Over reeksen van den vorm ?Ak/z-?k

OVER REEKSEN VAN DEN VORM $\sum \frac{A_k}{z-\alpha_k}$

OVER REEKSEN VAN DEN VORM $\sum \frac{A_k}{z-\alpha_k}$

Diss. Utrecht 1936

OVER REEKSEN VAN DEN VORM $\Sigma \frac{A_k}{z-\alpha_k}$

PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. C. W. VOLLGRAFF, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 4 MEI 1936 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

MELS VAN VLAARDINGEN
GEBOREN TE UTRECHT

De samensteller van dit proefschrift werd geboren te Utrecht, bezocht aldaar het Sted. Gymnasium en de Rijksuniversiteit en is sedert 1927 verbonden als Leeraar in de wiskunde aan het Rott. Lyceum te Rotterdam.

INLEIDING

Reeksen van den vorm $\sum_{1}^{\infty} m \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ kunnen o.a. gebruikt worden, wanneer men functies wil construeeren, die niet in den zin van Weierstrasz over een contour voortzetbaar zijn.

De eerste, die een eenvoudig voorbeeld gaf was T. J. Stieltjes [II].

Tegelijkertijd ongeveer volgden eenige meer algemeene beschouwingen van E. Goursat [III] en H. Poincaré [I].

Zij namen reeksen $\sum \frac{A_m}{z - \alpha_m}$, waarbij als eenige eisch werd gesteld: $\Sigma \, |A_m|$ convergent. Van de punten α_m (door Poincaré „pôles apparents'' genaamd) veronderstelden zij, dat deze overal dicht lagen op een gesloten contour, die zóó was, dat tot het binnengebied minstens een hoek met α_m als hoekpunt behoorde. In dit geval gelukte het de niet voortzetbaarheid te bewijzen.

Verder kwam men voorloopig niet. Zelfs een eenvoudige uitbreiding op een contour, die in een punt α_m een keerpunt heeft met naar binnen gerichte raaklijn ontsnapte aan de methode Goursat.

Als eerst volgende belangrijke publicatie valt te noemen een stuk van A. Pringsheim [IV].

Het was hem er meer om te doen eenige feiten uit de theorie van de reeks van Taylor voor reëele functies te verduidelijken. Verder komen hierin voor het eerst voor beschouwingen over het geval, dat de punten α_m niet zelf op de grens van het gebied liggen, maar zich naar de grens toe verdichten.

Ook door E. Borel [V] werden eenige beschouwingen hieraan gewijd. Door hem werden eenige belangrijke resultaten afgeleid, al moest hij ook door invoering van een nieuwe veronderstelling aangaande de reeks der „residuën'' nl. „$\Sigma \sqrt[3]{|A_n|}$ convergent", iets van de algemeenheid opofferen. Hij bewijst dan b.v. dat er punten zijn zoodanig, dat onze reeks op bijna elke rechte door dat punt absoluut en uniform convergeert en ook dat er cirkelbogen zijn met de genoemde eigenschap.

Men ziet, dat hier reeds het maatbegrip een rol gaat spelen. Inderdaad blijkt de verdere ontwikkeling der theorie geheel beheerscht te worden door de maattheorie en de daarop gebaseerde integraal van Lebesgue.

Het duurt dan tot 1921 voordat er voortgang komt. Door J. Wolff [VI 1 en 2] werden in dat jaar twee stukjes gepubliceerd, die een geheel andere wending aan de zaak gaven.

Zij nl. E de verzameling der α_m en hun verdichtingspunten. Het complement van E (wanneer dit complement tenminste bestaat) vormt één of meer continua. Zij F één daarvan. De som der reeks convergeert uniform op elk gesloten gebied binnen F. Zij Γ de grens van F. Ieder punt van Γ is dan, of een punt α_m of verdichtingspunt daarvan.

Zij f(z) de som der reeks binnen F. f(z) is holomorph binnen F.

Men kan zich nu de vraag stellen: kan f(z) binnen F samenvallen met een functie $\varphi(z)$ die holomorph is binnen een gebied, dat F en Γ bevat?

Men zou meenen van niet. J. Wolff bewees van wel; in het algemeen zijn dus de schijnbare polen verschillend van de singulariteiten der analytische functie, die binnen F met f(z) samenvalt.

De volgende twee belangrijke publicaties zijn van A. Denjoy [VII en VIII]. In de 1e daarvan behandelt hij de theorie van Wolff wat meer numeriek en levert verder eenige algemeene stellingen, waarvan de volgende van groot belang is.

„Zij $\Sigma \mid A_m \mid$ convergent. De verzameling der punten, waar $\sum \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ niet absoluut convergeert, is tweedimensionaal van de maat nul. Verder is de functie F(z), die gelijk is aan de som der reeks $\sum \frac{|A_m|}{|z - \alpha_m|}$ in de punten, waar die reeks convergeert en 0 elders, sommeerbaar op elk eindig gebied."

Zijn tweede stuk bevat eenige zeer algemeene stellingen en lost de vraagstukken in vollen omvang op.

Hij neemt het geval van een punt a, dat zelf schijnbare pool is en gelegen is op den rand van een gebied behoorende tot de complementaire verzameling der α_m's en hun verdichtingspunten.

Hij bewijst nu de volgende twee algemeene stellingen:

I) Wanneer γ een cirkel is met middelpunt a, (βa) een eenvoudige Jordanboog gelegen binnen γ en in een gebied, dat geen der α_m's bevat, dan is het onmogelijk dat:

$$\frac{1}{z-a}+\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{A_m}{z-\alpha_m}=f(z)$$

z op (βa) en f(z) holomorph binnen γ.

Het 2e theorema luidt:

„Het is onmogelijk, dat de volgende 3 dingen gelijktijdig vervuld zijn:

1e) γ is een cirkel met middelpunt a, $(\beta_n a_n)$ een Jordanboog van eindige lengte binnen γ gelegen, β_n ligt op γ en $a_n \rightarrow a$ als $n \rightarrow \infty$. Geen der α_m's ligt op de segmenten $(\beta_n a_n)$.

2e) $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{|A_m|}{|z-\alpha_m|}$ convergeert uniform op $(\beta_n a_n)$ en

$$\frac{1}{z-a}+\sum_{1}^{\infty}\frac{A_m}{z-\alpha_m}=h_n(z)=\frac{\omega_n}{z-a}+k_n(z)$$

geldt in elk punt van $(\beta_n a_n)$.

3e) ω_n, onafhankelijk van z, nadert niet tot 1 als $n \rightarrow \infty$; $k_n(z)$ is holomorph binnen γ en daar begrensd onafhankelijk van z en n.

We merken reeds hier op, dat het bewijs van Denjoy (wanneer men tenminste de aanvankelijk door hem gebruikte bijconditie: „$\Sigma\,|A_m|\,\log\,|A_m|$ convergent" laat vallen) moeilijk is, daar er zeer ingewikkelde en omslachtige beschouwingen uit de analysis situs voor noodig zijn.

Dit was dan ook voor J. Wolff [IX, 1, 2] aanleiding een vereenvoudigd bewijs te construeeren, dat door hem werd medegedeeld in twee publicaties.

Door Denjoy werden verder eenige zeer vernuftige, zij het omslachtige voorbeelden van reeksen der besproken soort gegeven, om eenige bijna paradoxale mogelijkheden aan te geven.

Vermelden we thans nog eenige latere publicaties.

Men kan zich de volgende vraag stellen:

Wanneer $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ uniform convergeert tot 1 op een rectificeerbare kromme, wat weet men dan van $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} |A_m|$?

Het antwoord [X] luidt:

Dan is: $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} |A_m| \geq C.\, d$, als d den diameter van den boog voorstelt en C een universeele constante is.

Het theorema van Wollf werd daarna door Denjoy [XI] op andere wijze bewezen.

Vermelden wij verder, dat men onze reeksen ook kan bestudeeren in verband met een andere vraag nl.:

Als de som van een reeks 0 is op een kromme γ onder welke voorwaarden aan de A_m's op te leggen, is dan de som bijna overal nul?

Hierop is een antwoord gegeven door T. Carleman [XII]. Hij vond als voorwaarde:

$$|A_m| < e^{-m^{1+\varepsilon}} \qquad \varepsilon > 0.$$

Maar men kan bewijzen:

Als $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ bijna overal uniform begrensd is, dan is

$$A_m = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Dus is in 't geval Carleman elk der residuën 0.

Hiermee eindigen we deze inleiding om in de volgende hoofdstukken de verschillende phasen te bespreken.

HOOFDSTUK I

§ 1. Het eerste eenvoudige voorbeeld van een reeks van den vorm $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ is afkomstig van T. J. Stieltjes [II].

Zij op den eenheidscirkel C gegeven de volgende puntverzameling: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Kies a_3 en a_4 zoo, dat deze punten met a_1 en a_2 de hoekpunten van een regelmatigen 4-hoek vormen. Dan a_5, a_6, a_7, a_8 zoo, dat er met de vorige mee een regelmatige 8-hoek ontstaat. Algemeen als $k = 2^{n-1}$ moet men a_{k+1}, a_{k+2} .... a_{2k} zoo nemen, dat er met de reeds gekozen punten mee een regelmatige 2^n-hoek ontstaat.

Er onstaat zoo een puntverzameling $a_1, a_2, \ldots,$ die overal dicht op den cirkel ligt.

Vorm thans de reeks:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{z}{a_n - z} = f(z).$$

Wanneer $|z| < \rho < 1$ dan is $\left| \dfrac{z}{a_n - z} \right| < \dfrac{\rho}{1 - \rho}$.

De reeks der absolute waarden wordt dus gemajoreerd door $\dfrac{\rho}{1-\rho} \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \dfrac{1}{n^3}$. Binnen en op $\odot\, \rho$ $(\rho < 1)$ is de reeks dus absoluut en uniform convergent en daar de termen der reeks holomorphe functies zijn binnen C, is de som der reeks ook een functie holomorph binnen C.

Gemakkelijk ziet men in, dat men alle termen voor $|z| < 1$ in machtreeksen kan ontwikkelen en dat men schrijven mag:

$$f(z) = \left(\frac{z}{a_1} + \frac{z^2}{a_1^2} + \frac{z^3}{a_1^3} + \ldots\right) + \frac{1}{2^3}\left(\frac{z}{a_2} + \frac{z^2}{a_2^2} + \ldots\right).$$

Wegens de absolute convergentie der dubbelreeks, mag men rangschikken volgens machten van z.

Dus is $f(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\, c_n z^n$. De convergentiestraal dezer machtreeks is 1.

Is deze functie nu voortzetbaar over C?

Om dit na te gaan laten we z radiaal naderen tot a_k.

Stel dus $z = a_k \,.\, t$, $0 < t < 1$.

Dan is blijkbaar:

$$f\,(a_k \,.\, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\, \frac{1}{n^3} \cdot \frac{a_k \,.\, t}{a_n - a_k \,.\, t}.$$

We schrijven dit als volgt:

$$f(a_k \,.\, t) - \frac{1}{k^3} \cdot \frac{t}{1 - t} = f_1(t) + f_2(t)$$

waarin:

$$f_1(t) = \sum_{1}^{k-1}{}_{n}\, \frac{1}{n^3} \cdot \frac{a_k \,.\, t}{a_n - a_k \,.\, t}$$

en

$$f_2(t) = \sum_{k+1}^{\infty}{}_{n}\, \frac{1}{n^3} \cdot \frac{a_k \,.\, t}{a_n - a_k \,.\, t}.$$

In het interval $0 \leq t \leq 1$ is blijkbaar $f_1(t)$ continu, daar de punten $a_1, \ldots . a_{k-1}$ allen op een afstand van $a_k \,.\, t$ verwijderd zijn, die een positieve constante overtreft.

