Kinematische projectie

https://hdl.handle.net/1874/323050

KINEMATISCHE PROJECTIE

J. N. BOUMAN

KINEMATISCHE PROJECTIE

Diss Utrecht 1937

KINEMATISCHE PROJECTIE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. W. E. RINGER, HOOGLERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DE SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 26 APRIL 1937, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JOHAN NICOLAAS BOUMAN

GEBOREN TE AMSTERDAM

1937

DRUKKERIJ Fa. SCHOTANUS & JENS — UTRECHT

AAN MIJN MOEDER.
AAN DE NAGEDACHTENIS
VAN MIJN VADER.

Het contact met U, die ik mijn leermeesters mag noemen, heeft mij in mijn studietijd in velerlei opzicht zeer verrijkt. Voor hetgeen U daartoe hebt willen bijdragen, zij hier mijn oprechte dank gebracht.

Hooggeleerde Barrau, Hooggeachte Promotor, U waart het vooral, die van de aanvang af mijn belangstelling wist te wekken en te verdiepen. Het is mij dan ook een bijzonder voorrecht, in dit proefschrift een onderwerp te mogen behandelen, dat zó zeer Uw stempel draagt.

INLEIDING

Bij de behandeling van kinematische vraagstukken kan men twee methoden onderscheiden, die in de geschriften worden aangewend: de meetkundige en de analytische.

Enkele schrijvers houden zich streng aan één behandelingswijze en bereiken aldus eenheid in hun betoog. Als voorbeelden zijn te noemen de werken van BURMESTER [1]) en SCHOENFLIES [2]). De meesten laten echter dit ideaal los ter wille van de eenvoud der bewijsvoering en het sneller bereiken van het doel. Voor een gewoon leerboek, dat in de Kinematica bedoelt in te leiden, ware zuiverheid in deze moeilijk vol te houden.

In het volgende zal voornamelijk gebruik gemaakt worden van de analytische methode. Daarbij wordt uitgegaan van een afbeelding, door J. A. BARRAU ontwikkeld in zijn verhandeling, getiteld: „Mouvements algébriques dans le plan" [3]). De bewegingen van een vlak stelsel worden hierbij afgebeeld op krommen in een vier-dimensionale ruimte. Op enkele der daar bewezen stellingen zal een enigszins ander licht worden geworpen.

In zijn artikel beperkt Prof. Barrau zich, zoals de titel aangeeft, tot algebraïsche bewegingen, dat wil zeggen bewegingen, wier beeldkromme algebraïsch is. In een eerste hoofdstuk zal nu deze restrictie worden losgelaten en het tijdselement meer naar voren worden gebracht. Hoe ver-

---

1) D. Burmester, Lehrbuch der Kinematik.

2) A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung.

3) J. A. Barrau, Mouvements algébriques dans le plan; Journal de Mathématiques pures et appliquées, 7e série tôme 3 (hierna aan te duiden als Mouv. alg.).

scheidene bekende eigenschappen uit de Kinematica uit eigenschappen in de beeldruimte volgen, komt zo duidelijk tot uiting.

In een tweede hoofdstuk zal getracht worden, in analogie aan het eerste, de afbeelding uit te breiden voor bewegingen van een vast lichaam in een (Euclidische) drie-dimensionale ruimte. Enige der stellingen, die voor het vlakke stelsel zijn afgeleid, zullen blijken mutatis mutandis ook voor dit geval te gelden.

Het is nog mogelijk, een Kinematica op te bouwen voor niet-Euclidische of hoger dimensionale ruimten. Daarmede houdt zich dit proefschrift niet bezig. Het blijft bij de meest gebruikelijke vormen van Kinematica, die in het Euclidische platte vlak en in de Euclidische drie-dimensionale ruimte.

Het leerboek, waarnaar steeds verwezen zal worden, is het werk van Prof. Schuh [1]), dat voor ons land als het nieuwste op dit gebied kan gelden.

[1]) Dr. F. Schuh, Leerboek der Theoretische Mechanica deel I, 1e en 2e stuk (hierna aan te duiden als Theor. Mech. I, 1 of I, 2).

EERSTE HOOFDSTUK

KINEMATICA VAN EEN VLAK STELSEL

§ 1. *Bicylinder en Representanten.*

Strikt genomen is een vlak stelsel een aantal star met elkaar verbonden punten, welker beweging men bestudeert. Om de voordelen, hieraan verbonden, denken we ons het vlakke stelsel uitgebreid over een heel vlak [1]. We krijgen zo naast het vaste vlak V een bewegend vlak v. Op elk moment kunnen we de stand van v ten opzichte van V beschrijven door de transformatie, die v in V overvoert:

$$\begin{aligned} X &= \quad c\,x + sy + a \\ Y &= -\,s\,x + cy + b \end{aligned} \tag{1}$$

of door de inverse:

$$\begin{aligned} x &= \quad c'\,X + s'\,Y + a' \\ y &= -\,s'\,X + c'\,Y + b' \end{aligned} \tag{1'}$$

Hierin zijn X en Y coördinaten in V bij een tevoren gekozen, rechthoekig assenstelsel; x en y evenzo in v. De vier variabelen c, s, a en b vat J. A. Barrau op als coördinaten in een vier-dimensionale (affiene) beeldruimte [2]. Elk punt hiervan stelt een „stand" van v voor, mits het gelegen is op de „bicylinder"

$$c^2 + s^2 = 1 \tag{2}$$

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 159.

[2]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no 1.

Laat men het vlak v over V bewegen, dan zullen op elk moment de variabelen c, s, a en b een waarde aannemen, afhankelijk van de tijd t. Bij de functies $c(t), s(t), a(t), b(t)$ willen we analytische moeilijkheden vermijden. Ondersteld wordt, dat ze continue afgeleiden bezitten van zo hoge orde als nodig zal blijken.

In de vier-dimensionale beeldruimte stelt

$$\begin{cases} c = c(t) \\ s = s(t) \\ a = a(t) \\ b = b(t) \end{cases}$$

een kromme voor, de „representante" der beweging. Elke representante ligt natuurlijk op de bicylinder (2). De aandacht wordt nog gevestigd op de scheve vierzijde, waarin de bicylinder de kwadriek

$$\begin{cases} c^2 + s^2 + a^2 + b^2 = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

in het oneindige snijdt (h is de homogeen makende variabele), namelijk:

$$\begin{cases} c + i\,s = 0 \\ a + i\,b = 0 \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} c + i\,s = 0 \\ a - i\,b = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} c - i\,s = 0 \\ a + i\,b = 0 \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} c - i\,s = 0 \\ a - i\,b = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Vooral de beide rechten (4) en (5) zullen als „cyclische rechten" een rol spelen in volgende paragrafen.

§ 2. *Kinematische Transformatie* [1]).

De transformaties (1) of (1′) bepalen de stand van v ten opzichte van V bij bepaalde keuze van de assenstelsels in beide vlakken. Om hieraan niet gebonden te zijn, gaan we de invloed na van een andere keuze. Een nieuw assenstelsel (coördinaten x', y') in het bewegende vlak zij als volgt bepaald:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \sigma y + \alpha \\ y' &= -\sigma x + \gamma y + \beta \end{aligned}$$

of invers:

$$\begin{aligned} x &= \gamma' x' + \sigma' y' + \alpha' \\ y &= -\sigma' x' + \gamma' y' + \beta' \end{aligned}$$

Evenzo in het vaste vlak:

$$\begin{aligned} X' &= \Gamma X + \Sigma Y + A \\ Y' &= -\Sigma X + \Gamma Y + B \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} X &= \Gamma' X' + \Sigma' Y' + A' \\ Y &= -\Sigma' X' + \Gamma' Y' + B' \end{aligned}$$

Hierdoor treedt in de kinematische beeldruimte een transformatie op van de coördinaten *c, s, a, b*. Deze „kinematische transformatie" wordt gevonden door het verband te leggen tussen X', Y' en x', y'.

$$\begin{aligned} X' &= \mathbf{c}\, x' + \mathbf{s}\, y' + \mathbf{a} \\ Y' &= -\mathbf{s}\, x' + \mathbf{c}\, y' + \mathbf{b} \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} x' &= \mathbf{c}' X' + \mathbf{s}' Y' + \mathbf{a}' \\ y' &= -\mathbf{s}' X' + \mathbf{c}' Y' + \mathbf{b}' \end{aligned}$$

Alle optredende grootheden *c, s, a, b*; *c′, s′* .... enz. voldoen aan de relatie (2).

Verder is:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (\Gamma\gamma' - \Sigma\sigma')\,c - (\Gamma\sigma' + \Sigma\gamma')\,s \\ \mathbf{s} &= (\Gamma\sigma' + \Sigma\gamma')\,c + (\Gamma\gamma' - \Sigma\sigma')\,s \\ \mathbf{a} &= (\Gamma\alpha' + \Sigma\beta')\,c + (\Gamma\beta' - \Sigma\alpha')\,s + \Gamma a + \Sigma b + A \\ \mathbf{b} &= (\Gamma\beta' - \Sigma\alpha')\,c - (\Gamma\alpha' + \Sigma\beta')\,s - \Sigma a + \Gamma b + B \end{aligned} \qquad (7)$$

[1]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 3.

Door (7) wordt de gezochte transformatie in de beeldruimte aangegeven. De inverse wordt volgens dezelfde manier gevonden; de coëfficiënten daarvan blijken dezelfde als die van (7), waarbij echter geaccentueerde grootheden in ongeaccentueerde moeten worden verwisseld en omgekeerd.

De groep der kinematische transformaties is een ondergroep der affiene groep. In het oneindige blijft invariant een figuur op de kwadriek

$$c^2 + s^2 + a^2 + b^2 = 0,$$

namelijk de rechten (4) en (5). Met de rechten (3) en (6) liggen deze op de invariante bicylinder (2). De beide laatste lijnen worden door de groep niet invariant gelaten, reden waarom ze voor ons doel van minder belang zijn dan de eerste twee, de cyclische rechten. De punten op (4) en (5) hebben tot coördinaten respectievelijk

$$\{\lambda,\ \lambda i,\ \mu,\ -\mu i\} \quad \text{en} \quad \{\lambda,\ -\lambda i,\ \mu,\ \mu i\} \tag{8}$$

λ en μ hebben in het algemeen een complexe verhouding.

Over het lijnenpaar (4) en (5) ligt een lineaire congruentie van rechte lijnen.

Twee gevallen doen zich hier voor:

$$1^0.\quad \lambda \neq 0$$
$$2^0.\quad \lambda = 0$$

1^0. In (8) stellen we $\lambda = 1$; μ wordt dan $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$, waarin μ_1 en μ_2 reëel zijn. De bedoelde congruentie van rechten wordt nu

$$\begin{cases} a = \mu_1 c + \mu_2 s \\ b = \mu_2 c - \mu_1 s \end{cases} \quad \text{of:}$$

$$\begin{cases} Pc + Qs + Ra = 0 \\ Qc - Ps + Rb = 0 \end{cases} \quad [1]$$

[1] Mouv. alg. no. 2: „système droit".

$R \neq 0$, kan dus steeds $= 1$ gesteld worden.

De rechten $\{P, Q, R\}$, of $\{P, Q, 1\}$ noemen we „centralen". De reden hiervoor zal in de volgende paragraaf duidelijk worden.

Tot de congruentie over de cyclische rechten behoort nog de toprechte van de bicylinder:

$$\begin{cases} c = 0 \\ s = 0 \end{cases} \qquad (h = 0); \tag{9}$$

die het geval 2^0 vertegenwoordigt.

Door kinematische transformatie gaan de centralen in elkaar over; de toprechte (9) echter blijft invariant, want ook het hele asvlak van de bicylinder:

$$\begin{cases} c = 0 \\ s = 0 \end{cases} \tag{10}$$

wordt in zichzelf getransformeerd. De nieuwe coördinaten van de punten van (10) komen daarbij geheel overeen met de nieuwe coördinaten in V; immers de kinematische transformatie van het asvlak geschiedt volgens:

$$\begin{aligned} a' &= \quad \Gamma a + \Sigma b + A \\ b' &= - \Sigma a + \Gamma b + B \end{aligned}$$

a neemt dus blijkbaar de rol over van de coördinaat X in V, b die van Y.

§ 3. *Kinematische Projectie.*

Bij een willekeurige beweging $c(t)$, $s(t)$, $a(t)$, $b(t)$, tekent zich de baankromme van een punt $\{x_1, y_1\}$ van v in V als volgt af:

$$\begin{cases} X(t) = \quad x_1\, c(t) + y_1\, s(t) + a(t) \\ Y(t) = - x_1\, s(t) + y_1\, c(t) + b(t) \end{cases} \tag{11}$$

De baankromme van de oorsprong van v is zo:

$$\begin{cases} X(t) = a(t) \\ Y(t) = b(t) \end{cases} \tag{12}$$

Hiermede vergelijken we de kromme in het asvlak (10),

$$\begin{cases} a = a(t) \\ b = b(t) \end{cases} \tag{13}$$

(13) is gelijk en gelijkvormig aan de baankromme (12); indien we althans het asvlak als een Euclidisch vlak opvatten. Reeds is de nauwe betrekking tussen V en het asvlak gebleken in § 2. Het zal een goede gedachte blijken, beide vlakken incident te maken. Daarbij legge men de beide assen overeenkomstig op elkaar. Onderscheid tussen V en het asvlak zal verder niet meer gemaakt worden. De krommen (12) en (13) noemen we bijvoorbeeld identiek. Nu heeft (13) een merkwaardige eigenschap. Projecteert men de representante der beweging vanuit de rechte

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ h = 0 \end{cases} \tag{14}$$

op het vlak V, dan krijgt men juist (13); de lijn (14) is een rechte, behorend tot het stelsel centralen $\{P, Q, 1\}$ en wel het exemplaar $\{0, 0, 1\}$.

De oorsprong van v is een geheel willekeurig punt. Door een transformatie in v kan men elk ander punt $\{x_1, y_1\}$, welks baan men bestuderen wil, tot oorsprong maken. Daarbij treedt in de beeldruimte een kinematische transformatie op. Deze is bepaald als we ook nog onderstellen, dat het assenstelsel in V onveranderd blijft. Een punt met coördinaten $\{c, s, a, b, (h)\}$ in R_4 gaat over in $\{c', s', a', b', (h)\}$. De representante wordt de getransformeerde beeldkromme. V blijft, als asvlak beschouwd, punt voor punt invariant. In de nieuwe kinematische beeldruimte geldt bovenstaande eigenschap. Dus de baankromme van de nieuwe oorsprong is de projectie van de representante $\{c'(t), s'(t), a'(t), b'(t)\}$ uit de rechte

$$\begin{cases} a' = 0 \\ b' = 0 \\ h' = 0 \end{cases} \qquad (14')$$

Nu gaan we terugtransformeren. Het punt $\{0, 0, 1\}$ van het getransformeerde vlak v wordt het gewenste punt $\{x_1, y_1\}$; de representante komt op de oude plaats terug. De centraal (14') gaat over in een andere centraal $\{P, Q, 1\}$ (§ 2), en wel in:

$$\begin{cases} x_1\ c + y_1\ s + a = 0 \\ y_1\ c - x_1\ s + b = 0 \end{cases}$$

of de centraal $\{x_1, y_1, 1\}$!

De projecterende vlakken door de punten der representante blijven projecterende vlakken. Tenslotte blijft de baankromme, hun doorsnijding met V, op dezelfde plaats.

We vinden zo de stelling:

De projectie van de representante uit de centraal $\{x_1, y_1, 1\}$ *op het asvlak levert de baankromme van het punt* $\{x_1, y_1, 1\}$ *van het bewegende vlak.* [1])

Dit is ook direct in te zien. Daartoe brengen we vlakken aan door twee punten van de centraal $\{x_1, y_1, 1\}$, namelijk

$$P_1 : \{1, 0, -x_1, -y_1, 0\}$$
$$P_2 : \{0, 1, -y_1, +x_1, 0\}$$

en een willekeurig punt van de representante

[1]) vgl. J. A. B a r r a u, Mouv. alg. no. 9.

$$P : \{ c(t),\ s(t),\ a(t),\ b(t),\ 1 \}$$

door lineaire combinatie van P, P_1 en P_2.

Snijdt men zulke vlakken met V, dan komen als snijpunten de punten van de baankromme voor den dag:

$$\{ 0,\ 0,\ a(t) + x_1\, c(t) + y_1\, s(t)\ ;\quad b(t) - x_1\, s(t) + y_1\, c(t),\ 1 \}$$

vgl. (11). Alle baankrommen kunnen we zo krijgen, door één kromme, de representante, uit de bijbehorende centralen te projecteren.

Door de projectie wordt een correspondentie gevestigd tussen de punten van de representante en die op de centraal, die als top fungeert; aldus: met het door t_1 aangewezen punt van de representante correspondeert het punt

$$\{ c(t_1),\ s(t_1),\ x_1\, c(t_1) + y_1\, s(t_1),\ - x_1\, s(t_1) + y_1\, c(t_1),\ 0 \},$$

waarin de projecterende straal de centraal treft.

§ 4. *Projectie in de oneigenlijke Ruimte.*

Daar elke representante op de bicylinder ligt, heeft men in $h = 0$ slechts te doen met de oneigenlijke punten van (2). Reëel wordt $R_{3\,\infty}$ slechts in de toprechte (9) gesneden, de l_∞ van V. Snijdt dus een representante $h = 0$ reëel in P, dan levert projectie vanuit een willekeurige centraal op V natuurlijk steeds ditzelfde punt P. Alle baankrommen gaan dan door P. Ze hebben steeds alle dezelfde asymptotenrichting.

