Het geslacht van vlakke algebraische krommen

HET GESLACHT VAN VLAKKE ALGEBRAISCHE KROMMEN

HET GESLACHT VAN VLAKKE ALGEBRAISCHE KROMMEN.

Diss. Utrecht 1937

HET GESLACHT VAN VLAKKE ALGEBRAISCHE KROMMEN

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. W. E. RINGER, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 1 MAART 1937, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

HUBERTUS ANTONIUS GRIBNAU

GEBOREN TE ARNHEM.

DRUKKERIJ J. HOEIJENBOS N.V. — UTRECHT

1937

AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER MOEDER.

AAN MIJN VADER.

AAN MIJN VERLOOFDE.

Bij de voltooiing van dit werk zij het mij vergund hier mijn dank te betuigen aan allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming en academische opleiding hebben bijgedragen.

In het bijzonder dank ik U, Hooggeleerde BARRAU, Hooggeachte Promotor, voor de belangstelling en bereidwilligheid, die ik van U tijdens de bewerking van dit proefschrift mocht ondervinden.

INHOUD.

blz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I.

De ontwikkeling van het geslachtsbegrip 4

HOOFDSTUK II.

Clebsch 14

HOOFDSTUK III.

Geslacht en Plückersche formules 20

HOOFDSTUK IV.

Birationale Invariantie 24

HOOFDSTUK V.

De invariantie van „p" t.o.v. Cremona-transformatie . 25

HOOFDSTUK VI.

Het oorspronkelijke Riemannsche bewijs 31

HOOFDSTUK VII.

De methode van Clebsch 35

HOOFDSTUK VIII.

Het bewijs van Cremona 48

HOOFDSTUK IXa.

Het bewijs van Bertini 50

HOOFDSTUK IXb.

Het bewijs van Zeuthen 51

HOOFDSTUK X.

De formule van Zeuthen en het algemeen correspondentie-principe 60

HOOFDSTUK XI.

Het bewijs van Clebsch—Noether 63

HOOFDSTUK XII.

De methode van Enriques en Severi; de Italiaansche School 68

HOOFDSTUK XIII.

Toepassingen van de stelling van het behoud van geslacht bij birationale transformatie, door middel van de theorie der puntgroepen 77

INLEIDING.

In „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (Inauguraldissertation) (1) en „Theorie der Abelschen Functionen" (J. f. M. Bd. 54) (2) [1]) opende Riemann voor het behandelen van algebraische functies geheel nieuwe wegen, die hem o.a. voerden tot een merkwaardige verwantschap tusschen deze functies door de „birationale transformatie". Door de samenhang tusschen functie en onafhankelijk veranderlijke op te vatten als vergelijking van een algebraische kromme, heeft Clebsch deze resultaten vruchtbaar gemaakt voor de geometrie en kwam hierbij omgekeerd op problemen, die bijdroegen tot de ontwikkeling der functie-theorie.

Riemann beschouwde als tot een klasse behoorend alle irreducibele algebraische vergelijkingen, $F(s, z) = 0$, in 2 variabelen, welke door rationale substituties in elkaar zijn om te zetten.

Hierbij is p gegeven door de formule:

$$p = \tfrac{1}{2}\, w - (n - 1)$$

waarin het aantal vertakkingspunten w gedefinieerd is door $F = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial s} = 0$, en n de graad is van $F = 0$.

Het bewijs van de gelijkheid van p voor functies, die door een birationale verwantschap verbonden zijn, ontleent Riemann aan de Analysis Situs.

De resultaten, die Clebsch verkregen had voor de krommen van de derde graad, uit hun samenhang met de elliptische functies, deden hem zoeken naar een dergelijke samenhang voor

1) J. f. M. = Journal für die reine und angewandte Mathematik (Voortzetting van Crelles Journal).

hoogere krommen met hoogere transcendenten. Als eerste vrucht van zijn onderzoekingen verkreeg Clebsch een nieuwe klassificatie voor de algebraische krommen, nl. naar hun geslacht, d.i. naar de klasse van de Abelsche functies, die met een vlakke kromme van de n-de graad samenhangen. Hij nam hierbij als grondslag niet het Riemannsche oppervlak $F(s, z) = 0$, maar de algebraische kromme $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ van de n-de graad, zonder dubbelpunten, d.i. een in projectieve opvatting algemeene kromme. De definitie van vertakkingspunten $(F = 0, \frac{\partial F}{\partial s} = 0)$ nam hij hierbij uit Riemann over, evenals de vergelijking

$$p = \tfrac{1}{2} w - (n - 1)$$

en de transcendente definities van p, nl. uit de samenhang van het Riemannsche oppervlak en het aantal overal eindige integralen, integralen van de eerste soort.

Het bewijs van de invariantie van het geslacht van algebraische krommen t.o.v. birationale transformatie, direct volgend uit de Riemannsche theorie, is een onderwerp van onderzoek geweest van vele geometers, als Clebsch, Bertini, Zeuthen, Cremona, Schubert, Noether, e.a.

De verschillende bewijzen voor de invariantie van het geslacht t.o.v. birationale transformatie hebben, als men van het eene op het andere overgaat, een zoo verschillende vorm, dat men een geheel nieuw gebied denkt te betreden, terwijl nadere beschouwing echter aantoont, dat het onderscheid niet zoozeer in wezen, als wel in de gevolgde methode en voorstellingswijze gelegen is.

In het volgende willen wij de diverse vormen van dit bewijs nagaan en vergelijken. Voor een vergelijking van de verschillende systemen leek ons een voorstelling van hun inhoud en hulpmiddelen in hun historische ontwikkeling geboden, waarom zooveel mogelijk is getracht de chronologische volgorde te handhaven en de bewijzen in hun origineele opzet te geven. Bij het weergeven der verschillende theorieën hebben wij, wat critiek en beoordeeling betreft, ons ertoe beperkt opmerkingen in te lasschen omtrent hun onderlinge samenhang en de voor- en nadeelen die hen kenmerken.

Waar wij de diverse vormen van het bewijs van de invariantie van het geslacht willen nagaan en in verband hiermede de vraag zou kunnen rijzen naar een practische bepaling van het geslacht, verwijzen wij hiervoor naar:

H. Baker, „On examples of the application of Newton's polygon to the theory of singular points of algebraic functions" (Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume XV), (3), en

H. F. Baker, „The practical determination of the deficiency and adjoint curves for a Riemann-surface." (Math. Ann. Bd. 45) (4).

In het slothoofdstuk „Toepassingen van de Stelling van het behoud van het geslacht bij birationale transformatie, door middel van de theorie der puntgroepen" hebben wij o.m. eenige nieuwe stellingen afgeleid voor de derdegraadsruimtekromme en de vierdegraadsruimtekromme van geslacht 0 en 1.

HOOFDSTUK I.

De Ontwikkeling van het geslachtsbegrip.

Van de grootheden die invariant zijn bij rationale transformaties van een algebraische kromme, heeft Clebsch er in de periode van 1863—1865 een uit Riemann overgenomen, nl. „die Klassenzahl" p, welke Clebsch als „Geschlechtszahl" van de kromme $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ aanduidt.

Zij heeft voor een kromme van de n-de graad, met d gewone dubbelpunten en k gewone keerpunten de waarde:

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k$$

en is in dezen vorm afkomstig van Clebsch (vergelijk: Riemann, Crelles Journal Bd. 54) (2). Door overgang van punt op klassecoördinaten en de daardoor ontstane (1,1)-correspondentie verkreeg Clebsch:

$$p = \tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2) - \delta - \varkappa$$

een nieuwe verbinding van de bekende Plückersche vergelijkingen, terwijl Cayley (Quaterly Journal t. 11, pg. 185) (5) met behulp van p de formules van Plücker in de meest eenvoudige vorm bracht, welke zich het gemakkelijkst leenen voor het onthouden, nl.:

$$\begin{aligned} 2p-2 &= \gamma + k - 2n \\ 2p-2 &= n + \varkappa - 2\gamma \\ 2p-2 &= n(n-3) - 2(d+k) \\ 2p-2 &= \gamma(\gamma-3) - 2(\delta+\varkappa) \end{aligned}$$

De beteekenis van het getal p voor de geometrie werd overigens onafhankelijk van Clebsch ook ingezien door H. A. Schwarz, (J. f. M. t. 64) (6) die in het bijzonder de bij

$p = 0$ behoorende „planaren abwickelbare Flächen" behandeld heeft.

Schwarz stelt in zijn artikel voorop:

Omnes curvae planae, quae in eadem superficie rectilinea irreductibili simplices sitae sunt, praeter generatrices ipsas, ad eandem classem algebraicam pertinent, nam si duas contemplamur, unicuique puncto alterius per rectas superficies unum punctum alterius algebraice respondet; itaque coordinatae alterius rationaliter per coordinatas alterius exprimi possunt.

Si curva algebraica r^{ti} ordinis $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)-\varrho$ punctis duplicibus praedita est, coordinatae ejus rationaliter exprimi possunt:

si $\varrho = 0$, sive si curva maximo numero punctorum duplicium praedita est, per unam variabilem,

si $\varrho = 1$, per unam variabilem et radicem quadratam ex functione integra tertii vel quarti ordinis hujus variabilis,

si $\varrho = 2$, per unam variabilem et radicem ex functione integra quinti vel sexti ordinis,

si $\varrho > 2$, coordinatae rationaliter exprimi possunt per unam variabilem ξ et algebraicam functionem ejus η, quae junguntur aeqatione μ^{ti} ordinis secundum utramque variabilem, ubi $\varrho = 2\mu - 3$ aut $2\varrho = 2\mu - 3$ aut $2\mu - 2$.

In casu generali coordinatae non possunt rationaliter exprimi per unam variabilem ξ et functionem algebraicam ejus η, radicem aequationis algebraicae $F(\xi, \eta) = 0$, quae secundum variabilem inferioris ordinis est quam μ^{ti}.

(H. A. Schwarz. De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. J. f. M. Bd. 64). (6).

Ook Salmon wees op de belangrijkheid van p: „we call the deficiency of a curve the number D (= p) by which its number of double points is short of the maximum; this number playing a very important part in the theory of curves......" (Salmon: A treatise on the higher plane curves.) (7).

Descartes noemde de algebraische krommen „geometrische krommen" en bedoelde met „mechanische krommen" die, welke wij in navolging van Leibniz transcendent noemen. Hij deelde eerstgenoemde in in geslachten „genres", waarbij hij iedere 2 opvolgende graden 2n + 1 en 2n + 2 tot één „genre" vereenigde. (Descartes: La Géometrie.) (8). Deze indeeling is door Newton vervangen door de tegenwoordig nog gebruikelijke naar de graad van de krommen.

De meest fundamenteele classificatie der algebraische krommen, nl. naar hun p, is de inzet van het werk van Clebsch.

De klasse van Abelsche functies, bepaald op een Riemannsch oppervlak behoorende bij een vlakke algebraische kromme van de n-de graad, wordt bepaald door het getal:

$$p = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$$

als de kromme geen dubbelpunten en keerpunten heeft en Clebsch verkreeg in „Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie" (J. f. M. t. 63) (9) een rij fraaie geometrische resultaten, die op deze opmerking steunen. De geometrische toepassingen van de theorie der Abelschen functies zijn zoo talrijk, dat Clebsch zich beperkte tot de uitwerking van eenige gevallen, die vooral betrekking hebben op de theorie van de krommen van de vierde graad en bevatten o.a. een oplossing van het probleem der dubbeltangenten, welke zich door een uit den aard der zaak voortvloeiende overzichtelijke groepeering van deze merkwaardige lijnen aanbeveelt.

Hierbij komen als vanzelf te voorschijn een rij van stellingen, reeds door Hesse en Steiner (Bd. 49 J. f. M.) (10) gegeven, over de 63 systemen van kegelsneden, die een kromme van de 4-de graad in 4 punten raken en de 64 systemen van 3-de graadskrommen, die een 4-de graadskrommen in 6 punten raken, reeds door Hesse en Steiner gegeven, en waarop Hesse zijn fraaie verklaring, van de tusschen de 28 dubbeltangenten optredende relaties door de verbindingslijnen van 8 punten in de ruimte, gebaseerd heeft.

Iedere algebraische vergelijking F (s, z) = 0, waardoor s als functie van z is bepaald, is volgens Riemann de basis voor een klasse van Abelsche integralen. Uit de overal eindig blijvende integralen, die men hierbij verkrijgt, worden de argumenten van Θ-functies op lineaire wijze samengesteld. Neemt men de p argumenten van een Θ-functie als bekend aan, dan correspondeeren hiermee p waarden van z, welke de bovenste grenzen van de constitueerende integralen vormen; en dezen, of een of andere algebraische functie ervan, laten zich bepalen als wortels van een vergelijking van de p-de graad, waarvan de coefficienten rationaal zijn samengesteld uit Θ-functies.

Het getal p wordt aangegeven door:

$$p = \tfrac{1}{2} w - (n-1)$$

(Riemann: Theorie der Abelschen Functionen. J. f. M. Bd. 54) (2).

Hierin is n de graad van de gegeven vergelijking t.o.v. s, w het aantal malen, dat $F'(s) = 0$, zonder dat $F'(z) = 0$. Hierbij wordt verondersteld, dat voor de waardensystemen, waarvoor $F'(s) = 0$ en $F'(z) = 0$, niet

$$F''(ss).\ F''(zz) - F''(sz)^2 = 0$$

is. (Vergelijk onderstaande opmerking, pag. 8).

Waar Riemann (l.c.) als grondslag neemt de Riemannsche algemeene vorm $F(s^n, z^m) = 0$, waarin de coefficienten van alle machten van s alle van de m-de graad in z zijn, en het daarbij behoorend Riemannsch-oppervlak, neemt Clebsch als grondslag de algemeene algebraische kromme.

$F(s^n, z^m) = 0$ zou voeren tot een in Clebsche opvatting speciale kromme, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, met een n-voudig punt in $A = 0$, $B = 0$ en een m-voudig punt in $C = 0$ en $D = 0$, als men s en z als de parameters van 2 waaiers $A - sB = 0$ en $C - zD = 0$ opvat.

Clebsch ging daarom uit van een kromme $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ van de n-de graad zonder dubbelpunten, dat is een in projectieve zin algemeene kromme. Van hieruit komt hij door 2 niet-speciale (t.o.v. $f = 0$) waaiers met parameters s en z tot een speciale Riemannsche vorm $F(s^n, z^n) = 0$, waarin nu de waarden $s = \infty$ of $z = \infty$ niets bijzonders meer hebben. De w parameters z_i der werkelijke tangenten van de z-waaier geven de w vertakkingspunten van het s voorstellend Riemannsche oppervlak op het z-vlak.

Zoo wordt dus, daar:

$$p = \tfrac{1}{2}\, w - (n-1)$$

en $\quad w = n\,(n-1)$, of $w = n\,(n-1) - 2d$,

als $f = 0$ d gewone dubbelpunten heeft,

$$p = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d.$$

Hierbij werden dus de definitie van vertakkingspunt (uit $F = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$) en de vergelijking $p = \tfrac{1}{2}\, w - (n-1)$ door Clebsch uit Riemann overgenomen.

$p = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d$, is aldus het getal, dat de klasse van de tot een kromme van de n-de graad behoorende Abelsche functies aangeeft.

Opmerking.

Is $F'(s) = 0$ en $F'(z) = 0$, dan is ook $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ en heeft de kromme een dubbelpunt. Is

$$F''(ss).\,F''(zz) - F''(sz)^2 = 0,$$

dan treedt een keerpunt op. De beperking

$$F''(ss).\,F''(zz) - F''(sz)^2 = 0$$

is op te heffen door op te merken, dat voor ieder keerpunt het aantal tangenten met één vermeerderd moet worden.

Bij het voorkomen van keerpunten is het aantal raakpunten:

$$n\,(n-1) - 2\,d - 3\,k.$$

Dan wordt:

$$w = n\,(n-1) - 2\,d - 2\,k$$

en dus:

$$p = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d - k.$$

Nu kunnen met behulp van de elliptische functies ($p = 1$) van één variabele, in parametervorm worden voorgesteld de algemeene krommen van de derde graad, de krommen van de vierde graad met 2 dubbelpunten, etc.; met behulp van de eerste klasse van de Abelschen transcendenten de krommen van de vierde graad met één dubbelpunt, of die van de vijfde graad met 4 dubbelpunten, etc.

Als eerste vrucht van zijn onderzoekingen verkreeg Clebsch zoo een nieuwe indeeling van de algebraische krommen, die men tot dan slechts door hun graad had onderscheiden, met daarin onderverdeelingen naar het aantal dubbelpunten.

De Clebsche indeeling geschiedt naar de geslachten (Geschlechtszahlen), dus naar het getal p. Tot het eerste geslacht behooren alle algebraische krommen met $p = 0$; tot het tweede allen, waarvoor $p = 1$ etc. Nu komen omgekeerd de verschillende graden als onderdeelingen in de geslachten en wel tot $p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$, waarbij men dan heeft de meest algemeene, d.w.z. zonder dubbelpunten of keerpunten, kromme van de n-de graad.

De tot hetzelfde geslacht behoorende krommen kan men ook daardoor definieeren, dat hun homogene coördinaten zijn voor te stellen door rationale geheele functies van 2 parameters s en z, welke verbonden zijn door een algebraische vergelijking $f(s, z) = 0$, welke een bijbehoorende klasse van Abelsche functies bepaalt.

Voor $p = 0$ kan men s in z rationaal uitdrukken.

Voor $p = 1$, komt in de voorstelling van s in z de vierkantswortel uit een uitdrukking van de derde of de vierde graad, enz.

Na op deze nieuwe indeeling gewezen te hebben, behandelde Clebsch het eerste geslacht, waarvoor $p = 0$, dus de krommen waarvoor het aantal dubbelpunten en keerpunten bij bepaalde graad maximaal is, welke krommen reeds, hetzij beperkt, besproken waren door Salmon in „Treatise on higher plane curves." (7)

De algemeene methode voor het omzetten van de vergelijking van een kromme van geslacht 1 in de parametervoorstelling, waarbij de coördinaten elliptische functies zijn van 1 veranderlijke, werd door Clebsch uitgewerkt in de verhandeling „Ueber diejenigen Curven, deren Coördinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen." [1]) (J. f. M. t. 64) (11).

Veelal kan men bij speciale gevallen het uitvoeren der algemeene methode nalaten en kan men door voor het probleem geeigende substituties tot de verlangde parametervoorstelling geraken.

Wij willen dit aan een speciaal voorbeeld demonstreeren. In zijn „Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis" heeft O. Schlömilch (13) een bijzondere vlakke kromme van de vierde graad als volgt gedefinieerd:

De m.p. der punten, waarvoor de rechthoeken gevormd uit de afstanden van een punt tot een vaste rechte en tot een vast punt, constante oppervlakte bezitten.

Deze kromme en het krommensysteem dat men verkrijgt door de constante te laten varieeren is uitvoerig onderzocht door G. Huber in „Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajectoriën und die Cissoiden 4-ter Ordnung" (Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrgang 6). (14).

Is FA $=$ 2a de loodrechte afstand van het vaste punt F (brandpunt) tot de vaste rechte (richtlijn), r de afstand van een willekeurig punt P der kromme tot F en d de loodrechte afstand van dit punt tot de richtlijn, dan geldt voor alle punten P van de kromme de betrekking: $r.d = a.k$, waarin k een bepaald positief getal beteekent.

Het voorstellen van de konstante door a.k in plaats van k^2 is een practische handigheid, waardoor alle uitdrukkingen eenvoudiger zijn voor te stellen.

Nemen de middelloodlijn van FA als IJ-as en het midden van FA als oorsprong 0. De abscis van het brandpunt is dan $x = a$.

In cartesische coördinaten wordt de vergelijking van de kromme dan:

---

1) Voor een moderne uitvoering hiervan vergelijke men J. L. Coolidge: A treatise on algebraic plane curves (12).

$$y^2 (x + a)^2 + (x^2 - a^2)^2 = a^2 k^2$$

$$\text{of:} \quad y = \pm \frac{\sqrt{a^2 k^2 - (x^2 - a^2)^2}}{x + a}$$

Deze kromme is dus van de vierde graad en ligt symmetrisch t.o.v. de X-as. Door k te laten varieeren van 0 tot ∞ krijgt men een krommensysteem van index 2.

Uit de vergelijking van de kromme volgt direct, dat het oneindig verre punt der IJ-as (en richtlijn) een dubbelpunt der kromme is, en dat de rechte $x = -a$ (richtlijn) asymptoot aan 2 takken der kromme is, welke in het oneindige 4 samenvallende punten met de kromme gemeen heeft; het oneindig verre punt der richtlijn is een punt van zelfcontact. De kromme gaat verder door de imaginaire cirkelpunten van het vlak.

Het punt van zelfcontact telt voor 2 samenvallende dubbelpunten, zoodat men voor de Plückersche getallen van de kromme berekent:

$$n = 4, \gamma = 8, \varkappa = 12, \delta = 8, p = 1.$$

De richtlijn, als tangent in het punt van zelfcontact telt onder de dubbeltangenten voor 2, de overige 6 blijken imaginair te zijn. De vorm van de kromme hangt verder af van de waarde van k. Voor $k = 0$ heeft de kromme nog een dubbelpunt in 0 en is dan rationaal.

De poolvergelijking van de conchalen t.o.v. brandpunt F (a, o) als pool en de positieve X-as als poolas, kan gebracht worden in den vorm:

$$r^2 (r \cos \varnothing + 2a)^2 = a^2 k^2$$

De algemeene conchaal is van geslacht 1, en haar coordinaten zijn dus rationaal als elliptische functies van 1 variabele voor te stellen.

$$y = \pm \frac{\sqrt{(x^2 + a k - a^2)\ (a k + a^2 - x^2)}}{x + a}$$

Al naar $k \gtreqless a$ geschiedt de invoering der elliptische functies verschillend.

