OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

OVER HET DIFFERENTIEEREN

VAN EENIGE

ELLIPTISCHE INTEGRALEN

NAAR DEN MODULUS, OF EENE FUNCTIE DAARVAN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Wanneer men een onderzoek wil beginnen over de eigenschappen van eenige integraal, hetzij bepaalde, hetzij ook onbepaalde; of evenzeer, wanneer men in beide gevallen de bepaling der waarde op het oog heeft; altijd behoort tot de meest bruikbare methoden, die, waarbij de integraal wordt gedifferentieerd naar eene standvastige, die in de functie onder het integraalteeken voorkomt. Somtijds is het mogelijk, daarbij eene uitdrukking te vinden voor eene herhaalde differentiatie, hetzij in rechtstreekschen, hetzij in wederkeerigen vorm; en dan zijn de stellingen voor herhaald differentieeren van veel belang, die echter slechts voor enkele eenvoudige functiën gelden. Voor de elliptische integralen waren zulke uitkomsten nog niet bekend; hetzij wat de eerste differentiatie, hetzij wat het herhaald differentieeren betreft naar den modulus, die daarin voorkomt. Een ander onderzoek voerde mij tot de behandeling van deze vraag voor de eenvoudige integralen, waarin de $\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}$ voorkomt, en verder voor de overeenkomstige, die $\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}$ bevatten.

2. Men vindt vooreerst

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p.x)=\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x}=\int_0^x \tfrac{1}{2}\,dx\,\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}=-\tfrac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}},$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p.x)=\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}=\int_0^x(-\tfrac{1}{2})\,dx\,\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}=\tfrac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}.$$

Ten einde deze en dergelijke uitkomsten weder tot elliptische integralen te herleiden, beschouwen wij de integraal

$$\int_0^x\frac{\sin^a x\,dx}{\Delta(p\,.\,x)^b}$$

naar de gewone beteekenis $\Delta(p\,.\,x)=\sqrt{1-p^2\sin^2 x}$. Hierin moet vooreerst b oneven zijn, $=2b+1$; anders toch heeft men te doen met rationeele goniometrische integralen, en niet met elliptische integralen. Evenzeer moet a even zijn $=2a$; want voor a oneven, $=2a+1$, dan konde men in de integraal

$$\int_0^x\frac{\sin^{2a}x\,.\,\sin x\,dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)}^{2b+1}}$$

$\cos x=y$ stellen, zoodat er kwam

$$-\int_0^{\cos x}\frac{(1-y^2)^a\,dy}{(1-p^2-p^2y^2)^{b+\frac{1}{2}}},$$

eene gewone irrationeele stelkundige integraal. Voor zulke $a=2a$, en $b=2b+1$ kan men nu aldus te werk gaan.

Omdat hier de methode van het integreeren bij gedeelten niet gemakkelijk of rechtstreeks tot het doel voert, moet men eene zekere, geschikte functie gaan differentieeren, en wel naar het volgende algemeene beginsel, waarbij y en z beide functiën van x zijn.

Stel dat men voor de onbepaalde integraal $\int\frac{y^a\,dx}{z^b}$ eene herleidingsformule wil zoeken, en dat men daarbij niet slaagt met de toepassing van het integreeren bij gedeelten; dan differentieere men de functie $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$; en nu geeft de logarithmische differentiatie

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}=\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}\left[(a+1)\frac{y'}{y}+\frac{z''}{z'}-(b-1)\frac{z'}{z}\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(a+1)y'z'z+yz''z-(b-1)yz'^2\right]=$$
$$=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz')z'+y'z'z+yz''z+yz'^2\right]=\frac{y^a}{z^b}\left[(ay'z-byz'\ z'+\frac{d}{dx}(yz'z)\right]. \quad . \ (\alpha)$$

Zoodra men nu er in slagen kan, om den veelledigen factor in het tweede lid dezer formule te ontwikkelen naar opklimmende machten, hetzij van y, hetzij van z, waarbij dan ook y^0 of z^0 in den regel voorkomt, kan men deze methode toepassen. Want nu wordt door integratie naar x het eerste lid een geïntegreerde vorm, $\frac{y^{a+1}z'}{z^{b-1}}$: en in het tweede lid verkrijgt men eene reeks van eenige integralen derzelfde soort; men kan dus daaruit gemakkelijk eene herleidingsformule zamenstellen.

In ons geval verkrijgen wij langs dezen weg

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}}\left[(2a+1)\frac{cos x}{sin x}+\frac{-sin x}{cos x}-(b-\tfrac{1}{2})\frac{-p^2\, 2 sin x\,.\,cos x}{1-p^2 sin^2 x}\right]=$$
$$=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\{(2a+1)cos^2 x-sin^2 x\}(1-p^2 sin^2 x)+(2b-1)p^2 sin^2 x\,.\,cos^2 x\right]=$$
$$=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[\{(2a+1)-2(a+1)sin^2 x\}(1-p^2 sin^2 x)+(2b-1)p^2 sin^2 x(1-sin^2 x)\right],$$

en, als men in het tweede lid de veelledige grootheid tusschen de vierkante haakjes naar de machten van $(1-p^2 sin^2 x)$ rangschikt,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{1}{p^2}\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[(2a-2b+3)(1-p^2 sin^2 x)^2+\right.$$
$$\left.+2\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\}(1-p^2 sin^2 x)-(1-p^2)(2b-1)\right], \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

of, wanneer men diezelfde veelledige grootheid rangschikt naar de machten van $sin^2 x$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{sin^{2a+1}x\,.\,cos x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}}\right]=\frac{sin^{2a}x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\left[(2a+1)-\{(1+p^2)(a+1)-p^2 b\}2 sin^2 x+(2a-2b+3)p^2 sin^4 x\right];.\ (\gamma)$$

waaruit blijkt, dat men zijn doel heeft bereikt. De eerste herleiding (β) toch geeft, als men naar x tusschen de grenzen 0 en x integreert, en de laatste integraal in het tweede lid oplost, omdat de gedifferentieerde grootheid in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt,

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-p^2)(2b-1)}\Big[-\frac{sin^{2a+1} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+2\{(2-p^2)(b-1)-(1-p^2)a\}\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3)\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-3/2}}\Big], \;. \text{(I)}$$

werkelijk eene herleidingsformule, waarin de veranderlijke parameter, hier de exponent in den noemer, telkens met de eenheid verminderd wordt.

Evenzoo kan men de tweede herleiding (γ) gebruiken. Omdat echter de integraal, die de hoogste macht van $sin^2 x$ bevat, hier tot factor onder het integraalteeken zoude hebben $sin^{2a+4} x$, moet men eerst de a door $a-2$ vervangen; dan integreeren tusschen de grenzen 0 en x van x, waarbij weder de term in het eerste lid voor $x = 0$ verdwijnt; en vervolgens de laatste integraal in het tweede lid oplossen. Langs dien weg verkrijgt men

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2a-2b-1)\,p^2}\Big[\frac{sin^{2a-3} x \,.\, cos\, x}{(1-p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+\{(1+p^2)(a+1)-p^2 b\}\,2\int_0^x \frac{sin^{2a-2} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} - (2a-3)\int_0^x \frac{sin^{2a-4} x\, dx}{(1-p^2 sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\Big], \;.\;. \text{(II)}$$

wederom eene herleidingsformule, waarin nu echter de parameter, die telkens met twee afneemt, hier de exponent van den teller is.