Heeft de representante imaginaire punten op de toprechte, dan kunnen we het bovenstaande daarop onveranderd toepassen. De baankrommen hebben dan alle dezelfde imaginaire asymptotenrichting.

De representanten kunnen imaginaire punten in $h = 0$ ook hebben buiten de toprechte. Het enige, wat voor het algemene geval dan gezegd kan worden is, dat de projecties imaginaire punten op (9) worden. Voor verschillende baankrommen krijgen we verschillende imaginaire asymptotenrichtingen.

Een bijzonder geval maakt hierop een uitzondering. Als de representante namelijk de cyclische rechten (4) en (5) snijdt, worden die snijpunten geprojecteerd in vaste punten op (9), namelijk de cirkelpunten I_1 en I_2 van V. De rechten (4) en (5) fungeren zelf als projecterende stralen. Dan gaan alle baankrommen door de cirkelpunten. Eventueel zijn uitgezonderd die baankrommen, die projecties zijn uit centralen, die de representante op (4) en (5) snijden.

§ 5. *Vlakke Representanten.*

Onder dit hoofd willen we enkele soorten van bewegingen samenvatten, wier representanten in vlakke ruimten liggen.

In de beschrijvende vlakken van de bicylinder vindt men de translaties [1]). Zo'n beschrijvend vlak is evenwijdig aan V. Projectie uit de centralen (een scheve parallelprojectie) levert dus baankrommen, die alle met elkaar congruent zijn [2]). Het eenvoudigste voorbeeld leveren de rechten op de bicylinder, de beelden der rechtlijnige translaties.

In vlakken, wier oneigenlijke rechte een centraal is, vinden we als doorsnede met de bicylinder een kegelsnede, die de cyclische rechten treft [3]). Volgens § 4 zijn de baankrommen kegelsneden door de cirkelpunten van V, cirkels. De centraal, die de oneigenlijke rechte van het representantevlak vormt, geeft de genoemde uitzondering. De projecterende vlakken, vanuit deze centraal vallen alle samen in het representantevlak. De baankromme reduceert zich tot een enkel punt, het punt, waar dit vlak V snijdt. Het blijft gedurende de be-

---

[1]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 10.
[2]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 163.
[3]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 11.

weging invariant; het is centrum van de *rotatie*. Alle vlakken door centralen snijden (2) in rotatierepresentanten.

Een willekeurig vlak snijdt de bicylinder eveneens volgens een kegelsnede [1]). In het algemeen vindt men als baankrommen ellipsen, want reële asymptotenrichtingen komen niet voor, tenzij we hier te doen hebben met een representante in een beschrijvend vlak, dus het eerst behandelde geval. Het algemene geval levert de representante van een elliptische beweging.

Om de rechtlijnige banen te krijgen, die ∞^1 punten van v beschrijven, gaat men uit van zulke centralen, die de oneigenlijke rechte l_∞ van het representantevlak snijden. Voor elk van deze rechten geldt, dat de projecterende vlakken in één ruimte R_3 liggen, de ruimte door de centraal en het vlak van de beeldkromme. De gezochte punten van v vindt men dus, door de ∞^1 centralen op te zoeken, die dat vlak snijden. De corresponderende punten in v liggen op een cirkel. De bovengenoemde centralen vormen namelijk in $h = 0$ het 2e graads regelvlak over l_∞ en de lijnen (4) en (5). De projecterende vlakken door P : $\{ c(t_1), s(t_1), a(t_1), b(t_1) \}$ vormen een 2e graads hypervlak, een kegel met P als top. Deze kegel gaat door de cyclische rechten. Snijfiguur met V is dus op het moment t_1 een cirkel; dus ook in v liggen de bewuste punten op een cirkel. De cirkels in V zijn natuurlijk voor alle momenten congruent. Alle gaan ze door eenzelfde punt van V, het snijpunt van het representantevlak. Een cirkel met dubbele straal raken ze zo alle inwendig aan.

De representanten, die gelegen zijn in vlakke drie-dimensionale ruimten, die geen raakruimte aan (2) zijn, zijn beeld van een beweging met één rechtgeleiding [2]). Het punt van v, dat de rechte baan beschrijft, correspondeert met de enige centraal, die geheel in de ruimte is gelegen. Deze centraal projecteert

---

[1]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 11, F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 49 en vv.

[2]) J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 12.

de representante volgens vlakken, die in deze R_3 blijven. De snijlijn van R_3 met V is de rechte baan.

§ 6. *Twee Standen.*

S_1 en S_2 mogen twee punten (standen) zijn op de bicylinder:

$$S_1 \equiv \{ c_1,\ s_1,\ a_1,\ b_1,\ 1 \}$$
$$S_2 \equiv \{ c_2,\ s_2,\ a_2,\ b_2,\ 1 \}$$

Ondersteld wordt, dat S_1 en S_2 niet in één beschrijvend vlak liggen. Door het oneigenlijke punt van $S_1 S_2$:

$$\{ c_1 - c_2,\ s_1 - s_2,\ a_1 - a_2,\ b_1 - b_2,\ 0 \}$$

gaat dan steeds een centraal $\{ P,\ Q,\ 1 \}$. Het vlak door $\{ P,\ Q,\ 1 \}$ en $S_1\ S_2$ bevat een rotatierepresentante, die zowel door S_1 als S_2 gaat. De bijbehorende rotatie doorloopt de beide standen S_1 en S_2. Het punt $\{ P,\ Q,\ 1 \}$ in v wijst het rotatiecentrum aan, in V dus

$$\{ a_1 + Pc_1 + Qs_1,\ b_1 + Qc_1 - Ps_1 \} \equiv$$
$$\equiv \{ a_2 + Pc_2 + Qs_2,\ b_2 + Qc_2 - Ps_2 \}$$

het punt, dat het gemiddelde rotatiecentrum voor S_1 en S_2 vormt [1]).

De hoek waarover gedraaid moet worden, om S_1 in S_2 over te voeren, vindt men terug als „hoek" tussen de beide raakruimten aan (2) in de beeldpunten. Hierbij denke men zich de beeldruimte Euclidisch. Het duidelijkst ziet men dit in, als men de raakruimten snijdt met een vlak „loodrecht" op V.

Liggen S_1 en S_2 in één beschrijvend vlak, dan is er geen rotatiecentrum, als boven aangegeven. De rechte $S_1\ S_2$ snijdt

---

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 164.

de toprechte van (2) en is zelf representante van de rechtlijnige translatie die S_1 in S_2 overvoert. Zulk een rechtlijnige translatie wordt wel een rotatie om een in het oneindige gelegen centrum genoemd [1]).

§ 7. *Algebraïsche Representanten.*

Over algebraïsche bewegingen heeft Prof. Barrau in zijn, in de inleiding genoemde, artikel uitvoerig gehandeld. Hier kan volstaan worden met de opmerking, dat de daar gevonden eigenschappen van baankrommen, wat graad en aantal dubbelpunten betreft [2]), onmiddellijk gevolg zijn van het feit, dat die baankrommen projecties zijn van de representante.

Ter illustratie nemen we een niet-strekbare stangenvierzijde [3]). De representante heeft de graad 6. Ze heeft drie schijnbare dubbelpunten, en een dubbelpunt in de cirkelpunten I_1 en I_2 van V. Bovendien ligt op elk der cyclische rechten nog een punt. De koppelkrommen hebben de graad 6. Volgens § 4 gaan ze drie maal door I_1 en I_2. Drie dubbelpunten keren in alle koppelkrommen terug.

§ 8. *Snelheid, Versnelling enz.*

In elk punt van de representante, $P : \{ c(t), s(t), a(t), b(t) \}$ brengen we een stelsel vectoren aan, die we door hun voerstralen aanduiden respectievelijk als $PP^{(1)}$, $PP^{(2)}$, $PP^{(3)}$, . . . $PP^{(k)}$, . . .; de 1e, 2e, 3e . . . k^e . . fluctievector. $PP^{(1)}$ noemen we de snelheidsvector in P, $PP^{(2)}$ de versnellingsvector, $PP^{(k)}$ de $(k-1)^e$ versnellingsvector [4]). $P^{(k)}$ is hierin het punt:

$$\{ c(t) + \overset{(k)}{c}(t);\ s(t) + \overset{(k)}{s}(t);\ a(t) + \overset{(k)}{a}(t);\ b(t) + \overset{(k)}{b}(t),\ 1 \}$$

$\dot{c}(t)$, $\ddot{c}(t)$, . . . $\overset{(k)}{c}(t)$ enz. zijn de 1e, 2e, . . . k^e afgeleiden van c naar t.

---

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 196.

[2]) Mouv. alg. no. 5 en 6.

[3]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 176.

[4]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 19.

Evenzo brengen we in een punt Q: $\{ X(t);\ Y(t);\ 1 \}$ van de baankromme een dergelijk stelsel vectoren $QQ^{(k)}$ aan:

$$Q^{(k)} \equiv \{ X(t) + \overset{(k)}{X}(t);\ Y(t) + \overset{(k)}{Y}(t);\ 1 \} \text{ of}$$

$$\begin{aligned} Q^{(k)} \equiv \{ & a(t) + x_1\, c(t) + y_1\, s(t) + \overset{(k)}{a}(t) + x_1\, \overset{(k)}{c}(t) + y_1\, \overset{(k)}{s}(t); \\ & b(t) - x_1\, s(t) + y_1\, c(t) + \overset{(k)}{b}(t) - x_1\, \overset{(k)}{s}(t) + y_1\, \overset{(k)}{s}(t);\ 1 \} \end{aligned}$$

De vector $PP^{(k)}$ gaan we nu projecteren uit de centraal $\{ x_1,\ y_1,\ 1 \}$. Het punt P geprojecteerd op V wordt Q. De projectie van $P^{(k)}$ gaat het eenvoudigst door linaire combinatie met de punten P_1 en P_2 uit § 3. Het blijkt dat die projectie $Q^{(k)}$ is. De vector $PP^{(k)}$ gaat dus voor alle baankrommen op het moment t in $QQ^{(k)}$ over. We vinden dus:

De projectie van de snelheid (op de representante) is de snelheid van de projectie (baankromme). De projectie van de versnelling is de versnelling van de projectie, enz.

$PP^{(1)}$, de snelheidsvector ligt langs de tangent in P. Door $P^{(1)}_{\infty}$: $\{ \dot{c},\ \dot{s},\ \dot{a},\ \dot{b},\ 0 \}$ gaat i.h.a. één centraal. Deze centraal bepaalt met P de representante van de rakende rotatie [1], namelijk als doorsnee met (2) van het vlak door P en die centraal. Men kan op 't moment t de rakende rotatie in P dezelfde snelheid geven, door ook aan P als punt van de rotatierepresentante de vector $PP^{(1)}$ toe te voegen. Dan is de snelheidsverdeling van de rotatie in het hele vlak V dezelfde als die van de oorspronkelijke beweging. In elk baanpunt is immers wegens de projectie van de ene vector $PP^{(1)}$, de snelheid $QQ^{(1)}$ voor beide bewegingen dezelfde.

Het hier gedefinieerde vlak van de rakende rotatie snijdt V in een punt, dat zal blijken de snelheidspool te zijn (§ 9).

[1] J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 18; F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 168.

Ligt $P^{(1)}_{\infty}$ op de toprechte van (2), dan hebben we te doen met een tijdelijke translatie; de snelheidspool ligt in het oneindige [1].

Het vlak door P, $P^{(1)}_{\infty}$ en $P^{(2)}_{\infty}$, het osculatievlak in P, bevat de osculerende elliptische representante. Men kan aan P, als beeldpunt van deze elliptische beweging, de vectoren $PP^{(1)}$ en $PP^{(2)}$ toevoegen, die beide in het osculatievlak liggen. De snelheidsverdeling èn de versnellingsverdeling is dan voor beide bewegingen in het hele vlak V gelijk.

Van de ∞^2 ellipsen, die de ∞^2 baankrommen osculeren, zijn er ∞^1, die in een rechte lijn zijn ontaard, (tijdelijke translatie). De bijbehorende punten in v liggen op een cirkel, die zich in V als de buigcirkel aftekent (§ 11, vgl. § 5).

Het osculatievlak snijdt V in de buigpool (§ 12). Het is mogelijk, dat het punt $P^{(2)}_{\infty}$ op de centraal door $P^{(1)}_{\infty}$ valt. Dan zijn elliptische osculerende beweging en rakende rotatie identiek. De beweging $\{ c(t), s(t), a(t), b(t) \}$ osculeert voor zo'n stand de rotatie om de pool [2].

Door de punten $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ en P gaat de ruimte, die de representante in P hyperosculeert [3]. Men kan hierin krommen vinden op de bicylinder, die de representante in P eveneens hyperosculeren. Ze zijn het beeld van een beweging met baankrommen, die de oorspronkelijke banen alle hyperosculeren. Voegt men als boven aan de nieuwe representante de vectoren $P P^{(1)}$, $P P^{(2)}$, $P P^{(3)}$ in P toe, dan is snelheids-, versnellings- en derde fluctieverdeling in alle baanpunten gelijk. De tweede beweging heeft één rechtgeleiding, de doorsnede van de ruimte $P P^{(1)} P^{(2)} P^{(3)}$ met V. Dit is tevens de rechte door buigpool, (2—3)-pool en (3—1)-pool (§ 12).

---

[1] F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 169.
[2] F. Schuh, id. 1, blz. 200 en 2, blz. 16.
[3] J. A. Barrau, Mouv. alg. no. 18.

§ 9. *Polen.*

Baanpunten, waar de k^e fluctievector op het moment t_1 nul is, noemen we k-polen der beweging. In zulke punten is:

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{a}(t_1) + x_1 \overset{(k)}{c}(t_1) + y_1 \overset{(k)}{s}(t_1) &= 0 \\ \overset{(k)}{b}(t_1) - x_1 \overset{(k)}{s}(t_1) + y_1 \overset{(k)}{c}(t_1) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Twee gevallen willen we uitsluiten; het geval, dat de vector P $P^{(k)}$ nul is en het geval dat $P^{(k)}_{\infty}$ op de toprechte ligt. In het eerste zijn alle punten van het vlak V k-pool; in het tweede is er geen enkele k-pool voor het moment t_1. Voor het algemene geval wordt de k^e fluctievector in V slechts nul, indien de projecterende straal van P en die van $P^{(k)}$ uit dezelfde centraal in V elkaar snijden. Beide stralen liggen dan in één vlak, dat noodzakelijk door P en $P^{(k)}$ moet gaan. De enige k-pool der beweging krijgt men dus door de centraal te zoeken door $P^{(k)}_{\infty}$ en vanuit deze het punt P te projecteren. De coördinaten van de k-pool kunnen nu als volgt worden afgeleid.

Zij $\{ x_1, y_1 \}$ het punt van v, welks baan een k^e fluctievector nul heeft op 't tijdstip t_1.

Uit (15) lost men x_1 en y_1 op:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\overset{(k)}{s}(t_1)\overset{(k)}{b}(t_1) - \overset{(k)}{c}(t_1)\overset{(k)}{a}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2} \\ y_1 &= -\frac{\overset{(k)}{c}(t_1)\overset{(k)}{b}(t_1) + \overset{(k)}{s}(t_1)\overset{(k)}{a}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Uitgezonderd (zie boven) is het geval $\overset{(k)}{c}(t_1) = 0$; $\overset{(k)}{s}(t_1) = 0$.

De k-pool in V, het punt $\{ X(t_1), Y(t_1) \}$ is:

$$X(t_1) = a(t_1) + c(t_1) \frac{\overset{(k)}{s}(t_1)\,\overset{(k)}{b}(t_1) - \overset{(k)}{c}(t_1)\,\overset{(k)}{a}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2}$$

$$- s(t_1) \frac{\overset{(k)}{c}(t_1)\,\overset{(k)}{b}(t_1) + \overset{(k)}{s}(t_1)\,\overset{(k)}{a}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2} \tag{17}$$

$$Y(t_1) = b(t_1) + s(t_1) \frac{\overset{(k)}{c}(t_1)\,\overset{(k)}{a}(t_1) - \overset{(k)}{s}(t_1)\,\overset{(k)}{b}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2}$$

$$- c(t_1) \frac{\overset{(k)}{c}(t_1)\,\overset{(k)}{b}(t_1) + \overset{(k)}{s}(t_1)\,\overset{(k)}{a}(t_1)}{\{\overset{(k)}{c}(t_1)\}^2 + \{\overset{(k)}{s}(t_1)\}^2}$$

Denkt men zich in bovenstaande t_1 vervangen door een variabele t, dan stellen de vergelijkingen (17) de k^e-poolbaan voor, de meetkundige plaats van k-polen.

Voor de (snelheids)-pool treedt in (16) nog een vereenvoudiging in wegens de relatie

$$c(t_1)\,\dot{c}(t_1) + s(t_1)\,\dot{s}(t_1) = 0 \tag{18}$$

Dit gesubstitueerd in (17) geeft:

$$X(t_1) = \mathrm{a}(t_1) - \dot{b}(t_1) \frac{s(t_1)\,\dot{c}(t_1) - c(t_1)\,\dot{s}(t_1)}{\dot{c}^2(t_1) + \dot{s}^2(t_1)}$$

(17a)

$$Y(t_1) = b(t_1) + \dot{a}\; t(_1) \frac{s(t_1)\,\dot{c}(t_1) - c(t_1)\,\dot{s}(t_1)}{\dot{c}^2(t_1) + \dot{s}^2(t_1)}$$

De restrictie $\dot{c} = 0$, $\dot{s} = 0$; betekent hier, dat we met een tijdelijke translatie te doen hebben. Dit blijkt ook uit de vergelijking voor de hoeksnelheid ω. Men vindt ω bijvoorbeeld door de snelheid van de oorsprong van het v vlak te delen door de afstand tot dat punt van v (de pool), dat momenteel in rust verkeert.

$$\omega = \frac{\sqrt{\dot{a}^2(t_1) + \dot{b}^2(t_1)}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{\dot{c}^2(t_1) + \dot{s}^2(t_1)} \qquad \text{(zie 16)}$$

In het uitgesloten geval is $\omega = 0$.