Geval 1: $k > a$.

De concaal bestaat uit 2 oneindige takken, rechts en links van de richtlijn liggend.

Stel $x = \sqrt{a(k+a)}\,\sqrt{1-z^2}$. Modulus $\chi = \sqrt{\frac{k+a}{2k}} < 1$

$$y = \frac{2ak\chi \,.\, z\sqrt{1-\chi^2 z^2}}{a + \sqrt{2ak}\,.\,\chi\sqrt{1-z^2}}$$

Stel nu $z = \mathrm{sn}\,u$, $\sqrt{1-z^2} = \mathrm{cn}\,u$, $\sqrt{1-\chi^2 z^2} = \mathrm{dn}\,u$,

dan worden de vergelijkingen der conchaal:

$$x = \sqrt{2ak}\,.\,\chi\,.\,\mathrm{cn}\,u$$

$$y = \frac{2ak\,.\,\chi\,.\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{dn}\,u}{a + \sqrt{2ak}\,.\,\chi\,.\,\mathrm{cn}\,u}$$

De coördinaten van de punten der kromme zijn daarmee eenduidig door elliptische functies uitgedrukt; met iedere reëele waarde van u komt een rechts van de IJ-as liggend punt, met imaginaire een links van de IJ-as liggend punt der kromme overeen.

Twee even groote, tegengestelde waarden van u geven 2 symmetrisch t.o.v. de X-as liggende punten.

Omgekeerd hoort bij een punt der kromme niet één waarde van u, maar oneindig veel. Is u één dezer waarden, dan zijn de overigen voor te stellen door: $u \pm 4\,m\,K \pm 4\,n\,i\,K'$, waarbij $4\,K$ en $4\,i\,K'$ de reëele en imaginaire perioden der elliptische functies voorstellen. De kromme heeft eveneens deze perioden.

Geval 2: $k = a$.

De conchaal is dan unicursaal en haar coördinaten moeten dan voor te stellen zijn door trigonometrische, of door rationale functies van één variabele.

In bovenstaande voorstelling $k > a$, wordt nu modulus $\chi = 1$ en gaan de elliptische functies in hyperbolische over.

Nu wordt:

$\mathrm{Sn}\,u = \mathrm{th}\,u,\ \mathrm{cn}\,u = \mathrm{dn}\,u = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,u}$ en de vergelijkingen gaan over in:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{\mathrm{Ch}\,u}$$

$$y = \frac{2\,a\ \mathrm{th}\,u}{\sqrt{2} + \mathrm{Ch}\,u}$$

Door het stellen van $\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{cotg}\,\phi$, $\mathrm{Ch}\,u = \dfrac{1}{\mathrm{Sin}\,\phi}$ en $\mathrm{th}\,u = \cos\phi$ worden de vergelijkingen:

$$x = a\sqrt{2}\ \mathrm{Sin}\,\phi$$

$$y = \frac{a\ \mathrm{Sin}\,2\,\phi}{1 + \sqrt{2}\ \mathrm{Sin}\,\phi}$$

Geval 3. $k < a$.

Vergelijking der kromme:

$$y = \pm\ \frac{\sqrt{\left\{x^2 - a(a-k)\right\}\left\{a(a+k) - x^2\right\}}}{x + a}$$

Wij voeren dan uit de substituties:

$$x = \sqrt{\frac{a(a-k)}{1 - \chi^2 z^2}}, \quad \chi = \sqrt{\frac{2\,k}{a+k}}, \quad \chi^2 + \chi'^2 = 1,$$

$$\chi' = \sqrt{\frac{a-k}{a+k}} \quad \text{en} \quad z = \mathrm{sn}\,u.$$

De vergelijkingen van de conchaal worden dan:

$$x = \frac{\sqrt{a(a-k)}}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$y = 2\,a\,k\,\chi'\ \frac{\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u\,(\sqrt{a\,(a-k)} + a\,\mathrm{dn}\,u)}$$

HOOFDSTUK II.

Clebsch.

De groote beteekenis van Clebsch voor de ontwikkeling der moderne geometrie en de invoering van het geslachtsbegrip door Clebsch zijn voor ons aanleiding aan hem en zijn werk een apart hoofdstuk te wijden.

De grootste en voornaamste verdienste van Clebsch is geweest, buiten zijn uitgebreid ander werk op geometrisch en algebraisch gebied, door de invoering van de Abelsche functies en de door hem ontwikkelde beschouwingswijzen in de geometrie, aan de geometrie een nieuwe en geweldige opbloei te hebben gegeven.

De aanleiding hiertoe was de samenwerking, die ontstond tusschen Clebsch en Gordan (1863). Clebsch was hoogleeraar te Giessen, waar in 1863 Gordan de Analysis kwam doceeren. Van deze tijd dateert de nieuwe richting in het werk van Clebsch.

In „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit" door Brill-Noether (Jahresbericht der Deutschen Mathematikerverein. Dritter Band 1894) (15) lezen wij: „Welche Mühe es Clebsch verursachte, dem es doch an Belesenheit und Vielseitigkeit keineswegs fehlte, in Riemann's Abhandlung über Abelsche Functionen einzudringen, geht aus einem Brief an Roch vom August 1864 vor, wo Clebsch erklärt, das er selbst nach den grössten Bemühungen von Riemann's Abhandlung nur wenig verstanden habe."

Door de nauwe samenwerking met Gordan nu werd Clebsch beter bekend met de Abelsche functies en in het bijzonder met de toentertijd nog betrekkelijk weinig bekende Riemannsche onderzoekingen. Wat uit het gezamenlijke werk van

C l e b s c h—G o r d a n op rekening van C l e b s c h en wat op rekening van G o r d a n geschreven moet worden is niet geheel uit te maken, daar zij veel van hun werk gemeenschappelijk hebben gepubliceerd. In het algemeen mag men wel zeggen, dat wat de geometrische uitwerking en interpretatie betreft van de verkregen algebraische resultaten, deze geheel op C l e b s c h alleen is terug te voeren, terwijl de afleidingen behoorend tot de analysis van dezen dikwijls van G o r d a n afkomstig zullen zijn geweest.

De directe aanleiding, om de transcendente functies met de nieuwere geometrie in verband te brengen, werd voor C l e b s c h wel op de eerste plaats een door S t e i n e r zonder bewijs bekend gemaakte stelling (C r e l l e, J. f M. t. 33), (16) welke betrekking heeft op polygonen die in een kromme van de derde graad beschreven kunnen worden.

In „Ueber einen Satz von S t e i n e r und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung" (J. f. M. t. 63) (17), de eerste publicatie waarin C l e b s c h de theorie der transcendente functies op de geometrie toepaste, gaf hij namelijk van de Steinersche Stelling: „Es giebt unendlich viele Polygone von 2n Seiten und 2n Ecken, deren Ecken auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte a derselben treffen, und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt b der Curve gehen. Ist a gegeben, so ist b dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkte a und b giebt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste durch a gehende Seite ganz beliebig gewählt werden kann.", een eenvoudig en doorzichtig bewijs, door uit te gaan van een voorstelling van de coördinaten der punten van zulk een kromme door elliptische functies van één parameter, zooals deze door A r o n h o l d (J. f. M. t. 61) (18) gegeven was. Het bewijs komt neer op een toepassing van het additietheorema der elliptische functies, daar tusschen de bovenste grenzen van 3 elliptische integralen van de eerste soort, waarvan de som gelijk is aan een constante, dezelfde betrekking bestaat als tusschen de drie abscissen der snijpunten van een rechte met een kromme van de derde graad, in wier vergelijking slechts het kwadraat der ordinaat optreedt.

Door deze opmerking is niet slechts de stelling van Steiner zonder meer te bewijzen, maar zijn ook al de merkwaardige theorema's, door Mac-Laurin, Poncelet, Plücker, Hesse en Steiner opgesteld, over de buigpunten der krommen van de derde graad, over de tangenten, de contactkegelsneden ervan, etc., als met één slag opgelost: zij zijn teruggebracht tot de eenvoudige vergelijking, welke zegt, dat de sommen der bij de snijpunten behoorende argumenten gelijk zijn aan een constante op veelvouden van de 2 perioden na.

Spoedig hierna verscheen de groote verhandeling van Clebsch over „Die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie" (J. f. M. t. 63) (9) waarvan de richtlijnen in 2 verdere publicaties „Ueber diejenigen Curven, deren Coördinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen" (J. f. M. t. 64) (19) en „Ueber diejenigen Curven, deren Coördinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen" (J. f. M. t. 64) (11), voor de eenvoudigste gevallen uitvoeriger in practijk werden gebracht.

De grondslag hiervan is de idee, dat de vergelijking, die Abel tot definieering van de irrationaliteit van de naar hem genoemde integralen vooropstelt, is op te vatten als de vergelijking van een algebraische kromme.

Aan deze verhandeling van Clebsch hebben wij het fundamenteele klassificatie-principe voor algebraische krommen, het geslacht, te danken.

Dit begrip, was naar zijn beteekenis voor vergelijkingen tusschen 2 variabelen het eerst door Riemann ingezien, wat echter zijn analytische eigenschappen betreft ook Abel niet vreemd, die de vraag heeft gesteld (Mémoires des savants étrangers t. 7) (20) naar het kleinste aantal integralen, waarop men een som van integralen met gegeven grenzen kan terugvoeren.

Volgens Clebsch behooren tot eenzelfde klasse al die algebraische krommen, welke zoodanig aan elkaar kunnen worden toegevoegd, dat met ieder punt van de eene kromme slechts één punt der andere overeenkomt (bijv. kromme en evolute), of wat hetzelfde is, dat de eene kromme uit de andere door eenduidige transformatie kan worden afgeleid (verg.: Clebsch: Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. J. f. M. t. 64) (21). Bij elke klasse behoort een karakteristiek getal, het geslacht (Geslechtszahl), welk getal voor de krommen van eenzelfde klasse constant is.

Voor een gegeven kromme is het geslacht „Geslechtszahl" een functie van de graad en het aantal dubbel- en keerpunten, anderzijds is het gelijk aan de klasse der Abelsche functies, waardoor de coördinaten harer punten als functies van één parameter kunnen worden voorgesteld.

Mocht de idee van de geometrische interpretatie van het geslachtsbegrip, in de tijd dat Clebsch zijn verhandeling schreef, wel reeds in het gevoel der mathematische wereld gelegen hebben en in bijzondere gevallen ook wel tot uitdrukking zijn gekomen (H. A. Schwarz) (6), dit doet niets af aan het feit, dat Clebsch deze voor het eerst algemeen uitsprak en wat van nog grooter beteekenis is, haar draagwijdte doorzag en ze practisch bruikbaar wist te maken.

Sedert dien tijd is het geslachtsbegrip ingeburgerd in de geometrie, en wordt zonder onderscheid in de synthetische zoowel als in de analytische richting toegepast. Het is geen toeval, dat de algemeene op algebraische krommen betrekking hebbende „Abzählungs"-formules, door de invoering van het geslacht essentieel vereenvoudigd zijn, zooals bijv. de correspondentieformules voor puntsystemen op een kromme van hooger geslacht, welke correspondentieformule (Cayley) een veralgemeening is van het correspondentieprincipe van Chasles, dat slechts betrekking heeft op rationale „Gebilde" van één dimensie.

De stelling van het behoud van het geslacht bij eenduidige transformatie is op zich zelf beschouwd een algebraische, en eischt als zoodanig een direct, d.w.z. niet op beschouwing van integralen gebaseerd, algebraisch, of wat bij de huidige ontwikkeling der geometrie zeggen wil, geometrisch bewijs.

Het bewijs zooals dit oorspronkelijk door Riemann gegeven is, behoort tot de Analysis Situs. De stelling behoort tot een gebied, dat wat zijn ontstaan betreft nauw met de theorie der Abelsche functies verbonden is, maar hiervan als iets zelfstandigs moest worden losgemaakt, nl. het ten tijde van Clebsch eerst weinig onderzochte gebied van de invariante eigenschappen van algebraische relaties bij willekeurige eenduidige transformaties.

Door in „Theorie der Abelschen Functionen, Abschnitt 3" (22) het probleem der eenduidige transformatie van een kromme op algebraische wijze te formuleeren, gelukte het Clebsch-Gordan een direct algebraisch bewijs van het behoud van het geslacht te geven, door middel van een subtiel eliminatieproces, waarbij zij, in plaats van een identisch nul wordende resultante, met behulp van „variatie der constanten" een uitdrukking vormen, welke deze vervangt; een werkwijze, die zich sedert dien in andere problemen der geometrie meerdere malen bruikbaar heeft getoond.

Uit al het werk van Clebsch blijkt, hoe volkomen hij het algebraisch apparaat beheerschte. Clebsch was trouwens in de eerste plaats algebrist, waarnaast zich in latere onderzoekingen een zuiver geometrisch begrip stelde, waardoor iedere stap door de berekening uitgevoerd, in een aanschouwelijke vorm werd gebracht. Maar het is niet de concrete wijze de ruimtelijke verhoudingen te zien, zooals wij deze bij vele andere geometers vinden; de geometrische aanschouwing is voor hem meer symbool en oriënteeringsmiddel voor de algebraische problemen waarmee hij zich bezig houdt.

Steeds zal Clebsch tegenover andere geometers te karakteriseeren zijn door het samengaan der algebraische en geometrische opvatting, en uit zijn uitgebreid oeuvre zal men dat bovenaan moeten stellen, waarin hij door deze dubbele begaafdheid, tot dan tot gescheiden takken der wetenschap in hun gemeenschappelijke logische grondslag samenvatte.

De voordrachten van Clebsch over de geometrie zijn door

F. Lindemannn verzameld en bijgewerkt in „Vorlesungen über die Geometrie". In de Fransche vertaling „Leçons sur la Géométrie" omvat dit driedeelige werk:

1e. Traité des sections coniques et introduction à la théorie des formes algébriques.

2e. Courbes algebriques en général et courbes du troisième ordre.

3e. Integrales Abéliennes et connexes.

HOOFDSTUK III.

Geslacht en Plückersche formules.

Gaan wij nu uit van een rationale kromme van de n-de graad.

$\vartheta\, x = f_1\ (\lambda)$ $\quad$ f_i hoogstens van graad n, minstens één f_i heeft
$\vartheta\, y = f_2\ (\lambda)$ $\quad$ graad n. Wij veronderstellen verder eenmalige
$\vartheta\, z = f_3\ (\lambda)$ $\quad$ overdekking, hetgeen steeds te bereiken is volgens het rekenvoorschrift van A p p e l l.

In klassecoördinaten:

$$\{\mu\, u_1,\ \mu\, u_2,\ \mu\, u_3\} = \left\| \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \end{matrix} \right\|$$

Hieruit vindt men:

$$\gamma = 2n - 2$$

Substitutie in de eerste Plückersche formule, waarbij wij alleen gewone dubbelpunten toelaten:

$$\gamma = n\ (n - 1) - 2\ d$$

geeft:

$$d = \tfrac{1}{2}\ (n - 1)\ (n - 2).$$

Heeft een kromme van de n-de graad meer dan

$$\tfrac{1}{2}\ (n - 1)\ (n - 2)$$

dubbelpunten, dan is de kromme ontaard.

Immers indien er meer zijn, kan men door deze

$$\tfrac{1}{2}\ (n - 1)\ (n - 2) + 1$$

en $(n-3)$ andere punten van de kromme, een kromme leggen van de graad $(n-2)$. Het aantal snijpunten van deze C^{n-2} met de C^n is dan:

$$2.\ \tfrac{1}{2}\ (n-1)\ (n-2) + n-3 = n\ (n-2) + 1$$

dus de C^{n-2} heeft òf met de C^n een ontaardingsdeel gemeen, òf is een deel van de C^n (C. Mac Laurin, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, 1720). Dit bewijs toont slechts aan, dat krommen van een bepaalde graad niet meer dan een bepaald aantal dubbelpunten kunnen hebben, en laat niet zien, wat inderdaad het geval is, dat zij er steeds zooveel kunnen hebben. [1])

Het bovenstaande gaat ook door als onder de dubbelpunten keerpunten aanwezig zijn. Heeft de kromme meervoudige punten van hoogere orde, dan is hetzelfde criterium van toepassing, waarbij dan elk meervoudig punt van k-de orde als equivalent met $\frac{1}{2}k(k-1)$ dubbelpunten gerekend moet worden. Er zijn natuurlijk grenzen voor de mogelijkheid om een bepaald aantal dubbelpunten te vervangen door een meervoudig punt van hoogere orde. Immers een kromme van bijv. de vijfde graad kan 6 dubbelpunten hebben. Vervangt men een drietal door een drievoudig punt, dan is dit met de resteerende 3 dubbelpunten niet meer te doen.

Heeft omgekeerd een kromme het maximaal aantal dubbelpunten (bij die graad n) dan is de kromme rationaal, d.w.z. de coördinaten van haar punten kunnen worden voorgesteld door rationale algebraische functies van één parameter.

Men neme hiertoe een bundel C^{n-2}, met basispunten in de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelpunten en in $n-3$ overige punten van de C^n.

$C_1^{n-2} + \lambda\, C_2^{n-2} = 0$ geeft op C^n één variabel snijpunt, afhankelijk van λ.

Los uit $C_1^{n-2} + \lambda\, C_2^{n-2} = 0$ en $C^n = 0$ (bij onderdrukking van z) bijv. met Sylvester y op, door eliminatie van x.

---

[1]) Aan een ander bewijs voor

$$d_{max.} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

afkomstig van W. Esson in „On Synthetic Geometry" (Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXVIII) (23) mag geen waarde worden toegekend.

De resulteerende vergelijking is van de graad n (n — 2), waarin de coëfficiënten polynomen zijn in λ. Deze vergelijking in y geeft slechts één nieuwe waarde voor y, daar reeds n (n—2)—1 wortels vast gekozen zijn.

Wij kiezen de symmetrische functie van de wortels:

$$\Pi y_i = f(\lambda).$$

De ééne onbekende y is dus $y = \dfrac{f(\lambda)}{\Pi \text{ (gekozen wortels)}}$.

Zoo is dus y rationaal in λ uitgedrukt. De polynomen in λ zijn van n-de graad of lager. De kromme wordt slechts eenmaal doorloopen als λ over een rechte loopt.

Rationale krommen bezitten dus het maximum aantal dubbelpunten voor niet-ontaarde krommen van die graad.

Bij niet-ontaarde krommen is:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k \geqq 0$$

Stel:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k = p.$$

p = geslacht (Geschlecht, Clebsch)
p = D (Deficiency, benaming ingevoerd door Cayley)
p is een autoduale grootheid, immers:

$$n(n-1) - \gamma - 2d - 3k = \gamma(\gamma-1) - n - 2\delta - 3\varkappa \quad . \ . \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{2} n(n+3) - d - 2k = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+3) - \delta - 2\varkappa \quad . \ . \ . \ . \quad (2)$$

1-ste lid (2) = aantal voorwaarden, die een kromme van graad n met d dubbelpunten en k keerpunten bepalen.

2-de lid (2) = aantal voorwaarden, die een kromme van klasse γ, met δ dubbeltangenten en $\varkappa$ buigpunten bepalen.

Optelling van (1) en (2) geeft:

$$\tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d - k =$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\gamma-1)\,(\gamma-2) - \delta - \varkappa = p$$

HOOFDSTUK IV.

Birationale Invariantie.

Het geslacht is invariant:

1. voor alle collineaties; immers alle Plückersche getallen zijn invariant.

2. voor alle birationale transformaties.
   De birationale transformaties kunnen wij onderscheiden in 2 groepen, nl.:
   a. de transformaties van vlak op vlak, de z.g. Cremona-transformaties.
   b. de transformaties van kromme op kromme, de z.g. Riemann-transformaties.

Elke Cremonatransformatie is een Riemanntransformatie, echter niet omgekeerd.

Waar wij de verschillende bewijzen voor de invariantie van p willen nagaan, zouden wij dus met de Riemanntransformaties kunnen volstaan. Voor de volledigheid en uit historisch oogpunt willen wij in het kort ook een bewijs van de invariantie van p t.o.v. Cremonatransformaties opnemen.

HOOFDSTUK V.

De invariantie van „p" t.o.v. Cremona-transformatie.

a. Een Cremonatransformatie, overgang van vlak (x_1, x_2, x_3) naar (x'_1, x'_2, x'_3) is gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \vartheta \,.\, x'_1 &= \emptyset_1 (x_1, x_2, x_3) \\ \vartheta \,.\, x'_2 &= \emptyset_2 (x_1, x_2, x_2) \\ \vartheta \,.\, x'_3 &= \emptyset_3 (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3$, bekende functies van (x_1, x_2, x_3) van n-de graad,

en omgekeerd

$$\begin{aligned} \vartheta' \,.\, x_1 &= \emptyset'_1 (x'_1, x'_2, x'_3) \\ \vartheta' \,.\, x_2 &= \emptyset'_2 (x'_1, x'_2, x'_3) \\ \vartheta' \,.\, x_3 &= \emptyset'_3 (x'_1, x'_2, x'_3) \end{aligned}$$

Als deze inverse uitdrukkingen mogelijk zijn, moeten ook de $\emptyset_i$ van n-de graad zijn in (x'_1, x'_2, x'_3).

Immers met de n snijpunten van

$$\sum_1^3 \alpha_i x_i = 0 \text{ met een kromme } \sum_1^3 \beta_i \emptyset_i = 0$$

zal in het andere stelsel correspondeeren, het snijpuntensysteem van

$$\Sigma\, \alpha_i\, \emptyset'_i = 0 \text{ met } \Sigma\, \beta_i\, x'_i = 0,$$

dat dus ook uit n punten moet bestaan,

Gaan wij de voorwaarden na, waaronder dit mogelijk is.

