Dissertatio mathematica inauguralis de quibusdam curvarum affinitatibus

1 Swellengrebel, J. G. H. De quibusdam curvarum affinitatibus.

2 Hoogeveen, C. G. Theses jur. inaug.

3. Martini van Geffen, J. M. A. id.

4. Berg, O. van den. id.

5. Rink, J. id.

DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

QUIBUSDAM CURVARUM AFFINITATIBUS

DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

QUIBUSDAM CURVARUM AFFINITATIBUS.

Barcode helaas voorin!

DISSERTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

QUIBUSDAM CURVARUM AFFINITATIBUS,

QUAM,

FAVENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

BERNARDI FRANCISCI SUERMAN,

MED. DOCT. ET PROF. ORD.

ET

AMPLISSIMI SENATUS ACADEMICI CONSENSU

AC

NOBILISSIMAE FACULTATIS MATHESEOS ET PHILOSOPHIAE NATURALIS DECRETO,

Pro Gradu Doctoratus

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS

In Academia Rheno-Trajectina

RITE AC LEGITIME CONSEQUENDIS,

ERUDITORUM EXAMINI SUBMITTIT

JOHANNES GERARDUS HENRICUS SWELLENGREBEL,

Rheno-Trajectinus.

AD DIEM VIII. M. JUNII ANNI MDCCCXLVII, HORA II.

TRAJECTI AD RHENUM,

Apud L. E. BOSCH ET FILIUM,

Academiae Typographos.

MDCCCXLVII.

PARENTIBUS OPTIMIS CARISSIMIS

SACRUM.

ORDINIS CONSPECTUS.

INTROITUS.

Lineae alicujus H C G (fig. 1) formam si analytica formula indicare velimus, notum est, ita hoc potissimum fieri solere, ut rectas duas fixas fingamus XX' et YY', quas *coordinatarum axes* dicimus, distantias autem C D et C E, quibus figurae propositae punctum quodlibet C ab axibus hisce distet, puncti illius C *abscissam* et *ordinatam* sive ejusdem *coordinatas* vocemus. Aequatio jam si proponitur aliqua f (x , y) = o, mutua prodit coordinatarum relatio, h. e. series prodit punctorum, quibus linea proposita G C H constat. *Coordinatarum* vero notio, — ut monuit inter alios Drückenmüller, *die Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie* pag. 1, — latius spectat: Variabilia enim si fingamus quaelibet quanta *u* et *v* — sive sint lineae sive anguli sive numeri — quaecumque inter variabilia ista proponitur aequatio f (u , v) = o sive v = F (u), si alteri coordinatae u cunctos deinceps tribuamus valores a , a' , a'', etc., seriem quamdam profert rerum recte definitarum

$$u = a \qquad v = F(a)$$
$$u = a' \qquad v = F(a')$$
$$u = a'' \qquad v = F(a'')$$

quas, Drückenmüllero praeeunte ll. pag. 4, *elementa* vocemus. *Elementum* istiusmodi si punctum lineamve aliamve quamdam indicat rem geometricam, elementorum ista series sive aequatio proposita f (u , v) = o lineam quamdam indicare solet: cujus rei apud Drückenmüllerum II. et apud Plückerum (*) exempla occurrunt bene multa. Duo jam eligamus istiusmodi *elementorum* genera: u et v, u′ et v′: eandemque functionem f primum horum, deinde illorum mutuam relationem indicare statuamus: duae ita prodibunt lineae $f(u, v) = o$ et $f(u' v') = o$, quae, si elementa u′ et v′ ex elementis u et v originem ceperint adeoque aequatione quadam $F(u, v, u', v') = o$ vel duabus aequationibus $F(u, v, u', v') = o$ et $F(u, v, u', v') = o$ cum illis cohaereant, ipsae quoque erunt secum invicem affinitate quadam conjunctae. Ex innumeris istis coordinatarum mutuis relationibus simplicissimam eligamus hancce, qua constans sit analogarum coordinatarum productum: figurarum oritur ita affinitas, quam aequationes repraesentant $uu' = A^2$, $vv' = B^2$, aliave earumdem affinitas, aequationibus $u = u'$, $vv' = B^2$ indicata. Quarum affinitatum posterior, si ponamus $B = 1$ coordinatasque u et v orthogonales esse h. e. u abcissam x, v contra applicatam y denotare statuimus, eadem illa est relatio $x = x'$, $yy' = 1$, de qua cl. Verdam egit in Commentariis Institut. Belgici vol. XII. pag. 67-93. Sin alium statuamus coordinatarum u et v significatum, relatio proposita $u = u'$, $vv' = B^2$ aliam denotat figurarum affinitatem, ab affinitate modo memorata $x = x'$, $yy' = 1$ plane diversa, quod ad mutuam analogarum asymptotarum relationem vel quod ad reliquas attinet geometricas analogarum figurarum qualitates. At vel sic tamen formulae analyticae $f(u, v, \frac{du}{dv}, \ldots u', v', \frac{du'}{dv'} \ldots) = o$, $f(u, v, \frac{du}{dv}, \ldots u', v', \frac{du'}{dv'} \ldots) = o$, etc. quae coordinatarum relatione proposita $u = u'$, $vv' = B^2$ e figurarum affinitate $x = x'$, $yy' = B^2$ sequebantur, intactae in nova affinitate permanent, sed ut eas alio sensu interpretemur requirunt. Generales igitur figurarum affinitates propositas — $uu' = A^2$, $vv' = B^2$ et $u = u'$, $vv' = B^2$ — si in una aliqua coordinatarum u et v definitione consideraverimus, duplicem triplicemque hinc fructum hauriri licebit ea agendi ratione, quam commendat Plückerus, *System der analytischen Geometrie*, pag. 48: „ . . . . . *so können wir auch den Symbolen irgend einer vorliegenden analytischen Beweisführung verschiedene Coordinaten-bedeutung beilegen*, *und erhalten alsdan eben so viele geometrische Sätze.*"

De priore igitur videamus e generalibus affinitatibus propositis, h. e. de affinitate, quam aequationes indicant $uu' = A^2$, $vv' = B^2$. Quum autem, generalis hujus affinitatis qualitates quid significent, sit ita maxime perspicuum, si u et v orthogonales designant sive vulgares coordinatas, affinitatem nostram ea hypothesi interpretemur, ut u abscissam x, v contra applicatam y denotet.

(*) *Analytische Entwickelungen*, *System der analytischen Geometrie*, et alibi.

CAPUT I.

DE AFFINITATE, QUAE INDICATUR FORMULIS $xx' = 1$, $yy' = 1$.

De hac igitur agamus figurarum analogia, quae universe quidem relationibus indicatur $uu' = A^2$, $vv' = B^2$; quam e nostra, qua hocce capite utimur coordinatarum u et v definitione, aequationibus quoque indicari $xx' = A^2$, $yy' = B^2$ manifestum est.

Primum, quod se nobis affinitatem hancce considerantibus offert, hoc est, mutuam esse inter coordinatas u et v symmetriam, mutuam item inter coordinatarum systemata u v et u′ v′ esse symmetriam: omnia igitur, quae de coordinata u afferri possint, in coordinatam item v quadrare, omniaque quae de u, $\frac{dv}{du}$, $u\frac{dv}{du}$, etc. . . . . aliisve coordinatae u functionibus valeant, de analogis item valere coordinatae v functionibus v, $\frac{du}{dv}$, $v\frac{du}{dv}$, etc. . . . . modo litteras u et v secum permutemus; nec ullam esse caussam, cur coordinatarum u et v systema systemati praestaret u′ v′: figura enim si sit aliqua f (u, v) = o, e. g. triangulum quoddam P, quae respondentem sibi habeat in systemate u′ v′ figuram aliquam Q, fore ut in systemate quoque u′ v′ sit triangulum P′, quod systematis u v figuram quamdam Q′, figurae Q similem, respondentem sibi habeat. Ne igitur supervacaneis iterationibus inutilem operam navemus, ea tantum afferamus, quae alteri coordinatae u aliisve ejusdem coordinatae functionibus contingunt; omittamus vero illa, quae mutua litterarum u et v permutatione inde sequuntur: ejusdem brevitatis caussa figuris tantummodo f (u, v) = o systematis u v quaeramus analogas alterius systematis figuras f (u′ v′) = o:

quae vero sint systematis u v figurae, quae systematis u′ v′ figuris propositis respondeant, inquirere omittamus.

Aequationes, quibus affinitas de qua agitur indicatur, $uu' = A^2$, $vv' = B^2$, e nostra coordinatarum u et v definitione hanc nos docet inter respondentes sibi quaslibet figuras P et Q esse analogiam, ut inter abscissam u sive x puncti cujuslibet C, in priore figura siti, interque abscissam u′ analogi analogae figurae puncti C′, sit linea quaedam media proportionialis, cui longitudo contingat A, h. e. quae A longitudinis unitates contineat. Jam vero, quum longitudinis unitas sit arbitraria, ipsa ista linea media proportioniali unitatem longitudinis repraesentari statuamus: qua suppositione aequatio nostra simpliciorem induit formam hancce $uu' = 1$. Definita autem ita longitudinis unitate, non jam arbitraria erit longitudo lineae B, inter analogas analogarum figurarum applicatas v et v′ mediae proportionalis; brevitatis tamen caussa statuamus, esse B quoque $= 1$, modo attendamus, affinitatem nostram ita fieri minus generalem, multaque igitur, quae in affinitate ita oriente $uu' = 1$, $vv' = 1$ valent —— illa e. g. quae ad affinitatem $xx' = 1$, $yy' = 1$ aequationibus inter polares coordinatas r et ϕ exprimandam spectant —— in generali unde exiimus affinitate $uu' = A^2$, $vv' = B^2$ non amplius obtinere.

Ex aequationibus fundamentalibus, quae mutuam ipsarum coordinatarum relationem indicant

$$uu' = 1 \qquad vv' = 1 \qquad (1)$$

aliae sequuntur inter coordinatarum producta vel quotientia aequationes

$$uv = \frac{1}{u'\,v'} \qquad (2)$$

$$\frac{v}{u} = \frac{u'}{v} \qquad (3)$$

quarum e nostra coordinatarum u et v definitione hic erit sensus: *uv* sive *xy* abscissae C D applicataeque C E productum indicat, h. e. superficiem rectanguli O D C E, quod puncti cujuslibet coordinatae C D et C E axium XX′ et YY′ ope includunt; quotiens autem $\frac{v}{u}$ sive $\frac{y}{x}$ tangentem repraesentat anguli C O X, quem puncti cujuslibet C radius vector O C cum semiaxe O X facit. Aequatio (2) igitur, superficiei unitatem inter analoga utriusque figurae rectangula O D C E et O′ C′ D′ E′ mediam esse proportionalem nos docet; aequatio (3) autem nos monet, analogos quoque analogorum punctorum radios vectores O C et O′ C′ oppositis regionibus jacere, tangentem enim anguli C O X esse cotangentem anguli C′ O′ X′, angulumque adeo C O X alterius anguli esse complementum 90° — C′ O′ X′.

Ex his jam aequationibus (1—3) apparet, saepius fieri, ut primitivae alicui figurae analogam facillime invenire possis. Sequitur enim inde, fore ut

elementorum seriebus	respondeant elementorum series	
$u = o$	$u' = \infty$	
$u = a$	$u' = 1/a$	(4)
$u = \infty$	$u' = o$	
$v = o$	$v' = \infty$	
$v = b$	$v' = 1/b$	(5)
$v = \infty$	$v' = o$	
$\frac{v}{u} = o$	$\frac{v}{u'} = \infty$	
$\frac{v}{u} = c$	$\frac{v'}{u'} = 1/c$	(6)
$\frac{v}{u} = \infty$	$\frac{v'}{u'} = o$	

(designantibus a, b, c quanta quaelibet finita). Primitivae jam aequatio alterutra coordinata careat: aequationes (4) et (5) nos docent, analogam huic respondere figuram, cujus aequatio eadem coordinata careat: cujus rei e nostra coordinatarum definitione hic erit sensus: si primitivae sit recta aliqua $x = a$ vel $y = b$, alterutri axium YY' vel XX' parallela, fore ut analoga quoque sit recta, eidem axi parallela: ipsi igitur axi $x = o$ vel $y = o$ terminum respondere $x' = \infty$ vel $y' = \infty$, quo pervenire studet recta, axi YY' vel axi XX' parallela, ab eodem autem infinite recedens. Aequationes contra (6) nos docent: si primitivae istiusmodi contigerit aequatio, in qua constans sit coordinatarum quotiens, analogam respondere, cui idem contingat: quod pro nostra coordinatarum u et v definiendarum ratione huc redit: cuilibet rectae, coordinatarum initium O pervadenti, aliam respondere ex affinitate nostra rectam, punctum O ipsam quoque transeuntem: modo excipias ipsas rectas XX' et YY', quae non erunt sibi analogae: de mutua enim serierum $\frac{v}{u} = o$ et $\frac{v'}{u'} = \infty$ analogia infra videbimus. Ex his igitur patet, sex esse rectas in systemate u v sive x y, quae, si analogas iis quaeras alterius systematis figuras, intactae maneant:

$$\left.\begin{aligned} u &= +1 \\ u &= -1 \\ v &= +1 \\ v &= -1 \\ \frac{v}{u} &= +1 \\ \frac{v}{u} &= -1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

quarum duae, quas postremo loco nominavi, e nostra coordinatarum u et v definiendarum ratione rectas indicant GK et FL (fig. 2) sive $x = y$ et $x + y = 0$, coordinatarum initium O ita transeuntes, ut cum utroque axe angulum faciant 45 graduum: quatuor contra priores nostro loco rectas axibus parallelas indicant GL, FK, FG, KL (fig. 2).

Hanc tamen analogiam, qua unaquaque e sex istis rectis ipsa sibi sit analoga, cave ne ita intelligas, ut earum unumquodque punctum ipsum sibi respondere statuas: de punctorum enim sive elementorum analogia aliter se res habet. Vidimus enim

elementis			elementa respondere			
	$u = 0$	$v = 0$		$u' = \infty$	$v' = \infty$	
	$u = 0$	$v = b$		$u' = \infty$	$v' = 1/b$	
	$u = 0$	$v = \infty$		$u' = \infty$	$v' = 0$	
	$u = a$	$v = 0$		$u' = 1/a$	$v' = \infty$	
	$u = a$	$v = b$		$u' = 1/a$	$v' = 1/b$	(8)
	$u = a$	$v = \infty$		$u' = 1/a$	$v' = 0$	
	$u = \infty$	$v = 0$		$u' = 0$	$v' = \infty$	
	$u = \infty$	$v = b$		$u' = 0$	$v' = 1/b$	
	$u = \infty$	$v = \infty$		$u' = 0$	$v' = 0$	

(designantibus a et b quanta quaelibet finita).

Unde patet, elemento primitivae figurae, cujus utraque coordinata sit finita, h. e. puncto primitivae, quod ab utroque axium XX′ et YY′ finite distet, alterius figurae respondere elementum sive punctum, cui idem contingat: sin non fuerint ambae primitivi elementi coordinatae finitae, neque fore analogi elementi coordinatas finitas: puncto enim, in alterutro axium XX′ vel YY′ sito, punctum respondere, quod ab eodem axe infinite distet: elemento $u = 0$ $v = \infty$, h. e. limiti, quo pervenire studeat punctum, rectam YY′ haud deserens, a recta contra XX′ infinite recedens, limitem respondere, quo tendat punctum, in recta XX′ manens, ab altero autem axe infinite recedens: ipsi denique coordinatarum initio O metam respondere, quo tendat puncti cujusdam infinita ab utroque axe recessio. Inter cuncta igitur primitivae figurae puncta quatuor tantum erunt, quae, si ad analogam figuram trangrediaris, ipsa sibi respondeant: puncta videlicet F, G, K, L (fig. 2) sive

$$\left.\begin{array}{ll} u = +1 & v = +1 \\ u = +1 & v = -1 \\ u = -1 & v = +1 \\ u = -1 & v = -1 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Quam igitur sex utriusque figurae rectis supra vidimus contingere secum ipsis analogiam, ita intelligendam esse apparet, ut, si in rectarum (7) una alterave punctum eligas, quod ad puncta (9) non referendum sit, aliud ei ex affinitate nostra respondeat ejusdem rectae punctum.

Ex hacce elementorum analogia apparet jam, quid sibi velit mutua serierum $\frac{v}{u} = o$ et $\frac{v'}{u'} = \infty$ analogia, de qua supra sermo erat. Attendamus enim, seriem $\frac{v}{u} = \infty$ summam indicare cunctorum elementorum, quorum coordinata v coordinatam u infinities magnitudine superet: coordinatae igitur v si cunctos deinceps inde ab o usque ad ∞ tribuamus valores finitos, u semper erit $= o$: sin valorem coordinatae v tribuamus infinitum, fieri potest, ut sit u finita vel etiam infinita, modo infinita ejus magnitudo infinities ab alterius coordinatae valore superetur. Elementorum igitur series $\frac{v}{u} = \infty$ e nostra coordinatarum u et v definiendarum ratione haecce indicabit puncta: punctum primum O; reliqua porro axis YY′ puncta; puncta deinde, quorum distantia est ab axe illo finita, ab altero contra axe infinita —— cujusmodi puncta contingunt figuris, quibus est asymptota aliqua $x = a$, axi YY′ parallela —— puncta deinceps, quorum distantia est ab axe YY′ infinita, ab altero axe infinities major —— cujusmodi sunt puncta D et E (fig. 3), parabolam $y = ax^2$ haud deserentia, a recta autem YY′ infinite recedentia. Series item $\frac{v'}{u'} = o$ quatuor constabit punctorum generibus. Mutua jam serierum $\frac{v}{u} = o$ et $\frac{v'}{u} = \infty$ analogia ita erit intelligenda, ut unumquodque ex alterius seriei elementis isto respondeat alterius seriei elemento, quod ei ex aequationibus fundamentalibus (1) respondere oporteat: ipsum igitur coordinatarum initium O sive primum e quatuor seriei $\frac{v}{u} = \infty$ punctorum generibus quarto seriei $\frac{v'}{u} = o$ respondebit punctorum generi, h. e. punctis istis, qualia in parabola $x' = ay'^2$ occurrunt; secundum deinde seriei $\frac{v}{u} = \infty$ punctorum genus, h. e. puncta rectae YY′, finite ab O distantia, tertio respondebit e seriei $\frac{v'}{u'} = o$ punctorum generibus, h. e. punctis, quibus sit y′ finita, x′ infinita.

Ex aequationibus porro fundamentalibus (1) haec sequitur inter analogorum elementorum signa + vel — concordia:

elementis	$u > o$	$v > o$	respondere elementa	$u' > o$	$v' > o$	
	$u > o$	$v < o$		$u' > o$	$v' < o$	(10)
	$u < o$	$v > o$		$u' < o$	$v' > o$	
	$u < o$	$v < o$		$u' < o$	$v' < o$	

quae, si coordinatas u et v solita ratione orthogonales esse statuimus, nos docet; puncto primitivae, quod in uno alterove quatuor quadrantium X O Y, X′ O Y, X′ O Y′, X O Y′ (fig. 1) situm sit, punctum respondere analogae figurae, in eodem quadrante situm. Ex iisdem aequationibus (1) sequitur praeterea

$$\text{prout sit} \quad \left|\begin{array}{c} u > v \\ u < v \end{array}\right| \quad \text{fore} \quad \left|\begin{array}{l} u' = \frac{1}{u} < v' = \frac{1}{v} \\ u' = \frac{1}{u} > v' = \frac{1}{u} \end{array}\right. \qquad (11)$$

modo eam intelligamus alterius coordinatae prae altera praestantiam, quae ad magnitudinem tantum spectat, signi $\pm$ non ratione habita, h. e. ut $u = -5 > u = -3$ dicamus: quibus aequationibus analogia, quam inter analogorum punctorum situm nostra in affinitate exstare modo videbamus, ita accuratius definitur, ut puncto primitivae, in octante X O G vel Y O G sito (fig. 2), punctum respondere analogae docemur, quod in octante jaceat Y O G vel X O G, ac reliquorum item quadrantium octantia sibi esse simili modo quoad punctorum situm opposita.

Sequitur tandem ex iisdem aequationibus (1)

$$\text{prout} \quad \left|\begin{array}{c} \text{augeatur } u \text{ vel } v \\ \text{minuatur } u \text{ vel } v \end{array}\right| \quad \text{fore ut } u' \text{ vel } v' \quad \left|\begin{array}{c} \text{minuatur} \\ \text{augeatur} \end{array}\right. \qquad (11^a)$$

quod nostra e coordinatarum u et v interpretatione nos docet: si primitivae sit pars aliqua, quae axium alterutrum accedat vel ab eodem recedat, analogam contra analogae figurae partem ab eodem illo axe recedere vel eundem appropinquare.

Ex analogia autem ista, quam ex affinitate nostra inter utriusque figurae elementa elementorumve series exstare aequationes (4 — 10) nos docent, efficitur, ut nonnullas possimus enunciare analogae figurae proprietates, quae notis ignotae alicujus primitivae qualitatibus respondeant. Ipsa enim primitiva si sit nobis ignota, at si illam elemento gaudere quodam $u = a$, $v = b$, h. e. punctum quoddam transire $x = a$, $y = b$ cognitum habeamus, facile apparet, requiri, ut analogum analogae figurae elementum contingat, h. e. ut analogum punctum analoga transeat. Ex aequationibus igitur (4 — 10) haec sequitur inter analogarum proprietates analogia: Quoties primitiva punctorum F, G, K, L., (fig. 2) unum alterumve transit, toties idem punctum transit analoga. (*) Quoties rectarum GL, FK, FG, KL, GK, FL (fig. 2) unam alteramve primitiva tangit vel secat, toties eandem rectam offendit analoga. Quot sunt in primitiva asymptotae, alterutri axium XX′ vel YY′ parallelae, toties alterum axem offendit analoga (†). Quot primitiva gaudet asymptotis, neutri

---

(*) Exemplum praebet punctum L (fig. 5).