De eerste formule (I) heeft tot eindintegralen, voor $b = 1$,

$$\int_0^x sin^{2a} x\, dx \sqrt{1-p^2 sin^2 x} \quad \text{en} \quad \int_0^x \frac{sin^{2a} x\, dx}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}}.$$

Wilde men deze door de andere formule (II) bepalen, zoo heeft men als eindintegralen voor $a = 1$ en $a = 0$,

$$\int_0^x sin^2 x\, dx\, (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \int_0^x dx\, (1-p^2 sin^2 x)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

En hiervan vindt men dadelijk

$$\int_0^x dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = E(p.x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = F(p.x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{p^2}\int_0^x \frac{1-(1-p^2\sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,dx = \frac{1}{p^2}\Big[F(p.x)-E(p.x)\Big]. \quad \ldots \quad (3)$$

Ten einde nu nog de vierde te vinden, gebruike men de herleidingsformule (II) voor $a=2$, en voere daarbij de waarde van de integraal (3) in; zoo wordt

$$\int_0^x \frac{\sin^4 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{3p^4}\Big[p^2\sin x.\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}+(2+p^2)F(p.x)-2(1+p^2)E(p.x)\Big], \quad . \quad (4)$$

en daarmede wordt dan

$$\int_0^x \sin^2 x\,dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{1-p^2\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{3p^2}\Big[-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x} + (1-p^2)F(p.x) - (1-2p^2)E(p.x)\Big]. \quad \ldots \quad (5)$$

Voor de eerste formulen aan het hoofd dezer paragraaf geeft nog de herleidingsformule (I) voor $a=1$, $b=1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}} = \frac{1}{1-p^2}\Big[-\frac{\sin^3 x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - 2(1-p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x\,dx\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\Big],$$

of, door middel der integralen (3) en (5),

$$= \frac{1}{p^2(1-p^2)}\Big[-\frac{1+(1-p^3)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,p^2\sin x.\cos x - (1-p^2)F(p.x) + (p.x)\Big]. \quad \ldots \quad (6)$$

3. Deze uitkomsten zijn nu voldoende, om de eerste formulen van de vo-

rige paragraaf nader uit te rekenen; zij geven toch, door middel der integralen (3) en (6)

$$\frac{d}{d(p^2)} E(p\,.\,x) = \frac{1}{2\,p^2}\left[E(p\,.\,x) - F(p\,.\,x)\right], \ldots \ldots \ldots \ldots (a)$$

$$\frac{d}{d(p^2)} F(p\,.\,x) = \frac{1}{2\,p^2(1-p^2)}\left[E(p\,.\,x) - (1-p^2)\,F(p.x) - \frac{1+(1-p^2)\,sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\,sin^2 x}}\,p^2\,sin\,x\,.\,cos\,x\right]; \,.\, (b)$$

of indien wij de symbolische notatie der achtereenvolgende bewerkingen invoeren, hetgeen hier zeer eenvoudig aangaat,

$$\left[1 - 2\,p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] E(p\,.\,x) = F(p\,.\,x), \ldots \ldots \ldots \ldots (c)$$

$$\left[1 + 2\,p^2 \frac{d}{d(p^2)}\right] F(p\,.\,x) = \frac{1}{1-p^2}\left[E(p\,.\,x) - \frac{1+(1-p^2)\,sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\,sin^2 x}}\,p^2\,sin\,x\,.\,cos\,x\right] \ldots \ldots (d)$$

4. Op dezelfde wijze kan men de integralen behandelen, die onder het integraalteeken de functie $\sqrt{1+p^2\,sin^2 x}$ bevat; dan beginne men het onderzoek bij de twee eenvoudigste vormen

$$\frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\,sin^2 x} \quad \text{en} \quad \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\,sin^2 x}}.$$

Daartoe stelle men in de herleidingsformulen (I) en (II) $-p^2$ in de plaats van p^2; zoo worden deze

$$\int_0^x \frac{sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2b-1)(1+p^2)}\Bigg[-\frac{sin^{2a+1} x\,.\,cos\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} +$$

$$+ 2\,\{(2+p^2)(b-1) - (1+p^2)a\}\int_0^x \frac{sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2 sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} + (2a-2b+3)\int_0^x \frac{sin^{2a} x\,dx}{(1+p^2 sin^2 x)^{b-3/2}}\Bigg], \ldots (III)$$

$$= \frac{1}{(2\,a - 2\,b - 1)\,p^2}\Bigg[-\frac{sin^{2a-3} x\,.\,cos\,x}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b-\frac{1}{2}}} -$$

$$-\{(1-p^2)(a-1) + p^2 b\}\int_0^x \frac{sin^{2a-2} x\,dx}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}} + (2\,a-3)\int_0^x \frac{sin^{2a-4} x\,dx}{(1+p^2\,sin^2 x)^{b+\frac{1}{2}}}\Bigg]; \,.\, (IV)$$

waartoe dan verder behooren de volgende eindintegralen, waarbij voor de herleiding, waar noodig, de substitutie $x=\frac{\pi}{2}-y$ is gebruikt,

$$\int_0^x dx\sqrt{1+p^2\sin^2 x}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi} dy\sqrt{1+p^2\cos^2 y}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi} dy\sqrt{(1+p^2)-p^2\sin^2 y}=$$

$$=\sqrt{1+p^2}\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi} dy\sqrt{1-\frac{p^2}{1+p^2}\sin^2 y}=\sqrt{1+p^2}\left[E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad (7)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dy}{\sqrt{1+p^2\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{p^2}{1+p^2}\sin^2 y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\int_0^x\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\frac{1}{p^2}\int_0^x\frac{(1+p^2\sin^2 x)-1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}dx=\frac{1}{p^2}\left[\int_0^x dx.\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right],$$

of, na invoering dezer integralen (7) en (8),

$$=\frac{1}{p^2\sqrt{1+p^2}}\left[(1+p^2)\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}-\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]. \quad (9)$$

Ten einde te kunnen voortgaan met het opsporen van de volgende integralen, wende men zich tot de herleidingsformule (IV), en stelle daarin $a=2$, $b=0$; dan verkrijgt men, na invoering der integralen (8) en (9),

$$\int_0^x\frac{\sin^4 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\frac{1}{3p^2}\left[-\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-2(1-p^2)\int_0^x\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3p^4\sqrt{1+p^2}}\left[-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+p^2\sin^2 x}+\right.$$

$$\left.+(2-p^2)\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}-2(1-p^4)\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]. \quad (10)$$

Thans is men in staat gesteld, om de waarde te bepalen der integraal

$$\int_0^x \sin^2 x\, d\, x \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} = \int_0^x \frac{\sin^2 x + p^2 \sin^4 x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}\, d\, x =$$

$$= \frac{1}{3\,p^2}\sqrt{1+p^2}\Big[-p^2 \sin x . \cos x \sqrt{\frac{1+p^2 \sin^2 x}{1+p^2}} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\} +$$

$$+ (1+2\,p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\}\Big]; \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

waarbij de overbrenging der integralen (9) en (10) den factor $(1+p^2)$ invoerde, die derhalve uit de grootheid tusschen de haakjes konde verwijderd worden. Daarop geeft de herleidingsformule (III) voor $a = 1$ en $b = 1$

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}^3} = \frac{1}{1+p^2}\Big[-\frac{\sin^3 x . \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} - 2(1+p^2)\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} + 3\int_0^x \sin^2 x dx \sqrt{1+p^2 \sin^2 x}\Big],$$

die weder door de invoering der pas gevonden integralen (9) en (11) overgaat in

$$\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}^3} = \frac{1}{p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} . \frac{p^2 \sin x . \cos x}{\sqrt{1+p^2}} +$$

$$+ F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big] . \; . \; . \; . \quad (12)$$

5. Deze uitkomsten kunnen nu strekken tot het vinden der gezochte differentiaalformulen voor de integralen, die hier met de elliptische integralen overeenkomen. Men verkrijgt toch naar de uitkomsten (7) en (8), wanneer men naderhand van de integralen (9) en (12) gebruik maakt,

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\sqrt{1+p^2}\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x dx \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[(1+p^2)\Big\{E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\} - \Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\}\Big], \; . \quad (e)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\Big\{F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big\}\Big] = \frac{d}{d(p^2)}\int_0^x \frac{d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin^2 x\, d\, x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}^3} = \frac{1}{2\,p^2\sqrt{1+p^2}}\Big[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \frac{p^2 \sin x . \cos x}{\sqrt{(1+p^2)}} +$$

$$+ E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) - E\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big) - F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Big) + F\Big(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} . \frac{\pi}{2} - x\Big)\Big], \; . \quad (f)$$

waaruit men besluit tot den symbolischen vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

$$\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{1+p^2}\left[\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}+\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,p^2\sin x.\cos x\right], . \quad (h)$$

waarbij eene zekere overeenkomst met de vorige symbolische formulen (c) en (d) niet te miskennen is.