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (a_1, a_2, a_3),$$

hiermede correspondeert in het andere systeem de snijfiguur der krommen,

$$\emptyset_1 : \emptyset_2 : \emptyset_3 : = a_1 : a_2 : a_3.$$

Aantal snijpunten is n^2, indien de $\emptyset_i$ algemeene krommen zijn van de n-de graad.

Hebben de $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3$ g gemeenschappelijke punten, dan gaan de krommen $\frac{\phi_1}{a_1} = \frac{\phi_2}{a_2} = \frac{\phi_3}{a_3}$ steeds hierdoor en zijn er slechts n^2—g loopende snijpunten. Deze n^2—g punten correspondeeren dan met het gegeven punt (x'_1, x'_2, x'_3). Is $g = n^2 - 1$, dan één loopend snijpunt; de coördinaten van het resteerende snijpunt zijn dan éénduidig bepaald en zijn dus rationale functies van (x'_1, x'_2, x'_3), en er bestaan uitdrukkingen van den vorm:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \phi'_1 : \phi'_2 : \phi'_3$$

1-ste voorwaarde voor Cremonatransformatie is dus, dat de krommen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 n^2—1 gemeenschappelijke snijpunten hebben.

Deze voorwaarde moet echter gecompleteerd worden door een tweede. Wij mogen nl. de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 niet zoo nemen, dat zij n^2—1 verschillende punten gemeen hebben, omdat zij dan $(n > 2)$ nog een punt gemeen zouden hebben, en dan dus geen loopend snijpunt zouden leveren. Men kan aan de voorwaarden die het probleem stelt toch voldoen, door nl. voor ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 krommen te nemen, die gemeen hebben:

α_1 gewone punten,
α_2 dubbelpunten,
α_3 3-voudige punten,
etc., zoodanig dat deze gezamenlijk equivalent zijn met n^2—1 snijpunten, en dat het aantal hierdoor opgelegde voorwaarden 2 minder is dan het aantal noodig om een kromme van de graad n te bepalen.

Het geven van een r-voudig punt stelt

$$C^2_{r+1} = \tfrac{1}{2}\, r\, (r+1)$$

voorwaarden en zulk een punt gemeen aan 2 krommen telt voor r^2 snijpunten. Wij krijgen zoo dus de vergelijkingen:

$$\alpha_1 + 2^2 \alpha_2 + \ldots + r^2 \alpha_r = n^2 - 1 \qquad (1)$$

en
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + C^2_3 \alpha_2 + C^2_4 \alpha_3 + \ldots + C^2_{r+1} \alpha_r = \tfrac{1}{2} n (n+3) - 2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \tfrac{1}{2} r (r+1) \alpha_r = \tfrac{1}{2} n (n+3) - 2 \end{array}\right. \qquad (2)$$

of: $$\alpha_1 + 2^2 \alpha_2 + \ldots + r^2 \alpha_r = n^2 - 1 \qquad (1)$$

en $$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\, \alpha_r = 3(n-1) \qquad (2a)$$

(2a is verkregen door de vergelijking (2) met 2 te vermenigvuldigen en daarna met (1) te verminderen.)

Wij hebben dan evenveel manieren van transformatie met behulp van krommen van de n-de graad, als deze vergelijkingen (1) en (2a) oplossingen hebben met geheele positieve waarden voor α_1, α_2, α_3, etc., met de restrictie dat het aantal meervoudige punten, dat de krommen verondersteld worden te hebben voldoet aan de beperking, die wij reeds noemden (pg. 21).

Het is nu mogelijk het karakter te bepalen van de kromme, die correspondeert met een kromme van de k-de graad, waarvan wij veronderstellen, dat zij niet door één van de basispunten gaat.

Substitutie van ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 voor x'_1, x'_2, x'_3, in een functie van de k-de graad, geeft een functie van de graad nk.

Hebben de krommen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 een punt (a_i) gemeen, dan zal de lijn in de andere figuur, die met (a_i) correspondeert de kromme S in k punten snijden, die alle correspondeeren met (a_i); dit is dus een k-voudig snijpunt.

Analoog: elk van de hoofdpunten α_r zal een rk-voudig punt zijn. Heeft de oorspronkelijke kromme geen meervoudige punten, dan zal de getransformeerde kromme geen meervoudige punten hebben buiten de hoofdpunten.

De graad van de getransformeerde kromme is nk en het corresponderend maximum aantal dubbelpunten: $\frac{1}{2}$ (nk—1) (nk—2).

De hoofdpunten zijn meervoudige punten van de getransformeerde kromme, en het aantal dubbelpunten waarmee zij equivalent zijn is:

$$\tfrac{1}{2}\alpha_1 k(k-1) + \tfrac{1}{2}\alpha_2 . 2k(2k-1) + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}\alpha_r rk(rk-1)$$

of:

$$\tfrac{1}{2}k^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots\ldots r^2\alpha_r) - \tfrac{1}{2}k(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots\ldots r\alpha_r)$$

en in verband met vergelijking (1) en (2a):

$$\tfrac{1}{2}(n^2-1)k^2 - \tfrac{3}{2}(n-1)k.$$

Het geslacht van de getransformeerde kromme is dus:

$$p = \tfrac{1}{2}(nk-1)(nk-2) - \{\tfrac{1}{2}(n^2-1)k^2 - \tfrac{3}{2}(n-1)k\} = \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2),$$

dat is hetzelfde als het geslacht van de oorspronkelijke kromme. Heeft de oorspronkelijke kromme meervoudige punten buiten de hoofdpunten, dan zullen hiermee op de getransformeerde kromme meervoudige punten van dezelfde orde correspondeeren.

Dus:

Het geslacht is invariant t.o.v. Cremonatransformaties.

Litteratuur:

Cremona: Sulla trasformazione geometriche delle figure piane, Nota 1 ed 2. Mem. di Bologna. Ser. 2 t. II, 1863 en Ser. 2 t. V, 1865 (24 en 25).

Cayley: On the rational transformations between two spaces. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 3. 1869. (26).

Salmon: A treatise on higher plane curves. (7).

De beteekenis van Cremona's werk is gelegen in de geometrisch algebraische voorstelling van de één-éénduidige correspondentie van twee vlakken, zooals deze door hem voor het eerst abstract werd gedefinieerd.

Met een rechte van het eene vlak correspondeert een net algebraische krommen van de n-de graad in het tweede vlak, welke krommen echter zooveel gemeenschappelijke punten moeten hebben, dat twee der krommen elkaar in het algemeen slechts in één variabel punt (in het bijzonder geval in oneindig veel) snijden.

De inhoud van het werk van Cremona bestaat in het opstellen van criteria voor deze eischen, het karakteriseeren der fundamentaalpunten en die punten waarmee oneindig veel punten (een fundamentaalkromme) correspondeeren; het opstellen van de eigenschappen dezer transformaties en het aangeven van systemen van transformaties, die aan de criteria voldoen.

In de theorie van Cremona over deze speciale klasse van eenduidige transformaties, zien wij de eerste poging om eigenschappen welke krommen van een zelfde klasse gemeen hebben, nl. de rationaal invariante eigenschappen, langs geometrisch-algebraischen weg af te leiden.

Is van de invloed van het werk van Cremona in de verhandeling van Clebsch, „Ueber die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie", (J. f. M. Bd. 63. 1863) (9) nog niets te bespeuren, zoo vinden wij deze wel in het hoofdstuk: „Ueber die eindeutigen Transformationen" (Theorie der Abelschen Functionen, Abschnitt 3, von Clebsch—Gordan) (22), waar tevens naar het werk van Cremona verwezen wordt.

b. De voorwaarden in het voorgaande opgesteld voor transformatie van vlak op vlak zijn niet noodzakelijk voor rationale transformatie als wij slechts de transformatie van de gegeven kromme $S = 0$ beschouwen.

$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \emptyset_1 : \emptyset_2 : \emptyset_3$, $\emptyset_1$ functies van n-de graad in (x_1, x_2, x_3), die niet noodzakelijk aan de Cremona-voorwaarden voldoen.

1 punt (x_1, x_2, x_3) geeft 1 punt (x'_1, x'_2, x'_3), daar (x'_1, x'_2, x'_3) gegeven zijn als rationale functies van (x_1, x_2, x_3).

Hebben $\emptyset_1$, $\emptyset_2$, $\emptyset_3$ α_1 gewone snijpunten, α_2 dubbelpunten etc., dan zullen met een punt (x'_1, x'_2, x'_3),

$$(n^2 - \alpha_1 - 4\,\alpha_2 \ldots - r^2\,\alpha_r)$$

punten (x_1, x_2, x_3) correspondeeren.

Het aantal: $n^2 - \sum\limits_1^r k^2\,\alpha_k{}^2 = \Theta$ zal in het algemeen van één verschillen. De meetkundige plaats der punten in het geaccentueerde vlak, die correspondeeren met de punten van de kromme S, zal zijn een kromme S′, die met S correspondeert, en met ieder punt P van S zal een punt P′ van S′ correspondeeren.

P′ zal echter behalve met P nog met $\Theta - 1$ andere punten in het niet-geaccentueerde vlak correspondeeren. Deze $\Theta - 1$ punten liggen in het algemeen niet op S en de figuur, die met

S' correspondeert, bestaat uit S en een restfiguur, de m.pl. van de $(\Theta-1)$ punten.

Beschouwen wij alleen punten op de kromme S, dan bestaat er dus tusschen S en S' een $(1, 1)$ verwantschap.

Ofschoon dus de vergelijkingen

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \phi_1 : \phi_2 : \phi_3$$

niet voldoende zijn om rationale uitdrukkingen te geven van (x_1, x_2, x_3) in (x'_1, x'_2, x'_3), wordt dit anders, als wij de vergelijkingen combineeren met de vergelijking $S = 0$.

Als wij uit de vergelijkingen x_1, x_2, x_3 elimineeren, krijgen wij een vergelijking $S' = 0$, welke de voorwaarde is, voor de coëxistentie van het systeem vergelijkingen. Is deze voorwaarde vervuld, dan kan men in het algemeen rationaal de waarden van x_1, x_2, x_3 bepalen, die aan al de vergelijkingen van het systeem voldoen. Een uitwerking hiervan is te vinden in:

Salmon: Higher Algebra, Lesson 10. (27).

Wij zien dus, dat als een kromme S wordt getransformeerd door een substitutie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \phi_1 : \phi_2 : \phi_3,$$

men in het algemeen een rationaal inverse uitdrukking

$$x_1 : x_2 : x_3 = \phi'_1 : \phi'_2 : \phi'_3$$

kan verkrijgen.

Het geslacht is ook invariant voor deze $(1,1)$ transformaties, welke wij samenvatten onder de naam Riemann-transformaties.

Het meest fundamenteele bewijs voor dit theorema is het eerst gegeven door Riemann, uit de theorie der Abelsche functies. (Crelle's Journal für die Mathematik, Bd. 54) (2).

HOOFDSTUK VI.

Het oorspronkelijke Riemannsche bewijs.

De formules van Plücker leeren graad en klasse van een kromme en het aantal buigpunten, dubbeltangenten, dubbelpunten en keerpunten kennen, als drie van deze grootheden bekend zijn. In een groot aantal gevallen kan men nog een relatie toevoegen, zoodat voor de bepaling van de gezamenlijke singulariteiten dan slechts 2 ervan bekend hoeven te zijn, zooals uit onderstaande (1) volgt.

De verbinding van de theorie der krommen met de theorie der Abelsche functies voert tot deze relatie. Men kan volgens de richtlijnen door Clebsch (J. f. M. Bd. 63) (9) aangegeven, de krommen indeelen naar de klasse van Abelsche functies, welke zij leveren, of met het daarmee overeenkomend getal p.

Als nu uit de gegeven kromme een andere wordt afgeleid, zóó dat met ieder punt of iedere tangent der ééne kromme in het algemeen slechts één punt of tangent der andere overeenkomt, dan voeren beide krommen tot dezelfde Abelsche integralen, behooren dus tot hetzelfde geslacht en hebben dus dezelfde p.

Dit theorema is slechts een andere inkleeding van het theorema van Riemann, zooals dit door Riemann (J. f. M. Bd. 54) (2) gegeven is.

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k = \tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2) - \delta - \varkappa$$

De gelijkheid van deze twee waarden volgt uit de Plückersche formules zelf, kan echter ook uit bovengenoemd principe worden afgeleid, door op te merken, dat indien men het behoud van het geslacht aanneemt, in het algemeen bij een punt der kromme slechts één tangent in dat punt behoort, en omgekeerd. Bij overgang van punt- op klassecoördinaten is n met γ, d met δ, k met $\varkappa$ te verwisselen, zoodat dus de eene uitdrukking voor p, de andere met zich meebrengt.

Heeft een kromme, welke met de aangegeven beperking uit de oorspronkelijke is afgeleid, de karakteristieke getallen n', γ', d', δ', k', $\varkappa'$ dan is ook:

$$p = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - d' - k' = \tfrac{1}{2}(\gamma'-1)(\gamma'-2) - \delta' - \varkappa' \quad (1)$$

en dit is de relatie die steeds voor zulke krommen geldt.

Het oorspronkelijke bewijs van Riemann behoort tot de Analysis situs en is als volgt te resumeeren.

Met een algebraische vergelijking

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

of in rechthoekige coördinaten $F(x, y) = 0$ correspondeert een Riemannsch-oppervlak, waarvan de samenhang bij definitie gegeven is door $2p + 1$, dat wil zeggen, dat het door 2p sneden kan gemaakt worden tot een enkelvoudig samenhangend oppervlak, waarbij p voorstelt het geslacht van F.

Als nu 2 krommen F en F_1 door een (1,1)-verwantschap gebonden zijn, is dit insgelijks het geval met de correspondeerende Riemannsche oppervlakken. De samenhang is dus krachtens haar begrip hetzelfde voor beide oppervlakken, d.w.z. gelijk aan $2p + 1$, waaruit dan direct de gelijkheid van het geslacht volgt.

In § 11 van „Theorie der Abelschen Functionen" (J. f. M. Bd. 54) (2), drukt Riemann zich als volgt uit:

„Die Gleichung

$$F(s^n, z^m) = 0$$

kann durch eine rationale Substitution in

$$F_1(s_1^{n_1}, z_1^{m_1}) = 0$$

und diese in jene transformiert werden.

Die Grössengebiete (s, z) und (s_1, z_1) sind gleichvielfach zusammenhangend, da jedem Punkt des einen *ein* Punkt des andern entspricht. Bezeichnet daher r_1 die Anzahl der Fälle, in welchen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Grössengebiets (s_1, z_1) beide denselben Werth annehmen und folglich

gleichzeitig F_1, $\frac{\partial F_1}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ gleich 0 und

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1 \cdot \partial z_1}\right)^2$$

nicht Null ist, so musz:

$$(n_1-1)\,(m_1-1) - r_1 = p = (n-1)\,(m-1) - r$$

sein." Of in verband met

$$w = 2\{(n-1)\,m-r\},$$

$$\tfrac{1}{2}\,w_1 - (n_1-1) = p = \tfrac{1}{2}\,w - (n-1).$$

Men zou de vraag kunnen opperen, of de p gedefinieerd uit de samenhang van het Riemannsche oppervlak dezelfde is, als de vroeger gedefinieerde. Hiervoor verwijzen wij naar het volgende hoofdstuk, waar wij nader ingaan op de meer geometrische methode van Clebsch.

Bij het bovenstaande merken wij op, dat de constructie van het Riemannsch oppervlak dat bij F behoort, y als functie van x beschouwt, afhangt van het gekozen coördinatenstelsel.

Meer in overeenstemming met de fundamenteele begrippen van de Projectieve meetkunde is dan ook de methode, zooals Klein deze uitwerkte.

Klein: Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen, Math. Ann. t. VII. (28).

Klein: Sitzungsberichte der phys. med. Societät zu Erlangen. Mai. 1874. (29).

Klein: Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen. Math. Ann. t. VII. (30).

Hij beschouwt de variabelen in $f = 0$ als lijncoördinaten, en knoopt hieraan direct een constructie vast van een oppervlak, dat het vlak meerbladig overdekt. Het Kleinsche Riemannsch oppervlak verschaft voor de functies, waarvan de irrationaliteit gegeven is door $F = 0$, dezelfde hulpmiddelen als het Riemannsche.

Ook het behoud van het geslacht laat zich hiermee aantoonen, al doet zich dan eenige complicatie voor. Bestaat tusschen 2 krommen een (1,1)-correspondentie, dan zal dit voor de bijbehoorende Kleinsche oppervlakken niet voor alle punten gelden. In het algemeen komen op beide oppervlakken fundamentaalpunten voor, punten waarmee een geheele kromme van het andere oppervlak correspondeert. In plaats van de gelijkheid der samenhang van 2 oppervlakken die (1,1) correspondeeren, krijgt men hier een relatie tusschen de samenhang van elk oppervlak en de wederzijdsch optredende aantallen fundamentaalpunten.

HOOFDSTUK VII.

De methode van Clebsch.

Zij $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ de homogene vergelijking van een algebraische n-de graads kromme op driehoekscoördinaten.

Dan is: $\sum\limits_1^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = 0 \ldots$ (Euler)

en: $\sum\limits_1^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = 0$

zoodat: $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} (:) \left\| \begin{matrix} x_i \\ d\,x_i \end{matrix} \right\|$.

De differentiaaluitdrukking:

$$\frac{\sum\limits_1^3 \pm c_1 \cdot x_2 \cdot d\,x_3}{\sum\limits_1^3{}_i\, c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

is dan onafhankelijk van de greep $\{c_i\}$. Deze symmetrische uitdrukking van dergelijke differentiaaluitdrukkingen werd het eerst gegeven door Aronhold (Monatsberichte der Berliner Akademie 1861) (31).

Zij $\phi(x_1, x_2, x_3)$ een homogene rationale functie van de orde $(n-3)$.

$$\frac{\phi \sum \pm c_1 x_2 d\,x_3}{\sum\limits_1^3{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot c_i}$$

is dan slechts afhankelijk van één variabele, is nl. t.o.v. de x homogeen van de nulde orde, verandert niet als men de x_1, x_2, x_3 met een gemeenschappelijke factor verandert en hangt dus slechts af van de verhoudingen $\frac{x_1}{x_3}$ en $\frac{x_2}{x_3}$ welke verhoudingen echter verbonden zijn door $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Integreeren wij tusschen 2 punten van de kromme

$$V = \int \frac{\phi \Sigma \pm c_1 x_2 d x_2}{\sum_1^3 i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot c_i}$$

dan is deze, in het algemeen, irrat. algebr. integraal de meest algemeene integraal van een rationale functie van x_1, x_2, x_3, welke men vormen kan.

Voor het bewijs zie men: Theorie der Abelschen Functionen, Clebsch und Gordan (22) en Cours d'Analyse, Jordan (32).

Kiezen wij nu een nieuwe gronddriehoek, bestaande uit het punt $\{c_i\}$ en 2 willekeurig gekozen punten $\{a_i\}$ en $\{b_i\}$ en transformeeren de integraal met behulp van de lineaire transformatie:

$$\{\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3\} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \{t, x, s_x\}.$$

(t, x, s_x) zijn dus de coördinaten van (x_1, x_2, x_3) t.o.v. de nieuwe gronddriehoek.

Substitutie voert tot:

$$V = \int \frac{\Psi(t, x, s_x) \cdot (t\, dx - x\, dt)}{\frac{\partial F}{\partial s_x}}$$

waarbij t, x, s_x, gebonden zijn door $F(t, x, s_x) = 0$.

De differentiaaluitdrukking is weer homogeen van de nulde orde, en zonder aan de algemeenheid te kort te doen, is $t = 1$ te stellen:

$$V = \int \frac{\Psi d x}{\frac{\partial F}{\partial s_x}}$$

waarbij nu $F = 0$ een vergelijking is in x en s_x, die s_x als functie van x definieert. De integraal is nu dus getransformeerd tot een gewone integraal met één variabele.

Bij t = 1, volgt uit de transformatieformules:

$$0 = \Sigma \pm a_1 \,.\, b_2 \,.\, x_3 + s_x \,.\, \Sigma \pm c_1 \,.\, b_2 \,.\, x_3$$

d.i. waaier met top in $\{b_i\}$.

$$0 = \Sigma \pm a_1 \,.\, c_2 \,.\, x_3 + x \,.\, \Sigma \pm b_1 \,.\, c_2 \,.\, x_3$$

d.i. waaier met top in $\{c_i\}$.

s_x en x zijn de parameters in deze waaiers.

Om de integraal V in een aantal eenvoudiger integralen te splitsen, stelle men $\Psi = \frac{M}{N}$. Graad van N zij m, dus van M $(n + m - 3)$. $F = 0$ en $N = 0$ snijden elkaar in mn punten, welke wij verschillend onderstellen. Uit $\{c_i\}$ trekt men de mn stralen naar de snijpunten, waarmee evenzoovele waarden van x overeenstemmen. De vergelijking van deze stralen zij $X = 0$, van graad mn.

Wij kunnen nu X schrijven in den vorm:

$$X = AF + BN. \text{ (Noether-theorema } Af + B\,\emptyset.)$$

In de origineele opzet komt Clebsch hiertoe eerst na eenige berekening, daar het Noether-theorema nog niet bekend was. Wij passen direct $Af + B\emptyset$ toe ter bekorting van de berekening.

A en B zijn door deze vergelijkingen niet volkomen bepaald, want men kan A resp. B vervangen door $A + CN$ resp. $B - CF$, waarin C een willekeurige kromme van graad $(mn - m - n)$.