De centraal door $P^{(1)}_{\infty}$, verbonden met P geeft het vlak, dat V in de (snelheids-)pool snijdt. Een toepassing maken we op een stelsel bewegingen, wier representanten een algebraïsch oppervlak op de bicylinder vormen [1]). In een enkelvoudig punt P (stand) van dit oppervlak liggen de tangenten aan alle tot het systeem behorende representanten in het raakvlak van P. Zij l_∞ de oneigenlijke rechte van dat raakvlak. De centralen, van waaruit de polen van alle bewegingen van het stelsel worden geprojecteerd, gaan alle door l_∞. Zo vormen deze centralen een 2e graads regelvlak over l_∞ en de beide cyclische rechten. De polen liggen op een „kegel" met P als top, door de cyclische rechten. V wordt door de kegel gesneden in een kegelsnede door de cirkelpunten. Dus:

De polen van een stelsel bewegingen als boven omschreven liggen op elk moment (in het algemeen) op een cirkel [2]).

Is het punt P op het representanten oppervlak niet enkelvoudig, maar bijvoorbeeld k-voudig, dan vormen de tangenten

---

[1]) J. A. Barrau, Sur la Cinématique Plane; Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Strasbourg 22—30 Septembre 1920.

[2]) Opmerking. Deze stelling geldt ook voor niet-algebraïsche stelsels.

in P een k^e graads kegel. De oneigenlijke ruimte wordt dan door de tangenten niet in een rechte l_∞ gesneden, maar in een k^e graadskromme C^k_∞.

Ook nu weer worden de polen geprojecteerd uit centralen, die C^k_∞ treffen. Zulke centralen vormen een regelvlak van de graad 2 k. De cyclische rechten (4) en (5) zijn beide k-voudige rechten van dit regelvlak. De polen worden geprojecteerd door een kegel met top in P, eveneens van de graad 2 k. De snijfiguur met V, waarop voor het moment t_1 alle polen van het systeem liggen, is een kromme van de graad 2 k. Door elk der cirkelpunten I_1 en I_2 gaat hij k-maal.

§ 10. *Hoeken tussen Vectoren en Voerstralen.*

De centraal door $P^{(k)}_\infty$: $\{ \overset{(k)}{c}(t), \overset{(k)}{s}(t), \overset{(k)}{a}(t), \overset{(k)}{b}(t), 0 \}$ wordt bepaald door de vergelijkingen (16). Vier punten erop willen we in het oog vatten, namelijk: $P^{(k)}_\infty$, de beide punten J_1 en J_2, waarin de cyclische rechten worden gesneden en het punt, van waaruit de k-pool geprojecteerd wordt:

$$
\begin{aligned}
R: \Big\{ & c(t), s(t), - c(t) \frac{\overset{(k)}{s}(t)\,\overset{(k)}{b}(t) - \overset{(k)}{c}(t)\,\overset{(k)}{a}(t)}{\overset{(k)}{s}{}^2(t) + \overset{(k)}{c}{}^2(t)} \\
& + s(t) \frac{\overset{(k)}{c}(t)\,\overset{(k)}{b}(t) + \overset{(k)}{s}(t)\,\overset{(k)}{a}(t)}{\overset{(k)}{s}{}^2(t) + \overset{(k)}{c}{}^2(t)}, - s(t) \frac{\overset{(k)}{s}(t)\,\overset{(k)}{b}(t) - \overset{(k)}{c}(t)\,\overset{(k)}{a}(t)}{\overset{(k)}{s}{}^2(t) + \overset{(k)}{c}{}^2(t)} \\
& \qquad\qquad + c(t) \frac{\overset{(k)}{c}(t)\,\overset{(k)}{b}(t) + \overset{(k)}{s}(t)\,\overset{(k)}{a}(t)}{\overset{(k)}{s}{}^2(t) + \overset{(k)}{c}{}^2(t)}; 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

Uit elke rechte van het centrale stelsel wordt dit viertal in dezelfde dubbelhouding op V_∞ geprojecteerd. Hierbij gaan J_1 en J_2 steeds over op I_1 en I_2.

Elke centraal projecteert de verbindingslijnen van P met dit viertal volgens vier ruimten, die eveneens de dubbelverhouding ($P^{(k)}_{\infty}$, J_1, J_2, R) hebben. Ze snijden V in de projecties, vier rechten door Q, waarop resp. de k^e fluctievector, de beide isotrope rechten en de voerstraal van Q naar de k-pool. Gevolg is:

Op een willekeurig tijdstip maakt de k^e fluctievector in elk baanpunt dezelfde hoek met de voerstraal naar de k-pool.

Voor $k = 1$ wordt deze hoek $= \frac{\pi}{2}$ als gevolg van de relatie (18).

Voor $k = 2$ zien we zo de versnellingshoek te voorschijn komen [1]), de hoek tussen versnelling en versnellingsstraal.

Beschouwt men de beeldruimte als Euclidisch, dan is de gedefinieerde hoek gelijk aan de corresponderende „hoek" $P^{(k)}$ P R op de representante.

§ 11. *Buigcirkel enz.*

Voor het moment t_1 moge ondersteld worden, dat de punten $P^{(k)}_{\infty}$ en $P^{(l)}_{\infty}$ niet samenvallen en dat hun verbindingslijn de rechten (4) en (5) niet snijdt. Dan wordt $P^{(k)}_{\infty} P^{(l)}_{\infty}$ getroffen door ∞^1 centralen, die een 2e graads regelvlak vormen. Op de bekende wijze projecteren die centralen P volgens een cirkel in V. Alle baanpunten op die cirkel hebben voor het tijdstip t_1 de eigenschap, dat hun k^e en l^e fluctievectoren langs elkaar vallen. De projectie van de k^e en l^e fluctievector in P op de representante geschiedt namelijk voor zulke punten door één ruimte, de ruimte door de centraal, de punten $P^{(k)}_{\infty}$, $P^{(l)}_{\infty}$ en P.

We vinden dus:

De meetkundige plaats van punten, waar k^e en l^e fluctievector voor het moment t_1 dezelfde richting hebben, is een cirkel.

---

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 2.

Door de voorwaarde in te voeren, dat de centraal $\{ x, y, 1 \}$ de rechte $P^{(k)}_{\infty} P^{(l)}_{\infty}$ snijdt, vindt men de vergelijking van de cirkel (in v) zeer eenvoudig:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & -x, & -y \\ 0, & 1, & -y, & +x \\ \overset{(k)}{c}, & \overset{(k)}{s}, & \overset{(k)}{a}, & \overset{(k)}{b} \\ \overset{(l)}{c}, & \overset{(l)}{s}, & \overset{(l)}{a}, & \overset{(l)}{b} \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

De k-pool en de l-pool liggen op de cirkel, ook de (k-l)-pool (zie volgende paragraaf).

Het geval $k = 1, l = 2$ levert de buigcirkel [1]), geprojecteerd vanuit de centralen, die het osculatievlak van P treffen. Alle punten erop hebben de eigenschap, dat snelheid en versnelling dezelfde richting hebben, of wel dat de versnelling gericht is langs de tangent aan hun baan; het zijn buigpunten.

§ 12. *Buigpool enz.*

Reeds terloops kwam de buigpool ter sprake als snijpunt van het osculatievlak met V (§ 8). In breder verband worden hier besproken de punten, waarin V wordt gesneden door vlakken, bepaald door twee fluctievectoren. Voor het moment t_1 onderstellen we de beschouwde fluctievectoren van verschillende richting in P en niet gelegen in een beschrijvend vlak. Het snijpunt met V van het vlak door k^e en l^e fluctievector noemen we de (k-l)-pool. Hij ligt volgens § 11 op de (k-l) cirkel (19).

Alle projecterende ruimten, die de k^e en l^e fluctievector projecteren volgens twee vectoren met dezelfde richting in de baanpunten op de (k-l) cirkel, gaan door de (k-l) pool. Immers bevatten zulke ruimten de punten $P^{(k)}$, $P^{(l)}$ en P, dus juist het vlak, waar we van uit gingen. Daar de snijlijnen volgens welke zulke ruimten V snijden, de rechten zijn, waarlangs

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I. 1. blz. 202.

zowel de k^e als de l^e fluctievector liggen, krijgen we de volgende stelling.

Als de k^e en l^e fluctievectoren van een baanpunt langs dezelfde rechte vallen, gaat deze rechte door een vast punt van het vaste vlak of: De rechten, waarlangs de k^e èn l^e fluctievector van baanpunten op de (k-l) cirkel vallen, gaan door één punt, de (k-l) pool op die cirkel.

Het geval $k = 1$, $l = 2$ levert de buigpool [1]), het punt, waar alle buigraaklijnen samenkomen van punten, die op het moment t_1 door een buigpunt van hun baan gaan.

Door drie vectoren in P, de k^e, l^e en m^e fluctievector gaat één ruimte. In die ruimte ligt het vlak door de k^e en l^e, dat door de l^e en m^e en dat door de m^e en k^e fluctievector. De snijlijn van deze ruimte met V gaat dus door de (k-l)-pool, de (l-m)-pool en de (m-k)-pool.

We vinden dus:

De (k-l)-pool en de (l-m)-pool liggen met de (m-k)-pool in één rechte.

Voor het geval $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$ ontmoetten we deze rechte reeds (§ 8) als snijlijn van de hyperosculerende ruimte in P met V.

§ 13. *Isoklinen.*

De beide centralen door $P^{(k)}_\infty$ en $P^{(l)}_\infty$ bepalen een bundel van 2e graads regelvlakken, uit centralen bestaande. Zo'n bundel heeft als basisfiguur de scheve vierzijde, bestaande uit de twee genoemde centralen en de beide cyclische rechten. Een exemplaar is het oppervlak, dat de (k-l)-cirkel projecteert. Andere exemplaren kan men zich bijvoorbeeld bepaald denken door rechten $P^{(k)}_\infty R^{(l)}$, waarbij $R^{(l)}$ een willekeurig punt op de centraal door $P^{(l)}_\infty$ is, (de beide cyclische rechten zijn gemeenschappelijk, zodat het gegeven $P^{(k)}_\infty$ R voor uitkiezen

[1]) F. Schuh. Theor. Mech. I, 1, blz. 203.

van één exemplaar voldoende is). Op de centraal $P^{(l)}_{\infty}$ $R^{(l)}$ liggen als merkwaardige punten, behalve $P^{(l)}_{\infty}$ en $R^{(l)}$ de beide snijpunten J_1 en J_2 met (4) en (5). Vanuit elke centraal van het oppervlak wordt dit viertal op de toprechte volgens dezelfde dubbelverhouding geprojecteerd. Verbinden met P: $\{ c(t_1), s(t_1), a(t_1), b(t_1), 1 \}$ levert vier projecterende ruimten. Projecties zijn vier rechten door het baanpunt Q, respectievelijk langs de l^e, de k^e fluctievector en de isotrope richtingen door Q. Gevolg is, dat de cirkel, de meetkundige plaats van Q, de eigenschap heeft, dat in al haar punten de k^e en l^e fluctievector dezelfde hoek α maken of het supplement van α. Deze cirkel noemen we de (k-l)-isokline. De k-pool en de l-pool, projecties respectievelijk uit de centralen door $P^{(k)}_{\infty}$ en $P^{(l)}_{\infty}$ van P liggen op alle (k-l)-isoklinen. De „hoek" $R^{(l)}\, P\, P^{(l)}$ is gelijk aan de hoek $Q^{(k)}\, Q\, Q^{(l)}$.

De (k—l)-cirkel is het exemplaar in de bundel, waarvoor deze hoek nul is. $R^{(l)}$ valt met $P^{(l)}$ samen. Voor $k = 1$, $l = 2$ krijgen we de isoklinen in de gebruikelijke zin van het woord, gaande door (snelheids)- en versnellingspool [1]. Nulisokline is de buigcirkel.

De vergelijking van de isokline (in v) is weer eenvoudig aan te geven. Door $P^{(l)}_{\infty}$ gaat de centraal.

$$\begin{cases} (\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b} - \overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a})\,c + (-\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b} - \overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\,s - (\overset{(l)}{c}{}^2 + \overset{(l)}{s}{}^2)\,a = 0 \\ (-\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b} - \overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\,c - (\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b} - \overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a})\,s + (\overset{(l)}{c}{}^2 + \overset{(l)}{s}{}^2)\,b = 0 \end{cases}$$

Een willekeurig punt $R^{(l)}$ hierop:

$$\left\{ \lambda, \mu, \frac{(\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a} - \overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b})\lambda + (\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b} + \overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\mu}{\overset{(l)}{c}{}^2 + \overset{(l)}{s}{}^2}; \right.$$

$$\left. \frac{(\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b} + \overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\lambda - (\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b} - \overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a})\mu}{\overset{(l)}{c}{}^2 + \overset{(l)}{s}{}^2}; 0 \right\}$$

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 5.

De isokline heeft tot vergelijking (de centraal $\{ x, y, 1 \}$ moet $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$ snijden):

$$\begin{vmatrix} 1, 0, & -x & , & -y \\ 0, 1, & -y & , & x \\ \overset{(k)}{c}, \overset{(k)}{s}, & \overset{(k)}{a} & , & \overset{(k)}{b} \\ \lambda, \mu, & \dfrac{(\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a}-\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b})\lambda+(\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b}+\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\mu}{\overset{(l)}{c}{}^2+\overset{(l)}{s}{}^2} & , & \dfrac{(\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{b}+\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{a})\lambda-(\overset{(l)}{s}\overset{(l)}{b}-\overset{(l)}{c}\overset{(l)}{a})\mu}{\overset{(l)}{c}{}^2+\overset{(l)}{s}{}^2} \end{vmatrix} = 0$$

Door de drie centralen van de punten $P^{(k)}_{\infty}$, $P^{(l)}_{\infty}$, $P^{(m)}_{\infty}$ gaat één 2e graads regelvlak uit de bundel. P wordt vanuit dit regelvlak geprojecteerd in een cirkel uit de bundel, de (k-l-m) isokline. De punten er op hebben k^e-, l^e- en m^e fluctievectoren, die steeds gelijke hoeken insluiten. Tenslotte nog de opmerking, dat elk exemplaar van de bundel 2e graads-oppervlakken in plaats van door $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$ ook bepaald kan worden door $P^{(l)}_{\infty} R^{(k)}$. $R^{(k)}$ is dan evenzo een willekeurig punt op de centraal door $P^{(k)}_{\infty}$.

§ 14. *Bijzondere Punten op de Isoklinen.*

Behalve de k-pool en de l-pool beschouwen we op de (k-l)-isokline nog een tweetal punten, die te vergelijken zijn met de (k-l)-pool op de (k-l)-cirkel of nul isokline. Evenals we de laatste verkregen als doorsnede van het vlak $P^{(k)} P^{(l)}$ P met V, verkrijgen we het „k-polaire" punt als snijpunt van het vlak $P^{(k)} R^{(l)}$ P met V en het „l-polaire" punt als snijpunt van $P^{(l)} R^{(k)}$ P. De beide polaire punten liggen op de isokline, daar de vlakken $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$ P en $P^{(l)}_{\infty} R^{(k)}$ P op het projecterende hypervlak liggen. Alle k^e fluctievectoren van punten Q op de (k-l)-isokline zijn gericht naar het k-polaire punt. Dit vindt zijn oorzaak in het feit, dat alle projecterende ruimten van de k^e fluctievector in P, vanuit centralen op het

2e graads oppervlak door $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$ bepaald, het vlak $P^{(k)} R^{(l)}_{\infty} P$ bevatten. De ruimten snijden alle volgens rechten door het k-polaire punt; de k^e fluctievectoren der punten Q liggen langs deze rechten. Eveneens zijn de l^e fluctievectoren der punten Q alle gericht naar het l-polaire punt. Op de α-isokline is de boog tussen het k-polaire en het l-polaire punt uiteraard $= 2\,\alpha$.

We vinden verscheidene combinaties van drie dergelijke punten op één rechte op dezelfde wijze als in § 12 geschied is.

De rechte $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$ projecteert P in het k-polaire punt van de α-(k-l)-isokline, als

$$\alpha = \frac{1}{2\,i} \lg \left(P^{(l)}_{\infty}, R^{(l)}, J_1^{(l)}, J_2^{(l)}\right). \qquad \text{(zie § 13).}$$

De rechte $P^{(m)}_{\infty} R^{(l)}$ projecteert P in het m-polaire punt van de α-(m-l)-isokline en de rechte $P^{(k)}_{\infty} P^{(m)}_{\infty}$ in de (k-m)-pool. Nu liggen $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$, $P^{(m)}_{\infty} R^{(l)}$ en $P^{(k)}_{\infty} P^{(m)}_{\infty}$ in één vlak. P wordt dus uit deze rechten door één ruimte geprojecteerd in één rechte lijn in V:

Het k-polaire punt van de α-(k-l)-isokline en het m-polaire punt van de α-(m-l)-isokline liggen met de (k-m)-pool in één rechte lijn.