(†) Asymptotae e. g. F G (fig. 5 et 6), DE (fig. 7 et 8) respondent alterius figurae cum recta XX′ intersectionibus A (fig. 5 et 6), A (fig. 7), A (fig. 8). Binae autem asymptotae $x = +\infty$ et $x = -\infty$ (fig. 3) vel duplex asymptota $x = +\infty$ (fig. 8) duplici analogae figurae cum axe XX′ intersectioni, h. e. ejusdem in O tactioni (fig. 3 et 8) respondet. Asymptota tandem $x = o$ (fig. 4) respondet alterius figurae asymptotae $y = o$ (fig. 4.)

axium parallelis, toties analoga punctum O transit, neutri axium parallela (*) At non possis vicissim affirmare, si primitiva alterutrum āxem secet, asymptotam fore in analoga, alteri axi parallelam, sed hoc tantum e punctorum analogia supra investigata sequitur, fore ut analoga ab altero axe finite, ab altera infinite distet: sitne vero ei asymptota necne, ab analogae in puncto isto infinite distanti directione pendet; quae quomodo cum primitivae directione cohaereat, infra videbimus.

Fundamentales autem affinitatis nostrae aequationes (1) quum sint quod ad singulas coordinatas primi gradus, affinitatem nostram ejusmodi esse apparet, ut uni cuilibet primitivae puncto unum tantum ex affinitate nostra respondeat punctum analogae. Attendendum tamen, si duo sint primitivae puncta $x = a$, $y = b$ et $x = a$, $y = b + c$, quae, mutuamque a se invicem distantiam c, suamque ab axe YY' distantiam a intactam servantia, ab axe XX' infinite recedant, tandem fore, ut utrumque punctum coordinatis indicetur $x = a$, $y = \infty$, atque utrique adeo puncto —— ut aequationes (8) nos docent —— punctum respondeat $x' = {}^1/a$, $y' = o$, in recta XX' situm. Unde patet, uni alicui primitivae puncto, prout vel ab utroque axe finite distet, vel in alterutro axe situm sit, vel tandem ipsum occupet coordinatarum initium O, vel unum tantummodo respondere ex affinitate nostra punctum analogum, vel infinitam punctorum multitudinem, vel multitudinem tandem punctorum infinities etiam majorem sive ut ita dicam bis infinitam.

Ex his autem, quae de respondentium sibi punctorum analogorum numero reperimus, sequitur, non semper posse, si primitivae sit alicubi punctum duplex, affirmari, ejusdem singularitatis punctum in analoga quoque reperiri. Primitivae enim figurae $f(u, v) = o$ sive $v = F(u)$ statuamus, ob duplicem functionis F naturam, duos esse ramos sive duas elementorum sive punctorum series: quarum utriusque istud eligamus elementum, cui coordinata contingat $u = a$, h. e. istud punctum, quod in recta $x = a$ situm sit: duo ita oriuntur elementa

$$u = a \qquad v = F_1(a) = b$$
$$u = a \qquad v = F_2(a) = b + c$$

Lineae jam nostrae hanc contingere formam statuamus sive functionis F hanc esse naturam, ut, ubi coordinata u continua auctione vel deminutione ad certum tandem aliquem pervenerit valorem $u = a + d = e$, in alterius contra coordinatae valore evanescat functionis F duplicitas, quum discrimen $F_1(e) - F_2(e)$ sit $= o$ vel saltem $= \omega$ h. e. infinite parvum. Facile jam patet, inter analogos quoque quos coordinata v' nanciscatur valores $v' = \frac{1}{F_1(e)}$ et $v' \frac{1}{F_2(e)}$ nullum fore vel

(*) Asymptota e. g. FG (fig. 7) obliquae respondet puncti O ab hyperbola D′ J′ O G′ transitioni: recta autem D H (fig. 5), quae ipsa sibimet est asymptota, obliquae puncti O a ramo D L O F transitioni respondet.

infinite parvum discrimen, nisi sit $F_1(e) = o$: hoc enim si fiat, apparet duplici primitivae elemento

$$\left.\begin{array}{l} u = e \quad v = F_1(e) = o \\ u = e \quad v = F_1(e) + \omega = \omega \end{array}\right| \text{respondere} \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{e} \quad v' = \frac{1}{F_1(e)} = \infty \\ u' = \frac{1}{e} \quad v' = \frac{1}{F_1(e) + \omega} = \frac{1}{F_1(e)} + h \end{array}\right. \tag{12}$$

designante h quantum quoddam finitae magnitudinis, nisi ω quantum indicare velis e secundo ordine parvum, quo casu erit h infinite parvum. Quae si pro nostra coordinatarum u et v definiendarum ratione interpretamur, vidimus, si in primitiva duplex triplexve aliudve fuerit punctum multiplex, ab utroque axium XX et YY' finite distans, analogum requiri in analoga figura punctum ejusdem singularitatis; sin in alterutro axe situm fuerit punctum multiplex, accuratiorem investigationem requiri, analogumne respondeat ei punctum multiplex, an vero duo pluresve analogae rami, qui, finitam mutuam a se invicem distantiam servantes, infinite ab eodem axe recesserint: quin fieri solere, si in ipso coordinatarum initio O fuerit duplex primitivae punctum, ut analogi respondeant ei analogae rami, qui in infinitum exeant, quorumque adeo infinita sit a se invicem distantia.

Primitivae jam $f(u, v) = o$ sive $u = F(v)$ sive $v = F(u)$ statuamus esse alicubi elementum quoddam $u = a$, $v = b$, ipsum quidem reale, (*) sed imaginariis undique elementis circumdatum; h. e. si coordinatae u realem tribuamus valorem $u = a$, realis prodat alterius coordinatae valor $v = F(a) = b$; sin alterutri coordinatae valorem tribuamus, valore a vel b minima qualibet quantitate ω majorem vel minorem, imaginarium altera coordinata nanciscatur valorem $v = F(a \pm \omega)$ vel $u = F(b \pm \omega)$; —— cujusmodi elementum, e nostro quo hocce capite utimur coordinatarum u et v significatu, nos docet, primitivae esse ibi punctum quod per se stet sive *a reliquis sit separatum* (un point isolé) ——; vel primitivae elementum istud $u = a$, $v = b$ ita se habere statuamus, ut, si alterutri coordinatae, e. g. v, tribuamus valorem $v = b$ vel $v > b$, altera coordinata u realis sit unumque tantummodo habeat valorem, sin esse $v < b$ ponamus, altera coordinata imaginaria evadat —— quod in nostro coordinatarum u et v systemate nos docet, ramum aliquem primitivae subito subsistere seu esse ibi ut ita dicam punctum *interstitionis* (un point d'arrêt) —— Facile patet, prout horum unum alterumve in primitiva locum habuerit, requiri ut idem

(*) Non igitur intelliguntur hoc loco imaginaria ista puncta, quae oriuntur, si imaginarius aliquis ramus alterutrum axium secat ipsumve transit coordinatarum initium O: lineae enim $ay^2 = bx^2 - x^3$ (fig. 8) punctum O sive $x = o$, $y = o\sqrt{-1}$, etsi reale primo intuitu videatur, imaginarium tamen esse accuratiore investigatione instituta reperietur neque adeo ad puncta *a reliquis separata* esse referendum:

se nobis in analoga offerat. Unde apparet, si primitivae fuerit alicubi punctum *a reliquis separatum* punctumve *interstitionis*, universe quidem analogum requiri in analoga figura punctum ejusdem singularitatis. Quum tamen puncto, in alterutro axium sito, innumera supra vidimus respondere analogae figurae puncta, facile patet, si primitiva duobus constiterit finitae magnitudinis ramis, quorum alter infinite a puncto O recesserit, ramum istum in analogae figurae uno indicari puncto *a reliquis separato* ipsumque punctum O occupante; similemque esse mutuae punctorum *interstitionis* analogiae adhibendam restrictionem: primitivae enim si in alterutro axe fuerit punctum *interstitionis*, ambiguum relinqui, analogaene ejusdem singularitatis punctum contingat an vero ramus in infinitum exiens, h. e. qui asymptota gaudeat eidem axi perpendiculari nec tamen ab altera asymptotae parte regrediatur.

Primitiva igitur figura si sit nobis ignota, eorum tamen ope, quae hucusque attulimus, notae alicui ignotae figurae proprietati analogam possumus analogae invenire proprietatem, modo proprietates istae ab ipsis coordinatis vel a finitis earundem functionibus pendeant, h. e. ad punctorum situm definiendum valeant. Quod non valet de figurarum directione aliave qualitate, quae a differentiali coordinatarum functione pendet; non enim posse mutuam asymptotarum analogiam ex iis quae hucusque attulimus accurate investigari, supra jam vidimus. Quare videamus, quaenam ex aequationibus affinitati nostrae fundamentalibus (1) sequantur relationes inter differentiales coordinatarum u et v functiones ordinis primi:

$$\frac{dv'}{du'} = \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{-\frac{dv}{v^2}}{-\frac{du}{u^2}} = +\left(\frac{u}{v}\right)^2 \frac{dv}{du} \quad (13)$$

$$\frac{u'}{v}\ \frac{dv}{du} = \left(\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}\ \frac{dv}{du}\right) = \frac{u}{v}\ \frac{dv}{du} \quad (14)$$

$$1 - \frac{u'}{v'}\ \frac{dv'}{du'} = \frac{v' - u'\ \frac{dv'}{du'}}{v'} = 1 - \frac{u}{v}\ \frac{dv}{du} = \frac{v - u\ \frac{dv}{du}}{v} \quad (15)$$

$$v'\ \frac{du'}{dv'} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{v^2}{u^2}\ \frac{du}{dv}\right) = \frac{v}{u^2}\ \frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{v}{u}\right)^2}{v\ \frac{dv}{du}} \quad (16)$$

$$v'\ \frac{dv'}{du'} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{u^2}{v^2}\ \frac{dv}{du}\right) = \frac{u^2}{v^3}\ \frac{dv}{du} = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)^2}{v\ \frac{du}{dv}} \quad (17)$$

Videamus primum de aequatione (13). Quae nos docet, non posse, definita functione differentiali $\frac{dv}{du} = a$, non definitis contra coordinatis u et v, analogam inveniri alterius figurae functionem differentialem $\frac{dv'}{du'}$, nisi ipsius primitivae $f(u, v) = o$ cognitam habeamus naturam; quotientem enim $\frac{dv'}{du'}$ et a $\frac{du}{dv}$ et a $\frac{u}{v}$ pendere; h. e., si coordinatas u et v solita ratione interpretemur, non posse, si ignotae primitivae figurae directionem definiamus, situm haud definiamus, analogam reperiri analogae directionem, siquidem haecce ab angulo pendeat CBX (fig. 1), quem in analoga figura tangentialis recta cum axe XX′ facit, hujus autem anguli tangens $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dv'}{du'}$ tam ab analogi anguli CBX tangente $\frac{dy}{dx}$ pendeat, quam a tangente $\frac{y}{x}$ anguli COB, quem radius vector cum semiaxe OX facit. Mutuam igitur differentialium functionum $\frac{dv}{du}$ et $\frac{dv'}{du'}$ analogiam investigare si velimus, ipsas coordinatas u et v earumve saltem quotientem $\frac{v}{u}$ definiamus aliquatenus oportet:

$$\text{sit igitur}\quad\left|\begin{array}{ll} \frac{v}{u}\ \text{finitum}, & \frac{dv}{du} = o \\ \frac{v}{u}\ \text{———} & \frac{dv}{du}\ \text{finitum} \\ \frac{v}{u}\ \text{———} & \frac{dv}{du} = \infty \end{array}\right|\quad\text{erit}\quad\left|\begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = o \\ \frac{dv'}{du'}\ \text{finitum} \\ \frac{dv'}{du'} = \infty \end{array}\right. \qquad (18)$$

Cujus rei, si ipsas quoque coordinatas u et v finitas esse statuamus, hic erit in orthogonalium coordinatarum systemate significatus: si primitiva alicubi finite ab utroque axe distarit processeritque ibi directione, vel axi XX′ vel axi contra YY′ vel neutri tandem axi parallela, fore ut ex his tribus id ipsum liceat de analogae directione affirmari, quod in primitiva locum habuerit. Coordinatas contra u et v si statuamus esse = o vel infinite saltem parvas, aequationes (18) nos docent, eandem inter primitivae analogaeque directiones subsistere analogiam, vel si primitiva ipsum transeat coordinatarum initium vel infinite parva ab eo distet distantia, modo sit ibi $\frac{v}{u}$ finitum, h. e. modo primitivam statuamus vel ambos secare axes, punctumque adeo O obliquo sub angulo transire, vel neutrum secare axem —— quemadmodum in infinite parvis illis fieri solet circum punctum O gyris, quibus punctum istud tanquam *punctum asymptotum* nonnullae figurae circumvolvuntur. Quotientem $\frac{v}{u}$ jam ita definiamus,

$$\text{ut sit}\quad\left|\begin{array}{ll} \frac{v}{u} = o & \frac{dv}{du} = \infty\ \text{vel finitum} \\ \frac{v}{u} = \infty & \frac{dv}{du} = \infty\ \text{vel finitum} \end{array}\right|\quad\text{erit}\quad\left|\begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = \infty \\ \frac{dv'}{du'} = o \end{array}\right. \qquad (19)$$

quorum sensus, si u et v finitas esse statuamus, e nostra coordinatarum u et v definitione huc redit: si primitiva, finita a puncto O distantia, alterutrum axium XX′ vel YY′ perpendiculari vel obliquo secaverit angulo, fore ut analogae figurae asymptota contingat, eidem axi perpendicularis. Unde ambiguitas, quae de asymptotis alterutri axium parallelis supra (pag. 9) se nobis obtulit, partim tollitur: restat tamen etiamnum quaedam ambiguitas: quotientem enim $\frac{v}{u}$ ita definiamus,

$$\text{ut sit} \left| \begin{array}{ll} \frac{v}{u} = 0 & \frac{dv}{du} = 0 \\ \frac{v}{u} = \infty & \frac{dv}{du} = \infty \end{array} \right| \text{erit} \left| \begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = 0 \times \infty \\ \frac{dv'}{du'} = 0 \times \infty \end{array} \right. \qquad (20)$$

quare, si inquirere velimus, sitne $\frac{dv'}{du'}$ infinitum an finitum an vero infinite parvum, functionis $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \frac{dv}{du}$ nova denuo differentiatio aliave accuratior investigatio requiritur; unde, si solitum coordinatis u et v significatum tribuimus, sequitur, si primitiva axium XX' vel YY' alterutrum tangat, ambiguam fore analogam analogae directionem, neque adeo posse, nisi accuratiore investigatione instituta, dirimi quaestionem, contingatne analogae asymptota necne: vicissim, si recta aliqua $x = a$ vel $y = b$, alterutri axium parallela, primitivae fuerit asymptota, ambiguum esse, quaenam sit analogae directio, alterumne axem illa tangat an vero secet.

Ad aequationem (13) jam redeamus: unde haec sequuntur:

$$\text{si velimus esse} \left| \begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = \frac{dv}{du} \\ \frac{dv'}{du'} = -\frac{du}{dv} \end{array} \right| \text{requiri ut sit} \left| \begin{array}{ll} \frac{v}{u} = +1 \text{ vel } -1, \text{nisi sit } \frac{dv}{du} = 0 \text{ vel } \infty & (21) \\ \left(\frac{u^2}{v^2}\frac{dv}{du}\right)\left(\frac{dv}{du}\right) = \left(\frac{u}{v}\frac{dv}{du}\right)^2 = -1 & (22) \end{array} \right.$$

quorum in orthogonalium coordinatarum systemate hic erit sensus: Aequatio (21) nos docet, fieri non posse, ut primitivae alicubi directio sit analogae in analogo puncto directioni parallela, nec tamen alterutri axium parallela, nisi in iis punctis, ubi sit $\frac{y}{x} = +1$ vel $\frac{y}{x} = -1$, h. e. ubi rectarum GK vel FL (fig. 2) alterutram figurae offendant. Aequatio autem (22) nos docet, fieri non posse, ut primitiva alicubi, neutri axium parallela procedens, sit analogae in analogo puncto perpendicularis, quum hoc requiratur, ut $\frac{u}{v}\frac{dv}{du}$ imaginarium valorem $\sqrt{-1}$ nanciscatur ipsaque adeo primitiva fiat imaginaria.

Primitivam jam figuram $f(u, v) = 0$ sive $v = F(u)$ ad figuras *complexas* quas dicunt pertinere statuamus, h. e. duobus constare ramis: functionem enim F, si unum coordinatae u tribuamus valorem, duos alteri coordinatae praebere valores $v = F_1(u)$ et $v = F_2(u)$: unde plerumque sequitur, differentialem item functionem $\frac{dv}{du} = \frac{dF(u)}{du} = F(u)$ duplicem nāncisci, si unum tantummodo u nanciscitur, valorem; coordinata jam u ubi continua auctione vel deminutione ad certum aliquem pervenerit valorem $u = a$, utriusque functionis, et F et *F*, evanescere ibi duplicem naturam statuamus, quum sint discrimina $F_1(a) - F_2(a)$ et $\mathit{F}_1(a) - \mathit{F}_2(a)$ nulla vel saltem infinite parva. Duplici istiusmodi primitivae elemento

$$\left.\begin{array}{llll} u = a & v = F_1(a) = b & \frac{dv}{du} = \mathit{F}_1(a) = c \\ u = a & v = F_2(a) = b & \frac{dv}{du} = \mathit{F}_2(a) = c \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{respon-} \\ \text{debit} \end{array} \left| \begin{array}{lll} u' = {}^1/a & v' = {}^1/b & \frac{dv'}{du'} = c\left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ u' = {}^1/a & v' = {}^1/b & \frac{dv'}{du'} = c\left(\frac{a}{b}\right)^2 \end{array}\right. \quad (23)$$

quod e nostro coordinatarum u et v significatu nos docet: si duo in primitiva figura se tetigerint alicubi rami, analogam in analoga figura respondere duorum ramorum mutuam tactionem. Quae tamen tactionum analogia quominus semper obtineat, haec obstant: Primum enim aequationes (12) nos docuere, duplici puncto, in alterutro axe sito punctumve O occupanti, vel posse analogum punctum ejusdem singularitatis vel duos respondere in analoga figura ramos, quorum finita sit a se invicem distantia: quod si in nostrum locum transferatur, nos docet, tactionis puncto, quod hanc ob caussam in primitivae oriatur, quod duo ejus rami eodem obliquo sub angulo punctum O transeant, vel posse analogam respondere tactionem vel contra duos analogae ramos, in infinitum excurrentes, quibus parallelae quidem sint, at finite a se invicem distantes asymptotae. Deinde vero aequationes (20), non posse interdum analogae directionem nisi differentialium functionum secundi ordinis ratione habita reperiri, nos docent: unde patet, si recta quaedam, alterutri axium parallela, duobus simul fuerit primitivae ramis asymptota, tactionisque punctum ita in primitiva oriatur, haud constare, analogine rami in altero axe axemque illum seque invicem tangant, an vero haec sit alterius rami, illa alterius, diversa tandem ab ambabus ipsius axis directio. Ex his tandem apparet, si idem axis a duobus primitivae ramis eodem puncto tangatur, duplicem esse caussam, cur non semper analogum respondeat in analoga figura punctum tactionis: et enim posse duos respondere ramos, quorum finita sit a se invicem distantia, nec opus esse, ut sint rami isti sibi paralleli, sed diversam esse posse utriusque directionem. (*)

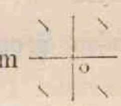
Quum autem *cuspis* sive punctum *flexus contrarii* sive punctum *regressionis* (un point de rebroussement) e tactionis puncto ita ortum esse fingi possit, ut uterque ramus in ipso tactionis puncto subito imaginarius factus sit —— quum porro simili ratione *mucro* (un point saillant) tamquam dimidia duplicis puncti pars considerari possit, facile jam erit nobis mutuam *cuspidum* mutuamve *mucronum* investigare analogiam, modo illa, quae de mutua punctorum *interstitionis*

(*) Tactionis e. g. puncto quod cissoidi (fig. 8) hanc ob caussam oritur, quod axem XX′ in ipso puncto O duo tangant rami, duo respondent alterius figurae rami A F et A G (fig. 8) qui et infinite a se invicem distant et opposita procedunt directione.

(points d'arrêt) analogia supra vidimus, iis adjungamus, quae de mutua tactionum de mutuaque duplicium punctorum analogia se nobis modo obtulerunt; unde apparebit, si singularia nostra puncta finite ab utroque axe distarint, analoga iis respondere ejusdem singularitatis puncta in analoga; sin minus, accuratiorem rei investigationem requiri. (*)

Ex aequatione (13) igitur sequi vidimus bene multa. Ex eadem haec quoque sequuntur: quum factor $\frac{u^2}{v^2}$ sit quotientis $\frac{u}{v}$ quadratum adeoque sit semper affirmativum, nisi imaginarium consideres punctum, fore ut,

$$\text{prout sit} \left| \begin{array}{l} \frac{dv}{du} > 0 \\ \frac{dv}{du} < 0 \end{array} \right| \text{sit item} \left| \begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} > 0 \\ \frac{dv'}{du'} < 0 \end{array} \right. \qquad (24)$$

Quotientem autem $\frac{dv}{du}$ esse affirmativum, in orthogonalium coordinatarum systemate hoc sibi vult: figurae tangentem, si directione intacta loco removeatur, donec punctum O transeat, in primum tertiumque perventuram esse coordinatarum quadrantem, h. e. hac procedere directione ; negativus contra quotientis $\frac{dv}{du}$ valor hujusmodi indicat tangentis cursum 

Docet igitur conditio (24): prout primitivae tangens parallela e loco suo remotione vel in primum tertiumque possit vel in secundum quartumque pervenire coordinatarum quadrantem, idem de analoga alterius figurae tangenti esse dicendum.

