IETS OVER ZAMENSTELLING VAN
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
UIT EENE AANGENOMEN
INTEGRAALVERGELIJKING.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

IETS OVER ZAMENSTELLING VAN

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

UIT EENE AANGENOMEN

INTEGRAALVERGELIJKING.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

IETS OVER ZAMENSTELLING VAN

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

UIT EENE AANGENOMEN

INTEGRAALVERGELIJKING.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Onder de methoden tot behandeling van gewone differentiaalvergelijkingen met twee veranderlijken behoort ook eene reeds lang bekende, maar toch zeer merkwaardige, wanneer zij tot algemeene uitkomsten voert; die methode namelijk waarbij het geldt, uit eene aangenomen integraalvergelijking de overeenkomstige differentiaalvergelijkingen op te sporen.

In dit opstel zullen enkele zulke integralen worden behandeld, die bestaan uit het produkt van machten van veelledige stelkundige uitdrukkingen.

2. Neem voor de integraal aan

$$(x + ay + b)^p \, (x + a_1 y + b_1)^q = P \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A).$$

Daaruit volgt

$$p \frac{1 + ay'}{x + ay + b} + q \frac{1 + b_1 y'}{x + a_1 y + b_1} = 0,$$

of

$$[(p + q)x + (pa_1 + qa)y + (pb_1 + qb)] + [(ap + a_1 q)x + (p + q)aa_1 y + (pab_1 + qa_1 b)]y' = 0.$$

Vergelijkt men dit met de differentiaalvergelijking

$$(Ax + By + C) + (A_1 x + B_1 y + C_1)y' = 0, \qquad \text{(I)}$$

zoo is

$$A = p + q,\ B = pa_1 + qa,\ C = pb_1 + qb,\ A_1 = ap + a_1 q,\ B_1 = (p+q)aa_1,\ C_1 = pab_1 + qa_1 b.$$

Daaruit volgt

$$aa_1 = \frac{B_1}{A},\ a + a_1 = \frac{A_1 + B}{p+q} = \frac{A_1 + B}{A}; \qquad (1)$$

dus zijn a en a_1 de wortels der tweedemachtsvergelijking

$$A\alpha^2 - (A_1 + B)\alpha + B_1 = 0. \qquad (1^a)$$

Verder is

$$aC - C_1 = qb(a - a_1),\qquad C_1 - a_1 C = pb_1(a - a_1),\qquad aA - A_1 = q(a - a_1),$$
$$A_1 - a_1 A = p(a - a_1),\qquad aA - B = p(a - a_1),\qquad B - a_1 A = q(a - a_1);$$

waaruit volgt

$$p = \frac{A_1 - a_1 A}{a - a_1} = \frac{aA - B}{a - a_1},\ q = \frac{aA - A_1}{a - a_1} = \frac{B - a_1 A}{a - a_1}, \qquad (1^b)$$

$$b = \frac{aC - C_1}{aA - A_1} = \frac{aC - C_1}{B - a_1 A},\ b_1 = \frac{C_1 - aC}{A_1 - a_1 A} = \frac{C_1 - aC}{aA - B}. \qquad (1^c)$$

3. Deze oplossing gaat niet door, zoodra $A = 0$ wordt; alsdan is tevens

$$B_1 = 0 \text{ en } A_1 + B = 0 \qquad \text{(II)}$$

Er blijven dus over

$$B = (a_1 - a)p,\quad C = (b_1 - b)p,\quad C_1 = (ab_1 - a_1 b)p.$$

Dus

$$aC - C_1 = bB \text{ en } a_1 C - C_1 = b_1 B; \text{ dus } b = \frac{aC - C_1}{B},\ b_1 = \frac{a_1 C - C_1}{B}; \text{en } p = \frac{B}{a_1 - a} = -q; \qquad (2)$$

wanneer men a en a_1 willekeurig aanneemt; of als men a en p willekeurig aanneemt,

$$b = \frac{aC - C_1}{B},\ b_1 = \frac{(B + ap)C - C_1 p}{Bp},\ a_1 = \frac{B}{p} + a,\ q = -p. \qquad (2^a)$$

4. Evenzeer worden naar (1^b) p en q onbepaald, als $a_1 = a$ is; dan volgt uit (1^a)

$$(A_1 + B)^2 = 4AB_1, \text{ of ook } (A_1 - B)^2 = 4(AB_1 - A_1 B) \qquad (\text{III}^a)$$

De betrekkingen tusschen de coëfficiënten worden nu echter

$$\begin{array}{llllll} A=p+q, & B=(p+q)a, & C=pb_1+qb, & A_1=(p+q)a, & B_1=(p+q)a^2, & C_1=aC \\ & =Aa & & =B & =\dfrac{B^2}{A} & =\dfrac{BC}{A}\,; \end{array} \qquad \text{(III)}$$

waardoor aan de bovenstaande vergelijkingen wordt voldaan. Verder wordt

$$a=\frac{B}{A},\quad p=\frac{Ab-C}{b-b_1},\quad q=\frac{C-Ab_1}{b-b_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarbij de b en b_1 geheel willekeurig blijven.

5. De oplossing van N°. 3 houdt op geldig te zijn, zoodra ook

$$B=0\,; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

maar naar de laatste der vergelijkingen (2^a) wordt dan $a_1=a$, en komt men dan tot het geval van N°. 4.

Men houdt dan over

$$C=(b_1-b)p,\quad C_1=a(b_1-b)p;$$

dus

$$a=\frac{C_1}{C}=a_1,\quad p=\frac{C}{b_1-b}=-q\,; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

terwijl hier de b en b_1 onbepaald blijven; of als men b en p willekeurig aanneemt,

$$a=\frac{C_1}{C}=a_1,\quad b_1=b+\frac{C}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4^a)$$

6. Men neme vervolgens voor de integraalvergelijking aan

$$(x^2+2axy+by^2+2cx+2dy+e)^p\,(x^2+2a_1xy+b_1y^2+2c_1x+2d_1y+e_1)^q=P\,;\ . \quad \text{(B)}$$

waaruit volgt

$$p\,\frac{2(x+ay+c)+2(ax+by+d)y'}{x^2+2axy+by^2+2cx+2dy+e}+q\,\frac{2(x+a_1y+c_1)+2(a_1x+b_1y+d_1)y'}{x^2+2a_1xy+b_1y^2+2c_1x+2d_1y+e_1}=0,$$

of

$$\begin{aligned} & p\{x^3+(2a_1+a)x^2y+(b_1+2aa_1)xy^2+ab_1y^3+(c+2c_1)x^2+ \\ & \qquad +(d_1+ac_1+a_1c)2xy+(2ad_1+b_1c)y^2+(e_1+2cc_1)x+(ae_1+2cd_1)y+ce_1\}+ \\ & +q\{x^3+(2a+a_1)x^2y+(b+2aa_1)xy^2+a_1by^3+(c_1+2c)x^2+ \\ & \qquad +(d+ac_1+a_1c)2xy+(2a_1d+bc_1)y^2+(e+2cc_1)x+(a_1e+2c_1d)y+c_1e\}+ \\ & +y'[p\{ax^3+(2aa_1+b)x^2y+(ab_1+2a_1b)xy^2+bb_1y^3+(2ac_1+d)x^2+ \\ & \qquad +(ad_1+a_1d+bc_1)2xy+(2bd_1+b_1d)y^2+(ae_1+2c_1d)x+(be_1+2dd_1)y+de_1\}+ \\ & +q\{a_1x^3+(2aa_1+b_1)x^2y+(a_1b+2ab_1)xy^2+bb_1y^3+(2a_1c+d_1)x^2+ \\ & \qquad +(ad_1+a_1d+b_1c)2xy+(2b_1d+bd_1)y^2+(a_1e+2cd_1)x+(b_1e+2dd_1)y+d_1e\}\,]=0. \end{aligned}$$

Vergelijkt men deze uitkomst met de algemeene differentiaalvergelijking van denzelfden vorm

$$(Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+Hx+Ky+L)+$$
$$+(A_1x^3+3B_1x^2y+3C_1xy^2+D_1y^3+E_1x^2+2F_1xy+G_1y^2+H_1x+K_1y+L_1)y'=0; \quad \text{(V)}$$

zoo is

$$
\begin{array}{ll}
A=p+q, & A_1=pa+qa_1,\\
3B=p(2a_1+a)+q(2a+a_1), & 3B_1=p(2aa_1+b)+q(2aa_1+b_1),\\
3C=p(b_1+2aa_1)+q(b+2aa_1), & 3C_1=p(ab_1+2a_1b)+q(a_1b+2ab_1),\\
D=pab_1+qa_1b, & D_1=pbb_1+qbb_1,\\
E=p(c+2c_1)+q(c_1+2c), & E_1=p(2ac_1+d)+q(2a_1c+d_1),\\
F=p(d_1+ac_1+a_1c)+q(d+ac_1+a_1c), & F_1=p(ad_1+a_1d+bc_1)+q(ad_1+a_1d+b_1c),\\
G=p(2ad_1+b_1c)+q(2a_1d+bc_1), & G_1=p(2bd_1+b_1d)+q(2b_1d+bd_1),\\
H=p(e_1+2cc_1)+q(e+2cc_1), & H_1=p(ae_1+2c_1d)+q(a_1e+2cd_1),\\
K=p(ae_1+2cd_1)+q(a_1e+2c_1d), & K_1=p(be_1+2dd_1)+q(b_1e+2dd_1),\\
L=pce_1+qc_1e; & L_1=pde_1+qd_1e.
\end{array}
$$

Hieruit volgt vooreerst

$$a+a_1=\frac{3B+A_1}{2A},\quad bb_1=\frac{D_1}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5^a)$$

en vervolgens uit

$$\tfrac{3}{2}(B-A_1)=(a-a_1)(q-p),\quad 3(C-B_1)=(b-b_1)(q-p),\quad \tfrac{3}{2}(C_1-D)=(ab_1-a_1b)(q-p),$$

daar

$$ab_1-a_1b=b(a-a_1)-a(b-b_1)=b_1(a-a_1)-a_1(b-b_1),$$
$$(B-A_1)b-2(C-B_1)a=C_1-D \quad \text{en} \quad (B-A_1)b_1-2(C-B_1)a_1=C_1-D;$$

waarvan de som geeft, als men de waarde van $a+a_1$ invoert,

$$b+b_1=\frac{(C-B_1)(3B+A_1)+2(C_1-D)A}{(B-A_1)A};\ \ldots\ldots\ldots\ (5^b)$$

en daaruit

$$aa_1=\frac{1}{4}\left\{\frac{3(C+B_1)}{A}-(b+b_1)\right\}=\frac{B_1(3B-A_1)-(C_1-D)A-2A_1C}{2(B-A_1)A};\ \ldots\ (5^c)$$

zoodat a en a_1 de wortels worden van de vergelijking

$$2A\alpha^2-(3B+A_1)\alpha+\frac{B_1(3B-A_1)-(C_1-D)A-2A_1C}{B-A_1},\ \ldots\ldots\ (5^d)$$

en b en b_1 van de volgende

$$A\beta^2 - \frac{(C-B_1)(3B+A_1)+2(C_1-D)A}{B-A_1}\beta + D_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5^e).$$

Uit dezelfde vergelijkingen volgt verder

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{A_1 - A a_1}{a-a_1},\quad q = \dfrac{Aa - A_1}{a-a_1}\ ; \\ \text{waaruit} \\ p-q = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{A_1 - B}{a-a_1}\ . \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5^f).$$

Van de acht waarden A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, zijn er nu zes gebruikt; er blijven daartusschen dus nog twee betrekkingen over. Daartoe kan men de volgende gebruiken.

Vooreerst is

$$(b+b_1)a - (ab_1 + a_1 b) = (a-a_1)b \text{ en } (b+b_1)a_1 - (ab_1 + a_1 b) = -(a-a_1)b_1\ ;$$

dus, daar $ab_1 + a_1 b = \dfrac{3C_1 + D}{2A}$ is, geeft hun produkt

$$(b+b_1)^2 aa_1 - (ab_1 + a_1 b)(b+b_1)(a+a_1) + (ab_1 + a_1 b)^2 = -bb_1\{(a+a_1)^2 - 4aa_1\}$$

na invoering der gevonden waarden

$$2\{(C-B_1)(3B+A_1) - 2(C_1-D)A\}^2 \frac{B_1(3B-A_1) - 2CA_1 - (C_1-D)A}{(B-A_1)^2} -$$
$$-(3C_1+D)(3B+A_1)\{(C-B_1)(3B+A_1) - 2(C_1-D)A\} + A(3C_1+D)^2(B-A_1) +$$
$$+D_1[(3B+A_1)(B-A_1) - 8A\{B_1(3B-A_1) - 2A_1C - (C_1-D)A\}] = 0 \ldots (a).$$

Ten tweede geven de reeds gebruikte vergelijkingen

$$ab_1 - a_1 b = \frac{C_1 - D}{2(C-B_1)}(b-b_1) \quad \text{en} \quad ab_1 + a_1 b = \frac{3C_1 + D}{2A}.$$

Verhef deze beide tot de tweede macht; dan geeft haar verschil

$$4\,.\,aa_1\,.\,bb_1 = \left(\frac{D+3C_1}{2A}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{C_1-D}{C-B_1}\right)^2\{(b+b_1)^2 - 4bb_1\},$$

of wederom

$$\frac{8D_1}{B-A_1}\{B_1(3B-A_1) - 2A_1C - (C_1-D)A\} = (3C_1+D)^2 -$$
$$-\left(\frac{C_1-D}{C-B_1}\right)^2\left\{\left(\frac{(C-B_1)(3B+A_1)+2(C_1-D)A}{B-A_1}\right)^2 - 4AD_1\right\} \ldots\ldots\ldots (b).$$

Nu is verder

$$\frac{F-E_1}{p-q} = d_1 - d + a_1 c - a c_1, \quad \frac{G-F_1}{p-q} = a d_1 - a_1 d + b_1 c - b c_1;$$

en hieruit kan men d en d_1 oplossen

$$(a_1-a)d = \frac{F-E_1}{p-q}a - \frac{G-F_1}{p-q} + (b_1 - a a_1)c - (b-a^2)c_1, \quad (a_1-a)d_1 = \frac{F-E_1}{p-q}a_1 - \frac{G-F_1}{p-q} + (b_1 - a_1^2)c - (b - a a_1)c_1.$$

Substitueert men deze d en d_1 in de waarde van G_1, zoo is

$$c\{(p+2q)(b_1^2 - a a_1 b_1) + (2p+q)(b b_1 - a_1^2 b)\} - c_1\{(p+2q)(b b_1 - a^2 b_1) + (2p+q)(b^2 - a a_1 b)\} =$$
$$= -G_1(a-a_1) - \frac{F-E_1}{p-q}3C_1 + \frac{G-F_1}{p-q}\{(p+2q)b_1 + (2p+q)b\};$$

of daar $(p+2q)b_1 + (2p+q)b = 3(C + 2B_1 - 2Aaa_1)$ en $(p+2q)ab_1 + (2p+q)a_1 b = 3C_1$ is, als men de laatste der (5f) gebruikt,

$$c\{(C + 2B_1 - 2Aaa_1)b_1 - C_1 a_1\} - c_1\{(C + 2B_1 - 2Aaa_1)b - C_1 a\} =$$
$$= \frac{a-a_1}{3(A_1-B)}\left[-G_1(A_1-B) - (F-E_1)2C_1 + (G-F_1)2(C + 2B_1 - 2Aaa_1)\right].$$