Als tweede combinatie nemen we de rechten $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)}$, $R^{(l)} S^{(m)}$, en $S^{(m)} P^{(k)}_{\infty}$, waarin:

$$\frac{1}{2\,i} \lg \left(P^{(m)}_{\infty}, S^{(m)}, J_1^{(m)}, J_2^{(m)}\right) = \alpha$$

De rechte $R^{(l)} S^{(m)}$ ligt dan op het 2e graads oppervlak door (4) en (5) en $P^{(l)}_{\infty} P^{(m)}_{\infty}$, want op 2 transversalen, de centralen door $P^{(l)}_{\infty}$ en $P^{(m)}_{\infty}$, zijn de dubbelverhoudingen der vier snijpunten gelijk. $R^{(l)} S^{(m)}$ projecteert P in een punt van de (l-m)-cirkel, dat op een booglengte $= 2\,\alpha$ van de (l-m)-pool verwijderd ligt. Dus:

Het k-polaire punt van de α-(k-l)-isokline en het k-polaire punt van de α-(k-m)-isokline bepalen de rechte lijn, die de *(m-l)-cirkel treft in een punt ter booglengte 2 α van de (m-l)-pool verwijderd.*

De derde combinatie worde gevormd door de rechten $Q^{(k)} R^{(l)}$, $R^{(l)} S^{(m)}$ en $S^{(m)} Q^{(k)}$, waarin:

$$\frac{1}{2i} \lg (P^{(k)}_{\infty}, Q^{(k)}, J_1^{(k)}, J_2^{(k)}) = \alpha$$

De rechte, waarin V door de ruimte $Q^{(k)} R^{(l)} S^{(m)} P$ getroffen wordt, snijdt de (k-l)-cirkel, de (l-m)-cirkel en de (m-k)-cirkel in punten, die men verkrijgt door respectievelijk uit de (k-l)-pool, de (l-m)-pool en de (m-k)-pool een boog ter lengte 2 α af te passen.

Ten slotte liggen alle rechten door $P^{(k)}_{\infty}$ en $R^{(l)}$, als we ons $R^{(l)}$ willekeurig denken op de centraal door $P^{(l)}_{\infty}$, in één plat vlak. Het vlak $P^{(k)}_{\infty} R^{(l)} P$ doorloopt bij variabele stand van $R^{(l)}$ een ruimte, die V in een rechte snijdt.

Alle punten dezer rechte vertegenwoordigen de k-polaire punten van de door $R^{(l)}$ aangewezen (k-l)-isoklinen. Valt $R^{(l)}$ met $P^{(l)}_{\infty}$ samen, dan correspondeert hiermee op de rechte de (k-l)-pool. We hebben de volgende stellingen bewezen:

Alle k-polaire punten van de ∞^1 (k-l)-isoklinen liggen op één rechte door de l-pool; alle l-polaire punten van dezelfde categorie isoklinen liggen op een tweede rechte door de k-pool. Beide rechten snijden elkaar in de (k-l)-pool.

Voor het geval $k = 1$, $l = 2$ komt er dus in het bijzonder: De punten, waardoor op alle isoklinen de snelheidsrichtingen in punten der isoklinen zelf gaan, liggen op één rechte. De 1-polaire punten zijn hier alle diametraal tegenover de pool op de isoklinen gelegen. Hun meetkundige plaats vormt zo een rechte lijn loodrecht op de verbindingslijn van snelheids- en versnellingspool door de buigpool.

De punten, waardoor op alle isoklinen de versnellingsrichtingen in punten op de isoklinen zelf gaan, liggen op één rechte. Deze gaat eveneens door de buigpool (versnellingsas) [1].

---

[1] F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 11.

§ 15. *Buigcirkel en Poolbaan.*

Ter voorbereiding van de ontwikkeling in de volgende paragraaf, wordt het vlak V zodanig getransformeerd, dat voor het moment t_1 de pool in de oorsprong komt te liggen en de raaklijn aan de poolbaan aldaar Y-as wordt. Dit betekent een kinematische transformatie, waarbij voor het ogenblik t_1 de nieuwe $c(t)$, $s(t)$, $a(t)$, $b(t)$ voldoen aan:

$$
\left.
\begin{aligned}
& a - \dot{b}\,\frac{s\dot{c} - c\dot{s}}{\dot{c}^2 + \dot{s}^2} = 0 \\
& b + \dot{a}\,\frac{s\dot{c} - c\dot{s}}{\dot{c}^2 + \dot{s}^2} = 0 \\
& \dot{a} - \ddot{b}\,\frac{s\dot{c} - c\dot{s}}{\dot{c}^2 + \dot{s}^2} + \dot{b}\,\frac{s\ddot{c} - c\ddot{s}}{\dot{c}^2 + \dot{s}^2} = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (17a)
$$

Vult men deze relaties in bij de vergelijking van de buigcirkel (§ 11), dan komt er:

$$
\begin{aligned}
(X^2 + Y^2)(\dot{s}\ddot{c} - \dot{c}\ddot{s}) + X\{ & -\dot{b}(\dot{c}^2 + \dot{s}^2) + \dot{a}(s\ddot{c} - c\ddot{s}) \\
& - \ddot{a}(s\dot{c} - c\dot{s})\} = 0
\end{aligned}
$$

De buigcirkel raakt in de oorsprong, de pool, aan de Y-as dus aan de poolbaan. De poolbaan omhult alle buigcirkels [1]).

§ 16. *Kromtemiddelpunten.*

Volgens definitie is het kromtemiddelpunt van de baan $\{X(t), Y(t)\}$ op het moment t_1:

---

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 1, blz. 202.

$$\{ X(t_1) - \dot{Y}(t_1) \frac{\dot{X}^2(t_1) + \dot{Y}^2(t_1)}{\dot{X}(t_1)\ddot{Y}(t_1) - \ddot{X}(t_1)\dot{Y}(t_1)},$$

$$Y(t_1) + \dot{X}(t_1) \frac{\dot{X}^2(t_1) + \dot{Y}^2(t_1)}{\dot{X}(t_1)\ddot{Y}(t_1) - \ddot{X}(t_1)\dot{Y}(t_1)} \}$$

het middelpunt van de osculerende cirkel.

Voor de baan van de oorsprong van v wordt dit, met weglating van t_1:

$$\{ (0,\ 0,)\ a - \dot{b}\,\frac{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}{\dot{a}\ddot{b} - \ddot{a}\dot{b}},\ b + \dot{a}\,\frac{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}{\dot{a}\ddot{b} - \ddot{a}\dot{b}},\ 1 \} \qquad (20)$$

Door het punt P $\{ c(t_1),\ s(t_1),\ a(t_1),\ b(t_1),\ 1 \}$ der representante wordt nu een „cirkel" aangebracht als volgt: op de buigcirkel wordt een cylinder opgericht met de rechte P O als beschrijvende en deze cylinder wordt gesneden met een vlak door P evenwijdig aan V. De snijfiguur, de bedoelde „cirkel" raakt in P aan het vlak door P en de raaklijn aan de poolbaan. Nu wordt de „cirkel" vanuit de pool O geprojecteerd door middel van een 2e graads kegel, die „krommingskegel" genoemd wordt. Langs P O raakt hij aan het vlak door P en de tangent aan de poolbaan.

Het hele vlak V wordt nu door middel van stralen door P op de krommingskegel afgebeeld. Bij elk punt A van V behoort één punt A′ van de kegel en omgekeerd. Uitzonderingen vormen het punt O, dat met de hele beschrijvende O P correspondeert, en de punten van O Y, die alle in P worden afgebeeld.

Analytisch voeren we dit uit voor het baanpunt B: $\{ 0,\ 0,\ a(t_1),\ b(t_1),\ 1 \}$, waarin de oorsprong van v zich momenteel bevindt. De poolstraal door B is:

$$X\,b(t_1) - Y\,a(t_1) = 0$$

Het beeldpunt B′ moet liggen in het vlak W door deze poolstraal en P. In W liggen de beschrijvende van bovengenoemde cylinder, die door PB wordt getroffen, en de beschrijvende van de krommingskegel, die in B′ wordt gesneden. Teneinde de laatste te bepalen, snijden we eerst de poolstraal in W met de buigcirkel; snijpunt: [1])

$$\left\{ 0,\ 0,\ \frac{-\alpha\, a^2(t_1)}{\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\}\{a^2(t_1) + b^2(t_1)\}};\ \frac{-\alpha\, a(t_1)\, b(t_1)}{\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\}\{a^2(t_1) + b^2(t_1)\}};\ 1 \right\}$$

De beschrijvende van de cylinder gaat hierdoor en door het punt Q:

$$\left\{ c(t_1),\ s(t_1),\ a(t_1) - \frac{\alpha\, a^2(t_1)}{\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\}\{a^2(t_1) + b^2(t_1)\}};\ b(t_1) - \frac{\alpha\, a(t_1)\, b(t_1)}{\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\}\{a^2(t_1) + b^2(t_1)\}};\ 1 \right\}$$

in het vlak door P evenwijdig aan V.

B′ ligt op Q O. Het blijkt te zijn:

$$B' = \{ c(t_1),\ s(t_1),\ a(t_1)(1+\mu),\ b(t_1)(1+\mu),\ 1+\mu \}$$

$$\mu = \frac{-\alpha\, a(t_1)}{\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\}\{a^2(t_1) + b^2(t_1)\}}$$

---

[1]) Vergelijking van de buigcirkel:

$$\{X^2 + Y^2\}\{\dot{s}(t_1)\ddot{c}(t_1) - \dot{c}(t_1)\ddot{s}(t_1)\} + \alpha X = 0,$$ zie § 15.

Op de lijn P O nemen we nu het midden M

$$\{ c(t_1), s(t_1), a(t_1), b(t_1), 2 \}$$

M noemen we krommingscentrum.

Vanuit M willen we nu alle beeldpunten A′ weer op V terugprojecteren, dus ook B′. Projectie van B′ wordt B″:

$$\{ 0, 0, a(t_1)\frac{\mu}{\mu-1}, b(t_1)\frac{\mu}{\mu-1}, 1 \}$$

Bij uitwerking van de factor $\frac{\mu}{\mu-1}$ blijkt B″ juist het punt (20) te zijn, dus het kromtemiddelpunt van de baan, die de oorsprong van v beschrijft, in B.

Tot een algemene stelling komt men nu, door een kinematische transformatie toe te passen. Het vlak V wordt punt voor punt invariant gelaten, terwijl in v een willekeurig punt $\{ x, y, 1 \}$ tot oorsprong wordt gemaakt. Bij de kinematische transformatie gaat P over in een punt P′ op de getransformeerde representante; M blijft in het midden van de rechte O P′ : M′, omdat de kinematische transformatie een affiniteit is. De cylinder en krommingskegel behouden zo hun eigenschappen. De bovengenoemde stelling geldt voor het punt, dat thans als oorsprong van v fungeert. Het krommingsmiddelpunt bij de nieuwe oorsprongbaan krijgt men dus door projectie van het beeld op de krommingskegel vanuit M′. Na terugtransformeren blijkt dus:

Het kromtemiddelpunt, behorend bij een willekeurig baanpunt A, wordt gevonden door projectie van het beeldpunt A′ op de krommingskegel vanuit het krommingscentrum.

§ 17. *Verwantschap tussen Baanpunten en Kromtemiddelpunten.*

Door de afbeelding van § 16 wordt een $\{ 1,1 \}$ verwantschap gevestigd tussen de baanpunten in V en de bijbehorende kromtemiddelpunten. De correspondentie is birationaal[1]). Reeds werd de aandacht gevestigd op de singuliere punten van de tangent in O aan de poolbaan.

Met de oneigenlijke rechte van V als meetkundige plaats van kromtemiddelpunten komt op de krommingskegel overeen de cirkel in het vlak door M evenwijdig aan V. P projecteert die cirkel op zijn beurt in de buigcirkel; hieruit wordt nog eens gevonden, dat de buigcirkel de meetkundige plaats is van punten met kromtemiddelpunten in het oneindige.

Met de oneigenlijke rechte als meetkundige plaats van baanpunten correspondeert de cirkel op de krommingskegel in het vlak door P evenwijdig aan V. Geprojecteerd uit M krijgen we een cirkel in V symmetrisch met de buigcirkel ten opzichte van de tangent aan de poolbaan: de keercirkel.

De cyclische punten van V, I_1 en I_2, liggen op de krommingskegel. Een kromme van baanpunten door I_1 en I_2 gaat dus over in een afgebeelde kromme op de kegel, eveneens door de cyclische punten van V. Ook projectie uit M op V laat deze punten onaangeroerd. Met een cyclische kromme van baanpunten komt zo steeds een cyclische kromme van bijbehorende kromtemiddelpunten overeen en omgekeerd.

Het beeld van een m^e graads kromme C^m van baanpunten op de krommingskegel is een C^{2m}, de doorsnede van de m^e graads-projecterende kegel met top in P en de krommingskegel. M projecteert C^{2m} op V volgens een vlakke C^{2m}.

Bijzonderheden vertonen de snijpunten van C^m met de tangent aan de poolbaan. De tak van C^m, waarop zo'n snijpunt, mits buiten de pool, ligt, wordt afgebeeld in een tak van de beeldkromme door P. Vanuit M geprojecteerd wordt dit een tak door de pool, rakend aan de tangent aan de poolbaan en nader: osculerend aan de keercirkel. C^{2m} bevat

---

[1]) F. Schuh. Theor. Mech. I, 1, blz. 260 en v.v.

dus in het algemeen een m-voudig punt, waarbij de m takken elkaar en de keercirkel osculeren.

Het bovenstaande is evenzeer van toepassing op een kromme C^m van kromtemiddelpunten. Men behoeft overal slechts P met M en keercirkel met buigcirkel te verwisselen.

Om volledig te zijn, dienen nog de gevallen bezien te worden, waarbij takken van C^m door de pool gaan. Wordt daarbij de tangent aan de poolbaan t niet geraakt, dan splitst zich in de getransformeerde kromme C^{2m} deze rechte t af. C^{2m} bestaat dan dus uit een C^{2m-1}, de eigenlijke kromme, die met C^m correspondeert, en t. Wordt t geraakt door C^m, dan splitst t zich 2 of 3 maal af, al naar gelang de keercirkel, respectievelijk de buigcirkel niet of wel geosculeerd wordt (vergelijk voor het laatste, wat hierboven is gezegd).

Dientengevolge wordt de kromme C^{2m} met het m-voudige punt in de pool, als boven verkregen, een C^{4m}, waarvan zich echter de rechte t 3m maal afsplitst. Er blijft dus naar behoren de C^m, waarvan men oorspronkelijk uitging, over.

Het geheel is bepaald, als pool en buigcirkel zijn gegeven. Dit kan ook zo worden uitgedrukt: als het osculatievlak van de representante in P bepaald is. Alle bewegingen, wier representanten elkaar in P osculeren, hebben op het bij P behorende tijdstip een identieke verdeling van kromtemiddelpunten in V. Het eenvoudigst kan men die vinden bij de osculerende elliptische beweging.

TWEEDE HOOFDSTUK

KINEMATICA VAN EEN VAST LICHAAM IN DE RUIMTE

§ 18. *De kinematische Beeldruimte.*

Analoog aan de behandeling van de kinematica van het vlakke stelsel willen we thans overgaan tot de kinematica van een „vast lichaam" in de (Euclidische) ruimte. Daartoe denken we ons het lichaam onbegrensd, over de gehele ruimte uitgebreid [1]). Een bewegelijke ruimte r met coördinaten $\{x, y, z\}$ ten opzichte van een aangenomen rechthoekig assenstelsel wordt daarbij dus ingevoerd. De verschillende standen van r of continue opeenvolgingen van standen worden beschouwd ten opzichte van een vaste ruimte R. In R is daartoe eveneens een rechthoekig assenstelsel gekozen; coördinaten $\{X, Y, Z\}$.

Elke stand van r wordt vastgelegd door een Euclidische transformatie, die r in R overvoert:

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4$$
$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4$$
$$Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4$$

Hierin voldoen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, aan de relaties

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (21) \qquad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \quad (24)$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad (22) \qquad c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \quad (25)$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad (23) \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \quad (26)$$

en (of) aan

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad (21') \qquad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \quad (24')$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad (22') \qquad a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0 \quad (25')$$
$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \quad (23') \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \quad (26')$$

---

[1]) F. Schuh. Theor. Mech. I, 2, blz. 315.

Ook kan de stand van r bepaald worden door de inverse transformatie, waarvan de coëfficiënten met een accent mogen aangegeven worden; ze voldoen eveneens aan de relaties (21) tot en met (26). De 12 coëfficiënten $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \}$ worden nu opgevat als coördinaten van een punt in een ruimte van 12 afmetingen R_{12}. Als homogeen makende variabele wordt eventueel h gebruikt. Een stand van r wordt afgebeeld in een punt van de beeldruimte R_{12}, een beweging van r in een kromme: de representante der beweging. De coëfficiënten zijn in dit laatste geval functies van t (de tijd). Van deze functies wordt ondersteld, dat ze continue differentiaalquotiënten bezitten van zo hoge orde, als nodig zal blijken.