Wanneer men echter ter bekorting stelt

$$F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)=F_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

$$E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)=E_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

en daarop de differentiaalquotienten in de eerste leden van de formulen (e) en (f), als die van een produkt uitwerkt, verkrijgt men achtereenvolgens

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1+E_1\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\{(1+p^2)E_1-F_1\};$$

derhalve

$$\sqrt{1+p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}[E_1-F_1], \text{ of } \frac{d}{d(p^2)}E_1=\frac{1}{2p^2(1+p^2)}[E_1-F_1]. \ . \quad (e_1)$$

Evenzeer

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1+F_1(-\tfrac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{1+p^2}^3}=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}+E_1-F_1\right],$$

derhalve

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}+(1+p^2)E_1-F_1\right],$$

of

$$\frac{d}{d(p^2)} F_1 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)} \left[\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} p^2 \sin x \,.\, \cos x \sqrt{1+p^2} + (1+p^2) E_1 - F_1 \right] \ldots (f_1)$$

En hieruit besluit men wederom tot den symbolischen vorm der formulen

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] E_1 = F_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g_1)$$

$$\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] F_1 = \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} p^2 \sin x \,.\, \cos x \sqrt{1+p^2} + (1+p^2) E_1; \ldots (h_1)$$

die schijnbaar eenvoudiger zijn dan de vorige symbolische differentiaalformulen (g) en (h), en mede eenige overeenkomst vertoonen met de formulen (c) en (d) van § 3.

6. De bewerking $\left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, levert eene integraal der eerste; en de bewerking $\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]$ toegepast op de integraal der eerste soort, levert wederom eene integraal der tweede, afgezien van een factor $\frac{1}{1-p^2}$ en een goniometrischen term; dit volgt uit de symbolischen formulen (c) en (d) van § 3. Het ligt nu al dadelijk voor de hand om op de elliptische integraal van iedere soort zoodanige bewerking toe te passen, dat er wederom eene elliptische integraal van dezelfde soort ontstaat; hierin slaagt men op de volgende wijze, wanneer men de symbolische bewerkingen (c) en (d) van § 3 achtereenvolgens toepast,

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = E(p.x) - p^2 \sin x . \cos x \left\{\sqrt{1-p^2\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\} =$$

$$= E(p.x) - \sin x \,.\, \cos x \left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\}; \ldots\ldots (i)$$

wanneer men hierbij acht geeft op het ontstaan van den goniometrischen term in de formule (d), dat is op de integraal (6) in § 2. Zoodra men toch eenige wet wil opsporen, is het meestal nuttig van de latere herleidingen af te zien, en op te klimmen tot den oorspronkelijken vorm; en ook hier zal blijken, dat deze oorspronkelijke vorm voor de volgende bewerkingen het meest geschikt is. Uit deze (i) volgt nu verder

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x)=$$

$$=F(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left\{-2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\}=$$

$$=F(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\}; \quad .\ .\ (i_1)$$

en wederom

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x)=$$

$$=E(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left\{(7-8p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{4(1-p^2)+\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{2+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+\frac{3\cos^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\}=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\};.(i_2)$$

waarbij nu de bewerkingen op de elliptische integraal der tweede soort toegepast, hetzij eene integraal van dezelfde, hetzij eene der eerste soort voortbrengen, afgezien van den goniometrischen vorm, die hier telkens bestaat uit eenen factor $p^2\sin x.\cos x$, en eenen anderen, die functie is van $\sqrt{1-p^2\sin^2x}$.

Hetzelfde kan men even zoo goed bewerkstelligen ten opzichte van de elliptische integraal der eerste soort, en verkrijgt alsdan achtereenvolgens

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=E(p.x)-p^2\sin x.\cos x\left(\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{\sin^2x}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}\right)=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}\right\}, \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (d)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=$$

$$=F(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-2p^2\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}\right\}, \quad .\ (k)$$

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=$$

$$=E(p.x)-\sin x.\cos x\left\{-(1-7p^2+8p^4)\sqrt{1-p^2\sin^2x}+\frac{1+4p^2-4p^4}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}}+\frac{(3+p^2)(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^3}+3\frac{1-p^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2x}^5}\right\}..(k_1)$$

Het is niet moeielijk, uit deze verkregen formulen tot meer algemeene uitkomsten te geraken. Noem daartoe de bewerkingen

$$[1-p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P, \ldots (\zeta), \text{ en } \left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=Q; \ldots\ldots (\eta)$$

en zij in het algemeen $\Phi(x)$ eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$; dan volgt rechtstreeks uit de formulen (i), (i_1) en (i_2), (d), (k) en (k_1),

$$[Q.P.Q \ldots Q.P.Q]\, E(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (i_3)$$

$$[P.Q.P \ldots Q.P.Q]\, E(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (i_4)$$

$$[P.Q.P \ldots P.Q.P]\, F(p.x)=E(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x), \ldots\ldots (k_2)$$

$$[Q.P.Q \ldots P.Q.P]\, F(p.x)=F(p.x)+sin\,x.cos\,x.\Phi(x). \ldots\ldots (k_3)$$

Maar langs dezen weg ziet men niet in, wat de algemeene vorm van de functie $\Phi(x)$ worden zal, en de vergelijking dier functiën zoo als zij in de formulen (i_1), (i_2), (k), (k_1) voorkomen, geeft hier geen licht; ook niet, wanneer bij het uitwerken der bewerkingen, de gelijknamige termen niet bij elkander telt, zoo als hier boven is geschied, maar ze gescheiden houdt, onder gedurige toepassing der duidelijke herleidingsformule

$$\frac{p^2 sin^2 x}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}=\frac{1-(1-p^2 sin^2 x)}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2 sin^2 x}^{\,2k-1}}, \ldots (\theta)$$

ten einde de grootheid tusschen de vierkante haakjes, in het tweede lid, telkens tot functie van alleen $\sqrt{1-p^2 sin^2 x}$ te herleiden.

Zoodra men echter later overgaat tot compleete elliptische integralen, dus tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ genomen; dan wordt dit bezwaar geheel opgeheven, omdat alsdan de $\Phi(x)$ in het geheel niet meer voorkomt. Zij zelve kan toch nimmer oneindig groot worden, en de factor $sin\,x.cos\,x$ wordt gelijk aan nul, zoowel voor $x=0$, als voor $x=\frac{1}{2}\pi$; vandaar dat die laatste term in de vorige formulen geheel verdwijnt.

7. Wanneer men nu dezelfde beschouwingen wil toepassen op de differentiaalformulen, die in § 5 voorkomen, stelle men eerst ter bekorting

$$\sqrt{1+p^2}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=E_2, \ldots\ldots (i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=F_2, \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

dan verkrijgen de formulen (g) en (h) den vorm

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=F_2, \quad \ldots\ldots \quad (g')$$

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=E_2+p^2 \sin x.\cos x\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=E_2+\sin x.\cos x\left[(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right]=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad . \quad (h')$$

waar de $\Psi(x)$ uitdrukt eene rationeele functie van de wortelgrootheid $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$. Past men deze bewerkingen, vice versa, nog eenmaal toe, zoo verkrijgt men

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

$$\left[1-2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right][1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F_2=F_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x). \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

Wanneer men toch de aangewezene bewerkingen ten uitvoer brengt, en overal, waar noodig, de herleidingsformule

$$\frac{p^2\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{(1+p^2\sin^2 x)-1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^{2k+1}} \quad \ldots \quad (\lambda)$$

toepast, dan verkrijgt men telkens in het tweede lid een goniometrischen term, die $\sin x.\cos x$ tot factor heeft en waarvan de andere factor een rationeele vorm van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$, dat is eene $\Psi(x)$ is.