Evenzoo geeft de waarde voor E

$$c(A_1 + Aa_1 - 2Aa) - c_1(A_1 + Aa - 2Aa_1) = -(a-a_1)E;$$

en nu kan men c en c_1 oplossen, daar

$$C + 2B_1 - 2Aaa_1 = \frac{(A_1+B)(B_1-C) - (C_1-D)A}{A_1-B}.$$

is, na substitutie der waarden gevonden voor $\frac{b-b_1}{a-a_1}$ en $\frac{ab_1-a_1b}{a-a_1}$.

$$\left.\begin{aligned}
&3c\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\} - 3BC_1(A_1-B)^2\right] = \\
&\quad = 3(A_1-B)E\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}b - C_1(A_1-B)a\right] + \\
&\quad + (A_1 - 2Aa_1 + Aa)\left[\{-G_1(A_1-B) + (F-E_1)2C_1\}(A_1-B) + \right. \\
&\quad \left. + 2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\right], \\
&3c_1\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\} - 3BC_1(A_1-B)^2\right] = \\
&\quad = 3(A_1-B)E\left[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}b_1 - C_1(A_1-B)a_1\right] + \\
&\quad + (A_1 - 2Aa + Aa_1)\left[\{-G_1(A_1-B) + (F-E_1)2C_1\}(A_1-B) + \right. \\
&\quad \left. + 2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)\}A\right].
\end{aligned}\right\} \quad (5g)$$

Substitueert men dit in de vergelijkingen voor d en d_1, dan komt er, na invoering der waarden voor $\frac{b-b_1}{a-a_1}$, $\frac{ab_1-a_1b}{a-a_1}$ en $(b+b_1)$,

$$\left.\begin{aligned}
3d\,(A_1-B)[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2]&=\\
=2\{(F-E_1)a-(G-F_1)\}[(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}&-\\
-3BC_1(A_1-B)^2]+3E(A_1-B)(C_1-D)[\{(A_1+B)(B_1-C)-A(C_1-D)\}a-C_1(A_1-B)]&+\\
+[\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)+2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}]&\\
[\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}a-\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}]&,\\
3d_1(A_1-B)[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2]&=\\
=2\{(F-E_1)a_1-(G-F_1)\}[(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}&-\\
-3BC_1(A_1-B)^2]+3E(A_1-B)(C_1-D)[\{(A_1+B)(B_1-C)-A(C_1-D)\}a_1-C_1(A_1-B)]&+\\
+[\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)+2(G-F_1)\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}]&\\
[\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}a_1-\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}]&.
\end{aligned}\right\}\quad (5^h)$$

De beide overige vergelijkingen, die behalve de a en b, slechts de c en d bevatten,

$$G=p(2ad_1+b_1c)+q(2a_1d+bc_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (c)$$

en

$$E_1=p(2ac_1+d)+q(2a_1c+d_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (d)$$

zijn dus wederom twee voorwaardensvergelijkingen.

Eindelijk volgt uit de waarden voor L en L_1

$$e_1=\frac{1}{p}\,\frac{Ld_1-L_1d}{cd_1-c_1d},\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (5^i)$$

$$e=\frac{1}{q}\,\frac{L_1c-Lc_1}{cd_1-c_1d};\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (5^k)$$

waarin de noemer gevonden wordt uit de volgende vergelijking.

$$\begin{aligned}
9Q^2\frac{A_1-B}{a-a_1}(cd_1-c_1d)=3[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}[2(G-F_1)\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)&+\\
+(C_1-D)(4A+A_1)\}-2(F-E_1)\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3E(A_1-B)(C_1-D)]&+\\
+(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}\{(A_1-B-2B_1+2C)(3B+A_1)+(C_1-D)(4A+A_1)\}&+\\
+6BC_1(F-E_1)(A_1-B)^2]\times[\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}[E(C_1-D)+2B(G-F_1)&+\\
+B\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}(A_1-B)]]&+\\
+[2\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}(G-F_1)\{2(A-3B)(B_1-C)A-(C+C_1-D-D_1)\}&-\\
-(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}\{2A_1(C-B_1)+A(C_1-D)\}+3C_1(A_1-B)^2&\\
\{2B(G-F_1)-E(C_1-D)\}]\times[2\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{3E(B_1-C)-A(G-F_1)\}&+\\
+A(A_1-B)\{-G_1(A_1-B)+(F-E_1)2C_1\}-3C_1E(A_1-B)^2]&,
\end{aligned}$$

waarin $Q=\{(A_1+B)(B_1-C)-(C_1-D)A\}\{6B(B_1-C)+A(C-D_1)\}-3BC_1(A_1-B)^2$ is.

Er blijven dus nog vier voorwaardensvergelijkingen over,

$$H = pe_1 + qe + 2Acc_1, \quad \ldots \quad (e)$$

$$K = p(ae_1 + 2cd_1) + q(a_1 e + 2c_1 d), \quad \ldots \quad (f)$$

$$K - H_1 = 2(p-q)(cd_1 - c_1 d), \quad \ldots \quad (g)$$

$$K_1 = pbe_1 + qb_1 e + Add_1 \quad \ldots \quad (h).$$

7. Het vorige geldt niet, wanneer $A = 0$ is. Omdat in dat geval $a + a_1$, bb_1, $ab_1 + a_1 b$ en $b + b_1 + 4aa_1$ niet oneindig mogen worden, is tegelijk

$$A = 0, \quad 3B + A_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D + 3C_1 = 0, \quad B_1 + C = 0 \quad \ldots \quad \text{(VI)}.$$

Omdat nu $q = -p$ moet zijn, wordt het stel bruikbare vergelijkingen

$$\begin{array}{lll}
3B = (a_1 - a)p, & G = \{2(ad_1 - a_1 d) + (b_1 c - bc_1)\}p, & F_1 = (bc_1 - b_1 c)p, \\
3C = (b_1 - b)p, & H = (e_1 - e)p, & G_1 = (bd_1 - b_1 d)p, \\
D = (ab_1 - a_1 b)p, & K = \{(ae_1 - a_1 e) + 2(cd_1 - c_1 d)\}p, & H_1 = \{(ae_1 - a_1 e) - 2(cd_1 - c_1 d)\}p, \\
E = (c_1 - c)p, & L = (ce_1 - c_1 e)p, & K_1 = (be_1 - b_1 e)p, \\
F = (d_1 - d)p, & E_1 = \{2(ac_1 - a_1 c) + (d - d_1)\}p, & L_1 = (de_1 - d_1 e)p.
\end{array}$$

Hieruit volgt vooreerst

$$\left.\begin{array}{llll}
3Ca - D = 3Bb, & 3Ea - F - E_1 = 3Bc, & 2Fa - G - F_1 = 3Bd, & 3Ha - K - H_1 = 3Be, \\
3Ca_1 - D = 3Bb_1, & 3Ea_1 - F - E_1 = 3Bc_1, & 2Fa_1 - G - F_1 = 3Bd_1, & 3Ha_1 - K - H_1 = 3Be_1;
\end{array}\right\} . (6)$$

en daaruit wederom

$$F_1 = (bc_1 - b_1 c)p = \{3C(F + E_1) - 2DE\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$G_1 = (bd_1 - b_1 d)p = \{3C(G + F_1) - 2DF\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$K_1 = (be_1 - b_1 e)p = \{3C(K + H_1) - 2DH\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$K - H_1 = 4(cd_1 - c_1 d)p = \{E(G + F_1) - F(F + E_1)\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$L = (ce_1 - c_1 e)p = \{E(K + H_1) - H(F + E_1)\} : 4(a_1 - a)p,$$

$$L_1 = (de_1 - d_1 e)p = \{F(K + H_1) - H(G + F_1)\} : 4(a_1 - a)p.$$

Als men nu in elk dezer zes vergelijkingen $(a_1 - a)p = 3B$ substitueert, ontstaan er zes voorwaardensvergelijkingen. Derhalve blijven er slechts negen vergelijkingen over voor de bepaling van de elf onbekende grootheden; en het vraagstuk is derhalve onbepaald.

8. De uitkomsten van N°. 6 zijn evenzeer ongeldig, zoodra $A_1 = B$ is. Alsdan geeft $b + b_1$

$$(C - B_1)B + (C_1 - D)A = 0 \quad \text{en} \quad p - q = {}^3/_2 \frac{A_1 - B}{a - a_1};$$

dus omdat

$$(a - a_1)^2 = \frac{(3B + A_1)^2 (B - A_1) - 8A\{B_1(3B - A_1) - 2CA_1 - (C_1 - D)A\}}{4A^2 (B - A_1)},$$

in den regel niet verdwijnt, moet $p = q$ zijn. Dit geeft dadelijk

$$A_1 = B,\quad B_1 = C,\quad C_1 = D,\quad E_1 = F,\quad F_1 = G_1,\quad H_1 = K, ; \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(VII)}$$

zoodat aan de eerst gevonden voorwaardensvergelijking wordt voldaan. Men houdt nu over

$$\begin{array}{lll}
A = 2p, & F = (d + d_1 + 2ac_1 + 2a_1c)p, & D_1 = 2bb_1p, \\
B = (a + a_1)p, & G = (2ad_1 + 2a_1d + bc_1 + b_1c)p, & G_1 = 3(bd_1 + b_1d)p, \\
3C = (b + b_1 + 4aa_1)p, & H = (e + e_1 + 4cc_1)p, & K_1 = (be_1 + b_1e + 4dd_1)p, \\
D = (ab_1 + a_1b)p, & K = (ae_1 + a_1e + 2cd_1 + 2c_1d)p, & L_1 = (de_1 + d_1e)p. \\
E = 3(c + c_1)p, & L = (ce_1 + c_1e)p, &
\end{array}$$

Vooreerst is

$$(a - a_1)b = (b + b_1)a - (ab_1 + a_1b) = (b + b_1)a - \frac{2D}{A},$$

$$(a_1 - a)b_1 = (b + b_1)a_1 - (ab_1 + a_1b) = (b + b_1)a_1 - \frac{2D}{A};$$

haar produkt geeft

$$(b + b_1)^2 aa_1 - \frac{2D}{A}(b + b_1)(a + a_1) + \frac{4D^2}{A^2} = -bb_1\{(a + a_1)^2 - 4aa_1\},$$

of, als men

$$b + b_1 = \frac{6C}{A} - 4aa_1,\quad a + a_1 = \frac{2B}{A},\quad bb_1 = \frac{D_1}{A}$$

substitueert,

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\dfrac{3C}{A} - 2aa_1\right)^2 aa_1 - \dfrac{2BD}{A^2}\left(\dfrac{3C}{A} - 2aa_1\right) + \dfrac{D^2}{A^2} + \dfrac{D_1}{A^3}(B^2 - aa_1A^2); \\
\text{terwijl verder} \\
b + b_1 = \dfrac{6C}{A} - 4aa_1,\quad bb_1 = \dfrac{D_1}{A},\quad a + a_1 = \dfrac{2B}{A}\ \text{is.}
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Bovendien is hier

$$p = \frac{1}{2}A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7^a)$$

Dit geeft ons

$$\frac{2F}{A} = d + d_1 + 2(ac_1 + a_1c),\qquad \frac{2G}{A} = 2(ad_1 + a_1d) + (bc_1 + b_1c),$$

waaruit volgt

$$-2(a - a_1)d = \frac{F}{A}4a_1 - 2\frac{G}{A} + (b - 4a^2)c_1 + (b_1 - 4aa_1)c,$$

$$2(a - a_1)d_1 = \frac{F}{A}4a_1 - 2\frac{G}{A} + (b - 4aa_1)c_1 + (b_1 - 4a_1^2)c;$$

en hiermede geeft de waarde van G_1,

$$\frac{4G_1}{3A}(a-a_1) = \frac{2G}{A}(b-b_1) + \frac{4F}{A}(ab_1-a_1b) + (bb_1-b^2+4aa_1b-4a^2b_1)c_1-(bb_1-b_1^2+4aa_1b_1-4a_1^2b)c.$$

Nu kan men uit deze en de vergelijking $\frac{2E}{A} = c + c_1$ de c en c_1 oplossen,

$$\left.\begin{aligned}
&\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}\,c = \frac{2E}{A}\{b(b-b_1)+4a(ab_1-a_1b)\}+\\
&\qquad+\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1),\\
&\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}\,c_1 = \frac{-2E}{A}\{b_1(b-b_1)+4a_1(ab_1-a_1b)-\\
&\qquad-\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)+\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)+\frac{2G}{A}(b-b_1);
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \quad (7^b)$$

en hiermede worden de vorige vergelijkingen voor d en d_1

$$\left.\begin{aligned}
&2\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}(a-a_1)\,d = \frac{4Fa-2G}{A}\{b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}+\\
&\quad+\frac{8E}{A}(ab_1-a_1b)(a-a_1)b+\{4a(a-a_1)-(b-b_1)\}\{\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1)\},\\
&2\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}(a-a_1)\,d_1 = \frac{2G-4Fa_1}{A}\{(b-b_1)^2+4(a-a_1)(ab_1-a_1b)\}-\\
&\quad-\frac{8E}{A}(ab_1-a_1b)(a-a_1)b_1-\{4a_1(a-a_1)-(b-b_1)\}\{\frac{4G_1}{3A}(a-a_1)-\frac{4F}{A}(ab_1-a_1b)-\frac{2G}{A}(b-b_1)\}.
\end{aligned}\right\}(7^c)$$

Verder leveren de waarden van L en L_1

$$e = \frac{2}{A}\,\frac{L_1c-Ld}{cd_1-c_1d}, \qquad e_1 = \frac{2}{A}\,\frac{Ld_1-L_1c_1}{cd_1-c_1d}. \ldots\ldots\ldots \quad (7^d)$$

Derhalve blijven er over als voorwaardensvergelijkingen

$$H = \frac{L_1(c-c_1)-L(d-d_1)}{cd_1-c_1d}, \ldots\ldots\ldots \quad (a_1)$$

$$K = \frac{L(ad_1-a_1d)-L_1(ac_1-a_1c)}{cd_1-c_1d} + A(cd_1+c_1d), \ldots\ldots \quad (b_1)$$

$$K_1 = \frac{L(bd_1-b_1d)-L_1(bc_1-b_1c)}{cd_1-c_1d} + 2Add_1. \ldots\ldots\ldots \quad (c_1)$$

9. Eindelijk heeft men nog het geval te onderzoeken, dat de vergelijking (5^d) twee gelijke wortels $a = a_1$ heeft: alsdan wordt de noemer in de waarden van p en q nul. Uit de waarde voor $p-q$, in de laatste der vergelijkingen (5^f) gevonden, volgt dan

$$A_1 = B. \qquad \text{(VIII)}$$

Verder zullen alsdan de waarden der wortels b en b_1 der vergelijking (5^e) mede nul tot noemer verkrijgen. Laat ons dus zien, wat de coëfficiënten ons geven bij onze onderstelling $a_1 = a$.