§ 19. *De cylindrische Beeldvariëteit.*

Alle punten, die een stand van r representeren, voldoen aan de relaties (21) tot en met (26); ze liggen op een 6-dimensionale variëteit B in de beeldruimte, waarvan de vergelijkingen in die relaties gegeven zijn. B is dus doorsnee van 2e graadsvariëteiten. Op B liggen meervoudige punten, daar op elk der zes variëteiten (21) tot en met (26) dubbelpunten liggen en wel in de vlakke ruimten:

$$a_1 = a_2 = a_3 = h = 0 \tag{27}$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = h = 0 \tag{28}$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = h = 0 \tag{29}$$
$$b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = b_3 = c_3 = 0 \tag{30}$$
$$c_1 = a_1 = c_2 = a_2 = c_3 = a_3 = 0 \tag{31}$$
$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0 \tag{32}$$

Het vlak in het oneindige:

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = h = 0,$$

waardoor (27) tot en met (32) gaan, fungeert als een topvlak voor de variëteit B. Alle driedimensionale ruimten, door dit vlak en een willekeurig in het eindige gelegen punt van B, liggen geheel op B (beschrijvende ruimten).

Om de graad van B te bepalen moet deze zes-dimensionale variëteit gesneden worden met een vlakke zes-dimensionale ruimte R_6. Hiervoor kiezen we

$$a_4 = b_4 = c_4 = a_1 = b_2 = c_3 = 0 \qquad (33)$$

In (33) liggen de volgende punten van B en niet meer dan deze:

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4 \; c_1 \; c_2 \; c_3 \; c_4 \; l$

$$
\begin{array}{ll}
\{\, 0, \pm 1, \; 0, 0, \; 0, 0, \pm 1, 0, \pm 1, \; 0, 0, 0, (1) \,\} & (8 \text{ stuks}) \\
\{\, 0, \; 0, \pm 1, 0, \pm 1, 0, \; 0, 0, \; 0, \pm 1, 0, 0, (1) \,\} & (8 \text{ stuks}) \\
\{\, 0, \; 1, \pm i, 0, \; 0, 0, \; 0, 0, \; 0, \; 0, 0, 0, (0) \,\} & (2 \text{ stuks}) \\
\{\, 0, \; 0, \; 0, 0, \; 1, 0, \pm i, 0, \; 0, \; 0, 0, 0, (0) \,\} & (2 \text{ stuks}) \\
\{\, 0, \; 0, \; 0, 0, \; 0, 0, \; 0, 0, \; 1, \pm i, 0, 0, (0) \,\} & (2 \text{ stuks})
\end{array}
$$

De beide eerste achttallen zijn op elk der variëteiten (21) tot en met (26) enkelvoudig. Op B zijn ze dus minstens enkelvoudig. Van de paren imaginaire punten geldt, dat ze in drie der ruimten (27) tot en met (32) liggen. Ze zijn dus elk op drie der variëteiten (21) tot en met (26) dubbelpunt; de eerste twee bijvoorbeeld op (22), (23) en (24). Op B zijn dus de zes imaginaire punten minstens 8-voudig. De graad van B, het aantal snijpunten met de gekozen R_6 (33), wordt zo minstens $16 + 6 \times 8 = 64$.

De graad van B kan echter niet hoger zijn dan 2^6. Dus B is een V_6^{64}.

§ 20. *Kinematische Transformatie.*

Zowel in R als in r brengen we een ander orthogonaal assenstelsel aan; nieuwe coördinaten respectievelijk $\{X', Y', Z'\}$ en $\{x', y', z'\}$

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 \\
y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 \quad ; \text{ invers:} \\
z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1' x' + \alpha_2' y' + \alpha_3' z' + \alpha_4' \\
y &= \beta_1' x' + \beta_2' y' + \beta_3' z' + \beta_4' \\
z &= \gamma_1' x' + \gamma_2' y' + \gamma_3' z' + \gamma_4'
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} X' &= A_1 X + A_2 Y + A_3 Z + A_4 \\ Y' &= B_1 X + B_2 Y + B_3 Z + B_4 \text{; invers:} \\ Z' &= \Gamma_1 X + \Gamma_2 Y + \Gamma_3 Z + \Gamma_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= A_1' X' + A_2' Y' + A_3' Z' + A_4' \\ Y &= B_1' X' + B_2' Y' + B_3' Z' + B_4' \\ Z &= \Gamma_1' X' + \Gamma_2' Y' + \Gamma_3' Z' + \Gamma_4' \end{aligned}$$

De getransformeerde ruimte r: (x', y', z') moge met de getransformeerde ruimte R: (X', Y', Z') verbonden zijn door de transformatie

$$\begin{aligned} X' &= \mathbf{a}_1 x' + \mathbf{a}_2 y' + \mathbf{a}_3 z' + \mathbf{a}_4 \\ Y' &= \mathbf{b}_1 x' + \mathbf{b}_2 y' + \mathbf{b}_3 z' + \mathbf{b}_4 \text{; invers:} \\ Z' &= \mathbf{c}_1 x' + \mathbf{c}_2 y' + \mathbf{c}_3 z' + \mathbf{c}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= \mathbf{a}_1' X' + \mathbf{a}_2' Y' + \mathbf{a}_3' Z' + \mathbf{a}_4' \\ y' &= \mathbf{b}_1' X' + \mathbf{b}_2' Y' + \mathbf{b}_3' Z' + \mathbf{b}_4' \\ z' &= \mathbf{c}_1' X' + \mathbf{c}_2' Y' + \mathbf{c}_3' Z' + \mathbf{c}_4' \end{aligned}$$

Alle optredende coëfficiënten voldoen aan de relaties (21) tot en met (26). De transformatie in de beeldruimte, teweeg gebracht door de verlegging van de assenstelsels in R en r, de kinematische transformatie, wordt dan als volgt:

$$1 \leqq i \leqq 3 \left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}_i &= a_1 A_1 \alpha_i' + a_2 A_1 \beta_i' + a_3 A_1 \gamma_i' + b_1 A_2 \alpha_i' + \\ &\quad b_2 A_2 \beta_i' + b_3 A_2 \gamma_i' + c_1 A_3 \alpha_i' + c_2 A_3 \beta_i' \\ &\quad + c_3 A_3 \gamma_i' \\ \mathbf{b}_i &= a_1 B_1 \alpha_i' + a_2 B_1 \beta_i' + a_3 B_1 \gamma_i' + b_1 B_2 \alpha_i' + \\ &\quad b_2 B_2 \beta_i' + b_3 B_2 \gamma_i' + c_1 B_3 \alpha_i' + c_2 B_3 \beta_i' + c_3 B_3 \gamma_i' \\ \mathbf{c}_i &= a_1 \Gamma_1 \alpha_i' + a_2 \Gamma_1 \beta_i' + a_3 \Gamma_1 \gamma_i' + b_1 \Gamma_2 \alpha_i' + b_2 \Gamma_2 \beta_i' \\ &\quad + b_3 \Gamma_2 \gamma_i' + c_1 \Gamma_3 \alpha_i' + c_2 \Gamma_3 \beta_i' + c_3 \Gamma_3 \gamma_i' \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_4 &= a_1 A_1 \alpha_4' + a_2 A_1 \beta_4' + a_3 A_1 \gamma_4' + a_4 A_1 + b_1 A_2 \alpha_4' \\ &\quad b_2 A_2 \beta_4' + b_3 A_2 \gamma_4' + b_4 A_2 + c_1 A_3 \alpha_4' + c_2 A_3 \beta_4' \\ &\quad + c_3 A_3 \gamma_4' + c_4 A_3 + A_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_4 = {} & a_1 B_1 \alpha_4' + a_2 B_1 \beta_4' + a_3 B_1 \gamma_4' + a_4 B_1 + b_1 B_2 \alpha_4' \\ & + b_2 B_2 \beta_4' + b_3 B_2 \gamma_4' + b_4 B_2 + c_1 B_3 \alpha_4' + c_2 B_3 \beta_4' \\ & c_3 B_3 \gamma_4' + c_4 B_3 + B_4 \\ \mathbf{c}_4 = {} & a_1 \Gamma_1 \alpha_4' + a_2 \Gamma_1 \beta_4' + a_3 \Gamma_1 \gamma_4' + a_4 \Gamma_1 + b_1 \Gamma_2 \alpha_4' \\ & + b_2 \Gamma_2 \beta_4' + b_3 \Gamma_2 \gamma_4' + b_4 \Gamma_2 + c_1 \Gamma_3 \alpha_4' + c_2 \Gamma_3 \beta_4' \\ & + c_3 \Gamma_3 \gamma_4' + c_4 \Gamma_3 + \Gamma_4\end{aligned}$$

De transformatie is affien: $h = 0$ blijft invariant. Verdere invarianten zijn: de variëteit B en de ruimte van drie afmetingen

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \tag{34}$$

Deze ruimte wordt getransformeerd juist zoals de ruimte R. Evenals dit voor het platte vlak is geschied met het asvlak en V, zullen we de „asruimte" (34) identificeren met R.

In $h = 0$ blijven invariant de variëteit V_{11}^3:

$$D = \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{35}$$

en tevens de variëteit E, gegeven door een stelsel van 9 vergelijkingen: de gelijk nul gestelde onderdeterminanten van D.

Enkele andere invariante stelsels komen in het volgende nog ter sprake.

§ 21. *Spiegeling.*

Elke stand van r heeft een beeldpunt op B. Vraagt men omgekeerd, of elk punt van B een stand van r representeert, dan is nadere precisering nodig.

Uit de vergelijkingen van B, (21) tot en met (26), volgt namelijk:

$$D^2 = 1 \qquad \text{(zie 35)}$$

dus:

$$D = +1 \tag{36}$$

$$\text{en } D = -1 \tag{37}$$

De vergelijking (36) wijst de transformaties aan, die R rechtstreeks in r overvoeren, de vergelijking (37) echter slechts na spiegeling. Continue overgang langs B van een punt, dat aan (36) voldoet, naar een, dat aan (37) voldoet, is niet mogelijk. B bestaat dus uit twee „bladen". De punten van B representeren standen van r of van een gespiegelde r, al naar gelang ze liggen op het blad (36) of (37).

Spiegeling kan plaats hebben tegen een punt of tegen een vlak.

Spiegelen we r tegen het punt $\{0, 0, 0, 1\}$ van R, dan gaan de coördinaten $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, (1)\}$ in de beeldruimte over in $\{-a_1, -a_2, -a_3, -a_4, -b_1, -b_2, -b_3, -b_4, -c_1, -c_2, -c_3, -c_4, (1)\}$.

De verbindingslijnen van twee corresponderende beeldpunten gaan dus door O: $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (1)\}$; O deelt die verbindingslijnen „middendoor". Door transformatie van R kan men $\{0, 0, 0, 1\}$ over laten gaan in elk gewenst punt $\{X, Y, Z, 1\}$. De bijbehorende kinematische transformatie voert O over in $\{0, 0, 0, X, 0, 0, 0, Y, 0, 0, 0, Z, 1\}$. De genoemde eigenschappen blijven behouden.

De standen van r en de daarmee corresponderende gespiegelde standen ten opzichte van het punt $\{X, Y, Z, 1\}$ *van R hebben op B beeldpunten, die „gespiegeld" liggen ten opzichte van* $\{0, 0, 0, X, 0, 0, 0, Y, 0, 0, 0, Z, 1\}$.

Op analoge wijze kan men de spiegeling tegen een vlak behandelen, maar het resultaat geeft niet aanleiding tot een eenvoudige formulering als boven gevonden.

Opmerking:

Was het uitgangspunt van § 1 gekozen in het stel vergelijkingen:

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3$$
$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 1 ; b_1^2 + b_2^2 = 1 ; a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

dan was evenzo een beeldvariëteit gevonden, waarop de gespiegelde standen een plaats hadden. De vergelijkingen (1) zijn op te vatten als resultaat van een eliminatie hieruit, tevens keuze voor de rechtstreekse transformaties.

In het volgende zullen de gespiegelde standen buiten beschouwing gelaten worden. Van een beeldpunt

$$\{ a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, (1) \}$$

wordt dus ondersteld, dat het voldoet aan (36).

§ 22. *Kinematische Projectie.*

Zij een beweging gegeven door de representante

$$\mathrm{P}(t) = \{ a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), \\ c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), 1 \}$$

De baankromme, door de oorsprong van r in R beschreven, kan voorgesteld worden door

$$\{ a_4(t), b_4(t), c_4(t), 1 \}$$

Dit is echter tevens de projectie van de representante op R vanuit de acht-dimensionale ruimte in het oneindige

$$a_4 = b_4 = c_4 = h = 0$$

Op geheel dezelfde wijze als dit in § 3 gebeurd is, bewijzen we, dat alle baankrommen als projecties van dergelijke R_8 in $h = 0$ te voorschijn komen. Het middel is ook hier het toepassen van een kinematische transformatie.

Daarbij gaat $a_4 = b_4 = c_4 = h = 0$ over in:

$$\begin{cases} P a_1 + Q a_2 + R a_3 + S a_4 = 0 \\ P b_1 + Q b_2 + R b_3 + S b_4 = 0 \\ P c_1 + Q c_2 + R c_3 + S c_4 = 0 \\ h = 0 \\ S \neq 0 \end{cases} \tag{38}$$

Uit de „centraal" (38), de centraal $\{ P, Q, R, S \}$, wordt de representante geprojecteerd in de baankromme, die het punt

$\{P, Q, R, S\}$ van r beschrijft. Dit blijkt ook rechtstreeks eenvoudig, als men de volgende 9 punten op (38) neemt:

$$
\begin{array}{llll}
\{S, 0, 0, -P, & 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, S, 0, -Q, & 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, 0, S, -R, & 0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, S, 0, 0, -P, & 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, 0, S, 0, -Q, & 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, 0, 0, S, -R, & 0, 0, 0, & 0, (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, S, 0, 0, -P, & (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, S, 0, -Q, & (0)\} \\
\{0, 0, 0, & 0, 0, 0, 0, & 0, 0, 0, S, -R, & (0)\}
\end{array}
$$

Verbonden met het lopende punt P (t) der representante en gesneden met R, levert dit als snijpunt:

$$
\begin{aligned}
Q(t)\colon \{&0, 0, 0, S\,a_4(t) + P\,a_1(t) + Q\,a_2(t) + R\,a_3(t), \\
&0, 0, 0, S\,b_4(t) + P\,b_1(t) + Q\,b_2(t) + R\,b_3(t), 0 \textit{ etc. } 1\},
\end{aligned}
$$

het lopende punt van de baankromme van $\{P, Q, R, S\}$. De centralen vormen een in zichzelf gesloten stelsel van R_8 in $h = 0$; het geval $S = 0$ blijft een afzonderlijk gesloten stelsel, alles voor kinematische transformatie.

Door een willekeurig punt in $h = 0$ gaat in het algemeen één centraal, daar de vergelijkingen (38) in het algemeen één oplossing $\{P, Q, R, S\}$ toelaten. De projecterende stralen tekenen in elke centraal een kromme af, wier punten in $\{1 ; 1\}$ correspondentie staan met de punten der representante.

Een algebraïsche representante levert als projectie steeds een algebraïsche kromme in R van, in het algemeen, dezelfde graad. De baankrommen hebben zo, uitzonderingen daargelaten, dezelfde graad als de represante; dubbelpunten etc. herhalen zich in elk exemplaar.

§ 23. *Rotaties.*

Het vlak in de beeldruimte

$$\begin{cases} a_1 - b_2 = 0 \\ a_2 + b_1 = 0 \\ c_3 = h \\ a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = c_1 = c_2 = c_4 = 0 \end{cases} \tag{39}$$

snijdt de cylindrische variëteit B. Doorsnede is een kegelsnede. De oneigenlijke punten van deze kegelsnede

$$\begin{matrix} \{+i, 1, 0, 0, -1, +i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (0)\} \\ \{-i, 1, 0, 0, -1, -i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (0)\} \end{matrix} \tag{40}$$

zijn gelegen op de absolute kwadriek

$$\begin{cases} \sum_1^4 a^2_i + \sum_1^4 b^2_i + \sum_1^4 c^2_i = 0 \\ h = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Werd de beeldruimte dus Euclidisch opgevat, dan zou de snijfiguur een cirkel heten.

Door kinematische projectie worden de punten (40) vanuit elke centraal op twee *vaste* punten van R, en wel nader, op de absolute kegelsnede

$$a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 = 0$$

gelegen, geprojecteerd. Baankrommen van de beweging, wier representante bovengenoemde „cirkel" is, worden dus cirkels in evenwijdige vlakken. Het middelpunt dezer cirkels blijkt te liggen op de rechte OZ van R.

Bijzonderheden vertonen de centralen door de punten (40), de centralen:

$$\begin{cases} \lambda a_3 + \mu a_4 = 0 \\ \lambda b_3 + \mu b_4 = 0 \\ \lambda c_3 + \mu c_4 = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

Het vlak (39) wordt vanuit zo'n centraal geprojecteerd door middel van één R_9; projectie is dus slechts één punt, het snijpunt van de projecterende R_9 met R. Volgens bovenstaande zijn de punten in r, die aldus bij de beweging invariant blijven, de punten $\{0, 0, \lambda, \mu\}$. Ze vormen de rechte OZ van r, en ook van R. De beweging is de rotatie, waarbij de Z-assen van r en R incident blijven.