Maar nu kan men ook doorgaan met de achtereenvolgende toepassing der vorige bewerkingen; voeren wij daarbij gemakshalve wederom symbolen in, dan kan men de Q uit (η) behouden, maar moet de P uit (ζ) vervangen worden door

$$[1+p^2]\left[1+2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]=P_1. \quad \ldots\ldots \quad (\mu)$$

Op die wijze verkrijgt men dan hier

$$[P_1.Q.P_1\ \ldots\ Q.P_1.Q]\,E_2=E_2+\sin x.\cos x\,\Psi(x), \quad \ldots\ldots \quad (l_1)$$

$$[Q.P_1.Q\ \ldots\ Q.P_1.Q]\,E_2 = F_2 + \sin x.\cos x\,\Psi(x)\,, \qquad (l_2)$$

$$[Q.P_1.Q\ \ldots\ P_1.Q.P_1]\,F_2 = F_2 + \sin x.\cos x\,\Psi(x), \qquad (m_1)$$

$$[P_1.Q.P_1\ \ldots\ P_1.Q.P_1]\,F_2 = E_2 + \sin x.\cos x\,\Psi(x). \qquad (m_2)$$

Ook de formulen (g_1) en (h_1) geven gereede aanleiding voor eene overeenkomstige behandeling; maar daarbij heeft men dan andere bewerkingssymbolen noodig. Noem deze hier

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = R, \qquad (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] = S, \qquad (\xi)$$

dan heeft men vooreerst

$$[R]\,E_1 = F_1, \qquad (g_1)$$

$$[S]\,F_1 = E_1 + \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}} = E_1 + \frac{p^2\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\} =$$

$$= E_1 + \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\} = E_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x);\ . \qquad (h_1)$$

wanneer men onder $\Psi(x)$, even als boven, wederom eene rationeele functie van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ verstaat. Bij de herhaalde toepassing dezer bewerkingen, over en weder, komt er daarop vooreerst

$$[S.R]\,E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x)\,, \qquad (n)$$

$$[R.S]\,F_1 = F_1 + \sin x\ \cos .\,\Psi(x)\,; \qquad (o)$$

en vervolgens, geheel algemeen,

$$[S.R.S\ \ldots\ R.S.R]\,E_1 = E_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x), \qquad (n_1)$$

$$[R.S.R\ \ldots\ R.S.R]\,E_1 = F_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x), \qquad (n_2)$$

$$[R.S.R\ \ldots\ S.R.S]\,F_1 = F_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x), \qquad (o_1)$$

$$[S.R.S\ \ldots\ S.R.S]\,F_1 = E_1 + \sin x.\cos x\,\Psi(x) \qquad (o_2)$$

Een groot bezwaar van al de formulen in deze paragraaf, is, dat zij allen eene zekere functie $\Psi(x)$ van $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ bevatten, waarvan de wet vooralsnog onbekend is. Zoodra men echter later tot de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ overgaat, zoodat de elliptische integralen compleete worden met den modulus $\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$, wordt dit bezwaar weggenomen, omdat dan die functiën van onbekende zamenstelling niet meer voorkomen wegens den factor $\sin x . \cos x$, die evenzeer voor $x = 0$, als voor $x = \frac{1}{2}\pi$ verdwijnt.

8. Men kan echter tot geheel andere, niet minder belangrijke, uitkomsten geraken, door de vergelijking (a) nog eens naar p^2 te differentieeren; en daarbij gebruik te maken van de reeds gevonden eerste differentialen naar de formulen (a) en (b). Aldus verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)}E(p.x) = \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p.x)] + \frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}\{E(p.x) - F(p.x)\} - \frac{1}{2p^2(1-p^2)} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{-\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\, p^2 \sin x . \cos x - (1-p^2)F(p.x) + E(p.x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{-1}{2p^4}[E(p.x) - F(p\,x)] + \frac{1}{4p^4}\left[\frac{(1-p^2)-1}{1-p^2}E(p.x) + (1-1)F(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{p^2 \sin x . \cos x}{1-p^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2p^4}F(p.x) - \frac{2(1-p^2)+p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x \ \cos x}{4p^2(1-p^2)}; \quad . \ . \ . \ (p)$$

en verder, door middel van de formule (a), ten einde de overgebleven $F(p.x)$ te elimineeren,

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)} + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x) = \left\{\frac{1}{2p^4} - \frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}\right\}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)} =$$

$$= \frac{-p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x) + \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{\sin x . \cos x}{4p^2(1-p^2)};$$

en hieruit volgt ten slotte

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)} + 4(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)} + 1\right]E(p.x) = \frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\sin x . \cos x =$$

$$= \left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}\sin x \ \cos x; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (p_1)$$

waarbij met voordacht is afgezien van de nadere herleiding van den goniometrischen term, zooals die in de formule (i) is toegepast. Want nu kan men gemakkelijk n—2 maal differentieeren, het eerste lid volgens het theorema van LEIBNITZ, en het tweede lid naar de bekende formulen (zie o. a. mijn Overzicht der Differ. Rekening, bladz. 33, 34).

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1-p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)\,4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad +\quad 4(1-p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)\,4(-1)\qquad\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad\qquad\qquad \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right]E(p.x)=$$

$$=\sin x.\cos x\left[\sin^2 x\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\frac{1}{2}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right]=$$

$$=\sin^3 x.\cos x\left[\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{1}{2}\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right];$$

of wel, na herleiding,

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E(p.x)=$$

$$=\sin^3 x.\cos x\left\{\frac{(-1)^{n-2}\,1^{n-2/2}(-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-3}\,1^{n-3/2}(-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\right\}=$$

$$=\frac{-\sin^{2n-3}x.\cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}\{1-(2n-5+p^2)\sin^2 x\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Ten einde voorts de vergelijking (b) op dezelfde wijze te behandelen, schrijve men haar kortheidshalve

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p.x)=R-\frac{1}{2p^2}F(p.x)+\frac{1}{2p^2(1-p^2)}E(p.x),\ldots\ldots\ldots (b)$$

waar dus

$$R=-\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\frac{\sin x.\cos x}{2(1-p^2)}$$

genomen werd; dan verkrijgt men, door nog eens naar p^2 te differentieeren,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p.x)=\frac{dR}{d(p^2)}+\frac{1}{2p^4}F(p.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x)-\frac{1}{2p^2}\left\{R-\frac{1}{2p^2}F(p.x)+\frac{1}{2p^2(1-p^2)}E(p.x)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2p^2(1-p^2)}\frac{1}{2p^2}\{E(p.x)-F(p.x)\}=$$

$$=\frac{dR}{d(p^2)}-\frac{1}{2p^2}R+F(p.x)\left\{\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\}+E(p.x)\left\{-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}-\frac{1}{4p^4(1-p^2)}+\frac{1}{4p^4(1-p^2)}\right\}=$$

$$=\frac{dR}{d(p^2)}-\frac{1}{2p^2}R+\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x),\ldots\ldots\ldots\ldots (r)$$

$$=\frac{-\sin x\,.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1-p^2)-(3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}+$$

$$+\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.x)-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p\,.x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (r_1)$$

Gebruikt men nu de formule (b) weder, om uit (r) de $E(p\,.x)$ te elimineeren, zoo verkrijgt men

$$\left[\frac{d^2}{d(p^2)^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x)=\frac{dR}{d(p^2)}+R\left\{-\frac{1}{2p^2}+\frac{1-2p^2}{p^2(1-p^2)}\right\}+F(p\,x)\left\{\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}-\frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)}\right\}=$$

$$=\frac{dR}{d(p^2)}+\frac{1-3p^2}{2p^2(1-p^2)}R+\frac{p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p\,.x);$$

waaruit wederom wordt afgeleid

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1-2p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]F(p\,.x)=4p^4(1-p^2)\frac{dR}{d(p^2)}+2(1-3p^2)R=$$

$$=\frac{\sin x\,.\cos x}{p^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left[1-(1+p^2)(1-p^2\sin^2 x)+2p^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right]=$$

$$=\frac{\sin x\,.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left[\sin^2 x-(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\right]\ldots\ldots (r_2)$$

Bij deze herleidingen is in de laatste vergelijking (r_2), even als bij (r_1), gebruik gemaakt van de volgende uitkomst

$$\frac{d}{d(p^2)}R=-\tfrac{1}{2}\sin x\,.\cos x\,\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\left\{\frac{-\sin^2 x}{1+(1-p^2)\sin^2 x}-\frac{-1}{1-p^2}-\frac{1}{2}\frac{-\sin^2 x}{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin x\,.\cos x\,\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{(1-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{2+(1-3p^2)\sin^2 x+(1-p^2)^2\sin^4 x}{2(1-p^2)(1-p^2\sin^2 x)\left\{1+(1-p^2)\sin^2 x\right\}}=$$

$$=\frac{-\sin x\,.\cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1-p^2)-(2-3p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x)+(1-p^2)^2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}.$$