Maar nu $f_2(t)$. Uit onderstaande fig. volgt:

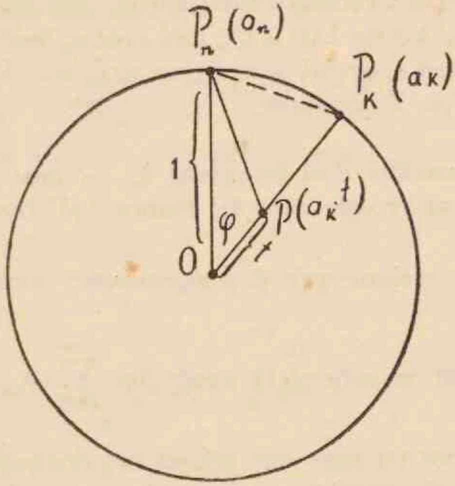
$\overline{PP}_n^2 = 1 + t^2 - 2t \cos \varphi = (1 + t)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi + (1 - t)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \varphi$
$\geq 4t^2 \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi = \overline{P_k P}_n^2.$

dus:

$$\frac{t}{\sqrt{1 + t^2 - 2t \cos \varphi}} \leq \frac{1}{2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi}$$

m.a.w.

$$\left| \frac{a_k \,.\, t}{a_n - a_k \,.\, t} \right| \leq \frac{1}{|\, a_n - a_k \,|}$$



In de reeks $f_2(t)$ is de index n grooter dan k.

Maar dan is duidelijk, dat:

$$|a_n - a_k| > 2 . \sin \frac{\pi}{2n} \quad \text{of daar, } 2 \sin x > x \text{ als } x < \frac{\pi}{2}$$

is tenslotte: $|a_n - a_k| > \frac{\pi}{2n}$ voor $n > k$.

Dus geldt voor $n > k$, $0 \leq t \leq 1$:

$$\frac{1}{n^3} \left| \frac{a_k . t}{a_n - a_k . t} \right| < \frac{2}{\pi . n^2}$$

m.a.w.

$$\sum_{k+1}^{\infty} {}_n \frac{1}{n^3} \cdot \frac{a_k . t}{a_n - a_k . t}$$

is absoluut en uniform convergent voor $0 \leq t \leq 1$.

Als dus $t \to 1$ dan naderen $f_1(t)$ en $f_2(t)$ tot eindige waarden A en B.

Dus:

$$\lim_{t \to 1} \left[f(a_k . t) - \frac{1}{k^3} \cdot \frac{t}{1 - t} \right] = A + B = \text{eindig.}$$

Wanneer dus z radiaal nadert tot a_k, dan nadert het reëele deel van f(z) tot ∞. Dus is f(z) niet over a_k heen voortzetbaar. Daar de punten a_k overal dicht liggen op C, is C dus een coupure in den zin van Weierstrasz.

§ 2. In hetzelfde deel bespreekt E. Goursat [III] een uitbreiding die al vroeger door H. Poincaré [I] beschouwd werd.

Zij namen reeksen van den algemeenen vorm $\sum_{1}^{\infty}{}^{m} \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$,

waarbij alleen verondersteld werd, dat $\sum_{1}^{\infty}{}^{m} |A_m|$ convergeert.

Wanneer we nu eens een gebied beschouwen, waarin geen punten α_m of verdichtingspunten daarvan gelegen zijn, dan zien we gemakkelijk in, dat de reeks in dat gebied convergeert en dat de som een in dat gebied holomorphe functie is. Wanneer we nl. een $\odot$ teekenen in dat gebied waarvan de omtrek een positieven afstand δ heeft tot den rand van het gebied dan wordt binnen en op dien $\odot$ de reeks gemajoreerd door

$$\frac{1}{\delta} \sum_{1}^{\infty}{}^{m} |A_m|.$$

Nu is de bewering, dat wanneer er een $\odot$ is, die door één der punten α_n gaat en verder in het inwendige geen dier punten bevat, de functie, die gelijk is aan de som der reeks binnen den $\odot$, niet over α_n heen voortzetbaar is, wanneer z tot α_n nadert binnen den $\odot$.

We zullen het bewijs voor een iets algemeener geval leveren. Stel, dat er een cirkelsector is met top in α_1, waarvan het binnengebied vrij is van punten α_m.

Laat z nu binnen den sector naderen tot α_1.

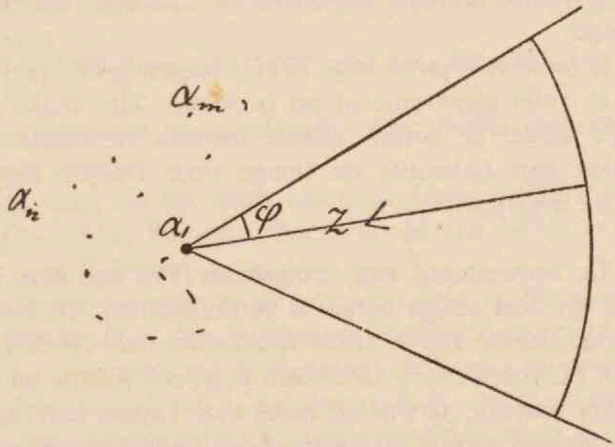
Nu is:

$$f(z) = \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \sum_{2}^{p}{}^{m} \frac{A_m}{z - \alpha_n} + \sum_{p+1}^{\infty}{}^{m} \frac{A_m}{z - \alpha_m}.$$

Hierin is p zoo gekozen, dat

$$\sum_{p+1}^{\infty} |A_m| < \tfrac{1}{2} |A_1| \sin \varphi$$

wat wegens de absolute convergentie van ΣA_m mogelijk is.



Nu is verder:

$$\left| \sum_{2}^{p} \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right| \leq \frac{1}{d} \sum_{2}^{p} \left| A_m \right| = \text{Constante bij vaste p}$$

waarin $d = \min \{|\alpha_1 - \alpha_2|, \ldots |\alpha_1 - \alpha_p\} \neq 0$.

Verder is voor z op de halfrechte:

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty} \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right| \leq \sum_{p+1}^{\infty} \left| \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right| \leq \sum_{p+1} \frac{|A_m|}{|z - \alpha_1| \sin \varphi}$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \cdot \frac{|A_1|}{|z - \alpha_1|}$$

en dus is:

$$|f(z)| > \frac{|A_1|}{|z - \alpha_1|} - \tfrac{1}{2} \frac{|A_1|}{|z - \alpha_1|} - C = \tfrac{1}{2} \frac{|A_1|}{|z - \alpha_1|} - C$$

en dit nadert tot ∞ voor $z \to \alpha_1$, langs de halfrechte. Liggen dus de α_m's overal dicht op een gesloten contour, die zoodanig is, dat van elk punt α_m een sector van de besproken soort doordringt in het binnengebied, dan is die kromme blijkbaar een coupure voor f(z).

§ 3. Men zou nu nog een stap verder willen gaan en een contour willen nemen, die in α_1 een keerpunt heeft met naar binnen gerichte raaklijn. De methode laat ons dan echter in den steek.

Het is eerst vele jaren later [VIII] mogen gelukken het probleem in volle algemeenheid op te lossen. Het blijkt nl. niet mogelijk verder te komen zonder gebruik te maken van de integralen van Lebesgue en eenige door Denjoy ingevoerde metrische begrippen.

§ 4. De bemoeiingen van Pringsheim [IV] met deze materie hadden ten doel eenige feiten te verduidelijken, die zich voordoen in de theorie van de reeks van Taylor voor reëele functies. Het kan nl. voorkomen, dat in een punt een functie en al haar afgeleiden bestaan, terwijl de reeks van Taylor voor dat punt een convergentiestraal 0 heeft of wel convergeert maar de functie niet voorstelt.

Hij beschouwt daartoe de reeks $\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{m} \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1 + a^m . x}$ waarin $a > 1$ is.

Onze punten α_m (die we in het vervolg met Poincaré schijnbare polen zullen noemen), zijn blijkbaar de punten: $-a^0$, $-a^{-1}$, ... Zij liggen allen op het interval $(-1,0)$ en hebben 0 tot verdichtingspunt. Voor $x = 0$ convergeert de reeks echter ook.

De reeks convergeert uniform in elk gesloten gebied, dat geen der punten 0, $-a^0$, $-a^{-1}$, ... bevat. In zoo'n gebied is de reeks term voor term differentiëerbaar.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n . n! \sum_{0}^{\infty}{}_{m} \frac{1}{m!} \cdot \frac{a^{mn}}{(1 + a^m . x)^{n+1}} .$$

Al deze reeksen convergeeren voor $x = 0$.

Men heeft blijkbaar:

$$f(o) = 0$$

$$f^{(n)}(o) = (-1)^n \,.\, n!\, e^{a^n}$$

Maar men overtuigt er zich gemakkelijk van, dat de reeks

$\sum_0^{\infty}{}_m \frac{f^{(m)}(o)}{m!} x^m$ divergeert voor alle pos. waarden van x.

De verklaring is nu gemakkelijk door middel van het voorgaande te geven.

Stel nl. eens dat die reeks een convergentiecirkel Γ had met positieven straal. Binnen Γ liggen op de neg. reëele as ∞ veel punten $-a^{-n}$. Neem er een b.v. $-a^{-k}$.

Trek in dat punt een loodlijn op de reëele as. Neem een punt z_0 op die loodlijn. De Taylorontwikkeling behoorende bij z_0 heeft dan eenerzijds een convergentiestraal die minstens gelijk is aan den afstand van z_0 tot den omtrek van Γ en anderzijds volgens onze algemeene beschouwingen gelijk is aan $|z_0 - (-a^{-k}|$. Men kan nu z_0 zoo dicht bij $-a^{-k}$ kiezen, dat de eerste afstand grooter is dan de 2e, waarmee tegenspraak bereikt is.

Door een kleine verandering krijgen we nog een merkwaardig geval, dat op analoge wijze tot klaarheid gebracht kan worden.

Zij nl. nl:

$$f(x) = \sum_0^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 + a^m \,.\, x}.$$

Wat de convergentie betreft gelden dezelfde opmerkingen. Maar nu is:

$$f(o) = \frac{1}{e}$$

$$\frac{f^{(n)}(o)}{n!} = (-1)^n \,.\, \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}.$$

Het verschil is thans, dat

$$\sum_0^{\infty}{}_n \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n = \varphi(x).$$

steeds convergeert, maar niet met f(x) kan overeenstemmen.
Het bewijs is als voren.

§ 5. In het verdere deel van zijn verhandeling beschouwt Pringsheim voor het eerst het geval, dat geen der schijnbare polen op den eenheids $\odot$ ligt, maar wel zich van buiten af naar den rand des cirkels verdichten. Binnen den $\odot$ convergeert weer de reeks en de som is daar een hol. functie, die volgens Pringsheim den $\odot$ tot coupure heeft. Zijn redeneering is niet juist, zooals door E. Borel (Ann. de l'éc. norm. sup. 1895) uitvoerig betoogd wordt, daar hij uit het feit, dat de som der reeks in een punt buiten den $\odot$, niet naar binnen voortzetbaar is, concludeert dat nu ook de functie in het binnengebied niet naar buiten voortzetbaar is. Het zal later blijken dat dit zelfs in het algemeen niet waar is.

Een eenvoudig voorbeeld, waarin Pringsheim wel gelijk heeft volgt thans.

§ 6. Neem weer op den eenheids $\odot$ C een overal dichte puntverzameling $\{a_n\}$ b.v. die uit het voorbeeld van Stieltjes. Plaats nu de schijnbare polen op de normalen door de punten a_n. Neem b.v. op $(Oa_1) = (O1)$ buiten C de punten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots.$ die 1 tot limiet hebben. De verzameling α's op (Oa_n) wordt dan ingesneden door concentrische cirkels te trekken. Op (Oa_n) ligt dan dus de verzameling α_{nk}, $k = 1, 2, \ldots.$ en tevens is $|\alpha_{nk}| = |\alpha_{1k}|$ en arg $\alpha_{nk} =$ arg a_n. Nu gaan we de residuën vaststellen.