$$\begin{aligned}
A &= p + q, & 3B_1 &= pb + qb_1 + (p+q)2a^2,\\
3B &= 3a(p+q), & 3C_1 &= pa(b_1 + 2b) + qa(b + 2b_1),\\
3C &= pb_1 + qb + (p+q)2a^2, & D_1 &= (p+q)bb_1,\\
D &= (pb_1 + qb)a, & E_1 &= 2a(pc_1 + qc) + (pd + qd_1),\\
E &= p(c + 2c_1) + q(c_1 + 2c), & F_1 &= (p+q)a(d + d_1) + pbc_1 + qb_1c,\\
F &= pd_1 + qd + (p+q)a(c + c_1), & G_1 &= p(2bd_1 + b_1d) + q(2b_1d + bd_1),\\
G &= pcb_1 + qbc_1 + 2a(pd_1 + qd), & H_1 &= a(pc_1 + qe) + 2(pc_1d + qcd_1),\\
H &= p(e_1 + 2cc_1) + q(e + 2cc_1), & K_1 &= p(be_1 + 2dd_1) + q(b_1e + 2dd_1),\\
K &= 2(pcd_1 + qc_1d) + a(pe_1 + qe), & L_1 &= pde_1 + qd_1e.\\
L &= pce_1 + qc_1e, & &
\end{aligned}$$

Dadelijk verkrijgt men

$$a = \frac{B}{A}, \qquad (8)$$

en tevens

$$pb_1 + qb = \frac{AD}{B}, \quad 3B_1 + \frac{AD}{B} = (p+q)(b + b_1 + 2a^2) = A(b + b_1 + 2a^2);$$

waaruit volgt

$$b + b_1 = \frac{3B_1}{A} + \frac{D}{B} - \frac{2B^2}{A^2}.$$

Omdat nog $bb_1 = \dfrac{D_1}{A}$ is, worden b en b_1 bepaald als wortels der vergelijking

$$\beta^2 + \left(\frac{2B^2}{A^2} - \frac{3B_1}{A} - \frac{D}{B}\right)\beta + \frac{D_1}{A} = 0. \qquad (8^a)$$

Verder is

$$p = \left(b - \frac{D}{B}\right)\frac{A}{b - b_1} \quad \text{en} \quad q = \left(\frac{D}{B} - b_1\right)\frac{A}{b - b_1}, \qquad (8^b)$$

terwijl de vergelijkingen voor C en C_1 de voorwaardensvergelijkingen geven

$$3\,C = \frac{D}{a} + A \, . \, 2\,a^2 = \frac{A\,D}{B} + \frac{2\,B^2}{A}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_2)$$

$$\frac{3\,C_1\,A}{B} = 2\,A\,(b + b_1) - D = 6\,B_1 + \frac{2\,A\,D}{B} - \frac{4\,B^2}{A} - D; \; \ldots\ldots \quad (b_2)$$

en hiermede wordt voldaan aan de voorwaarde, die uit de vergelijking (5^d) zoude volgen,

$$(3\,B + A_1)^2\,(B - A_1) - 8\,A\,\{B_1\,(3\,B - A_1) - (C_1 - D)\,A - 2\,A_1\,C\} = 0,$$

of naar (VIII),

$$6\,A\,B\,B_1 - 3\,A^2\,(C_1 - D) - 6\,A\,B\,C = 0. \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a\,b_2)$$

Vervolgens is

$$G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a = c\,(p\,b_1 + 4\,a^2\,q - 2\,q\,b_1) + c_1\,(q\,b + 4\,a^2\,p - 2\,p\,b)\,;$$

verbindt men deze met de waarde van E, zoo komt er

$$\left.\begin{aligned}
c &= \frac{(2\,p + q)\,(G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a) - E\,(q\,b + 4\,a^2\,p - 2\,p\,b)}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)} = \\
&= \frac{\left(3Ab - 3B_1 - \frac{2AD}{B} + \frac{2B^2}{A}\right)\left(G - 2F_1 + 2\frac{BE_1}{A}\right) - E\left[b\left(\frac{AD}{B} - 6B_1 + \frac{8B^2}{A}\right) - \frac{4BD}{A} + D_1\right]}{3\,A\left(\frac{3\,B_1\,D}{B} - \frac{2\,B\,D}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4\,B^2}{A} - \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)\left(\frac{2\,B^2}{A} + \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)}, \\
c_1 &= \frac{E\,(p\,b_1 + 4\,a^2\,q - 2\,q\,b_1) - (p + 2\,q)\,(G - 2\,F_1 + 2\,E_1\,a)}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)} = \\
&= \frac{\left(3Ab_1 - 3B_1 - \frac{2AD}{B} + \frac{2B^2}{A}\right)\left(G - 2F_1 + 2\frac{BE_1}{A}\right) - E\left[b_1\left(\frac{AD}{B} - 6B_1 + \frac{8B^2}{A}\right) - \frac{4BD}{A} + D_1\right]}{3\,A\left(\frac{3\,B_1\,D}{B} - \frac{2\,B\,D}{A} - D_1\right) + 2\left(\frac{4\,B^2}{A} - \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)\left(\frac{2\,B^2}{A} + \frac{A\,D}{B} - 3\,B_1\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (8^a)$$

Daarop geven F en G_1

$$A\left[\,(b_1\,p - b\,q) - p\,q\,(b - b_1)\right]\,d =$$

$$= G_1 p - (2p + q)\,b\left[F - (p + q)\,a\,\frac{(p - q)(G - 2F_1 + 2\,E_1 a) + E\left\{-4a^2(p - q) + (b + b_1)(p - q) - (bp - b_1 q)\right\}}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)}\right],$$

$$\left[A\,(b_1\,p - b\,q) - p\,q\,(b - b_1)\right]\,d_1 =$$

$$= - G_1 q + (p + 2q)\,b_1\left[F - (p + q)\,a\,\frac{(p - q)(G - 2F_1 + 2\,E_1 a) + E\left\{-4a^2(p - q) + (b + b_1)(p - q) - (bp - b_1 q)\right\}}{3\,(b - b_1)\,p\,q + (2\,a^2 - b - b_1)\,2\,(q^2 - p^2)}\right];$$

of na herleiding,

$$\left[2D_1-\frac{6B_1D}{B}-\frac{AD^2}{B^2}+\frac{4BD}{A}\right]d=G_1\left(b-\frac{D}{B}\right)-\left\{\left(6B_1+\frac{AD}{B}-\frac{4B^2}{A}\right)b-3D_1\right\}$$

$$\left\{F-B\frac{\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{D}{B}-\frac{2B^2}{A^2}\right)\left(G-2F_1+\frac{2BE_1}{A}\right)+E\left\{\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{D}{B}-\frac{2B^2}{A^2}\right)\left(\frac{6B_1}{A}+\frac{D}{B}-\frac{8B^2}{A}\right)+\frac{2D}{B}\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{2B^2}{A^2}\right)-\frac{2D_1}{A}\right\}}{3A\left(\frac{3B_1D}{B}-\frac{2BD}{A}-D_1\right)+2\left(\frac{4B^2}{A}-\frac{AD}{B}-3B_1\right)\left(\frac{2B^2}{A}+\frac{AD}{B}-3B_1\right)}\right.,$$

$$\left[2D_1-\frac{6B_1D}{B}-\frac{AD^2}{B^2}+\frac{4BD}{A}\right]d_1=G_1\left(b_1-\frac{D}{B}\right)-\left\{\left(6B_1+\frac{AD}{B}-\frac{4B^2}{A}\right)b_1-3D_1\right\}$$

$$\left\{F-B\frac{\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{D}{B}-\frac{2B^2}{A^2}\right)\left(G-2F_1+\frac{2BE_1}{A}\right)+E\left\{\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{D}{B}-\frac{2B^2}{A^2}\right)\left(\frac{6B_1}{A}+\frac{D}{B}-\frac{8B^2}{A}\right)+\frac{2D}{B}\left(\frac{3B_1}{A}-\frac{2B^2}{A^2}\right)-\frac{2D_1}{A}\right\}}{3A\left(\frac{3B_1D}{B}-\frac{2BD}{A}-D_1\right)+2\left(\frac{4B^2}{A}-\frac{AD}{B}-3B_1\right)\left(\frac{2B^2}{A}+\frac{AD}{B}-3B_1\right)}\right.;$$

en hierbij blijven als voorwaarden de vergelijkingen voor G en E_1

$$G=pb_1c+qbc_1+2a(pd_1+qd), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_3)$$

$$E_1=2a(qc+pc_1)+(pd+qd_1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b^3)$$

Eindelijk volgt uit de vergelijkingen voor L en L_1,

$$e=\frac{1}{q}\,\frac{L_1c-Ld}{cd_1-c_1d}, \qquad e_1=\frac{1}{p}\,\frac{Ld_1-L_1c_1}{cd_1-c_1d}; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8^b)$$

waarbij de vier voorwaardensvergelijkingen

$$H=pe_1+qe+2Acc_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c_3)$$

$$K=2(pcd_1+qc_1d)+a(pe_1+qe), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d_3)$$

$$H_1=a(pe_1+qe)+(pc_1d+qcd_1), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e_3)$$

$$K_1=pbe_1+qb_1e+2Add_1; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f_3)$$

waar men ook voor de beide middelste stellen kan

$$K-Ha=2(pcd_1+qc_1d)-2Aacc_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g_3)$$

$$K-H_1=(2p-q)cd_1+(2q-p)c_1d \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h_3).$$

10. Zij de integraalvergelijking

$$(x+ay+b)^p\,(x+a_1y+b_1)^q\,(x+a_2y+b_2)^r\,(x+a_3y+b_3)^s=P; \ldots \quad (\mathrm{C})$$

dan is

$$p\frac{1+ay'}{x+ay+b}+q\frac{1+a_1y'}{x+a_1y+b_1}+r\frac{1+a_2y'}{x+a_2y+b_2}+s\frac{1+a_3y'}{x+a_3y+b_3}=0,$$

of

$$
\begin{aligned}
& p(1+ay')[x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2y+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)xy^2+a_1a_2a_3y^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+ \\
& \quad +(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)xy+(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)y^2+ \\
& \quad +(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2)y+b_1b_2b_3] \\
& +q(1+a_1y')[x^3+(a_3+a_2+a)x^2y+(a_3a_2+a_3a+a_2a)xy^2+a_3aa_2y^3+(b_3+b+b_2)x^2+ \\
& \quad +(a_2b_3+a_2b+a_3b_2+a_3b+ab_2+ab_3)xy+(a_2a_3b+a_2ab_3+a_3ab_2)y^2+ \\
& \quad +(b_2b_3+b_2b+b_3b)x+(a_2b_3b+a_3b_2b+ab_2b_3)y+b_2b_3b] \\
& +r(1+a_2y')[x^3+(a_3+a+a_1)x^2y+(a_3a+a_3a_1+aa_1)xy^2+a_3aa_1y^3+(b_3+b+b_1)x^2+ \\
& \quad +(a_3b+a_3b_1+ab_3+ab_1+a_1b_3+a_1b)xy+(a_3ab_1+a_3a_1b+a_1ab_3)y^2+ \\
& \quad +(b_3b+b_3b_1+bb_1)x+(a_3bb_1+ab_3b_1+a_1b_3b)y+b_3bb_1] \\
& +s(1+a_3y')[x^3+(a+a_1+a_2)x^2y+(aa_1+aa_2+a_1a_2)xy^2+aa_1a_2y^3+(b+b_1+b_2)x^2+ \\
& \quad +(ab_1+ab_2+a_1b+a_1b_2+a_2b+a_2b_1)xy+(aa_1b_2+aa_2b_1+a_2a_1b)y^2+ \\
& \quad +(bb_1+bb_2+b_1b_2)x+(ab_1b_2+a_1bb_2+a_2bb_1)y+bb_1b_2].
\end{aligned}
$$

Daar deze moet zijn van den vorm

$$
\begin{aligned}
& (Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+Hx+Ky+L)dx \\
& +(A_1x^3+3B_1x^2y+3C_1xy^2+D_1y^3+E_1x^2+2F_1xy+G_1y^2+H_1x+K_1y+L_1)dy=0, \quad \text{(IX)}
\end{aligned}
$$

heeft men daartoe

$$
\begin{aligned}
A &= p+q+r+s, \\
3B &= p(a_1+a_2+a_3)+q(a_2+a_3+a)+r(a_3+a+a_1)+s(a+a_1+a_2), \\
3C &= p(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+q(a_2a_3+a_2a+a_3a)+r(a_3a+a_3a_1+aa_1)+s(aa_1+aa_1+a_1a_2), \\
D &= pa_1a_2a_3+qa_2a_3a+ra_3aa_1+saa_1a_2, \\
E &= p(b_1+b_2+b_3)+q(b_2+b_3+b)+r(b_3+b+b_1)+s(b+b_1+b_2), \\
2F &= p(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)+q(a_2b_3+a_2b+a_3b_2+a_3b+ab_2+ab_3)+ \\
&\quad +r(a_3b+a_3b_1+ab_3+ab_1+a_1b_3+a_1b)+s(ab_2+ab_2+a_1b+a_1b_2+a_2b+a_2b_2), \\
G &= p(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)+q(a_2a_3b+a_2ab_3+a_3ab_2)+r(a_3bb_1+a_3a_1b+aa_1b_3)+ \\
&\quad +s(aa_1b_2+aa_2b_1+a_1a_2b), \\
H &= p(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)+q(b_2b_3+b_2b+b_3b)+r(b_3b+b_3b_1+bb_1)+s(bb_1+bb_2+b_1b_2), \\
K &= p(a_1b_2b_3+a_2b_3b_3+a_3b_1b_2)+q(a_2b_3b+a_3b_2b+ab_2b_3)+r(a_3bb_1+ab_3b_1+a_1b_3b)+ \\
&\quad +s(ab_1b_2+a_1bb_2+a_2bb_1), \\
L &= pb_1b_2b_3+qb_2b_3b+rb_3bb_1+sbb_1b_2, \\
A_1 &= pa+qa_1+ra_2+sa_3, \\
3B_1 &= pa(a_1+a_2+a_3)+qa_1(a_2+a_3+a)+ra_2(a_3+a+a_1)+sa_3(a+a_1+a_2), \\
3C_1 &= pa(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+qa_1(a_2a_3+a_2a+a_3a)+ra_2(a_3a+a_3a_1+aa_1)+ \\
&\quad sa_3(aa_1+aa_2+a_1a_2), \\
D_1 &= paa_1a_2a_3+qa_1a_2a_3a+ra_2a_3aa_1+sa_3aa_1a_2,
\end{aligned}
$$

$$E_1 = pa(b_1+b_2+b_3)+qa_1(b_2+b_3+b)+ra_2(b_3+b+b_1)+sa_3(b+b_1+b_2),$$

$$2F_1 = pa(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)+qa_1(a_2b_3+a_2b+a_3b_2+a_3b+ab_2+ab_3)+$$
$$+ra_2(a_3b+a_3b_1+ab_3+ab_1+a_1b_3+a_1b)+sa_3(ab_1+ab_2+a_1b+a_1b_2+a_2b+a_2b_1),$$

$$G_1 = pa(a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)+qa_1(a_2a_3b+a_2ab_3+a_3ab_2)+ra_2(a_3ab_1+a_3a_1b+aa_1b_3)+$$
$$+sa_3(aa_1b_2+aa_2b_1+a_1a_2b),$$

$$H_1 = pa(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)+qa_1(b_2b_3+b_2b+b_3b)+ra_2(b_3b+b_3b_1+bb_1)+sa_3(bb_1+bb_2+b_1b_2),$$

$$K_1 = pa(a_1b_2b_3+a_2b_1b_3+a_3b_1b_2)+qa_1(a_2b_3b+a_3b_2b+ab_2b_3)+ra_2(a_3bb_1+ab_3b_1+a_1b_3b)+$$
$$+sa_3(ab_1b_2+a_1bb_2+a_2bb_1),$$

$$L_1 = pab_1b_2b_3+qa_1b_2b_3b+ra_2b_3bb_1+sa_3bb_1b_2.$$

Vooreerst volgt dadelijk

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3B+A_1}{A}=a+a_1+a_2+a_3,\quad 3\dfrac{C+B_1}{A}=aa_1+aa_2+aa_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3,\\[2ex] \dfrac{D+3C_1}{A}=aa_1a_2+aa_1a_3+aa_2a_3+a_1a_2a_3,\quad \dfrac{D_1}{A}=aa_1a_2a_3\,;\end{array}\right\}. \quad (9)$$

zoodat a, a_1, a_2, a_3, de wortels zijn der vergelijking

$$A\alpha^4-(3B+A_1)\alpha^3+(C+B_1)3\alpha^2-(D+3C_1)\alpha+D_1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9^a)$$