Quotientis jam $\frac{dv}{du}$ signum $+$ vel $-$ in oppositum abire alicubi signum statuamus: quod —— nisi $\frac{dv}{du}$ mutationem subito subeat infinities majorem quam in continua curva fieri oportebat, h. e. nisi *mucronem* (un point saillant) ibi fuisse statuas, —— ut quotientis $\frac{dv}{du}$ valor per $\pm\, 0$ vel $\pm\, \infty$ transeat, requirit. Aequationes jam (24) nos monent, sequi inde, ut quotiens quoque $\frac{dv'}{du'}$ similem subeat signi mutationem: prout enim $\frac{dv}{du}$ transeat

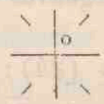
$$\left. \begin{array}{l} \text{per } \pm\, 0 \text{ a } > 0 \text{ in } < 0 \\ \text{———— a } < 0 \text{ in } > 0 \\ \text{per } \pm\, \infty \text{ a } > 0 \text{ in } < 0 \\ \text{———— a } < 0 \text{ in } > 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{fore ut} \\ \frac{dv'}{du'} \text{ transeat} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{per } \pm\, 0 \text{ a } > 0 \text{ in } < 0 \\ \text{———— a } < 0 \text{ in } > 0 \\ \text{per } \pm\, \infty \text{ a } > 0 \text{ in } < 0 \\ \text{———— a } < 0 \text{ in } < 0 \end{array} \right. \qquad (25)$$

(*) *Cuspis* e. g. si ita in primitiva orta sit, quod asymptota ei fuerit D E, alterutri axium perpendicularis, quam duo primitivae rami F E et G E infinita ab axe illo distantia tangentes, in eodem puncto infinite distanti E se invicem quoque tangant  —— fieri quidem potest, ut cuspis mucrove puncto huic singulari in altera figura respondeat, at fieri quoque potest, ut nullum remaneat in analoga figura singularis puncti E indicium, nisi quod axis, cui D E est perpendicularis, in puncto D′ puncto D respondenti ab analoga figura tangatur.

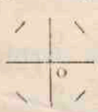
quae, si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, nos docent: prout primitiva alicubi sinum conficiat, axium XX vel YY′ alterutrum vel in alteram contra partem spectantem, fore ut analoga analogum conficiat sinum, ab eodem axe recedentem vel eundem contra axem spectantem.

Aequationem istam (13) jam mittamus, ac de reliquis aequationum (13–17) videamus. Quod igitur primum ad aequationem (14) attinet

$$\frac{u'}{v'}\ \frac{dv'}{du'} = \frac{u}{v}\ \frac{dv}{du} \qquad (14)$$

hujus in orthogonalium coordinatarum systemate hic erit sensus: in quolibet primitivae figurae puncto C (fig. 1) cotangentem $\frac{u}{v} = \frac{x}{y}$ anguli COB, quem radius vector CO cum semiaxe OX facit, si cum tangente $\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$ anguli CBX, quem recta tangentialis ACB cum eodem semiaxe OX facit, multiplicatur, productum proferre $\frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}$, quod, si ad analogum analogae figurae punctum transeas, intactum maneat. Productum autem istud $\frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}$ esse alicubi positivum, indicio est, quotientia $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$ in puncto de quo agitur de signo $\pm$ secum convenire, lineamque adeo propositam ea procedere in puncto isto directione, ut ambos simul axes XX′ et YY′ appetat vel ab ambis simul recedat, sicut haec nos figura ostendit . Quod igitur ex aequatione (14) sequitur

$$\text{prout } \frac{u}{v}\ \frac{du}{dv} \text{ sit } \left|\ \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\ \right| \text{ fore } \frac{u'}{v'}\ \frac{dv'}{du'} \left|\ \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right. \qquad (26)$$

si cum aequatione (11ᵃ) conferatur, certiores nos facit, affinitatem nostram esse ejusmodi, ut, si primitiva alicubi ambos axes appetat, analoga contra ab ambis sit in analogo puncto recessura; sin primitiva ab ambis recedat, analoga ambos sit appropinquatura; sin primitiva alterum axem appetat, ab altero recedat, analogam fore functionibus $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{dy'}{dx'}$ de signo $\pm$ discordiam, analogamque adeo quoque figuram alterum axem esse appetituram, ab altero recessuram, sicut in hocce figura fit . Sit jam productum istud $\frac{u}{u}\ \frac{dv}{du}$ alicubi $= -1$: in analogo alterius figurae puncto requiritur ut sit $\frac{u'}{v'}\ \frac{dv'}{du'} = +1$. Quod nostro loco ita erit interpretandum: si fuerit alicubi in primitiva $\frac{y}{x} = -\frac{dy}{dx}$ h. e. $COB = 180^\circ - CBX = CBO$, (fig. 1) h. e. si aequicrurium fuerit triangulum COB, quod rectaque tangentialis ACB radiusque vector O C cum axe faciat XX′, aequicrurium item fore, quod simili modo in analogo alterius figurae puncto oriatur triangulum. Sit contra productum $\frac{u}{u}\ \frac{dv}{du} = +1$, h. e. —— si ad coordinatas x et y transgrediamur, sit $\frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx} = +1$ sive $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ sive $COB = CBX = 180^\circ - CBO$: h. e. recta tan–

gentialis cum radio vectore congruat vel saltem sit ei parallela: unde sequitur, si sint x et y finita, rectam tangentialem transire coordinatarum initium O, sin sint x et y infinite parva, punctum O non esse figurae punctum ut dicitur asymptotum, sed contra a figura transiri, sin sint tandem x et y infinita, asymptotam figurae contingere, rectas XX' et YY' in puncto O aliisve in quibuslibet punctis secantem. Ad analogum jam analogae figurae punctum si transimus, erit ibi quoque $\frac{v'}{u'} \frac{dv'}{du'} = +1$: quam aequationem eadem ratione interpretari licebit, atque in aequatione $\frac{u}{v} \frac{dv}{du} = +1$ modo fecimus. Unde apparet, affinitatem nostram esse ejusmodi, ut haec sit inter utriusque figurae proprietates analogia: Quoties primitiva finite ab utroque axe distarit, ejusdem autem ibi tangens punctum O transierit, toties idem in analoga figura locum habebit: quoties primitiva punctum O transierit nec tamen axium alterutrum ibi tetigerit, toties analogae erit asymptota aliqua, neutri axium parallela axesque vel in ipso puncto O vel alibi secans; (quae igitur de asymptotis neutri axium parallelis supra prodibat ambiguitas, ubi finitas tantum coordinatarum functiones attendebamus, hoc loco tollitur); quot vicissim primitiva habuerit asymptotas neutri axium parallelas, toties altera punctum O non infinite tantummodo appropinquabit, ut in punctis asymptotis fieri solet, sed ipsum illud punctum O transibit. Haec autem formulae $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = +1$ interpretatio —— ut recta tangentialis cum radio vectore congruat vel sit eidem parallela —— valet illa, sive sint $\frac{x}{y}$ et $\frac{dy}{dx}$ sive non sint finita: at contrarium non valet, nisi sit $\frac{x}{y}$ vel $\frac{dy}{dx}$ finitum: recta enim tangentialis si hanc ab caussam sit radio vectori parallela, quod asymptota figurae contingat alterutri axium parallela, vel quod alterutrum axem figura tangat, non possis inde affirmare, productum $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$ esse $= +1$, sed finitus quilibet infinitusve vel infinite parvus producto istud contingere potest valor. Quam ad rem erit attendendum, ne, si primitiva alterutrum axium tangat, efficias inde, esse ibi $\frac{v}{v} \frac{dv}{du} = \frac{u'}{v'} \frac{dv'}{du'} = +1$, asymptotamque adeo analogae contingere, eidem axi perpendicularem: quod contra ambiguum remanere nisi accuratiore instituta investigatione, supra vidimus.

Ad reliquas jam transeamus aequationum (13—17). Aeqatio igitur (15), si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, in quolibet nos docet primitivae figurae puncto C (fig. 1) rectam tangentialem A C B axem YY' in istiusmodi secare puncto A, ut, si ejusdem ab O distantiam $OA = y - x \frac{dy}{dx}$ per applicatam $CE = OD = y$ dividamus, quotiens oriatur $\frac{OA}{OD}$, quod, si ad analogum transeas analogae figurae punctum, intactum maneat. Aequatio (16), si orthogonales coordinatas designant u et v, huc redit: si tangentem anguli COB, quem radius vector cum semiaxe OX alicubi in primitiva facit, in secundam potestatem efferamus dividamusque per subnormalem, quae ibidem primitivae contingat, quotientem ita oriri $\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{y \frac{dy}{dx}}$, quod subtangentis aequiparet magnitudinem, quae analogae figurae in analogo puncto contingat. Eandemque, si subnormalem et subtangentem secum invicem tangentemque item $\frac{y}{x}$ et cotangentem $\frac{x}{y}$ secum invicem permutemus, subsistere analogiam, aequatio (17) nos monet. Primitiva igitur quoties rectarum $x = y$ vel $x + y = o$ alterutram offendit, ejusdem subtangens vel subnormalis analogae erit alterius figurae subnormali vel subtangenti quod ad magnitudinem opposita sive aequatione $\left(y \frac{dx}{dy}\right)\left(y' \frac{dy'}{dx'}\right) = \left(y \frac{dy}{dx}\right)\left(y' \frac{dx'}{dy'}\right) = 1$ cum illa cohaerebit. Ob symmetricam autem illam quam inter coordinatas u et v invicem exstare relationem capitis hujus initio vidimus, facile apparet, mutua literarum u et v permutatione aliam ex aequatione (15) ortum iri aequationem, quae de quotiente $\frac{OB}{OE}$ (fig. 1) idem moneat, quod de quotiente $\frac{OA}{OD}$ aequatio (15); ex aequationibus item (16) et (17) alias ortum iri aequationes, quae eadem moneant de subtangente ac subnormali $x \frac{dy}{dx}$ ac $x \frac{dx}{dy}$ sive in recta YY′ computatis, quae aequationes (16) et (17) de subtangente ac subnormali quae vulgo ita dicuntur sive de functionibus $y \frac{dx}{dy}$ et $y \frac{dy}{dx}$ monebant.

Postquam igitur, quanam ratione analogae differentiales coordinatarum u et v functiones ordinis primi secum ex affinitate nostra cohaereant, quaenamque sequatur inde inter analogarum figurarum proprietates analogia, vidimus, transeamus jam ad differentiales coordinatarum functiones ordinis secundi. Quas hac ratione cohaerere secum inveniemus:

$$\frac{d^2 v'}{du'^2} = \frac{d\left(\frac{dv'}{du'}\right)}{du'} = -\frac{u^2\, d\left(\frac{dv'}{du'}\right)}{du} = -\frac{u^2\, d\left(\frac{u^2}{v^2} \frac{dv}{du}\right)}{du} =$$

$$= -u^2 \left[\frac{d^2 v}{du^2} \cdot \frac{u^2}{v^2} + \frac{dv}{du} \cdot \frac{2u}{v^2} - \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \cdot \frac{2u^2}{v^3} \right] \quad (27)$$

Sequitur inde

si sit	$\frac{d^2 v}{du^2} = \infty$	$\frac{dv}{du}$, u, v finita	fore	$\frac{d^2 v'}{du'^2} = \infty$ (28)
	$\frac{dv}{du} = \infty$	$\frac{d^2 v}{du^2}$, u, v ——		$\frac{d^2 v'}{du'^2} = \infty$ (29)
	$\frac{d^2 v}{du^2} = 0$	$\frac{dv}{du}$, u, v ——		$\frac{d^2 v'}{du'^2} = -\frac{dv}{du} \frac{2u^3}{v^2} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \frac{2u^4}{v^3}$ (30)
	$\frac{d^2 v}{du^2} = 0$	$\frac{dv}{du} = 0$, u et v finita		$\frac{d^2 v'}{du'^2} = 0$ (31)

quibus mutua literarum u et v permutatione alias posse addi aequationes, eademque igitur, quae de functionibus $\frac{d^2 v}{du^2}$ ac $\frac{d^2 v'}{du'^2}$ aequationes (27--31) memorant, in functiones posse $\frac{d^2 u}{dv^2}$ ac $\frac{d^2 u'}{dv'^2}$ transferri, capitis hujus initio vidimus. Quod si fecerimus, aequationes (30) ac (31), si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, nos docent; si primitiva alicubi finite ab utroque axe distarit processeritque ibi alterutri axium parallela habueritque ibi punctum inflexionis, analogum item inveniri in altera figura punctum inflexionis; sin primitiva infinite quidem ab utroque axe distet punctoque inflexionis ibi gaudeat at neutri axium parallela progrediatur, haud constare, sitne in altera item figura punctum inflexionis, sed hoc tantum constare, quanta x', y', $\frac{dy'}{dx'}$ $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ certa quadam ratione in analogo alterius figurae puncto secum cohaerere.

Primitivam jam figuram $f(u, v) = o$ seu $v = F(u)$ duobus ramis esse complexam statuamus: duos enim functionem F coordinatae v tribuere valores a se diversos $v = F_1(u)$ et $v = F_2(u)$: coordinata vero u ubi certum aliquem nacta sit valorem $u = a$, ipsamque functionem F ejusdemque differentiales quotientes ordinis primi et secundi $\frac{dFu}{du} = \mathcal{F}(u)$ et $\frac{d\mathcal{F}(u)}{du} = \phi(u)$ duplicem suam naturam ibi amittere, quum sint discrimina $F_1(a) - F_2(a)$, $\mathcal{F}_1(a) - \mathcal{F}_2(a)$, $\phi_1(a) - \phi_2(a)$ nulla vel saltem infinite parva. Facile jam apparet, fore ut duplici istiusmodi primitivae elemento elementum respondeat analogae, in quo coordinata item v' ejusdemque differentiales quotientes ordinis primi et secundi $\frac{dv'}{du'}$ et $\frac{d^2v'}{du'^2}$ duplicem suam amittant naturam, modo coordinatas u et v earumque differentialem quotientem $\frac{dv}{du}$ finitas fuisse statuamus. Quod, si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, nos docet: si duo primitivae rami se alicubi invicem non tetigerint modo, sed sint quoque osculati, universe quidem analogam requiri in analoga figura osculationem: plura tamen esse, quae, quominus osculationum illa semper prodat analogia, obstent, quam quae tactionum analogiae obstare supra vidimus, siquidem hoc loco non ad figurarum situm, sed ad earundem quoque directionem attendendum sit. Bene multa igitur ex osculationum mutua analogia excipienda esse apparet; idem ex analogia quoque patet, qua cohaerent ex affinitate nostra analogi utriusque figurae *radii osculi* (rayons de courbure): primitivae enim radius osculi quum sit $= \dfrac{\left(1 + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, analogus contra analogae hac indicabitur formula:

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}} = \frac{-\left[1 + \left(\frac{x^2dy}{y^2dx}\right)^2\right]^{3/2}}{x^2\left[\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{x^2}{y^2} + \frac{dy}{dx}\,\frac{2x}{y^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\,\frac{2x^2}{y^3}\right]}$$

unde ob aequationem quidem (28) sequitur: si primitivae radius osculi fuerit alicubi $= o$, finitaque ibidem fuerint x, y, $\frac{dy}{dx}$, fore ut analogae item radius osculi sit $= o$: quidnam vero, si primitivae radius osculi fuerit $= \infty$, de analogo sit dicendum, quanamve universe ratione uterque cohaereat, non potest nisi multis verborum ambaginibus indicari.

Ex his igitur apparet, affinitatem nostram $uu' = 1$ $vv' = 1$ ad istarum quidem qualitatum analogiam investigandam, quae ab ipsis coordinatis a finitisve earum functionibus pendeant —— h. e. si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, ad istas secum conferendas analogarum figurarum proprietates, quae ad analogorum punctorum situm spectant —— perquam esse idoneam; ad mutuam vero investigandam illarum qualitatum analogiam, quae a coordinatarum u et v functionibus differentialibus primi ordinis pendeant —— h. e. quae analogas analogarum figurarum directiones spectant —— affinitatem nostram minus esse aptam, sed ambigua nonnulla accuratiori investigationi relinquere: minime vero eandem illarum qualitatum analogiae perscrutandae sufficere, quarum mutua analogia a coordinatarum u et v differentialibus functionibus ordinis secundi pendeat —— h. e. quae figurae curvedinem attendant. Qua ratione si procedimus, facile patet, minus etiam convenire affinitatem nostram illarum qualitatum investigationi, quae a differentialibus coordinatarum functionibus ordinis tertii originem ceperint. Ab altera autem parte quaeri possit, possitne ex affinitate nostra mutua facillime investigari illarum utriusque figurae qualitatum analogia, quae a coordinatarum u et v functionibus differentialibus ordinis — 1, h. e. ab integralibus earundem functionibus pendeant sive quae ad analogarum figurarum superficies pertineant. Nequaquam ita se rem habere apparet, modo formulas attendamus

$$\begin{aligned} \int u'\, dv' &= \int\left(\frac{1}{u}\right) d\left(\frac{1}{v}\right) = \int\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{dv}{v^2}\right) = -\int\frac{dv}{uv^2} \\ \int v'\, du' &= \int\left(\frac{1}{v}\right) d\left(\frac{1}{u}\right) = \int\left(\frac{1}{v}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int\frac{du}{u^2 v} \end{aligned} \qquad (32)$$

unde, si ad coordinatas x et y transgredimur, haud simplicem esse rationem apparet, qua in primitivae figurae puncto aliquo C (fig. 1) superficies $\int x\, d y$ sive O H C D, quam curvaeque abscissa C D ipsaque curva C H axium XX' et YY' ope includit, cum analoga alterius figurae superficie cohaereat: nec minus simplicem esse rationem, qua cohaereant secum analogae in analogis figuris superficies $\int y\, d x$ sive O K C E; minus vero etiam simplicem esse superficiei $OHC = \int \frac{1}{2} r^2\, d\,\phi = \frac{1}{2}\int (y\, d x - x\, d y)$ cum analoga alterius superficie analogiam.

Hisce jam prolatis de analogarum proprietatum congruentia, quae cuilibet figurae convenit, de nonnullis jam speciatim figuris videamus, ut exemplis res modo memoratas illustremus. Aequationes igitur quaeramus satis simplices $f(u, v) = 0$, ac quaenam ex affinitate nostra respondeant iis aequationes $f(u', v') = 0$ sive $f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) = 0$ quaeramus. Prima se offert nobis aequatio $u^m\, v^n = a$, (designantibus m, n, a quanta quaelibet realia, sive sint illa finita sive infinita sive infinite parva, sive sint affirmativa sive negativa, sive sint integra sive fractiones.) Ex aequationibus enim fundamentalibus (1) sequitur, si primitiva figura aequatione indicetur

$$u^m\, v^n = a \quad (33)$$

analogam simili indicari aequatione $u^m v^n = {}^1/a$, quae a primitiva una tantum constante *a* discrepet.

Sit e. g. $m = o$ vel $n = o$ vel $m + n = o$: mutua figurarum (33) analogia in eandem illam abit analogiam, quam elementorum seriebus $v = a$, $u = a$, $\frac{v}{u} = a$ cum seriebus $v' = {}^1/a$, $u' = {}^1/a$, $\frac{v'}{u'} = {}^1/a$ intercedere supra vidimus.

Sit $m = n = + 1$: quae ita oritur inter aequationes $uv = a$ ac $u'v' = {}^1/a$ mutua relatio, e nostra coordinatarum definitione nos docet, si primitiva fuerit aequilatera hyperbola, cujus centrum ipsum occupet coordinatarum initium O, cui autem ipsae axes XX′ et YY′ sint asymptotae, fore ut analoga ei respondeat hyperbola, ipsa quoque aequilatera similoque modo sita.

Sit $n = - 1$, m contra quemlibet designet numerum, modo ne sit $= o$ vel $= + 1$ vel $= - 1$: quae ita oritur inter figuras

$$v = \frac{u^m}{a} \text{ ac } v = au^m \quad (34)$$

relatio e nostra coordinatarum u et v definitione nos docet: si primitiva fuerit cujuslibet ordinis parabola $y = \frac{x^p}{a}$ cujus vertex ipsum occupet coordinatarum initum O, cujus autem asymptotae sint axium XX′ vel YY alterutri parallelae, fore ut respondeat parabola ejusdem ordinis $y = ax^p$, eodem quoad axes XX′ et YY′ situ gaudens, sed a primitiva parametro *a* discrepans. Parabolis e. g. $y. = ax^2$, sive DOE (fig. 3) ac $x^2y = a$ sive EDGF (fig. 4) parabolae respondent $y = \frac{x^2}{a}$ sive D′OE′ (fig. 3) ac $x^2y = {}^1/a$ sive E′D′G′F′ (fig. 4). Unde, ob symmetricam illam inter coordinatas u et v relationem, de qua capitis hujus initio vidimus, sequitur, parabolis item $x = ay^2$ ac $xy^2 = a$ parabolas ex affinitate nostra respondere $x = \frac{y^2}{a}$ ac $xy^2 = {}^1/a$. Istarum autem parabolarum formam si velis affinitate nostra intactam remanere, h. e. ipsas sibimet esse analogas, parameter sit iis $+ 1$ vel $- 1$ necesse est; longitudinis e. g. unitatem si istiusmodi esse statuas, ut parabolae HOL (fig. 3) ac IHLK (fig. 4) aequationibus indicentur $y = x^2$ ac $x^2y = 1$, utraque parabola ipsa sibimet erit analoga. Quae tamen analogia simili modo erit intelligenda, atque analogia ista, qua rectam $x = y$ aliamve e sex illis rectis (7) sibimet ipsi ex affinitate nostra respondere olim monuimus, h. e. ut unumquidque istarum parabolarum punctum non ipsum sibimet, at alii ejusdem parabolae puncto respondeat: ipsi e. g. coordinatarum initio O sive parabolae HOL (fig. 3) vertici termini respondebunt H et L punctorum, eandem parabolam non relinquentium, ab ejusdem autem vertice infinite recedentium.

Alias jam quaeramus aequationes formae satis simplicis, quibus analogas quaeramus ex affinitate nostra aequationes. Prima se offert nobis aequatio, quae quoad coordinatas u et v gradus est primi: vidimus enim

primitivae | $au + bv + 1 = o =$ | respondere | $bu + av + uv = o$ | (35)

quod e nostra coordinatarum u et v interpretatione certiores nos facit, rectae cuilibet $ax + by + 1 = o$ sive D L H (fig. 5), quae axem XX' in puncto A sive $x = -{}^1/a$ axemque YY' in puncto B sive $y = -{}^1/b$ secet, hyperbolam respondere aequilateram D L F G E sive $bx + ay + xy = o$, coordinatarnm initium O pervadentem, cujus asymptotae D E et F G sive $y = -b$ ac $x = -a$ sint coordinatarum axibus parallelae, cujus autem centrum punctum occupet C sive $x = -a$, $y = -b$: ac illa quidem rectae lineae pars, quae a dextra axis YY' parte sita est, h. e. B D, cum hyperbolae parte congruit D L O; pars vero H A respondet hyperbolae parti O F; pars tandem A B, intra axes sita, hyperbolae ramum repraesentat] G E.