Geef twee convergente reeksen van positieve termen

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n A_{n1} \text{ en } \sum_{1}^{\infty}{}_n u_n .$$

We kiezen het residu behoorende bij α_{nk} gelijk aan: $A_{nk} = A_{n1} \cdot u_k$.

Beschouw de reeks:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{A_{nk}}{\alpha_{nk} - z}.$$

Binnen C stelt de som weer een hol. functie voor. We zullen aantoonen, dat C een coupure is.

Het is voldoende aan te toonen, dat de functie niet over $z = 1$ heen voortzetbaar is.

We nemen daartoe een punt α, $0 < \alpha < 1$ en zullen bewijzen, dat de Taylorontwikkeling behoorende bij het punt α een convergentiestraal heeft, die gelijk is aan $1 - \alpha$.

We schrijven nu net als in het geval Poincaré-Goursat

$$f(z) = \sum_1^\infty{}_k \frac{A_{1k}}{\alpha_{1k} - z} + \sum_2^p{}_n \sum_1^\infty{}_k \frac{A_{nk}}{\alpha_{nk} - z} + \sum_{p+1}^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_k \frac{A_{nk}}{\alpha_{nk} - z}.$$

Wanneer we $\sum_1^\infty{}_k \frac{A_{1k}}{\alpha_{1k} - z}$ naar machten van $(z - \alpha)$ ontwikkelen, dan gaat de convergentie $\odot$ door a_1.

De convergentiecirkels van de volgende $p - 1$ ontwikkelingen gaan door $a_2, a_3, \ldots, a_p$ en bevatten allen a_1. Dit zal blijken geen bezwaar te zijn. Vorm nu werkelijk de machtreeksontwikkeling voor het 3e stuk.

De coëff. van $(z - \alpha)^m$ wordt:

$$\sum_{p+1}^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_k \frac{A_{nk}}{(\alpha_{nk} - \alpha)^{m+1}}.$$

Nu is uit de constructie duidelijk dat:

$$|\alpha_{nk} - \alpha| > |\alpha_{1k} - \alpha|$$

dus:

$$\left| \frac{A_{nk}}{(\alpha_{nk} - \alpha)^{m+1}} \right| < \frac{A_{nk}}{(\alpha_{1k} - \alpha)^{m+1}}$$

dus:

$$\left| \sum_{p+1}^\infty{}_n \frac{A_{nk}}{(\alpha_{nk} - \alpha)^{m+1}} \right| < \frac{1}{(\alpha_{1k} - \alpha)^{m+1}} \sum_{p+1}^\infty{}_n A_{nk}.$$

Maar men heeft weer: $A_{nk} = A_{n1} \, . \, u_k$ dus:

$$\sum_{p+1}^\infty{}_n A_{nk} = u_k \sum_{p+1}^\infty{}_n A_{n1}.$$

Geef nu $\varepsilon > 0$ en bepaal dan p zoodanig, dat

$$\sum_{p+1}^{\infty}{}_{n} A_{n1} < \varepsilon \,.\, A_{11}$$

Dan is dus totaal:

$$\left| \sum_{p+1}^{\infty}{}_{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{A_{nk}}{(\alpha_{nk} - \alpha)^{m+1}} \right| < \varepsilon \,.\, \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{A_{11}\, u_k}{(\alpha_{1k} - \alpha)^{m+1}}$$

$$= \varepsilon \,.\, \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{A_{1k}}{(\alpha_{1k} - \alpha)^{m+1}} \,.$$

Nu bestond f(z) uit 3 gedeelten. Noem het 1e gedeelte $f_1(z)$ en het 3e gedeelte $f_p(z)$ en stel even: $g(z) = f_1(z) + f_p(z)$.

Laat hun Taylorontwikkelingen zijn:

$$\Sigma\, p_m(z - \alpha)^m, \; \Sigma\, q_m(z - \alpha)^m, \; \Sigma\, r_m(z - \alpha)^m.$$

Dan is dus:

$$p_m = q_m + r_m.$$

Maar we toonden aan dat: $r_m = \Theta \,.\, \varepsilon \,.\, q_m$ waarin $|\Theta| < 1$ of:

$$p_m = q_m\,(1 + \Theta\varepsilon).$$

Dus:

$$\overline{\lim}\, \sqrt[m]{|p_m|} = \overline{\lim}\, \sqrt[m]{|q_m|} = \frac{1}{1 - \alpha} \,.$$

De convergentiestraal is dus in totaal $(1 - \alpha)$ daar de convergentiestralen van de $p - 1$ overige reeksen niet in staat zijn de andere te vergrooten.

§ 7. Men zou nu denken dat f(z) nooit voortzetbaar is over de contour, waar tegen de α's zich verdichten zonder er zelf op te liggen.

Aan dit denkbeeld is een einde gemaakt door J. Wolff [VI, 1, 2] wiens constructies we in het volgende hoofdstuk zullen bespreken.

HOOFDSTUK II

§ 1. Gaan we over tot de constructie van reeksen $\sum \frac{A_k}{z - \alpha_k}$ waarvan de som voortzetbaar is binnen gebieden, waarin de α's liggen, terwijl toch $\Sigma \mid A_k \mid$ convergeert.

Beginnen we met een voorbeeld [VI, 1].

Vooraf brengen we eerst eenige stellingen in herinnering.

1°. Zij D een cirkel met middelpunt α en straal R. Dan is:

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{z - x - iy} = \frac{\pi R^2}{z - \alpha} \quad \text{als } |z - \alpha| \geq R$$

$$\text{en } = \frac{\pi\,|z - \alpha|^2}{|z - \alpha|} \quad \text{als } |z - \alpha| < R.$$

2°. Volgens de overdekkingsstelling van Vitali is het mogelijk door middel van aftelbaar oneindig veel twee aan twee buiten elkaar gelegen cirkels γ_k, die alle binnen D gelegen zijn een deel van D te overdekken, waarvan de maat gelijk is aan πR^2.

§ 2. Laat nu C een cirkel zijn met middelpunt O en straal R. Overdek een deel van C op de onder 2°. aangegeven wijze met cirkels γ_k. De middelpunten dier cirkels noemen we α_k en hunne oppervlakken A_k. Dan is $\Sigma A_k = \pi R^2$.

Stel voor $|z| > R, f(z) = \sum_1^{\infty} {}_k \frac{A_k}{z - \alpha_k}$.

Volgens de stelling genoemd onder 1°. is:

$$\frac{A_k}{z - \alpha_k} = \iint\limits_{\gamma_k} \frac{dx\,dy}{z - x - iy}$$

dus:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} {}^{k} \iint_{\gamma_k} \frac{dxdy}{z - x - iy} = \iint_{C} \frac{dxdy}{z - x - iy} = \frac{\pi R^2}{z}.$$

De α_k's hebben elk punt van den omtrek van C tot verdichtingspunt, alsmede elk punt van de omtrekken der cirkels γ_k. Toch is f(z) over elk dier punten heen voortzetbaar behalve over het punt O.

§ 3. Men kan meer algemeen de volgende stelling aantoonen [VI, 2].

Iedere functie, holomorph in een begrensd gebied D, is in ieder gebied D_1, dat met zijn grens ligt binnen D, voor te stellen door een reeks $\sum \frac{A_k}{z - \alpha_k}$, α_k binnen D en $\Sigma\,|A_k|$ convergent".

Bewijs: Er bestaat een gebied Δ, dat D_1 bevat, waarvan de grens bestaat uit een eindig aantal polygonen P, welk gebied Δ met grens en al binnen D is gelegen. Zij δ de afstand van P tot de grens van D.

Met ieder geheel getal n laten we polygonen P_n evenwijdig aan P correspondeeren; P_n buiten Δ en op afstand $\frac{\delta}{2^n}$ van P. P_n omsluit een gebied Δ_n, waarvan Δ een deel is. Ook is: $\Delta_n > \Delta_{n+1}$.

Zij thans f(z) een functie holomorph binnen D en $|f(z)| < M$ op P_n. M is onafhankelijk van n.

Zij L = lim der lengten van P_n. L is ook onafh. van n. Ligt nu z binnen Δ_1, dan is:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{P_1} \frac{f(t)\ dt}{t - z}.$$

De methode volgende, die leidt tot het theorema van Runge, kunnen we schrijven voor z binnen Δ_2:

$$2\pi i\,.\,f(z) = \sum \frac{A_k}{\alpha_k - z} + 2\pi i\, f_1\,(z)$$

De α_k zijn punten, eindig in aantal en gelegen op P_1, terwijl $A_k = f(\alpha_k)\,.\,(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$

$f_1(z)$ is holomorph binnen Δ_2 en daar absoluut $< \frac{M}{2}$ terwijl:

$$\Sigma\ |A_k| \leq M\,.\,L.$$

Op dezelfde wijze hebben we voor z binnen Δ_3:

$$2\pi i\ f_1(z) = \sum \frac{A_k}{\alpha_k - z} + 2\pi i\ f_2(z)$$

waarbij de nieuwe α_k in eindig aantal zijn en liggen op P_2,

$f_2(z)$ is hol. binnen Δ_3 en daar absoluut $< \frac{M}{2^2}$.

De som der absolute waarden der nieuwe residuën is $\leq \frac{ML}{2}$.

Zoo kunnen we doorgaan. Algemeen vinden we voor z binnen Δ_{n+1}:

$$2\pi i\ f(z) = \sum \frac{A_k}{\alpha_k - z} + 2\pi i\ f_n(z)$$

De α_k zijn eindig in aantal en liggen op P_1, P_2, ... P_n.

$f_n(z)$ is hol. binnen Δ_{n+1} en daar absoluut $< \frac{M}{2^n}$, terwijl $\Sigma\ |A_k|$

$\leq$ ML $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{n-1}}\right) <$ 2ML.

Daar D_1 ligt binnen elke Δ_n hebben we binnen D_1 uniform:

$$2\pi i\ f(z) = \sum \frac{A_k}{\alpha_k - z}$$

waarbij de α_k een geïsoleerde verzameling vormen. Iedere P_n bevat een eindig aantal ervan, terwijl de α's elk punt van P tot verdichtingspunt hebben.

Opm.: door een ietwat fijnere schatting kan men een voorstelling krijgen, waarbij voor de residuën geldt: $\Sigma\ |A_k| \leq (1 + \varepsilon)$ ML, $\varepsilon > 0$ willekeurig.

§ 4. De voorgaande constructie is om te werken tot eene, die ons een inzicht geeft in de orde van grootte van $|A_k|$ [VII].

Zij b.v. gegeven een enkelvoudig samenhangend, begrensd gebied D, waarvan de grens gevormd wordt door een kromme C met de eigenschap, dat in elk punt van C de kromtestraal grooter is dan een vast bedrag R. Zij $d < R$ en stel $d = d_1 + d_2 + \ldots,$ waarbij d_n als volgt gekozen wordt. Zij $u_n = \dfrac{1}{n \log^{1+\alpha} n}, \; 0 < \alpha < 1$

$n = 2, \ldots$

en

$$s = \sum_{2}^{\infty} {}_n \, u_n$$

dan is:

$$d_n = \frac{d}{s} \cdot u_{n+1}$$

We brengen nu aan een verzameling parallelkrommen van C nl. $C_1, C_2, \ldots$ die allen C omsluiten.

C_1 op afstand d van C
C_2 „ „ $d - d_1$ van C
C_3 „ „ $d - d_1 - d_2$ van C enz.

Zij L de lengte van C. Door d klein genoeg te nemen kan men bereiken, dat de lengten van $C_1, C_2, \ldots$ alle $< 2L$ zijn.

Op C_p plaatsen we n_p punten a^p_m, b^p_m zoodanig dat de lengte van boog σ^p_m, die twee opeenvolgende punten verbindt kleiner is dan $\dfrac{L}{n_p}$.

De punten a^p_m zullen de schijnbare polen worden. Hunne keuze is onafh. van de gegeven functie f(z) die hol. is binnen en op C_1.