Vervolgens is achtereenvolgens

$$\left.\begin{array}{r}3B-Aa=p(-a+a_1+a_2+a_3)+q(a_2+a_3)+r(a_3+a_1)+s(a_1+a_2),\\ Aa^2-3Ba+3C=p(a_1a_2+a_1a_2+a_2a_3+a^2-aa_2-aa_3)+qa_2a_3+ra_3a_1+sa_1a_2,\\ Aa^3-3Ba^2+3Ca-D=p(a_1a_2a+a_1a_3a+a_2a_3a+a^3-a_1a^2-a_3a^2-a_2a^2-a_1a_2a_3)=\\ =p(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\,;\end{array}\right\} \quad (9^b)$$

derhalve

$$p=\frac{Aa^3-3Ba^2+3Ca-D}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)}\,;$$

en evenzoo

$$q=\frac{Aa_1^3-3Ba_1^2+3Ca_1-D}{(a_1-a)(a_1-a_2)(a_1-a_3)},\quad r=\frac{Aa_2^3-3Ba_2^2+3Ca_2-D}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)},\quad s=\frac{Aa_3^3-3Ba_3^2+3Ca_3-D}{(a_3-a)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}. \quad (9^c)$$

Bij de beschouwing van ons twintigtal vergelijkingen, ziet men dat telkens, als men in het algemeen voor eene letter X stellende, $Xa-X_1$ neemt, de p geëlimineerd wordt; evenzoo bij Xa_1-X_1, Xa_2-X_1, Xa_3-X_1, worden de q, r, s geëlimineerd.

Nu is

$$
\begin{aligned}
3a^2(Aa-A_1)-6a(Ba-B_1)-3(Ca-C_1) &= 3\left[Aa^3-(A_1+2B)a^2+(2B_1+C)a-C_1\right]= \\
&= q(a-a_1)(a_2a_3-aa_2-aa_3+a^2)+r(a-a_2)(a_3a_1-aa_3-aa_1+a^2)+s(a-a_3)(a_1a_2-aa_1-aa_2+a^2)= \\
&= (q+r+s)(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)=(A-p)(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)= \\
&= A(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)-Aa^3+3Ba^2-3Ca-D,
\end{aligned}
$$

met toepassing van de uitkomst (9^c). Evenzoo is

$$
\begin{aligned}
a^2(Ea-E_1)-2a(Fa-F_1)+(Ga-G_1) &= q(a-a_1)(a_2a_3-aa^2-aa_3+a^2)b+ \\
&+r(a-a_2)(a_3a_1-aa_3-aa_1+a^2)b+s(a-a_3)(a_1a_2-aa_1-aa_2+a^2)b;
\end{aligned}
$$

en dit geeft nu

$$
\left.
\begin{array}{l}
b=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{Ea^3-(E_1+2F)a^2+(2F_1+G)a-G_1}{Aa^3-(A_1+2B)a^2+(2B_1+C)a-C_1}; \\[3ex]
\text{op dezelfde wijze vindt men} \\[2ex]
b_1=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{Ea_1^3-(E_1+2F)a_1^2+(2F_1+G)a_1-G_1}{Aa_1^3-(A_1+2B)a_1^2+(2B_1+C)a_1-C_1},\quad b_2=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{Ea_2^3-(E_1+2F)a_2^2+(2F_1+G)a_2-G_1}{Aa_2^3-(A_1+2B)a_2^2+(2B_1+C)a_2-C_1}, \\[3ex]
b_3=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{Ea_3^2-(E_1+2F)a_3^2+(2F_1+G)a_3-G_1}{Aa_3^3-(A_1+2B)a_3^2+(2B_1+C)a_3-C_1}.
\end{array}
\right\}\quad (9^d)
$$

En hiermede zijn de twaalf grootheden $a, a_1, a_2, a_3, p, q, r, s, b, b_1, b_2, b_3$ gevonden. Er blijven dus acht der twintig vergelijkingen, als voorwaardensvergelijkingen over. Deze zijn vooreerst de niet gebruikte

$$H=,\quad K=,\quad L=,\quad H_1=,\quad K_1=,\quad L_1=\ldots\ldots\ (a_4)$$

Maar bovendien moeten er nog twee bestaan tusschen de gebruikte grootheden E, F, G, E_1, F_1, G_1. Schrijven wij deze daartoe in den vorm

$$
\begin{aligned}
E &= b_1(p+r+s)+b_2(p+q+s)+b_3(p+q+r)+b(q+r+s), \\
2F &= b_1\{p(a_2+a_3)+r(a_3+a)+s(a+a_2)\}+b_2\{p(a_1+a_3)+q(a_3+a)+s(a+a_1)\}+ \\
&\quad +b_3\{p(a_1+a_2)+q(a_2+a)+r(a+a_1)\}+b\{q(a_2+a_3)+r(a_3+a_1)+s(a_1+a_2)\}, \\
G &= b_1(pa_2a_3+ra_3a+saa_2)+b_2(pa_1a_3+qa_3a+saa_1)+b_3(pa_1a_2+qa_2a+raa_1)+ \\
&\quad +b(qa_2a_3+ra_3a_1+sa_1a_2), \\
E_1 &= b_1(pa_1+ra_2+sa_3)+b_2(pa+qa_1+sa_3)+b_3(pa+qa_1+ra_2)+b(qa_1+ra_2+sa_3), \\
2F_1 &= b_1\{pa(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a)+sa_3(a+a_2)\}+b_2\{pa(a_1+a_2)+qa_1(a_3+a)+sa_3(a_1+a)\}+ \\
&\quad +b_3\{pa(a_1+a_2)+qa_1(a_2+a)+ra_2(a+a_1)\}+b\{qa_1(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a_1)+sa_3(a_1+a_2)\}, \\
G_1 &= b_1(p+r+s)aa_2a_3+b_2(p+q+s)aa_1a_3+b_3(p+q+r)aa_1a_2+b(q+r+s)a_1a_2a_3;
\end{aligned}
$$

De eliminatie moet hier dus twee determinanten geven, beide gelijk nul. Vorm daartoe de matrix

1ste kolom.	2de kolom.
$p+r+s$	$p+q+s$
$pa_2a_3+ra_3a+saa_2$	$pa_1a_3+qa_3a+saa_1$
$pa+ra_2+sa_3$	$pa+qa_1+sa_3$
$(p+r+s)aa_2a_3$	$(p+q+s)aa_1a_3$
$p(a_2+a_3)+r(a_3+a)+s(a+a_2)$	$p(a_1+a_3)+q(a_3+a)+s(a+a_1)$
$pa(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a)+sa_3(a+a_2)$	$pa(a_1+a_3)+qa_1(a_3+a)+sa_3(a+a_1)$

3de kolom.	4de kolom.	5de kolom.
$p+q+r$	$q+r+s$	$-E$
$pa_1a_2+qa_2a+raa_1$	$qa_2a_3+ra_3a_1+sa_1a_2$	$-G$
$pa+qa_1+ra_2$	$qa_1+ra_2+sa_3$	$-E_1$
$(p+q+r)aa_1a_2$	$(q+r+s)a_1a_2a_3$	$-G_1$
$p(a_1+a_2)+q(a_2+a)+r(a+a_1)$	$q(a_2+a_3)+r(a_3+a_1)+s(a_1+a_2)$	$-2F$
$pa(a_1+a_2)+qa_1(a_2+a)+ra_2(a+a_1)$	$qa_1(a_2+a_3)+ra_2(a_3+a_1)+sa_3(a_1+a_2)$	$-2F_1$

Tel alle drie eerste kolommen op bij de vierde, dan wordt deze

$$3(p+q+r+s) = 3A,$$
$$p(a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2)+q(a_3a+a_2a+a_2a_3)+r(a_3a+aa_1+a_1a_3)+s(aa_2+aa_1+a_1a_2) = 3C,$$
$$3(pa+qa_1+ra_2+sa_3) = 3A_1,$$
$$pa(a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2)+qa_1(aa_3+aa_2+a_2a_3)+ra_2(aa_3+aa_1+a_1a_3)+sa_3(aa_2+aa_1+a_1a_2) = 3C_1,$$
$$2p(a_1+a_2+a_3)+2q(a_2+a_3+a)+2r(a_3+a+a_1)+2s(a+a_1+a_2) = 6B,$$
$$2pa(a_1+a_2+a_3)+2qa_1(a_2+a_3+a)+2ra_2(a_3+a+a_1)+2sa_3(a+a_1+a_2) = 6B_1.$$

Vermenigvuldig de 1ste, 2de en 3de kolom met a_1, a_2, a; tel dit alles op bij het produkt van a_3 met de 3de kolom; dan wordt deze

$$p(a_1+a_2+a_3)+q(a_2+a_3+a)+r(a_3+a+a_1)+s(a+a_1+a_2) = 3B,$$
$$3(pa_1a_2a_3+qa_2a_3a+ra_3aa_1+saa_1a_2) = 3D,$$
$$pa(a_1+a_2+a_3)+qa_1(a_2+a_3+a)+ra_2(a_3+a+a_1)+sa_3(a+a_1+a_2) = 3B_1,$$
$$3(paa_1a_2a_3+qa_1a_2a_3a+ra_2a_3aa_1+sa_3aa_1a_2) = 3D_1,$$
$$2\{p(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+q(a_2a_3+a_2a+a_3a)+r(a_3a+a_3a_1+aa_1)+s(aa_1+aa_2+a_1a_2)\} = 6C,$$
$$2\{pa(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+qa_1(a_2a_3+a_2a+a_3a)+ra_2(a_3a+a_3a_1+aa_1)+sa_3(aa_1+aa_2+a_1a_2)\} = 6C_1.$$

Tel de 1ste, 3de en 4de kolom bij het produkt van (-2) met de 2de kolom; deze wordt daardoor

$$3r \qquad\qquad = 3r,$$

$$p(a_2a_3 + a_1a_2 - 2a_1a_3) + q(a_2a + a_2a_3 - 2a_3a) + r(a_3a + aa_1 + a_1a_3) + s(aa_2 + a_1a_2 - 2aa_1) =$$
$$= 3C - 3\frac{D - raa_1a_3}{a_2} = 3C - \frac{3D}{a_2} + \frac{3rD_1}{Aa_2^2},$$

$$3ra_2 \qquad\qquad = 3ra_2,$$

$$pa(a_2a_3 + a_1a_2 - 2a_1a_3) + qa_1(aa_2 + a_2a_3 - 2a_3a) + ra_2(a_3a + aa_1 + a_1a_3) + sa_3(aa_2 + a_1a_2 - 2aa_1) =$$
$$= 3C_1 - 3(A - r)\frac{D_1}{Aa_2},$$

$$p(2a_2 - a_3 - a_1) + q(2a_2 - a - a_3) + 2r(a + a_3 + a_1) + s(2a_2 - a - a_1) =$$
$$= 3a_2(A - 2r) - 3B + 3r\frac{3B + A_1}{A},$$

$$pa(2a_2 - a_3 - a_1) + qa_1(2a_2 - a - a_3) + 2ra_2(a + a_3 + a_1) + sa_3(2a_2 - a - a_1) =$$
$$= 3a_2(A_1 - 2ra_2) - 3B_1 + 3ra_2\frac{3B + A_1}{A}.$$

Vermenigvuldig nog de 2^{de}, 3^{de}, 4^{de} kolommen met $-2a_2$, a_3, a, en tel alles op bij het produkt van a_1 met de eerste kolom, dan wordt deze

$$p(a_1 - 2a_2 + a_3) + q(-2a_2 + a_3 + a) + r(a_1 + a_3 + a) + s(a_1 - 2a_2 + a) = 3B - 3a_2(A - r),$$

$$3raa_1a_3 \qquad\qquad = 3r\frac{D_1}{Aa_2},$$

$$p(aa_1 - 2aa_2 + aa_3) + q(-2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a) + r(a_2a_1 + a_2a_3 + a_2a) + s(a_3a_1 - 2a_3a_1 + a_3a) =$$
$$= 3B_1 - 3a_2(A_1 - ra_2),$$

$$3raa_1a_2a_3 \qquad\qquad = 2r\frac{D_1}{A},$$

$$p(-a_1a_2 + 2a_1a_3 - a_2a_3) + q(-a_2a_3 - aa_2 + 2aa_3) + 2r(a_1a_3 + aa_1 + aa_3) + s(2aa_1 - a_1a_2 - aa_2) =$$
$$= -3C - \frac{6 + D_1}{a_2^2} + \frac{3D}{Aa_2}(A + r) + \frac{9rC_1}{Aa_2},$$

$$pa(-a_1a_2 + 2a_1a_3 - a_2a_3) + qa_1(-a_2a_3 - aa_2 + 2aa_3) + 2ra_2(a_1a_3 + aa_1 + aa_3) + sa_3(2aa_1 - a_1a_2 - aa_2) =$$
$$= -3C_1 + \frac{3D_1}{Aa_2}(A - 2r) + 3r\frac{D + 3C_1}{A}.$$

Nu is reeds alles tot a_2 en r teruggebracht. Ter vereenvoudiging trekke men nog a_2 maal de 2^{de} kolom van de 1^{ste} af, dan wordt deze eindelijk

$$B - a_2A,$$

$$-Ca_2 + D,$$

$$B_1 - a_2A_1,$$

$$-C_1a_2 + \frac{D_1}{a_2},$$

$$-a_2^2(A-2r)+a_2\left(B-r\frac{3B+A_1}{A}\right)-C+\frac{D(A+r)+3C_1}{Aa_2}-\frac{2rD_1}{a_2^2}=a_2\left(4B+A_1+r\frac{3B+A_1}{A}\right)+$$

$$+\left(2C-3B_1-\frac{C+B_1}{A}6r\right)+3\,\frac{Dr-(A-2r+1)C_1}{a_2A}+D_1\frac{A-4r}{a_2^2},$$

$$2ra_2^3-a_2^2\left(A_1+r\frac{3B+A_1}{A}\right)+B_1a_2-3\left(C_1-r\frac{D+3C_1}{A}\right)+3D_1\frac{A-2r}{Aa_2}=$$

$$=-a_2^2\left(A-r\frac{3B+A_1}{A}\right)+a_2\left(B_1-6r\frac{C+B_1}{A}\right)+\frac{D+3C_1}{A}5r-3C_1+D\frac{3A-8r}{Aa_2};$$

wanneer men de vergelijking (9^a) toepast.