B is van de graad $m\,(n-1)$ en gaat door de $mn\,(n-1)$ snijpunten van F en X, die niet op N liggen. Wij kunnen nu kiezen met een $(m-1)\,(n-1)$-voudig punt in $\{c_i\}$. Evenzoo: A van graad $n\,(m-1)$, gaat door de $mn\,(m-1)$ snijpunten van X en N, die niet op F liggen, en wij kiezen A met een $(m-1)\,(n-1)$-voudig punt in $\{c_i\}$, d.i. in $(t = 0,\ x = 0)$. Voor Ψ kan men dus schrijven $\Psi = \frac{MB}{X}$, waarin X een functie is van den graad mn in x alleen, terwijl de teller een functie is van den graad $(mn + n - 3)$. Laagste exponent die in A en B voorkomt bij t en x is $(m-1)(n-1)$, zoodat dus de hoogste macht van s_x in de teller is:

$$(m+n-3) + (mn-m) - (m-1)(n-1) = m+2n-4.$$

Dus $MB = s_x^{m+2n-4} . X_{(m-1)(n-1)} + s_x^{m+2n-5}$
$$. X_{(m-1)(n-1)-1} + \ldots\ldots + X_{mn+n-3}.$$

X zijn functies van x alleen, van graad = index.

Stel nu $C = s_x^{m+n-4} . \xi_{(m-1)(n-1)} + s_x^{m+n-5}$
$$. \xi_{(m-1)(n-1)-1} \ldots\ldots + \xi_{mn-3}$$

De functies ξ zijn zoo te bepalen, dat $MB + CF$ geen hoogere **machten van s_x bevat, dan s_x^{n-1}.**

$$F = f_o s_x^n + f_1 s_x^{n-1} + \ldots\ldots + f_n = \sum_o^n k\, f_k\, s_x^{n-k}$$

$f_0 \neq 0$, dus $\{c_i\}$ d.i. het punt $(t = 0, x = 0)$ niet op de kromme.
Dan is:

$$0 = X_{(m-1)(n-1)} + \xi_{(m-1)(n-1)} . f_o$$

$$0 = X_{(m-1)(n-1)+1} + \xi_{(m-1)(n-1)+1} . f_o + \xi_{(m-1)(n-1)} . f_1$$

. . . .

$$0 = X_{mn-3} + \xi_{mn-3} . f_o + \xi_{mn-4} . f_1 + \ldots + \xi_{mn-n-3} . f_n$$

Hierdoor zijn de functies volkomen en eenduidig bepaald.

Dus is: $MB + CF = X'_{mn-2}\, s_x^{n-1} + X'_{mn-1}\, s_x^{n-2} +$
$$\ldots\ldots + X'_{mn+n-3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_x} = \sum_0^{n-1} k\, (n-k) f_k . s_x^{n-k-1}$$

Stel: $\frac{1}{n f_0} X'_{mn-2} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_x} = D \cdot \frac{\partial F}{\partial s_x}$,

dan is: $MB + CF - D \frac{\partial F}{\partial s_x} = X''_{mn-1} \cdot s_x^{n-2} +$

$$X''_{mn} \cdot s_x^{n-3} + \ldots + X''_{mn+n-3}$$

In verband met $F = 0$ wordt dus:

$$\frac{M}{N} = \frac{MB - D \frac{\partial F}{\partial s_x}}{X} + \frac{D}{X} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_x} =$$

$$\frac{1}{X}(X''_{mn-1}\, s_x^{n-2} + \ldots + X''_{mn+n-3}) + \frac{D}{X} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_x}$$

De integraal V vervalt dus in twee stukken:

$\int \frac{D}{X} dx$ is de integraal van een rationale functie en kan dus door logarithmen en rationale functies geïntegreerd worden.

Het eerste deel van $\frac{M}{N}$ kan men door uitdeelen splitsen in een geheele functie van graad n—3 in s_x en x, plus een rest.

De rest is t.o.v. x in de teller van graad mn—1 en in de noemer X van graad mn in x, en is dus verder met partieelbreuksplitsing te behandelen.

Stelt men de wortels van $X = 0$ verschillend, dan ontstaan bij splitsing mn verschillende termen waarvan de tellers van graad n—2 in s_x zijn, terwijl de noemers steeds van den vorm x—a zijn.

Iedere integraal van de beschouwde soort is dus op te vatten als een aggregraat van de volgende soorten integralen:

1. Integralen van rationale functies van x.

2. Integralen van den vorm: $\int \frac{Q\,dx}{\frac{\partial F}{\partial s_x}}$, **Q geheel en van de graad n — 3 in s_x en x.**

3. Integralen van den vorm:

$$\int \frac{Q\,dx}{(x-a)\frac{\partial F}{\partial s_x}}, \text{ Q van de graad n—2.}$$

Integralen met hoogere machten van $(x-a)$ in den noemer, die optreden als $X = 0$ gelijke wortels heeft, kan men door limietovergang uit soort 3 verkrijgen.

Beschouwen wij nu soort 2:

$$V = \int \frac{Q\,dx}{\frac{\partial F}{\partial s_x}} = \int \frac{\Theta\, \Sigma \pm c_1\, x_2\, dx_3}{\sum\limits_1^3 c_i \,.\, \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

Q homogeen van graad n—3. Integrand discontinu als

$$\frac{\partial F}{\partial s_x} = 0 \text{ of } \sum_1^3 c_i \,.\, \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

$\sum\limits_1^3 c_i \,.\, \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ is de vergelijking van de eerste poolkromme van $\{c_i\}$ t. o. v. $f = 0$

Raakpunt: de eerste poolkromme van $\{c_i\}$ snijdt op $f = 0$ in, de raakpunten der tangenten uit $\{c_i\}$ aan $f = 0$. Voor zoo'n snijpunt (s_x^0, x^0) is

$$F(x^0, s_x^0) = 0 \text{ en } \frac{\partial F}{\partial s_x^0} = 0.$$

De Taylorontwikkeling in de omgeving van dit punt wordt:

$$F(s_x, x) = 0 = \frac{\partial F^0}{\partial x_0}(x - x^0) + {}^1/_2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x^{02}}(s_x - s_x^0) \, \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial s_x} = \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x^{02}}(s_x - s_x^0) + \ldots\ldots \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt, dat dan de noemer van V een constante factor verschilt met $\sqrt{x - x_0}$ De integraal wordt bij integratie in omgeving van (s_x^0, x^0) dus op een constante factor na

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x - x_0}} = 2\sqrt{x - x_0}$$

en blijft dus eindig.

Dubbelpunt:

Heeft f = eenige gewone singulariteiten, dan

$$\gamma = n(n-1) - 2d - 3k$$

(Een m-voudig punt is steeds vervangbaar door $\frac{1}{2}$ m (m—1) gewone dubbelpunten, als alle tangenten verschillend zijn). Alle eerste poolkrommen gaan door de dubbel- en keerpunten.

Voor dubbelpunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{of:} \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s_x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

De Taylorontwikkeling in omgeving van het dubbelpunt $(s_x{}^0, x^0)$ wordt:

$$F(s_x, x) = 0 = {}^1/_2 \left\{ \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^{02}} (s_x - s_x{}^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^0 \, \partial x^0} (s_x - s_x{}^0) (x - x^0) + \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^{02}} (x - x^0)^2 \right\} + \ldots \quad (1)$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial s_x} = \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^{02}} (s_x - s_x{}^0) + \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^0 \, \partial x^0} (x - x^0) + \ldots .$$

Uit (1) blijkt, dat ($s_x - s_x{}^0$) evenredig wordt met $(x - x^0)$ en wij krijgen 2 waarden voor $\frac{s_x - s_x{}^0}{x - x^0} = k$ uit de vierkantsvergelijking:

$$k^2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^{02}} + 2k \frac{\partial^2 F^0}{\partial s_x{}^0 \, \partial x^0} + \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^{02}} = 0.$$

In omgeving van het dubbelpunt verschilt V dus door een constante factor met de integraal:

$$\int \frac{dx}{x - x_0} = \lg (x - x^0),$$

en wordt V dus logarithmisch oneindig.

Hier is uitgesloten het geval, dat Q voor ($s_x{}^0$, x^0) nul wordt, dan nl.:

$$Q = \frac{\partial Q^0}{\partial s_x{}^0} (s_x - s_x{}^0) + \frac{\partial Q^0}{\partial x_0} (x - x^0) + \ldots ;$$

ook Q verschilt dan een constante factor met $(x - x_0)$.

In dit geval blijft de integraal bij het dubbelpunt eindig.

Keerpunt:

In dit geval is de discriminant van voorgaande v.k.v. nul, dus:

$$\frac{\partial^2 F^0}{\partial {s_x}^{0\,2}} \cdot \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^{0\,2}} - \left(\frac{\partial^2 F^0}{\partial {s_x}^0\, \partial x^0}\right)^2 = 0.$$

Men kan de grootheden a en b dan zoo bepalen, dat:

$$a^2 = \frac{\partial^2 F^0}{\partial {s_x}^{0\,2}} \quad \text{en} \quad b^2 = \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^{0\,2}},$$

$$\text{en} \quad a \cdot b = \frac{\partial^2 F}{\partial {s_x}^0\, \partial x^0}.$$

De Taylorontwikkeling, termen van de derde orde nog in acht nemend wordt:

$$F(s_x, x) = 0 = {}^1/_2 \left\{ a(s_x - {s_x}^0) + b(x - x^0)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left\{ \frac{\partial^3 F^0}{\partial {s_x}^{0\,3}} (s - {s_x}^0)^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 F^0}{\partial {s_x}^{0\,2}\, \partial x^0} \cdot (s_x - {s_x}^0)^2 (x - x^0) + \ldots \text{enz.}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_x} = a \left\{ a(s_x - {s_x}^0) + b(x - x^0) \right\} + \ldots.$$

Uit (1) blijkt, dat:

$$\{a(s_x - {s_x}^0) + b(x - x^0)\}$$

van orde $^3/_2$ is, zoodat wij in de termen van de derde orde van $F(s_x, x) = 0$, de vergelijking $a(s_x - {s_x}^0) + b(x - x^0) = 0$ kunnen gebruiken.

Bij substitutie blijkt, dat:

$$a(s_x - {s_x}^0) + b(x - x^0),$$

dus ook $\frac{\partial F}{\partial s_x}$, evenredig wordt met $(x - x^0)^{3/2}$. De integraal wordt in omgeving van het keerpunt dus van den vorm:

$$\int \left(\frac{A}{\sqrt{(x-x^0)^3}} + \frac{B}{\sqrt{x-x^0}} \right) =$$

$$^2/_3 \frac{A}{\sqrt{x-x^0}} + 2B\sqrt{x-x_0}.$$

dus V wordt oneindig en wel van dezelfde orde als $(x-x_0)^{-1/2}$

Ook hier is uitgesloten dat $Q\ (\ s_x{}^0,\ x^0\ ) = 0$. Indien dit wel het geval is, wordt V op een constante factor na

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^0}} = 2\sqrt{x-x^0}$$

en blijft eindig.

Het keerpunt gedraagt zich, zooals trouwens ook was te verwachten als een vereeniging van een dubbelpunt en raakpunt, zoodat na opheffing van het dubbelpunt nog de eigenschappen van het raakpunt overblijven.

Uit voorgaand overzicht blijkt, dat er integralen zijn, die overal eindig blijven. Voor deze moet de teller Q of Θ voor alle singuliere punten nul worden, hetgeen steeds mogelijk is voor $n > 2$.

Het maximum aantal dubbelpunten, dat een niet-ontaarde n-de graadskromme kan hebben is $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Dit aantal is juist gelijk aan het aantal coefficienten in de vergelijking $\Theta = 0$ die de teller van dV vormt. Is het maximum aantal dubbelpunten aanwezig, dan krijgt men ter bepaling van de coefficienten van Θ evenveel homogene vergelijkingen als er onbekenden zijn, in welk geval alleen de nul-oplossing voldoet.

In dit geval is het aantal overal eindige integralen nul.

Zijn er d dubbelpunten en k keerpunten, dan is het aantal der coefficienten in Θ die nog onbepaald blijven

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k = p$$

(zooals wij vroeger definieerden). De meest algemeene, overal eindig blijvende, integraal kan men dus samengesteld denken uit p speciale integralen. Er zijn p verschillende integralen van de eerste soort, waarbij men onder „Integraal van de eerste soort" een overal eindige integraal verstaat.

Gaan wij nu transformeeren met behulp van de transformatie-formules:

$$x_i = \phi_i(y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\phi_i \text{ rationaal}) \qquad (1)$$

$f = 0$ gaat dan over in $MF = 0$, waarbij M een factor is, die zich mogelijk laat afzonderen. In het geval van de birationale transformatie, waarbij zich ook omgekeerd de y rationaal in x laten uitdrukken, zal deze factor M werkelijk optreden. Immers, als men de transformatieformules (1) combineert met $F = 0$, moet men door eliminatie van y weer op $f = 0$ komen, terwijl men bij het elimineeren de y evenredig moet vinden met geheele rationale functies van x. F moet dan geen functie zijn van ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, anders zou het elimineeren de y geven als functies van x alleen uit de vergelijkingen (1), en dus in het algemeen irrationale oplossingen.

De differentiaaluitdrukking:

$$dV = \frac{\Omega \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_1^3{}_i c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

waarin Ω een functie van de orde n—3 (niet noodzakelijk geheel) gaat door deze transformatie in een soortgelijke over.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = M \left(\sum_1^3{}_j \frac{\partial F}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right),$$

daar slechts waarden beschouwd worden, die aan $F = 0$ voldoen.

Dus: $$\sum_1^3{}_i c_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = M \sum_1^3{}_j k_j \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}$$

$$\text{met } k_j = \sum_1^3 x_i \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Wij vermenigvuldigen nu teller en noemer van dV met de determinant:

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial x_3}$$

dan wordt $\Delta \cdot \Sigma \pm c_1 x_2 d x_3 = r \, \Sigma \pm k_1 y_2 d y_3$,

waarin r de graad van de functies Φ_i beteekent, en

$$D = \frac{1}{\Delta} = \pm \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial y_3}.$$

D is een geheele functie in y.

dV gaat dus over in:

$$\frac{r \Omega D \Sigma \pm k_1 y_2 d y_3}{M \sum_1^3 k_i \cdot \frac{\partial F}{\partial y_i}},$$

welke differentiaaluitdrukking weer geheel van dezelfde aard is als de oorspronkelijke. In plaats van Ω is gekomen de functie $\frac{r \Omega D}{M}$; in plaats van de willekeurige grootheden c_i, de eveneens willekeurige grootheden k_i.

Is de oorspronkelijke integraal van de eerste soort, dan is de getransformeerde het ook. Ω is dan een geheele functie van graad n—3. De teller ΩD van de getransformeerde is dan met behulp van $F = 0$ steeds zoo te transformeeren, dat hij door M deelbaar wordt en dat het quotient nul wordt voor de dubbel- en keerpunten van $F = 0$.

Aan de simultane vergelijkingen:

$$M \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 = \sum_1^3{}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

moet voldaan zijn voor alle discontinuiteitspunten van de gegeven integraal. Aan deze vergelijkingen kan voldaan zijn, als $D = 0$; of als $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. In het laatste geval, heeft f in

x_i òf een dubbelpunt en wordt $\Omega = 0$, omdat de gegeven integraal van de eerste soort is; òf alle x_i worden nul, doordat voor de betreffende y_i de 3 functies ϕ_i gelijktijdig nul worden.

In dit geval worden de $\sum_1^3 j \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ nul van de orde n—1, D wordt tegelijk nul van de 1-ste orde en Ω als functie van graad n—2 in x nul van de (n—2)-de orde, dus het product Ω D nul van de (n—1)-ste orde, evenals de noemer. (verg.: C l e b s c h—G o r d a n: Theorie der Abelschen Functionen, pag. 52).

Wordt de noemer nul, dan de teller op dezelfde wijze en men heeft dus een integraal van de eerste soort.

Bij de birationale transformaties, waarbij de x_i en de y_i wederkeerig rationaal in ekaar zijn uit te drukken, komen de punten van $f = 0$ en $F = 0$ (1,1) met elkaar overeen. Met ieder punt y_i van de tweede kromme correspondeert in het algemeen één punt x_i der eerste kromme en omgekeerd.

Ieder voor x gevormde integraal van de eerste soort levert een integraal van eerste soort voor y en omgekeerd.

Hieruit volgt, dat het aantal integralen van de eerste soort in beide gevallen gelijk moet zijn, d.w.z.:

Voor krommen, waarvan de punten (1,1) correspondeeren heeft het getal p dezelfde waarde:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - d' - k'.$$

b. Beschouwen wij nu de totaliteit der waarden (s, z), reëel zoowel als complex, die aan F (s, z) = 0 voldoen. Bij een punt van het z-vlak behooren dan n waarden s, en het z-vlak wordt n-voudig overdekt. Deze waarden van s zijn verschillend, tenzij z een waarde is, die voldoet aan $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$. De met deze waarden overeenkomende punten heeten vertakkingspunten, in welke in het algemeen 2 waarden van s samenvallen.

Is z_0 een vertakkingspunt en s_0 de bijbehoorende waarde. Laat dan z een kleine cirkel beschrijven (die geen andere vertakkingspunten omvat) om z_0, dus $(z - z_0) = \varepsilon . e^{i\varphi}$, dan krijgt men voor $F(s, z) = 0$:

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_0}(z - z_0) + {}^1/_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial s_0^2}(s - s_0)^2 = 0.$$

dus $s - s_0 = k \sqrt{z - z_0}$. **(k = constante.)** $s - s_0 = k \sqrt{\varepsilon} . e^{\frac{i\varphi}{2}}$

Bij een omloop verandert φ met 2π en als men bij het begin-**punt terug is, is** $s - s_0 = -k \sqrt{\varepsilon} . e^{\frac{i\varphi}{2}}$ geworden. De waarde van s is bij deze omloop dus veranderd.

Dit gedrag van het vertakkingspunt is een gevolg van het feit, dat $s - s_0$ in de omgeving van zoo'n punt evenredig wordt met $\sqrt{z - z_0}$. Neemt men in plaats van een vertakkingspunt, dat overeenkomt met een raakpunt, een punt, dat met een dubbelpunt overeenkomt, dan wordt in een omgeving van zoo'n punt $s - s_0$ evenredig met $z - z_0$ en de karakteristieke eigenschap van het vertakkingspunt is verdwenen. Zulke punten rekenen wij dan ook niet tot de vertakkingspunten. Wel echter de keerpunten, waar $s - s_0$ evenredig wordt met $(z - z_0)^{3/2}$.

Het aantal raakpunten is $n(n-1) - 2d - 3k$.

Het aantal vertakkingspunten w is dus:

$$w = n(n-1) - 2d - 2k.$$

Stellen wij: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k = p$,

dan: $w = 2p + 2(n-1)$, d.i. de formule waar Riemann vanuit ging. (Vergelijk hoofdstuk VI). De definities van p volgens Riemann en Clebsch stemmen dus geheel met elkaar overeen.

HOOFDSTUK VIII.

Het bewijs van Cremona.

Door de beschouwingen over de stelling van het behoud van p werden ook de geometers aangezet tot nieuwe geometrische bewijzen. Het eerste is afkomstig van Cremona in: Preliminari di una teoria geometrica delle superficie (Mem. Acc. Bologna, Ser. 2, t. VI) (33).

Dit bewijs, dat van verrassende eenvoud is, maakt gebruik van de meetkunde der ruimte. Cremona dacht de 2 krommen, die (1,1) correspondeeren in 2 verschillende vlakken V en V', en construeert het regelvlak voortgebracht door de verbindingsrechten van correspondeerende punten en verkrijgt dan de stelling, door het bepalen van de graad der dubbelkromme van het regelvlak uit ieder der beide vlakke krommen.

De krommen C en C' respectievelijk in V en in V', hebben n, d, k, resp. n', d', k', tot graad, dubbel- en keerpuntenaantal.

De verbindingslijnen van overeenkomstige punten bepalen een regelvlak van graad n + n'.

V' snijdt het regelvlak volgens C' en n rechten, nl. de n lijnen, die de snijpunten van V' met C verbinden met de overeenkomstige punten op C'. V' bevat n lijnen van het oppervlak en moet dus het oppervlak raken in n punten, respectievelijk op de n lijnen gelegen. Trekken wij deze raakpunten af, dan heeft de doorsnede van V' met het regelvlak dus:

$$nn' + \tfrac{1}{2} n (n-1) + d' + k' - n =$$

$$nn' + \tfrac{1}{2} n (n-3) + d' + k'$$

dubbelpunten.

Dit aantal geeft aan de graad van de dubbelkromme op het oppervlak. Dus is:

$$nn' + \tfrac{1}{2} n (n-3) + d' + k' = n'n + \tfrac{1}{2} n' (n'-3) + d + k$$

of:

$$\tfrac{1}{2} n (n-3) - d - k = \tfrac{1}{2} n' (n'-3) - d' - k'$$

$$\tfrac{1}{2} (n-1) (n-2) - d - k = \tfrac{1}{2} (n'-1) (n'-2) - d' - k',$$

dus: $p = p'$.

HOOFDSTUK IXa.

Het bewijs van Bertini.

Bertini (Giorn. di mat., 7, 1869) (34) neemt de twee met elkaar correspondeerende krommen C(x) en C′(x′) in één vlak, en kiest 2 willekeurige punten a en a′. Hij construeert dan de m.p. der snijpunten van een straal ax met de hiermee correspondeerende stralen a′x′. Van deze meetk. plaats, welke een kromme Γ is, bepaalt hij op twee manieren de klasse. Door gelijkstelling verkrijgt hij dan de stelling over het behoud van p.

Het bewijs van Zeuthen dat wij in de volgende paragraaf bespreken is op dezelfde grondgedachte gebaseerd, maar wordt uitgevoerd voor meerduidig correspondeerende krommen, waardoor een relatie gevonden wordt tusschen p en p′, welke relatie voor (1,1)-correspondentie overgaat in p = p′.