De residuën worden als volgt bepaald:

$$A^p_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a^p_m}^{b^p_m} f(t) \, dt$$

De integratie geschiedt langs C_p.

Laat nu z liggen binnen C_2. Dan is:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \sum_m \frac{1}{2\pi i}\int_{a_m^1}^{b_m^1} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

Stel:

$$f_1(z) = f(z) - \sum_m \frac{A_m^1}{z-a_m^1} = \sum_m \frac{1}{2\pi i}\int_{a_m^1}^{b_m^1} \frac{f(t)\,.\,(a_m^1-t)}{(a_m^1-z)\;(t-z)}\,dt$$

Zij M het max. van $|f(z)|$ op C_1 en M_1 dat van $|f_1(z)|$ op C_2. Zij δ_m^1 de afstand van z (binnen C_2) tot boog $a_m^1 b_m^1$. Dan is blijkbaar:

$$M_1 < \frac{1}{2\pi} M \sum \frac{\sigma_1^2}{\delta_m^{1^3}} < \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{L}{n_1} \sum \frac{\sigma_1}{\delta_m^{1^2}}$$

Nu is het duidelijk dat $\sum \frac{\sigma_1}{\delta_m^{1^2}}$ aequivalent is met $\int_{C_1} \frac{ds}{r^2}$ waarin r de afstand voorstelt van een punt z binnen C_2 tot een punt op C_1.

Dank zij de veronderstelling over de kromtestraal leert een eenvoudige schatting, dat men voor deze integraal mag schrijven:

$$O\left(\frac{1}{d_1}\right)$$

Evenzoo is: $\int_{C_p} \frac{ds}{r^2} = O\left(\frac{1}{d_p}\right)$. r is hierin de afstand van een punt z binnen C_{p+1} tot een punt van C_p. Al deze integralen en ook de reeksen $\sum \frac{\sigma_p}{\delta_p^2}$ kan men majoreeren door $\frac{K}{d_p}$. K is een constante die voor alle krommen gebruikt mag worden.

Dit opgemerkt zijnde, vinden we ten slotte:

$$M_1 < \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{L.K}{n_1 d_1} = \frac{MK_1}{n_1 d_1}.$$

Zoo kan men doorgaan. Voor z binnen C_{p+2} geldt:

$$f_{p+1}(z) = f_p(z) - \sum_m \frac{A_m^p}{z - a_m^p}.$$

en dus:

$$M_{p+1} < M_p \cdot \frac{K_1}{n_{p+1} \cdot d_{p+1}}.$$

Nu kiezen we voor n_p: $\left[\frac{eK_1}{d_p}\right]$.

Doen we dit, dan volgt daaruit direct:

$$M_{p+1} < M\, e^{-p}.$$

De reeks $\sum \frac{A_m^1}{z - a_m^1} + \sum \frac{A_m^2}{z - a_m^2} + \ldots.$ convergeert dus tot f(z) voor z binnen of op C.

§ 5. $|A_m|$ is nu gemakkelijk te schatten.

Stel $n_1 + n_2 + \ldots. + n_p = m_p$.

Wanneer A_m behoort bij een pool gelegen op C_p, dan ligt het rangnummer m blijkbaar in tusschen m_p en m_{p-1}. Nu is:

$$m_p = \frac{esK_1}{d} \sum_{2}^{p+1} l \,.\, \log^{1+\alpha} l$$

Het is op eenvoudige wijze in te zien, dat die som gelijk is aan:

$$\frac{p+1}{(2+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{u_{p+1}},\ \varepsilon > 0 \text{ en } \rightarrow 0 \text{ als } p \rightarrow \infty.$$

Dus is:

$$m_p = \frac{esK_1}{(2+\varepsilon)\, d} \cdot \frac{p+1}{u_{p+1}}.$$

Daar blijkbaar $\frac{m}{m_p} \rightarrow 1$ als $p \rightarrow \infty$ mogen we schrijven:

$$m = \frac{esK_1}{(2+\varepsilon_1)\,d} \cdot \frac{p+1}{u_{p+1}},\ \varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ als } p \rightarrow \infty.$$

Rekening houdende met de waarde van u_{p+1} volgt uit laatst genoemde formule:

$$p^2 = m^{1+\varepsilon_m},\ \varepsilon_m \rightarrow 0 \text{ als } m \rightarrow 0.$$

en dus:

$$\frac{pu_p}{mu_m} = \left(\frac{\log m}{\log p}\right)^{1+\alpha} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon_m}\right)^{1+\alpha} = 2^{1+\alpha} + \varepsilon'_m,\ \varepsilon'_m \rightarrow 0.$$

Tenslotte:

$$p^2 = pu_p \cdot \frac{p}{u_p} = mu_m\,(2^{1+\alpha} + \varepsilon'_m) \cdot K_2 \cdot m$$

of:

$$p = m\sqrt{u_m} \cdot K_3$$

waarin K_2 en K_3 numerieke constanten zijn.

Maar daaruit volgt nu direct:

$$|A_m| < M_p \cdot \sigma_p < M\,\sigma_p \cdot e^{-p}$$

$$< K_4 \cdot e^{-\frac{m}{\sqrt{m}\,.\,\sqrt{\log .\, ^{1+\alpha}m}}}$$

en dus is voldaan aan:

$$|A_m| < e^{-m^{\frac{1}{2}-\delta}} \qquad \delta > 0.$$

§ 6. Stellen we nu f(z) voor door een analoge reeks, waarbij alleen andere polen en residuën gebruikt worden, dan zal het verschil dier twee reeksen $\equiv 0$ zijn binnen C zonder dat alle A's 0 zijn.

We zullen later zien, dat als

$$|A_m| < e^{-m^{1+\varepsilon}}$$

dit onmogelijk zou zijn.

HOOFDSTUK III

§ 1. Gaan wij thans over tot het bewijs der in de Inleiding genoemde algemeene stellingen [VIII].

Eerst zullen we echter eenige algemeene stellingen bewijzen waarvan in het vervolg vaak gebruik zal worden gemaakt. Bij het bewijs hiervan zullen we gebruik maken van de volgende hulpstelling uit de theorie der sommeerbare functies [XIII]: „Is $f_1(P)$, $f_2(P)$, ... een monotoon stijgende rij van niet negatieve functies, die op een verzameling E sommeerbaar zijn, dan is de grensfunctie f(P) dan en alleen dan sommeerbaar op E als $\int\limits_E f_m(P)$ begrensd is en dan is steeds: $\int\limits_E f = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_E f_m$.

Zij thans Γ een willekeurige $\odot$ met straal R. Beschouw $\iint\limits_\Gamma \frac{dxdy}{|z-\alpha_n|}$ onverschillig of α_n binnen dan wel buiten Γ ligt. Voer nu poolcoördinaten in ten opzichte van α_n. Men ziet dan gemakkelijk in, dat steeds:

$$\iint\limits_\Gamma \frac{dxdy}{|z-\alpha_n|} = \iint\limits_\Gamma \frac{rdrd\varphi}{r} \leq 4\pi R.$$

Zij thans

$$F_n(z) = \sum_1^n{}_m \left| \frac{A_m}{z-\alpha_m} \right|, \; n = 1, 2, \ldots\ldots$$

Blijkbaar is de rij $F_n(z)$ monotoon stijgend en $F_n(z) \geq 0$. Verder is steeds:

$$\iint\limits_\Gamma F_n(z)\,dxdy = \sum_1^n{}_m \iint\limits_\Gamma \left| \frac{A_m}{z-\alpha_m} \right| \leq 4\pi R\,.\,S \text{ als } S = \sum_1^\infty{}_m \left| A_m \right|$$

Volgens de hulpstelling is dus $F(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z)$ sommeerbaar over Γ. Maar dat wil weer zeggen, dat de verzameling der punten waar $F(z) = +\infty$ tweedimensionaal van den maat 0 is. Op de overblijvende volle maat is dus $F(z)$ eindig. Maar dat wil zeggen dat $\sum_1^\infty {}_m \left| \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right|$ op volle maat van Γ convergeert.

Hiermede is dus de volgende gewichtige stelling afgeleid [VII]:

De reeks $\sum_1^\infty {}_m \left| \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right|$ convergeert bijna overal in het complexe vlak en de functie $F(z)$ die gelijk is aan de som der reeks in de convergentiepunten en 0 elders is sommeerbaar over elk begrensd gebied. Hetzelfde geldt à fortiori voor de reeks $\sum_1^\infty {}_m \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ en voor de daarmede overeenkomende functie $f(z)$.

§ 2. Brengen we in 't kort nog even de volgende zaken in herinnering:

1°. De verzameling der punten behoorende tot ∞ veel meetbare verzamelingen $E_1, E_2, \ldots$ met $\Sigma\, \mu\, E_n < \infty$ is van den maat 0.

Immers zij E die verzameling en $E_p = E_{p+1} + E_{p+2} + \ldots$ dan is: $E = E_0 . E_1 . E_2 \ldots$ daar $E_{p+1} < E_p$ is $\mu E = \lim_{p \to \infty} E_p = 0$, wegens de conv. der reeks $\Sigma\, \mu E_n$.

2°. Als $f(t)$ monotoon daalt op (ab) en E is een verzameling met maat μ op (ab) gelegen, dan is:

$\int_E f(t)\, dt \geq \int_{b-\mu}^{b} f(t)\, dt$. Het eenvoudige bewijs laten wij achterwege.

§ 3. Gaan wij thans over tot de genoemde stellingen van Denjoy. We zullen eerst geven een bewijs van Denjoy, waarbij als extraconditie geëischt wordt: $\Sigma \,|\, A_m \,|\, \log \,|\, A_m \,|$ convergent. Wij geven dit bewijs om te laten zien op hoe vernuftige wijze de oorspronkelijke methode van Borel, die hierin bestond, dat men bepaalde intervallen met de punten α_m als middelpunt uitsloot, door Denjoy vervolmaakt is.

Merken we verder even op, dat men mag veronderstellen $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} |A_m| < \frac{1}{2}$ en $|a - \alpha_m| < \frac{1}{2}$.

§ 4. 1*e Stelling*:

Als $z - a = re^{i\varphi}$, $r > 0$ en $|\alpha_m - a| = r_m < \frac{1}{2}$ dan convergeert de reeks $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \dfrac{|A_m|}{|r - r_m|}$ op volle dikte.

Bewijs: Beschouw het lijnsegment $0 < r < \infty$. Omgeef de punten r_m door de intervallen $I_m(r_m - |A_m|, r_m + |A_m)|$. Zij l een positief getal. Zij l_m wat er van het interval $(0, l)$ overblijft als men er de doorsnede van $(0, l)$ en I_m uitlicht. Dan is blijkbaar:

$$\int_{l_m} \frac{dr}{|r - r_m|} \leq \int_{0}^{r_m - |A_m|} \frac{dr}{r_m - r} + \int_{r_m + |A_m|}^{l} \frac{dr}{r - r_m} =$$

$$= \log \frac{r_m}{|A_m|} + \log \frac{l - r_m}{|A_m|} < 2 \log \frac{1}{|A_m|} + 2 \log l.$$

Zij E_p de verzameling, die er overblijft van $(0, l)$ als men er alle punten uithaalt, die behooren tot minstens één der intervallen $I_{p+1}, I_{p+2}, \ldots\ldots$ Daar $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} \mu\, I_m = 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{m} |A_m| < 1$, kan men p zóó groot kiezen, dat $\sum_{p+1}^{\infty}{}_{m} \mu\, I_m < l$. E_p bestaat dan werkelijk op $(0, l)$.

Nu is weer voor $m > p$:

$$\int_{E_p} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} dr < \int_{l_m} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} dr < |A_m| \{2 \log \frac{1}{|A_m|} + 2 \log l\}.$$

Wegens de convergentie van $\Sigma |A_m|$ en $\Sigma |A_m| \log |A_m|$ volgt nu dus, dat de reeks $\sum \dfrac{|A_m|}{|r - r_m|}$ op E_p slechts divergeert op een verzameling H_p met $\mu\, H_p = 0$.