Om nu onze determinanten te verkrijgen, neme men de vier eerste regels en stelle daarboven telkens den 5den en den 6den; dan vermenigvuldige men met a_2^2 om de breuken te verdrijven; eindelijk telle men

$$-\frac{D}{A}\times \text{ den } 2^{\text{den}} \text{ regel bij den } 3^{\text{den}} \text{ en } 5^{\text{den}} \text{ regel,}$$

$$-a_2\times \text{ den } 2^{\text{den}} \text{ regel bij den } 4^{\text{den}},$$

$$\text{en } \left(2a_2-\frac{3B+A_2}{A}\right)a_2^2\times \text{ den } 2^{\text{den}} \text{ regel bij den } 1^{\text{sten}};$$

en herhale dezelfde bewerking bij de tweede determinante. Op die wijze verkrijgt men

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_2^3(3AB+3B+A_1)+a_2^2 & (Aa_2-B)a_2^2, & \{2ABa_2- & \{2Aa_2- & \{2AEa_2- \\
\quad\{8AC+9B_1A-3B^2+A_1B+ & & \quad(3B^2+A_1B- & \quad(3B+A_1)\} & \quad(3BE+A_1E- \\
\quad(C+B_1)6r\}-a_2\{2AD+3AC_1+ & & \quad 2AC)\}a_2^2, & \quad a_2^2, & \quad -2AF)\}a_2^2, \\
\quad 3C_1-(D+2C_1)3r\}+AD_1 & & & & \\
\quad(A-4r+2), & & & & \\
(-Aa_2+B)A, & r, & AB, & A, & AE, \\
ACa_2^3+ADa_2^2+AD_1a_2-BD_1, & (Ca_2-D)a_2, & ADa_2^2-BD_1, & Ca_2^2-D_1, & AGa_2^2-D_1E, \\
\{Ca_2^2-(A_1+B)a_2+B_1\}A, & 0, & (-Ba_2+B_1)A, & -Aa_2+A_1, & (-Ea_2+E_1)A, \\
-ACa_2^2+AD_1a_2+(AB_1-BD_1), & C_1a_2-D_1, & (Aa_2-B)D_1, & C_1a_2-D_1, & AG_1a_2-ED_1,
\end{array}\right\}=0, \quad (b_4)$$

en

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_2^3\{3A^2+(3B+A_1)r\}+a_2^2 & (a_2A_1-3B_1) & \{2ABa_2^2- & \{2Aa_2+ & \{2AEa_2+ \\
\quad\{6AB+AA_1-(C+B_1)6r\} & \quad a_2^2, & \quad-(3B^2+A_1B- & \quad+2B_1- & \quad(3BE+A_1E- \\
\quad-a_2\{3AC_1+3B^2+A_1B- & & \quad-2AC_1)\}a_2^2, & \quad-(3B+A_1)\} & \quad-2AF_1)\}a_2^2, \\
\quad-(D+3C_1)5r\}+AD(3A-8r), & & & \quad a_2^2, & \\
(-Aa_2+B)A, & r, & AB, & A, & AE, \\
ACa_2^3+ADa_2^2+AD_1a_2-BD_1, & (a_2C-D)a_2, & ADa_2^2+BD_1, & Ca_2^2-D_1, & AGa_2^2-D_1E, \\
\{Ca_2^2-(A_1+B)a_2+B_1\}A_1, & 0, & (-Ba_2+B_1)A_1, & -Aa_2^2+A_1, & (-Ea_2+E_1)A, \\
-ACa_2^2+AD_1a_2+(AB_1-BD_1), & a_2C_1-D_1, & (A_1a_2-B)D_1, & C_1a_2-D_1, & AG_1a_2-ED_1,
\end{array}\right\}=0; \quad (c_4)$$

waarbij ter wille van de duidelijkheid de regels door komma's en de kolommen door vertikale lijnen zijn gescheiden, en verder ter herleiding der eerste gebruik is gemaakt van de herleiding

$$
\begin{aligned}
-2a_2^4A+a_2^3\left(9B+2A_1+r\frac{3B+A_1}{A}\right)+a_2^2\left(2C+3B_1-\frac{3B+A_1}{A}B-\frac{C+B_1}{A}6r\right)+\\
+3a_2\frac{Dr-(A-2r+1)C_1}{A}+D_1(A-4r)=a_2^3\left(3B+\frac{3B+A_1}{A}\right)+\\
+a_2^2\left\{8C+9B_1-\frac{3B+A_1}{A}B-\frac{C+B_1}{A}6r\right\}-a_2\left\{2D+3C_1-3\frac{Dr+(2r-1)C_1}{A}\right\}+D_1(A-4r+2),
\end{aligned}
$$

waarvoor weder van (9^a) is gebruik gemaakt.

De determinanten (b_4) en (c_4) bevatten nu slechts de a_2 en r, die later door middel van substitutie uit (9^a) en (9^c) verdwijnen.

11. Deze oplossing gaat niet door, wanneer $A=0$ is. Tengevolge van de vergelijkingen (9) moet dan ook

$$3B+A_1=0,\qquad C+B_1=0,\qquad D+3C_1=0,\qquad D_1=0$$

zijn; men kan dus A_1, B_1, C_1 en D_1 als afhankelijke betrekkingen beschouwen.

Gebruikt men dan de onderstelling $A=0=p+q+r+s$ om de s overal te elimineeren, zoo behoudt men

$$
\begin{aligned}
3B&=p(a_3-a)+q(a_3-a_1)+r(a_3-a_2),\\
3C&=p(a_3-a)(a_1+a_2)+q(a_3-a_1)(a+a_2)+r(a_3-a_2)(a+a_1),\\
D&=p(a_3-a)a_1a_2+q(a_3-a_1)aa_2+r(a_3-a_2)aa_1,\\
E&=p(b_3-b)+q(b_3-b_1)+r(b_3-b_2),\\
2F&=p\{(a_3-a)(b_1+b_2)+(b_3-b)(a_1+a_2)\}+q\{(a_3-a_1)(b+b_2)+(b_3-b_1)(a+a_2)\}+\\
&\quad+r\{(a_3-a_2)(b+b_1)+(b_3-b_2)(a+a_1)\},\\
G&=p\{(a_3-a)(a_1b_2+a_2b_1)+(b_3-b)a_1a_2\}+q\{(a_3-a_1)(ab_2+a_2b)+(b_3-b_1)aa_2\}+\\
&\quad+r\{(a_3-a_2)(ab_1+a_1b)+(b_3-b_2)aa_1\},\\
H&=p(b_3-b)(b_1+b_2)+q(b_3-b_1)(b+b_2)+r(b_3-b_2)(b+b_1),\\
K&=p\{(b_3-b)(a_1b_2+a_2b_1)+(a_3-a)b_2b_1\}+q\{(b_3-b_1)(ab_2+a_2b)+(a_3-a_1)bb_2\}+\\
&\quad+r\{(b_3-b_2)(ab_1+a_1b)+(a_3-a_2)bb_1\},\\
L&=p(b_3-b)b_1b_2+q(b_3-b_1)bb_2+r(b_3-b_2)bb_1,\\
E_1&=p\{(ab_3-a_3b)-(a_3-a)(b_1+b_2)\}+q\{(a_1b_3-a_3b_1)-(a_3-a_1)(b+b_2)\}+\\
&\quad+r\{(a_2b_3-a_3b_2)-(a_3-a_2)(b+b_1)\},\\
2F_1&=p\{(ab_3-a_3b)(a_1+a_2)-(a_3-a)(a_1b_2+a_2b_1)\}+q\{(a_1b_3-a_3b_1)(a+a_2)-(a_3-a_1)(ab_2+a_2b)\}+\\
&\quad+r\{(a_2b_3-a_3b_2)(a+a_1)-(a_3-a_2)(ab_1+a_1b)\},\\
G_1&=p(ab_3-a_3b)a_1a_2+q(a_1b_3-a_3b_1)aa_2+r(a_2b_3-a_3b_2)aa_1,
\end{aligned}
$$

$$H_1 = p\{(ab_3 - a_3 b)(b_1 + b_2) - (a_3 - a) b_1 b_2\} + q\{(a_1 b_3 - a_3 b_1)(b + b_2) - (a_3 - a_1) b b_2\} +$$
$$+ r\{(a_2 b_3 - a_3 b_2)(b + b_1) - (a_3 - a_2) b b_1\},$$
$$K_1 = p(ab_3 - a_3 b)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + q(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a b_2 + a_2 b) + r(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a b_1 + a_1 b),$$
$$L_1 = p(ab_3 - a_3 b) b_1 b_2 + q(a_1 b_3 - a_3 b_1) b b_2 + r(a_2 b_3 - a_3 b_2) b b_1.$$

Hieruit volgt

$$Ea - E_1 = p(a_3 - a)(b_1 + b_2 + b) + q\{(a_3 - a_1)(b + b_2) + ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_2)(b + b_1) + ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2\},$$
$$2(Fa - F_1) = p(a_3 - a)(ab_1 + ab_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b + a_2 b) +$$
$$+ q\{(a_3 - a_1)(ab + 2ab_2 + a_2 b) + (a + a_2)(ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_2)(ab + 2ab_1 + a_1 b) + (a + a_1)(ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\},$$
$$Ga - G_1 = p(a_3 - a)(aa_1 b_2 + aa_2 b_1 + a_1 a_2 b) + qa\{(a_3 - a_1)(ab_2 + a_2 b) + (ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1) a_2\} +$$
$$+ ra\{(a_3 - a_2)(ab_1 + a_1 b) + (ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2) a_1\};$$

en verder

$$(Ea - E_1)a - 2(Fa - F_1) = p(a_3 - a)(ab_1 - a_1 b - a_2 b - a_1 b_2 - a_2 b_1) -$$
$$- q\{(a_3 - a_1)(ab_2 + a_2 b) + a_2(ab_3 - ab_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} -$$
$$- r\{(a_3 - a_1)(ab_1 + a_1 b) + a_1(ab_3 - ab_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\},$$
$$\{(Ea - E_1)a - 2(Fa - F_1)\}a + (Ga - G_1) = p(a_3 - a)(a^2 b - aa_1 b - aa_2 b + a_1 a_2 b) =$$
$$= pb(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a).$$

Maar ook is

$$3(Ba - C) = p(a_3 - a)(a - a_2 - a_1) - qa_2(a_3 - a_1) - ra_1(a_3 - a_2),$$
$$(Ba - C)3a + D = p(a_3 - a)(a^2 - a_1 a - a_2 a + a_1 a_2);$$

zoodat men tot de beide uitkomsten geraakt

$$p = \frac{3Ba^2 - 3Ca + D}{(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

en

$$b = \frac{Ea^3 - (E_1 + 2F)a^2 + (2F_1 + G)a - G_1}{3Ba^2 - 3Ca + D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10^a)$$

Wegens de symetrie van onze vergelijkingen is het duidelijk, dat men hieruit b_1, b_2, b_3 verkrijgt door a te veranderen in a_1, a_2, a_3; evenzoo q, r en s door in den teller van p dezelfde verandering te brengen, en dan voor den noemer te schrijven $(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a - a_1)$, $(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)(a - a_2)$, $(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)(a - a_3)$. Er blijft nu slechts over, om de a te bepalen. Daartoe heeft men

$$3(Ba + C) = p(a_3 - a)(a + a_1 + a_2) + q(a_3 - a_1)(a_2 + 2a) + r(a_3 - a_2)(a_1 + 2a),$$

$$Ka - K_1 = p(a_3 - a)(a_1 b_2 b + a_2 b_1 b + a b_1 b_2) + q\{(a_3 - a_1) a b b_2 + (a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)(a b_2 + a_2 b)\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_1) a b b_1 + (a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)(a b_1 + a_1 b)\},$$
$$La - L_1 = p b_1 b_2 b (a_3 - a) + q b b_2 (a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1) + r b b_1 (a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2);$$

waardoor vervolgens

$$(Ea - E_1) - 3B.2b = p(a_3 - a)(b_1 + b_2 - b) + q\{(a_3 - a_1)(b_2 - b) + a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_2)(b_1 - b) + a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2\},$$
$$2(Fa - F_1) - 3(Ba + C)b = p(a_3 - a)(a b_1 + a b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 - a b) +$$
$$+ q\{(a_3 - a_1)(2 a b_2 - a b) + (a + a_2)(a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_2)(2 a b_1 - a b) + (a + a_1)(a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\};$$

derhalve

$$-\{(Ea - E_1) - 6Bb\} a + \{2(Fa - F_1) - (Ba + C) 3b\} = p(a_3 - a)(a_1 b_2 + a_2 b_1) +$$
$$+ q\{(a_3 - a_1) a b_2 + a_2 (a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1)\} +$$
$$+ r\{(a_3 - a_2) a b_1 + a_1 (a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2)\};$$

en eindelijk

$$(Ka - K_1) + [\{(Ea - E_1) - 6Bb\} a - \{2(Fa - F_1) - (Ba + C) 3b\}] b = p(a_3 - a) a b_1 b_2 +$$
$$+ q a b_2 (a b_3 - a b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1) + r a b_1 (a b_3 - a b_2 - a_2 b_3 + a_3 b_2) = (La - L_1)\frac{a}{b},$$

of rangschikkende naar b

$$3(Ba + C) b^3 - 2\{(Fa - F_1) + 3Ba\} b^2 + \{(Ea - E_1) a + (Ka - K_1)\} b - (La - L_1) a = 0,$$

dat is volgens (10^a)

$$3(Ba + C)\{Ea^3 - (E_1 + 2F) a^2 + (2F_1 + G) a - G_1\}^3 -$$
$$- 2\{(Fa - F_1) + 3Ba\}(3Ba^2 - 3Ca + D)\{Ea^3 - (E_1 + 2F) a^2 + (2F_1 + G) a - G_1\}^2 +$$
$$+ \{(Ea - E_1) a - (Ka - K_1)\}(3Ba^2 - 3Ca + D)^2 \{(Ea^3 - (E_1 + 2F) a^2 + (2F_1 + G) a - G_1\} +$$
$$+ (La - L_1) a (3Ba^2 - 3Ca + D)^3 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10^b)$$

eene tiendemachtsvergelijking voor a.