Ad aequationes jam transeamus gradus secundi. Generali igitur secundi gradus aequationi

$$a + bu + cv + duv + eu^2 + fv^2 = o$$

si analogam quaerimus aequationem, aequatio prodit

$$a + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} + \frac{d}{uv} + \frac{e}{u^2} + \frac{f}{v^2} = o$$

$$\overline{au^2\ v^2 + buv^2 + cu^2\ v + duv + ev^2 + fu^2 = o}$$

quae universe est quarti gradus, pro certa tamen constantium a, b, c, d, e, f definitione ad secundum ipsa quoque gradum reducitur. Apparet enim

$$\text{primitivis}\left|\begin{array}{l} a + bu + cv + duv = o \\ bu + cv + duv + eu^2 = o \\ bu + cv + duv + fv^2 = o \end{array}\right|\ \text{respondere analogas}\ \left|\begin{array}{ll} d + cu + bv + auv = o & (36) \\ du + ev + buv + cu^2 = o & (37) \\ fu + dv + cuv + bv^2 = o & (38) \end{array}\right.$$

Ad orthogonalium jam coordinatarum systema transeuntibus nobis apparet: si primitiva fuerit sectio aliqua conica, universe quidem lineam ei e nostra affinitate respondere gradus quarti; certa tamen primitivae si forma certusque quidam contigerit situs, analogam quoque sectionem esse conicam. Relatio (36) enim nos docet; si primitiva fuerit hyperbola aequilatera D B F G A E (fig. 6), cujus asymptotae D E et F G sint axibus XX' et YY' parallelae, analogam ei respondere hyperbolam aequilateram D' B' F' G' A' E', cujus ipsius quoque asymptotae D' E' et F' G' sint coordinatarum axibus parallelae. Relatio (37) autem huc redit: si primitiva fuerit hyperbola G O D E A F (fig. 7), coordinatarum initium O transvadens, cujus altera asymptota D E axi YY' parallela, altera contra F G qualibet procedat directione, analogam requiri hyperbolam G' OD' E' A' F', de qua eadem illa dicere liceat. Relatio (38) tandem asymptotas illas D E ac D' E' analogarum hyperbolarum non axi YY', sed axi contra XX' parallelas esse poscit, ceteroquin ad relationem (39) redit. Mutuam autem constantium a, b, c, d, e, f relationem, quam indefinitam reliquimus, si certa aliqua ratione definimus, simpliciorum linearum prodibit mutua affinitas: in relatione (37) e. g. ponamus $b = o$: primitiva rectam XX' in puncto O non jam secat, sed tangit, alterumque igitur cum eadem intersectionis punctum A amittit: analoga contra hyperbola rectam quidem XX' bis etiam nunc in O et in A' secat; at ejusdem asymptota $F' G'$ obliquam quam antea habebat directionem amittit alterique fit asymptotae $D' E'$ parallela, ipsaque adeo hyperbola in parabolam abit.

Eadem ratiocinatione si procedentes ad aequationes transgrederemur, in quibus coordinatarum u et v tertia occurrat potestas, relationes proderent haud ita simplices. Quare de nonnullis tantum videamus aequationibus, quae, si ad orthogonalium coordinatarum systema transgredimur, lineas indicant satis usitatas. Cissoidi igitur D O E (fig. 8) sive $ax^3 = y^2 (b - x)$ linea respondet F A G sive $ay^2 = bx^3 - x^2$, cui punctum O est punctum *a reliquis separatum;* cui tamen puncto ob imaginariam ipsius naturam nullum in cissoide respondet punctum separatum nullave linea realis. *Cartesiano folio* $x^3 + y^3 = axy$ linea respondet $x^3 + y^3 = \frac{x^2 y^2}{a}$. Lineae $ax^m \pm by^n = 1$ linea respondet $ay^n \pm bx^m = x^m y^n$: ellipsi e. g. hyperbolaeve $ax^2 \pm by^2 = 1$, cujus centrum ipsum occupat coordinatarum initium, cujus autem axes cum axibus XX' et YY' congruunt, linea respondet quarti gradus $bx^2 \pm ay^2 = x^2 y^2$.

Et haec quidem de algebraicis inter coordinatas u et v aequationibus sufficiant. Universe autem de aequationum illa transformatione, quae ex affinitate nostra oritur, hoc licet affirmari: si in primitiva aequatione coordinatae u et v algebraica ratione secum cohaeruerint, fieri non posse, ut algebraica substitutione $u' = {}^1/u$, $v' = {}^1/v$ circularis aliave functio transcendens in analogae aequationem irrepat; nec contra fieri posse apparet —— si ad mutuam systematum u v et $u' v'$ symmetriam, capitis hujus initio memoratam, attendas —— ut transcendens occurrerit in primitivae aequatione functio, quae in analoga evanescat. Nostram igitur affinitatem $uu' = 1$, $vv' = 1$, si coordinatas u et v solita ratione orthogonales esse velimus, ejusmodi esse apparet, ut, prout analogarum figurarum alterutra vel ad transcendentes quas dicunt figuras vel contra ad algebraicas pertinuerit lineas, idem sit de altera figura dicendum.

Inter algebraicas autem istas lineas videmus esse bene multas, quarum aequatio, si ad analogam ei ex affinitate nostra transeas aequationem, nullam subit formae mutationem, nec aliter ab analogae aequatione discrepat, nisi quod aliis atque analoga gaudeat aliove ordine dispositis constantibus sive coefficientibus. Primitivae enim aequatio sit universe hujusmodi

$$au^m v^n + bu^{-m} v^{-n} + cu^p v^q + du^{-p} v^{-q} + \text{etc.} \ldots = o \quad (39)$$

Literas jam u et v si in $^1/u$ et $^1/v$ sive u^{-1} et v^{-1} mutamus, analogae oritur aequatio

$$a u^{-m} v^{-n} + b u^{m} v^{n} + c u^{-p} v^{-q} + d u^{p} v^{q} + \text{etc.} \ldots\ldots = o$$

quae nisi mutato coefficientium a, b, c, d, ... ordine a primitiva non discrepat. Quaeri autem possit, sintne inter transcendentes item aequationes nonnullae, quae, si in analogas ipsis ex affinitate nostra aequationes mutantur, haud ullam subeant formae mutationem? Est sane istiusmodi aequationum genus, quod universe hacce indicatur forma

$$\begin{aligned} f\,(&\text{arc. sin. } u,\ \text{arc. sin. } v,\ \text{arc. cos. } u,\ \text{arc. cos. } v,\ \text{arc. tg. } u, \\ &\text{arc. tg. } v,\ \text{arc. cotg. } u,\ \text{arc. cotg. } v,\ \text{arc. sec. } u,\ \text{arc. sec. } v, \\ &\text{arc. cosec. } u,\ \text{arc. cosec. } v) = o \qquad (40) \end{aligned}$$

(designante f algebraicam quamlibet functionem.) Hujusmodi enim aequationi analoga respondet ex affinitate nostra aequatio

$$f\,(\text{arc. cosec. } u,\ \text{arc. cosec. } v,\ \text{arc. sec. } u,\ \text{etc.} \ldots) = o$$

quae a primitiva hactenus tantum differt, quod functiones *arc. sin. u.* ac *arc. cosec. u*, *arc. cos. u* ac *arc. sec. u*, etc. alia alius locum occuparint; quae locorum mutua permutatio saepe nullius erit momenti, e. g. si functio f functionum inverso-circularium mutuam significat additionem. Vidimus enim, si primitiva fuerit

$$a.\ \text{arc. tg. } u + b.\ \text{arc. tg. } v + c.\ \text{arc. cotg. } u + d.\ \text{arc. cotg. } v + e = o \qquad (41)$$

analogam respondere huic aequationem

$$a.\ \text{arc. cotg. } u + b.\ \text{arc. cotg. } v + c.\ \text{arc. tg. } u + d.\ \text{arc. tg. } v + e = o$$

mutato tantum constantium a, b, c, d ordine a primitiva discrepantem. Sin primitivae aequatio nequeat ad aequationis (40) formam redigi, neque poterit illi cum analogae aequatione similitudo esse modo memorata. Primitiva enim aliis atque inverso-circularibus constet functionibus, forma e. g. gaudeat

$$f\,(\text{sin. } u,\ \text{sin } v,\ \text{cos. } u,\ \text{cos. } v,\ \text{tg. } u,\ \text{tg. } v, \ldots) = o$$

vel hac

$$f\,(e^u, e^v) = o$$

analogae forma continget plane diversa

$$f\left(\text{sin.}\left[\frac{1}{u}\right],\ \text{sin.}\left[\frac{1}{v}\right],\ \text{cos.}\left[\frac{1}{u}\right], \ldots\right) = o$$

$$f\left(e^{\frac{1}{u}},\ e^{\frac{1}{v}}\right) = o$$

Eadem erit diversitas, si primitivae aequatio et ipsas coordinatas et transcendentes earum functiones algabraica functione f conjunctas contineat, e. g. si forma gaudeat hujusmodi

$$f\,(u,\ v,\ \sin.\ u,\ \sin.\ v,\ \ldots) = o$$

$$f\,(u,\ v,\ \mathrm{arc.}\ \sin.\ u,\ \mathrm{arc.}\ \sin.\ v,\ \ldots) = o$$

$$f\,(u,\ v,\ \lg.\ u,\ \lg.\ v,\ \ldots) = o$$

Ex his jam apparet —— si a generalibus coordinatis u et v ad orthogonales transimus x et y —— nullam fore e lineis transcendentibus, quae et ipsa satis simplex sit atque usitata et in analoga idem offerat. Logarithmicis e. g. $x = a.\ \lg.\ y$ ac $y = a.\ \lg.\ x$ vel sinussoidibus $x = \sin.\ y$ ac $y = \sin\ x$. si analogas quaerimus lineas, lineas inveniemus minus usitatas $x.\ \lg.\ y = -\,{}^1/a$, $y.\ \lg.\ x = -\,{}^1/a$, $x.\ \sin.\left(\frac{1}{y}\right) = 1$, $y.\ \sin.\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Unum tandem ut addamus affinitatis $xx' = 1\ yy' = 1$ exemplum, primitivam statuamus esse n — gonum seu n rectarum linearum intersectione esse ortam; cuilibet jam rectae quum hyperbola respondeat ex affinitate nostra aequilatera, punctum O transvadens, cujus asymptotae sint axibus XX' et YY' parallelae —— ut monuit nos relatio (35) —— analogam figuram apparet constare n istiusmodi hyperbolarum partibus, h. e. esse ut ita dicam n — gonum hyperbolicum; quod si in vulgatum n — gonum abire velis, primitiva e rectis punctum O pervadentibus vel alterutri axium parallelis constet necesse est.

Affinitatem autem nostram $xx' = 1\ yy' = 1$ —— quae e generali unde exiimus affinitate $uu' = 1\ vv' = 1$ ista qua hocce capite usi sumus coordinatarum u ac v definitione oritur —— ut rectius etiam perspiciamus, eandem affinitatem aequationibus inter polares coordinatas indicemus sive inter radium vectorem $r = O\,C$ (fig. 1) interque angulum $\phi = C\,O\,X$, quem radius vector cum recta facit $O\,X$, unde in angulo ϕ computando eximus. Prodit ita:

$$xx' = 1 \qquad\qquad yy' = 1$$

$$(r.\ \cos.\ \phi)\ (r'.\ \cos.\ \phi') = 1 = (r.\ \sin.\ \phi)\ (r'.\ \sin.\ \phi')$$

$$\cos.\ \phi.\ \cos.\ \phi' = \sin.\ \phi.\ \sin.\ \phi'$$

$$\mathrm{cotg.}\ \phi.\ \mathrm{cotg.}\ \phi' = 1$$

$$\phi + \phi' = 90^\circ$$

$$r' = \frac{1}{r.\ \cos.\ \varphi.\ \cos.\ \varphi'} = \frac{1}{r.\ \cos.\ \varphi.\ \cos.\ (90^\circ - \varphi)} = \frac{1}{r.\ \cos.\ \varphi.\ \sin.\ \varphi} = \frac{2}{r.\ \sin.\ 2\ \varphi}$$

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{2}{r.\ \sin.\ 2\ \varphi}\right)}{-\,d\varphi} = \frac{4\ \cos.\ 2\ \varphi}{r.\ \sin^2.\ 2\ \varphi} + \frac{2}{r^2.\ \sin.\ 2\ \varphi}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dr'}{r'd\varphi'} = \frac{dr}{rd\varphi} + 2\ \mathrm{cotg.}\ 2\ \varphi.$$

$$\frac{dr'}{r'^2 d\varphi'} = \left(\frac{1}{2}\ r.\ \sin.\ 2\ \varphi\right)\left(\frac{dr'}{r'd\varphi'}\right) = \left(\frac{1}{2}\ r^2.\ \sin.\ 2\ \varphi\right)\frac{dr}{r^2 d\varphi} + r.\ \cos.\ 2\ \varphi.$$

Quibus ex aequationibus ratio apparet, qua radiusque vector r, angulusque ϕ, quem radius ille vector cum recta initiali O X facit, angulusque arc. cotg. $\left(\frac{dr}{rd\varphi}\right)$, quem radius vector cum recta tangentiali facit, polaresque tandem subnormalis $\frac{dr}{d\varphi}$ ac subtangens $r^2 \frac{d\varphi}{dr}$ cum analogis alterius figurae angulis lineisve ex affinitate nostra cohaerent. Confirmatur inde, quod supra (*) nos docuit functionis $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$ in transitione ad analogam figuram constantia, videlicet, quod in analoga quoque figura tangentialis recta cum radio vectore congruat vel ei saltem sit parallela, si in primitiva ita se res habuerit: idem enim hinc sequitur, quod, si sit $\frac{dr}{rd\varphi} = \infty$, requiri videmus ut sit quoque $\frac{dr'}{r'd\varphi'} = \infty$, nisi fuerit cotg. $2\phi = \infty$, h. e. nisi fuerit $\phi = 0$ vel 90° vel 180° vel 270° vel universe $= n\pi$. Confirmatur inde praeterea, quod supra monuimus: nullas esse nisi algebraicas lineas, quae, si ad analogas iis ex affinitate nostra transeas lineas, nullam subeant formae mutationem, nisi quae a mutato constantium ordine pendeat. Istiusmodi enim constantiam ut admittat substitutio $\phi' = 90^\circ - \phi$, $r' = \frac{2}{r.\ \sin.\ \varphi.\ \cos.\ \varphi}$, requiritur ut primitivae aequatio formam referat $r = f\ (\sin.\ \phi)$; sin primitiva fuerit spiralis aliqua $r = f\ (\phi)$ aliave quaedam linea transcendens, fieri non posse apparet, ut analoga ei ejusdem formae respondeat linea. Attendendum autem, aequationes modo memoratas satis simplices, quibus polares coordinatas earumque producta et quotientia in analogis figuris cohaerere docemur, ad illam tantum spectare affinitatem $xx' = 1$, $yy' = 1$, quae ex affinitate $uu' = 1$, $vv' = 1$ prodiit; sin a generaliore ista orti essemus affinitate $uu' = A^2$, $vv' = B^2$, de qua in capitis hujus initio sermo erat, affinitas prodiisset $xx' = A^2$, $yy' = B^2$, qua mutua polarium coordinatarum relatio potuisset quidem, at non nisi prolixis aequationibus indicari.

(*) Relatione (14) pag. 17.

CAPUT II.

DE AFFINITATE, QUAE INDICATUR FORMULIS $x = x' \quad yy' = 1$.

Videamus jam de altera generalium quas in Introitu memoravimus affinitatum — de affinitate videlicet $u = u' \quad vv' = B^2$. Quarum aequationum posterior nos docet: inter analogas utriusque figurae coordinatas v et v', prout coordinata v vel longitudinem repraesentet vel superficiem aliudve rerum genus denotet, vel longitudinem esse vel superficiem vel aliam tandem rem esse mediam proportionalem, quae B contineat longitudinis aliusve rei unitates. Quum autem unitatis istius magnitudo sit plane arbitraria, pro unitate assumere licet ipsum illud quantum, quod sit inter v et v' medium proportionale: affinitas ita oritur $u = u' \quad vv' = 1$, simplicioribus indicata aequationibus nec tamen minus generalis, quam illa unde exiimus $u = u' \quad vv' = B^2$.

De affinitate igitur hocce capite agamus, quam aequationes indicant $u = u' \quad vv' = 1$; eademque rursus utamur qua in superiore capite coordinatarum u et v definitione: quo facto ipsa illa oritur affinitas $x = x' \quad yy' = 1$, de qua cl. Verdam egit in Commentariis Instituti Belgici Vol XII. pag. 67—93.

Ex iis, quae capitis superioris initio de iterationibus fugiendis monuimus, pars tantum intacta hoc loco manet, eam dico, quae de systemate $u\ v$ systemati $u'\ v'$ non praestante agit; at vero omnia, quae de coordinata u vel quae de $u\frac{dv}{du}$, $\frac{dv}{du}$ aliave coordinatae u functione reperta habuimus, in coordinatam item v analogamve item in coordinatae v functionem, permutatis tantummodo secum litteris u et v, esse quadratura, hoc loco dicere nefas est.

Ex aequationibus affinitati nostrae fundamentalibus

$$u = u' \quad vv' = 1 \qquad (42)$$

hae sequuntur inter coordinatarum producta atque quotientia aequationes:

$$\left.\begin{aligned} uv &= \frac{u'}{v'} \\ \frac{u}{v} &= u'\,v' \end{aligned}\right. \qquad (43)$$

quarum —— quum coordinatis u et v earumque adeo quoque producto vel quotienti idem qui in superiore capite subsit sensus —— hic erit significatus: si in primitiva figura radium vectorem O C puncti alicujus C (fig. 1) circulo $r = 1$ sive L N, cujus radius unitatem longitudinis aequiparat, secemus, fore ut tot insint cotangenti M N longitudinis unitates, quod superficiei unitates contineat rectangulum $O'\,D'\,C'\,E'$, quod analogum analogae figurae punctum C' coordinatarumque $C'\,D'$ ac $C'\,E'$ axiumque XX' ac YY' ope includit.

Ex aequationibus autem (42) ac (43) sequitur, nonnullas esse figuras primitivas, quibus analogas facillime invenire possis. Vidimus enim

elementorum seriebus	respondere series	
$u = a$	$u' = a$	(44)
$v = 0$	$v' = \infty$	
$v = b$	$v' = 1/b$	(45)
$v = \infty$	$v' = 0$	
$\frac{v}{u} = 0$	$u'\,v' = \infty$	
$\frac{v}{v} = c$	$u'\,v' = 1/c$	(46)
$\frac{v}{u} = \infty$	$u'\,v' = 0$	

(designantibus a, b, c, quanta quaelibet finita). Ad orthogonales jam coordinatas x et y si transimus, relatio (44) nos docet, quamlibet rectam $x = 0$ vel $x = a$ vel $x = \infty$, axi XX' perpendicularem, ipsam sibi esse analogam: relationes (45) nos monent, cuilibet rectae $y = 0$ vel $y = b$ vel $y = \infty$, axi YY' perpendiculari, aliam respondere rectam, eidem axi perpendicularem; relationes tandem (46), rectae coordinatarum initium O pervadenti non rectam hoc loco respondere —— ut in superioris capitis affinitate locum habuit —— sed hyperbolam contra aequilateram respondere nos monent, cujus centrum ipsum coordinatarum initium occupet O, cui autem ipsae axes XX' et YY' asymptotarum partes praestent.

Rectas igitur si quaerimus, quae ipsae sibi ex affinitate nostra respondeant, non 6 tantum, ut superiore capite, sed innumeras reperiemus: duas primum

$$\begin{aligned} v &= +1 \\ v &= -1 \end{aligned} \qquad (47)$$

h. e. rectas F G et K L (fig. 2), axi XX' parallelas, quamlibet deinde rectam eidem axi perpendicularem. Ex his autem duas tantum (47), quas priore loco nominavi, revera sibimet ipsis analogas esse apparet: harum enim quodlibet elementum sive punctum

$$\begin{aligned} u = a \quad v &= +1 \\ u = a \quad v &= -1 \end{aligned} \qquad (48)$$

ipsum sibimet esse, si ad analogam figuram transeas, analogum: non vero esse praeter haec alia etiam elementa, quae nullam in transitione ad analogam figuram subeant mutationem: quare analogiam, qua recta quaelibet axi XX' perpendicularis ipsa sibimet respondeat, ita esse accipiendam, ut ista tantummodo ejus puncta, quae in rectis (47) sita sint, ipsa sibimet respondeant, reliqua non ipsa sibimet, at aliis respondeant ejusdem rectae punctis.

Quod igitur ad mutuam attinet elementorum ex affinitate nostra analogiam, vidimus fore ut

elementis		elementa respondeant		
$u = 0$	$v = 0$	$u' = 0$	$v' = \infty$	
$u = 0$	$v = b$	$u' = 0$	$v' = {}^1\!/b$	
$u = 0$	$v = \infty$	$u' = 0$	$v' = 0$	
$u = a$	$v = 0$	$u' = a$	$v' = \infty$	
$u = a$	$v = b$	$u' = a$	$v' = {}^1\!/b$	(49)
$u = a$	$v = \infty$	$u' = a$	$v' = 0$	
$u = \infty$	$v = 0$	$u' = \infty$	$v' = \infty$	
$u = \infty$	$v = b$	$u' = \infty$	$v' = {}^1\!/b$	
$u = \infty$	$v = \infty$	$u' = \infty$	$v' = 0$	

unde apparet, quodlibet primitivae figurae elementum, cujus finita sit utraque coordinata —— h. e., si ad coordinatas x et y transgredimur, quodlibet punctum, cujus finita sit ab axibus XX' et YY' distantia —— elementum sive punctum requirere analogae, cui idem contingat: sin non fuerit utraque coordinata finita, hanc prodi, si orthogonalium coordinatarum systemate utimur, punctorum analogiam: quodvis axis YY' punctum, quod a coordinatarum initio O finite distet, aliud requirere istiusmodi punctum sibi respondens: cuilibet puncto, ab axe XX' finite, ab axe contra YY′ infinite distanti, aliud respondere punctum, simili ratione situm; cuilibet axis XX′ puncto punctum respondere, cujus eadem atque primitivi sit ab axe YY′ distantia, distantia contra ab axe XX′ infinita: ipsi igitur coordinatarum initio metam respondere, quo tendat punctum, axem YY′ non relinquens, ab altero autem axe infinite recedens: termino contra puncti, axem XX′ non relinquentis, ab axe contra YY′ infinite recendentis, terminum respondere puncti, ab utroque axe infinite recedentis.