Volgens een reeds gemaakte opmerking heeft de verzameling der punten, die tot oneindig veel intervallen I_m behooren op $(0, l)$ de maat 0.

Noem die verzameling K. Ieder punt van $(0, l)$ dat niet tot K behoort, behoort tot een eindig aantal I_m en dus tot een E_p.

Zij thans: $M = K \dotplus H_1 \dotplus H_2 \dotplus \ldots\ldots$ Dan is $\mu M = 0$.

In ieder punt van $(0, l) - M$ convergeert $\sum_1^{\infty}{}_m \dfrac{|A_m|}{|r - r_m|}$.

Immers als r niet behoort tot M, behoort r niet tot K en dus tot een E_p. Dus b.v. tot E_q en dus niet tot H_q (want anders behoorde r tot M). En in zoo'n punt convergeert de reeks.

2e Stelling:

Zij in een convergentiepunt $r \geq 0$: $h(r) = \sum_1^{\infty}{}_m \dfrac{|A_m|}{|r - r_m|}$ en $h(r) = 0$ als r een divergentiepunt is. Zij $r \,.\, h(r) = g(r)$ en $g(o) = 0$, dan is $g(r)$ approximatief continu rechts van o.

Bewijs: Als we dus getal $\varepsilon > 0$ geven, dan moet worden aangetoond, dat de verzameling der getallen r, waarvoor $g(r) < \varepsilon$ de rechterdikte 1 heeft in O of wel een dikte $> 1 - \varepsilon$ op $(0, \rho)$ als ρ klein genoeg is; dit laatste zal weer het geval zijn als de dikte op $(\rho, 2\rho)$ tot 1 nadert als $\rho \to o$.

Ontken thans de stelling d.w.z. er is een „uitzonderings-ε" genaamd η en een uitzonderingssuite $\rho' \to o$ zoodanig dat de verzameling der getallen waarvoor geldt:

$$g(r) > \eta \quad \text{en} \quad \rho' < r < 2\rho'$$

een maat heeft $> \eta\rho'$. Noem die verzameling $H(\rho')$.

Hiervan moeten we de onmogelijkheid aantoonen.

Leg om r_m een interval $J_m(r_m - r_m\,|A_m|,\ r_m + r_m\,|A_m|)$. Daar $|A_m| < \frac{1}{2}$ is blijkbaar J_m gelegen binnen het interval

$$\left(\frac{r_m}{2}, \frac{3r_m}{2}\right).$$

Beschouw die waarden van m waarvoor J_m minstens een punt gemeen heeft met $(\rho', 2\rho')$.

Voor die waarden van m geldt blijkbaar:

$$\tfrac{2}{3}\rho < r_m < 4\rho.$$

De reeks $\Sigma\, r_m\, |A_m|$ waarbij gesommeerd wordt over de genoemde indices heeft een som $< 4\rho \sum\limits_{N+1}^{\infty} |A_m|$, als $N+1$ de kleinste index is van de bedoelde soort.

Als $\rho \to 0$ dan $N+1 \to \infty$.

Men kan dus ρ zoo klein kiezen, dat $\sum\limits_{N+1}^{\infty} |A_m| < \frac{1}{8}$. De verzameling K der punten, die buiten alle J_m liggen bestaat dan op $(\rho, 2\rho)$. De dikte van K op $(\rho, 2\rho)$ is $> 1 - 8 \sum\limits_{N+1}^{\infty} |A_m|$ en nadert dus tot 1 als $\rho \to 0$.

Noem $1 - \delta$ die dikte van K op $(\rho, 2\rho)$. Zij $K(\rho)$ het deel van K op $(\rho, 2\rho)$, dan is:

$$\mu K(\rho) > (1 - \delta)\, \rho$$

Kies nu ρ_0 zoo dat voor $\rho < \rho_0$ geldt: $\delta < \eta$.

Zij: $I(\rho') = H(\rho') \times K(\rho')$. Dan is klaarblijkelijk:

$$\mu I(\rho') > (\eta - \delta')\, \rho' \text{ als } \rho' < \rho_0.$$

Beschouw thans:

$$J = \int\limits_{I(\rho')} h(r)\, dr$$

$J > \int\limits_{I(\rho')} \frac{\eta}{r}\, dr$ en dus, daar $\frac{1}{r}$ monotoon daalt:

$$J > \eta \int\limits_{(2-\eta+\delta')\rho'}^{2\rho'} \frac{dr}{r} = \eta \log \frac{2}{2 - \eta + \delta'}$$

Maar het rechterlid nadert tot $\eta \log \frac{2}{2-\eta} = 2\eta'$ als $\rho' \to 0$.

Zij ρ_1 zoodanig dat voor $\rho' < \rho_1$

$$J > \eta'$$

Nu gaan we een schatting in omgekeerden zin maken.

$$J = \int\limits_{I(\rho')} \sum_{1}^{p} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} dr + \int\limits_{(I\rho')} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} dr.$$

p zal nader worden bepaald. Kies ρ_2 klein genoeg dat op $(0, 4\rho_2)$ geldt:

$$\sum_{1}^{p} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} < 2k.$$

Het interval $(0, 4\rho_2)$ mag dus geen enkele r_m met index $\leq p$ bevatten.

Verder is blijkbaar:

$$\int\limits_{I(\rho')} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{|A_m|}{|r - r_m|} dr < \int\limits_{K(\rho')} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{|A_m|}{|r - r_m|}.$$

Zij thans ρ'_m wat er overschiet van $(\rho', 2\rho')$ als men er de punten die J_m met $(\rho', 2\rho')$ gemeen heeft aftrekt.

Dan is:

$$\int\limits_{K(\rho')} \sum_{p+1}^{\infty} < \sum_{p+1}^{\infty} |A_m| \int\limits_{\rho_m} \frac{dr}{|r - r_m|}.$$

Nu leert een elementaire berekening, dat:

$$\int\limits_{\rho_m} \frac{dr}{|r - r_m|} < 2 \log \frac{1}{|A_m|} + \log \frac{\{1 + |A_m|\}\{1 + 2|A_m|\}}{2} = \varepsilon_m.$$

Maar klaarblijkelijk convergeert $\Sigma |A_m| \varepsilon_m$ en dus kan men p zoo kiezen, dat:

$$\int\limits_{K(\rho')} \sum_{p+1}^{\infty} < \frac{\eta'}{2}.$$

En dus is:

$$J < 2k\rho' + \frac{\eta'}{2}.$$

en dit is $< \eta'$ voor $\rho' < \rho_0$, ρ_2 en $\rho_3 = \dfrac{\eta'}{4k}$ en daarmee zijn we dus in tegenspraak met $J > \eta'$ voor $\rho' < \rho_1$.

Uit deze twee stellingen volgt nu:

Als $f(z) = \sum_{1}^{\infty} m \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ in de convergentiepunten der reeks, dan bestaat $(z - a) \,.\, f(z)$ en nadert tot 0 als $z \to a$ op een verzameling E, die in a de circulaire dikte 1 heeft.

Deze stelling heeft direct beide theorema's van Denjoy ten gevolge.

§ 5. Wanneer men de bijconditie laat vallen, dan lukt het bewijs van de hulpstelling niet meer.

Denjoy gaat dan als volgt te werk: de onmogelijkheid van de identiteit:

$$\frac{1}{z - a} + \sum_{1}^{\infty} m \frac{A_m}{z - \alpha_m} = h(z)$$

moet worden aangetoond langs de boog βa.

Daartoe integreert hij beide leden van β tot z langs de deelboog βz van βa.

Er treedt dan op een reeks: $\sum_{1}^{\infty} m\, A_m \log |z - \alpha_m| = \psi(z)$.

Van deze reeks kan men op analoge wijze als voor $\sum \frac{|A_m|}{|r - r_m|}$ is geschied, aantoonen dat:

$$\frac{\psi(z)}{\log |z - a|} \text{ bestaat en tot 0 nadert met } z \to a:$$

1°. op een verzameling E, die in a de circulaire dikte 1 heeft en 2°. op volle radiale maat met top a.

Dit gedeelte van het bewijs veroorzaakt geen bijzondere moeilijkheden. Wèl echter de bij de integratie ingevoerde termen: variatie van argument van $z - \alpha_m$ langs βz.

Het opstellen van schattingen voor deze termen zonder iets naders te veronderstellen omtrent ligging der α's of het gedrag van boog βa bracht groote moeilijkheden met zich, die thuis behoorden op het gebied der Analysis situs.

Door een later bewijs [IX, 1, 2] werden zij echter grootendeels vermeden.

§ 6 De stellingen kunnen op eenvoudiger wijze worden aangetoond.

Zij Γ een continue kromme, die niet door O gaat, maar die O wel bevat in haar limietverzameling.

Laat ieder segment $\beta\gamma$ van Γ rectificeerbaar zijn. Veronderstel verder, dat op Γ de reeks $\sum \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ convergeert tot f(z) en dat de reeks term voor term geïntegreerd mag worden op ieder segment $\beta\gamma$. Laten ρ'' en $\rho' < \rho''$ twee positieve getallen zijn en $|\beta| = \rho'$, $|\gamma| = \rho''$; verder veronderstellen we, dat voor ieder punt z van boog $\beta\gamma$ geldt $(\rho' \leq |z| \leq \rho''.)$

We zullen nu aantoonen, dat voor $\rho'' \to 0$ approximatief geldt:

$$\frac{1}{\rho''} \int_{\beta}^{\gamma} z \,.\, f(z) \,.\, dz \to 0$$

d.w.z. met ieder getal $\varepsilon > 0$ correspondeert een getal δ, zoodanig, dat als $\rho'' < \delta$, de absolute waarde van het 1e lid kleiner is dan ε, behalve misschien als ρ' of ρ'' behooren tot een verzameling, waarvan de maat hoogstens $\varepsilon \,.\, \delta$ is.

Bewijs: Stel weer

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \left| \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right| \quad \text{en} \quad \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{A_m}{z - \alpha_m} = f(z)$$

in die punten, waar de reeks convergeert. Geef $\varepsilon > 0$.

Neem een cirkel C met straal R en middelpunt O, zoodanig, dat: $\sum\limits_{|\alpha_k| < R} |A_k| < \varepsilon$.

Zij $\rho < \frac{1}{2}$ R. Dan is weer:

$$\iint\limits_{|z| < \rho} \left\{ \sum_{|\alpha_k| \geq R} \left| \frac{A_k}{z - \alpha_k} \right| \right\} dxdy < \pi\rho^2 \,.\, \frac{2}{R} \sum_{1}^{\infty}{}_{k} A_k$$

en:

$$\iint\limits_{|z| < \rho} \left\{ \sum_{|\alpha_k| < R} \left| \frac{A_k}{z - \alpha_k} \right| \right\} dx \,.\, dy < 4 \,.\, \pi \,.\, \varepsilon \,.\, \rho.$$

Dus totaal:

$$\iint\limits_{|z|<\rho} F(z)\,dxdy < 4\pi\varepsilon\rho + \pi\rho^2 \cdot \frac{2}{R} \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \left| A_k \right|$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{\rho} \iint\limits_{|z|<\rho} F(z)\,dxdy \to 0 \text{ als } \rho \to 0.$$

Geef nu $\eta > 0$ en kies ρ_0 zoodanig, dat

$$\iint\limits_{|z|<\rho} F(z)\,dxdy < \eta^2 \cdot \rho \text{ voor } \rho < \rho_0.$$

Voer poolcoördinaten in:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\rho} F(z) \cdot r \cdot dr = \int_0^{\rho} dr \cdot \int_0^{2\pi} F(z) \cdot r \cdot d\varphi < \eta^2 \cdot \rho.$$

Nu is $\int_0^{\rho} F(z) \cdot r \cdot dr$ een functie van φ. De verzameling $E(\varphi)$ van φ-waarden, waarvoor die functie grooter is dan $\eta \cdot \rho$ heeft een maat $< \eta$.