En nu kan men er toe overgaan, om de vergelijking (r_2) $n-2$ maal te differentieeren met behulp van het theorema van LEIBNITZ bij het eerste lid, en der boven aangehaalde formulen bij het tweede lid; deze bewerking levert ons dan het volgende

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1-p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)4(-2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \quad 4(1-2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+(n-2)4(-2)\qquad\qquad\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \qquad\qquad\qquad\qquad\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x\,.\cos x\,\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^{\,3}}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}-\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\right\};$$

waaruit men na herleiding verkrijgt

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p.x)=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(-\sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(-\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(-\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1-p^2\sin^2 x)^{n-5/2}}\right\}=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x(\sin^2 x)^{n-2}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-\sin^2 x(2n-3)(2n-5)+(2n-5)(1-p^2\sin^2 x)+2(1-p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{-\sin^{2n-3}x.\cos x}{(1-p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}[(2n-3)+\{(2n-3)(2n-5)-(2n-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x]\,.\quad .\ (s)$$

9. Laat ons trachten, dergelijke algemeene differentiaalformulen af te leiden voor de overeenkomstige integralen van § 5; beginnen wij daartoe met den laatsten vorm der uitkomsten (e_1) en (f_1). Differentieeren wij de vergelijking (e_1) nog eens naar p^2, zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{d}{d(p^2)}F_1\right\}=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left[(E_1-F_1)-\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}-F_1+(1+p^2)E_1\right\}\right]=$$

$$=-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}(E_1-F_1)+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left[-p^2E_1-\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\right].\quad .\ (t)$$

Daar nu de F'_1 uit den tweeden term van het tweede lid verdwenen is, en alleen voorkomt in den eersten term aldaar; en daar die eerste term naar de vergelijking (e_1) zelve juist

$$- \frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)} \frac{d}{d(p^2)} E_1$$

tot waarde heeft, zoo geeft het overbrengen daarvan in het eerste lid

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_1 + \frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}E_1 = -\frac{1}{4p^2(1+p^2)^2}\left[E_1 + \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x . \cos x \sqrt{1+p^2}\right];$$

waaruit dadelijk volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2} + 4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)} + 1\right]E_1 =$$
$$= -\sin x . \cos x \sqrt{1+p^2}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (t_1)$$

eene uitkomst, die men nu weder gereedelijk $n-2$ maal naar p^2 kan differentieeren; bij welke bewerking eenerzijds het theorema van LEIBNITZ, anderzijds de boven aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren te gebruiken zijn. Langs dien weg komt men tot deze uitkomst

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)^2\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)4(1+4p^2+3p^4)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)4(4+6p^2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ \qquad + \dfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)4.6.\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \quad + \quad 4(1+3p^2+2p^4)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2) \quad 4(3+4p^2)\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ \qquad + \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \quad 4.4.\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \qquad + \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E_1 = \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P; . (u)$$

als P het tweede lid van de vergelijking (t_1) voorstelt, dus

$$P = (-\sin x . \cos x)(\sqrt{1+p^2})\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}.$$

Ten einde van deze uitdrukking het $n-2$ differentiaalquotient ten opzichte van p^2 te bepalen, is men gedwongen, zijn toevlucht te nemen tot het theorema van LEIBNITZ; en daartoe vindt men achtereenvolgens

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]=$$

$$=\frac{d^k}{d(p^2)^k}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=\sin^2 x.\left[\frac{(-1)^k 1^{k/2}(\sin^2 x)^k}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{k-1}1^{k-1/2}(\sin^2 x)^{k-2}}{2^{k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{k-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^k\sin^{2k}x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{k-1/2}}{2^k}\{(2k-1)\sin^2 x-(1+p^2\sin^2 x)\}=\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x.\,1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\cdot\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}\,\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n-k-3}\,1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-3}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}};$$

zoodat nu algemeen is

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}P=-\sin x.\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{(-1)^{k-1}\sin^{2k}x.\,1^{k-1/2}}{2^k(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}}\{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x\}\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-3/2}}{2^{n-k-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\,\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}};$$

en hierdoor wordt de vergelijking (u) na eenige herleiding

$$\Big[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\{n(1+3p^2)-(1+4p^2)\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+$$
$$+\{1+4(n-2)[n(2+3p^2)-(3+5p^2)]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\Big]E_1=$$
$$=\Big[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+$$
$$+\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)^2(n-3)\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\Big]E_1=$$
$$=\sum_{k=0}^{k=n-2}(-1)^{n-1}\binom{n-2}{k}\frac{1^{k-1/2}\,1^{n-k-3/2}\sin^{2k+1}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{n-k-2\frac{1}{2}}}\,\frac{1+(1-2k+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2\sin^2 x)^{k+\frac{1}{2}}},\quad\ldots\quad(u_1)$$

waarin de tweede vorming van het eerste lid geschied is met het oog op de straks af te leiden algemeene differentiaalformule (w_1) voor de andere functie F_1: op die wijze toch wordt eerst het verband tusschen beide formulen zichtbaar.

Ten einde nu de overeenkomstige vergelijking (f_1) op dezelfde wijze te kunnen behandelen, schrijve men haar eerst in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{\sin x.\cos x}{2\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right]+\frac{1}{2p^2}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}F_1,\quad\cdot\ (f_1)$$

dan komt er, wanneer men, even als boven, nog eens ten opzichte van p^2 differentieert,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{2.2\sqrt{1+p^2}^3}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}+\frac{\sin x.\cos x}{2\sqrt{1+p^2}}\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+\tfrac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{2p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_1-\frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4\sqrt{1+p^2}^3}\left\{(1+p^2)\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-p^2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}F_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}(E_1-F_1)+$$

$$+\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}^3}\left\{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}\frac{1}{-4p^4(1+p^2)}E_1+\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1=$$

$$=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+(1-p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{2p^4}E_1+\frac{(1+2p^2)-(1+p^2)+1}{4p^4(1+p^2)^2}F_1 \,.\,.\, (v)$$

Ten einde hieruit nog de overgebleven E_1 te elimineeren, telle men naar de formule (f_1) bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{-2\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{(1+p^2\sin^2 x)}\right\}+\frac{1}{2p^4}E_1-\frac{2(1+p^2)}{4p^4(1+p^2)^2}F_1,$$

dan komt er, na herleiding,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_1+\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}F_1=\frac{-\sin x.\cos x}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}F_1;$$

waaruit verder dadelijk volgt

$$\left[4p^4(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_1=$$

$$=-p^2\sin x.\cos x\sqrt{1+p^2}\left\{p^2\frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}-(1+p^2)\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right\}\,.\,.\,(v_1)$$

Hierbij valt reeds dadelijk op te merken, dat de symbolische bewerking van het eerste lid overgaat in die bij de vergelijking (t_1) wanneer men in (v_1) de p^2 en $1+p^2$ onderling verwisselt; men ziet dadelijk dat eene dergelijke verwisseling, dat is van p^2 en $1-p^2$, bij de vorige overeenkomstige vergelijkingen (p_1) en (r_1) niet opgaat. Wil men nu uit deze differentiaalformule van de tweede orde eene algemeene differentiaalformule afleiden, dan moet men eerst het tweede lid der vorige vergelijking (v_1), wat betreft den factor tusschen de haakjes, in een anderen vorm brengen, meer geschikt voor het algemeene differentieeren naar p^2; men vindt alzoo achtereenvolgens

$$p^2 \frac{sin^4 x}{\sqrt{(1+p^2 sin^2 x)^3}} - (1+p^2) \frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2 sin^2 x} =$$

$$= \left(-\frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}^3} + \frac{sin^2 x}{\sqrt{(1+p^2 sin^2 x)}}\right) - \frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} - \sqrt{1+p^2 sin^2 x}\right) - \sqrt{1+p^2 sin^2 x} =$$

$$= -\frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2 sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v_2)$$