Door kinematische transformatie komt men nu tot een in zichzelf gesloten stelsel van vlakken, die alle B volgens een kegelsnede snijden. Speciaal geven we aan, waarin de punten (40) overgaan. Voor een willekeurige transformatie worden dit de punten

$$\left.\begin{aligned} a_j &= A_1 \alpha'_j + i A_1 \beta'_j - i A_2 \alpha'_j + A_2 \beta'_j \\ b_j &= B_1 \alpha'_j + i B_1 \beta'_j - i B_2 \alpha'_j + B_2 \beta'_j \\ c_j &= \Gamma_1 \alpha'_j + i \Gamma_1 \beta'_j - i \Gamma_2 \alpha'_j + \Gamma_2 \beta'_j \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} a_j &= A_1 \alpha'_j - i A_1 \beta'_j + i A_2 \alpha'_j + A_2 \beta'_j \\ b_j &= B_1 \alpha'_j - i B_1 \beta'_j + i B_2 \alpha'_j + B_2 \beta'_j \\ c_j &= \Gamma_1 \alpha'_j - i \Gamma_1 \beta'_j + i \Gamma_2 \alpha'_j + \Gamma_2 \beta'_j \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$1 \leqq j \leqq 4$$

We vinden de volgende eigenschappen:

a. Steeds liggen de punten (42) en (43) op de absolute kwadriek (41).

b. Ze vormen een stelsel rechten, invariant voor kinematische transformatie, alle gaande door de absolute kegelsnede van R: cyclische rechten.

c. Ze worden door een willekeurige centraal geprojecteerd in de punten

$$\begin{array}{r} \{ A_1 - i A_2 ; B_1 - i B_2 ; \Gamma_1 - i \Gamma_2 \} \\ \text{en } \{ A_1 + i A_2 ; B_1 + i B_2 ; \Gamma_1 + i \Gamma_2 \} \end{array} \tag{44}$$

op de absolute kegelsnede van R.

d. Bijzonderheden bij de projectie treden op, als de centraal de punten (42) en (43) bevat. Dit is het geval met de ∞^1 centralen $\{ P, Q, R, S \}$, die voldoen aan

$$\begin{cases} P \alpha_1' + Q \alpha_2' + R \alpha_3' + S \alpha_4' = 0 \\ P \beta_1' + Q \beta_2' + R \beta_3' + S \beta_4' = 0 \end{cases}$$

De bij deze bijzondere centralen behorende punten van r vormen een rechte lijn, met als oneigenlijk punt:

$$\{ P, Q, R \} = \left\| \begin{matrix} \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3' \\ \beta_1', \beta_2', \beta_3' \end{matrix} \right\|$$

In R ligt dit geconjugeerd ten opzichte van de absolute kegelsnede met de punten (44).

e. Elke centraal snijdt alle cyclische rechten.

Samenvattend kan men zeggen, dat elke doorsnede van de 2e graad, waarin een vlak door 2 cyclische punten (42) en (43) de variëteit B snijdt, representante is van een rotatie.

§ 24. *Representanten in vlakke Ruimten.*

De cylindrische variëteit B heeft als beschrijvenden driedimensionale ruimten door het topvlak, het oneigenlijke vlak van R. De representanten, die geheel in zo'n beschrijvende ruimte liggen, zijn beeld van de translaties van r in R. Als gevolg van de parallelprojectie vanuit de centralen zijn namelijk alle baankrommen met elkaar congruent. Het eenvoudigste voorbeeld vormen de rechte lijnen als representanten. Daarmee corresponderen de rechtlijnige translaties van r in R.

Door een punt in het eindige en een centraal $\{ P, Q, R, S \}$ brengen we een 9-dimensionale ruimte R_9 aan. R_9 snijdt B in een 3-dimensionale variëteit. R wordt volgens één punt gesneden: L. Gaan we een willekeurige representante in R_9 vanuit $\{ P, Q, R, S \}$ projecteren, dan krijgen we slechts dit ene punt L als projectie. Het punt $\{ P, Q, R, S \}$ van r blijft dus invariant. Dit is het punt

$$L \equiv \{ P a_1 + Q a_2 + R a_3 + S a_4 ; P b_1 + Q b_2 + R b_3 + S b_4 ; \\ P c_1 + Q c_2 + R c_3 + S c_4 \}$$

van R, waarin $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \}$ willekeurig op de representante kan gekozen worden. We hebben hier te doen met bewegingen om één vast punt.

Representanten in een 10-dimensionale ruimte R_{10}, welke een centraal in zijn geheel bevat, zijn beeld van bewegingen, waarbij een rechte lijn invariant blijft; dit is de snijlijn van de ruimte R_{10} met R. In het algemeen zijn dit bewegingen, waarbij alleen het punt $\{ P, Q, R, S \}$ van r gedwongen wordt een rechte lijn te doorlopen.

Representanten in een 11-dimensionale ruimte R_{11} door een centraal $\{ P, Q, R, S \}$ zijn beeld van bewegingen, waarbij een punt van r in een vlak van R blijft, het vlak waarin de ruimte R_{11} door R wordt gesneden. Het punt $\{ P, Q, R, S \}$ van r beschrijft in dit geval dus een vlakke baan.

§ 25. *Twee Standen.*

In de kinematica van het vlakke stelsel wordt aangegeven, hoe men twee standen in elkaar kan doen overgaan door rotatie (§ 6). Men brengt door het oneigenlijke punt van de verbindingslijn der beide beeldpunten een centraal aan. De twee beeldpunten worden van hier uit in het rotatiecentrum geprojecteerd. Op het eerste gezicht lijkt hier iets dergelijks mogelijk. De centraal door het oneigenlijke punt der verbindingslijn van de twee beeldpunten zou die beeldpunten in één punt van R projecteren. Zodoende zou men twee standen in elkaar kunnen doen overgaan door middel van een beweging om één vast punt (§ 24). Dit mislukt, omdat een dergelijke centraal niet bestaat. Elk tweetal beeldpunten, dus elk paar punten op B, heeft een verbindingslijn, die $h = 0$ snijdt in een punt van de invariant $D = 0$ (35). Door zulke punten gaat echter geen centraal. Het bewijs leveren we als volgt:

Te bewijzen is, dat de „standen"

$$\begin{aligned} S' &: \{ a_1', a_2', a_3', a_4', b_1', \ldots . c_4', 1 \} \\ \text{en } S'' &: \{ a_1'', a_2'', a_3'', a_4'', b_1'', \ldots . c_4'', 1 \} \end{aligned}$$

een verbindingslijn hebben, die $D = 0$ snijdt. S′ en S″ liggen op B. We passen een kinematische transformatie toe, zodanig, dat S′ overgaat in

$$\mathbf{S}': \{ 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, (1) \}.$$

S″ gaat dan over in een ander punt van B,

$$\mathbf{S}'': \{ \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2'', \mathbf{a}_3'', \mathbf{a}_4'', \mathbf{b}_1'' \ldots . \mathbf{c}_4'', 1 \},$$

terwijl $D = 0$ invariant blijft. Het oneigenlijke punt van S′ S″ wordt nu het oneigenlijke punt van **S′ S″**, namelijk:

$$\{ \mathbf{a}_1'' - 1, \mathbf{a}_2'', \mathbf{a}_3'', \mathbf{a}_4'', \mathbf{b}_1'', \mathbf{b}_2'' - 1, \mathbf{b}_3'', \mathbf{b}_4'', \mathbf{c}_1'', \mathbf{c}_2'', \mathbf{c}_3'' - 1, \mathbf{c}_4'', 0 \}$$

Dit ligt op $D = 0$, want

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'' - 1, & \mathbf{a}_2'' & , \mathbf{a}_3'' \\ \mathbf{b}_1'' & , \mathbf{b}_2'' - 1, & \mathbf{b}_3'' \\ \mathbf{c}_1'' & , \mathbf{c}_2'' & , \mathbf{c}_3'' - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2'', \mathbf{a}_3'' \\ \mathbf{b}_1'', \mathbf{b}_2'', \mathbf{b}_3'' \\ \mathbf{c}_1'', \mathbf{c}_2'', \mathbf{c}_3'' \end{vmatrix} - 1 + \mathbf{a}_1'' - \begin{vmatrix} \mathbf{b}_2'', \mathbf{b}_3'' \\ \mathbf{c}_2'', \mathbf{c}_3'' \end{vmatrix} +$$

$$+ \mathbf{b}_2'' - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_3'' \\ \mathbf{c}_1'', \mathbf{c}_3'' \end{vmatrix} + \mathbf{c}_3'' - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2'' \\ \mathbf{b}_1'', \mathbf{b}_2'' \end{vmatrix}$$

Wegens de orthogonaliteit van de eerste determinant in het rechterlid van bovengenoemde identiteit, is de gehele vorm $= 0$ [1]).

Daar dus de stelling geldt voor de standen S′ en S″, geldt ze tevens voor S′ en S″, omdat de eigenschap bij kinematische transformatie niet verloren gaat. Alle verbindingslijnen van twee punten op B hebben zo een oneigenlijk punt op $D = 0$. Geheel overeenkomstig bewijst men, dat de verbindingslijnen de invariant E (§ 20) niet snijden.

Het zoeken naar een centraal $\{P, Q, R, S\}$, in het begin genoemd, levert tot resultaat: $S = 0$

$$\text{en } \{P, Q, R\} \equiv \left\| \begin{matrix} a_1' - a_1'', a_2' - a_2'', a_3' - a_3'' \\ b_1' - b_1'', b_2' - b_2'', b_3' - b_3'' \end{matrix} \right\| \qquad (45)$$

Ondersteld is, dat de in deze matrix voorkomende determinanten niet alle nul zijn.

Het zal blijken, dat het punt $\{P, Q, R, 0\}$ van r toch in zekeren zin de rol van het (gemiddelde) rotatiecentrum uit § 6 overneemt.

§ 26. *Rotatie en Schroeving.*

Twee „standen" S′ en S″ mogen nu zó gelegen zijn, dat het mogelijk is een beweging te vinden om één vast punt, die zowel S′ als S″ doorloopt. Het vaste punt zij het punt $\{P, Q, R, S\}$ van r, $S \neq 0$. Dan is:

$$\begin{aligned} P a_1' + Q a_2' + R a_3' + S a_4' &= P a_1'' + Q a_2'' + R a_3'' + S a_4'' \\ P b_1' + Q b_2' + R b_3' + S b_4' &= P b_1'' + Q b_2'' + R b_3'' + S b_4'' \\ P c_1' + Q c_2' + R c_3' + S c_4' &= P c_1'' + Q c_2'' + R c_3'' + S c_4'' \end{aligned}$$

$\{P, Q, R, S\}$ vinden we dus uit de vergelijkingen:

---

[1]) F. Schuh, Lessen over de Hoogere Algebra I, blz. 58.

$$
\begin{aligned}
&P(a_1'-a_1'')+Q(a_2'-a_2'')+R(a_3'-a_3'')+S(a_4'-a_4'')=0\\
&P(b_1'-b_1'')+Q(b_2'-b_2'')+R(b_3'-b_3'')+S(b_4'-b_4'')=0 \quad (46)\\
&P(c_1'-c_1'')+Q(c_2'-c_2'')+R(c_3'-c_3'')+S(c_4'-c_4'')=0
\end{aligned}
$$

Daar $S \neq 0$, kan dit alleen, als de drie vergelijkingen afhankelijk zijn, dus de rang van de matrix der coëfficiënten < 3, dus $= 2$.

De determinant

$$
D_1 = \begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_2'-a_2'', & a_4'-a_4'' \\ b_1'-b_1'', & b_2'-b_2'', & b_4'-b_4'' \\ c_1'-c_1'', & c_2'-c_2'', & c_4'-c_4'' \end{vmatrix} \tag{47}
$$

moet dus bijvoorbeeld gelijk nul zijn.

Als oplossingen van (46) vinden we

$$
P=\lambda \begin{vmatrix} a_2'-a_2'', & a_4'-a_4'' \\ b_2'-b_2'', & b_4'-b_4'' \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2'-a_2'', & a_3'-a_3'' \\ b_2'-b_2'', & b_3'-b_3'' \end{vmatrix}
$$

$$
-Q=\lambda \begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_4'-a_4'' \\ b_1'-b_1'', & b_4'-b_4'' \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_3'-a_3'' \\ b_1'-b_1'', & b_3'-b_3'' \end{vmatrix}
$$

$$
R= \mu \begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_2'-a_2'' \\ b_1'-b_1'', & b_2'-b_2'' \end{vmatrix}
$$

$$
-S=\lambda \begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_2'-a_2'' \\ b_1'-b_1'', & b_2'-b_2'' \end{vmatrix}
$$

De punten $\{P, Q, R, S\}$ vormen in r een rechte lijn van invariante punten. Blijft dus één punt invariant, dan automatisch een gehele rechte; de twee standen zijn in zo'n geval door een *rotatie* in elkaar over te voeren, de rechte is rotatieas. Het oneigenlijke punt, dat natuurlijk ook invariant blijft, blijkt het punt $\{P, Q, R, 0\}$ (45), genoemd in het eind der vorige paragraaf als gemiddeld rotatiecentrum.

Ondersteld is, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1'-a_1'', & a_2'-a_2'' \\ b_1'-b_1'', & b_2'-b_2'' \end{vmatrix}$$

ongelijk nul is. Wegens de opmerking op bladzijde 55 is een dergelijke determinant steeds te vinden, zodat bovenstaande of een analoge ontwikkeling steeds mogelijk is.

Is de rang van de matrix van coëfficiënten van (46) gelijk aan 3, dan is er geen punt te vinden (in het eindige), dat invariant kan blijven bij een beweging, die zowel S′ als S″ doorloopt. Op overeenkomstige wijze, als dit gewoonlijk geschiedt [1]), willen we komen tot de schroeving, die in zo'n geval S′ in S″ overvoert. De schroefas wordt tegelijkertijd bepaald.

Daartoe voeren we eerst S′ door een rechtlijnige translatie over in S′, zodat S′ en S″ in één projecterende R_9 liggen. Voorts laten we S′ door een rotatie in S″ overgaan en postuleren, dat de rotatieas evenwijdig wordt aan de translatierichting. De uitwerking gaat als volgt:

We denken ons een willekeurige centraal $\{ P_1, Q_1, R_1, S_1 \}$, nog geheel onbepaald. S′ en S″ worden van daar uit geprojecteerd op R respectievelijk in de punten K′ en K″:

$$\begin{aligned} K' \equiv \{ & S_1 a_4' + P_1 a_1' + Q_1 a_2' + R_1 a_3' \,;\, S_1 b_4' + P_1 b_1' + \\ & Q_1 b_2' + R_1 b_3' \,;\, S_1 c_4' + P_1 c_1' + Q_1 c_2' + R_1 c_3' \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'' \equiv \{ & S_1 a_4'' + P_1 a_1'' + Q_1 a_2'' + R_1 a_3'' \,;\, S_1 b_4'' + P_1 b_1'' + \\ & Q_1 b_2'' + R_1 b_3'' \,;\, S_1 c_4'' + P_1 c_1'' + Q_1 c_2'' + R_1 c_3'' \} \end{aligned}$$

De lineaire translatie, die K′ in K″ overvoert, heeft als richting L:

$$\begin{aligned} L \equiv \{ & 0, 0, 0, S_1 (a_4' - a_4'') + P_1 (a_1' - a_1'') + Q_1 (a_2' - a_2'') + \\ & R_1 (a_3' - a_3''), 0, 0, 0, S_1 (b_4' - b_4'') + \ldots\ldots, 0 \} \end{aligned}$$

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 353, 354.

Een representante van deze translatie is de rechte S′ L met als lopend punt: S′ + λ L.

De projecterende R_9, die S″ uit $\{P_i, Q_i, R_i, S_i\}$ in K″ projecteert, is:

$$P_i a_1 + Q_i a_2 + R_i a_3 + S_i\ a_4 - P_i a_1'' \\ - Q_i a_2'' - R_i a_3'' - S_i a_4'' = 0$$
$$P_i b_1 + Q_i b_2 + R_i b_3 + S_i b_4 - P_i b_1'' \\ - Q_i b_2'' - R_i b_3'' - S_i b_4'' = 0$$
$$P_i c_1 + Q_i c_2 + R_i c_3 + S_i c_4 - P_i c_1'' \\ - Q_i c_2'' - R_i c_3'' - S_i c_4'' = 0$$

Ze snijdt S′ + λ L in **S′**:

$$\mathbf{S}' = \{ a_1', a_2', a_3', S_i a_4'' - P_i (a_1' - a_1'') - Q_i (a_2' - a_2'') \\ - R_i (a_3' - a_3'');\ b_1', b_2', \ldots, 1 \}$$

De standen, gerepresenteerd door **S′** en S″, hebben nu een punt gemeen, namelijk K″; ten overvloede blijkt dit ook nog uit de rang van de matrix (46), opgesteld voor **S′** en S″, welke = 2 is.

Volgens het voorafgaande wordt de as der rotatie, die **S′** in S″ overvoert, in r gegeven door

$$P_j = \lambda \begin{vmatrix} a_2' - a_2'', & - P_i (a_1' - a_1'') - Q_i (a_2' - a_2'') - R_i (a_3' - a_3'') \\ b_2' - b_2'', & - P_i (b_1' - b_1'') - Q_i (b_2' - b_2'') - R_i (b_3' - b_3'') \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_2' - a_2'', & a_3' - a_3'' \\ b_2' - b_2'', & b_3' - b_3'' \end{vmatrix}$$

$$-Q_j = \lambda \begin{vmatrix} a_1' - a_1'', & - P_i (a_1' - a_1'') - Q_i (a_2' - a_2'') - R_i (a_3' - a_3'') \\ b_1' - b_1'', & - P_i (b_1' - b_1'') - Q_i (b_2' - b_2'') - R_i (b_3' - b_3'') \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1' - a_1'', & a_3' - a_3'' \\ b_1' - b_1'', & b_3' - b_3'' \end{vmatrix}$$

$$R_j = \mu \begin{vmatrix} a_1' - a_1'', & a_2', - a_2'' \\ b_1' - b_1'', & b_2', - b_2'' \end{vmatrix}$$

$$-S_j = \lambda \begin{vmatrix} a_1' - a_1'', a_2' - a_2'' \\ b_1' - b_1'', b_2' - b_2'' \end{vmatrix}$$

S_i is hierin $= 1$ gesteld.