Immers:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\rho} F(z) \cdot r \cdot dr = \int\limits_{E(\varphi)} + \int\limits_{CE(\varphi)} < \eta\rho$$

en dus:

$$\eta \cdot \rho \cdot \mu E(\varphi) < \eta^2 \rho \text{ of } \mu E(\varphi) < \eta.$$

Verder is: $\int_0^{2\pi} F(z) \cdot r \cdot d\varphi$ een functie van r.

De verzameling $E(r)$ van r-waarden $< \rho$, waarvoor die functie grooter is dan η, heeft een maat $< \eta \cdot \rho$ wat op analoge wijze wordt aangetoond.

Als nu $\int_0^{\rho} F(z) \cdot r \cdot dr$ eindig is, dan convergeert $\sum \left| \dfrac{A_k \cdot z}{z - \alpha_k} \right|$ op volle maat van het segment $(0, \rho e^{i\varphi})$ en dus ook de reeks $\sum \dfrac{A_k \cdot z}{z - \alpha_k} = z \cdot f(z)$. Bovendien is die reeks, dan evenals de le op dat segment term voor term te integreeren.

Eveneens geldt: als $\int_0^{2\pi} F(z) \, . \, r \, . \, d\varphi$ eindig is, dan convergeert de reeks $\sum \frac{A_k \, . \, z}{z - \alpha_k}$ op volle dikte van den cirkel $|z| = r$ en is daarop termsgewijs integreerbaar.

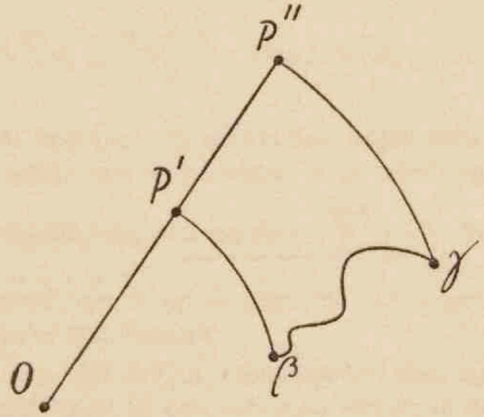
Daar verder: $|f(z)| \leq F(z)$ hebben we tevens voor $\rho < \rho_0$:

1°. $\left| \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho e^{i\varphi}} z \, . \, f(z) \, dz \right| \leq \eta$, waarin de integraal genomen mag worden langs de straal of langs een gedeelte daarvan, met uitzondering eventueel van een φ-verzameling $E(\varphi)$ met maat $< \eta$.

2°. $\left| \frac{1}{r} \int_{|z| = r} z \, . \, f(z) \, . \, dz \right| \leq \eta$, waarin de integraal genomen mag worden langs een cirkel $|z| = r$ of een gedeelte daarvan, uitgezonderd misschien voor een r-verzameling $E(r)$ met maat $< \eta \, . \, \rho$.

Zij thans ω een gesloten, continue, rectificeerbare contour en zoodanig, dat op een volle dikte van $\omega \sum \frac{A_k \, . \, z}{z - \alpha_k} = z \, . \, f(z)$ convergeert en termsgewijze integreerbaar is.

Dan is: $\int_\omega z \, . \, f(z) \, . \, dz = 2\pi i \, \Sigma_\omega \, A_k \alpha_k$ waarin de sommatie uitgestrekt wordt over alle α_k binnen ω.



Trek nu door O een halfrechte, waarvan het argument niet behoort tot $E(\varphi)$ en laten ρ' en $\rho'' < \rho_0$ niet behooren tot $E(r)$.

Stel dat de cirkels met middelpunt O en stralen ρ' en ρ'' van Γ een boog afsnijden, zoodanig dat onderstaande figuur onstaat.

Dan is klaarblijkelijk:

$$\left| \int_\beta^\gamma z\, f(z) \right| \leq 2\pi \left| \sum_\omega A_k\, \alpha_k \right| + \eta\rho'' + 2\eta\rho''$$

of

$$\left| \frac{1}{\rho''} \int_\beta^\gamma z\, (f(z) \right| \leq 3\eta + 2\pi \sum_\omega \left| A_k \right|.$$

Daar $\sum\limits_\omega |A_k| \leq \sum\limits_{|\alpha^k| < \rho''} |A_k| \rightarrow 0$ met ρ'', is daarmee het theorema aangetoond.

Stel nu b.v. eens dat op Γ geldt:

$f(z) = \dfrac{1}{z} +$ hol-functie in een cirkel om O. Dan is:

$$\frac{1}{\gamma} \int_\beta^\gamma z\, f(z) = \frac{1}{\gamma} \int_\beta^\gamma dz + \frac{1}{\gamma} \int_\beta^\gamma h(z)\, dz = 1 - \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\text{functie van } \beta \text{ en } \gamma}{\gamma}.$$

Men ziet direct in, dat dit niet approximatief tot 0 nadert als $\gamma \rightarrow 0$.

Voor een modificatie van dit bewijs voor het geval, dat de fig. niet van zoo'n eenvoudige soort is zie men [IX, 2].

HOOFDSTUK IV

DE ONDERZOEKINGEN VAN T. CARLEMAN

§ 1. In zijn bekende werk „Théorie des fonctions" voert E. Borel de volgende bijconditie in: Er is een convergente reeks van positieve termen zoodanig, dat $\sum \frac{|A_n|}{u_n}$ ook nog convergeert.

Deze conditie is gelijkluidend met de volgende:

$$\Sigma \sqrt{|A_n|} \text{ convergent.}$$

Immers, is aan deze conditie voldaan, dan kan men stellen: $u_n = \sqrt{|A_n|}$. Is er omgekeerd een reeks met algemeenen term u_n zoodanig, dat de reeks $\sum \frac{|A_n|}{u_n} = \Sigma\, v_n$ convergeert, dan bedenke men, dat:

$$\sqrt{|A_n|} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}. \text{ Dus } \Sigma \sqrt{|A_n|} \text{ convergeert.}$$

In dit geval kan men op eenvoudige wijze aantoonen, dat er op iedere rechte een verzameling E is, zoodanig dat $\mu\, CE < \varepsilon$, met de eigenschap, dat de reeks $\sum \frac{A_m}{z-\alpha_m}$ op een loodlijn door een punt van E op de gegeven rechte getrokken absoluut en uniform convergeert.

Neemt men aan, dat $\Sigma \sqrt[3]{|A_n|}$ convergeert, dan kan men door om α_n als middelpunt 3 concentrische cirkels te trekken met stralen $k \sqrt[3]{|A_n|}$, $k \sqrt[3]{|A_n|^2}$ en $k\,|A_n|$ aantoonen, dat er een verzameling van punten x is met de volgendc eigenschappen:

1e ze liggen buiten de cirkels met stralen k $\sqrt[3]{|A_n|^2}$

2e er gaat een verzameling rechten door heen met hoekmaat $> 2\pi - \varepsilon$, zoodanig dat de reeks op zoo'n rechte absoluut en uniform convergeert,

Ten onrechte meende Carleman, dat de eigenschap ook waar is, als $\Sigma\sqrt{|A_n|}$ convergeert, Ware dit zoo, dan zou men de volgende redeneering kunnen houden.

§ 2. Veronderstellen we thans eens, dat α_1 verdichtingspunt is der verzameling $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ en tevens dat α_1 een punt x is.

Dan convergeert de reeks $\sum_{2}^{\infty}{}_m \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ absoluut en uniform op bijna elke rechte door α_1 en kan dus $f(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ in de buurt van α_1 niet bijna overal uniform begrensd zijn.

Hieraan dacht T. Carleman waarschijnlijk toen hij schreef [XII]

„On peut démontrer que le terme $\dfrac{A_n}{z - \alpha_n}$ est le terme dominant sur presque tous les vecteurs qui passent par α_n, pourvue qu'il existe une série à termes positifs convergente $\Sigma\, u_n$ telle que $\sum \dfrac{A_n}{u_n}$ converge. On déduit de là: Si f(z) est uniformément bornée sur un ensemble de points obtenu par exclusion d'un ensemble de mesure nulle, tous les A_n sont égaux à zéro."

Maar het is duidelijk, dat de hypothese: α_1 is een punt x" niet vervuld behoeft te zijn. Is b.v. $\alpha_1 = 0$, dan zorge men dat:

$$|\alpha_n| < \frac{u_n}{2^n}.$$

Geef nu een $\varepsilon > 0$. Dan is er een N zoodanig, dat

$$\frac{1}{2^{N+1}} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2^N}.$$

Dus is:

$$\frac{u_{N+1}}{2^{N+1}} \leq \varepsilon \,.\, u_{N+1}, \quad \frac{u_{N+2}}{2^{N+2}} < \varepsilon\, u_{N+2}, \quad \ldots .$$

dus:

$$|\alpha_n| < \varepsilon u_n \text{ als } n \geq N + 1$$

en dan ligt $\alpha_1 = 0$ dus binnen alle cirkels C_n vanaf zekere n, waarmee het bewijs uit § 1 komt te vervallen.

§ 3. We zullen thans de door Carleman genoemde stelling verscherpen: We gaan bewijzen, dat de conditie „$\Sigma \sqrt{|A_n|}$ convergent" niets met de zaak te maken heeft.

Zij dus $f(z) = \sum\limits_1^\infty{}_m \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ in die punten, waar de reeks convergeert en $F(z) = \sum\limits_1^\infty{}_m \left|\dfrac{A_m}{z - \alpha_m}\right|$. We weten reeds, dat F(z) sommeerbaar is over elk eindig gebied.

Er is dus een volle ρ-maat, zodat $\int\limits_{\Gamma_\rho} F ds < \infty$. Γ_ρ is een $\odot$ met middelpunt α_1.

Wegens $|f(z)| \leq F(z)$ is f(z) sommeerbaar op Γ_ρ en $\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\, dz = \int\limits_{C_\rho} f(z)\, dz$, waarin C_ρ de verzameling der convergentiepunten van $\sum\limits_1^\infty{}_m \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ op Γ_ρ is; want op volle φ-maat van Γ_ρ is $F < \infty$ wegens $\int\limits_{\Gamma_\rho} F ds < \infty$ en dus $\sum\limits_1^\infty{}_m \dfrac{A_m}{z - \alpha_m}$ convergent.

Verder is:

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} F ds = \sum_1^\infty \int\limits_{\Gamma_\rho} \left|\frac{A_m}{z - \alpha_m}\right| ds,$$

waaruit volgt:

$$\lim_{v \to \infty} \int\limits_{\Gamma_\rho} \sum_v^\infty \left|\frac{A_m}{z - \alpha_m}\right| ds = \lim_{v \to \infty} \sum_v^\infty \int\limits_{\Gamma_\rho} \left|\frac{A_m}{z - \alpha_m}\right| ds = 0.$$

We hebben nu:

$$\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = \int_{c_\rho} f(z)\,dz = \int_{c_\rho}\left(\sum_{1}^{v}\frac{A_m}{z-\alpha_m}\right)dz + \int_{c_\rho}\left(\sum_{v+1}^{\infty}\frac{A_m}{z-\alpha_m}\right)dz =$$

$$= \int_{c_\rho}\left(\sum_{1}^{v}\frac{A_m}{z-\alpha_m}\right) + \Theta\int_{\Gamma_\rho}\sum_{v+1}^{\infty}\left|\frac{A_m}{z-\alpha_m}\right| ds$$

waarin $|\Theta| < 1$ dus:

$$\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{1 \\ |\alpha_m| < \rho}}^{v} A_m + \varepsilon_v,\ \varepsilon_v \to 0 \text{ als } v \to \infty.$$

Bijgevolg:

$$\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{1 \\ |\alpha_m| < \rho}}^{\infty} A_m.$$

Dus:

$$\lim_{\rho \to 0}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i\, A_1.$$

Wanneer we thans met Carleman onderstellen dat f(z) bijna overal uniform begrensd is, dan is er dus weer een volle ρ maat van cirkels met α_1 als middelpunt met de eigenschap dat op volle maat φ-maat $|f(z)| < M$ (M onaf. van z).