Al komt aan Bertini de prioriteit van de gebruikte methode toe, toch is het werk van Zeuthen hiervan geheel onafhankelijk. Immers Zeuthen schrijft in „Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes" (Mathematische Annalen 3, 1871) (35):

„Après la publication de cette démonstration j'ai appris, que Mr. E. Bertini, professeur au Lycée Parini a Milan, a appliqué antérieurement le même procédé, à la démonstration du théorème de Riemann."

HOOFDSTUK IXb.

Het bewijs van Zeuthen.

Zeuthen en Bertini leverden hun bewijs op grond van het eenvoudige correspondentie-principe van Chasles.

De eerste grondleggende theorie over de algemeene involuties en correspondenties vindt men bij:

Jonquières: Généralisation de la théorie de l'Involution. (Annali di Matematica t. II) (36).

Chasles: Comptes rendus de l'Académie des Sciences (1864) (37).

Cayley: Transactions of the Cambridge philosophical Society. t. II. (38).

Cremona: Einleitung in die Theorie der ebenen Curven.

Een involutie van de n-de graad op een rechte is gedefinieerd door de vergelijking:

$$a_x^n + \lambda\, b_x^n = 0.$$

De vergelijking stelt voor een bundel van puntgroepen, elke groep bestaande uit n punten. (a en b geen gemeenschappelijke factor.)

Eigenschappen:

1. elke groep is door één van zijn punten bepaald.
2. elk punt behoort slechts tot één groep.
3. de bundel is bepaald door 2 willekeurige groepen.

Er zijn in de involutie groepen die 2 samengevallen punten, coincidenties, bevatten.

Deze groepen zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$a_x^{n-1} \,.\, a_1 + \lambda\, b_x^{n-1} \,.\, b_1 = 0.$$

$$a_x^{n-1} \,.\, a_2 + \lambda\, b_x^{n-1} \,.\, b_2 = 0.$$

De coincidenties zelf vinden wij door eliminatie van λ, hetgeen levert de functionaaldeterminant van $a = 0$ en $b = 0$, dus:

$$(a\ b)\ a_x^{n-1}\ b_x^{n-1} = 0.$$

Om de groepen te vinden, waarin een coincidentie voorkomt, elimineeren wij de x_1 en x_2, hetgeen een vergelijking van de graad $2\ (n-1)$ levert in λ.

In een involutie van graad n bestaan 2n—2 groepen die een dubbelpunt hebben, en die dubbelpunten zelf zijn bepaald door de vergelijking:

$$(a\ b)\ a_x^{n-1}\ b_x^{n-1} = 0.$$

Twee involuties van den vorm:

$$\lambda_1\ a_x^m + \lambda_2\ b_x^m = 0$$

$$\mu_1\ \alpha_\xi^n + \mu_2\ \beta_\xi^n = 0$$

met: $A\ \lambda_1\ \mu_1 + B\ \lambda_1\ \mu_2 + C\ \lambda_2\ \mu_1 + D\ \lambda_2\ \mu_2 = 0,$

of in niet homogene vorm, wat de parameter betreft:

$$\left.\begin{aligned} a_x^m + \lambda\ b_x^m &= 0 \\ \alpha_\xi^n + \lambda\ \beta_\xi^n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

heeten projectief. De projectieve correlatie van de 2 involuties (1) is op te vatten als een correspondentie van hoogere orde.

Met elk punt x van de rechte correspondeeren n punten ξ, met ieder punt ξ correspondeeren m punten x, en het verband tusschen de punten x en ξ is gegeven door de vergelijking:

$$a_x^m\ \beta_\xi^n - \alpha_\xi^n\ b_x^m = 0. \quad (2)$$

Het kan voorkomen, dat een punt x samenvalt met een punt ξ, dat met x correspondeert, d.w.z. dat 2 geassocieerde groepen een punt gemeenschappelijk hebben.

Deze gemeenschappelijke punten verkrijgen wij uit:

$$a_x^m \beta_x^n - \alpha_x^n b_x^m = 0 \qquad (2a)$$

d.i. een vergelijking van de graad $(m + n)$ in x.

Twee projectieve involuties van de graad n en m, hebben $(m + n)$ groepen met een gemeenschappelijk punt.

Dit theorema is begrepen in een veel algemeener, waartoe men eenvoudig komt door (2) te vervangen door:

$$\emptyset (\overset{m}{x}, \overset{n}{\xi}) = 0 \qquad (3)$$

waarin $\emptyset$ een homogene functie is van de graad m in x en van de graad n in ξ.

De vergelijking (3) is de basis voor een correspondentie van de meest algemeene soort, waarin met ieder x-punt n ξ-punten, en met ieder ξ-punt m x-punten correspondeeren.

De voorwaarde dat een punt x samenvalt met een corresponderend punt ξ, geeft een vergelijking van de graad $(m + n)$ in x, d.w.z. er zijn $(m + n)$ coincidenties in de correspondentie $\emptyset$. Dit theorema is het z.g. Correspondentie-principe van Chasles.

Het Zeuthensche bewijs verloopt nu als volgt: (Math. Ann. 3) (35).

Twee vlakke krommen C_i, met n_i, γ_i, k_i, p_i, respectievelijk als graad, klasse, aantal keerpunten, geslacht, zoodat geldt: $(i=1, 2)$

$$\gamma_i + k_i - 2n_i = (p_i - 1).$$

Tuschen C_1 en C_2 bestaat een zoodanige correspondentie, dat met ieder punt P_2 van C_2 correspondeeren x_1 punten P_1 van C_1 en met ieder punt P_1 van C_1, x_2 punten van C_2.

y_1 en y_2 geven resp. aan het aantal coincidenties van 2 punten, die resp. op C_1 en C_2 correspondeeren met een zelfde punt der andere kromme. Onder deze getallen y_1 en y_2 nemen wij niet die puntenparen P_1 en P_2, die zoodanig correspondeeren, dat tegelijkertijd 2 punten correspondeerend met P_1 samenvallen in P_2 en omgekeerd 2 punten correspondeerend met P_2 samenvallen in P_1. Dit aantal wordt afzonderlijk aangeduid door z.

Wij voeren nu in de hulpkromme D, d.i. de m.p. der snijpunten van de rechten A_1P_1 en A_2P_2, die 2 vaste punten van het vlak verbinden met 2 correspondeerende punten P_1 en P_2.

Graad van D.

G_1 en G_2 zijn de snijpunten van A_1P_1 en A_2P_2 met een proefrechte L.

A_1G_1 snijdt C_1 in n_1 punten P_1; met elk correspondeeren x_2 punten P_2, zoodat met iedere G_1 n_1x_2 punten G_2 correspondeeren, met ieder punt G_2 n_2x_1 punten G_1.

De verwantschap (n_1x_2, n_2x_1) op L heeft $(n_1x_2 + n_2x_1)$ coincidenties.

De graad van D is dus $(n_1x_2 + n_2x_1)$.

Klasse van D.

A_1P_1 is tangent aan D als 2 van de correspondeerende rechten A_2P_2 samenvallen tot één A_2P_2, zonder dat tegelijk 2 van de rechten, die met A_2P_2 correspondeeren in A_1P_1 samenvallen. In het laatste geval is het snijpunt van A_1P_1 met A_2P_2 een dubbel- of keerpunt van D.

Dus:

1. tangent uit A_1 aan C_1 zal tangent aan D zijn in al de x_2 punten waar zij de rechten, die A_2 verbinden met de x_2 punten die correspondeeren met het contactpunt op C_1, snijdt; aantal dus $\gamma_1 x_2$.

2. Een rechte die A_1 verbindt met een keerpunt van C_1 zal tangent zijn aan D, in al de snijpunten met de rechten, die A_2 verbinden met de punten, die met het keerpunt van C_1 correspondeeren, tenzij deze punten zitten onder het aantal k' van punten, die zelf keerpunt zijn; aantal dus $k_1x_2 - k'$.

3. Een rechte die A_1 verbindt met één van de y_2 punten van C_1, waarmee 2 samenvallende punten van C_2 correspondeeren, zal een enkelvoudige tangent van D zijn; aantal dus y_2.

Hierbij moeten nog gevoegd worden de n_2x_1 tangenten in het meervoudige punt A_1, zoodat wij als klasse van D vinden:

$$\gamma_1 x_2 + k_1 x_2 - k' + y_2 + 2n_2 x_1. \qquad (1)$$

Uitgaande van A_2:

$$\gamma_2 x_1 + k_2 x_1 - k' + y_1 + 2n_1 x_2. \qquad (2)$$

Door gelijkstelling van (1) en (2) en in verband met:

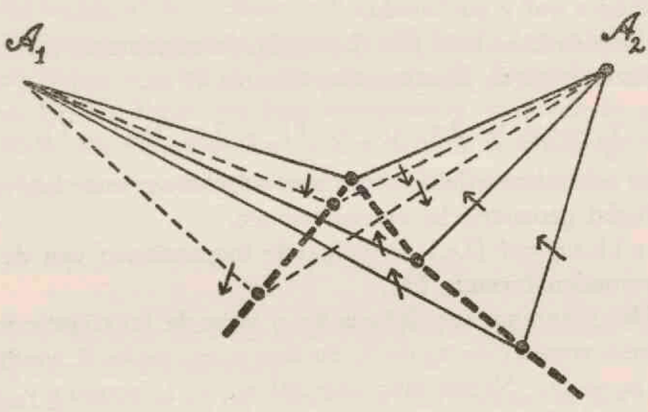
$$\gamma_i + k_i - 2n_i = 2 (p_i - 1),$$

verkrijgt men:

$$y_1 - y_2 = 2 x_2 (p_1 - 1) - 2 x_1 (p_2 - 1). \qquad (3)$$

De geometrische afleiding, met de invoering van k', zooals dit in de Zeuthensche vorm geschiedt, heeft het nadeel een beroep te doen op de aanschouwing en zich daardoor tevens te beperken tot het reëele gebied.

Het voorkomen van k' in de formules (1) en (2) drukt uit, dat als 2 keerpunten correspondeeren, dit in de kromme D aanleiding geeft tot een keerpunt. Dit nu berust geheel op de aanschouwing. (zie figuur.)



Een algebraische rechtvaardiging van deze methode is echter te vinden in de methode van Clebsch — Noether, welke neerkomt op een algebraische formuleering van het Zeuthensche bewijs. De hulpkromme uit het bewijs van Clebsch — Noether is nl. dezelfde als die van Zeuthen. (Vergelijk: Hoofdstuk XI).

Zeuthen schrijft: „La formule (3) se déduit presque immédiatement du théorème au moyen duquel Mr. Cayley a étendu la principe de correspondance à une courbe quelconque. (Second memoir on the curves which satisfy given conditions, Phil. Transactions of the R. Soc. London. t. CLVIII, 1868) (40). En effet, on trouvera au moyen de ce théorème:

$$y_1 + 2z = 2x_2(x_1 - 1) + 2x_2 p_1,$$
$$y_2 + 2z = 2x_1(x_2 - 1) + 2x_1 p_2.$$

Ces deux équations ne donnent pas seulement l'équation (3), mais fournissent aussi dans les cas, où l'on sait trouver z, le moyen de déterminer séparement les valeurs de y_1 et y_2 au lieu de leur différence. Néamoins, je n'en ferai pas usage ici, ayant pour but de montrer la portée des considérations géometriques simples que je viens d'exposer, et ne connaissant aucune démonstration simple et complète du théorème de Mr. Cayley. J'ai essayé en vain, d'enfonder une sur la formule essayé (3) et sur les procédés qui y ont conduit."

De formule $C = \alpha + \beta + 2p\gamma$, d.i. de uitgebreide correspondentieformule en de Zeuthensche-formule (3),

$$y_1 - y_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1),$$

die men er uit kan afleiden, zijn zeer vruchtbaar voor het vinden van allerlei geometrische eigenschappen.

Zeuthen gaf (l.c.) de volgende toepassingen van de door hem gevonden formule (3).

1) Het theorema van Riemann voor de invariantie van p.

Immers voor $x_1 = x_2 = 1$, en dus $y_1 = y_2 = 0$, vindt men direct $p_1 = p_2$. Neemt men speciaal $x_2 = 1$, waaruit $y_2 = 0$, en $p_1 = p_2$, dan:

$$y_1 = 2(p_1 - 1) - 2x_1(p_1 - 1).$$

Daar y noodzakelijk $\geqq 0$, heeft men $x_1 = 1$ (als $p \neq 1$). Dus bestaat het theorema:

Als tusschen 2 krommen van hetzelfde geslacht $p > 1$, een verwantschap bestaat, zoo, dat met ieder punt van de eerste kromme een punt van de tweede correspondeert, dan is deze relatie ook wederkeerig. In „Zur Theorie der Transformationen algebraischer Funktionen" (Crelle, J.f.M. Bd. 76) (41) heeft Weber een direct bewijs gegeven van genoemd theorema, geheel gegrond op de principes van Riemann.

Het geval $p = 1$ heeft een aparte behandeling noodig en staat in verband met de transformatie van elliptische functies.

2) Hij bepaalde het geslacht p_3 van de omhullende C_3 der rechten, die correspondeerende punten verbinden van de 2 systemen op de krommen C_1 en C_2.

$$2\,(p_3 - 1) = y_2 + z + 2\,x_2\,(p_1 - 1)$$

$$\text{of} = y_1 + z + 2\,x_1\,(p_2 - 1).$$

Als $x_2 = 1$, dan overeenkomstig het theorema van Riemann $p_3 = p_1$.

3) Hij leidde af de formule van Chasles: $t = \mu\,\gamma_1 + \nu\,n_1$. De 2 correspondeerende systemen zijn hierbij bepaald, door de doorsnijdingen van de 2 krommen met de krommen van een systeem (μ, ν), d.w.z. een krommensysteem, waarvan er μ door een willekeurig punt gaan en ν raken aan een willekeurige rechte.

Hierbij is t = aantal krommen van het systeem, die aan C_1 raken.

De Zeuthensche formule is in vele gevallen bruikbaar. Maken wij nog een enkel voorbeeld.

Door L. Burmester werd in het fraaie artikel: „Das bifocal-veränderliche System" (Math. Ann. Bd. 16) (42) onderzocht, de transformatie van een kromme C in een vlak Σ_1 met brandpunten F_1 en F_2, naar een kromme C' in vlak Σ' met brandpunten F'_1 en F'_2, bij behoud van de voerstralen.

Is C van de graad n, dan is C' van de graad 2n, daar Burmester aantoonde, dat C' te beschouwen is als de tweede projectie van de doorsnijdingskromme van een eenbladige omwentelingshyperboloide met een rechte cylinder op C in het eerste projectievlak. Dat de graad van C′ 2n is, volgt ook uit het feit, dat de ellips met F_1 en F_2 tot brandpunten en met $F'_1F'_2 = 2a$, de kromme C in 2n punten snijdt, die na transformatie op de as $F'_1F'_2$ in Σ' komen. C′ is symmetrisch t.o.v. de as. Met een punt van C correspondeeren 2 punten, symmetrisch t.o.v. de as in Σ', van C′.

Met een punt van C′ correspondeert één punt van C. Met een dubbelpunt van C twee symmetrisch t.o.v. de as liggende dubbelpunten van C′. Maar in C′ ontstaan nog meer dubbelpunten, nl. het aantal malen, dat C zijn gespiegelde t.o.v. de as F_1F_2 snijdt, verminderd met aantal malen, dat C de as F_1F_2 snijdt. Dus een aantal $(n^2 - n)$.

Het geslacht van C′ is dus:

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(2n-1)(2n-2) - (n^2-n) - (n-1)(n-2) + 2p_1$$

$$p_2 = n + 2p_1 - 1.$$

Met de Zeuthensche formule vindt men direct: $y_1 = 0$, $y_2 = 2n$, immers er zijn op C 2n punten, die correspondeeren met samengevallen punten op $F'_1F'_2$ in Σ'.

$$x_2 = 2,\ x_1 = 1,\ \text{dus:}$$

$$-2n = 4(p_1 - 1) - 2(p_2 - 1)$$

$$\text{of: } p_2 = n + 2p_1 - 1.$$

Deze uitkomst is ook te bepalen, door volgens de opvatting van B u r m e s t e r C′ op te vatten als de tweede projectie van de genoemde doorsnijdingskromme.

De eenbladige omwentelingshyperboloide en de rechte cylinder snijden elkaar volgens een kromme van de tweede graad, welke een [n,n]-kromme is.

$$h_{pq} = \frac{n^2 + n^2 - n - n}{2} = (n^2 - n) \quad \text{schijnbare dubbelpunten.}$$

De rechte cylinder heeft $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-p_1$ dubbelrechten. Elke dubbelrechte snijdt de hyperboloide in 2 punten, die echte dubbelpunten van de doorsnijding zijn.

De tweede projectie heeft dus:

$$(n^2-n)-(n-1)(n-2)-2p_1$$

dubbelpunten, waaruit weer volgt:

$$p_3 = n + 2p_1 - 1.$$

Een willekeurige kegelsnede wordt dus getransformeerd tot een 4-de graadskromme van geslacht 1, dus met 2 dubbelpunten symmetrisch t.o.v. de as.

HOOFDSTUK X.

De formule van Zeuthen en het algemeen correspondentie-principe.

Bij hun onderzoekingen naar het aantal krommen van een enkelvoudig oneindig systeem, die een gegeven kromme raken werden de gevallen waarin laatstgenoemde kromme een rationale is, behandeld met het z.g. eenvoudige correspondentie-principe of wel het „Principe van Chasles".

Komen met een punt P van zoo'n kromme α punten P′ van de kromme overeen door middel van een algebraische betrekking, en omgekeerd met ieder punt P′ β punten P, dan komt men tot het bestaan van een algebraische vergelijking tusschen x en x′, in x van de graad β, in x′ van de graad α, welke voor $x = x'$, $\alpha + \beta$ oplossingen geeft, welke met de coincidenties overeenkomen. Hierbij gaat men op de vorm van de relatie, die er tusschen P en P′ bestaat, niet verder in. In bepaalde gevallen moeten echter de oneigenlijke oplossingen, d.w.z. oplossingen, die wel aan de vergelijking voldoen maar niet met het gestelde probleem overeenkomen, worden afgetrokken. In het bepalen van de af te trekken wortels ligt juist in de meeste gevallen de groote moeilijkheid.

De formule van het eenvoudige correspondentie-principe is niet meer toe te passen bij krommen van hooger geslacht. Voor het oplossen van raakproblemen bij krommen van hooger geslacht, moest men komen tot een breedere opzet van genoemd principe.

Een generalisatie van het correspondentie-principe van Chasles werd aangekondigd door Cayley, aanvankelijk zonder bewijs in Comptes Rendus t. LXII (43), en meer in detail in de verhandeling „On the correspondence of two points on a curve" (Proceedings of the London Math. Society t. I, 1866)

(44), waar het bewijs voor een bijzonder geval gegeven werd. Tenslotte is het nogmaals door denzelfden auteur behandeld in: „Second memoir on the curves which satisfy given conditions" (Philos. Transactions of the R. Soc. London t. CLVIII, 1868) (40). Cayley geeft voor het aantal coincidenties van een correspondentie $(\alpha\beta)$ op een kromme f van geslacht p de volgende formule:

$$C = \alpha + \beta + 2 p \gamma.$$

Hierin is α het aantal punten P', die door middel van een kromme, die zelf in P γ snijpunten met f heeft, met het punt P overeenkomen, terwijl met P' β punten correspondeeren.

Gaat men met deze correspondentie-formule het verband na tusschen het geslacht p_1 van een kromme C_1 en p_2 van C_2, waar tusschen C_1 en C_2 een zoodanige verwantschap bestaat, dat met ieder punt P_1 van C_1 x_2 punten P_2 correspondeeren en met ieder punt P_2 x_1 punten P_1, dan vindt men de reeds genoemde formules:

$$y_1 + 2z = 2x_2 (x_1 - 1) + 2x_2 p$$

$$y_2 + 2z = 2x_1 (x_2 - 1) + 2x_1 p,$$

waaruit door aftrekking de Zeuthensche formule volgt:

$$y_1 - y_2 = 2x_2 (p_1 - 1) - 2x_1 (p_2 - 1).$$

Cayley bewees de formule voor het geval van een kromme $f(x, y, z) = 0$ zonder dubbelpunten, waarbij hij de correspondentievergelijking $C(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = 0$ tusschen de coordinaten van P_1 en P_2 aannam in de vorm van een homogene functie van de graad γ in de verschillen:

$$y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

en voor het bepalen van de coincidenties gebruik maakt van het feit, dat als $P_1 = P_2$, dus:

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2,$$

deze verschillen zich verhouden als de eerste differentiaalquotienten van $f(x, y, z)$ naar x, y, en z. Het identisch nul worden van

C werd op deze wijze ondervangen. Voor de talrijke voorbeelden die Cayley gaf, heeft C echter juist niet de genoemde vorm.

Cayley heeft bij zijn bewijs noodig, dat de met elkaar correspondeerende punten door krommen werden uitgesneden. Kon nu Zeuthen zijn formule direct uit de Cayley-formules vinden, het resutlaat van Zeuthen had toch een meer algemeen karakter, daar hij gebruik makend van het eenvoudige correspondentie-principe, deze aanname niet noodig had. Daar staat tegenover, dat de twee formules van Cayley meer zeggen dan de Zeuthensche formule.