Differentieer nu n—2 maal naar (p^2), zoo wordt

$$\left[\begin{array}{l} 4p^4(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)4p^2(2+3p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)4(2+6p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4) \,.\, 4.6. \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \qquad + \quad 4p^2(1+p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + (n-2) \quad 4(1+2p^2)\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad\qquad \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] F_1 = \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} Q, \, . \, (w)$$

waarbij Q het tweede lid der vergelijking (v_1) voorstelt, en wel zoo, dat de tweede factor tusschen de haakjes den vorm (v_2) heeft verkregen. Men heeft dus

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} Q = -sin x . cos x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\left[(p^2\sqrt{1+p^2})\left(-\frac{sin^2 x}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}^3} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2 sin^2 x}} - 2\sqrt{1+p^2 sin^2 x}\right)\right].$$

Ten einde deze door middel van het theorema van LEIBNITZ te bepalen, heeft men eerst

$$\frac{d^k}{d(p^2)^k}[p^2\sqrt{1+p^2}] = p^2 \frac{d^k}{d(p^2)^k}\sqrt{1+p^2} + k.1. \frac{d^{k-1}}{d(p^2)^{k-1}}\sqrt{1+p^2} = p^2 \tfrac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1} 1^{k-1/2}}{2^{k-1}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} + k. \tfrac{1}{2} \frac{(-1)^{k-2} 1^{k-2/2}}{2^k (1+p^2)^{k-3/2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-2} 1^{k-2/2}}{2^k (1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} \{-p^2(2k-3) + 2(1+p^2)\} = \frac{(-1)^{k-2} 1^{k-2/2}}{2^k (1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}} \{2-(2k-5)p^2\},$$

$$\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\left(\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)=$$

$$=2\frac{d^{n-k-1}}{d(p^2)^{n-k-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+\frac{d^{n-k-2}}{d(p^2)^{n-k-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-2\sin^2 x\frac{d^{n-k-3}}{d(p^2)^{n-k-3}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}=$$

$$=2\frac{(-1)^{n-k-1}1^{n-k-1/2}(\sin^2 x)^{n-k-1}}{2^{n-k-1}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}+\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-2/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}-\sin^2 x\frac{(-1)^{n-k-3}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-3}}{2^{n-k-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-5/2}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-3/2}}\{-(2n-2k-3)(2n-2k-5)\sin^2 x+(2n-2k-5)(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-k-2}1^{n-k-3/2}(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-k-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];$$

zoodat eindelijk wordt

$$\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}Q=-\sin x.\cos x\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}\,1^{k-2/2}\,(-1)^n\,(\sin^2 x)^{n-k-2}}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}\{2-(2k-5)p^2\}\times$$

$$\times[(2n-2k-3)-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];$$

en hiermede verkrijgen wij ten slotte voor onze differentiaalformule (w)

$$\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{n(2+3p^2)-(3+5p^2)\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\ \quad+[1+4(n-2)\{n(1+3p^2)-(2+7p^2)\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=\left[\begin{array}{l}4p^4(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\\ \quad+[1+4(n-2)\{(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2\}]\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}+4(n-2)(n-3)^2\dfrac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\end{array}\right]F_1=$$

$$=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{k=n-2}\binom{n-2}{k}\frac{1^{n-k-3/2}\,1^{k-2/2}\sin^{2n-2k-3}x.\cos x}{2^{n-2}(1+p^2)^{k-\frac{1}{2}}(1+p^2\sin^2 x)^{n-k-\frac{1}{2}}}\{2-(2k-5)p^2\}[(2n-2k-3)-$$

$$-\{(2n-2k-3)(2n-2k-5)+(2n-2k-5)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x];\quad\ldots\ldots(w_1)$$

waarbij wederom het eerste lid door eene kleine herleiding zoo veranderd is, dat de straks vermelde overeenkomst met de formule (u_1) gemakkelijker in het oog springt.

10. De schijnbaar meer zamengestelde vergelijkingen (e) en (f) kan men op dezelfde wijze behandelen; zoo als men zien zal, geven zij tot meer eenvoudige uitkomsten aanleiding. Schrijven wij ze daartoe in den volgenden vorm

$$\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^2}(E_2 - F_2), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (e')$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{\frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}p^2 \sin x \cdot \cos x - (1+p^2)F_2 + E_2\right\} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2; \ldots \ldots (f')$$

waarbij nu de vormen E_2 en F_2 van de formulen (i) en (k) zijn ingevoerd; zoodat die beide vergelijkingen in dezen vorm met de andere vergelijkingen (c) en (d) tamelijk wel overeenkomen. Differentieert men nu deze vergelijkingen nog eenmaal naar p^2, en voert men daarna dezelfde vergelijkingen wederom in, zoo komt er achtereenvolgens voor de eerste

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) + \frac{1}{2p^2}\left(\frac{d}{d(p^2)}E_2 - \frac{d}{d(p^2)}F_2\right) = -\frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2) +$$

$$+\frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{2p^2}(E_2-F_2) - \left\{\frac{\sin x.\cos x}{2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right) - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2\right\}\right]; \ldots (x)$$

omdat nu bij den term tusschen de vierkante haakjes in het tweede lid, de term $\frac{1}{2p^2}$ F_2 geheel verdwijnt, behoeft de F_2 alleen uit den eersten term van dat tweede lid te worden geelimineerd. Dit geschiedt zeer eenvoudig door middel van de vergelijking (e); telt men toch bij

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{1}{2p^4}(E_2 - F_2),$$

zoo komt er

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E_2 + \frac{1}{p^2}\frac{d}{d(p^2)}E_2 = \frac{(1+p^2)-1}{4p^4(1+p^2)}E_2 - \frac{\sin x \cdot \cos x}{4p^2(1+p^2)}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right),$$

of, na eene aangewezen herleiding,

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2} + 4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)} - 1\right]E_2 = -\sin x.\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right), \cdot (x_1)$$

waaruit verder, wanneer men deze vergelijking $n-2$ maal naar p^2 differentieert, de algemeene differentiaalformule volgt

$$\left[\begin{array}{llll} 4p^2(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n} + (n-2)4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} & + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3).4.2. & \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad + \qquad 4(1+p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} & + \quad (n-2) \qquad 4.1. & \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ & \qquad - & \dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right] E_2 =$$

$$= -\sin x . \cos x \left\{ \sin^2 x \frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} \right\},$$

dat is

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n} + 4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}} + \{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right] E_2 =$$

$$= -\sin^3 x . \cos x \left\{ \frac{(-1)^{n-2}\, 1^{n-2/2} (\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n-3}\, 1^{n-3/2} (\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-5/2}} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n \sin^{2n-1} x . \cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}} \frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}} \{1-(2n-5-p^2)\sin^2 x\} \dots\dots\dots\dots (y)$$

Ten einde verder op dezelfde wijze de functie F_2 te behandelen, noeme men kortheidshalve den eersten term in het tweede lid van de vergelijking (f')

$$\frac{\sin x . \cos x}{2(1+p^2)} \left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} + \sqrt{1+p^2\sin^2 x} \right) = R = \frac{\sin x . \cos x}{2(1+p^2)} \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}};$$

en differentieere vervolgens die vergelijking (f') nog eenmaal naar (p^2), zoo verkrijgt men

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = \frac{d}{d(p^2)}R + \frac{1}{2p^4}F_2 - \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}E_2 - \frac{1}{2p^2}\left\{ R - \frac{1}{2p^2}F_2 + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}E_2 \right\} + \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\frac{1}{2p^2}(E_2-F_2) \dots (z)$$

Daar nu echter in den eersten term van het tweede lid is

$$\frac{d}{d(p^2)}R = \frac{1}{2}\sin x . \cos x \frac{1+(1+p^2)\sin^2 x}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} \left\{ \frac{\sin^2 x}{1+(1+p^2)\sin^2 x} - \frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{1+p^2\sin^2 x} \right\} =$$

$$= \frac{-\sin x . \cos x}{4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} \{2+(1+3p^2)\sin^2 x + (1+p^2)^2\sin^4 x\} =$$

$$= \frac{-\sin x . \cos x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2\sin^2 x}^3} \{(1+p^2) - (2+3p^2-p^4)(1+p^2\sin^2 x) + (1+p^2)^2(1+p^2\sin^2 x)^2\},$$

en dus, na substitutie in de vorige vergelijking,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F_2 = F_2\left\{\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right\}-E_2\left(\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}+\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\right)-$$
$$-\frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{4p^4(1+p^2)^2\sqrt{1+p^2sin^2x}^3}\{(1+p^2)-(2+3p^2-p^4)(1+p^2sin^2x)+2(1+p^2)^2(1+p^2sin^2x)^2\}\,..\,(z_1)$$