Ex hacce punctorum analogia facile apparebit, quanam ratione analogia sit interpretanda, quam relationes (46) elementorum seriebus $\frac{v}{u} = o$ et $\frac{v}{u} = \infty$ —— quas quaternis singulas punctorum generibus constare supra (pag. 7) vidimus —— intercedere velint cum elementorum seriebus $u' v' = \infty$ (h. e. hyperbola aequilatera, quae a coordinatarum initio infinite migravit) ac $u' v' = o$ (h. e. hyperbola aequilatera, quae in asymptotas suas sive in axes XX′ et YY′ abiit.) Attendamus enim, universarum serierum mutuam analogiam inde oriri, quod unumquodque prioris seriei elementum analogum sibi alterius seriei habet elementum: serierum e. g. $\frac{v}{u} = \infty$ ac $u' v' = o$ congruunt secum ista primum elementa, quibus est $u = u' = o$ (h. e. ipsa recta O Y secum congruit), earundem deinde congruunt elementa, quibus finitum est $u = u'$ (h. e. hyperbolae $u' v' = o$ alter ramus O X cum seriei $\frac{v}{u} = \infty$ istis congruit punctis, quibus distantia est ab axe YY′ finita, ab axe XX′ infinita), tandemque utriusque seriei ista congruunt elementa, quibus est $u = u' = \infty$.

Primitiva autem $f(u, v) = o$ si elementum quoddam contineat A, cui analogum respondeat ex affinitate nostra elementum B, hinc jam sequitur, ut elementum istud B unum sit ex analogis analogae lineae $f(u', v') = o$ elementis; h. e. —— si ad coordinatas transgredimur x et y —— si primitivam punctum quoddam transire novimus A, cui punctum respondeat B, analogae novimus lineae, vel si ceteroquin incognita nobis sit, hoc tamen contingere, ut punctum transeat B. Cujus ratiocinationis ope analogiam inter elementa elementorumve series modo repertam adhibere licet ad istam enunciandam inter analogarum figurarum proprietates analogiam, quae ad ipsas coordinatas u et v sive x et y, h. e. quae ad punctorum situm spectat: Primitiva igitur quoties rectam aliquam axi XX′ perpendicularem secat vel tangit vel universe offendit, toties eandem rectam offendit analoga figura. Primitiva quoties rectarum $y = +1$ vel $y = -1$ alterutram offendit, toties analoga eandem rectam, et in iisdem quidem, in quibus primitiva, punctis offendit (*). Quoties primitiva axem YY finita a puncto O distantia offendit,

(*) Exemplum praebet rectae $y = -1$ punctum L (fig. 5), quod et primitiva D H et analogae ramus transit K L.

toties eundem axem offendit analoga, et finita quidem ab O distantia. (*) Primitivae si asymptota quaedam sit axi XX′ perpendicularis, eundem axem offendit analoga in isto puncto, ubi axem asymptota transiit. (†) Ipse igitur axis YY′ si sit primitivae asymptota, punctum O analoga transit (§) Recta autem $x = \pm \infty$ si sit primitivae asymptota, —— h. e. si primitivae rami contingant in infinitum excurrentes, qui, quo magis ab axe YY′ recedant, eo magis fiant eidem paralleli —— analoga axem XX′ infinita ab O distantia offendit; (**) unde plerumque sequitur, axem XX′ analogae fore asymptotam; quod tamen fiatne necne, dijudicari nequit, nisi analogae non situm tantummodo sed directionem quoque cognitam habeamus; quod rursus requirit, ut differentialium functionum ex affinitate nostra analogiam antea investigaverimus. Eademque est caussa, cur non liceat ex analogia hucusque allata affirmari, si punctum O aliudve quoddam axis XX′ punctum primitiva offenderit, analogae fore asymptotam eidem axi perpendicularem. Eandemque ob caussam, si primitivae vel asymptota fuerit neutri axium parallela vel asymptota contra fuerit axi XX′ parallela finiteque ab eo distans, ex iis quae hucusque attulimus supponere quidem licet, at non affirmare, analogae vel ipsum axem XX′ vel rectam huic parallelam finiteque ab hoc distantem fore asymptotam.

Anteaquam autem ad ambiguitates hasce dirimendas in mutuam differentialium functionum analogiam inquiramus, videamus antea de nonnullarum proprietatum analogia, quae ab ipsis coordinatis pendent. Quod igitur ad coordinatarum u et v affirmativum negativumve attinet signum, subsistunt hoc loco superioris capitis relationes (10), non subsistunt relationes (11). Cujus rei —— siquidem coordinatis u et v idem hoc loco atque capite I° subest sensus —— hic est significatus: Quoties primitiva in uno alterove versata sit 4 quadrantium XOY, X′OY, X′OY′, XOY′ (fig. 2), toties eundem quadrantem ab analoga occupari; sin accuratius, primitivae punctum quoddam ubinam situm sit, definiatur, octansque adeo quem occupat determinetur, ambiguum remanere, quonam in octante analogum situm sit analogae figurae punctum: pro varia enim magnitudine, quam longitudinis unitati tribuamus, vel in GOX vel in GOY situm esse punctum, quod

---

(*) Exemplum praebet primitivae cum axe YY′ intersectio in B (fig. 5, 6, 10), cui respondet alterius figurae cum eodem intersectio in B′ (fig. 5), B″ (fig. 6), B (fig. 10).

(†) Exempla praebet asymptota F′ G′ (fig. 5) vel F G (fig. 6), cui in analoga figura intersectionis punctum respondet A (fig. 5 et 6).

(§) Parabolae e. g. $x^2\ y = a$ quum sit OY asymptota (fig. 4), analoga parabola $y = ax^2$ punctum O transit (fig. 3).

(**) Exemplum praebent parabolae $y = ax^2$ asymptotae $x = +\infty$ ac $x = -\infty$ (fig. 3) vel logarithmicae asymptota $x = +\infty$ (fig. 10), quum analogae parabolae (fig. 4) vel logarithmicae (fig. 10) axis XX′ asymptotae partes agat.

octantis GOX puncto alicui respondeat. Relationes tandem (11^a) hanc nostro loco induunt formam:

prout	augeatur u	fore ut	augeatur u'	(50)
	—— v		minuatur v'	
	minuatur u		—— u'	
	—— v		augeatur v'	

quod, si coordinatas u et v solita ratione interpretamur, nos docet: prout primitiva axem YY' vel accedat vel ab eo recedat, idem analogae contingi; prout vero axem XX' primitiva vel appropinquet vel ab eo recedat, analogam contra ab axe XX' vel recedere vel eundem versus progredi.

Fundamentales autem quibus affinitas nostra indicatur aequationes (42) quum coordinatarum u et v primas tantummodo contineant potestates, hinc jam sequitur, idem de nostra quod de superioris capitis affinitate posse affirmari, h. e. unum uni semper respondere elementum elemento. Unum tamen uni semper respondere punctum puncto, ut superiore capite, ita hic quoque nequaquam inde sequitur: Nullius quidem est hoc loco momenti, sitne punctum primitivae in ipso axe $u = o$ sive YY' situm, an vero finite vel infinite ab eo distet: at contra, prout ab axe $v = o$ sive XX' vel finite infiniteve distet vel in eodem situm sit primitivae quoddam punctum, vel unum ei respondet punctum analogae analogum vel infinita punctorum multitudo.

Eadem porro ratiocinatione qua superiore capite uti sumus, hic quoque affirmari licet, si primitivae contigerit alicubi punctum *multiplex* punctumve *interstitionis* punctumve *a reliquis separatum*, analogum requiri in analoga figura ejusdem singularitatis punctum, modo finite ab utroque axe distarit punctum primitivae. Quibus addi licet, huic singularium punctorum analogiae non obstare hoc loco —— quod superiore capite analogiam auferebat vel saltem dubiam relinquebat —— quod primitivae punctum singulare in axe situm sit YY'. At, ut superiore capite, ita hic quoque, si in altero axe XX' duplex fuerit primitivae punctum, ambiguum erit, punctumne in analoga duplex an duo respondeant rami, qui, finita a se invicem distantia servata, infinite ab axe XX' recesserint; punctumve *interstitionis* si in axe XX' fuerit primitivae, analogae erit inter punctum similis singularitatis interque ramum in infinitum excurrentem eligendum; in axe tandem illo XX' si *punctum* primitivae fuerit *a reliquis separatum*, vel analogum respondere potest ejusdem singularitatis punctum vel recta axi YY' parallela finitaeque magnitudinis, quae ab axe XX' infinite recessit.

Videamus jam, inter differentiales coordinatarum u, v, u', v' functiones ordinis primi quaenam sit ex affinitate nostra analogia. Aequationes produnt:

$$\frac{dv'}{du'} = \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{du} = \frac{-\frac{dv}{v^2}}{du} = -\frac{dv}{v^2 du} \quad (51)$$

$$\frac{u'}{v'}\frac{dv'}{du'} = (uv)\left(-\frac{dv}{v^2 du}\right) = -\frac{u}{v}\frac{dv}{du} \quad (52)$$

$$v'\frac{du'}{dv'} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(-\frac{v^2 du}{dv}\right) = -v\frac{du}{dv} \quad (53)$$

$$v'\frac{dv'}{du'} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(-\frac{dv}{v^2 du}\right) = -\frac{v\frac{dv}{du}}{v^4} \quad (54)$$

$$u'\frac{dv'}{du'} = u\left(-\frac{dv}{v^2 du}\right) = -\frac{u\frac{dv}{du}}{v^2} \quad (55)$$

$$u'\frac{du'}{dv'} = u\left(-\frac{v^2 du}{dv}\right) = -(v^2)\left(u\frac{du}{dv}\right) \quad (56)$$

Videamus primum de aequatione (51). Quae differentialem functionem $\frac{dv'}{du'}$ non posse inveniri, nisi et $\frac{dv}{du}$ et v cognita habeamus, nos monet, h. e. —— si ad orthogonales coordinatas x et y transeamus —— non posse notae directioni, quae ignotae primitivae ignoto in puncto contingat, analogam reperiri analogae directionem. Ad mutuam igitur functionum $\frac{dv}{du}$ ac $\frac{dv'}{du'}$ relationem investigandam si coordinatam v aliquatenus definimus, hae produnt aequationes:

$$\text{prout sit}\quad\left|\begin{array}{l} v\ \text{finitum},\ \frac{dv}{du} = 0 \\ v\ \text{———}\ \frac{dv}{du}\ \text{finitum} \\ v\ \text{———}\ \frac{dv}{du} = \infty \end{array}\right|\quad\text{fore}\quad\left|\begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = 0 \\ \frac{dv'}{du'}\ \text{finitum} \\ \frac{dv'}{du'} = \infty \end{array}\right. \quad (57)$$

quae, ad coordinatas x et y translatae, nos docent: Prout primitiva vel axi YY' fuerit vel axi contra XX' vel neutri tandem perpendicularis, idem contingere analogae, modo finite ab axe XX' primitiva, adeoque analoga quoque, distarit; nec directionum huic analogiae obstare hoc loco, quod ei ex aequationibus (18) superioris capitis obstabat, h. e. quod primitiva ab axe YY' nulla vel infinita distarit distantia. Quae igitur supra (pag. 31) de asymptotarum ex affinitate nostra analogia remanebat ambiguitas, relationibus (57) partim tollitur: primitivae enim si sit asymptota aliqua axi XX' parallela finiteque ab illo distans, similis contingat analogae asymptota analoga necesse est, siquidem utrique figurae esse ibi $\frac{dy}{dx} = 0$ docent nos relationes (57).* Iisdem relationibus analogia de analogis axis YY′ ab analogis figuris offensionibus supra allata eatenus accuratius definitur, quod axem YY′ videmus ab analoga figura vel perpendiculariter vel oblique contra secari vel tandem tangi, prout hac illave e tribus istis rationibus eundem axem primitiva offenderit.

Alia jam ratione si coordinatam v definimus, sequitur ex aequatione (51)

$$\text{prout sit}\quad\left|\begin{array}{ll} v = 0 & \frac{dv}{du} = \infty \text{ vel finitum} \\ v = \infty & \frac{dv}{du} = 0 \text{ vel finitum} \\ v = 0 & \frac{dv}{du} = 0 \\ v = \infty & \frac{dv}{du} = \infty \end{array}\right|\quad\text{fore}\quad\left|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\frac{dv'}{du'} = \infty \\ \frac{dv'}{du'} = 0\end{array}\right\}\ (58) \\ \left.\begin{array}{l}\frac{dv'}{du'} = \frac{0}{0} \\ \frac{dv'}{du'} = \frac{\infty}{\infty}\end{array}\right\}\ (59) \end{array}\right.$$

quae — quum coordinatis u et v idem qui superiore capite subsit sensus —— huc redeunt: Si axem XX′ primitiva alicubi perpendiculari obliquove sub angulo offenderit, analogae erit asymptota axi XX′ perpendicularis: sin axem XX′ primitiva tetigerit, iterata requiritur differentiatio aliave accuratior investigatio, sitne analogae asymptota (†) necne: vicissim, si primitiva infinite quidem ab axe XX′ distarit, non tamen axi YY′ parallela processerit, neque adeo asymptotam habuerit, nisi quae axem XX′ infinita a puncto O distantia transeat, requiri, ut axis XX′ ab analoga tangatur: sin asymptota primitivae fuerit axi XX′ perpendicularis, axem XX′ ab analoga vel tangi posse vel secari. Quae igitur de asymptotis axi XX′ perpendicularibus se nobis offerebat supra (pag. 31) ambiguitas, ut superiore capite, ita hic quoque partim tollitur, partim ad mutuam differentialium functionum secundi ordinis analogiam investigandam remittitur.

Ex eadem aequatione (51) sequitur praeterea

$$\text{si velimus esse}\left|\begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} = \frac{dv}{du} \\ \frac{dv'}{du'} = -\frac{du}{dv} \end{array}\right|\text{requiri ut sit}\left|\begin{array}{ll} \frac{dv}{du} = 0 \text{ vel } \infty & (60) \\ \left(-\frac{dv}{v^2 du}\right)\left(-\frac{dv}{du}\right) = \left(\frac{dv}{v du}\right)^2 = +1 & (61) \end{array}\right.$$

(*) Asymptota e. g. D E (fig. 6) simili respondet alterius hyperbolae asymptotae D″ E″.

(†) Quemadmodum parabolae $x^2 y = a$ (fig. 4) contingit, ut axe YY′ gaudeat asymptota, quae respondet axis XX′ ab analoga parabola (fig. 3) in puncto O tactioni.

Ad orthogonales jam si coordinatas transimus, docet nos relatio (60), fieri non posse, ut finite alicubi ab axe XX' distans primitiva neutrique axium parallela procedens, sit analogae in analogo puncto parallela. Relatio autem (61), ut primitiva sit analogae in analogo puncto perpendicularis, requiri docet, ut subtangens $y \frac{dx}{dy}$ sit $= + 1$ vel $= - 1$.

Duos jam primitivae ramos se invicem alicubi tetigisse statuamus: eadem jam qua superiore capite usi sumus ratiocinatione hic quoque probari licet, fore ut analoga respondeat in analoga figura tactio: eademque, quae Capite I$^{\underline{o}}$, erit tactionum huic analogiae adhibenda restrictio, si tactio illa occurrerit distantia ab axe XX' infinitae parvitatis vel magnitudinis; infinita vero axis YY' vicinitas infinitave ab eodem distantia nullam hoc loco tactionis puncto affert caussam, quominus analogum ei respondeat punctum singulare. Eademque ratione patet, si *cuspis* (un point de rebroussement) vel *mucro* (un point saillant) finite in primitiva distarit ab axe XX', quicumque fuerit ei quod ad axem YY' situs, analogum semper ei respondere in analoga punctum ejusdem singularitatis; sin ab axe XX' *cuspis* illa vel *mucro* distantia distarit infinitae parvitatis magnitudinisve, accuratiorem rei investigationem requiri.

Ad aequationem (51) redeamus. Quae, quum factor $\frac{1}{v^2}$ sit quotientis $\frac{1}{v}$ quadratum adeoque semper affirmativum, nos docet,

$$\text{prout sit} \left| \begin{array}{l} \frac{dv}{du} > o \\ \frac{dv}{du} < o \end{array} \right| \text{fore} \left| \begin{array}{l} \frac{dv'}{du'} < o \\ \frac{dv'}{du'} > o \end{array} \right. \qquad (62)$$

Attendentibus jam nobis, quanam ratione signorum + vel — concordiam, quam inter functiones $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy'}{dx'}$ olim exstitisse relationes (24) monuerunt, simus interpretati, facile apparet, relationum (62) hunc esse sensum: prout primitiva hac vel hac contra processerit directione, analogae hanc vel hanc contra fore directionem.

Quotientis jam $\frac{dv}{du}$ affirmativum negativumve signum in oppositum abire statuamus functionisque adeo $\frac{dv}{du}$ valorem, nisi *mucro* ibi fuerit, per $\pm$ o vel $\pm \infty$ transire: haec jam erit analogia:

$$\begin{array}{c|l|c|l} & \text{per } \pm o \text{ a} > o \text{ in} < o & & \text{per } \pm o \text{ a} < o \text{ in} > o \\ \text{prout } \frac{dv}{du} & \text{———— a} < o \text{ in} > o & \text{fore ut} & \text{———— a} > o \text{ in} < o \\ \text{transeat} & \text{per } \pm \infty \text{ a} > o \text{ in} < o & \frac{dv'}{du'} \text{ transeat} & \text{per } \pm \infty \text{ a} < o \text{ in} > o \\ & \text{———— a} < o \text{ in} > o & & \text{———— a} > o \text{ in} < o \end{array} \qquad (63)$$

quae, solita rursus ratione coordinatis u ac v interpretatis, indicio nobis est, prout primitiva alicubi sinum confecerit, vel axem XX' spectantem vel ab eo recedentem, fore ut analogus analogae sinus vel ab axe illo recedat vel eundem versus spectet: sin primitivae sinus in axem YY' oppositamve in regionem spectarit, fore ut analogae figurae sinus contingat simili ratione situs (*).

Ad aequationem (52) jam transeamus. Unde primum sequitur:

$$\text{prout sit} \quad \frac{u}{v}\,\frac{dv}{du} \;\left|\; \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \;\right| \quad \text{fore} \quad \frac{u'}{v'}\,\frac{dv'}{du'} \;\left|\; \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} \;\right| \qquad (64)$$

quod e nostra coordinatarum u ac v definitione hoc sibi vult: si analogarum figurarum alterutra ambos simul accedat axes ab ambisve simul recedat adeoque hac procedat directione $\begin{array}{c|c} \diagdown & \diagup \\ & {}^{o} \\ \hline \diagup & \diagdown \end{array}$, requiri ut analoga contra figura alterum axem accedat, ab altero recedat adeoque hac ratione progrediatur $\begin{array}{c|c} \diagup & \diagdown \\ & {}^{o} \\ \hline \diagdown & \diagup \end{array}$.

Ex eadem aequatione (52) sequitur praeterea: si functio $\frac{u}{v}\,\frac{dv}{du}$ fuerit alicubi $= + 1$ vel $= - 1$, requiri ut in analogo contra alterius figurae puncto sit $\frac{u'}{v'}\,\frac{dv'}{du'} = - 1$ vel $= + 1$. Quod quo sensu sit e nostra coordinatarum u ac v definitione interpretandum, facile manifestum erit, modo in memoriam revocemus quae de functione $\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx}$ capite superiore monuimus (pag. 16). Ita enim apparebit, nostram quam hocce capite consideramus affinitatem esse ejusmodi, ut, si analogarum figurarum alterutrius recta tangentialis cum radio vectore congruat vel saltem sit ei parallela, analogae contra recta tangentialis triangulum cum axe XX' cum radioque vectore faciat aequicrurium, h. e. ut angulus CBX (fig. 1), quem cum axe XX' faciat analogae recta tangentialis, supplementum sit anguli COB, quem cum semiaxe OX radius vector faciat primitivae. Quam interpretationem attendentes, ambiguitatem vidimus, quae de asymptotis neutri axium parallelis supra se nobis obtulit, eatenus tolli, quod, si primitivae hujusmodi contigerit asymptota contigeritque adeo valor $\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} = + 1$, analogae ut valor contingat $\frac{x'}{y'}\,\frac{dy'}{dx'} = - 1$ ipseque adeo axis XX' ut sit analogae asymptota necesse est (†); at eatenus ambiguitas illa remanet,

---

(*) In axem illum YY' spectant e. g. et primitivae hyperbolae sinus H et J (fig. 9) et respondentes his alterius sinus H' et J'.

(†) Asymptota e. g. FG (fig. 9) rectave DH, quae ipsa sibimet est asymptota (fig. 5), respondent ramis alterius $JX' \ldots X'H'$ (fig. 9), $LX \ldots X'H$ (fig. 5), axe XX' asymptota gaudentibus.

quod, si axis XX′ sit primitivae asymptota, dubium est, sitne $\frac{x}{y} \; \frac{dy}{dx} = -1$ necne, dubiumque adeo quoque est, contingatne analogae, ut sit ei $\frac{x'}{y'} \; \frac{dy'}{dx'} = +1$ sive ut asymptotam habeat necne.