Voor $\lambda = 0$ vindt men de richting van de rotatieas.

Deze is $\{P, Q, R, 0\}$ (45).

Nu wordt gepostuleerd, dat rotatieas en translatie dezelfde richting hebben: $L = \{P, Q, R, 0\}$ in (R!).

$$S_i (a_4' - a_4'') + P_i (a_1' - a_1'') + Q_i (a_2' - a_2'') \\ + R_i (a_3' - a_3'') = \chi (P a_1'' + Q a_2'' + R a_3'')$$
$$S_i (b_4' - b_4'') + P_i (b_1' - b_1'') + Q_i (b_2' - b_2'') \\ + R_i (b_3' - b_3'') = \chi (P b_1'' + Q b_2'' + R b_3'')$$
$$S_i (c_4' - c_4'') + P_i (c_1' - c_1'') + Q_i (c_2' - c_2'') \\ + R_i (c_3 - c_3'') = \chi (P c_1'' + Q c_2'' + R c_3'')$$

De oplossingen vormen een lineaire verzameling $\{S_i, P_i, Q_i, R_i, \chi\}$:

$$S_i = \lambda \begin{vmatrix} a_1' - a_1'', a_2' - a_2'', P a_1'' + Q a_2'' + R a_3'' \\ b_1' - b_1'', b_2' - b_2'', P b_1'' + Q b_2'' + R b_3'' \\ c_1' - c_1'', c_2' - c_2'', P c_1'' + Q c_2'' + R c_3'' \end{vmatrix}$$

$$-P_i = \lambda \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_2' - a_2'', P a_1'' + Q a_2'' + R a_3'' \\ b_4' - b_4'', b_2' - b_2'', P b_1'' + Q b_2'' + R b_3'' \\ c_4' - c_4'', c_2' - c_2'', P c_1'' + Q c_2'' + R c_3'' \end{vmatrix} \\ + \mu \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_2' - a_2'', a_3' - a_3'' \\ b_4' - b_4'', b_2' - b_2'', b_3' - b_3'' \\ c_4' - c_4'', c_2' - c_2'', c_3' - c_3'' \end{vmatrix}$$

$$Q_i = \lambda \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_1' - a_1'', P a_1'' + Q a_2'' + R a_3'' \\ b_4' - b_4'', b_1' - b_1'', P b_1'' + Q b_2'' + R b_3'' \\ c_4' - c_4'', c_1' - c_1'', P c_1'' + Q c_2'' + R c_3'' \end{vmatrix} \\ + \mu \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_1' - a_1'', a_3' - a_3'' \\ b_4' - b_4'', b_1' - b_1'', b_3' - b_3'' \\ c_4' - c_4'', c_1' - c_1'', c_3' - c_3'' \end{vmatrix}$$

$$-R_i = \mu \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_1' - a_1'', a_2' - a_2'' \\ b_4' - b_4'', b_1' - b_1'', b_2' - b_2'' \\ c_4' - c_4'', c_1' - c_1'', c_2' - c_2'' \end{vmatrix}$$

$$-\chi = \lambda \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_1' - a_1'', a_2' - a_2'' \\ b_4' - b_4'', b_1' - b_1'', b_2' - b_2'' \\ c_4' - c_4'', c_1' - c_1'', c_2' - c_2'' \end{vmatrix}$$

Ondersteld is, dat

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_4' - a_4'', a_1' - a_1'', a_2' - a_2'' \\ b_4' - b_4'', b_1' - b_1'', b_2' - b_2'' \\ c_4' - c_4'', c_1' - c_1'', c_2' - c_2'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Dit is steeds het geval. $D_1 = 0$ heeft ten gevolge, dat alle determinanten der 3e orde in (46) nul zijn, wat op een rotatiegeval wijst.

De gevonden $\{ P_i, Q_i, R_i, S_i \}$ vormen de schroefas in r. Het oneigenlijke punt is weer $\{ P, Q, R, 0 \}$ (45). Dit punt is gedurende de schroeving invariant. Men kan dit dus inderdaad vergelijken met het gemiddelde rotatiecentrum voor het vlakke stelsel (vgl. § 25). De schroefas $\{ P_i, Q_i, R_i, S_i \}$ is de gemiddelde schroefas der twee standen [1]).

§ 27. *Snelheid, Versnelling enz.*

In elk punt P : $\{ a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), 1 \}$ van de representante denken we ons een stelsel vectoren, de 1e, 2e, 3e, ... k^e fluctievectoren. De voerstralen zijn respectievelijk $P\,P^{(1)}$, $P\,P^{(2)}$, $P\,P^{(3)}$, ... $P\,P^{(k)}$.

$$P^{(k)} \equiv \{ a_1(t) + \overset{(k)}{a_1}(t), a_2(t) + \overset{(k)}{a_2}(t), a_3(t) + \overset{(k)}{a_3}(t), a_4(t) + \overset{(k)}{a_4}(t), \ldots, 1 \}$$

$\overset{(k)}{a_1}(t)$ is de k^e afgeleide van $a_1(t)$.

We hebben zo respectievelijk de snelheids-, versnellings-,

---

[1]) F. Schuh. Theor. Mech. I. 2. blz. 354.

tweede versnellings-, ... (k-1)^e versnellingsvector van de representante op 't tijdstip t ingevoerd.

Evenzo brengen we in de punten der baankromme zulke stelsels vectoren aan, die de snelheid enz. van het beschouwde punt in zijn baan weergeven.

Vanuit de centraal $\{P, Q, R, 1\}$ gaan we nu het stelsel vectoren $P P^{(1)}$, $P P^{(2)}$, etc. projecteren op R. Dit geschiedt op de eenvoudigste wijze met behulp van het 9-tal punten in de centraal, als in § 22 aangegeven. We vinden evenals in § 8 de stelling:

Projectie van de k^e fluctievector in elk punt P van de representante vanuit een centraal is k^e fluctievector in een bijbehorend punt Q van een baankromme; projectie vanuit de centraal $\{x_1, y_1, z_1, 1\}$ geeft de k^e fluctievector van het punt $\{x_1, y_1, z_1, 1\}$ van r in zijn baan.

In het bijzonder is de snelheid van de projectie gelijk aan de projectie van de snelheid; evenzo voor de versnelling. Het vlak door $P P^{(1)}$ en $P P^{(2)}$, het osculatievlak van de representante, wordt aldus in het algemeen in het osculatievlak van de baankromme geprojecteerd.

Ligt de representante in een projecterende R_9 (§ 24), dan liggen alle vectoren in die R_9. Voor zover de k^e fluctievector op de representante niet zelf nul is, zijn in het algemeen ook geen der vectoren op de baankrommen nul, behalve alle in het invariante punt. Het is namelijk niet mogelijk, door het oneigenlijke punt van $P P^{(k)}$ een andere centraal te brengen dan de bij het invariante punt behorende. Een uitzonderingsgeval wordt gevormd door de voerstralen $P P^{(k)}$, die de invariant $D = 0$ (35) snijden.

§ 28. *Polen.*

De voerstraal van de k^e fluctievector in P, $PP^{(k)}$ moge $h = 0$ snijden in $P^{(k)}_\infty$. Stel, dat $P^{(k)}_\infty$ niet op $D = 0$ (35) ligt, dan is er één centraal te vinden, die $P P^{(k)}$ snijdt. Zulk een centraal projecteert de vector in plaats van door een R_{10}, door een R_9. De projectie wordt dus een enkel punt. Op elk tijdstip is er één zo'n punt te vinden, waarvoor de k^e fluctievector in zijn baan nul is. Dit punt noemen we de k-pool der beweging op dat moment. De k-pool heeft in r tot coördinaten (de variabele t is weggelaten):

$$\left\| \begin{matrix} \overset{(k)}{a_1}, & \overset{(k)}{a_2}, & \overset{(k)}{a_3}, & \overset{(k)}{a_4} \\ \overset{(k)}{b_1}, & \overset{(k)}{b_2}, & \overset{(k)}{b_3}, & \overset{(k)}{b_4} \\ \overset{(k)}{c_1}, & \overset{(k)}{c_2}, & \overset{(k)}{c_3}, & \overset{(k)}{c_4} \end{matrix} \right\| \tag{48}$$

Denken we t variabel, dan beschrijft de k-pool in R de k^e poolbaan. De k^e poolkromme, de meetkundige plaats van k-polen in de bewegende ruimte, wordt voorgesteld door (48).

Volgens § 27 reduceert de k^e poolkromme van een beweging om één vast punt zich tot dat punt zelf.

§ 29. *Poolopppervlakken.*

Gaan we, als in de vorige paragraaf aangegeven, de (snelheids-) pool bepalen, dan komen we tot dezelfde moeilijkheden als bij het zoeken van het gemiddelde rotatiecentrum van twee standen. $\underset{\infty}{P^{(1)}}$ ligt namelijk zonder uitzondering op $D = 0$ (35). Door in § 24 S′ en S″ „tot elkaar te laten naderen", blijkt dit. Men kan hoogstens in oneigenlijke zin van een snelheidspool spreken, door het punt $\{P, Q, R, 0\}$ van r als zodanig aan te merken

$$\{P, Q, R\} \equiv \left\| \begin{matrix} \dot{a}_1, & \dot{a}_2, & \dot{a}_3 \\ \dot{b}_1, & \dot{b}_2, & \dot{b}_3 \end{matrix} \right\| \tag{49}$$

Er doen zich weer twee gevallen voor, al naar gelang de matrix (50):

$$\left\| \begin{matrix} \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \dot{a}_4 \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \\ \dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3, \dot{b}_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \\ \dot{c}_1, \dot{c}_2, \dot{c}_3, \dot{c}_4 \\ c_1, c_2, c_3, c_4 \end{matrix} \right\| \tag{50}$$

de rang twee of drie heeft; rang één is weer onmogelijk. Is de rang van (50) twee, dan vindt men op de wijze van § 26 een rechte lijn van punten met snelheid nul,

$$\text{in r: } \{ P, Q, R, S \} \equiv \left\| \begin{matrix} \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \dot{a}_4 \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \\ \dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3, \dot{b}_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right\| \tag{51}$$

in R de projecties van het beeldpunt P (t) der representante vanuit de centralen $\{ P, Q, R, S \}$.

Ze vormen de (ogenblikkelijke) rotatieas.

Heeft de matrix (50) de rang drie, dan is er geen eindig punt, dat een snelheid nul heeft of wel momenteel invariant is. Daarentegen blijft een rechte invariant, de (momentele) schroefas [1]),

$$\text{in r: } \{ P_1, Q_1, R_1, S_1 \} \equiv \left\| \begin{matrix} \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \dot{a}_4, P \dot{a}_1 + Q \dot{a}_2 + R \dot{a}_3 \\ a_1, a_2, a_3, a_4, P a_1 + Q a_2 + R a_3 \\ \dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3, \dot{b}_4, P \dot{b}_1 + Q \dot{b}_2 + R \dot{b}_3 \\ b_1, b_2, b_3, b_4, P b_1 + Q b_2 + R b_3 \\ \dot{c}_1, \dot{c}_2, \dot{c}_3, \dot{c}_4, P \dot{c}_1 + Q \dot{c}_2 + R \dot{c}_3 \\ c_1, c_2, c_3, c_4, P c_1 + Q c_2 + R c_3 \end{matrix} \right\| \tag{52}$$

$$\text{waarin } \{ P, Q, R \} \equiv \left\| \begin{matrix} \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3 \\ a_1, a_2, a_3 \\ \dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix} \right\| \tag{53}$$

In beide gevallen blijft een oneigenlijk punt invariant,

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 355.

namelijk $\{ P, Q, R, 0 \}$ van r (53). Dit zou men de snelheidspool kunnen noemen.

Denkt men t variabel, dan geeft (52) een regelvlak weer: in r het bewegende pooloppervlak. In R wordt het lopende punt op de representante uit de centralen (52) in het vaste pooloppervlak geprojecteerd [1]).

De oneigenlijke kromme van het pooloppervlak wordt gegeven door (53), de „poolkromme". Bij beweging om een vast punt is het pooloppervlak een kegel met een top in dat punt. Het pooloppervlak bestaat dan geheel uit rotatieassen, die alle door het vaste punt gaan.

In het algemeen ligt $\underset{\infty}{P^{(2)}}$ niet op de invariant $D = 0$ (35). Door een voorbeeld kan men dit aantonen. Er zijn dus in het algemeen versnellingspolen in de eigenlijke zin.

§ 30. *Buigkrommen enz.*

Indien de k^e^ en l^e^ fluctievectoren niet dezelfde richting hebben, bepalen ze in het punt der representante

$$P(t_1) \equiv \{ a_1(t_1), a_2(t_1), a_3(t_1), a_4(t_1), b_1(t_1) \;.\;.\;.\;.\; c_4(t_1), 1 \}$$

een vlak. De oneigenlijke rechte daarvan is $\underset{\infty}{P^{(k)}}\,\underset{\infty}{P^{(l)}}$. Door een willekeurig punt van $\underset{\infty}{P^{(k)}}\,\underset{\infty}{P^{(l)}}$, mits niet op $D = 0$ (35) gelegen:

$$\{ \lambda \overset{(k)}{a_1} + \mu \overset{(l)}{a_1} ; \lambda \overset{(k)}{a_2} + \mu \overset{(l)}{a_2} ; \;.\;.\;.\;.\;.\; ; \lambda \overset{(k)}{c_4} + \mu \overset{(l)}{c_4} ; 0 \}$$

kan men de centraal aanbrengen. Men krijgt zo een verzameling van ∞^1 centralen $\{ P, Q, R, S \}$, bepaald door de vergelijkingen

[1]) F. Schuh, Theor. Mech. I, 2, blz. 358.

$$P(\lambda \overset{(k)}{a}_1 + \mu \overset{(l)}{a}_1) + Q(\lambda \overset{(k)}{a}_2 + \mu \overset{(l)}{a}_2) + R(\lambda \overset{(k)}{a}_3 + \mu \overset{(l)}{a}_3)$$
$$+ S(\lambda \overset{(k)}{a}_4 + \mu \overset{(l)}{a}_4) = 0$$
$$P(\lambda \overset{(k)}{b}_1 + \mu \overset{(l)}{b}_1) + Q(\lambda \overset{(k)}{b}_2 + \mu \overset{(l)}{b}_2) + R(\lambda \overset{(k)}{b}_3 + \mu \overset{(l)}{b}_3)$$
$$+ S(\lambda \overset{(k)}{b}_4 + \mu \overset{(l)}{b}_4) = 0$$
$$P(\lambda \overset{(k)}{c}_1 + \mu \overset{(l)}{c}_1) + Q(\lambda \overset{(k)}{c}_2 + \mu \overset{(l)}{c}_2) + R(\lambda \overset{(k)}{c}_3 + \mu \overset{(l)}{c}_3)$$
$$+ S(\lambda \overset{(k)}{c}_4 + \mu \overset{(l)}{c}_4) = 0 \qquad (53)$$

Al deze ∞^1 centralen hebben de eigenschap, dat ze de k^e èn de l^e fluctievector volgens dezelfde R_{10} projecteren, namelijk de R_{10} door de centraal, het punt $P(t_1)$ en de rechte $P^{(k)}_\infty P^{(l)}_\infty$, die de centraal snijdt. De punten $\{P, Q, R, S\}$ van r hebben dus de eigenschap, dat op het moment t_1 de k^e en l^e fluctievector in het baanpunt, waar ze zich dan bevinden, langs elkaar vallen.

De punten $\{P, Q, R, S\}$ van r vormen een rationale kromme. In R tekent die zich af als projectie van $P(t_1)$:

$$X = P\, a_1(t_1) + Q\, a_2(t_1) + R\, a_3(t_1) + S\, a_4(t_1)$$
$$Y = P\, b_1(t_1) + Q\, b_2(t_1) + R\, b_3(t_1) + S\, b_4(t_1)$$
$$Z = P\, c_1(t_1) + Q\, c_2(t_1) + R\, c_3(t_1) + S\, c_4(t_1)$$

P, Q, R en S zijn polynomia van de 3e graad in de homogene parameters λ en μ. De kromme is dus een rationale kromme van de 3e graad. De k-pool en de l-pool liggen erop.

De meetkundige plaats van baanpunten, waar op een moment t_1 de k^e en l^e fluctievector gelijke richting hebben, is een rationale derde graads kromme door de k-pool en de l-pool.

Voor het geval $k = 1$, $l = 2$ krijgen we het analogon van de buigcirkel in het platte vlak: de buigkromme. Op die buigkromme hebben snelheids- en versnellingsvector dezelfde richting, dat wil zeggen: het punt bevindt zich op het gekozen moment in een buigpunt van zijn baan.

De bovengenoemde stelling wordt in dit bijzondere geval: Alle punten, die zich op een moment t_1 in een buigpunt van hun baan bevinden, liggen (in het algemeen) op een rationale derde graads kromme door de versnellingspool (en de „snelheidspool"). Dat de buigkromme het oneindige snijdt in de „snelheidspool", blijkt uit (53) door $\mu = 0$ te stellen.