Er blijven hier, behalve de oorspronkelijke waarden

$$A = 0, \quad A_1 = -3B, \quad B_1 = -C, \quad 3C_1 = -D, \quad D_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (a_5)$$

nog de twee voorwaardensvergelijkingen

$$H = , \qquad H_1 = , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b_5)$$

die nog niet gebruikt zijn. Er moet echter nog eene worden opgespoord, die men op de volgende wijze vindt.

$$H - Eb = p(b_3 - b)(b_1 + b_2 - b) + q(b_3 - b_1)b_2 + r(b_3 - b_2)b_1,$$
$$L - (H - Eb)b = p(b_3 - b)(b_1 b_2 - b_1 b - b_2 b - b^2) = p(b_3 - b)(b_2 - b)(b_1 - b).$$

Derhalve

$$(3Ba^2 - 3Ca + D)(b_3 - b)(b_2 - b)(b_1 - b) = (Eb^2 - Hb + L)(a_3 - a)(a_2 - a)(a_1 - a), \quad . \quad (c_8)$$

waarin nu de gevonden waarden van de a en b te substitueeren zijn.

12. Evenmin geldt de oplossing van § 10, als $a = a_1$ is. Volgens de vergelijkingen (10) en (10^a) is dan ook $b = b_1$, $q = p$, zoodat men heeft

$$\begin{aligned}
A &= 2q + r + s, \\
3B &= 2q(a_1 + a_2 + a_3) + r(2a_1 + a_3) + s(2a_1 + a_2), \\
3C &= 2q(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + r(a_1^2 + 2a_3 a_1) + s(a_1^2 + 2a_2 a_1), \\
D &= 2q a_1 a_2 a_3 + r a_1^2 a_3 + s a_1^2 a_2, \\
E &= 2q(b_1 + b_2 + b_3) + r(2b_1 + b_3) + s(2b_1 + b_2), \\
2F &= 2q(a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2) + 2r(a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_1 b_1) + 2s(a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1), \\
G &= 2q(a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + r(2a_1 a_3 b_1 + a_1^2 b_3) + s(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2), \\
H &= 2q(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + r(2b_1 b_2 + b_1^2) + s(2b_1 b_2 + b_1^2), \\
K &= 2q(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) + r(2a_1 b_1 b_3 + a_3 b_1^2) + s(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2), \\
L &= 2q b_1 b_2 b_3 + r b_1^2 b_3 + s b_1^2 b_2, \\
A_1 &= 2q a_1 + r a_2 + s a_3, \\
3B_1 &= 2q a_1(a_1 + a_2 + a_3) + r a_2(2a_1 + a_3) + s a_3(2a_1 + a_2), \\
3C_1 &= 2q a_1(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + r a_2(2a_1 a_3 + a_1^2) + 2s a_3(2a_1 a_2 + a_1^2), \\
D_1 &= 2q a_1^2 a_2 a_3 + r a_1^2 a_2 a_3 + s a_1^2 a_2 a_3, \\
E_1 &= 2q a_1(b_1 + b_2 + b_3) + r a_2(2b_1 + b_3) + s a_3(2b_1 + b_2), \\
2F_1 &= 2q a_1(a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2) + 2r a_2(a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_1 b_1) + \\
&\quad + 2s a_3(a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1), \\
G_1 &= 2q a_1(a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1) + r a_2(2a_1 a_3 b_1 + a_1^2 b_3) + s a_3(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2), \\
H_1 &= 2q a_1(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3) + r a_2(2b_1 b_3 + b_1^2) + s a_3(2b_1 b_2 + b_1^2), \\
K_1 &= 2q a_1(a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2) + r a_2(2a_1 b_1 b_3 + a_3 b_1^2) + s a_3(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2), \\
L_1 &= 2q a_1 b_1 b_2 b_3 + r a_2 b_1^2 b_3 + s a_3 b_1^2 b_2.
\end{aligned}$$

Men leidt nu achtereenvolgens af

$$\frac{3B+A_1}{A} = 2a_1 + a_2 + a_3, \quad \frac{3(C+B_1)}{A} = a_1^2 + 2a_1 a + 2a_1 a_3 + a_2 a_3,$$

$$\frac{D+3C_1}{A} = a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + 2a_1 a_2 a_3, \quad \frac{D_1}{A} = a_1^2 a_2 a_3\,;$$

dus

$$\frac{3B+A_1}{A} - 2a_1 = a_2 + a_3, \quad \frac{3(C+B_1)}{A} - a_1^2 = 2a\,(a_2+a_3) + a_2 a_3,$$

$$\frac{D+3C_1}{A} = a_1^2(a_2+a_3) + 2a_1(a_2 a_3), \quad \frac{D_1}{A a_1^2} = a_2 a_3.$$

Substitueert men de $a_2 + a_3$ en $a_2 a_3$ uit de beide uiterste in de beide middelste vergelijkingen, zoo is

$$\left.\begin{aligned} &3Aa_1^4 - 2(3B+A_1)a_1^3 + 3(C+B_1)a_1^2 - D_1 = 0,\\ &2Aa_1^4 - (3B+A_1)a_1^3 + (D+3C_1)a_1 - 2D_1 = 0\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

twee vergelijkingen, die beide kunnen dienen ter bepaling van a_1. Men kan ze echter door eliminatie telkens herleiden, en verkrijgt dan

$$\left.\begin{aligned} &(3B+A_1)a_1^3 - 6(C+B_1)a_1^2 + 3(D+3C_1)a_1 - 4D_1 = 0,\\ &\quad 4Aa_1^3 - 3(3B+A_1)a_1^2 + 6(C+B_1)a_1 - (D+3C_1) = 0,\\ &\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}3a_1^2 + \{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\}6a_1 +\\ &\qquad + 16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1) = 0,\\ &\{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}a_1^2 + \{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B+A_1)2D_1\}6a_1 +\\ &\qquad 24(C+B_1)D_1 - 3(D+3C_1)^2 = 0\,; \end{aligned}\right\} (11^a)$$

$$\left.\begin{aligned} &[\{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\,\{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\} -\\ &\quad -3\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B+A_1)2D_1\}]6a_1 =\\ &\quad = [27\,\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\,\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\} -\\ &\quad - \{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\}],\\ &[27\{8A(C+B_1) - (3B+A_1)^2\}\,\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\} -\\ &\quad - \{16AD - (3B+A_1)(D+3C_1)\}\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\}]a_1 =\\ &\quad = [6\{(C+B_1)(D+3C_1) - (3B-A_1)2D\}\,\{16AD_1 - (3B+A_1)(D+3C_1)\} -\\ &\quad - 18\{(3B+A_1)(C+B_1) - (D+3C_1)2A\}\{8(C+B_1)D_1 - (D+3C_1)^2\}]. \end{aligned}\right\} (11^b)$$

Beide laatste vergelijkingen geven nu de a_1, en daarenboven, na deeling, eene betrekking, die er noodzakelijk tusschen de coëfficiënten bestaan moet. Heeten die vergelijkingen $Pa_1 = Q$, $P_1 a_1 = Q_1$. zoo moet zijn

$$PQ_1 = P_1 Q. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_6)$$

Voor de a_2 heeft men hier nog

$$A a_2^4 - (3B + A_1) a_2^3 + (C + B_1) 3 a_2^2 - (D + 3 C_1) a_2 + D_1 = 0, \quad . \quad . \quad (11^c)$$

en dezelfde geldt voor a_3; terwijl ook de beide vergelijkingen (11) voor a_1 aan de (11^c) voldoen, zoo als behoorde, want deze geven daarvan de twee, thans dubbelen, wortel.

Verder is

$$6B - 3Aa_1 = 2q(-a_1 + 2a_2 + 2a_3) + r(a_1 + 2a_3) + s(a_1 + 2a_2),$$
$$3Aa_1^2 - 6Ba_1 + 3C = 2q(a_1^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_2 a_3);$$

dus

$$q = \frac{3}{2} \frac{Aa_1^2 - 2Ba_1 + C}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11^d)$$

Nog is

$$3B - Aa_2 = 2q(a_1 + a_3) + r(2a_1 - a_2 + a_3) + 2sa_1,$$
$$Aa_2^2 - 3Ba_2 + 3C = 2qa_1 a_3 + r(a_1^2 + 2a_3 a_1 - 2a_2 a_1 + a_2^3 - a_2 a_3) + sa_1^2,$$
$$Aa_2^3 - 3Ba_2^2 + 3Ca_2 - D = r(a_1^2 a_2 + 2a_1 a_2 a_3 - 2a_1 a_2^2 + a_2^3 - a_2^2 a_3 - a_1^2 a_3) =$$
$$= r(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^2,$$

waaruit

$$r = \frac{Aa_2^3 - 3Ba_2^2 + 3Ca_2 - D}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)^2}; \text{ terwijl evenzoo } s = \frac{Aa_3^3 - 3Ba_3^2 + 3Ca_3 - D}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_3)^2}. \quad . \quad . \quad (11^e)$$

Nu moet nog de b_1 gezocht worden; daartoe heeft men

$$Aa_1 - A_1 = r(a_1 - a_2) + s(a_1 - a_3),$$
$$3Ba_1 - 3B_1 = r(a_1 - a_2)(2a_2 + a_3) + s(a_1 - a_3)(2a_1 + a_2),$$
$$3Ca_1 - 3C_1 = r(a_1 - a_2)(a_1^2 + 2a_3 a_1) + s(a_1 - a_3)(a_1^2 + 2a_2 a_1),$$
$$Ea_1 - E_1 = r(a_1 - a_2)(2b_1 + b_3) + s(a_1 - a_3)(2b_1 + b_2),$$
$$Fa_1 - F_1 = r(a_1 - a_2)(a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_1 b_1) + s(a_1 - a_3)(a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1),$$
$$Ga_1 - G_1 = r(a_1 - a_2)(2a_1 a_3 b_1 + a_1^2 b_3) + s(a_1 - a_3)(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2);$$

waaruit nu wordt afgeleid

$$(Ea_1 - E_1)a_1 - (Fa_1 - F_1) = r(a_1 - a_2)(a_1 b_1 - a_3 b_1) + s(a_1 - a_3)(a_1 b_1 - a_2 b_1) = r(a_1 - a_2) b_1 (a_1 - a_3) +$$
$$+ s(a_1 - a_3) b_1 (a_1 - a_2),$$
$$(Aa_1 - A_1) 3a_1 - 3(Ba_1 - B_1) = (r + s)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3),$$

en dus, na deeling,

$$b_1 = \frac{1}{3} \frac{Ea_1^2 - (E_1 + F)a_1 + F_1}{Aa_1^2 - (A_1 + B)a_1 + B_1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11^f)$$

Evenzeer nog

$$(F a_1 - F_1) a_1 - (G a_1 - G_1) = r(a_1 - a_2)(a_1^2 b_1 - a_1 a_3 b_1) + s(a_1 - a_3)(a_1^2 b_1 - a_1 a_2 b_1),$$

$$3(B a_1 - B_1) a_1 - (C a_1 - C_1) = r(a_1 - a_2)(a_1^2 - a_1 a_3) + s(a_1 - a_3)(a_1^2 - a_1 a_2),$$

en dus, als men deze op elkander deelt,

$$b_1 = \frac{1}{3} \frac{F a_1^2 - (F_1 + G) a_1 + G_1}{B a_1^2 - (B_1 + C) a_1 + C_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11}^g\text{)}$$

Beide waarden voor b_1 leveren nog als voorwaardensvergelijking

$$\left.\begin{array}{l} BE a_1^4 - (BE_1 + BF + B_1 E + CE) a_1^3 + \\ \quad + (BF_1 + B_1 E_1 + B_1 F + CE_1 + CF + C_1 E) a_1^2 - (C_1 E_1 + C_1 F + B_1 F_1 + CF_1) a_1 + CF_1 = \\ \quad = AF a_1^4 - (AF_1 + AG + A_1 F + BF) a_1^3 + \\ \quad + (AG_1 + A_1 F_1 + A_1 G + BF_1 + BG + BF) a_1^2 - (A_1 G_1 + BG_1 + B_1 F + B_1 G) a_1 + B_1 G_1, \end{array}\right\} . (b_6)$$

waaruit nu door eene der vergelijkingen (11) tot (11^b) de a_1 moet worden geëlimineerd.

Voor b_2 heeft men weder

$$b_2 = \frac{1}{3} \frac{E a_2^3 - (E_1 + 2F) a_2^2 + (2F_1 + G) a_2 - G_1}{A a_2^3 - (A_1 + 2B) a_2^2 + (2B_1 + C) a_2 - C_1}, \ldots\ldots \text{(11}^h\text{)}$$

waaruit de b_3 wordt afgeleid door a_2 te vervangen door a_3. Deze a_2 en a_3 moeten dan later worden geëlimineerd.

Verder heeft men nog als voorwaardensvergelijkingen

$$H =, \quad K =, \quad L =, \qquad H_1 =, \quad K_1 =, \quad L_1 = \ldots\ldots\ldots (c_6)$$

13. Eindelijk kan nog $a = a_1$ (dus ook $b = b_1$ en $p = q$) en tegelijk $a_3 = a_2$ (dus ook $b_3 = b_2$ en $s = r$) zijn; in dat geval heeft men

$$\begin{array}{ll}
A = 2(q + r), & A_1 = 2 q a_1 + 2 r a_2, \\
3B = 2q(a_1 + 2a_2) + 2r(2a_1 + a_2), & 3B_1 = 2 q a_1 (a_1 + 2a_2) + 2 r a_2 (2a_1 + a_2), \\
3C = 2q(a_2^2 + 2a_1 a_2) + 2r(a_1^2 + 2a_1 a_2), & 3C_1 = 2 q a_1 (a_2^2 + 2a_1 a_2) + 2 r a_2 (a_1^2 + 2a_1 a_2), \\
D = 2 q a_1 a_2^2 + 2 r a_1^2 a_2, & D_1 = 2 q a_1^2 a_2^2 + 2 r a_1^2 a_2^2, \\
E = 2q(b_1 + 2b_2) + 2r(2b_1 + b_2), & E_1 = 2 q a_1 (b_1 + 2b_2) + 2 r a_2 (2b_1 + b_2), \\
2F = 4q(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + 4r(a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1), & 2F_1 = 4q a_1(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + 4r a_2(a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1), \\
G = 2q(2a_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1) + 2r(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2), & G_1 = 2q a_1(2a_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1) + 2r a_2(2a_1 a_2 b_1 + a_1^2 b_2), \\
H = 2q(2b_1 b_2 + b_2^2) + 2r(2b_1 b_2 + b_1^2), & H_1 = 2 q a_1 (2b_1 b_2 + b_2^2) + 2 r a_2 (2b_1 b_2 + b_1^2), \\
K = 2q(a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2) + 2r(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2), & K_1 = 2q a_1(a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2) + 2r a_2(2a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2), \\
L = 2 q b_1 b_2^2 + 2 r b_1^2 b_2, & L_1 = 2 q a_1 b_1 b_2^2 + r a_2 b_1^2 b_2.
\end{array}$$

Alsnu is

$$3B+A_1=(a_1+a_2)4(q+r),\qquad 3(C+B_1)=2(q+r)(a_1^2+4a_1a_2+a_2^2),$$

dus

$$a_1+a_2=\frac{3B+A_1}{2A},\qquad a_1a_2=\frac{3(C+B_1)}{2A}-\frac{(3B+A_1)^2}{8A^2};\;\ldots\ldots (a)$$

derhalve zijn a_1 en a_2 de wortels van de vergelijking

$$8A^2\alpha^2-4A(3B+A_1)\alpha+\{12A(C+B_1)-(3B+A_1)^2\}=0\;\ldots\ldots(12)$$

Verder is

$$\frac{L}{b_1b_2}=2qb_2+2rb_1,\; E-\frac{L}{b_1b_2}=(b_1+b_2)2(q+r)=(b_1+b_2)A,\; H-\frac{L}{b_1b_2}(b_1+b_2)=2b_1b_2(q+r)=b_1b_2A;$$

zoodat (b_1b_2) en (b_1+b_2) de wortels worden van de vergelijkingen

$$(H-b_1b_2A)\frac{b_1b_2}{L}=\frac{1}{A}\left(E-\frac{L}{b_1b_2}\right)\text{ en }\{(b_1+b_2)^2A-E(b_1+b_2)+H\}\{E-A(b_1+b_2)\}=AL,$$

of $$\left.\begin{array}{l}A^2(b_1b_2)^3-HA(b_1b_2)^2+LE(b_1b_2)-L=0\text{ en}\\ A^2(b_1+b_2)^3-2AE(b_1+b_2)^2+(AH-E^2)(b_1+b_2)-(HE-AL)=0\end{array}\right\}\;\ldots\ldots(12^a)$$

Nog moeten q en r worden bepaald.

$$q=\frac{Aa_2-A_1}{2(a_2-a_1)},\qquad r=\frac{A_1-Aa_1}{2(a_2-a_1)}.\;\ldots\ldots\ldots\ldots(12^b)$$

Hier komen voor als voorwaardensvergelijkingen, behalve de niet gebruikte,

$$D=,\;2F=,\;G=,\;K=,\;3C_1=,\;D_1=,\;E_1=,\;2F_1=,\;G_1=,\;H_1=,\;K_1=,\;L_1=,\;.\;(a_7)$$

nog twee andere, die men aldus vindt,

$$3B-3A_1=4(q-r)(a_2-a_1),\;\; 3(C-B_1)=2(q-r)(a_2^2-a_1^2),\;\; 3D-3C_1=4(q-r)(a_1-a_2)a_1a_2;$$

waaruit

$$\frac{C-B_1}{B-A_1}=\frac{1}{2}(a+a_1)=\frac{3B+A_1}{4A},\qquad \frac{C_1-D}{B-A_1}=a_1a_2=\frac{3(C+B_1)}{A}-\frac{(3B+A_1)^2}{8A^2},\;\ldots(b_7)$$

naar de vorige vergelijkingen (a).