Ad aequationem (53) jam transeuntes, in analogis quibuslibet punctis analogas utriusque figurae subtangentes $y \frac{dx}{dy}$ ac $y' \frac{dx'}{dy'}$ ejusdem videmus esse ex affinitate nostra magnitudinis, at oppositi signi h. e. oppositi quoad axem YY′ situs. Aequationes autem (54—56) minus simplicem esse ex affinitate nostra rationem docent, qua subnormalis $y \frac{dy}{dx}$ vel qua subtangensque $x \frac{dy}{dx}$ subnormalisque $x \frac{dx}{dy}$ cum analogis analogae figurae lineis cohaereant: ut enim hic quoque analogae utriusque figurae lineae quoad magnitudinem attinet conveniant, quoad signum vero sive situm attinet sibi sint invicem oppositae, requiri, ut v sive y sit $= +1$ vel $= -1$, h. e. ut de istis agatur punctis, (*) ubi rectarum $y = +1$ vel $y = -1$ alterutram primitivaque analogaque offendant.

Et haec quidem de differentialibus coordinatarum u, v, u′, v′ functionibus ordinis primi sufficiant. Ad differentiales functiones ordinis secundi transeamus: quarum haec prodit relatio:

$$\frac{d^2v'}{du'^2} = \frac{d\left(\frac{dv'}{du'}\right)}{du'} = \frac{d\left(-\frac{dv}{v^2du}\right)}{du} = \frac{2}{v^3}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{d^2v}{v^2du^2} \qquad (65)$$

Sequuntur inde aequationes, a superioris capitis aequationibus (28—31) paullulum tantummodo discrepantes:

$$\text{si sit}\left|\begin{array}{ll} \frac{d^2v}{du^2} = \infty & \frac{dv}{du} \text{ et v finita} \\ \frac{dv}{du} = \infty & \frac{d^2v}{du^2} \text{ et v ——} \\ \frac{d^2v}{du^2} = 0 & \frac{dv}{du} \text{ et v ——} \\ \frac{d^2v}{du^2} = 0 & \frac{dv}{du} = 0, \text{ v finitum} \end{array}\right| \text{fore}\left|\begin{array}{ll} \frac{d^2v'}{du'^2} = \infty & (66) \\ \frac{d^2v'}{du'^2} = \infty & (67) \\ \frac{d^2v'}{du'^2} = \frac{2}{v^3}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 & (68) \\ \frac{d^2v'}{du'^2} = 0 & (69) \end{array}\right.$$

Quum autem non sit hocce capite mutua superioris capitis inter coordinatas u et v symmetria, functionum $\frac{d^2u}{dv^2}$ ac $\frac{d^2u'}{dv'^2}$ alia prodit relatio, a relatione (65) diversa:

$$\frac{d^2u'}{dv'^2} = \frac{d\left(\frac{du'}{dv'}\right)}{dv'} = -v^2 \frac{d\left(\frac{du'}{dv'}\right)}{dv} = -v^2 \frac{d\left(-\frac{v^2du}{dv}\right)}{dv} = v^4 . \frac{d^2u}{dv^2} + 2 v^3 . \frac{du}{dv}$$

(*) De puncto e. g. L (fig. 5) vel B (fig. 10).

unde rursus sequitur

$$\text{si sit} \quad \left| \quad \frac{d^2u}{dv^2} = o, \quad \frac{du}{dv} = o, \quad v \text{ finitum} \quad \right| \quad \text{fore} \quad \frac{d^2u'}{dv'^2} = o \qquad (71)$$

Ad orthogonales jam coordinatas si transimus, relationibus (69) et (71) hunc videmus inesse sensum: si primitiva finite ab axe XX' distarit fueritque ibi axium alterutri parallela habueritque ibi punctum inflexionis, analogum respondere in altera figura punctum inflexionis. Relatio contra (68) nos monet, non semper analogum respondere inflexionis punctum puncto ejusdem singularitatis, quod contigerit primitivae, finite quidem ab axe XX' distanti, neutri autem axi parallelae.

Eadem porro qua superiore in capite si utimur ratiocinatione, duobus videmus primitivae ramis, qui se invicem osculentur, analogam respondere analogorum ramorum osculationem, nisi ista fuerit primitivae directio vel ab axe XX' distantia, quae osculationum isti analogiae obstet.

Analogi tandem *radii osculi* nostra ex affinitate hacce cohaerent relatione:

$$\text{primitivus quum sit} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\text{analogus erit} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{y^2dx}\right)^2\right]^{3/2} \times y^2}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{d^2y}{dx^2}}$$

unde relationis (66) ope sequitur: si primitivus radius osculi fuerit $= o$, finitaque fuerint et y et $\frac{dy}{dx}$, fore ut analogus item radius osculi sit $= o$: minus vero simplicia esse, quae de analogo sint radio osculo dicenda, si primitivus fuerit $= \infty$.

Eadem ratione si procedentes ad differentiales coordinatarum functiones ordinis tertii progrederemur, minus etiam simplices proderent relationes. Nec opus est, ut multa moneamus de integralibus coordinatarum functionibus, quarum haec erit hoc loco mutua relatio:

$$\left.\begin{aligned} \int u'\, dv' &= \int u\left(-\frac{dv}{v^2}\right) = -\int\left(\frac{u}{v^2}\right) dv \\ \int v'\, du' &= \int\left(\frac{1}{v}\right) du = \int\frac{du}{v} \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

His igitur missis, nonnullis jam lineis analogas quaeramus lineas, ut exemplis proprietates affinitatis nostrae relatas illustremus. Primum se offert istud linearum genus, quod universa indicatur aequatione $u^m v^n = a$; prodit ita analogia linearum

$$u^m v^n = a \quad \text{ac} \quad u^m v^{-n} = a \qquad (73)$$

Sit e. g. $m = o$ vel $n = o$ vel $m + n = o$ vel tandem $m = n = 1$: eadem prodit relatio, quam elementorum seriebus $u = a$, $v = a$, $\frac{v}{u} = a$ cum analogis seriebus $u' = a$, $v' = {}^1/a$, $u'\,v' = {}^1/a$ intercedere supra jam vidimus.

Sit jam $n = -1$, m alium quemlibet designante numerum, modo ne sit o vel $+1$ vel -1: vel sit contra $m = -1$, n quemlibet designante numerum, o, $+1$, -1 tamen exceptis: sequitur e relatione (73) fore ut

$$\text{primitivis}\quad \left|\begin{array}{c} v = \left(\frac{1}{a}\right) u^m \\ u = \left(\frac{1}{a}\right) v^n \end{array}\right| \quad\text{respondeant}\quad \left|\begin{array}{c} v = a u^{-m} \\ u = \left(\frac{1}{a}\right) v^{-n} \end{array}\right| \quad\text{sive}\quad \left|\begin{array}{ll} u^m v = a & (74) \\ v^n u = {}^1/a & (75) \end{array}\right.$$

Unde ad orthogonales coordinatas transeuntibus nobis apparet, nostram esse ejusmodi affinitatem, ut cuilibet parabolae ordinis n [h. e. $y = ax^n$ vel $x = ay^n$] cujus vertex ipsum occupet coordinatarum initium, cujus autem asymptotae sint alterutri axium parallelae, alia ex affinitate nostra respondeat parabola, simili modo sita, ordinis vero $-$ n [h. e. $y = ({}^1/a)\,x^{-n}$ sive $x^n\,y = {}^1/a$, vel $x = ay^{-n}$ sive $y^n\,x = a$] ita quidem ut primitivae parameter sive constans a, si formula $x = ay^n$ ipsam indicaveris, intacta maneat, sin formula usus sis $y = ax^n$, in oppositam sibi constantem abeat ${}^1/a$, nisi fuerit $a = +1$ vel $a = -1$, quo casu idem erit ambis figuris constans. (*) Non fieri igitur e nostri capitis affinitate posse apparet, ut sit parabola aliqua, quae ipsa sibimet respondeat —— qualis in transitione ad analogam figuram constantia se nobis superiore capite obtulit (pag. 21) —— nisi huc referas parabolas ordinis o, h. e. rectas alterutri axium parallelas $y = \pm 1$ vel $x = a$, quas ipsas sibimet nostra quoque ex affinitate respondere supra vidimus.

A parabolis istis si ad aequationes minoris simplicitatis transgredimur, prima se offert nobis primi gradus aequatio: vidimus enim primitivae

$$au + bv + c = o \text{ respondere analogam } auv + b + cv = o \quad (77)$$

quod in orthogonalium coordinatarum systemate ita erit interpretandum: rectae cuilibet lineae $ax + by + 1 = o$ sive D H (fig. 5) quae axem XX' in puncto secet A sive $y = o$, $x = -{}^1/a$, axem autem YY' in puncto B sive $x = o$, $y = -{}^1/b$, hyperbolam respondere aequilateram X L B' K J H X', cui ipse axis XX' rectaque huic perpendicularis F' A' G' asymptotarum partes praestent; ac eam quidem rectae partem, quae supra axem XX' sita sit, h. e. A H, hyperbolae

(*) Parabolis e. g. D O E, H O L, D' O E' (fig. 3), quas pro varia constantis a magnitudine universa indicat aequatio $y = ax^2$, analogae respondent singulis singulae parabolae E D G F, I H L K, E' D' G' F' (fig. 4), aequatione cunctae $x^2\,y = {}^1/a$ indicatae.

ramo respondere J H X', partem contra rectae A D, infra axem XX' sitam, alteri hyperbolae ramo respondere K L X.

Ad secundi jam gradus aequationes transeuntes, generali videmus secundi gradus aequationi

$$a + bu + cv + duv + eu^2 + fv^2 = o$$

analogam respondere quarti gradus aequationem

$$\frac{a + bu + \frac{c}{v} + \frac{du}{v} + eu^2 + \frac{f}{v_2} = o}{av^2 + buv^2 + cv + duv + eu^2 v^2 + f = o}$$

quae tamen, si certa quadam coefficientes a, b, c, d, e, f cohaereant ratione, ad secundum ipsa quoque gradum reducitur. Apparet enim primitivis

$a + bu + cv + duv = o$	respondere	$c + du + av + bvu = o$	(77)
$a + cv + duv + fv^2 = o$		$f + cv + duv + av^2 = o$	(78)

Quod, si coordinatas u ac v orthogonales esse statuimus, nos docet: Si primitiva fuerit sectio aliqua conica, universe quidem lineam ei ex affinitate nostra respondere gradus quarti, fieri tamen interdum, ut analoga quoque sit sectio conica: primitiva enim si fuerit hyperbola aequilatera D B F G A E (fig. 6), cujus asymptotae D E et F G sint axibus XX' et YY' parallelae, analogam ei relatio (77) monet respondere hyperbolam D'' B'' A' G'' F'' E'', cujus asymptotis D'' E'' et F'' G'' eadem contingat directio (*); primitiva autem si fuerit hyperbola aliqua F H X' X J G (fig. 9), cui axis XX' alterutrius asymptotae partes agat, analogam ei relatio (78) docet respondere hyperbolam F' H' X' X J' G', eodem axe XX' ipsam quoque asymptota gaudentem. Certa autem constantium a, b, c, d, f definitione prodit simpliciorum linearum analogia; sit e. g. in relatione (78) c = o: utraque hyperbola, et primitiva et analoga, hactenus accuratius definitur, quod ejus asymptotam F C G vel F' C' G' punctum O transgredi oportet, punctumque adeo istud utrique hyperbolae esse centrum.

Quod jam ad reliquas attinet algebraicas, quae sibi ex affinitate nostra respondent, inter coor-

(*) Qua tamen in re attendendum, ob aequationum (36) ac (77) dissimilitudinem fore ut uni alicui primitivae, nisi statuas esse c = d ac a = b, alia e superioris, alia e nostri capitis affinitate respondeat hyperbola. Hyperbola e. g. D B F G A E (fig. 6) cum hyperbola D' B' F' G' A' E' aequationibus cohaeret $xx' = 1$ $yy' = 1$, cum hyperbola vero D'' B'' A' G'' F'' E'' aequationibus $x = x'$ $yy' = 1$.

dinatas u, v, u', v' aequationes, lineae his in orthogonalium coordinatarum systemate designantur haud ita simplices: ellipsi e. g. hyperbolaeve $a^2x^2 \pm b^2y^2 = a^2b^2$, cujus centrum ipsum occupat coordinatarum initium O, cujus autem axes cum axibus XX' et YY' congruunt, linea quarti gradus respondet nec satis usitata $a^2x^2y^2 \pm b^2 = a^2b^2y^2$. Quare universe tantum moneamus, algebraicam inter coordinatas u ac v interve coordinatas u' ac v' aequationem algebraicae, transcendentem transcendenti respondere inter analogas coordinatas aequationi, siquidem fieri nequeat, ut algebraica substitutione $v' = \frac{1}{v}$ vel $v = \frac{1}{v'}$ circularis aliave transcendens functio in alterutram aequationem irrepat, si in altera non fuerit; h. e. —— si ad orthogonales transgredimur coordinatas x et y —— ut in superiore capite, ita hic quoque fore ut, prout primitiva vel ad *algebraicas* quas dicunt vel ad *transcendentes* pertinuerit lineas, idem sit de analoga dicendum.

Inter algebraicas autem istas aequationes erunt bene multae, quae, si ad analogas iis ex affinitate nostra transeas aequationes, nullam nisi mutati coefficientium ordinis subeant mutationem: quas universa haec complectitur aequatio

$$au^m v^n + bu^m v^{-n} + cu^p v^q + du^p v^{-q} + \text{etc.} \ldots = o \quad (79)$$

cui aequatio respondet

$$au^m v^{-n} + bu^m v^n + cu^p v^{-q} + du^p v^q + \text{etc.} \ldots = o$$

In cujusmodi si incideris aequationem, coordinatam u in $u_1 = u + g$ mutare licet, modo eandem illam subeat analoga mutationem, h. e. —— si ad orthogonales transimus coordinatas —— primitivam licet qualibet ab axe YY' removere distantia, modo forma ejus situsque intacti ceteroquin maneant; nec aliam analoga, nisi similem ab axe YY' remotionem, subibit mutationem. Parabola e. g. $y = ax^2$ sive DOE (fig. 3) si sinistrorsum eousque movetur, donec aequatione indicetur $y = a(x + g)^2$, h. e. donec vertex ejus punctum axis XX' occupaverit P, cujus distantia ab O sit $g = OP$, parabola huic respondet $y(x + g)^2 = {}^1/a$, ita orta, quod similem ab axe YY' remotionem $g = OP$ subiit parabola $x^2y = {}^1/a$ sive EDGF (fig. 4). Similis vero ab axe XX' remotio analogae formam plane subvertit.

Missis igitur algebraicis, de transcendentibus videamus aequationibus. Qua in re attendendum, non esse nostra in affinitate mutuam illam, quam superiore capite inter coordinatas u ac v vidimus exstitisse symmetriam. Quare distinguendum inter duo haecce transcendentium aequationum genera:

$$u = f\,[F(v),\ \mathit{F}(v),\ \phi(v),\ \ldots] \quad (80)$$

$$v = f\,[F(u),\ \mathit{F}(u),\ \phi(u),\ \ldots] \quad (81)$$

(designante f algebraicam, F, F, φ contra transcendentes quaslibet functiones).

Quod primum ad aequationem (80) attinet, nostrae affinitatis substitutione $v' = \frac{1}{v}$ diversissimam plerumque nanciscitur illa formam, ut aequationes nos docent

$$u = a.\ \sin.\ v + b.\ \cos.\ v + \ldots$$

$$u = a.\ e^{v} + b.\ e^{-v} + \ldots$$

quibus aequationes respondent, a primitivarum forma plane abhorrentes

$$u = a.\ \sin.\ \left(\frac{1}{v}\right) + b.\ \cos.\ \left(\frac{1}{v}\right) + \ldots$$

$$u = a.\ e^{\frac{1}{v}} + b.\ e^{-\frac{1}{v}} + \ldots$$

Neque adeo nisi raro fit, ut primitiva, si aequationis (80) formam referat, nullam affinitate nostra nisi mutati constantium ordinis subeat mutationem; quod tamen fieri interdum posse, aequationes nos docent

$$u = (a - b)\ \lg.\ v \qquad (82)$$

$$u = a.\ \mathrm{arc.\ tg.}\ (v) + b.\ \mathrm{arc.\ cotg.}\ (v) + c.\ \mathrm{arc.\ sin.}\ (v) + d.\ \mathrm{arc.\ cosec.}\ (v) + \ldots \qquad (83)$$

quibus respondent aequationes

$$u = (a - b)\ \lg.\ \left(\frac{1}{v}\right) = (b - a)\ \lg.\ v$$

$$u = b.\ \mathrm{arc.\ tg.}\ (v) + a.\ \mathrm{arc.\ cotg.}\ (v) + d.\ \mathrm{arc.\ sin.}\ (v) + c.\ \mathrm{arc.\ cosec.}\ (v) + \ldots$$

Quod vero ad aequationem (81) attinet, — si functionem f statuimus transcendentium functionum additionem divisionemque significare formamque adeo praebere hancce

$$v = \frac{h + a.\ F(u) + b.\ \mathit{F}(u) + c.\ \varphi(u) + \ldots}{k + d.\ F(u) + e.\ \mathit{F}(u) + g.\ \varphi(u) + \ldots} \qquad (84)$$

nihil aliud ad analogam aequationem transitio offeret ei mutationis, nisi quod numeratorque divisorque locum suum invicem mutent, analogaque igitur ei respondeat aequatio

$$v = \frac{k + d.\ F(u) + e.\ \mathit{F}(u) + g.\ \varphi(u) + \ldots}{h + a.\ F(u) + b.\ \mathit{F}(u) + c.\ \varphi(u) + \ldots}$$

quae, si eaedem in divisore quae in numeratore occurrant functiones transcendentes F, F, φ, a primitiva nisi mutato coefficientium a, b, ... k ordine non discrepat.

Ad orthogonales jam si redimus coordinatas x et y, nullam videmus esse inter transcendentes lineas usitatas, cui similis respondeat analoga, una tantummodo excepta logarithmica $x = a.\ \lg.\ y$ sive X'BD (fig. 10), cui aliam respondere aequatio (82) nos docet logarithmicam $x = -\ a.\ \lg.\ y$ sive XBE, a primitiva non forma, sed situ tantum diversam. Logarithmicae contra $y = a.\ \lg.\ x$

linea respondet diversae formae $y \text{ lg. } x = \frac{1}{u}$; sinussoidibus item $x = \sin. y$ vel $y = \sin. x$ diversae ab his lineae respondent $x = \sin. \left(\frac{1}{y}\right)$ vel $y = \text{cosec. } x$.

Haec jam de transcendentibus lineis sufficiant. Unum tantummodo affinitatis nostrae addamus exemplum: Primitivam enim n rectarum partibus interclusam esse statuamus: quarum cuique quum hyperbola respondeat, cui axis XX' rectaque huic perpendicularis sint asymptotae, (sicut relatio (76) nos supra monuit), primitivo apparet n — gono n — gonum respondere ut ita dicam hyperbolicum seu figuram, n istiusmodi hyperbolarum partibus conflatam: quam si ipsam quoque rectarum linearum partibus constare velis, primitivam rectarum alterutri axi parallelarum intersectione ortam esse oportet.

Quae autem e generali capitis nostri affinitate —— $u = u'$, $vv' = 1$ —— nostra coordinatarum u et v definitione orta est affinitas —— $x = x'$, $yy' = 1$ —— potest illa quoque (quod affinitatem $xx' = 1$ $yy' = 1$ potuisse supra vidimus) aequationibus indicari inter analogas utriusque figurae polares coordinatas r, ϕ, r', ϕ. Habemus enim:

$$x' = x \qquad y' = {}^1/y$$

$$\frac{x'}{y'} = xy$$

$$\text{cotg. } \phi' = (\text{r. cos. } \phi)(\text{r. sin. } \phi)$$

$$\phi' = \text{arc. cotg. } (r^2 . \sin. \phi \cos. \phi).$$

$$\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)} = \frac{\sqrt{\left(x^2 y^2 + 1\right)}}{y}$$

$$r' = \frac{\sqrt{(r^4 . \sin^2 . \varphi . \cos^2 . \varphi + 1)}}{\text{r. sin. } \varphi}$$

quibus tamen aequationibus non eandem inesse simplicitatem apparet, atque illis, quibus affinitatem $xx' = 1$ $yy' = 1$ supra indicavimus. Neque igitur, quanam ratione ex affinitate nostra functiones $\frac{dr}{d\varphi}$, $r \frac{d\phi}{dr}$, $r^2 \frac{d\varphi}{dr}$ cum analogis functionibus cohaereant, inquirere satis operae pretium foret.

Ad generalem capitis nostri redeamus affinitatem $u = u'$ $vv' = 1$. A qua diversam esse illam affinitatem patet, quae formulis indicatur $uu' = 1$ $v = v'$. Postremae tamen hujus affinitatis naturam ut inquiramus, non opus erit, ut omnia quae hocce capite investigavimus denuo retractemus: quum enim coordinatarum u et v naturam indefinitam reliquerimus nullaque adeo sit caussa, cur altera coordinata alteri praestet, facile patet, mutua literarum u et v permutatione omnia illa, quae de affinitate $u = u'$ $vv' = 1$ hocce capite monuimus, in affinitatem posse $uu' = 1$ $v = v'$ transferri. Est autem, quo ambae affinitates cohaereant. Figura enim si est aliqua A sive $f(u, v) = o$, cui analogas quaerimus e tribus nostris affinitatibus figuras,

$$\text{ex affinitatibus}\ \left|\begin{array}{ll} uu' = 1 & vv' = 1 \\ u = u' & vv' = 1 \\ uu' = 1 & v = v' \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{respondet} \\ \text{ei figura} \end{array} \left|\begin{array}{ll} f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) = o & (B) \\ f\left(u, \frac{1}{v}\right) = o & (C) \\ f\left(\frac{1}{u}, v\right) = o & (D) \end{array}\right.$$

Figurae jam C quaeramus quaenam ex affinitate $uu' = 1 \quad v' = v'$, figurae contra D quaenam ex affinitate $u = u' \quad vv' = 1$ respondeat figura: utrique respondens prodit rursus figura B. Transformatio igitur illa, quam figura aliqua subeat necesse est, ut in figuram sibi e capitis primi affinitate congruam abeat, conjunctionem repraesentat transformationum, quae ex affinitatibus $u = u' \quad vv' = 1$ ac $uu' = 1 \quad v = v'$ eidem offeruntur: neque refert hac in re, quonam ordine transformationes $u = u' \quad vv' = 1$ ac $uu' = 1 \quad v = v'$ sibi successerint: eadem semper prodit figura B; quamvis ipsas figuras C ac D a se diversas esse patet.