Een volledig algebraisch bewijs van een meer algemeene formule dan die van Cayley, werd tenslotte gegeven door Brill in „Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve" (Math. Ann. t. 6) (45), waarin hij aantoonde, dat het aantal puntenparen, dat op een kromme van geslacht p aan de correspondenties $(\alpha\beta)\gamma$ en $(\alpha'\beta')\gamma'$ tegelijkertijd voldoet, gegeven wordt door:

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\,p\,\gamma\gamma'.$$

Hiermede was voor het eerst het door Cayley opgestelde correspondentie-principe, nu Cayley-Brillsche correspondentie-principe genoemd, volledig bewezen.

Voor het geval van rationale krommen biedt het uitgebreide correspondentie-principe geheel geen verschil met dat van Chasles. Voor het geval $p \neq 0$, moet het aantal coincidenties volgens Chasles, vermeerderd worden met een getal, dat afhangt van het geslacht der kromme.

Brill gaf hetzelfde bewijs nogmaals in meer geometrische vorm in: „Ueber die Correspondenzformel" (Math. Ann. t. 7) (46), terwijl hij een zuiver algebraische theorie der correspondenties ontwikkelde in „Ueber algebraische Korrespondenzen" (Math. Ann. 31) (47).

Lindemann gaf het bewijs van hetzelfde principe vanaf het standpunt der Analyse met behulp van Abelsche integralen. (Crelle, J.f.M. t. 84.)

HOOFDSTUK XI.

Het Bewijs van Clebsch—Noether.

Een modificatie van het bewijs van Zeuthen is door Clebsch in algebraische formuleering gegeven. In een door Clebsch nagelaten fragment van een „Vorlesungsheft" over Abelsche functies werd een eenvoudig bewijs van de geslachtsstelling voor krommen gevonden, door beschouwing van een splitsing van de transformatie in 2 opvolgende transformaties, neerkomend op een successievelijke invoering der beide variabelen.

Noether gaf dit bewijs in par. 1 van zijn verhandeling: „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde" (Math. Ann. Bd. 8) (49), bij uitbreiding op hoogere singuliere punten van een kromme. De grondgedachte van dit algebraische bewijs gaf Noether tevens aanleiding tot een nieuw eigen bewijs, dat eveneens eenvoudiger is dan het algebraisch bewijs, zooals dit voorkomt in „Theorie der Abelschen Functionen" (22) door Clebsch-Gordan.

Clebsch heeft voor het bewijs van het behoud van het geslacht bij eenduidige transformatie van een algebraische kromme, de volgende eenvoudige gedachte uitgesproken:

„De transformatie van de vergelijking $f(s^n, z^m) = 0$ splitse men in twee opvolgende, door eerst een rationale functie σ van s en z in plaats van s, daarna in de resulteerende vergelijking een tweede rationale functie ζ van σ en z in plaats van z te substitueeren."

Beschouwt men bij de eerste transformatie s, met betrekking tot σ, als functie van z, dan blijft het getal n, evenals het aantal vertakkingspunten w, van het over het z-vlak uitgebreide Riemannsche oppervlak onveranderd. Hetzelfde geschiedt met de twee getallen m′, w′ bij de tweede transformatie, als men z als functie van σ beschouwt.

Men heeft dus slechts aan te toonen, dat een combinatie van de beide getallen n en w, (bijv.: $\frac{w}{2} - (n-1)$), waarbij σ als functie van z wordt beschouwd, niet verandert, als men z als functie van σ opvat. Is dit bewijs geleverd, dan is een dergelijke combinatie ($p = \frac{w}{2} - (n-1) = \frac{w'}{2} - (m'-1)$) een voor de geheele transformatie invariante grootheid.

Noether werkte deze grondgedachte in een iets andere en meer algemeene vorm uit.

De gegeven kromme zij: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

De transformatieformules:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varnothing_1(x) : \varnothing_2(x) : \varnothing_3(x).$$

Invers: $x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(y) : \psi_2(y) : \psi_3(y)$.

f gaat hierdoor over in: $f_1(y_1, y_2, y_3) = 0$.

Deze transformatie wordt nu echter niet direct uitgevoerd, maar door de transformatieformules:

$$z_1 : z_2 = \varnothing_1(x) : \varnothing_2(x), \; z_2 : z_3 = x_2 : x_3$$

wordt ingevoerd een hulpkromme $f'(z_1, z_2, z_3) = 0$.

De overgang van $f'(z) = 0$ op $f_1(y) = 0$ geschiedt dan door de formules:

$$z_1 : z_2 = y_1 : y_2 \;, \; z_2 : z_3 = \psi_2(y) : \psi_3(y).$$

Hiermede is dus het voorschrift van Clebsch opgevolgd. nl.: de splitsing van de transformatie in 2 opvolgende transformaties.

Bij de eerste transformatie tusschen f en f', bestaat een eenduidige correspondentie tusschen de doorsneden van f met de bundel $x_2 + \lambda x_3 = 0$ en van f' met de bundel $z_2 + \lambda z_3 = 0$. Het aantal n van beweeglijke snijpunten op een rechte van de eerste bundel is dus hetzelfde als op een rechte in de tweede bundel.

Onder w verstaan wij het aantal rechten door P ($x_2 = x_3 = 0$), waarmee bij transformatie tangenten aan f' kunnen correspondeeren. w omvat dus de aantallen rechten, die:

1. f raken in een van P verschillend punt.

2. door een niet in P vallend keerpunt van f gaan.

Bezit f een hooger singulier punt buiten P, dan zijn hiervoor in w zooveel rechten te rekenen, als er bij een transformatie tangenten mee kunnen correspondeeren.

Meervoudige punten die P „unendlich benachbart" zijn, moeten hierbij ook beschouwd worden als buiten P te liggen.

(Voor „unendlich benachbarte" punten, zie men: Severi—Löffler. Vorlesungen über algebraische Geometrie.) (50).

Is nu w' het analoge getal t.o.v. f' en de lijnenbundel door P' ($z_2 = z_3 = 0$), dan volgt uit de eenduidigheid der transformatie direct: $w = w'$.

Laten deze getallen voor de transformatie van f' in f_1 en de daarbij met elkaar correspondeerende lijnenbundels zijn: n_1 en w_1.

Zij P' een i-voudig en P'_1 een i_1-voudig punt van f'. Het getal w is voor een bundel met top in P' $2i$ kleiner als voor een bundel waarvan de top niet op de kromme ligt. (Dit geldt ook als P' een willekeurig singulier punt is, hetgeen blijkt door het toepassen van een transformatie, die het singuliere punt P' oplost. Voor het oplossen van singuliere punten zie men: Severi—Löffler.) (50).

Hieruit volgt, dat bij overgang van P' naar P'_1, de betrekking bestaat:

$$w + 2i = w_1 + 2i_1,$$

d.w.z. het getal $w + 2i$ dat voor f' bij de bundel door P' hoort, verandert niet bij verlegging van den top der bundel naar een willekeurig punt P'_1 (of: verandert niet voor een willekeurig lineair getransformeerde kromme f', zonder verandering van de bundel).

$$w + 2i = w_1 + 2i_1,$$

en daar ook: $n + i = n_1 + i_1$, is dus:

$$w - 2n = w_1 - 2n_1$$

of: $$\frac{w}{2} - (n-1) = \frac{w_1}{2} - (n_1-1).$$

De kromme f′ wordt, als f en f_1 respectievelijk van de graad n en n_1 zijn, van de graad $(n + n_1)$, met een n_1-voudig punt in P′ en een n-voudig punt in P'_1, die geen bijzondere singulariteit vertoonen.

Deze kromme is dezelfde als de hulpkromme van Zeuthen, waarvan Zeuthen voor het bewijs van de geslachtsstelling op 2 manieren de klasse bepaalde, hetgeen in wezen overeenkomt met het hier gevolgde proces. Deze modificatie van de methode van Zeuthen is ook bij een meerduidige correspondentie van de krommen door te voeren.

De grondgedachte van het voorgaand bewijs voerde Noether nog op een andere weg om tot de stelling van het geslachtsbehoud te komen. Hij vergeleek met betrekking tot de beide krommen $f(x) = 0$ en $f_1(y) = 0$, die weer door de formules:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varnothing_1(x) : \varnothing_2(x) : \varnothing_3(x)$$

eenduidig met elkaar correspondeeren, direct de rechtenbundel:

$$\Sigma \alpha_i y_i + \lambda \Sigma \beta_i y_i = 0,$$

met de hiermee correspondeerende krommenbundel:

$$\Sigma \alpha_i \varnothing_i + \lambda \Sigma \beta_i \varnothing_i = 0,$$

door het bepalen van de „contactkrommen" van de beide bundels, waarbij het getal der contactkrommen op dezelfde wijze als in het voorgaande het getal w moet worden opgevat, dus een door een keerpunt gaande rechte van de eerste bundel moet worden meegerekend.

Zijn $f(x)$ en $f_1(y)$ resp. van de graad n en n_1, de $\varnothing_k$ van de graad s en laten deze door ieder i-voudig punt van f j-voudig gaan en bovendien α enkelvoudige vaste punten op f bezitten.

Dan is:

$$n_1 = s.n - \Sigma\, i.j - \alpha . \qquad (1)$$

Het aantal contactrechten van de eerste bundel met f_1 is:

$$w = n_1\,(n_1 - 1) - \Sigma\, i_1\,(i_1 - 1) . \qquad (2)$$

Om de raakpunten van de aan f rakende exemplaren van de tweede bundel te bepalen, moet men de functionaaldeterminant:

$$D = \frac{\partial\,(f,\ \Sigma\, \alpha_i\, \varnothing_i,\ \Sigma\, \beta_i\, \varnothing_i)}{\partial\,(x_1,\ x_2,\ x_3)}$$

opstellen, en het aantal, niet in de vaste snijpunten van f met alle $\varnothing$ vallende, snijpunten van $f = 0$ en $D = 0$ bepalen.

De graad van D is: $(n-1) + 2\,(s-1)$.

Het gedrag van D in een singulier punt van f gaat men na, door de termen van de laagste graad voor dit punt $(x_1 = x_2 = 0)$ op te maken.

Men vindt dan voor het aantal contactkrommen van de tweede bundel:

$$w = n\,(n + 2s - 3) - \Sigma i\,(i + 2j - 1) - 2\,\alpha . \qquad (3)$$

Door uit de drie gevonden betrekkingen w en $(s\,.\,n - \Sigma\, i\,.\,j - \alpha)$ te elimineeren, vindt men direct:

$$n\,(n-3) - \Sigma i\,(i-1) = n_1\,(n_1-3) - \Sigma\, i_1\,(i_1-1).$$

HOOFDSTUK XII.

De methode van Enriques en Severi; de Italiaansche School.

In het voorwoord op het werk „Vorlesungen über algebraische Geometrie" (1920) (50) van F. Severi schreef A. Brill:

„Als um die Mitte des vorigen Jahrhunderts durch das Zusammenarbeiten von deutscher und fremdländischer Forschung, die Geometrie einen mächtigen Aufschwung genommen hatte, dessen Höhepunkt die Verwendung der Riemannschen Theorie der Abelschen Funktionen in der Kurventheorie war, setzten Untersuchungen von Clebsch selbst, der diesen Weg gewiesen hatte, und Arbeiten jüngerer Mathematiker, der Theorie der algebraischen Kurven neue Ziele, die weit über den damals bevorzugten projectiven Standpunkt hinauswiesen. Aus der Deutung des Abelschen Theorems auf der Kurve entwickelte sich der Begriff der Punktgruppe und damit ein neuer Wissenszweig: die Geometrie auf der Kurve.

Dieser Wendung folgend haben italienische Mathematiker — an der Hand gewisser neuer Begriffe und Bezeichnungen, sowie eines förderlichen Rechenverfahrens mit Korrespondenzen — die Punktgruppen zu einem Hilfsmittel ausgebildet, das, in Verbindung mit dem Schubertschen Abzählungskalkül für Gebilde in höheren Räumen, sowohl die Geometrie der algebraischen Kurven als namentlich die der Oberflächen in ungeahntem Masze gefördert hat."

De methodische behandeling van de „geometrie op een algebraische kromme", door Severi gedefinieerd als „het geheel der eigenschappen van een kromme, die bij birationale transformatie onveranderd blijven", vindt haar oorsprong in de verhandeling van Brill en Noether:

„Ueber die algebraische Funktionen und ihre Anwendung in die Geometrie" (Math. Ann. Bd. 7) (51).

Brill en Noether, de voornaamste figuren uit de school van Clebsch, hadden in tegenstelling met Clebsch een voorkeur voor zuiver algebraische hulpmiddelen. Zij werden de grondleggers van de algebraisch-geometrische richting in de theorie der algebraische functies. In bovengenoemde verhandeling werden de door Riemann, Clebsch en Gordan langs transcendenten weg gevonden stellingen over algebraische functies, respectievelijk krommen, systematisch met zuiver algebraische hulpmiddelen afgeleid en werden verdere resultaten gevonden als de „Restsatz" en de „Reciprozitätssatz", welke uit de analysis nog niet bekend waren. Verg.: E. Schonhardt, Alexander v. Brill. Mathematik, Heft I, 1936. (52).

De door Brill en Noether ingevoerde algebraisch-geometrische richting vond veel beoefenaars. In het bijzonder waren het de Italianen, die deze richting met groot succes verder ontwikkeld hebben. Van dezen moeten vooral genoemd worden: Segre, Castelnuovo, E. Bertini, Enriques, Severi. Het grootste aandeel in het grondvesten van een eigen Italiaansche school had Severi, die de, in de Italiaansche werken en tijdschriften verkregen resultaten, met de bekende algebraisch-geometrische grondbeginselen van Brill en Noether, tot een geheel vereenigde.

Severi: Lezioni di geometria algebrica. 1908. (53).

Severi: Vorlesungen über algebraische Geometrie. 1920. (Vertaling van E. Löffler.) (50).

Severi: Trattato di geometria algebrica. 1926. (54).

Het onderscheid tusschen de Italiaansche school, ontstaan uit het werk van Brill—Noether en de Brill-Noethersche richting zelf, bestaat in de werkmethode der Italiaansche onderzoekers. Zij stellen het werken met zuiver algebraische hulpmiddelen niet op den voorgrond. Hun werk draagt daarentegen een overwegend geometrisch en synthetisch karakter, met een veelvuldig gebruik van de vorderingen van de projectieve meetkunde der meerdimensionale ruimten.

$\sum_{0}^{R} \lambda_i \cdot \phi_i (x, y) = 0$ snijdt op $f(x, y) = 0$ een lineaire schaar

uit. Als n de orde is en r de dimensie, wordt deze schaar voorgesteld door het symbool g_n^r, welke notatie afkomstig is van Brill en Noether.

De dimensie van de schaar g_n^r is slechts dan kleiner als de dimensie van het systeem $\sum_0^R \lambda_i \cdot \phi_i = 0$, als er onder de krommen van dit systeem exemplaren zijn, die f bevatten.

Twee op een algebraische kromme liggende groepen A en B, beide van n punten, heeten equivalent, als zij bevat zijn in een zelfde lineaire schaar g_n^r. De equivalentie van deze groepen wordt symbolisch voorgesteld door $A \equiv B$, welke notatie afkomstig is van Enriques c.s.

Eenvoudig is te bewijzen de Transitiviteitsstelling:

Als $A \equiv B$ en $B \equiv C$, dan ook $A \equiv C$, daar deze stelling klaarblijkelijk begrepen is in:

Als 2 verschillende lineaire scharen g_n^r en g_n^s een groep gemeen hebben, dan is er een lineaire schaar, waarin beide bevat zijn.

Een lineaire schaar heet „volschaar" als er geen lineaire schaar van dezelfde orde maar van hoogere dimensie bestaat, waarin ze bevat is. Een deelschaar is wel bevat in een lineaire schaar van dezelfde orde en hoogere dimensie.

Het is direct duidelijk, dat men, door het vormen van lineaire scharen van de orde n, maar met steeds hoogere dimensie, tenslotte tot een volschaar moet komen, daar immers de dimensie r, welke gelijk is aan het aantal willekeurig te kiezen punten van een groep, nooit hooger dan n kan worden. Niet á priori duidelijk is het, dat een gegeven schaar in één en slechts één lineaire volschaar bevat is, m.a.w. dat een lineaire volschaar, waarin een gegeven lineaire schaar g_n^r bevat is, éénduidig is bepaald. Een eenvoudige redeneering toont de juistheid aan; was nl. de g_n^r bevat in de volscharen g_n^R en g_n^S, dan zouden deze 2 scharen, daar zij de groepen van de g_n^r gemeen hebben, weer bevat zijn in eenzelfde schaar van hooger dimensie. De g_n^R en g_n^S zouden dan geen volscharen zijn, dus contradictie.

In het bijzonder wordt door een groep A op f een volschaar gedefinieerd, symbolisch voorgesteld door $|A|$, welke men ook kan definieeren als de verzameling van alle groepen $\equiv A$.

Bij birationale transformatie van de algebraische kromme f gaan equivalente groepen in equivalente groepen over, zoodat met een lineaire volschaar een lineaire volschaar correspondeert.

De stelling van de éénduidigheid van de lineaire volschaar, die een gegeven g_n^r bevat, werd algebraisch bewezen door Brill en Noether, in „Ueber die algebraische Funktionen und ihre Anwendung in die Geometrie". (Math. Ann. Bd. 7.) (51).

In het boven geschetste bewijs is de methode gevolgd, aangegeven door Enriques in „Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche". (Torino Atti 37, 1901) (55), en is in dezen vorm afgeleid door Severi.

De gedachtengang, die hier gevolgd wordt, komt zij het dan in anderen vorm, reeds voor in de Riemannsche theorie der algebraische functies.

Voor het invoeren van de rekenoperaties met lineaire scharen heeft men 2 hulpstellingen noodig:

1.) Als men van een volschaar de groepen verzamelt, die een bepaald stel vaste punten hebben, dan is de verzameling van die groepen weer een volschaar.

Met behulp van 1.) bewijst men:

2.) Zijn 2 lineaire scharen $|A|$ en $|B|$ gegeven, dan zijn alle groepen, die men verkrijgt door een groep van de eerste schaar met een groep van de tweede te vereenigen, onderling equivalent.

Zie: Severi. Trattato di Geometria Algebrica. Vol. I. Parte I., Pag. 99 e.v. (54).

Uit hulpstelling 2.) komt men tot het begrip: „som van 2 lineaire scharen $|A|$ en $|B|$".

Definitie: Onder de som van de scharen $|A|$ en $|B|$ verstaat men de lineaire volschaar $|A + B|$, die door de groep $A + B$ gedefinieerd is.

Hieruit is direct het begrip „verschil" van 2 scharen $|C|$ en $|A|$ te definieeren:

Wij stellen voorop, dat er groepen van $|C|$ zijn, die A als deel bevatten, d.w.z. dat de restschaar van A t.o.v. $|C|$ werkelijk bestaat. Zij deze schaar $|B|$, dan is:

$$|C| = |A + B|$$

en wij noemen $|B|$ de restschaar van $|A|$ t.o.v. $|C|$, of wel het verschil $|C—A|$ van de gegeven scharen.

Hierbij dient te worden opgemerkt, dat de schaar $|B|$ bepaald is, onafhankelijk van de groep A, waarvan men bij de definitie van deze schaar uitgaat.

Noemt men de groepen van de schaar $|B|$ de resten van de groep A t.o.v. $|C|$, dan heeft men dus:

De resten van een gegeven groep t.o.v. een lineaire volschaar zijn t.o.v. dezelfde schaar ook resten van een willekeurige andere groep, die met de gegeven groep equivalent is.

Deze stelling is een deel van de z.g. Reststelling van Brill—Noether.

De somdefinitie is op meerdere scharen uit te breiden. Vallen de verschillende scharen samen, dan spreekt men van een meervoudige schaar.

$$|A| + |A| + |A| + \ldots\ldots + |A| + |A| + |A| = k. |A|.$$

De begrippen somschaar, meervoudige schaar en verschilschaar zijn invariant t.o.v. birationale transformatie van de kromme.

In een g_n^1 op f zijn groepen, waarin 2 punten samenvallen. Wegens het algebraisch karakter zijn er een eindig aantal waarden van λ, waarvoor in de bijbehoorende groepen een dubbelpunt aanwezig is. De verzameling van deze punten, de dekpuntengroep, wordt de *„Jacobi-groep"* der g_n^1 genoemd.

Voor de Jacobi-groep van een g_n^1 geldt de volgende stelling:

Maakt men van een g_n^1 een g_{n+k}^1 door toevoeging van k vaste punten, dan bestaat de nieuwe Jacobi-groep uit de oude

Jacobi-groep, waarbij dan de k toegevoegde punten, twee maal als dubbelpunt moeten worden bijgeteld.

Voor het bewijs vergelijke men:

Severi: Vorl. über alg. geom. Pag. 98 (50).

Severi: Trattato di geom. algebrica. Pag. 112 e.v. (54).

In het eerstgenoemde werk wordt het bewijs zuiver meetkundig gegeven, terwijl in het tweede van de analyse gebruik wordt gemaakt.

Wij geven het bewijs in de volgende vorm, het meest overeenkomend met de eerstgenoemde methode.