Daar in de coëfficiënt van E_2 de beide laatste termen elkander opheffen, moet slechts de eerste term worden verdreven, om de E_2 geheel te elimineeren. Tot dat einde telle men bij de vorige vergelijking (z)

$$\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = \frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)^2}E_2-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}F_2+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}R,$$

zoodat men verkrijgt

$$\frac{d^2}{d(p^2)}F_2+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\frac{d}{d(p^2)}F_2 = F_2\left(\frac{1}{2p^4}+\frac{1}{4p^4}-\frac{1}{4p^4(1+p^2)}-\frac{1+2p^2}{2p^4(1+p^2)}\right)+$$
$$+\left\{\frac{d}{d(p^2)}R+R\left(-\frac{1}{2p^2}+\frac{1+2p^2}{p^2(1+p^2)}\right)\right\}=-\frac{p^2}{4p^4(1+p^2)}F_2+\left(\frac{d}{d(p^2)}R+\frac{1+3p^2}{2p^2(1+p^2)}R\right);$$

en hieruit leidt men verder af

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F_2 =$$
$$=\frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{p^2(1+p^2)\sqrt{1+p^2sin^2x}^3}\{-(1+p^2)+(1-p^4)(1+p^2sin^2x)+(1+p^2)2p^2(1+p^2sin^2x)^2\}=$$
$$=\frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{p^2\sqrt{1+p^2sin^2x}^3}\{-1+(1-p^2)(1+p^2sin^2x)+2p^2(1+p^2sin^2x)^2\}=$$
$$=\frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{\sqrt{1+p^2sin^2x}^3}\{sin^2x-(1+p^2sin^2x)+2(1+p^2sin^2x)^2\}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z_2)$$

Thans kan men overgaan, om deze differentiaalformule $n-2$ maal te differentieeren, waarbij men weder gebruik heeft te maken van het theorema van LEIBNITZ, en van de reeds vroeger aangehaalde formulen voor herhaald differentieeren. Langs dien weg komt men dan tot de volgende uitkomst

$$\left[\begin{array}{l} 4p^2(1+p^2)\dfrac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-2)\,4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \qquad +\qquad 4(1+2p^2)\dfrac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\quad(n-2)\qquad 4\,.\,2\,.\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \\ \hfill -\dfrac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}} \end{array}\right]F_2=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{-2\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}-\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}+2\frac{d^{n-3}}{d(p^2)^{n-3}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}\right\},$$

waaruit verder na herleiding volgt

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+(n-1)\,4(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F_2=$$

$$=\sin x.\cos x\left\{-2\frac{(-1)^{n-1}1^{n-1/2}(\sin^2 x)^{n-1}}{2^{n-1}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{(-1)^{n-2}1^{n-2/2}(\sin^2 x)^{n-2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-3/2}}+\sin^2 x\frac{(-1)^{n-3}1^{n-3/2}(\sin^2 x)^{n-3}}{2^{n-3}(1+p^2\sin^2 x)^{n-5/2}}\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\sin x.\cos x(\sin^2 x)^{n-2}1^{n-3/2}}{2^{n-2}(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\{-(2n-3)(2n-5)\sin^2 x+(2n-5)(1+p^2\sin^2 x)+2(1+p^2\sin^2 x)^2\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\sin^{2n-3}x.\cos x}{(1+p^2\sin^2 x)^{n-\frac{1}{2}}}\,\frac{1^{n-3/2}}{2^{n-2}}[(2n-3)+\{(2n-3)(2n-5)+(2n-1)p^2\}\sin^2 x+2p^4\sin^4 x]\,..\,(aa)$$

11. Laat ons ter toepassing van enkele der vorige formulen, nog het derde differentiaalquotient ten opzichte van p^2 afleiden van de beide elliptische integralen der eerste en tweede soort. Zij daartoe in de vergelijking (q) $n=3$, zoo is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3}+4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}-3\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p.x)=-\frac{\sin^3 x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\,\frac{1}{2}\,\{1-(1+p^2)\sin^2 x\}.$$

Daarbij volgt uit de vergelijkingen (p) en (o), overeenkomstig,

$$-4(2-3p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}E(p.x)=-4(2-3p^2)\left\{\frac{1}{2p^4}F(p.x)-\frac{2-p^2}{4p^4(1-p^2)}E(p.x)+\frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\,\frac{1+(1-p^2)\sin^2 x}{4p^2(1-p^2)}\right\},$$

$$3\frac{d}{d(p^2)}E(p.x)=\frac{3}{2p^2}\{E(p.x)-F(p.x)\}.$$

Wanneer men deze bij de eerste optelt, en dan door $4p^2(1-p^2)$ deelt, verkrijgt men

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p.x)=\frac{3+5p^2-16p^4+6p^6}{8p^4(1-p^2)^2}E(p.x)-\frac{4-3p^2}{8p^4(1-p^2)}F(p.x)-$$

$$-\frac{\sin x.\cos x}{8p^4(1-p^2)^2}\left\{\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}-\frac{7+p^2-5\sin^2 x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}+5(2-p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\}\,.\;.\;.\,(ab)$$

Vervolgens neme men $n = 3$ in de vergelijking (s), dan is

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^3} + 8(1-2p^2)\frac{d^3}{d(p^2)^2} - 9\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p.x) =$$

$$= -\frac{\sin^3 x . \cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5}\tfrac{1}{2}\left\{-3\sin^2 x + (1-p^2\sin^2 x) + 2(1-p^2\sin^2 x)^2\right\}.$$

Evenzeer volgt nu uit de vergelijkingen (r) en (b) achtereenvolgens

$$-8(1-2p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p.x) = -8(1-2p^2)\left[\frac{2-3p^2}{4p^4(1-p^2)}F(p.x) - \frac{1-2p^2}{2p^4(1-p^2)^2}E(p.x) -\right.$$

$$\left. -\frac{\sin x . \cos x}{4p^4(1-p^2)^2\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3}\left\{(1-p^2)-(3-4p^2-p^4)(1-p^2\sin^2 x) + 2(1-p^2)^3(1-p^2\sin^2 x)^3\right\}\right],$$

$$9\frac{d}{d(p^2)}F(p.x) = \frac{9}{2p^2(1-p^2)}\left[-(1-p^2)F(p.x) + E(p.x) - p^2\frac{\sin x . \cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}\left\{\sin^2 x + (1-p^2\sin^2 x)\right\}\right].$$

Door middel van deze vergelijkingen verdwijnen de twee laatste termen uit het eerste lid; wanneer men daarop door $4p^2(1-p^2)$ deelt, komt er

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p.x) = \frac{8-23p^2+23p^4}{8p^6(1-p^2)^3}E(p.x) - \frac{2+2p^2-3p^4}{8p^6(1-p^2)^2}F(p.x) - \frac{\sin x . \cos x}{8p^6(1-p^2)^3}\left\{\frac{3(1-p^2)^2}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^5} +\right.$$

$$\left. + \frac{(3+p^2)(1-p^4)}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3} + \frac{9-42p^2+32p^4+9p^6}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - (1-p^2)^2(8-5p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right\} \quad . . (ac)$$

12. Wat betreft de elliptische integralen van de derde soort, bedenke men, dat zij slechts van die der eerste soort verschillen door den factor $(1 - n\sin^2 x)^{-1}$ onder het integraalteeken; daar deze factor geene p bevat, hebben de bewerkingen van de vorige paragrafen daarop geen invloed; en is men derhalve voor deze integralen der derde soort teruggevoerd tot de vergelijkingen voor de functie $F(p.x)$.