CAPUT III.

DE FIGURARUM AFFINITATE, QUAE INDICATUR AEQUATIONIBUS
$\varphi = \varphi' \quad rr' = 1.$

De quā superiore capite vidimus generali figurarum affinitate, aequationibus indicata $u = u \quad vv' = 1$, de eadem rursus hocce capite agamus, sed coordinatis u et v alium atque supra induamus significatum; non enim jam orthogonales, sed polares contra designent illae coordinatas. Coordinata enim v longitudinem denotet r, quae puncti alicujus C (fig. 1) radio vectori O C contingit, sive puncti cujuslibet C figurae propositae distantiam indicet O C a certo quodam puncto fixo sive *polo* O. Coordinata contra u magnitudinem φ designet anguli C O B, quem radius ille vector O C cum recta quadam fixa O X facit; qua igitur a recta in angulo φ computando exeamus, sive quae *recta* sit angulo φ *initialis*.

Quibus positis, omnia illa quae de mutua elementorum de mutuave coordinatarum functionum analogia superiore capite vidimus, intacta nostro loco remanent, quod ad formulas attinet analyticas, sed alium induunt significatum; quare geometricae primitivae figurae proprietates alia ratione e nostra, alia e superioris capitis affinitate, si ad analogam figuram transeas, commutantur. Quas igitur superiore capite reperimus formulas analyticas ut possimus nostri e coordinatarum systematis sensu interpretari, videamus, quidnam hoc loco sibi velint elementa eorumve series:

elementorum series		designant	
	$u = 0$		ipsam rectam O X, angulo ϕ initialem.
	$u = a$		rectam quamlibet, polum O pervadentem.
	$u = \infty$		metam, quo tendit recta, polum pervadens, innumerisque eum circumvolvens gyris.
	$v = 0$		ipsum polum O.
	$v = b$		circulum finitae magnitudinis, cui polus est centrum.
	$v = \infty$		cuncta puncta, quorum distantia est a polo infinita.

(designantibus a et b quanta quaelibet finita.)

Superioris igitur capitis si aequationes (44) et (45) attendimus, quamlibet videmus rectam, quae polum transeat, ipsam sibi ex affinitate nostra esse analogam: quemlibet autem circulum, cui in polo centrum sit, non ipsum quidem sibi, at alii tamen respondere circulo, cui ipsi quoque polus centri vices agat: et ipsum quidem polum cunctis respondere punctis, quorum sit distantia a polo infinita: e circulis autem istis esse duos, $r = +1$ ac $r = -1$ —— qui hoc loco eundem occupant locum circulosque indicant, quibus radius sit, unitatem longitudinis aequiparans —— qui ipsi sibimet respondeant: horumque veram esse analogiam seu talem, qua quodlibet eorum punctum ipsum sibi sit analogum: analogiam contra, qua recta polum transiens ipsa sibimet respondeat, ita esse intelligendam, ut quodlibet ejus punctum, nisi forte in circulo $r = \pm 1$ jaceat, alii respondeat ejusdem rectae puncto.

Ex hac serierum analogia proprietates possumus affinitatis nostrae nonnullas enunciare, quae ad figurarum situm pertinent: primitiva enim quoties rectam initialem O X aliamve quamdam, quae polum transeat, offendit rectam, toties eandem rectam offendet analoga: primitiva quoties circulum $r = \pm 1$ offendit, toties eundem circulum offendet analoga et in iisdem quidem atque primitiva punctis: primitiva quoties polum transit vel saltem infinite ei appropinquat, toties altera a polo infinite distabit.

Ad ipsorum elementorum significatum definiendum procedamus, ac primum quidem de elementis videamus, quibus est $u = \infty$. Cujusmodi in elementis ita demum altera coordinata v definitum aliquem nanciscetur valorem, si primitiva ad certas quasdam pertinuerit *spiralium* quae dicuntur *linearum*, h. e. si primitiva hujusmodi indicetur aequatione $r = f(\phi)$, quae, angulo ϕ in infinitum aucto, certam aliquam radio vectori praebeat magnitudinem $r = f(\infty) = p$; sin primitiva ad vulgares sive algebraicas pertinuerit lineas, ejusque adeo aequatio fuerit ejusmodi, ut radius vector circulari aliqua aliave periodica anguli ϕ functione indicetur, e. g. $r. = \sin. \phi$, indefinitus erit qui infinita anguli ϕ auctione radio vectori tribuendus erit valor $r = \sin. (\infty)$ intraque certos quosdam limites fluctuabit. Superioris jam capitis aequationes (49) nos monent, primitivae elemento, in quo sit $u = \infty$, v autem recte definitum, elementum respondere analogae, in quo sit $u' = \infty$, v' rursus recte definitum; unde sequitur, ejusmodi contra primitivae elemento, in quo sit $u = \infty$, v indefinitus ac fluctuans, ambiguum item analogi elementi respondere valorem. Nostram igitur ejusmodi esse affinitatem apparet, ut, prout primitiva vel ad spirales quas dicunt vel ad algebraicas contra pertinuerit lineas, idem sit de analoga dicendum.

Quam jam aequationes (49) praebent mutuam elementorum, quibus est $u = \infty$ vel $u' = \infty$, analogiam, nullius esse in algebraicis lineis momenti apparet; non item in lineis spiralibus. Quod enim

$$\text{elementis} \left| \begin{array}{ll} \phi = \infty & r = o \\ \phi = \infty & r = \infty \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{respondeant} \\ \text{elementa} \end{array} \left| \begin{array}{ll} \phi' = \infty & r' = \infty \\ \phi' = \infty & r' = o \end{array} \right.$$

nos docet: si analogarum figurarum alterutri polus O fuerit punctum ut dicitur asymptotum, h. e. si polum magis magisque figura nostra appropinquet, nec tamen ad eum nisi post innumeros peractos gyros perveniat, alteram contra figuram innumeris polum circumvolvi gyris ab eoque magis magisque recedere. Quod autem elemento

$$\phi = \infty \quad r = b \quad \text{respondeat} \quad \phi' = \infty \quad r' = 1/b$$

nos docet: si circulus aliquis $r = b$, cui polus centrum, fuerit primitivae *circulus* ut ita dicam *asymptotus*, h. e. si primitiva, innumeris polum gyris circumvolvens, circulum $r = b$ magis magisque appropinquare cum circuloque isto magis magisque coalescere studeat, idem fore de analoga in analogum circulum $r' = 1/b$ sensim paullatimque abeunte dicendum (*).

Quod jam ad elementa attinet, quibus est $v = o$ vel $v' = o$, in his distinguendum, sitne polus analogarum figurarum alterutri *punctum* ut dicitur *asymptotum* necne: si priore modo se res habet, nihil est, quo elementorum, quibus est $v = o$, significatus prae reliquorum elementorum significatu praestet, siquidem elementum quoque $v = o$, $u = o$ vel $= a$ vel $= \infty$ primitivae situm quidem definit, non vero definit directionem: neque adeo mutua elementorum, quibus est $v = o$ vel $v' = o$, analogia satis digna est, quam accuratius attendamus. Sin polus non fuerit primitivae punctum asymptotum, h. e. si, coordinata r minimum quemvis nanciscente valorem

(*) Exemplum praebent lineae sibi analogae $r\varphi + b\varphi + a = o$ ac $\varphi + br\varphi + ar = o$.

$r = \omega$, altera coordinata $\phi = $ p mutationem subeat infinite parvam, —— angulus iste ϕ, quem elementi $r = \omega$, $\phi = $ p radius vector cum recta OX facit, ipsum eundem indicat angulum, sub quo figura nostra rectam OX in polo secat; elementumque adeo, cui est $r = $ o vel saltem infinite parvus, figurae non tantum situm, sed directionem quoque denotat. Punctis igitur in polo asymptotis si analogas figuras carere statuas,

elementorum	$\phi = o \quad r = o$ $\phi = a \quad r = o$	cum elementis	$\phi' = o \quad r' = \infty$ $\phi' = a \quad r' = \infty$

analogia, aequationibus (49) indicata, nos certiores facit: prout analogarum figurarum alterutra vel rectam initialem XX' rectamve huic saltem parallelam asymptotam habuerit (*) vel contra asymptotam habuerit, quae rectam XX' angulo magnitudinis *a* (†) secarit, analogam vel rectam XX' in polo tangere vel contra eandem rectam angulo *a* in polo transire. At vicissim, si primitiva angulo quodam polum transierit, analogae fore asymptotam, primitivae directioni seu rectae tangentiali parallelam, ex aequationibus (49) efficere non licet, nisi antea analogae directionem h. e. functionum $r \frac{d\varphi}{dr}$ et $r' \frac{d\varphi'}{dr'}$ analogiam investigaverimus.

Quod jam ad reliquas attinet aequationum (49), mutua nos elementorum

$$\phi = a \quad r = b \quad \text{ac} \quad \phi' = a \quad r' = {}^1/b$$

analogia certiores facit: quoties primitiva finite a polo distarit, toties idem esse de analoga dicendum, ita quidem ut in eodem radio vectore analoga analogarum figurarum puncta sita sint.

Hisce igitur de analogia monitis, qua elementa eorumque series in analogis cohaereant secum figuris, de coordinatarum u et v affirmativo negativoque jam videamus signis. Coordinatis igitur u et v valores quosdam tribuamus u = GOX, v = OG (fig. 2): vidimus jam

elementa	u = + GOX v = + OG	designare	punctum G, in ipso radio vectore OG situm.
	u = + GOX v = — OG		—— K, in altera radii vectoris OG parte situm.
	u = — GOX v = + OG		—— L, in recta situm OL, quae angulum cum OX facit LOX = GOX, modo opposita directione in angulo computando procedas.
	u = — GOX v = — OG		—— F, in rectae OL altera parte situm.

(*) *Litui* e. g. sive spiralis $r^2\varphi = a$ asymptota OX ejusdem rectae tactioni respondet, qua *parabolica* spiralis $r^2 = a\varphi$ eam in polo tangit. *Hyperbolicae* autem spiralis ramus EF (fig. 12) respondet *Archimedicae* spiralis ramo DO (fig. 11), rectam OX in polo tangenti.

(†) Exempla praebent hyperbolae asymptotae DE et FG (fig. 14) rectave DE, quae ipsa sibimet est asymptota (fig. 13), obliquis respondentes poli a lemniscata (fig. 14) vel a circulo (fig. 13) transitionibus.

Quum tamen, ubi de polaribus coordinatis sermo est, illa tantum considerari soleant puncta, quibus et r et ϕ sint positiva, nos quoque brevitatis caussa et u et v positiva semper esse hocce capite statuemus; unde, ob aequationes (10) capitum I ac II, eandem signorum definitionem in analogis quoque obtinere coordinatis u' et v' sequitur. Quibus positis, aequationes (50) nostro loco huc redeunt: Prout primitiva vel hac vel illa directione polum circumvehitur, h. e. vel directione $Y'HCKG$ (fig. 1) vel contra $GKCHY'$ procedat, idem analogae contingere: prout vero primitiva polum vel appropinquet vel ab eo recedat, analogam contra vel a polo recedere vel eundem appropinquare.

Quod porro ad coordinatarum attinet productum atque quotientem, quorum mutuam analogiam nos aequationes (43) docent, non inerit iis hoc loco aliquid satis memoratu dignum. Quare haec jam mittamus et ad differentiales coordinatarum functiones transeamus. Quarum hic erit hoc loco significatus:

functiones	$\frac{dv}{du}$	designant	subnormalem polarem $\frac{dr}{d\varphi}$
	$v\,\frac{du}{dv}$		tangentem $r\frac{d\varphi}{dr}$ anguli OCB (fig. 1) quem recta tangentialis AB cum radio vectore OC facit
	$v^2\,\frac{du}{dv}$		subtangentem polarem $r^2\,\frac{d\varphi}{dr}$

Functio autem $\frac{u}{v}\,\frac{dv}{du}$ aliaeve functiones, quarum analogia aequationibus (51—56) consideratur, non sunt hoc loco magni momenti. Nostro igitur in coordinatarum systemate functionis $v\,\frac{du}{dv}$ majorem quam reliquarum esse rationem habendam apparet; quare primum videamus de aequatione (53): quae nos docet, esse ex affinitate nostra

$$r\,\frac{d\varphi}{dr} = -\,r'\,\frac{d\varphi'}{dr'}$$

h. e. tangentem anguli, quem in primitiva radius vector cum recta tangentiali faciat, ab analogo alterius figurae tangente non magnitudine, sed signo tantum discrepare, ipsosque adeo angulos esse alterum alterius supplementum sive utriusque semper summam 180 gradus conficere. Sequitur inde

$$\text{si sit}\;\left|\begin{array}{l} r\,\frac{d\varphi}{dr} = \pm\,\infty \\ r\,\frac{d\varphi}{dr} = \pm\,0 \end{array}\right|\;\text{fore}\;\left|\begin{array}{l} r'\,\frac{d\varphi'}{dr'} = \mp\,\infty \\ r'\,\frac{d\varphi'}{dr'} = \mp\,0 \end{array}\right.$$

h. e. si primitivae recta tangentialis cum radio vectore congruat vel saltem ei sit parallela, idem esse de analoga statuendum; sin primitivae recta tangentialis radio vectori fuerit perpendicu–

laris (*), eandem perpendicularitatem in analoga inveniri figura. Apparet porro

si velimus esse $\left| \begin{array}{l} r \dfrac{d\varphi}{dr} = r' \dfrac{d\varphi'}{dr'} \\ \left(r \dfrac{d\varphi}{dr}\right) \left(r' \dfrac{d\varphi'}{dr'}\right) = -1 \end{array} \right|$ requiri ut sit $\left| \begin{array}{l} r \dfrac{d\varphi}{dr} = 0 \\ r \dfrac{d\varphi}{dr} = +1 \text{ vel } -1 \end{array} \right.$

h. e. si primitivam velimus analogae esse in analogo puncto perpendicularem, requiri ut ejus ibi radius vector a recta tangentiali sub angulo + 45 vel — 45 graduum secetur (†), sin primitivam analogae parallelam procedere velimus, requiri ut utriusque recta tangentialis vel radio vectori sit perpendicularis vel cum radio vectore congruat sive sit eidem parallela.

Haec jam si cum illis conferamus, quae supra nos mutua elementorum eorumve serierum analogia docebat, sequi inde videmus: Primitiva quoties, finita a polo distantia, rectam angulo φ initialem OX aliamve quamdam rectam, quae polum pervadat, tetigerit vel obliquo angulo a secaverit vel tandem fuerit ei perpendicularis, analoga eandem rectam, prout horum unum alterumve obtinuerit, vel tanget vel obliquo sub angulo secabit $180^0 - a$ vel tandem erit ei perpendicularis. Primitiva si, ubi certum aliquem valorem $\varphi = a$ angulus φ nactus sit, polum pervadat, h. e. si fuerit ei $r = 0$, $\varphi = a$, $r \frac{d\varphi}{dr} = 0$, analogae figurae erit $r' = \infty$, $\varphi = a$, $r' \frac{d\varphi'}{dr'} = 0$, h. e. asymptota ei erit, rectam initialem angulo secans a, —— quod supra (pag. 48) dubium relinquebatur ——; polumne vero transeat illa asymptota necne, dubium etiamnunc remanet, eritque hujus rei investigatio ad functionum $\frac{dr}{d\varphi}$ et $\frac{dr'}{d\varphi'}$ analogiam, de qua infra agemus, remittenda. Primitiva jam polum infinite quidem appropinquet, non tamen ad ipsum nisi post innumeras peractas circumvolutiones accedat; analoga infinite quidem a polo recedet nec tamen polum circumvolvi desinet, ut supra jam vidimus (pag. 47). Quae tamen, differentialium functionum analogiae ope, accuratius definire licet. Primitivae enim sit $r = 0$, $r \frac{d\varphi}{dr} = \infty$, h. e. polus ei ita sit punctum asymptotum, ut, quo magis polum appropinquet, eo magis in poli circumvolutionem abeat ista ad polum appropinquatio —— analogae erit $r' = \infty$, $r' \frac{d\varphi'}{dr} = \infty$, h. e. innumeris illa gyris a polo infinite recedet, quibus tamen inesse a polo recessionem minus minusque fiet perspicuum (§). Primitivae contra sit $r = 0$, $r \frac{d\varphi}{dr}$ finitum, h. e. ejusdem ad polum appropinquatio nec in poli circumvolutionem

(*) Exempla praebent hyperbolae vertices H et J (fig. 14), lemniscatae verticibus H' et J' respondentes, vel rectae DE punctum F (fig. 13), circuli OGK puncto K analogum.

(†) Exempla praebent punctum circuli G punctumque analogae rectae E (fig. 13).

(§) Exempla praebent poli ab *hyperbolica* spirali circumvolutiones (fig. 12), *Archimedicae*que spiralis gyri, a polo infinite distantes (fig. 11).

nec in poli transitionem umquam abeat —— analogae item gyris numquam circumvolutionum fore asymptotarumve fore umquam naturam patet, siquidem erit $r' \frac{d\varphi'}{dr'}$ quoque finitum (†). Sit tandem $r = o$, $\phi = \infty$, $r \frac{d\varphi}{dr} = o$, h. e. primitiva post innumeros peractos gyros polum tandem transvadat; huic puncti asymptoti cum ejusdem puncti transitione conjunctioni respondet similis in analoga figura asymptotarum naturae cum innumeris gyris conjunctio, h. e. erit ei $r' = \infty$, $\phi' = \infty$, $r' \frac{d\varphi'}{dr'} = o$; eaque erit adeo meta, quo tendant analogae figurae gyri, ut ramus fiat tandem, asymptotam juxta in infinitum excurrens.

Ut jam ad differentialium functionum signa $\pm$ transeamus, superioris capitis aequationes (62) ac (63) parva illa afficiamus mutatione, ut pro $\frac{dv}{du}$ ac $\frac{dv'}{du'}$ — quae minoris esse hoc loco momenti videbamus —— functiones substituamus $v \frac{du}{dv}$ ac $v' \frac{du'}{dv'}$; quae mutatio non obstabit, quominus intactae subsistant aequationes (62) ac (63). Docet igitur nos aequatio (62):

$$\text{prout sit} \left| \begin{array}{l} r \frac{d\varphi}{dr} > o \\ r \frac{d\varphi}{dr} < o \end{array} \right| \text{fore} \left| \begin{array}{l} r' \frac{d\varphi'}{dr'} < o \\ r' \frac{d\varphi'}{dr'} > o \end{array} \right.$$

h. e. si primitiva radium suum vectorem directione quadam secet S T (fig. 1), oppositam fore rationem, qua radium illum vectorem secet analoga P R. Aequationes autem (63) nos monent: si primitiva sinum confecerit, vel polum versus vel in alteram contra partem spectantem, fore ut analogus contra analogae sinus vel a polo recedat vel polum spectet (*); sin primitivae sinus circulum spectarit, radio suo vectori perpendicularem, similem fore analogi sinus situm.

Ad aequationem (51) jam transeamus: quae nos docet, esse hoc loco

$$\frac{dr'}{d\varphi'} = - \frac{dr}{r^2 \, d\varphi}$$

$$\frac{dr'}{r'^2 \, d\varphi'} = - \frac{dr}{d\varphi}$$

polaremque adeo primitivae subnormalem, si cum polari analogae subtangente, vel primitivae subtangentem, si cum analogae subnormali multiplicetur, productum proferre, quod sit $= -1$. In his autem primitivae punctis, quae in circulo $r = \pm 1$ sita sunt, quum unitatis per subnormalem quotientem aequiparet subtangens, siquidem est ibi $r^2 \frac{d\varphi}{dr} = (1)^2 . \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)}$ —— analogiam modo memoratam apparet, ubi circulum $r = \pm 1$ analogae figurae offendant, ita

(†) Exempla praebent analogarum logarithmicarum spiralium innumeri gyri, a polo infinitae magnitudinis vel parvitatis distantia distantes.

(*) Exempla praebent hyperbolae sinus GHD et EJF (fig. 14) quibus analogi sinus lemniscatae H' et J' in contrarium partem spectant.

posse enunciari, ut primitivae subtangens a subtangente analoga vel primitiva subnormalis ab analoga analogae functione non magnitudine sed signo tantum discrepet.

Ex aequatione autem (51) secutas olim esse vidimus aequationes (57); quas si non in $\frac{dv}{du}$ tantum, sed in alteram quoque functionem $v^2 \frac{du}{dv}$ adhibeas atque e nostri deinde coordinatarum systematis sensu interpretaris, apparet, nostram esse affinitatem ejusmodi, ut in punctis quae a polo finite distent, polaris analogae subtangens vel subnormalis sit vel infinitae vel finitae magnitudinis vel infinitae tandem parvitatis, prout in primitivae subtangente subnormalive res se habeat. Quam eandem analogiam inde quoque efficere potuisses, quod, si primitivae tangens vel radium vectorem occupet vel sit eidem perpendicularis, idem de analogae tangente esse ex affinitate nostra dicendum supra vidimus. Ex eadem aequatione (51) secutas esse vidimus praeterea aequationes (58); quas si simili ratione non in $\frac{dv}{du}$ tantum, sed in $v^2 \frac{du}{dv}$ quoque adhibuerimus e nostraque deinde coordinatarum u et v definitione simus interpretati, sequitur inde haec inter analogas utriusque figurae subtangentes analogasve inter subnormales relatio: Primitivae si in ipso polo subnormalis contingat finitae infinitaeve magnitudinis, utroque casu infinita erit subnormalis, analogae in analogo puncto infinite distanti contingentis, magnitudo: primitivae in ipso rursus polo si subtangens sit finitae infinitaeve magnitudinis, analoga alterius figurae in analogo puncto subtangens $r'^2 \frac{d\varphi'}{dr'}$ erit $= -\frac{d\varphi}{dr} = -\left(\frac{r^2 d\varphi}{dr}\right) \times \frac{1}{r^2} = -r^2 \frac{d\varphi}{dr} \times \infty$ adeoque $= \infty$; eademque ratione patet, si in puncto a polo infinite distante subnormalis primitivae ejusdemve subtangens fuerit finitae infinitaeve parvitatis, infinitam fore parvitatem, quae analogae in ipso polo subnormali vel subtangenti contingat. Aequationes contra (59), si in ipso polo primitivae subtangens fuerit subnormalisve $= 0$, ambigua esse analogam analogae figurae subtangentem subnormalemve nos monent magnitudine, nisi rem accuratius investiges, eandemque esse ambiguitatem, si in puncto a polo infinite distante infinita magnitudo contigerit primitivae subnormali vel subtangenti.