De g^1_n wordt op f uitgesneden door een bundel hulpkrommen, welke bundel mogelijk H vaste basispunten op f heeft. Om de groep K_1 uit te snijden, kieze men een vaste kromme ψ welke dan mogelijk nog een groep K_2 uitsnijdt.

$$\lambda\, \Phi_1\, \psi + \mu\, \Phi_2\, \psi = 0 \qquad (1)$$

snijdt dan uit de g^1_n en de vaste punten. Wij voegen nu een kromme χ toe van dezelfde graad, welke niet tot de bundel behoort en niet gaande door H, K_1 en K_2.

$$\lambda\, \Phi_1\, \psi + \mu\, \Phi_2\, \psi + \nu\, \chi = 0$$

is een net, waartoe de bundel (1) behoort. Dit net snijdt een g^2_N uit, waarbij $N = n + H + K_1 + K_2$ en waarvan de g^1_n aangevuld met H, K_1 en K_2 een deelschaar is.

$$\begin{cases} \varrho\, y_0 = \Phi_1\, \psi \\ \varrho\, y_1 = \Phi_2\, \psi \quad \text{met } f = 0, \\ \varrho\, y_2 = \chi \end{cases}$$

geeft een afbeelding van de kromme f, nl. een vlakke kromme C, waarop de groepen, die correspondeeren met de groepen der g^2_N op f, worden uitgesneden door de rechten van het vlak van C. De rol van het net wordt hierbij overgenomen door de rechten van het vlak, de rol van een bundel uit het net door een waaier in het vlak. Elke rechte van de waaier, die met de bundel (1) correspondeert, snijdt op C dan N punten uit, waarvan er slechts n beweeglijk zijn. De top van de waaier is dus een $(H+K_1+K_2)$-voudig punt der beeldkromme.

De punten van de Jacobi-groep vindt men door de tangenten uit de top. De taktangenten in de top zijn echter als 2 samengevallen taktangenten te rekenen, en iedere tak telt voor een vast punt. Hieruit volgt dus, dat men voor de Jacobi-groep K_1 twee maal moet bijtellen. (H en K_2 vervallen weer.) Het algemeene geval is hiermede bewezen.

Kiest men de K punten geïsoleerd, dan komen in het K-voudig punt geen keerpunten voor.

In het K-voudig punt is een buigpunt aanwezig, indien een van de gekozen vaste K punten in een van de dubbelpunten der g^1_n zou vallen. Ook in dat geval gaat de stelling door, zooals blijkt uit een limietbeschouwing, waarbij men de K-groep met een van zijn punten tot een dubbelpunt laat naderen.

Een typisch voorbeeld van de werkmethode der Italiaansche school vindt men in het bewijs van de volgende stelling:

De Jacobi-groepen der g^1_n uit een g^r_n zijn onderling equivalent.

Wij nemen het geval, dat de g^r_n niet-samengesteld is, en beginnen met $r = 2$. Wij maken dan van de g^2_n een planimetrisch beeld. De Jacobi-groepen van de g^1_n uit de g^2_n correspondeeren met de raakpuntengroepen, behoorend bij de punten van het vlak der beeldkromme. Deze raakpuntengroepen worden uitgesneden door het systeem der eerste poolkrommen, en dit systeem is lineair. q.e.d.

Voor het algemeene geval $r > 2$ maken wij van de g^r_n een meerdimensionaal beeld in R_r. Zijn Σ_1 en Σ_2 2 willekeurige R_{r-2} in de R_r dan zullen de twee bundels hypervlakken door Σ_1 resp. Σ_2, ieder een g^1_n op de beeldkromme uitsnijden.

Σ_1 en Σ_2 hebben in het algemeen een

$$R_{r-2} \times R_{r-2} = R_{r-4} \qquad (1)$$

gemeen. Wij kiezen dan buiten deze R_{r-4} in Σ_1 een punt P_1, en in Σ_2 een punt P_2. P_1, P_2 en de R_{r-4} bepalen dan een $R_{r-2} = \Sigma_3$, welke zoowel met Σ_1 als Σ_2 een R_{r-3} gemeen heeft. De hypervlakken door een R_{r-3} snijden op de beeldkromme een g_n^2 uit. De Jacobi-groepen der g_n^1 uit een g_n^2 zijn equivalent, waaruit dus nu, in verband met het voorgaande, volgt, dat de Jacobi-groepen van alle g_n^1 uit een g_n^r equivalent zijn.

(1) Verg. E. Bertini: Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, pag. 9 (56).

Het geval, dat de g_n^r samengesteld is volgt direct uit het voorgaande, met toepassing van de stelling: Telt men bij equivalente groepen telkens een vaste groep op, dan zijn de sommen ook weer equivalent.

De lineaire volschaar, die de Jacobi-groepen A der g_n^1 uit één en dezelfde g_n^r bevat, wordt de Jacobi-schaar der g_n^r genoemd.

Uit het voorgaande volgt zonder meer de fundamentaalstelling over de Jacobi-scharen, welke in formule uitgedrukt luidt:

$$|(A+B)j| = |Aj+2B| = |2A+Bj|,$$

dus eveneens:

$$|Aj-2A| = |Bj-2B|,$$

welke schaar de „Kanonische schaar" genoemd wordt.

De orde van de Kanonische schaar is een constant getal, dat een bepaalde beteekenis krijgt.

Zijn a en a_j de orden van $|A|$ resp. $|Aj|$, dan is:

$$a_j - 2a = b_j - 2b.$$

Stellen wij $a_j - 2a = 2p - 2$, dan is:

$$p = \tfrac{1}{2}\, a_j - a + 1 = \tfrac{1}{2}\, b_j - b + 1$$

(vergelijk met de formule van Riemann $p = \frac{1}{2} w - (n-1)$), waaruit volgt, dat het getal p onafhankelijk is van de lineaire schaar met behulp waarvan zij gedefinieerd wordt; het doet er immers niet toe of men uitgaat van de schaar $|A|$ of $|B|$.

Het boven gedefinieerde getal p blijkt te zijn het geslacht van de kromme f.

$$\text{Immers: } a_j = n\,(n-1) - 2d$$
$$a = n$$
$$\text{Dan: } p = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1) - d - n + 1$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - d,$$

overeenkomend met de vorige afleidingen van het geslacht.

Hierbij is slechts oogenschijnlijk de kromme f niet algemeen genoeg gekozen. Heeft de kromme eenige s-voudige punten met gescheiden taktangenten, dan wordt:

$$p = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) - \Sigma\,\frac{s\,(s-1)}{2}.$$

Algemeene hoogere singulariteiten kan men volgens Noether (Verg. Noether: Rationale Ausführung der Operationen, Math. Ann. 23.) (57) door achtereenvolgende kwadratische transformaties oplossen, waarbij een kromme ontstaat met gewone meervoudige punten. Hierbij treedt geen verandering van het geslacht op.

De in het voorgaande geschetste methode van invoering van de begrippen „Jacobi-schaar" en „geslacht van een kromme", in dezen vorm gebracht door Severi, is in wezen afkomstig van Enriques:

Boll. di bibl. e storia delle matematiche. 2, 76 (1899). (58).

Torino Atti. 37, 19 (1901). (59).

Severi, Palermo Rendiconti. 17, 82 (1902). (60).

De stelling van het geslachtsbehoud bij birationale transformatie der kromme is hier eenvoudig te bewijzen.

Zijn f en f′ 2 krommen die birationaal verwant zijn, dan komt met een lineaire schaar g_n^1 op f een g_n^1 op f′ overeen en de Jacobi-groep der eerste correspondeert met de Jacobi-groep der tweede. De getallen p en p′, die met behulp van deze twee overeenkomende scharen berekend worden, zijn dus gelijk.

HOOFDSTUK XIII.

Toepassingen van de stelling van het behoud van geslacht bij birationale transformatie, door middel van de theorie der puntgroepen.

In deze paragraaf willen wij eenige voorbeelden geven, hoe met de theorie der puntgroepen en de daarbij optredende birationale transformatie geometrische resultaten kunnen worden afgeleid, waarvan inderdaad zeker de eenvoudigste, maar wellicht ook de andere wel anders kunnen worden verkregen en sommigen ook reeds verkregen zijn. In het volgende worden echter ook verkregen, eenige geheel nieuwe stellingen voor de derdegraads-ruimtekromme, en voor de vierdegraads-ruimtekromme van geslacht 0 en 1.

Essentieel bij al deze toepassingen is het geslachtsbehoud.

1. *De transformatie.*

Het uitgangspunt van de volgende onderzoekingen zal zijn de volgende transformatie. (S e v e r i. Vorlesungen über algebraische Geometrie. pg. 75 e.v.) (50).

Een lineair, echt „r-dimensionaal" systeem van vlakke algebraische krommen:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i C_i (x_0, x_1, x_2) = 0$$

snijdt op een vlakke algebraische kromme $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ in een schaar g^r_N. Wij veronderstellen deze g^r_N zonder vaste punten, eenvoudig en echt.

Door: $\varrho\, y_i = C_i (x_0, x_1, x_2)$, $i = 0, 1, 2, \ldots . r$

en: $0 = f(x_0, x_1, x_2)$

wordt dan bepaald een ruimtekromme C' in R^r met de volgende eigenschappen:

1.) C is „echt", d.w.z. is niet bevat in een ruimte van lager dimensie.

2.) C is birationaal verwant met de kromme $f = 0$.

3.) De punten door een hypervlak in R^r op C' uitgesneden, correspondeeren met een groep der g^r_N op $f = 0$.

4.) De graad van C' is N.

5.) Met onderscharen op f correspondeeren onderscharen van dezelfde dimensie op C'.

2. *Neutrale puntenparen.*

Gaan wij nu uit van een vlakke algebraische kromme $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ van de graad n en geslacht p, waarop door een net van vlakke algebraische krommen,

$$\sum_{i=0}^{2} \lambda_i C_i(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

van de graad m, wordt uitgesneden een g^2_N Nemen wij hierbij $f = 0$ vrij van de basispunten van het net, in welk geval $N = n.m$.

C' wordt nu een vlakke algebraische kromme van de graad N waarop de groepen, die correspondeeren met de groepen der g^2_N op $f = 0$, worden uitgesneden door de rechten van het vlak van C'.

Daar het geslacht invariant is ten opzichte van birationale transformatie (Theorema van Riemann) is C' van het geslacht p. Het aantal dubbelpunten van C' is dus:

$$d = \tfrac{1}{2}(N-1)(N-2) - p.$$

Wij gaan nu na de singuliere elementen van deze afbeelding van f op C'. Door een dubbelpunt O van f wordt uit het net een bundel bepaald, welke op f een g^1_N uitsnijdt, welke 2 vaste samengevallen punten bevat. De groepen, die op C' met de groepen van deze g^1_N correspondeeren, worden op C' uitgesneden door een bundel rechten. In elke groep van deze g^1_N op C zijn dan ook twee vaste punten, die samen moeten vallen, daar er anders geen bundel rechten door dit puntenpaar ging. Met een dubbelpunt van f correspondeert dus steeds een dubbelpunt van C'. Omgekeerd geldt dit niet. Singuliere elementen voor deze afbeelding van f op C' zijn de overige dubbelpunten van C', indien C' meer dubbelpunten bevat dan f. Met deze resteerende dubbelpunten van C' correspondeeren namelijk puntenparen op f = 0, die zoodanig gelegen zijn, dat een paar geen exemplaar van het net bepaalt, maar een bundel van het net. Met deze resteerende dubbelpunten van C' correspondeeren dus „neutrale puntenparen" op f = 0.

Op f = 0 zijn dus steeds:

$$\tfrac{1}{2}(N-1)(N-2) - p - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + p$$

$$= \tfrac{1}{2}(N-1)(N-2) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = d_r$$

puntenparen, die ieder met de $\tfrac{1}{2}n(n+3) - 2$ basispunten, die het net kan hebben, $\tfrac{1}{2}n(n+3)$ geassocieerde basispunten van een bundel vormen. Bevindt zich onder de d_r dubbelpunten van C' een keerpunt O', dan correspondeert hiermee op f = 0 een puntenpaar $O_1 = O_2$, dat niet in een dubbel- of keerpunt van f = 0 valt.

In eenvoudige gevallen kan men die d_r puntenparen op f direct zien. Bijv.:

a) Op een K^2 wordt door een net K^2, gegeven door 3 punten (vrij van de gegeven K^2) een g^2_4 uitgesneden. $d_r = 3$.

Deze 3 puntenparen zijn de 3 snijpuntenparen, verkregen door de 3 verbindingslijnen van de basispunten van het net met de gegeven K^2 te snijden. Elk dezer paren bepaalt immers uit het net een bundel ontaarde kegelsneden, terwijl elk ander paar een exemplaar van het net bepaalt.

C' heeft 3 dubbelpunten. Raakt één der verbindingslijnen der basispunten van het net aan de K^2, dan heeft C' 1 keerpunt en 2 dubbelpunten.

b) Op een derdegraadskromme $f^3 = 0$ wordt door een net K^2, gegeven door 3 punten (vrij van $f^3 = 0$) een g^2_6 uitgesneden.

$$d_r = \tfrac{1}{2} \cdot 5.4 - \tfrac{1}{2} \cdot 2.1 = 9.$$

Op elke verbindingslijn der 3 basispunten van het net K^2 liggen 3 snijpunten met de kubische kromme. Uit elk drietal snijpunten op een rechte kan men 3 puntenparen vormen. Deze 9 paren zijn de neutrale, en bepalen elk een bundel van het net. Wij merken hierbij echter op, dat in dit geval de C' voor de $d_r = 9$ dubbelpunten, 3 drievoudige punten in de plaats geeft.

c) Op een derdegraads kromme $f^3 = 0$ wordt door een net kubische krommen, gegeven door bijv. 7 punten, (vrij van de $f^3 = 0$) een g^2_9 uitgesneden.

$$d_r = \tfrac{1}{2} \cdot 8.7 - \tfrac{1}{2} \cdot 3.2 = 27$$

Stelling:

Op een kubische kromme liggen 27 puntenparen, die ieder met de 7 basispunten van het net een geassocieerd 9-tal vormen.

3. *Rakende, dubbelrakende en osculeerende exemplaren in bundel en net.*

Zij $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ van de n-de graad en geslacht p. Dan is C' van de graad $N = n.m$ en geslacht p. Het aantal dubbelpunten van C' is dus:

$$d = \tfrac{1}{2} (N-1)(N-2) - p.$$

De klasse van C' is:

$$\gamma = N(N-1) - 2d = 2(N-1) + 2p.$$

Er zijn dus in een bundel van het net

$$\sum_{i=0}^{2} \lambda_i C_i (x_0, x_1, x_2) = 0 ,$$

γ exemplaren, die op $f = 0$ groepen uitsnijden, waarin twee punten samenvallen, en die dus aan $f = 0$ raken.

Is er onder de dubbelpunten van C' één keerpunt O', dan zijn uit een punt P' $(\gamma-1)$ tangenten aan C' te trekken. Trekken wij echter de lijn P′O′, dan correspondeert met de hierdoor uitgesneden groep op C′ ook op f = 0 een groep, waarin 2 punten $O_1 = O_2$ samenvallen.

Het aantal buigpunten van C′ is:

$$K = 3\,n\,(n-2) - 6\,d = 3\,(N-2) + 6\,p.$$

In het net zijn dus K exemplaren, die op f = 0 groepen uitsnijden, waarin 3 punten samenvallen en die dus f = 0 osculeeren. Is er een keerpunt onder de dubbelpunten van C′ dan heeft C′ (K—2) buigpunten. De keertangent in O′ snijdt echter ook op C′ een groep uit, waarin 3 punten samenvallen en hiermee correspondeert op f = 0 een groep, waarin 3 punten samenvallen, nl. in $O_1 = O_2$.

Wij kunnen de, door de keertangent uitgesneden groep, 2-maal tellen, in analogie met: keertangent is twee samengevallen taktangenten. C′ heeft een aantal dubbeltangenten δ, waarbij:

$$2\,\delta = \gamma\,(\gamma-1) - n - 3\,K.$$

Er zijn dus δ exemplaren in het net, die op f = 0 groepen uitsnijden, waarin 2 maal twee punten samenvallen en die dus f = 0 twee maal raken.

Heeft C′ k keerpunten, dan neemt K af met 2k en γ met k.

Uit de Plückersche formules volgt dan voor δ een afname:

$$k\,(\gamma - k + 3) + C_k^2.$$

Men kan echter uit elk der k keerpunten van C′ $(\gamma - k + 3)$ tangenten, verschillend van de keertangent, aan C′ trekken, welke ook groepen uitsnijden, waarin 2 maal twee punten samenvallen, terwijl de C_k^2 verbindingslijnen der k keerpunten dergelijke groepen eveneens leveren.

Toepassing.

g_4^2 op een gegeven K^2 uitgesneden door een net K^2.

C′ is vlakke 4-de graadskromme van geslacht 0, dus $d_r = 3$.

$\gamma = 6$. In een bundel van het net zijn 6 exemplaren, die aan de gegeven K^2 raken.

$K = 6$. In het net zijn 6 exemplaren, die de gegeven K^2 osculeeren.

$\delta = 4$. In het net zijn 4 exemplaren, die de gegeven K^2 twee maal raken.

Het geval, dat C' keerpunten heeft, behoeven wij, tengevolge van bovenstaande, niet meer apart te beschouwen.

4. *De g_3^2 op een rechte.*

Wij beschouwen nu speciaal de g_3^2, die door een net kubische krommen,

$$\sum_{i=0}^{2} \lambda_i C_i (x_0, x_1, x_2) = 0,$$

op een rechte l (geen basispunten op l) wordt uitgesneden.

C' is een vlakke kubische kromme van geslacht 0 en heeft dus één dubbelpunt, O' (keerpunt).

$d_r = 1$. Op l ligt één puntenpaar (O_1, O_2), dat correspondeert met O'. Dit puntenpaar bepaalt een bundel van het net.

$\gamma = 4$. In een bundel (geen basispunt op l) zijn 4 exemplaren, die aan l raken.

In een bundel, waarvan een basispunt A op l ligt, zijn dan 3 exemplaren, die aan l raken. Het éene raakpunt is A, de andere B en C, liggen dan elders op l. Wij noemen B en C de „satellieten" van A. De bundel uit het net, bepaalt door het punt A, snijdt op l een g_2^2 in, met A als vast punt. Na weglating van A over een g_2^1. In de g_2^1 zijn dus 2 groepen, ieder bestaande uit 2 samengevallen punten, nl. de satellieten van A. (Dit is weer de bekende eigenschap, dat er in een K^2-bundel 2 exemplaren zijn, die raken aan een rechte, welke niet door een van de basispunten gaat.)

Snijdt men een C^3 door twee rechte lijnen en verbindt men de snijpunten door drie verbindingslijnen, die elk de

Neemt men op l, 2 groepen van de g_3^2, (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) en vormt men de groepen (a_1, b_1, P_1), kromme nog in een punt snijden, dan zijn de zoo verkregen 3 punten weer collineair.

(a_2, b_2, P_2), (a_3, b_3, P_3), dan is ook (P_1, P_2, P_3) een groep der g_3^2 en door dit drietal gaat dus een exemplaar van het net.

De stelling van Mac-Laurin:
De satellieten van drie collineaire punten op een C^3 zijn weer collineair.

Is (a_1, a_2, a_3) een groep der g_3^2 en bepaalt men een satelliet (p, p) van a_1 en een satelliet (q, q) van a_2, dan is het derde punt r van de groep (p, q, r) een satelliet (r, r) van a.

De C′ heeft 3 buigpunten, waarvan 2 imaginair.

Deze drie buigpunten liggen op een reëele rechte.

Er zijn in het net van kubische krommen drie exemplaren, die een gegeven rechte tot buigtangent hebben. Deze drie buigraakpunten vormen een groep der g_3^2.

Wij komen dus tot de navolgende *stelling:*

In een net van kubische krommen zijn drie exemplaren, die een willekeurig gegeven lijn tot buigraaklijn hebben, terwijl door de drie raakpunten een kromme van het net gebracht kan worden.

Het bewijs van deze Stelling is ook analytisch nog gemakkelijk te geven. De krommen van het net bepalen op elke rechte nl. drietallen van punten en wel zoodanig, dat het derde punt door de beide anderen bepaald is, d.i. een involutie van de derde graad en tweede rang, die door 3 groepen ondubbelzinnig bepaald is.

Deze involutie op 1 kan worden voorgesteld door de vergelijking:

$$\lambda_1\, a_x^3 + \lambda_2\, b_x^3 + \lambda_3\, c_x^3 = 0, \qquad (1)$$

waarin $a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = 0$, drie geheel algemeene derdemachtsvormen aanduiden.

Het eerste lid van (1) is een volkomen derde macht, indien voldaan is aan de relatie:

$$\frac{\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0 + \lambda_3 c_0}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1}{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2} =$$

$$\frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2}{\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3}. \qquad (2)$$

In verkorte notatie:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3}.$$

Beschouwt men nu de greep $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ als de driehoekscoördinaten van een, met een kromme van (1) overeenstemmend punt P, dan volgt uit (2), dat er zooveel krommen in het net de lijn 1 tot buigraaklijn hebben, als er punten P gemeen zijn aan de drie kegelsneden:

$$\left\| \begin{matrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Dit aantal is dus drie.

Nu eenmaal bekend is, dat er drie krommen zijn in het net, die 1 tot buigraaklijn hebben, kan men de punten van 1 aangeven, door hun afstand x tot één der buigpunten. Zijn nu de beide andere buigpunten bepaald door x_1 en x_2, dan kan men de involutie als volgt voorstellen:

$$x^3 + \lambda^1 (x - x_1)^3 + \mu^1 (x - x_2)^3 = 0.$$

Door elke greep (λ^1, μ^1) wordt een drietal bepaald. Bepaalt men het drietal waartoe $x = x_1$ en $x = x_2$ behooren, dan moet men voor λ^1 en μ^1 de waarden kiezen, verkregen uit:

$$x_1^3 + \mu^1 (x_1 - x_2)^3 = 0$$

en

$$x_2^3 + \lambda^1 (x_2 - x_1)^3 = 0.$$

Het drietal waartoe $x = x_1$ en $x = x_2$ behooren heeft dus tot vergelijking:

$$(x_1-x_2)^3x^3 + x_2^3(x-x_1)^3 - x_1^3(x-x_2)^3 = 0.$$

Hieraan voldoet nu ook $x = 0$.

Het zou in deze opzet dus eigenlijk de voorkeur verdienen, dit bewijs vooraf te laten gaan, en daaruit de overeenkomstige eigenschap voor de vlakke rationale kubische kromme af te leiden.