De doorsnede van beide volle ρ-maten is weer een volle maat en wanneer we dus voor Γ_ρ zoo'n $\odot$ uit de doorsnede nemen, geldt daarvoor tevens:

$$\left|\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz\right| \leq 2\pi M\rho \to 0 \text{ als } \rho \to 0$$

en dus in verband met het voorgaande: $A_1 = 0$ en dus:

$$A_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

§ 3. Komen we thans tot de stelling van Carleman.
Gegeven:

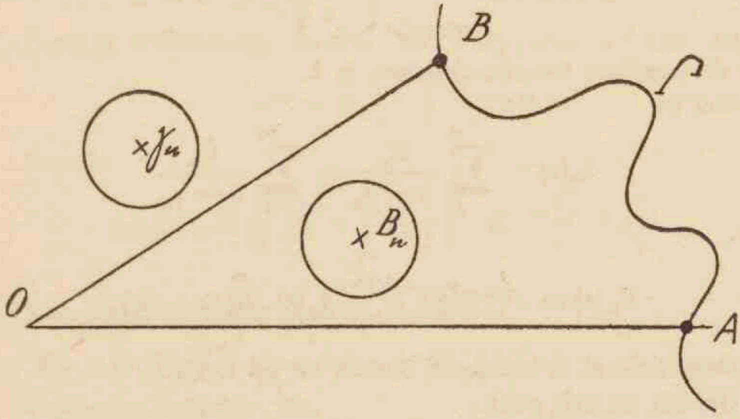
$$|A_n| < e^{-n^{1+\varepsilon}},\ \varepsilon < 0$$

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{A_n}{z - \alpha_n} = 0$$

op een rectificeerbare kromme Γ. Γ ligt op de puntverzameling E, die ontstaat uit het z-vlak door daaruit te verwijderen de cirkels om α_n met stralen:

$$\frac{l}{n^\alpha},\ l > 0,\ \alpha > 1.$$

Te bewijzen: $f(z) = 0$ bijna overal.



Bewijs: Neem een punt $O(\zeta_0)$ op E en trek door O twee rechten, die geen der genoemde cirkels snijden en van Γ een boog AB afsnijden.

De rij der α_n vervalt in twee deelen:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots . \text{ binnen OABO}$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots . \text{ buiten OABO.}$$

Zij thans z een punt binnen OABO en buiten de cirkels. Dan is:

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{B_n}{z - \beta_n} + \sum_1^\infty \frac{C_n}{z - \gamma_n}.$$

Er is blijkbaar een stijgende functie N(n) zoodanig, dat:

$$\beta_n = \alpha_{N(n)}.$$

Zij thans θ_0 de hoek, dien de bisectrice van $\angle$ AOB maakt met de reëele as en zij verder $\angle \mathrm{AOB} = k \, . \, \pi$.

De functie:

$$e^{\sigma\left[(z-\zeta_0)\, e^{-i\theta_0}\right]^{1/k}} \quad (\sigma > 0)$$

heeft de absolute waarde 1 als z ligt op OA of OB.

Immers daar is:

$$z - \zeta_0 = e^{i\theta_0 \pm \frac{k\pi i}{2}} \, . \, |z - \zeta_0|$$

en dus is de functie daar:

$$e^{\sigma |z-\zeta_0|^{\frac{1}{k}} \, . \, e^{\pm \frac{i\pi}{2}}}$$

en de absolute waarde daarvan is 1.

Stel nu:

$$f_m(z) = \sum_{1}^{m}{}_{n} \frac{B_n}{z - \beta_n} + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{C_n}{z - \gamma_n}$$

en:

$$F_m(z) = e^{\sigma\left[(z-\zeta_0)\, e^{-i\theta_0}\right]^{\frac{1}{k}}} \, . \, f_m(z) \, . \prod_{1}^{m}{}_{n} (z - \beta_n) \, .$$

Deze functie is holomorf binnen en op OABO.

Op OA en OB geldt:

$$|\, f_m(z) \,| < \frac{1}{l} \sum_{1}^{\infty}{}_{n} |A_n| \, . \, n^{\alpha} = \frac{M}{l}$$

en is L de diameter van het gebied, dan is daar dus:

$$|\, F_m(z) \,| < \frac{M}{l} \, . \, L^m .$$

In alle punten van AB is verder, daar $f(z) = 0$ op Γ

$$|\, f_m(z) \,| = \left| \sum_{m+1}^{\infty}{}_{n} \frac{B_n}{z - \beta_n} \right| < \frac{R_{N(m)}}{l}$$

waarin:

$$R_N = \sum_{N+1}^{\infty}{}_{n} n^{\alpha} \, . \, |A_n| \, .$$

We krijgen ten slotte de volgende schatting, die geldt op OABO en dus binnen OABO:

$$| F_m(z) | < \frac{M}{l} . L^m + \frac{e^{\sigma . L^{\frac{1}{k}}} . R_n}{l} . L^m .$$

Daaruit volgt weer:

$$| f_m(z) | < \frac{e^{-\sigma a}}{l} \left(\frac{L}{l}\right)^N \{M + e^{\sigma b} . R_N\} (N!)^\alpha .$$

Hierin is:

$$a = R.D.[(z - \zeta_0)\, e^{-i\theta_0}]^{\frac{1}{k}} \quad \text{en} \quad b = L^{\frac{1}{k}}.$$

De nog willekeurige waarde van σ bepalen we zoo, dat:

$$e^{a\sigma} = N . \left(\frac{L}{l}\right)^N . (N!)^\alpha .$$

Dan is:

$$| f_m(z) | < \frac{1}{N} \left[M + \left\{ N \left(\frac{L}{l}\right)^N . (N!)^\alpha \right\}^{\frac{b}{a}} . R_N \right] .$$

§ 4. Gaan we thans even R_N schatten.

$$R_N < e^{-(N+1)^{1+\varepsilon}} (N+1)^\alpha + e^{-(N+2)^{1+\varepsilon}} (N+2)^\alpha + \ldots .$$

Verder is duidelijk, dat:

$$e^{-(N+1)^{1+\varepsilon}} (N+1)^\alpha$$
$$= e^{-(N+1)^{1+\varepsilon} + \alpha \log (N+1)} < e^{-(N+1)^{1+\varepsilon} + (N+1)^\delta}$$

en dit laatste is weer $\sim e^{-(N+1)^{1+\varepsilon'}}$ $\varepsilon' > 0$.

Ook is duidelijk, dat de reeks met algemeenen term $e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}}$ convergeert. De partieele sommen Σ_N daarvan zijn begrensd en $< K$.

Passen we thans de transformatie van Abel toe.

$$e^{-(N+1)^{1+\varepsilon'}} + e^{-(N+2)^{1+\varepsilon'}} + \ldots = e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} . e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} + \ldots$$
$$= (\Sigma_{N+1} - \Sigma_N)\, e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} + (\Sigma_{N+2} - \Sigma_{N+1})\, e^{-\frac{1}{2}(N+2)^{1+\varepsilon'}} + \ldots$$
$$= - \Sigma_N . e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} + \Sigma_{N+1} [e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} - e^{-\frac{1}{2}(N+2)^{1+\varepsilon'}}] + \ldots$$

$$< K\,.\,e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} + K\,[e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} - e^{-\frac{1}{2}(N+2)^{1+\varepsilon'}} + e^{-\frac{1}{2}(N+2)^{1+\varepsilon'}}\,..]$$

$$= 2\,K\,.\,e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}}.$$

Hiervan gebruik makende, vinden we $\left(\frac{b}{a} = d \text{ stellende}\right)$:

$$N^d.\left(\frac{L}{l}\right)^{d.N}.\left(N!\right)^{\alpha.d}.\ R_N <$$

$$N^d\left(\frac{L}{l}\right)^{d.N}(N!)^{\alpha.d}.\ 2\,K\,.\,e^{-\frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}} =$$

$$= O\left\{e^{d.\log N + d.N.\log\frac{L}{l} + \alpha.d.N\log N - \alpha.d.N + \frac{\alpha.d}{2}\log N - \frac{1}{2}(N+1)^{1+\varepsilon'}}\right\}$$

$= O\,(1)$ daar de laatste term in de exponent het op den duur wint van alle andere samen.

§ 5. Van dit resultaat gebruik makende vinden we dus:

$$f_m(z) = O\left(\frac{1}{N}\right) \text{ en dus } \lim_{m\to\infty} f_m(z) = f(z) = 0.$$

Laten we thans l tot nul naderen, dan blijft er een volle maat van het z-vlak over en in ieder punt daarvan is $f(z) = 0$ daar zoo'n punt z altijd in te sluiten is in een figuur van den vorm OABO.

Gebruik makende van de stelling in § 3 kunnen we thans dus werkelijk besluiten tot

$$A_n = 0;\ n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

HOOFDSTUK V

OVER DE CONSTANTE VAN J. WOLFF

§ 1. Door J. Wolff [X] is de volgende merkwaardige eigenschap ontdekt:

Zij gegeven een rectificeerbare kromme Γ met diameter d en een reeks $\sum \frac{A_n}{z - \alpha_n}$, die op die kromme uniform convergeert tot 1.

De ontdekking is nu deze:

Als $S = \Sigma\, |A_n|$, dan is er een constante C, zoodanig dat

$$S \geq C.\, d.$$

Bewijs: Daar de diameter d is bestaan er op Γ twee punten A en B wier lineaire afstand juist d is. Uit de definitie van het begrip diameter volgt dan, dat Γ geheel ligt binnen de lens omsloten door de twee cirkels, die A en B tot middelpunten en d tot straal hebben.

Noem den $\odot$ om A: C.

Dan is weer, als F(z) de bekende beteekenis heeft:

$$\iint_C F(z)\ dxdy \leq 4\pi.\ d.\ S$$

Voer nu vanuit A poolcoördinaten in. Dan is dus:

$$\iint_C F(z)\ dxdy = \int_0^d \int_0^{2\pi} F(z).\, r.\, dr.\, d\varphi \leq 4\pi.\, d.\, S$$

Nu is $\int_0^{2\pi} r.\ F(z).\ d\varphi$ een functie van r b.v. $\psi(r)$.

Stel nu eens, dat van B tot het midden van $\overline{AB}$, die functie $\psi(r)$ overal $> 8\pi$ S was. Dan krijgen we een tegenspraak. Immers dan was: $\int\int_C F(z)\,dxdy > 8\pi S.\,\frac{1}{2}d > 4\pi.\,d.\,S.$

Dus: er is een ρ zoodanig, dat $\frac{1}{2}d < \rho \leq d$ zoodat:

$\int_0^{2\pi} \rho F(z)\, d\varphi \leq 8\pi$ S (er wordt geïntegreerd over cirkel ρ)

Evenzoo is: $\int_0^d r\, F(z)\, dr$ een functie van φ b.v. $\chi(\varphi)$. Neem een willekeurig φ-vak ter grootte π en stel dat overal op dat vak:

$$\chi(\varphi) > 4.\ d.\ S.$$

Ook dat kan niet. Immers dan was weer:

$$\int\int_C F(z)\ dxdy > 4.\ d.\ S.\ \pi.$$

Op ieder vak van de beschouwde soort is dus een φ, waarvoor

$$\int_0^d F(z)\ r\ dr < 4.\ d.\ S$$

Neem nu voor het φ-vak, dat, wat bepaald wordt door de raaklijn in A aan den $\odot$ met B als middelpunt en dat Γ niet bevat. Er is dus een straal l in dat vak, die Γ alleen in A snijdt en waarop

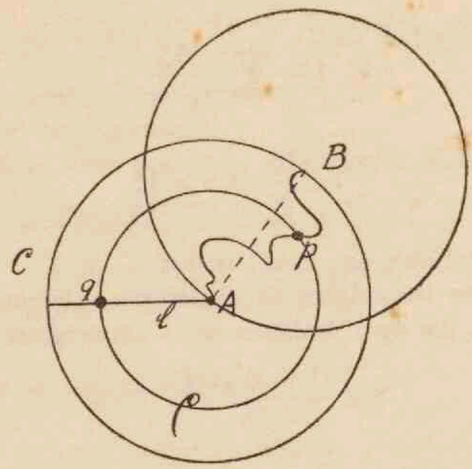
$$\int_0^d r\ F(z)\, dr < 4.\ d.\ S.$$

Zij q het punt waar $l \odot \rho$ snijdt en p het eerste snijpunt van cirkel ρ met Γ (zie fig.).