14. Op dergelijke wijze kan men ook differentiaalvergelijkingen der tweede orde opsporen, die eene gegeven integraalvergelijking zouden hebben.

Stel deze bijv. als in § 2

$$(x+ay+b)^p\,(x+a_1y+b_1)^q=P;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

dan is achtereenvolgens

$$p(x+a_1y+b_1)(1+ay')+q(x+ay+b)(1+a_1y')=0,$$
$$(p+q)(1+a_1y')(1+ay')+p(x+a_1y+b_1)ay''+q(x+ay+b)a_1y''=0,$$

of

$$(p+q)\{1+(a+a_1)y'+aa_1y'^2\}+\{pab_1+qa_1b+(pa+qa_1)x+(p+q)aa_1y\}y''=0.$$

Deze moet nu den vorm hebben

$$A+By'+Cy'^2+(D+Ex+Fy)y''=0;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(X)}$$

en daartoe moet zijn

$$\begin{aligned} A&=p+q, & D&=pab_1+qa_1b,\\ B&=(p+q)(a+a_1), & E&=pa+qa_1,\\ C&=(p+q)aa_1, & F&=(p+q)aa_1. \end{aligned}$$

Hieruit leidt men af

$$a+a_1=\frac{B}{A},\quad aa_1=\frac{C}{A}\ \text{dus } a \text{ en } a_1 \text{ de wortels van } A\alpha^2-B\alpha+C=0;\;. \qquad (13)$$

verder

$$p=\frac{E-Aa_1}{a-a_1},\qquad q=\frac{Aa-E}{a-a_1}.\;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (13^a)$$

Nu blijft er alleen D over ter bepaling van de b en b_1: het vraagstuk is dus onbepaald. Men vindt echter korter

$$D=\frac{E-Aa_1}{a-a_1}\,ab_1+\frac{Aa-E}{a-a_1}\,ba_1=\frac{Ea-C}{a-a_1}\,b_1+\frac{C-Ea_1}{a-a_1}\,b.\;\ldots\ldots \qquad (13^b)$$

15. Deze oplossing gaat niet door, als $a=a_1$. Men heeft dan

$$\begin{aligned} A&=p+q, & D&=a(pb_1+qb),\\ B&=(p+q)\,2a, & E&=(p+q)a,\\ C&=(p+q)a^2, & F&=(p+q)a^2. \end{aligned}$$

Dus

$$a=\frac{E}{A}=\frac{B}{2A}=\frac{2C}{B},\;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (14)$$

waaruit

$$2E = B, \qquad A = \frac{B^2}{4C}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a_8)$$

als voorwaarden.

Maar D moet nu alleen p, q, a_1 en b_1 leveren, zoodat de onbepaaldheid van het vraagstuk in het oog springt. Maar nu wordt ook (X)

$$\frac{B^2}{4C} + By' + Cy'^2 + \left(D + \frac{1}{2}Bx + Cy\right)y'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XI)}$$

eene volkomen differentiaal van de eerste integraalvergelijking

$$Cyy' + \left(D + \frac{1}{2}Bx\right)y' + \frac{1}{2}By + \frac{B^2x}{4C} = P. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XII)}$$

16. Neem verder als integraalvergelijking

$$(x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)^p\,(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)^q = P \quad . \ \text{(B)}$$

van § 6; en differentieer deze tweemaal,

$$\begin{aligned}
&p(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)\{(x + ay + c) + (ax + by + d)y'\} + \\
&\quad + q\{x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)\{(x + a_1y + c_1) + (a_1x + b_1y + d_1)y'\} = 0, \\
&2(p + q)\{x + a_1y + c_1) + (a_1x + b_1y + d_1)y'\}\{(x + ay + c) + (ax + by + d)y'\} + \\
&\quad + p(x^2 + 2a_1xy + b_1y^2 + 2c_1x + 2d_1y + e_1)\{1 + ay' + (a + by')y' + (ax + by + d)y''\} + \\
&\quad + q(x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e)\{1 + a_1y' + (a_1 + b_1y')y' + (a_1x + b_1y + d_1)y''\},
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
&[3(p + q)x^2 + \{(pa_1 + qa) + (p + q)(a + a_1)\}2xy + \{(pb_1 + qb) + (p + q)2aa_1\}y^2 + \\
&\quad + \{(pc_1 + qc) + (p + q)(c + c_1)\}2x + \{(pd_1 + qd) + (p + q)(ac_1 + a_1c)\}2y + \\
&\quad + \{(pe_1 + qe) + (p + q)2cc_1\}] + y'[\{(pa + qa_1) + (p + q)(a + a_1)\}2x^2 + \\
&\quad + \{(p + q)2aa_1 + (p + q)(2aa_1 + b + b_1)\}2xy + \{(pab_1 + qa_1b) + (p + q)(ab_1 + a_1b)\}2y^2 + \\
&\quad + \{2(pac_1 + qa_1c) + (p + q)(ac_1 + a_1c + d + d_1)\}2x + \\
&\quad + \{2(pad_1 + qa_1d) + (p + q)(ad_1 + a_1d + bc_1 + b_1c)\}2y + \{(pae_1 + qa_1e) + 2(p + q)(cd_1 + c_1d)\}] + \\
&\quad + y'^2[\{(pb + qb_1) + (p + q)2aa_1\}x^2 + \{(pa_1b + qab_1) + (p + q)(ab_1 + a_1b)\}2xy + 3(p + q)bb_1y^2 + \\
&\quad + \{(pbc_1 + qb_1c) + (p + q)(ad_1 + a_1d)\}2x + \{(pbd_1 + qb_1d) + (p + q)(bd_1 + b_1d)\}2y + \\
&\quad + \{(pbe_1 + qb_1e) + (p + q)2dd_1\}] + y''[(pa + qa_1)x^3 + \{(pb + qb_1) + (p + q)2aa_1\}x^2y + \\
&\quad + \{p(ab_1 + 2a_1b) + q(a_1b + 2ab_1)\}xy^2 + (p + q)bb_1y^3 + \\
&\quad + \{p(2ac_1 + d) + q(2a_1c + d_1)\}x^2 + \{p(ad_1 + bc_1 + a_1d) + q(a_1d + b_1c + ad_1)\}2xy + \\
&\quad + \{p(2bd_1 + b_1d) + q(2b_1d + bd_1)\}y^2 + \{p(ae_1 + 2c_1d) + q(a_1e + 2cd_1)\}x + \\
&\quad + \{p(be_1 + 2dd_1) + q(b_1e + 2dd_1)\}y + (pde_1 + qd_1e)] = 0.
\end{aligned}$$

Onze differentiaalvergelijking moet dus den vorm hebben

$$\left.\begin{array}{l}(3E_3x^2+2F_3xy+G_3y^2+2H_3x+2K_3y+L_3)+2y'(E_2x^2+F_2xy+Gy^2+H_2x+K_2y+L_2)+\\ \quad+y'^2(E_1x^2+2F_1xy+3G_1y^2+2H_1x+2K_1y+L_1)+\\ \quad+y''(Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+2Fxy+Gy^2+Hx+Ky+L)=0\,;\end{array}\right\}.\text{(XIII)}$$

zoodat men heeft

$$\begin{array}{l|ll}
A=pa+qa_1, & E_1=pb+qb_1+(p+q)2aa_1, & =B,\\
B=pb+qb_1+(p+q)2aa_1, & F_1=pa_1b+qab_1+(p+q)(ab_1+a_1b) & =C,\\
C=pa_1b+qab_1+(p+q)(ab_1+a_1b), & G_1=(p+q)bb_1 & =D,\\
D=(p+q)bb_1, & H_1=(pbc_1+qb_1c)+(p+q)(ad_1+a_1d) & =F,\\
E=2(pac_1+qa_1c)+pd+qd_1, & K_1=(pbd_1+qb_1d)+(p+q)(bd_1+b_1d) & =G,\\
F=pbc_1+qb_1c+(p+q)(ad_1+a_1d), & L_1=pbe_1+qb_1e+2(p+q)dd_1 & =K,\\
G=pbd_1+qb_1d+(p+q)(bd_1+b_1d), & & \\
H=pae_1+qa_1e+2(pc_1d+qcd_1), & & \\
K=pbe_1+qb_1e+(p+q)2dd_1, & & \\
L=pde_1+qd_1e, & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l}
E_2=(pa+qa_1)+(p+q)(a+a_1) & =\frac{1}{2}(3A+F_3), & E_3=p+q,\\
F_2=(p+q)(b+b_1+4aa_1) & =B+G_3, & F_3=pa_1+qa+(p+q)(a+a_1),\\
G_2=(pab_1+qa_1b)+(p+q)(ab_1+a_1b), & & G_3=pb_1+qb+(p+q)2aa_1,\\
H_2=2(pac_1+qa_1c)+(p+q)(ac_1+a_1c+d+d_1) & =E+K_3, & H_3=(pc_1+qc)+(p+q)(c+c_1),\\
K_2=2(pad_1+qa_1d)+(p+q)(ad_1+a_1d+bc_1+b_1c), & & K_3=(pd_1+qd)+(p+q)(ac_1+a_1c),\\
L_2=(pae_1+qa_1e)+(p+q)(cd_1+c_1d), & & L_3=(pe_1+qe)+(p+q)2cc_1.
\end{array}$$

Vooreerst heeft men in dit geval de voorwaardensvergelijkingen

$$E_1=B,\ F_1=C,\ G_1=D,\ H_1=F,\ K_1=G,\ L_1=K,\ E_2=\frac{1}{2}(3A+F_3),\ F_2=B+G_3,\ H_2=E+K_3 \,.\,.\,(a_9)$$

Uit het voorgaande leidt men verder af

$$3A-F_3=2(p-q)(a-a_1),\quad B-G_3=(p-q)(b-b_1),\quad G_2-C=(p-q)(ab_1-a_1b).$$

Maar

$$b(a-a_1)-a(b-b_1)=ab_1-a_1b,\quad b_1(a-a_1)-a_1(b-b_1)=ab_1-a_1b,\ .\ .\ (\alpha)$$

dus

$$(3A-F_3)b-2(B-G_3)a=2(G_2-C),\quad (3A-F_3)b_1-2(B-G_3)a_1=2(G-C);$$

waarvan de som geeft

$$(3A - F_3)(b + b_1) - 4(G_2 - C) = 2(B - G_3)(a + a_1) = (B - G_3)\frac{A + F_3}{E_3};$$

dus

$$b + b_1 = \frac{4E_3(G_2 - C) + (B - G_3)(A + F_3)}{E_3(3A - F_3)}, \text{ terwijl } bb_1 = \frac{D}{E_3} \text{ is;}$$

zoodat b en b_1 de wortels zijn der vergelijking

$$(3A - F_3)E_3^2\beta^2 - \{4E_3(G_2 - C) + (B - G_3)(A + F_3)\}E_3\beta + D = 0 \quad . \; . \; (15)$$

Wij gebruikten reeds

$$\frac{A + F_3}{2E_3} = (a + a_1);$$

bovendien is

$$\frac{B + G_3}{E_3} = b + b_1 + 4aa_1,$$

waaruit volgt, naar de bovengevonden waarde van $b + b_1$,

$$aa_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{B + G_3}{E_3} - (b + b_1)\right) = \frac{2AG_3 + B(A - F_3) - 2E_3(G_2 - C)}{2E_3(3A - F_3)};$$

zoodat a en a_1 de wortels zijn van

$$2E_3(3A - F_3)\alpha^2 - (A + F_3)(3A - F_3)\alpha + \{2AG_3 + B(A - F_3) - 2E_3(G_2 - C)\} = 0 \; . \; . \; (15^a)$$

Uit de waarden voor A en E_3 leidt men dan af

$$p = \frac{A - E_3 a_1}{a - a_1}, \qquad q = \frac{E_3 a - A}{a - a_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15^b)$$

Tusschen de coëfficiënten A, B, C, D, G_2, E_3, F_3 en G_3, die ons gediend hebben voor de betrekkingen (15), (15^a), (15^b), moeten nu nog twee voorwaardensvergelijkingen bestaan. Vooreerst vindt men, door substitutie van $(a + a_1)$, aa_1 en bb_1,

$$\left\{\frac{3A - F_3}{2(B - G_3)}\right\}^2 = \frac{(a + a_1)^2 - 4aa_1}{(b + b_1)^2 - 4bb_1} = (3A - F_3)\frac{\frac{1}{4}(A + F_3)^2(3A - F_3) - B(A - F_3) + 2E_3(G_2 - C) + 2AG_3}{\{4E_3(G_2 - C) + (B - G_3)(A + F_3)\}^2 - 4DE_3(3A - F_3)^2} \; . \; (b_9)$$