Gaan wij weer verder met onze g^2_3 dan valt nog op te merken, dat ook (O_1, O_1, O_2) en (O_1, O_2, O_2) groepen der g^2_3 zijn. O_1 en O_2 zijn elkaars satellieten.

5. *Eigenschappen van de kubische ruimtekromme.*

Op een rechte wordt door een kluwen kubische krommen uitgesneden een g^3_3. C' is een kubische ruimtekromme.

De groepen op C', die correspondeeren met de groepen der g^3_3, worden op C' uitgesneden door de vlakken van haar ruimte.

a.) Een net uit het kluwen kubische krommen geeft op 1 een g^2_3. In het net zijn 3 exemplaren, die 1 tot buigraaklijn hebben. De drie buigraakpunten op 1 vormen een groep.

Een vlakkenschoof door een willekeurig punt T, bepaalt op C' een g^2_3. Door T gaan drie vlakken die de kubische ruimtekromme osculeeren. Deze drie osculatiepunten op C' liggen met T coplanair. (Klasse 3).

b.) Een net uit het kluwen snijdt uit een g^2_3 op 1. Het beeld van deze g^2_3 is een vlakke, rationale kubische kromme. Deze is van de klasse 4. In een bundel zijn dus 4 exemplaren die aan 1 raken. In elke g^2_3 is 1 neutraal paar.

Door een willekeurig punt T gaan 4 raakvlakken aan C'. (Rang 4).

Door een willekeurig punt der ruimte, gaat één koorde. De schoofgraad van de koordencongruentie = 1.

c.) Zijn (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) twee groepen van een g_3^2 op 1, en worden gevormd de groepen (a_1, b_1, p_1), (a_2, b_2, p_2), (a_3, b_3, p_3), dan is ook (p_1, p_2, p_3) een groep van het systeem.

Breng door een punt T der ruimte 2 vlakken, die op de kub. ruimtekromme uitsnijden (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3). De vlakken door T bepalen op C′ een g_3^2. Zijn de derde snijpunten der vlakken (T, a_1, b_1), (T, a_2, b_2) en (T, a_3, b_3) met C′ respectievelijk p_1, p_2, p_3, dan vormen (p_1, p_2, p_3) een groep.

Stelling: (T, p_1, p_2, p_3), liggen coplanair.

d. *De stelling van Mac-Laurin:*

De satellieten van een groep vormen weer een groep.

Een vlak door T geeft op C′ de groep (a_1, a_2, a_3). Brengen wij door (T, a_1) en (T, a_2) raakvlakken aan C′. Raakpunten zijn resp. $(p\,p)$ en (q, q). Zij r het derde snijpunt van het vlak (T, p, q) met C′, dan is (T, a_3, r, r) raakvlak aan de kubische ruimtekromme.

Stelling: (T, a_3, r, r) is raakvlak.

6. *Eigenschappen van de vierdegraadsruimtekromme van geslacht 0.*

Door een net vierdegraadskrommen wordt op $1 = 0$ uitgesneden een g_4^3. C′ is een vlakke 4-de graadskromme van geslacht 0.

$d_r = 3$, $\gamma = 6$, $K = 6$, $\delta = 4$.

Door het kluwen $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i C_i (x_0, x_1, x_2) = 0$, **wordt op** $1 (x_0, x_1, x_2) = 0$ uitgesneden een g_4^3. C′ is een rationale vierdegraads ruimtekromme.

a.) De afbeelding van een g^2_4 op l is een vlakke C^4, met $K = 6$.	a.) Door een willekeurig punt der ruimte gaan 6 osculatievlakken van C'. Klasse $= 6$.
b.) idem. $\gamma = 6$	b.) Door een willekeurige rechte gaan 6 raakvlakken aan C'.
c.) Een punt niet op l bepaalt uit het kluwen een net, welke op l een g^2_4 insnijdt. Hiervoor $d_r = 3$, d.w.z. er zijn 3 puntenparen op l, die geen exemplaar van het net bepalen, maar een bundel.	Door een punt T, niet op de kubische ruimtekromme, gaan 3 koorden van C'. Schoofgraad van de koordencongruentie $= 3$. Aantal schijnbare dubbelpunten $= 3$.
d.) g^2_4 op l. Het beeld is een vlakke vierdegraadskromme met $\delta = 4$.	Door een willekeurig punt T der ruimte zijn 4 dubbelraakvlakken aan de kub. ruimtekromme te leggen, d.w.z. de klasse van de torsus der dubbelraakvlakken $= 4$.
e.) Het net, bepaald door een punt op l, snijdt in een g^2_3. Het beeld is een vlakke derdegraadskromme, met 3 buigpunten, die een groep vormen.	Door een punt T van C' kan men 3 osculatievlakken aan de kromme leggen. De 3 steunpunten liggen met T coplanair.
f.) Punt P op l, bepaalt een g^2_4 met P als vast punt. In de resteerende g^2_3 is een puntenpaar (O_1, O_2), dat geen exemplaar van het net bepaalt.	P' op C', g^2_4 op C' met P' als vast punt. In de resteerende g^2_3 op C' zijn 2 punten O'_1, O'_2, die met P' een vlakkenbundel bepalen. D.w.z. door P' gaat één trisecante van C'.

(P, O_1, O_2) bepalen geen exemplaar van het kluwen maar een bundel.

Elke groep (P', O'_1, O'_2) wordt bepaald door één harer punten. De steunpunten der trisecanten vormen een I_3.

g.) Wij kiezen op C' een punt T; de vlakkenschoof hierdoor, bepaalt op C' een g^2_4 met T als vast punt, dus na weglating van T een g^2_3.

Wij bepalen van deze g^2_3 twee groepen (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) door 2 willekeurige vlakken door T. Bepalen wij daarna de groepen (a_1, b_1, p_1), (a_2, b_2, p_2) en (a_3, b_3, p_3) dan is (p_1, p_2, p_3) weer een groep van de g^2_3, zooals wij in het voorgaande zagen.

Wij krijgen dus voor de rationale 4-de graadskromme de volgende

Stelling:

Brengt men door een punt T van een rationale 4-de graadskromme 2 vlakken, die C' nog snijden in (a_1, a_2, a_3), resp. (b_1, b_2, b_3) en zijn de vierde snijpunten der vlakken (T, a_1, b_1), (T, a_2, b_2) en (T, a_3, b_3) met C' respectievelijk (p_1, p_2, p_3) dan zijn (T, p_1, p_2, p_3) coplanair.

h.) Een uitbreiding van de vorige stelling is het analogon van de stelling van Mac-Laurin.

Stelling:

Snijdt een vlak de vierde graads rationale ruimtekromme in de punten T, a_1, a_2, a_3 en zijn de raakpunten der door (T, a_1) en (T, a_2) gelegde raakvlakken aan de kromme respectievelijk (p, p) en (q, q) dan is, indien r het vierde snijpunt is van het vlak (T, p, q) met de kromme, het vlak (T, a_3, r, r) raakvlak in r aan de kromme.

i.) Resteert nog na te gaan, hoeveel stationnaire raakvlakken of planaire buigpunten, de rationale 4-de graadskromme heeft.

Dit komt hier dus neer op de vraag, hoeveel exemplaren van het stelsel $\sum_{i=0}^{5} \lambda_i C^4_i (x_0, x_1, x_2) = 0$, met $l (x_0, x_1, x_2) = 0$

4 samenvallende punten gemeen hebben. Beantwoording van deze vraag staat in dit verband gelijk met na te gaan, hoeveel kegelsneden door 2 vaste punten A en B van een rationale vlakke derde graadskromme gaan, die elders nog vierpuntige raking vertoonen.

Door uit te gaan van de parametervoorstellingen der C^3:

$$x = (1-\lambda^2\omega)\,\lambda$$
$$y = (1-\lambda^2\omega)$$
$$z = \lambda^3$$

en te snijden met een willekeurige K^2 vindt men een relatie in $\lambda_{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6}$ die bij het stellen van $\lambda_{1,\,2,\,3,\,4} = \lambda$ overgaat in een 4-de graads-vergelijking in λ. Er zijn dus 4 kegelsneden, die de C' 4-puntig raken en door de punten λ_5 en λ_6 gaan.

7. *Eigenschappen van de vierdegraads ruimtekromme van geslacht 1.*

Tenslotte willen wij nog een enkel voorbeeld nagaan uit de serie eigenschappen van de 4-de graads ruimtekromme van geslacht 1, die men op analoge wijze systematisch kan afleiden.

Wij snijden hiertoe op een C^3 van geslacht 1 een g_4^3 uit, door het systeem kegelsneden door 2 vaste punten A en B van de kromme. De dimensie van het systeem kegelsneden is 3. De afbeelding van de C^3 is dus een 4-de graads-ruimtekromme van geslacht 1.

Wij gaan nu na, hoeveel exemplaren van het systeem kegelsneden door A en B elders 4-puntige raking vertoonen.

De kegelsneden, die in een punt R van de C' 4-puntig raken, snijden de C' in de puntenparen (A, B) van een centrale involutie, waarvan het 2-de tangentiaalpunt van R het centrum is.

Om dus de vierpuntig-rakende kegelsneden door A en B te vinden, bepale men het derde snijpunt C van AB met de C^3. Uit C kan men 4 tangenten aan de C^3 trekken ($\gamma = 6$). Laten de raakpunten zijn R_i (i = 1, 2, 3, 4,). Uit elk van die 4 raakpunten kan men weer 4 tangenten trekken, dit geeft 16 raakpunten: $R_{i,j}$ (i, j = 1, 2, 3, 4).

Deze 16 punten zijn de zestien punten R, en er zijn dus 16 kegelsneden door A en B, die elders 4-puntig raken.

(Voert men dit uit op een rationale C^4, dan vindt men in plaats van 4 maal 4, 2 maal 2. De rationale C^4 heeft dus 4 stationnaire raakvlakken.)

Bij de afleiding van eigenschappen als bovenstaand, komt men veelal spoediger tot het doel, door gebruik te maken van het feit, dat de coördinaten van de punten eener niet rationale C^3, zijn voor te stellen als elliptische functies van een zelfde parameter.

(Clebsch—Lindemann: Vorlesungen über Geometrie.) (61).

(Coolidge: A Treatise on algebraic plane curves, Oxford 1931). (12).

Zijn a en b de parameters van de gegeven punten A en B, λ die van R, dan moet:

$$a + b + 4\lambda \equiv 0 \ (\text{mod. } \omega_1, \ \omega_2).$$

Hieruit volgt:

$$\lambda = -\tfrac{1}{4}(a + b) + \tfrac{1}{4}(\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2) \text{ met } \mu_1, \mu_2 = 1, 2, 3, 4.$$

Dus zijn er $4 \times 4 = 16$ punten R en er zijn 16 kegelsneden door A en B, die elders 4-puntig raken.

De 4-de graads ruimtekromme van geslacht 1, heeft dus 16 planaire buigpunten.

Men kan bovendien aantoonen, dat de 16 R-punten met A en B een bijzondere ligging hebben. Zij liggen namelijk 4 aan 4 op 116 kegelsneden door A en B.

Uit de bovenstaande uitdrukking voor λ, volgt nl., dat voor de som:

$$a + b + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m$$

altijd weer een der λ's gevonden zal worden, stel λ_n. Deze $\lambda_{k,\,l,\,m,\,n}$ behoeven dan echter niet noodzakelijk van elkaar te verschillen. Legt men een K^2 door A en B, en drie punten R, dan zal dus het zesde snijpunt met de C^3 weer een R-punt zijn. Het aantal K^2 door A en B, die de C^3 in 4 R-punten snijden, vindt men dus als het aantal herhalingscombinaties 3 aan 3 van 16 elementen, dus:

$$\overline{C_{16}^{3}} = \frac{18!}{3!\;15!} = \frac{18.17.16}{1.2.3} = 816.$$

Hieronder zijn er echter, die niet aan het gestelde probleem voldoen. De kegelsneden, die telkens in vier verschillende punten snijden, $R_{k,l,m,n}$, komen telkens overeen met 4 groepen, nl. met:

l, m, n.
m, n, k.
n, k, l.
k, l, m.

De kegelsneden, die in R_k raken en in R_l en R_m snijden, komen overeen met drie groepen:

k, k, l.
k, k, m.
k, l, m.

De kegelsneden, die in R_k en in R_l raken, komen overeen met twee groepen:

k, k, l.
k, l, l.

De kegelsneden, die in R_k osculeeren, raken daar 4-puntig en komen overeen met een groep:

k, k, k.

Van de tweede soort zijn er dus $16 \times 6 = 96$ kegelsneden, van de derde soort $16 \times 3/_2$ en van de vierde soort 16.

Er zijn dus $\dfrac{816 - 3.96 - 2.24 - 16}{4} = 116$ kegelsneden door A en B en telkens vier verschillende punten R.

Hiermede is dan bewezen de *Stelling:*

De 16 planaire buigpunten van een 4-de graads ruimtekromme van geslacht 1 liggen 4 aan 4 in 116 vlakken.

17 Januari 1937.

LITERATUUR.

1. B. Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inauguraldissertation).
2. B. Riemann. Theorie der Abelschen Functionen. (Journ. f. M. Bd. 54).
3. H. F. Baker. On examples of the application of Newton's polygon to the theory of singular points of algebraic functions. (Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume XV).
4. H. F. Baker. The practical determination of the deficiency and adjoint curves for a Riemann-surface (Math. Ann. Bd. 45).
5. Cayley. Quaterly Journal t. 11. pag. 185.
6. H. A. Schwarz. De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. (J. f. M. Bd. 64).
7. Salmon. A treatise on the higher plane curves.
8. Descartes. La géometrie.
9. A. Clebsch. Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie (J. f. M. Bd. 63) (1863).
10. Hesse en Steiner. (J. f. M. Bd. 49).
11. A. Clebsch. Ueber diejenigen Curven, deren Coördinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. (J. f. M. Bd. 64).
12. J. L. Coolidge. A treatise on algebraic plane curves. Oxford, at the Clarendon press. (1931).
13. O. Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.
14. G. Huber. Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajectoriën und die Cissoiden 4-ter Ordnung.
(Monatshefte für Mathematik und Physik. Jahrgang 6).
15. Brill—Noether. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. (Jahresbericht der Deutschen Mathematikerverein, Dritter Band, 1894).
16. Steiner. Crelles Journal f. M. (Bd. 33).
17. A. Clebsch. Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. (J. f. M. Bd. 63).
18. Aronhold. (J. f. M. Bd. 61).
19. A. Clebsch. Ueber diejenigen Curven, deren Coördinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen. (J. f. M. Bd. 64).
20. Abel. Mémoires des savants étrangers. t. 7.
21. A. Clebsch. Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. (J. f. M. Bd. 64).

22. Clebsch—Gordan. Theorie der Abelschen Functionen.
23. W. Esson. On Synthetic Geometry. (Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XXVIII).
24—25. Cremona. Sulla trasformazione geometriche delle figure piane. Nota 1 ed 2 (Mem. di Bologna, Ser. 2 t. II, 1863; Ser. 2 t. V, 1865).
26. Cayley. On the rational transformations between two spaces. (Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 3. 1869).
27. Salmon. Higher Algebra, Lesson 10.
28. Klein. Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen. (Math. Ann. t. VII).
29. Klein. Sitzungsberichte der phys. med. Societät zu Erlangen. (Mai, 1874).
30. Klein. Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen. (Math. Ann. t. VII. pag. 549).
31. Aronhold. Monatsberichte der Berliner Akademie (1861).
32. Jordan. Cours d'Analyse.
33. Cremona. Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. (Mem. Acc. Bologna. Ser. 2 t. VI).
34. E. Bertini. Giornale di mat. 7. (1869).
35. Zeuthen. Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. (Mathematische Annalen t. 3).
36. Jonquières. Généralisation de la théorie de l'Involution. (Annali di Matematica. t. II).
37. Chasles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1864).
38. Cayley. Transactions of the Cambridge philosophical Society. t. II.
39. Cremona. Einleitung in die Theorie der ebenen Curven.
40. Cayley. Second Memoir on the curves which satisfy given conditions. (Phil. Transactions of the R. Soc. London. t. CLVIII, 1868).
41. Weber. Zur Theorie der Transformationen algebraischer Functionen (Crelle. J. f. M. Bd. 76).
42. L. Burmester. Das bifocal-veränderliche System. (Math. Ann. Bd. 16).
43. Cayley. Comptes Rendus. t. LXII.
44. Cayley. On the correspondence of two points on a curve. (Proceedings of the London Math. Society t. I, 1866).
45. Brill. Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. (Math. Ann. t. 6).
46. Brill. Ueber die Correspondenzformel. (Math. Ann. t. 7).
47. Brill. Ueber algebraische Korrespondenzen. (Math. Ann. t. 31).
48. F. Lindemann. Crelle J. f. M. (Bd. 84.).
49. Noether. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. (Math. Ann. Bd. 8).
50. Severi—Löffler. Vorlesungen über algebraische Geometrie.

51. Brill und Noether. Ueber die Algebraische Functionen und ihre Anwendung in die Geometrie. (Math. Ann. Bd. 7).
52. E. Schonhardt. Alexander von Brill. (Mathematik. Heft I, 1936).
53. Severi. Lezioni di geometria algebrica (1908).
54. Severi. Trattato di geometria algebrica (1926).
55. F. Enriques. Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche. (Torino Atti 37. 1901).
56. E. Bertini. Introduzione alla geometria proiettiva degli isperspazi. (pag. 9).
57. Noether. Rationale Ausführung der Operationen. (Math. Ann. 23).
58. F. Enriques. Boll. di bibl. e storia delle matematiche. **2**, 76, (1899).
59. F. Enriques. Torino Atti, **37**, 19, (1901).
60. Severi. Palermo Rendiconti. **17**, 82, (1902).
61. Clebsch—Lindemann. Vorlesungen über Geometrie.

ERRATUM.

pag. 85 r. 7 v. o.,

staat: Door een willekeurig punt T gaan 4 raakvlakken aan C′.
lees: Door een willekeurige rechte l gaan 4 raakvlakken aan C′.

STELLINGEN.

I.

Aan het bewijs voor

$$d_{max} = \frac{1}{2} (n-1) (n-2),$$

zooals dit voorkomt in het artikel „On Synthetic Geometry" door W. Esson, mag geen waarde worden toegekend.

W. ESSON, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXVIII.

II.

De algemeene, analytische oplossing van het probleem: „de cirkels te bepalen, welke drie gegeven cirkels C_1, C_2, C_3 snijden onder gegeven hoeken φ_1, φ_2, φ_3", faalt indien de drie cirkels C_1, C_2 en C_3 ontaard zijn.

CASEY, A treatise on the analytical Geometry of the point, line, circle and conic sections, 2d. Ed. (1893).
BARRAU, Analytische Meetkunde, Deel I, pg. 79 e.v. (1918).

III.

„Das ganz primitive Prinzip, durch Koordinaten x, y, z die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen ist schon seit den ältesten Zeiten gebraucht worden.

Rechtwinklige Koordinaten werden auch von Apollonius in der Lehre von den Kegelschnitten verwendet."

Bovenstaande beweringen kunnen aanleiding geven tot misverstand over het coördinatenbegrip in de oudheid.

A. VOSS, Ueber das Wesen der Mathematik, pg. 12 (Teubner, 1908).

IV.

Het systeem der asymptoten van de orthogonale hyperbolenbundel, gegeven door 3 punten A, B, C, valt samen met het systeem der Simsonrechten van △ A B C. en omhult dus een Hypocycloïde van Steiner.

V.

Voor het construeeren van de 3 Simsonrechten s_1, s_2, s_3 door een punt D van de Feuerbachcirkel N van $\triangle$ A B C heeft men de volgende voorschriften:

1) voor s_1: Zij P de productfig. van D t.o.v. H. met factor 2. R het voetpunt der loodlijn uit P op B C, dan D R $= s_1$.

2) voor s_2: Trek door N de middellijn L K van de Feuerbachcirkel, loodrecht s_1, dan zijn D L en D K resp. s_2 en s_3.

VI.

Het bewijs van de Stelling van Schwarz:

„Is f (x) continu voor $a \leqslant x \leqslant b$ en is de gegeneraliseerde tweede afgeleide voor f (x), λ (x) $= 0$ voor $a < x < b$, dan is f (x) lineair voor $a \leqslant x \leqslant b$",

volgens Wolff, is te verkiezen boven dat van Rogosinski.

J. WOLFF, Fouriersche Reihen mit Aufgaben.

W. ROGOSINSKI, Fouriersche Reihen (Samml. G.).

VII.

Afgezien van de geheel andere voorstellingswijze kan men in de bewijzen van Faber en Wolff van de Stelling van Osgood eenige verwantschap aanduiden.

FABER, Sitzungsberichte Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1922.

WOLFF, Sur la représentation conforme; Verslagen Kon. Ak. van Wetensch., 1930.

VIII.

De beweringen van Karsten:

„De factor $\left[1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(e^{(k-k_1)\cdot c \cdot l} - 1\right)\right]$

geeft de afwijking van de Wet van L a m b e r t aan. Is de absorbeerende laag voor λ_1 doorlaatbaarder dan voor λ, dus $k > k_1$, dan wordt [ ] > 1, d.w.z. I_D te groot. In het omgekeerde geval $k < k_1$, wordt I_D te klein",
zijn aan bedenkingen onderhevig.

P. KARSTEN, Bijdrage tot de Colorimetrie in het algemeen, en de titrimetrische Colorimetrie in het bijzonder. (Diss. Groningen 1934).

IX.

De onderzoekingen ter bepaling van de optische constanten van stoffen uit extinctie en stralingsmetingen, aan kolloide oplossingen ervan, dienen te worden voortgezet.

H. A. GRIBNAU.