Beschouw:

$$\int_{ApqA} \sum_1^{\infty}{}_k \frac{A_k\,(z - A)}{z - \alpha_k}\, dz = 2\pi i\ \Sigma'\ (\alpha_k - A)A_k$$

waarbij de sommatie uitgestrekt wordt over alle polen, die binnen de gesloten contour vallen. Beschouw de diverse stukken, waarin de integraal uiteenvalt.



$$\left| \int_A^P (z-A)\ f(z)\ dz \right| = \left| \int_A^P (z-A)\ dz \right| = \tfrac{1}{2}\ |z-A|^2 > \tfrac{1}{8}\ d^2$$

$$\left| \int_p^q (z-A)\, f(z) dz \right| \leq \int_p^q |z-A|\ |f(z)|\ \rho\, d\varphi \leq \rho \int_p^q \rho\, F(z)\, d\varphi \leq 8\pi . d . S$$

$$\left| \int_q^A (z-A)\, .\, f(z) .\ dr \right| \leq \int_q^A |z-A| .\ F(z)\ dr < 4.\ d.\ S.$$

Dit alles samen levert op:

$$\tfrac{1}{8}\, d^2 \leq 8\pi .\ d.\ S + 4.\ d.\ S + 2.\ \pi .\ S.\ d \text{ of:}$$

$$S \geq \frac{d}{80\pi + 32}.$$

§ 2. Neem eens voor Γ een cirkel met middelpunt γ en straal $\tfrac{1}{2}$d. Dan is:

$$2\pi i = \int_\Gamma \frac{dz}{z-\gamma} = \int_\Gamma \frac{f(z)\ dz}{z-\gamma} = \sum \int_\Gamma \frac{A_k\, dz}{(z-\gamma)\ (z-\alpha_k)}$$

Men berekent gemakkelijk. dat de laatste som gelijk is aan $2\pi i \sum' \frac{A_k}{\alpha_k - \gamma}$, waarbij de sommatie uitgestrekt moet worden over alle α_k, die buiten Γ liggen.

Dus:

$$1 = \sum{}' \frac{A_k}{\alpha_k - \gamma}$$

en dus

$$1 \leq \frac{S}{\frac{1}{2}d} \text{ of } \underline{S \geq \tfrac{1}{2}d.}$$

In het geval van een cirkel is dus: $C \geq \frac{1}{2}$.

Maar maken we volgens de algemeene constructie uit Hfst. II een reeks, die op Γ uniform tot 1 convergeert, dan weten:

$$S \leq \frac{(1+\varepsilon).\,\pi.\,d}{2\pi} \qquad \varepsilon > 0$$

of

$$S \leq \frac{(1+\varepsilon)\,.\,d}{2}$$

en daar ε willekeurig was dus: $S \leq \frac{d}{2}$ en daarmede is aangetoond, dat voor den cirkel de constante $\frac{1}{2}$ is.

§ 3. Door Denjoy [XI] is een andere elementaire manier aangegeven om de stellingen van Wolff te bewijzen.

Hij beschouwt:

$$U(\alpha, \beta, \zeta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(z-\alpha\;(\beta - z)}{z-\zeta}\,dz$$

genomen langs Γ.

Blijkbaar mag men de integratie langs Γ vervangen door een integratie langs $\overline{\alpha\beta}$ als $|\zeta - \alpha| > 2d$ en dan is dus:

$$|U| < \frac{d^3}{|\zeta - \alpha|} \text{ of } \frac{d^3}{|\zeta - \beta|}$$

al naar gelang $|\zeta - \alpha|$ of $|\zeta - \beta|$ de kleinste is.

Beschouw nu even:

$$\varphi(u) = \int_{u}^{1} \frac{(1-z)\;(z-u)}{z}\,dz \text{ voor } |u| \leq 1.$$

Hier komt uit: $u \log u + \frac{1-u^2}{2}$. Voor de logarithme kiezen we de hoofdwaarde.

De integraal is geborneerd.

Men kan b.v. voor een ruwe schatting stellen: $u = 1 - v$

$(|v| < 1)\ (1-v) \log (1-v) = -v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{v^4}{12} + \cdots$

en dit wordt gemajoreerd door $1 + \frac{\pi^2}{6}$.

Zoodat we ten slotte vinden:

$$|\varphi(u)| < 3 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Door de transformatie $t = \frac{\zeta - z}{\zeta - \alpha}$ of $t = \frac{\zeta - z}{\zeta - \beta}$ vindt men nu gemakkelijk:

$$U(\alpha, \beta, \zeta) = -(\zeta-\alpha)^2 \varphi\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right) = (\zeta-\beta)^2 . \varphi\left(\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\beta}\right)$$

Nu wilden we hebben $|u| \leq 1$ en dus gebruiken we de 1e transformatie als $|\zeta-\beta| \leq |\zeta-\alpha|$ en de 2e als $|\zeta-\beta| \geq |\zeta-\alpha|$ Is dus $|\zeta-\alpha| \leq 2d$ dan vinden we de schatting:

$$|U(\alpha, \beta, \zeta)| < 4d^2 \left(3 + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

en is $|\zeta - \alpha| > 2d$ dan geldt dit blijkbaar a fortiori.

§ 4. Zij thans weer op boog $\alpha\beta$ uniform $f(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{A_k}{z-\alpha_k} = 1$.

Dan is:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (z-\alpha)\ (\beta-z)\ dz = \sum A_k \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(z-\alpha)\ (\beta-z)}{z-\alpha_k} dz.$$

en dus:

$$\frac{d^3}{6} \leq \sum |A_k| \,.\, 4d^2\left(3 + \frac{\pi^2}{6}\right)$$

of:

$$S \geq \frac{d}{24\left(3 + \frac{\pi^2}{6}\right)} = \frac{d}{4\ (18 + \pi^2)}$$

waarmee de stelling van Wolff opnieuw is aangetoond.

LITERATUURLIJST

I: H. Poincaré, Acta Soc. Sc. Fennicae, deel XIII, 1883.

II: T. J. Stieltjes, Bull. des Sc. Math. 2e serie, deel XI, 1887, pg. 46.

III: E. Goursat, Ibid. pg. 109.

IV: A. Pringsheim, Math. Ann. deel 42 en 44.

V: E. Borel, Théorie des fonctions.

VI 1, 2: J. Wolff, C. R. de l'ac. des Sc. de Paris deel 173, 1921 pg. 1056—1058 en 1327—1328.

VII: A. Denjoy, Bull. de la Soc. Math. de France, deel LII, 1924, pg. 418—434.

VIII: A. Denjoy, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, deel L, 1926 pg. 1—93.

IX 1, 2: J. Wolff, C. R. deel 185, 1927, pg. 1251.
C. R. deel 186, 1928, pg. 62.

X: J. Wolff, C. R. deel 186, 1928 pg. 565.

XI: A. Denjoy, C. R. deel 186, 1928 pg. 1191.

XII: T. Carleman, C. R. 1922, pg. 588.

XIII: C. Caratheodory, Reelle funktionen pg. 422.

STELLINGEN

I

Wanneer bij het op blz. 12 en vlg. besproken voorbeeld de reeks $\sum \frac{u_k}{\alpha_{1k} - 1}$ divergeert, dan is de niet-voortzetbaarheid der reeks $\sum \frac{A_m}{z - \alpha_m}$ zonder machtreeksontwikkeling gemakkelijk aan te toonen.

II

Voor de stralen r_k der cirkels beschouwd op blz. 15 geldt: Σr_k is divergent.

III

De door A. Denjoy op blz. 80 van Rend. di Pal (1926) gedefinieerde functies $\chi_n(z)$ kunnen verkregen worden door een soortgelijke methode als de „balayage" van Poincaré.

IV

Het bewijs van de stelling voorkomende op blz. 25 kan door rechtstreeksche toepassing van de regels der I. R. vereenvoudigd worden.

V

De op blz. 36 gegeven voorwaarde: $| A_n | < e^{-n^{1+\varepsilon}}$ kan door een scherpere vervangen worden:

nl. $| A_n | < e^{-n.\varphi(n)}$, $\varphi(n) \rightarrow \infty$ monotoon.

De kloof tusschen $| A_n | < e^{-n^{1-\varepsilon}}$ en $| A_n | < e^{-n.\varphi(n)}$ is nog te overbruggen.

VI

De door J. G. van de Putte behandelde sommatiemethode (Eenige sommatiemethoden, diss. Utrecht 1927, Hoofdstuk I) is een bijzonder geval van de door O. Perron (Math. Z. 1920) opgestelde methode. Men kieze voor de daar beschouwde sommatorische functies:

$$\varphi_k(x) = 0 \text{ voor } 0 \leq x < k$$
$$= \frac{A_{l-k}}{A_l} \text{ voor } l \leq x < l+1$$

waarin $A_{n+1} > A_n$ en $\frac{A_{n+1}}{A_n} \to 1$ monotoon.

VII

Is $\sum_0^\infty a_n$ sommeerbaar tot som L volgens de in de vorige stelling genoemde methode en is $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, dan is $\sum_1^\infty a_n$ sommeerbaar tot som $L - a_0$.

VIII

De stelling v. Ham-Cayley is bijna triviaal als de λ's verschillend zijn. Zijn er gelijke λ's, dan passe men limietovergang toe. Ook de bewering van van Lier (N. A. v. W. deel XVIII, 2e reeks, 3e stuk) volgt eenvoudig met behulp van een basis:

$$y_1 = \lambda_1 x_1$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + \lambda_1 x_2$$

IX

In het door D. Pompeiu (N. A. v. W. 2e reeks, deel X blz. 353) gegeven voorbeeld, voldoet de reeks $\Sigma \mid A_k \mid$ niet aan de door E. Borel (théorie des fonctions, blz. 95) opgestelde voorwaarde.

X

In de door S. Mandelbrojt op blz. 150 van zijn werk „Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions” gegeven stelling, is de continuiteit van f (x) in α_1 en β_1 niet noodig voor het singulier zijn der functie Θ (z) in $e^{i\alpha_1}$ en $e^{i\beta_1}$.

XI

Het bewijs van de in hetzelfde boek op blz. 146 voorkomende stelling is goeddeels overbodig. De stelling is een onmiddellijk gevolg van het spiegelingsprincipe van Schwarz.

XII

De door T. Carleman gegeven voorwaarde

„$\sum \frac{\log \log \frac{1}{|A_m|}}{\log \frac{1}{|A_m|}}$ convergent" (zie: les fonctions quasi-analytiques, blz. 98) is niet noodzakelijk. Vergel. J. Wolff, C. R. Febr. 1936.

Wanneer gegeven is $|A_m| \rightarrow 0$ monotoon, dan is de voorwaarde van Carleman een bijzonder geval van die van J. Wolff.

XIII

Het spreken van „coupure artificielle" en „coupure essentielle" (zie: J. Hadamard, La série de Taylor etc. pg. 22) heeft geen zin, daar de taak der coupure in beide gevallen niet te vergelijken is.

XIV

Het door L. Bieberbach gegeven bewijs van een stelling van Löwner (L. d. F. II blz. 124) is onvolledig (zie ook G. Julia, Principes géom. d'analyse blz. 93–95).

XV

In vele vraagstukken betrekking hebbende op meetkundige waarschijnlijkheid laat de strengheid van de oplossing te wenschen over.