Vervolgens kunnen wij nog het integreeren ten opzichte van de standvastige p^2 beproeven, maar dan verkrijgen wij, door verwisseling in de orde van het integreeren, hetgeen hier geoorloofd is,

$$\int d(p^2)E(p.x) = \int_0^x dx\int d(p^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = \int_0^x dx\frac{-2}{3\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3 = -\frac{2}{3}\int_0^x \sqrt{1-p^2\sin^2 x}^3\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\int d(p^2)F(p.x) = \int_0^x dx\int d(p^2)\frac{1}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \int_0^x dx\frac{-2}{\sin^2 x}\sqrt{1-p^2\sin^2 x} = -2\int_0^x \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Beide uitkomsten zijn ondoorloopende integralen, omdat de functie onder het integraalteeken voor de benedenste grens $u = 0$ een eindigen teller bezit, terwijl daarentegen de noemer, $sin^2 x$, nul wordt. Langs dezen weg kan men dus niet tot bruikbare uitkomsten geraken.

13. Veel eenvoudiger worden de vorige uitkomsten, wanneer men de integralen tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, waardoor zij tot bepaalde integralen worden.

In dat geval toch worden de vergelijkingen (a) en (b), (c) en (d)

$$\frac{d}{d(p^2)}E(p) = \frac{1}{2p^2}\{E(p) - F(p)\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (A)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}F(p) = \frac{1}{2p^2(1-p^2)}\{E(p) - (1-p^2)F(p)\}, \ldots \ldots \ldots \quad (B)$$

$$\left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]E(p) = F(p), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (C)$$

$$\left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]F(p) = \frac{1}{1-p^2}E(p). \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (D)$$

Bij de vergelijkingen (e) en (f), (g) en (h) wordt

$$E_1 = \left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi} = +E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \ldots \quad (\delta_1)$$

$$F_1 = \left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi} = +F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \ldots \quad (\varepsilon_1)$$

zoodat zij leveren

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ldots \quad (E)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \frac{1}{2p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \ldots \quad (F)$$

$$\left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \ldots \ldots \ldots \quad (G)$$

$$\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\} = \sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right); \ldots \ldots \ldots \quad (H)$$

terwijl verder uit de volgende vergelijkingen (e_1) en (f_1), (g_1) en (h_1) wordt afgeleid

$$\frac{d}{d(p^2)}\cdot E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{E}_1)$$

$$\frac{d}{d(p^2)}\cdot F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{2p^2(1+p^2)}\left\{(1+p^2)\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \quad \ldots \quad (\mathrm{F}_1)$$

$$\left[1 - 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{G}_1)$$

$$\left[1 + 2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right] F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = (1+p^2)\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{H}_1)$$

Behouden wij de notatiën voor de bewerkingen

$$[1-p^2]\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = P, \quad \ldots (\zeta), \quad \text{en} \quad \left[1 - 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = Q; \quad \ldots\ldots (\eta)$$

dan geven de vergelijkingen (i_3) en (i_4), (k_2) en (k_3)

$$[Q.P.Q \;\ldots\; Q.P.Q]\, E(p) = F(p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}_3)$$

$$[P.Q.P \;\ldots\; Q.P.Q]\, E(p) = E(p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}_4)$$

$$[P.Q.P \;\ldots\; P.Q.P]\, F(p) = E(p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{K}_2)$$

$$[Q.P.Q \;\ldots\; P.Q.P]\, F(p) = F(p); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{K}_3)$$

terwijl bij het behoud der notatie

$$[1+p^2]\left[1 + 2p^2\frac{d}{d(p^2)}\right] = P_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

de vergelijkingen (l_1) en (l_2), (m_1) en (m_2) geven, omdat hier wordt,

$$E_2 = \sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\iota_1)$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\, F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varkappa_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \;\ldots\; Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] = \sqrt{1+p^2}\, E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad . \quad (\mathrm{L}_1)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots Q.P_1.Q]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (L_2)$$

$$[Q.P_1.Q \ldots P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (M_1)$$

$$[P_1.Q.P_1 \ldots P_1.Q.P_1]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad (M_2)$$

En eindelijk, indien men de bewerkingsnotatiën

$$\left[1-2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]=R, \quad (\nu)$$

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\right]\left[1+2p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}\right]=S \quad (\xi)$$

behoudt, leidt men uit de vergelijkingen (n_1) en (n_2), (o_1) en (o_2) af

$$[S.R.S \ldots R.S.R]\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (N_1)$$

$$[R.S.R \ldots R.S.R]\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (N_2)$$

$$[R.S.R \ldots S.R.S]\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right), \quad (O_1)$$

$$[S.R.S \ldots S.R.S]\,F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \quad (O_2)$$

Verder leveren de vergelijkingen (p) en (p_1), (r) en (r_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E(p)=\frac{1}{4p^4(1-p^2)}\{2(1-p^2)F(p)-(2-p^2)E(p)\}, \quad (P)$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}+4(1-p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E(p)=0, \quad (P_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F(p)=\frac{1}{4p^4(1-p^2)^2}\{(2-3p^2)F(p)-2(1-2p^2)E(p)\}, \quad (R)$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^2}{d(p^2)}+4(1-2p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]F(p)=0, \quad (R_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (q) en (s)

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)-(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{1-4(n-2)^2\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E(p)=0, \quad . \text{(Q)}$$

$$\left[4p^2(1-p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1-2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}-\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F(p)=0\,.\,. \text{(S)}$$

Vervolgens genaderd tot de vergelijkingen (t) en (t_1), (v) en (v_1), komt er naar de formulen (δ_1) en (ε_1)

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)^2}\left\{2(1+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(2+5p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \; . \text{(T)}$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0, \; \ldots\ldots \text{(T}_1\text{)}$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=\frac{1}{4p^4(1+p^2)}\left\{F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}, \; \ldots \text{(V)}$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4p^2(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V}_1\text{)}$$

en naar de meer algemeene differentiaalformulen (u) en (w)

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(1+p^2)\{(2n-3)p^2+(n-1)(1+p^2)\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)p^2+(2n-3)(1+p^2)]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0, \; .. \text{(U)}$$

$$\left[4p^2(1+p^2)^2\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4p^2\{(2n-3)(1+p^2)+(n-2)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+\{1+4(n-2)[(n-2)(1+p^2)+(2n-5)p^2]\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0\ldots \text{(W)}$$

Even zoo geven de volgende vergelijkingen (x) en (x_1), (z) en (z_1), wanneer men de formulen (ι_1) en ($\varkappa_1$) gebruikt,

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^2\sqrt{1+p^2}}\left\{2F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\}\,.\,. \text{(X)}$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+p^2)\frac{d}{d(p^2)}-1\right]\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0, \ldots \quad (X_1)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=\frac{1}{4p^4\sqrt{1+p^2}^3}\left\{(3+2p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)-2(1+2p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right\},\ldots \quad (Z)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^2}{d(p^2)^2}+4(1+2p^2)\frac{d}{d(p^2)}+1\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0; \ldots \quad (Z_1)$$

en de meer algemeene differentiaalformulen (y) en (aa)

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4\{(n-1)+(2n-3)p^2\}\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-2)^2-1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\sqrt{1+p^2}\,E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0, \ldots \quad (Y)$$

$$\left[4p^2(1+p^2)\frac{d^n}{d(p^2)^n}+4(n-1)(1+2p^2)\frac{d^{n-1}}{d(p^2)^{n-1}}+\{4(n-1)(n-2)+1\}\frac{d^{n-2}}{d(p^2)^{n-2}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]=0. \ldots \quad (AA)$$

Ten slotte geven de waarden (ab) en (ac) nog hier

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}E(p)=\frac{1}{8p^4(1-p^2)^2}\left[(3+5p^2-16p^4+6p^6)E(p)-(1-p^2)(4-3p^2)F(p)\right], \ldots \quad (AB)$$

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}F(p)=\frac{1}{8p^6(1-p^2)^3}\left[(8-23p^2+23p^4)E(p)-(2+2p^2-3p^4)F(p)\right]. \ldots \quad (AC)$$

Men had alle formulen van deze paragraaf, ook rechtstreeks, en op zich zelve beschouwd, veel gemakkelijker kunnen vinden, als men de integralen (1) tot (12) tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ neemt, en deze als punt van uitgang neemt voor de volgende beschouwingen.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.