§ 31. *Vlakpunten op de Baankrommen.*

Combineren we drie fluctievectoren in P (t_1), de k^e^, l^e^ en m^e^, dan bepalen deze een ruimte, voorzover ze niet in één vlak liggen. De ruimte wordt in het algemeen gesneden door ∞^2 centralen; $\{P, Q, R, S\}$ voldoen aan:

$$\begin{aligned}
P(\lambda \overset{(k)}{a_1} + \mu \overset{(l)}{a_1} + \nu \overset{(m)}{a_1}) + Q(\lambda \overset{(k)}{a_2} + \mu \overset{(l)}{a_2} + \nu \overset{(m)}{a_2}) +& \\
R(\lambda \overset{(k)}{a_3} + \mu \overset{(l)}{a_3} + \nu \overset{(m)}{a_3}) + S(\lambda \overset{(k)}{a_4} + \mu \overset{(l)}{a_4} + \nu \overset{(m)}{a_4}) &= 0 \\
P(\lambda \overset{(k)}{b_1} + \mu \overset{(l)}{b_1} + \nu \overset{(m)}{b_1}) + Q(\lambda \overset{(k)}{b_2} + \mu \overset{(l)}{b_2} + \nu \overset{(m)}{b_2}) +& \\
R(\lambda \overset{(k)}{b_3} + \mu \overset{(l)}{b_3} + \nu \overset{(m)}{b_3}) + S(\lambda \overset{(k)}{b_4} + \mu \overset{(l)}{b_4} + \nu \overset{(m)}{b_4}) &= 0 \quad (54) \\
P(\lambda \overset{(k)}{c_1} + \mu \overset{(l)}{c_1} + \nu \overset{(m)}{c_1}) + Q(\lambda \overset{(k)}{c_2} + \mu \overset{(l)}{c_2} + \nu \overset{(m)}{c_2}) +& \\
R(\lambda \overset{(k)}{c_3} + \mu \overset{(l)}{c_3} + \nu \overset{(m)}{c_3}) + S(\lambda \overset{(k)}{c_4} + \mu \overset{(l)}{c_4} + \nu \overset{(m)}{c_4}) &= 0
\end{aligned}$$

Vanuit deze ∞^2 centralen wordt P (t_1) geprojecteerd in ∞^2 punten Q (t_1), een oppervlak vormende. Elk baanpunt Q (t_1) heeft de eigenschap, dat de k^e^, l^e^ en m^e^ fluctievectoren in één vlak liggen, want de k^e^, l^e^ en m^e^ fluctievector in P (t_1) worden er door één R_{11} geprojecteerd op R. Voor zulke punten geldt dus:

$$\begin{vmatrix}
X(t_1), & Y(t_1), & Z(t_1), & 1 \\
\overset{(k)}{X}(t_1), & \overset{(k)}{Y}(t_1), & \overset{(k)}{Z}(t_1), & 1 \\
\overset{(l)}{X}(t_1), & \overset{(l)}{Y}(t_1), & \overset{(l)}{Z}(t_1), & 1 \\
\overset{(m)}{X}(t_1), & \overset{(m)}{Y}(t_1), & \overset{(m)}{Z}(t_1), & 1
\end{vmatrix} = 0$$

Het oppervlak van de punten $\{P, Q, R, S\}$ in r is van de 9e graad in het algemeen, want P, Q, R en S zijn polynomia van de 3e graad in de homogene parameters λ, μ en ν.

Baanpunten met de eigenschap, dat de k^e, l^e en m^e fluctievectoren in één plat vlak liggen, vormen op elk moment een oppervlak van de 9e graad, de projectie van $P(t_1)$ vanuit de centralen (54).

Zo'n oppervlak bevat de (k-l), de (l-m) en de (m-k) kromme en gaat door de k-, de l- en de m-pool.

De 1e, 2e en 3e fluctievectoren in $P(t_1)$ bepalen de hyperosculerende ruimte aan de representante. De ∞^2 centralen, waardoor deze ruimte in het algemeen wordt gesneden, projecteren $P(t_1)$ in de baanpunten op het (1—2—3) oppervlak. Hier liggen snelheids-, versnellings- en 2e versnellingsvector in één vlak. De straal van de kromtebol wordt oneindig groot in die baanpunten; het zijn vlakpunten van de baankrommen:

Op elk moment vormen de punten, die zich in een vlakpunt van hun baan bevinden, een oppervlak van de 9e graad door „pool", versnellingspool en 2e versnellingspool. Het bevat de buigkromme en tevens de (2-3)-, en de (3-1)-kromme (in het algemeen).

§ 32. *Afbeelding door gebonden Quaternionen.*

Zoals reeds in § 21 is opgemerkt, kan het uitgangspunt van de behandeling der kinematica van het platte vlak gekozen worden in transformatievergelijkingen met zes variabelen. Hiertussen bestaan dan drie relaties. De spiegelingen vinden in dit systeem een plaats. De transformatie volgens (1) is als een vereenvoudiging te beschouwen. Het aantal veranderlijken is teruggebracht tot twee met één relatie. Tevens vallen de gespiegelde standen weg.

Voor de ruimte is iets dergelijks mogelijk. Uit de relaties (21), (22′) en (23′) volgt:

$$b_3^2 + c_2^2 = 1 + a_1^2 - b_2^2 - c_3^2 \tag{55}$$

De eigenschap, dat in de orthogonale matrix elk element gelijk is aan zijn cofactor [1], geeft:

$$b_3 c_2 = - a_1 + b_2 c_3 \tag{56}$$

Uit (55) en (56):

$$\begin{aligned} (b_3 + c_2)^2 &= (1 - a_1)^2 - (b_2 - c_3)^2 \\ (b_3 - c_2)^2 &= (1 + a_1)^2 - (b_2 + c_3)^2 \end{aligned} \tag{57}$$

Dergelijke betrekkingen gelden voor de paren variabelen a_2, b_1, en c_1, a_3.

Thans worden vier nieuwe variabelen ingevoerd: a, b, c, d aldus:

$$\begin{aligned} 4\,a^2 &= 1 + a_1 - b_2 - c_3 \\ 4\,b^2 &= 1 - a_1 + b_2 - c_3 \\ 4\,c^2 &= 1 - a_1 - b_2 + c_3 \\ 4\,d^2 &= 1 + a_1 + b_2 + c_3 \end{aligned} \tag{58}$$

In a, b, c en d zijn negen van de twaalf oorspronkelijke grootheden, namelijk $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\ b_3, c_1, c_2\ c_3$ rationaal uit te drukken en omgekeerd, terwijl één relatie overblijft (60).

$$\begin{aligned} b_3 &= 2\,(b\,c + a\,d);\ c_1 = 2\,(a\,c + b\,d) \\ c_2 &= 2\,(b\,c - a\,d);\ a_3 = 2\,(a\,c - b\,d) \\ a_2 &= 2\,(a\,b + c\,d) \\ b_1 &= 2\,(a\,b - c\,d) \\ a_1 &= a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \\ b_2 &= - a^2 + b^2 - c^2 + d^2 \\ c_3 &= - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned} \tag{59}$$

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{60}$$

De tekens zijn door (57) en (59) geheel bepaald [2]. (Formules van Euler).

---

[1] vgl. § 25.

[2] E. A. Weisz, Einführung in die Liniengeometrie u. Kinematik, blz. 94, 95.

Merkwaardig is, dat het aantal variabelen is teruggebracht en daardoor tevens de spiegelingen wegvallen wegens (56).

Samenstellen van twee transformaties $\{a', b', c', d', a_4', b_4', c_4'\}$ en $\{a'', b'', c'', d'', a_4'', b_4'', c_4''\}$ gaat volgens de formules

$$\left.\begin{aligned} a''' &= a'\,d'' + a''\,d' + b'\,c'' - b''\,c' \\ b''' &= b'\,d'' + b''\,d' + c'\,a'' - c''\,a' \\ c''' &= c'\,d'' + c''\,d' + a'\,b'' - a''\,b' \\ d''' &= d'\,d'' - a'\,a'' - b'\,b'' - c'\,c'' \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

$$\begin{aligned} a_4''' &= a_4' + a_4'' \\ b_4''' &= b_4' + b_4'' \\ c_4''' &= c_4' + c_4'' \end{aligned}$$

Hierin is $\{a''', b''', c''', d''', a_4''', b_4''', c_4'''\}$ de resultante. De vergelijkingen (61) zijn de vermenigvuldigingsvergelijkingen voor de quaternionen van Hamilton.

De quaternionen voldoen echter niet aan de relatie (60). Men zou de viertallen $\{a, b, c, d\}$ „gebonden quaternionen" kunnen noemen.

De zeven variabelen $\{a, b, c, d, a_4, b_4, c_4\}$ worden nu opgevat als coördinaten van een zeven-dimensionale beeldruimte. Elke stand van r heeft een beeldpunt in deze ruimte, gelegen op een variëteit V_6^2 (60). Omgekeerd beantwoordt aan elk punt van deze beeldfiguur een stand van r. Het punt $\{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, (1)\}$ wijst bijvoorbeeld het geval aan, waarbij r en R identiek zijn.

De bewegingen hebben weer representanten op de V_6^2. In sommige opzichten is er analogie met de beeldvariëteit B van de voorgaande paragrafen. De figuur (60) is een cylindrische variëteit met als topvlak

$$a = b = c = d = (h) = 0$$

De translaties hebben representanten, die geheel in beschrijvende ruimten R_3 liggen, die dit topvlak met een eindig punt verbinden.

De baankromme van de oorsprong van r kan als projectie van de representante beschouwd worden. Echter is de kinematische transformatie niet lineair. Dit is de reden, waarom de algemene eigenschap, dat elke baankromme projectie is van de representante, verloren gaat.

De vergelijking

$$D_1 = 0 \tag{47}$$

is nodig en voldoende, opdat twee standen S′ en S″ door rotatie in elkaar kunnen overgaan. Na substitutie volgens (59) gaat (47) over in:

$$\begin{aligned} &(a_4' - a_4'')(a' d'' - a'' d' + b' c'' - b'' c') \\ &+ (b_4' - b_4'')(b' d'' - b'' d' + c' a'' - c'' a') \\ &+ (c_4' - c_4'')(c' d'' - c'' d' + a' b'' - a'' b') = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Indien men S‴ invoert als resultante van de inverse van S″ en van S′, krijgt (62) een eenvoudige gedaante:

$$a''' a_4''' + b''' b_4''' + c''' c_4''' = 0$$

Hetzelfde resultaat wordt bereikt door de inverse van S′ met S″ samen te stellen tot S‴.

Het gemiddelde rotatiecentrum $\{ P, Q, R, 0 \}$ in r (45) blijkt na substitutie en overbrenging naar R het punt

$$\{ a''', b''', c''', 0 \}$$

van de vaste ruimte. Daar we hier met quaternionen te doen hebben, was dit te verwachten.

§ 33. *Afbeelding door gebonden Biquaternionen.*

De uiteenzettingen van § 32 zijn te beschouwen als overgang tot de afbeeldingswijze van Study [1]). De standen van r,

[1]) E. Study, Geometrie der Dynamen, blz. 556.

door hem „Somen" genoemd, beeldt hij af op de punten van een zeven-dimensionale ruimte, gelegen op een V^2_6 zonder singulariteiten. Study gebruikt acht homogene variabelen (coördinaten) $\{a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2\}$, waartussen één quadratische relatie bestaat. De eerste vier a_1, b_1, c_1, d_1, zijn gelijk te stellen met de variabelen a, b, c, d uit § 32. Doordat hier homogeen wordt gewerkt, behoeft niet voldaan te zijn aan de relatie (60). Men kan de coördinaten echter delen door $N = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$ en bereikt dan een nauwere aansluiting met § 32. Uitzondering dient gemaakt te worden voor de beeldpunten, waarbij $N = 0$, dus $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Dit zijn de zogenaamde pseudosomen van Study [1]). Ze beantwoorden niet in eigenlijke zin aan standen van r, daar ze overeenkomen met de punten in het oneindige bij de vorige afbeeldingsmethoden. We laten de pseudosomen verder buiten beschouwing en denken de coördinaten dus door de vorm N gedeeld.

De variabelen $\{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ vormen bij Study ook een quaternion. Deze wordt gedefinieerd als product van 2 quaternionen, namelijk

$$\{a_2, b_2, c_2, d_2\} \equiv -\,{}^1\!/_2\,\{a_1, b_1, c_1, d_1\}.\ \{a_4, b_4, c_4, 0\}$$

Dus volgens (61):

$$\begin{aligned} a_2 &= -\,{}^1\!/_2\,(a_4\, d_1 + b_1\, c_4 - b_4\, c_1) \\ b_2 &= -\,{}^1\!/_2\,(b_4\, d_1 + c_1\, a_4 - c_4\, a_1) \\ c_2 &= -\,{}^1\!/_2\,(c_4\, d_1 + a_1\, b_4 - a_4\, b_1) \\ d_2 &= +\,{}^1\!/_2\,(a_1\, a_4 + b_1\, b_4 + c_1\, c_4) \end{aligned}$$

Omgekeerd kan men de oude variabelen uit de nieuwe afleiden

$$\begin{aligned} a_4 &= -2\,(-a_1\, d_2 + a_2\, d_1 - b_1\, c_2 + b_2\, c_1) \\ b_4 &= -2\,(-b_1\, d_2 + b_2\, d_1 - c_1\, a_2 + c_2\, a_1) \\ c_4 &= -2\,(-c_1\, d_2 + c_2\, d_1 - a_1\, b_2 + a_2\, b_1) \\ 0 &= -2\,(+d_1\, d_2 + a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2) \end{aligned} \qquad (63)$$

[1]) E. Study, Geometrie der Dynamen, blz. 580.

Aan elke stand van r beantwoordt zo een „gebonden biquaternion", $\{ a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \}$, een punt van de beeldruimte, dat voldoet aan (63). Ook omgekeerd beantwoordt aan een punt van (63) een stand van r. De beeldvariëteit is een quadriek. Er liggen geen singuliere punten op.

De stand, waarbij r identiek is met R, heeft in dit systeem een beeldpunt in het hoekpunt $\{ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 \}$ van het coördinatenstelsel.

Uit de relatie (62) leidt men voorts af de voorwaarde, waaraan de coördinaten van twee somen moeten voldoen, als ze door rotatie in elkaar zijn over te voeren. Deze blijkt na substitutie te zijn:

$$a_1' \, a_2'' + a_1'' \, a_2' + b_1' \, b_2'' + b_1'' \, b_2' + c_1' \, c_2'' + c_1'' \, c_2' + d_1' \, d_2'' + d_1'' \, d_2' = 0$$

Twee standen, die door rotatie in elkaar kunnen overgaan, hebben beeldpunten, die geconjugeerd liggen ten opzichte van de beeldvariëteit [1]).

[1]) H. Beck, Lineare Somenmannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen Band 81, blz. 195.

INHOUD

STELLINGEN

I

Er bestaat een natuurlijk verband tussen de coördinaten der „linkse" en der „rechtse Somen".

E. A. Weisz, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematiek, blz. 115.

II

Door G. Schaake (Versl. Kon. Ak. v. Wetensch. XXXII, 1923, blz. 626) wordt een aantal stellingen afgeleid betreffende kegelsneden in R_3. De meeste van zijn resultaten zijn met de gebruikelijke afbeeldingsmethode niet op eenvoudige wijze te verkrijgen.

III

Bij de bepaling van Planck's constante h door middel van het photoeffect is kennis van de snelheidsverdeling der uittredende electronen niet noodzakelijk.

P. Lukirsky en S. Prilezaev, Zs. f. Physik, Bd. 49 (1928), blz. 236.

L. A. DuBridge, Phys. Rev. Bd. 43 (1933), blz. 727.

IV

De beschouwingen van A. Boutaric omtrent diffusiemetingen aan suspensies geven weinig aanleiding tot de conclusie, dat deze slechts qualitatieve betekenis hebben voor de bepaling der optische dichtheid.

A. Boutaric, Revue d' Optique XI, (1932), blz. 145.

V

Ten onrechte kenschetst Bavink de tegenwoordige natuurwetenschap als op weg naar de religie.

Bernhard Bavink, Die Naturwissenschaft auf dem Wege zur Religion.

VI

Zij een functie $f(x)$ gegeven op het segment $a \leqq x \leqq b$; $f(a) < 0, f(b) > 0$. Indien $f'(x)$ aldaar bestaat en niet stijgt, kan de benaderingswijze van Newton worden toegepast.

F. Schuh, Lessen over de Hoogere Algebra I, blz. 457.

VII

De stelling (Korollar), door J. Ridder genoemd, (Nw. Arch. v. Wisk. XVII, 1932, blz. 280) kan eenvoudig worden bewezen, ook voor een meer uitgebreide klasse van functies dan de continue.

VIII

Bij zijn afleiding van de formule voor de wiskundige reserve ener ziekteverzekering gaat F. P. Berckenhoff uit van een onjuiste onderstelling.

F. P. Berckenhoff, Het Verzekeringsarchief VII (1926), blz. 49.

IX

Volgens de methode van Moll is het mogelijk, de sterftekansen der leeftijden in gehele jaren q_x onmiddellijk te berekenen zonder tussenschakeling van $q_{x+1/2}$.

D. P. Moll, Het Verzekeringsarchief XIII (1932), blz. 8.

X

Een nader onderzoek naar de aard van de zgn. K-termen in de spectra van spiraalnevels is nodig.

E. Hubble, Red Shifts in the Spectra of Nebulae.

XI

De methode 't Hooft is van weinig waarde voor het bevolkingsvraagstuk.

Ir. F. W. 't Hooft, Het Bevolkingsvraagstuk.