die overal dezelfde begrensde rechter

1) O.a. te vinden in E. Picard, Traité d'Analyse II, blz. 350 e.v.

afgeleide hebben verschillen een constante; wegens $a_1(o) = a_2(o)$ is dus $a_1(s) = a_2(s)$.

We zullen nu aantonen, dat voor een punt $P(s_1)$ van J' geldt: $\overline{P(s_1), E_1} = \overline{P(s_1), E_2}$. Zij $Q(s_1)$ het snijpunt van $h_1(s_1, o)$ met E_1, $P(s_2)$ een van $P(s_1)$ verschillend punt van J' $(s_2 > s_1)$, $Q(s_2)$ het snijpunt van $h_1(s_2, o)$ met E_1. De vierhoek $P(s_1)$ $P(s_2)$ $Q(s_2)$ $Q(s_1)$ heeft geen inspringende hoeken. (De hoek

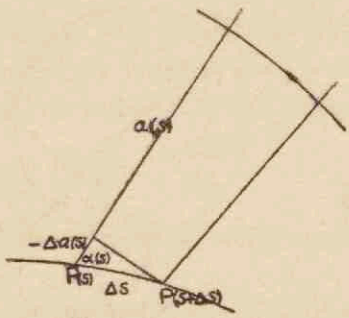

Fig VI

$P(s_1)$ $P(s_2)$ $Q(s_2)$ is kleiner dan π omdat h_1 (s_2, o) t.o.v. $h_1(s_1, o)$ hoogstens over een hoek $\pi/8$ gedraaid is, terwijl

$$\angle\, Q(s_1)\, P(s_1)\, P(s_2) \geqq \alpha(s_1) - \pi/16 \geqq \pi/2 - \pi/16 - \pi/16 = {}^6/_{16}\pi.$$

Hieruit volgt $\angle\, P(s_1)\, P(s_2)\, Q(s_2) \leqq {}^3/_4\pi$.)

De diagonaal $[P(s_1), Q(s_2)]$ is dus binnen de vierhoek gelegen, en maakt met die halftangent in $Q(s_2)$ aan E_1, die bij toenemende s behoort een hoek groter dan $\pi/2$ (genoemde halftangent staat loodrecht op $h_1(s_2, o)$). Hieruit volgt, dat als $Q(s)$ de kromme E_1 van $Q(s_1)$ naar $Q(s_2)$ doorloopt $\overline{P(s_1), Q(s)}$ groeit. Dezelfde eigenschap geldt bij afnemende s. Hieruit volgt, dat

$$\overline{P(s_1), E_1} = \overline{P(s_1), Q(s_1)} = a_1(s_1).$$

Evenzo is $\overline{P(s_1), E_2} = a_2(s_1)$. Daar $a_1(s_1) = a_2(s_1)$, is hiermee de stelling bewezen.

Er kan nog de vraag gesteld worden of de gevonden eigenschappen van $U(E_1, E_2)$ deze ook „im Groszen" karakteriseren. We laten de beantwoording van deze vraag in het midden, maar zullen nog aantonen, dat indien J een convexe kromme is, de twee verzamelingen E_1 en E_2 op eenvoudige wijze kunnen worden geconstrueerd. Kies een willekeurig punt E_1 binnen J (fig. VII) en beschouw de vereniging van alle cirkelschijven $C(P)$ met E_1 op de rand en met middelpunt P gelegen op J.

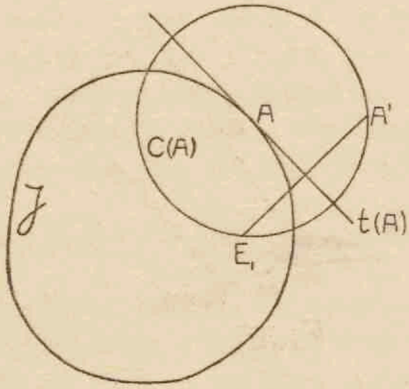

Fig VII

Zij E_2 de grens van deze vereniging (de omhullende van het stelsel). Dan is $U(E_1, E_2) = J$. Immers laat A een punt van J zijn, $t(A)$ een tangent in A aan J, en A' het op de rand van $C(A)$ gelegen spiegelbeeld van E_1 t.o.v. $t(A)$. J ligt nu aan één zijde van $t(A)$, A' aan de andere. Daar $t(A)$ de middelloodlijn van $[E_1, A']$ is, geldt voor ieder punt P van J $\overline{P, E_1} \leqq \overline{P, A'}$. A' is dus geen inwendig punt van een van de cirkelschijven $C(P)$, en behoort dus tot de omhullende E_2. Hieruit volgt, dat voor ieder punt $P \prec J$ geldt $\overline{P, E_1} = \overline{P, E_2}$. Buiten J zijn er geen punten met deze eigenschap, daar voor E_1 en E_2 continua $U(E_1, E_2)$ uit een enkelvoudig gesloten Jordankromme bestaat (zie opm. pag. 22).

STELLINGEN

I

Het door Wolff gegeven bewijs (Bulletin de la Soc. Math. de Fr. t. LXIII, fasc. I, II, pag. 37 en 38) dat D_1 en D_2 gebieden zijn, kan eenvoudiger geleverd worden.

II

Het door Lebesgue gegeven bewijs van de tussenwaarde-eigenschap van afgeleide funkties is onjuist.

Leçons sur l'intégration et la rech. des f. pr., 2de druk, pag. 96.

III

De volgende redenering in hetzelfde werk pag. 205 is onvolledig:

De là il résulte qu'une fonction $f(x)$ ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait est aussi ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé car, ou bien cet ensemble fermé est parfait, ou il contient des points isolés en lesquels $f(x)$ doit être regardée comme continue.

IV

In E. W. Hobson, ,,The theory of functions of a real variable" I, 3de druk, pag. 401, staat de volgende stelling van A. N. Singh geciteerd: er bestaat geen continue functie die in elk punt nòch naar rechts, nòch naar links een afgeleide heeft. Het bewijs van deze stelling is echter onjuist en vermoedelijk niet te herstellen.

J. DEKNATEL

V

De naam „pathologische functie" voor een nergens differentieerbare continue functie is eenzijdig; van een bepaald standpunt beschouwd kan een continue functie die ergens differentieerbaar is pathologisch heten.

VI

De opmerking van E. T. Steller in Euclides 6, 1934-'35, dat de „draaiende sloten" een goed voorbeeld van gezichtsbedrog zijn, geeft aanleiding tot begripsverwarring. Zijn verklaring is niet duidelijk.

VII

Tegen de verklaring van H. Köhler van het verschijnsel van iriserende wolken kunnen ernstige bezwaren worden aangevoerd.

Meteor. Zs. 46, 1929.

VIII

De verklaring die Hilbert van de term „Erweiterung" in ax. V 2 geeft is ontoelaatbaar.

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7de druk, blz. 30.

IX

De waarschijnlijkheidsleer kan als onderdeel van de wiskunde gefundeerd worden. De verhouding tussen waarschijnlijkheidsleer en zijn physische toepassing wordt dan analoog aan die tussen meetkunde en physische ruimteleer.