Nog geven de identische vergelijkingen (α), na vermenigvuldiging met $(p - q)$,

$$a(B - G_3) + (G_2 - C) = b(3A - F_3) \text{ en } a_1(B - G_3) + (G_2 - C) = b_1(3A - F_3);$$

vermenigvuldigt men ze, en voert men de waarden van $a a_1$, $a + a_1$ en $b b_1$ in, zoo komt er, na vermenigvuldiging met $2 E_3 (3 A - F_3)$,

$$\{B(A - F_3) - 2 E_3 (G_2 - C) + 2 A G_3\} (B - G_3)^2 + (3 A - F_3)(A + F_3)(B - G_3)(G_2 - C) + \\ + (3 A - F_3)(G_2 - C)^2 = 2 D (3 A - F_3)^3 \quad \ldots \ldots \quad (b_{10})$$

Om nu de volgende coëfficiënten te bepalen, vindt men

$$p d + q d_1 = E - 2(p a c_1 + q a_1 c), \qquad q d + p d_1 = K_3 - (p + q)(a c_1 + a_1 c);$$

waaruit

$$\left.\begin{aligned}(p^2 - q^2) d &= p E - K_3 q + a c_1 (q^2 + p q - 2 p^2) + a_1 c (q^2 - p q),\\ (p^2 - q^2) d_1 &= p K_3 - E q + a c_1 (p q - p^2) + a_1 c (2 q^2 - p q - p^2).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (b_{11})$$

Men heeft hiermede

$$(p - q)\left[F - (p b c_1 + q b_1 c)\right] = (p^2 - q^2)(a d_1 + a_1 d) = (K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1 + \\ a c_1 (p - q) \{- p a + (2 p + q) a_1\} + a_1 c (p - q) \{(p + 2 q) a - q a_1\},$$

en

$$F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q} = c_1 \{p b - p a^2 - (2 p + q) a a_1\} + c \{q b_1 - q a_1^2 - (p + 2 q) a a_1\}.$$

Maar ook is

$$H_3 = c_1 (2 p + q) \qquad\qquad + c (p + 2 q),$$

derhalve

$$F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q} + H_3 a a_1 = c_1 p (b - a^2) + c q (b_1 - a_1^2).$$

Uit beide laatste vergelijkingen kan men c en c_1 oplossen.

$$\left.\begin{aligned}&[(2p+q) q (b_1 - a_1^2) - (p + 2q) p (b - a^2)] c = (2p+q)\left[F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q}\right] - (b - a^2) p H_3,\\ &[(2p+q) q (b_1 - a_1^2) - (p + 2q) p (b - a^2)] c_1 = (b_1 - a_1^2) q H_3 - (p + 2q)\left[F - \frac{(K_3 p - E q) a + (E p - K_3 q) a_1}{p - q}\right].\end{aligned}\right\} (15^c)$$

En nu eenmaal c en c_1 gevonden zijn, heeft men uit (b), omdat $p + q = E_3$ is,

$$\left.d = \frac{1}{E_3}\left[\frac{E p - K_3 q}{p - q} - a c_1 (2 p + q) - a_1 c q\right], \quad d_1 = \frac{1}{E_3}\left[\frac{K_3 p - E q}{p - q} - a c_1 p - a_1 c (p + 2 q)\right]\right\} \ldots (15^d)$$

Behalve de coëfficiënten E, F, H_3, K_3, die ons gediend hebben, blijven er nog G en K_2 over als voorwaardensvergelijkingen,

$$G = (2p+q) b d_1 + (p+2q) b_1 d, \quad K_2 = (3p+q) a d_1 + (p+3q) a_1 d + E_3 (b c_1 + b_1 c) \ldots \quad (d_9)$$

Ten slotte geven de coëfficiënten $L_3 - 2 E_3 c c_1 = p e_1 + q e$ en $L = d p e_1 + d_1 q e$

$$e = \frac{1}{q} \frac{(L_3 - 2 E_3 c c_1) d - L}{d - d_1}, \quad e_1 = \frac{1}{p} \frac{L - (L_3 - 2 E_3 c c_1) d_1}{d - d_1} \ldots \quad (15^g)$$

Eindelijk houdt men nog als voorwaardensvergelijkingen over

$$H =, \quad K =, \quad L_2 =, \ldots \ldots \quad (e_9)$$

die nog nergens gebruikt werden.

17. Deze oplossing geldt nu wederom niet in het geval, dat $F_3 = 3A$ is.

Maar dan is $3A - F_3 = 2(a - a_1)(p - q)$. Dus is of $a = a_1$, of $p = q$; omdat de eene gelijkheid de andere niet ten gevolge heeft.

Stel dus vooreerst $a_1 = a$; dan wordt

$$\begin{aligned}
A &= (p+q) a, & G_2 &= a(p b_1 + q b) + (p+q) a (b + b_1), \\
B &= p b + q b_1 + (p+q) 2 a^2, & K_2 &= 2a(p d_1 + q d) + (p+q)\{a(d_1 + d) + b c_1 + b_1 c\}, \\
C &= a(p b + q b_1) + (p+q) a (b + b_1), & L_2 &= a(p e_1 + q e) + (p+q)(c d_1 + c_1 d), \\
D &= (p+q) b b_1, & E_3 &= p + q, \\
E &= 2a(p c_1 + q c) + p d + q d_1, & G_3 &= p b_1 + q b + (p+q) 2 a^2, \\
F &= p b c_1 + q b_1 c + (p+q) a (d + d_1), & H_3 &= p c_1 + q c + (p+q)(c + c_1), \\
G &= p b d_1 + q b_1 d + (p+q)(b d_1 + b_1 d), & K_3 &= p d_1 + q d + (p+q)(c + c_1) a, \\
H &= a(p e_1 + q e) + 2(p c_1 d + q c d_1), & L_3 &= p e_1 + q e + (p+q) 2 c c_1. \\
K &= p b c_1 + q b_1 c + (p+q) 2 d d_1, \\
L &= p d e_1 + q d_1 e,
\end{aligned}$$

Vooreerst is

$$a = \frac{A}{E_3} \ldots \ldots \quad (16)$$

Daarna heeft men

$$\frac{C + G_2}{3a} = (p+q)(b + b_1), \text{ dus } b + b_1 = \frac{C + G_2}{3A}; \text{ en } b b_1 = \frac{D}{E};$$

derhalve zijn b en b_1 de wortels der vergelijking

$$3E\beta^2 - (C+G_2)E\beta + 3AD = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16^a)$$

Omdat

$$\frac{C-G_2}{a} = (p-q)(b-b_1) \text{ is, wordt } p-q = \frac{C-G_2}{a(b-b_1)}; \text{ maar } p+q = \frac{A}{a} = E_3;$$

dus

$$p = \frac{E_3}{2A}\left(A + \frac{C-G_2}{b-b_1}\right), \qquad q = \frac{E_3}{2A}\left(A - \frac{C-G_2}{b-b_1}\right); \quad \ldots\ldots \quad (16^b)$$

waarbij de twee voorwaardensvergelijkingen

$$B + G_3 = (p+q)(4a^2 + b + b_1) = E_3\left(\frac{4A^2}{E_3^2} + \frac{C+G_2}{3A}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a_{10})$$

$$B - G_3 = (p-q)(b-b_1) = \frac{C-G_2}{a}, \text{ dus } A(B-G_3) = E_3(C-G_2). \quad . \quad (b_{10})$$

Verder is

$$2K_3 - 2H_3a + E = 2(pd_1 + qd) + pd + qd_1 = (2p+q)d_1 + (p+2q)d,$$

en

$$G = (2p+q)bd_1 + (p+2q)b_1d;$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned} G - (2K_3 - 2H_3a + E)b &= (p+2q)(b_1-b)d = \left(\frac{A}{a}+q\right)(b_1-b)d = \\ &= \frac{1}{2a}\left(3A - \frac{C-G_2}{b-b_1}\right)(b_1-b)d = \frac{A}{2E_3}\{C - G_2 - 3A(b-b_1)\}d, \\ G - (2K_3 - 2H_3a + E)b_1 &= (2p+q)(b-b_1)d_1 = \left(\frac{A}{a}+p\right)(b-b_1)d_1 = \\ &= \frac{1}{2a}\left(3A + \frac{C-G_2}{b-b_1}\right)(b-b_1)d_1 = \frac{A}{2E_3}\{C - G_2 + 3A(b-b_1)\}d_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16^c)$$

om de d en d_1 te bepalen. En nu kan men aldus voortgaan.

$$c + c_1 = \frac{1}{(p+q)a}\{K_3 - (pd_1 + qd)\}, \qquad pc_1 + qc = \frac{1}{2a}\{E - (pd + qd_1)\};$$

dus

$$\left.\begin{aligned}(p-q)\,c &= \frac{p}{E_3\,a}\{K_3-(p\,d_1+q\,d)\}-\frac{1}{2\,a}\{E-(p\,d+q\,d_1)\} = \\ &= \frac{1}{2\,A}\{2\,K_3\,p-E\,E_3+(p-q)\,[p\,d-(2\,p+q)\,d_1]\}, \\ (p-q)\,c_1 &= \frac{1}{2\,a}\{E-(p\,d+q\,d_1)\}-\frac{q}{E_3\,a}\{K_3-(p\,d_1+q\,d)\} = \\ &= \frac{1}{2\,A}\{E\,E_3-2\,K_3\,q+(p-q)\,[q\,d_1-(p+2\,q)\,d]\},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16^d)$$

waaruit c en c_1 volgt. Men behoudt hierbij de twee voorwaardensvergelijkingen

$$F=, \qquad K_2= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c_{10})$$

Eindelijk is

$$p\,e_1+q\,e=\frac{1}{a}\{L_1-(p+q)\,(c\,d_1+c_1\,d)\}, \qquad p\,d\,e_1+q\,d_1\,e=L,$$

dus

$$\left.\begin{aligned}q\,e\,(d-d_1) &= \frac{d}{a}\{L_1-E_3\,(c\,d_1+c_1\,d)\}-L, \\ p\,e_1\,(d-d_1) &= L-\frac{d_1}{a}\{L_1-E_3\,(c\,d_1+c_1\,d)\};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16^e)$$

waarbij nog als voorwaarden overblijven de vergelijkingen

$$H=, \qquad K=, \qquad L_1= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d_{10})$$

18. Zij ten tweede $q=p$; dan heeft men

$A=p\,(a+a_1)$,
$B=p\,(b+b_1)+4\,p\,a\,a_1$,
$C=3\,p\,(a\,b_1+a_1\,b)$,
$D=2\,p\,b\,b_1$,
$E=2\,p\,(a\,c_1+a_1\,c)+p\,(d+d_1)$,
$F=p\,(b\,c_1+b_1\,c)+2\,p\,(a\,d_1+a_1\,d)$,
$G=3\,p\,(b\,d_1+b_1\,d)$,
$H=p\,(a\,e_1+a_1\,e)+2\,p\,(c_1\,d+c\,d_1)$,
$K=p\,(b\,c_1+b_1\,c)+4\,p\,d\,d_1$,
$L=p\,(d\,e_1+d_1\,e)$,

$G_2=2\,p\,(a\,b_1+a_1\,b)$,
$K_2=3\,p\,(a\,d_1+a_1\,d)+2\,p\,(b\,c_1+b_1\,c)$,
$L_2=p\,(a\,e_1+a_1\,e)+2\,p\,(c\,d_1+c_1\,d)$,
$E_3=2\,p$,
$G_3=p\,(b+b_1)+4\,p\,a\,a_1$,
$H_3=3\,p\,(c+c_1)$,
$K_3=p\,(d+d_1)+2\,p\,(a\,c_1+a_1\,c)$,
$L_3=p\,(e+e_1)+4\,p\,c\,c_1$.

Vooreerst hebben wij de voorwaardensvergelijkingen

$$G_2 = C,\ \ L_2 = H,\ \ G_3 = B,\ \ K_3 = E; \ldots\ldots\ldots\ldots (a_{11})$$

en dan dadelijk

$$p = \frac{1}{2} E_3. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Vervolgens is

$$C - 3Ba_1 = 3pb_1(a - a_1) - 12paa_1^2,\ \ C - 3Ba_1 + 6E_3aa_1^2 = 3pb_1(a - a_1). \, . \, (17^a)$$

Derhalve

$$2(C - 3Ba_1 + 6E_3aa_1^2) = 3E_3b_1(a - a_1), \text{ dus ook } 2(C - 3Ba_1 + 6E_3aa_1^2)b = 3D(a - a_1).$$

Door hare substitutie in C geeft deze

$$4C(a - a_1)(C - 3Ba_1 + 6E_3aa_1^2) = 4a(C - 3Ba_1 + 6E_3aa_1^2)^2 + 9E_3Da_1(a - a_1)^2,$$

of, daar

$$2A = E_3(a + a_1),\ \ a = \frac{2A}{E_3} - a_1, \text{ dus } a - a_1 = 2\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right),$$

door eliminatie van a

$$2C\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right)(C - 3Ba_1 + 12Aa_1^2 - 6E_3a_1^3) =$$

$$= \left(\frac{2A}{E_3} - a_1\right)(C - 3Ba_1 + 12Aa_1^2 - 6E_3a_1^3)^2 + 9DE_3a_1\left(\frac{A}{E_3} - a_1\right)^2, \ldots . (17^b)$$

eene zevende machtsvergelijking om a_1 te vinden, die echter in eene zesde machtsvergelijking overgaat, wegens het verdwijnen der termen $\frac{2AC^2}{E_3}$.

Daaruit volgt dan

$$a = \frac{2A}{E_3} - a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17^c)$$

terwijl de b en b_1 nu door middel van (17^a) kunnen worden bepaald.

Vervolgens is

$$2F - K_2 = p(ad_1 + a_1d), \text{ dus } ad_1 + a_1d = 2\frac{2F - K_2}{E_3} \text{ en } bd_1 + b_1d = \frac{2G}{3E_3};$$

dus

$$(a_1 b - a b_1) d = \frac{2}{3E_3}\{3(2F - K_2) b - G a\},\ (a_1 b - a b_1) d_1 = \frac{2}{3E_3}\{G a_1 - 3 b_1 (2F - K_2)\}.\ .\ (17^d)$$

Maar ook is

$$2K_2 - 3F = p(bc_1 + b_1 c) \text{ dus } bc_1 + b_1 c = 2\frac{2K_2 - 3F}{E_3} \text{ en } c + c_1 = \frac{2H_3}{3E_3};$$

dus

$$(b - b_1) c = \frac{2}{3E_3}\{bH_3 - 3(2K_2 - 3F)\},\ (b - b_1) c_1 = \frac{2}{3E_3}\{3(2K_2 - 3F) - b_1 H_3\},.\ (17^e)$$

met de voorwaardensvergelijkingen

$$E =,\qquad K = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b_{11})$$

Verder

$$2\frac{L_3 - 2E_3 cc_1}{E_3} = e + e_1 \text{ en } \frac{2L}{E_3} = de_1 + d_1 e,$$

dus

$$(d - d_1) e = \frac{2}{E_3}\{(L_3 - 2E_3 cc_1) d - L\},\ (d - d_1) e_1 = \frac{2}{E_3}\{L - (L_3 - 2E_3 cc_1) d_1\}.\ (17^f)$$

met de voorwaardensvergelijking $H =$.

19. Het aangevoerde moge volstaan. Er bleek daaruit wederom, dat eene kleine verandering in de integraal-vergelijking eene grootere in de differentiaalvergelijking ten gevolge kan hebben, evenzeer als dit verschijnsel ook omgekeerd plaats heeft.

GEDRUKT BIJ DE BOEVER-KRÖBER-BAKELS