In istiusmodi igitur punctis, ubi ambigua sit mutua analogarum subnormalium mutuave subtangentium relatio, ad aequationem (51) erit redeundum; eritque e magnitudine, quae alterius figurae subnormali vel subtangenti contingat, analogae in altera figura subtangentis vel subnormalis definienda magnitudo. Ex his apparet, quaestionem quae supra se nobis offerebat, *si polum primitiva transeat, polumne transeat respondens huic poli transitioni asymptota analoga necne*, aequationis (51) ope ita posse dirimi: prout polum transeunti primitivae polaris contingat subnormalis vel infinitae vel finitae contra magnitudinis vel tandem infinitae parvitatis, fore ut analogae in puncto analogo, a polo infinite distante, subtangens contingat vel infinite parva vel contra finita vel tandem infinita, h. e. ut analoga analogae figurae asymptota vel polum transeat vel contra, ubi finita facta sit ejus a polo distantia, polum non amplius appropinquet, vel tandem infinita semper a polo distet distantia. Sin polum quidem transire novimus primitivam, at incognita nobis sit ejus natura ejusque adeo quoque subnormalis, analogae asymptotae a polo distantiam ambiguam relinquit aequatio (51); neque prodest ibi, ut ad aequationes (58) et (59) confugiamus: quum enim, si polum primitiva transit, sit semper $r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \mathrm{o}$ eoque magis $r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \mathrm{o}$, aequationes autem (59), si hoc fiat, ambiguam esse subtangentis $r'^2 \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}r'}$ magnitudinem doceant, facile apparet, nullum, si ita se res habeat, afferre adjumentum mutuam subtangentium analogiam, aequationibus (58) et (59) indicatam, sed accuratiorem rei investigationem requiri.

Ad analogiam jam tractandam procedamus, qua cohaerent ex affinitate nostra differentiales coordinatarum functiones ordinis secundi. Superioris igitur capitis aequationes (65—71) si nostri e coordinatarum systematis sensu interpretari velimus, nihil prodibit satis memoratu dignum, siquidem non inest functioni $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2}$ functionive $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2}$ significatus, unde geometricae profluant figurarum proprietates satis memorabiles. Aequationes igitur istas parva hacce afficiamus mutatione, ut pro functione $\frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$ —— cujus minorem esse hocce capite rationem habendam supra vidimus —— functionem substituamus $\mathrm{v}' \frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$, neque adeo differentialem functionis $\frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$ quotientem $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}\right)}{\mathrm{dv}'}$ seu $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}'}{\mathrm{dv}'^2}$, sed functionis contra $\mathrm{v}' \frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$ mutationem consideremus $\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{v}' \frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}\right)}{\mathrm{dv}}$. Quod si fecerimus aequationemque (53) attenderimus, aequationem (70) hanc induere formam apparet:

$$\frac{\mathrm{d}\left(r' \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}r'}\right)}{\mathrm{d}r'} = \frac{\mathrm{d}\left(-r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)} = r^2 \times \frac{\mathrm{d}\left(r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)}{\mathrm{d}r}$$

aequationemque adeo (71) hunc in modum mutari:

$$\text{si sit } \frac{\mathrm{d}\left(r \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)}{\mathrm{d}r} = \mathrm{o}, \text{ fore } \frac{\mathrm{d}\left(r' \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}r'}\right)}{\mathrm{d}r'} = \mathrm{o}, \text{ modo sit } r \text{ finitum},$$

h. e. si primitiva alicubi finite a polo distarit, angulusque, quem ejus recta tangentialis ibi cum radio vectore faciat, nullam ibi subierit mutationem, similem requiri in analogo angulo constantiam. Unde tamen haud sequitur, si primitivae fuerit alicubi punctum inflexionis, analogum requiri ejusdem singularitatis punctum in analoga. Hujusmodi enim non exstare hoc loco analogiam, facile apparet, si mutuam attenderimus radiorum osculi analogiam. Primitivae enim radius osculi quum sit

$$\frac{\left[r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-r\,\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}}$$

analogus respondet huic radius osculi analogae

$$\frac{\left[r'^2+\left(\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}\varphi'}\right)^2\right]^{3/2}}{r'^2+2\left(\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}\varphi'}\right)^2-r'\,\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}\varphi'^2}}=\frac{\left[\frac{1}{r^2}+\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{1}{r^2}+2\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2\mathrm{d}\varphi}\right)^2-\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2\mathrm{d}\varphi}\right)}{\mathrm{d}\varphi}}=$$

$$=\frac{\left[r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}\times\left(\frac{1}{r^3}\right)}{\frac{1}{r^2}+2\left(\frac{\mathrm{d}r}{r^2\mathrm{d}\varphi}\right)^2-\frac{2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^3}\,\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}}=\frac{\left[r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^3\left(r+\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}\right)}$$

Mutua igitur differentialium secundi ordinis functionum analogia haud prodit hoc loco simplicem aliquam analogarum utriusque figurae proprietatum analogiam. Idem dicendum de coordinatarum functionibus integralibus. Superficiei e. g. $\int\frac{1}{2}\,r^2\mathrm{d}\varphi$ sive O H C (fig. 1), sive sectori, quem primitiva HC radiique vectoris OC rectaeque initialis OX ope includit, si analogam quaerimus superficiem, integralis prodit functio $\int\frac{1}{2}\,r'^2\mathrm{d}\varphi'=\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{2r^2}$.

Restat, ut in singularium punctorum ex affinitate nostra analogiam investigemus. Eadem jam ratiocinatio, qua in superiore capite usi sumus —— modo pro functione $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}$, quam minoris esse hoc loco momenti vidimus, functionem ubique $\mathrm{v}\,\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ sive $r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$ substituamus —— nos docet, nostra quoque ex affinitate, si primitivae fuerit punctum multiplex punctumve *interstitionis* vel punctum *a reliquis separatum* duorumve ramorum tactio vel *cuspis* vel tandem *mucro*, ejusdem requiri singularitatis punctum in analoga analogum, modo finita ibi sit coordinatarum v et v′ magnitudo, h. e. modo puncta ista finita a polo distarint distantia: sin non sit $\mathrm{v}=r$ finitum, accuratiorem requiri rei investigationem: puncto e. g. *a reliquis separato*, quod ipsum occupet polum, universam posse respondere finitae magnitudinis figuram, quae infinite a polo qualibet recesserit directione. Functionis autem $\mathrm{v}\,\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ pro functione $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}$ substitutione factum est, ut accuratior etiam e nostra affinitate oriatur punctorum singularium analogia, quam in superiore capite locum habuerit, siquidem functionum $\mathrm{v}\,\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ ac $\mathrm{v}'\,\frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$ arctior est quam functionum $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}$ ac $\frac{\mathrm{dv}'}{\mathrm{du}'}$ mutua relatio —— ut aequationes nos (51) ac (52) docent —— neque adeo valor coordinatae v infinitae parvitatis infinitaeve magnitudinis tollit functionum $\mathrm{v}\,\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$ ac $\mathrm{v}'\,\frac{\mathrm{du}'}{\mathrm{dv}'}$ analogiam; quare, si primitivae polus punctum fuerit asymptotum, mucrones, cuspidesve aliave puncta singularia in infinite parvis circum polum gyris similia requirunt ex affinitate nostra puncta singularia, quae in analogis poli circumvolutionibus a polo infinite distantibus reperiantur. Missis igitur singularibus hisce punctis, quorum cum analogis singularitatibus analogiam non tollit infinite parva eorum a polo distantia, de his tantum breviter videamus punctis singularibus, quibus ob infinite parvum coordinatae $v = r$ valorem non respondent analoga alterius figurae puncta singularia, h. e. quae ramorum polum transeuntium mutua intersectione oriuntur; quibus poli transitionibus asymptotas respondere alterius figurae supra vidimus; quare quaenam puncta in polo singularia quibusnam respondeant alterius figurae asymptotis, videamus.

Primitivae igitur sit una aliqua asymptota, quam ramus aliquis figurae vulgari persequatur ratione, h. e. a polo ramus ille magis magisque recedat, ab asymptota contra minus minusque distet, donec tandem, metam nactus $r + \infty$, $\phi = a$, asymptotam secet in alterumque asymptotae terminum $r = -\infty$, $\phi = a$ sive $r = +\infty$, $\phi = 180^{\circ} + a$ transsiliat poloque deinde rursus appropinquet: hujusmodi asymptotae respondebit alterius figurae punctum inflexionis, in ipso polo situm. Sin primitivae ramus, ubi metam nactus sit $r = +\infty$, $\phi = a$, in alterum quidem transsiliat asymptotae terminum, nec tamen asymptotam secet, sed a dextra semper a simistrave semper asymptotae parte maneat, hujusmodi primitivae ramo ramus respondebit alterius, polum transiens, punctis autem singularibus carens. Intermedia ratione si primivae ramus asymptotam persequatur —— quemadmodo in recta fit linea, quae ipsa sibimet est asymptota adeoque nec a dextra nec a sinistra asymptotae parte procedit, sed cum ipsa congruit —— analogus alterius figurae ramus polum nulla transit singularitate (*). Primitivam jam statuamus ad metam quidem pervenisse $r = +\infty$, $\phi = a$, at non posse eam transsilire, sed eodem rursus itinere, asymptota aut secta aut non secta, ad polum regredi; respondet alterius figurae *cuspis* sive punctum *flexus contrarii*, et *primi* quidem aut *secundi generis*. Primitivae tandem sit ramus in infinitum excurrens, nec ab altera asymptotae parte polum rursus appropinquans: respondet punctum *interstitionis*. Primitivae jam ponamus esse duas asymptotas, diversa directione procedentes, quas figura vulgari ratione persequatur: respondet alterius figurae punctum duplex (†); sin primitivae unus alterve ramus, ubi a polo infinite recesserit, in alterum transsilire asymptotae terminum poloque rursus appropinquare negligat, analogo alterius figurae duplici puncto est puncti

---

(*) Exemplum praebet circulus K O G (fig. 13), rectae D E respondens.

(†) Exempla praebet lemniscatae (fig. 14) centrum O, analogae hyperbolae asymptotis D E et F G respondens.

interstitionis singularitas addenda; quod si iteratur, punctum duplex in *mucronem* abit. Duas rursus fingamus primitivae asymptotas, sed quae sint sibi invicem parallelae: vulgari eas ratione si primitivae rami persequuntur, in altera figura tactionis erit singularitas; sin neuter primitivae ramus in alterum suae asymptotae transsiliat terminum, analoga in figura vel punctum flexus contrarii respondet (*) vel ramus singularitate carens. Idemque, quod de duabus asymptotis sibi parallelis monuimus, valebit item, si una aliqua sit primitivae *duplex* quae dicitur *asymptota*, h. e. quae duobus primitivae ramis communis sit asymptota.

Nonnullis jam exemplis ea quae de affinitate nostra hucusque attulimus illustremus. Primae se offerunt lineae, quarum mutuam analogiam nos superioris capitis aequatio (75) docet, sive quae generali indicantur aequatione $u = av^n$: cujusmodi aequationem, si u et v orthogonales designant coordinatas x et y, parabolas varii ordinis denotare supra vidimus; eadem vero, ubi de polaribus coordinatis sermo est, *spiralium* quae dicuntur *linearum* maxime usitatas indicat. Linearum igitur (75) analogiam si in nostrum locum transferimus, videmus cuilibet spirali

$$r = a\phi^n \text{ respondere spiralem } r\phi^n = {}^1/a$$

Sit e. g. $n = +1$: *Archimedicae* spirali $r = a\phi$ sive ODEF (fig. 11) hyperbolica spiralis $r\phi = {}^1/a$ sive DEF (fig. 12) respondet. Sit $n = +{}^1/_2$: parabolicae spirali $r^2 = a\phi$ spiralis respondet, cui aequatio $r^2\phi = {}^1/a$, cui autem nomen est *lituus*.

Quod jam ad reliquas attinet aequationes algebraicas, quarum mutuam analogiam superiore capite sumus persecuti, lineae iis e nostra coordinatarum u et v definitione indicantur haud usitatae. Quare hoc unice moneamus: quod superiore capite vidimus —— primitivae alicujus coordinatam u in $u_1 = u + g$ licere mutari, modo analogam item alterius figurae coordinatam u' in $u'_1 = u' + g$ mutemus —— hoc loco, ubi de polaribus coordinatis sermo est, nos docet, primitivam licere ita loco suo removeri, ut, puncto quod polum occupaverit ibidem remanente, reliqua figura quotlibet graduum circumvolutione polum circumvehatur, modo totidem graduum angulo analogam item figuram polum circumferamus. Archimedicam e. g. hyperbolicamque spiralem (fig. 11 et 12) si angulo $XOX'' = b$ polum circumferamus, sive —— quod eodem redit —— si rectam initialem OX alia quadam directione OX″ polum transire statuamus, quae ita oriuntur spirales $r = a(\phi + b)$ ac $(\phi + b)r = {}^1/a$ non minore secum quam spirales antea consideratae $r = a\phi$ ac $r\phi = {}^1/a$ conjunctae erunt affinitate.

(*) Hujus item analogiae bene multa occurrunt exempla e. g. in cissoidis circularisve cardioidis vertice, parabolae asymptotis parallelis respondente.

De transcendentibus igitur videamus inter coordinatas u et v aequationibus. Prima se offert superioris capitis aequatio (82), qua in nostrum locum translata, cuilibet videmus spirali logarithmicae $\varphi = \text{a lg. } r$ aliam ex affinitate nostra respondere logarithmicam $\varphi = -\text{a lg. } r$, a primitiva non forma sua discrepantem, sed hoc tantum quod directione, primitivae directioni opposita, procedat.

Superioris jam capitis aequationem (84) attendamus, et functiones quidem F, F, φ circulares esse statuamus. Quo facto, magnus se praebet nobis aequationum numerus, quoad coordinatas quidem u et v transcendentium, algebraicas autem indicantium lineas.

Sit e. g. primitiva recta quaedam $r = \text{a. sec. } (\psi - \text{b})$ sive D E (fig. 13): circulus respondet $r = (^1/\text{a}) \cos. (\psi - \text{b})$ sive O G K, polum transiens; centrum circuli C in recta situm est O F, quae a polo O in primitivam rectam D E perpendiculariter ducitur; recta autem primitiva, si $\text{a} = 1$, circulo est recta tangentialis; sin non $\text{a} = 1$, non ipsa quidem circulum tangit, at est tamen parallela tangenti H K, quae in perpendicularem O F perpendiculariter erigitur. Unde sequitur, si primitiva fuerit n–gonum seu mutua n rectarum intersectione orta fuerit, fore ut n circulorum polum transeuntium constet analoga singulorum singulis partibus; nisi primitivi latera statuas rectarum polum transeuntium fuisse partes: quo casu analogi item n–goni analoga latera curvedinem suam amittent in rectasque abibunt.

Primitiva jam sit hyperbola $r = \frac{\text{ab}}{\sqrt{(\text{b}^2. \cos. ^2\varphi - \text{a}^2. \sin. ^2\varphi)}}$, cui centrum sit ipse polus: respondet lemniscata $r = \left(\frac{1}{\text{ab}}\right) \sqrt{(\text{b}^2. \cos. ^2\varphi - \text{a}^2. \sin. ^2\varphi)}$ cujus ipsius quoque centrum polus occupat. Similique ratione procedentes, ex mutua aequationum

$r = \frac{\text{a}}{\sqrt{\cos. 2\,\varphi}}$	$r = \left(\frac{1}{\text{a}}\right) \sqrt{\cos. 2\,\varphi}$
$r = \frac{\text{ab}}{\sqrt{\text{b}^2. \cos. ^2\varphi + \text{a}^2. \sin. ^2\varphi}}$	$r = \left(\frac{1}{\text{ab}}\right) \sqrt{(\text{b}^2. \cos. ^2\varphi + \text{a}^2. \sin. ^2\varphi)}$
$r = \frac{\text{b}^2}{\text{a} + \sqrt{(\text{a}^2 \mp \text{b}^2) \cos. \varphi}}$	$r = \left(\frac{1}{\text{b}^2}\right) [\text{a} + \sqrt{(\text{a}^2 \mp \text{b}^2) \cos. \varphi}]$
$r = \frac{^1/_2\text{p}}{1 + \cos \varphi}$	$r = \left(\frac{2}{\text{p}}\right) (1 + \cos. \varphi)$
$r = \frac{2\ \text{ab}^2. \cos. \varphi}{\text{a}^2 \sin. ^2\varphi \mp \text{b}^2. \cos. ^2\varphi}$	$r = \frac{\text{a}^2 \sin. ^2\varphi \pm \text{b}^2 \cos. ^2\varphi}{2\ \text{ab}^2. \cos. \varphi}$
$r = \frac{\text{p} \cos. \varphi}{\sin. ^2\varphi}$	$r = \frac{\left(\frac{1}{\text{p}}\right) \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$
$r = \text{a} \sec. \varphi + \text{b}$	$r = \frac{1}{\text{a} \sec. \varphi + \text{b}}$
$r = \frac{\text{a}\varphi}{\sin. \varphi}$	$r = \frac{\sin. \varphi}{\text{a}\varphi}$

analogia hanc sequi videmus mutuam linearum ex affinitate nostra analogiam: Hyperbolam, de qua modo sermo erat, reddamus aequilateram: hyperbolae huic GHDEJF (fig. 14) analoga lemniscata in illam abit lemniscatam H′OJ′ (fig. 14), quae a *Fagnani* nomen habet sive cujus punctum in polo duplex ramorum sibi invicem perpendicularium mutua intersectione oritur. Hyperbolam in ellipsin mutemus, eodem tamen loco centrum maneat: figura respondet, ad lemniscatarum genus ipsa quoque referenda, duplici tamen puncto carens. Primitiva rursus sit ellipsis hyperbolave, at polum alteruter focorum occupet: *cardiois* respondet: ellipsin hyperbolamve in parabolam mutemus: cardiois in *circularem* ut vocant *cardioidem* abit. Primitiva rursus sit ellipsis hyperbolave, alterutro vertice polum occupante: lineae respondent satis simplicis formae: sin parabola fuerit primitiva, analoga in *cissoidem* abit. Nec minus simplices erunt lineae, *conchoidi* vel *Dinostrati quadratrici* respondentes.

Quae autem e generali capitis II affinitate $u = u'$, $vv' = 1$ hacce nostri capitis coordinatarum u et v definitione orta est figurarum affinitas $\varphi = \varphi'$, $rr' = 1$, potest illa aequationibus quoque inter orthogonales coordinatas indicari. Quibus tamen aequationibus omnium illarum proprietatum analogia, de quibus hocce capite vidimus, h. e. quae ab ipsis polaribus coordinatis u et v sive r et φ earumve a differentialibus functionibus pendent, minus fit simplex atque perspicua; quare asymptotae, polumve transeuntes radiove vectori perpendiculares rectae tangentiales, punctave in polo asymptota, aliaeve istiusmodi primitivae proprietates quidnam in analoga figura requirant sibi analogum, non potest nisi prolixis formulis magnoque labore investigari; at contra harum proprietatum analogia, quae ad rectarum tangentialium cum recta initiali OX intersectionem spectant, e. g. $\frac{dy}{dx}$, $y\,\frac{dx}{dy}$, $y\,\frac{dy}{dx}$, aliove modo ab orthogonalibus pendent coordinatis —— quorum tamen minus simplex erit nostra ex affinitate relatio —— facilius poterit novis de quibus jam videbimus formulis investigari. Habemus igitur:

$$x' = r'.\cos.\varphi' = \frac{\cos.\varphi}{r} = \frac{r.\cos.\varphi}{r^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$y' = r'.\sin.\varphi' = \frac{\sin.\varphi}{r} = \frac{r.\sin.\varphi}{r^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} = \frac{\frac{(x^2+y^2)\,dy - y.\,d\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}{\frac{(x^2+y^2)\,dx - x.\,d\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{(x^2-y^2)\,\frac{dy}{dx} - 2\,xy}{(y^2-x^2) - 2\,xy.\,\frac{dy}{dx}}$$

quae aequatio, si sit $\frac{dy}{dx} = o$ vel ∞ vel $\pm\,1$, in simpliciores hasce abit formas

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \qquad \frac{dy'}{dx'} = \frac{x^2-y^2 \mp 2xy}{y^2-x^2 \mp 2xy}$$

Prolixiore hacce adhibita substitutione $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$ $y' = \frac{y}{x^2+y^2}$, eadem jam quae suprà prodibit algebraicarum linearum, ex affinitate nostra sibi respondentium, analogia, ut sequentes nos docent aequationes: Sectioni cuilibet conicae, cujus indefinitus est situs atque forma, h. e. quae generali indicatur secundi gradus aequatione

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = o$$

linea quarti gradus respondet

$$(ax^2 + by^2 + cxy) + (dx + ey)(x^2 + y^2) + f(x^2 + y^2)^2 = o$$

primitivis autem	respondent
$a^2x^2 \pm b^2y^2 = a^2b^2$	$a^2x^2 \pm b^2y^2 = a^2b^2(x^2 + y^2)^2$
$a^2(x - e)^2 \pm b^2y^2 = a^2b^2$	$a^2(x - ex^2 - ey^2)^2 + b^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)^2$
$y^2 = p(x - q)$	$y^2 = (px - qx^2 - qy^2)(x^2 + y^2)$
$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a \mp x)x$	$2ab^2x(x^2 + y^2) - a^2y^2 \mp b^2x^2 = o$
$y^2 = px$	$y^2 = px(x^2 + y^2)$

CAPUT IV.

DE ILLA FIGURARUM AFFINITATE, QUAE IN ORTHOGONALIUM COORDINATARUM SYSTEMATE AEQUATIONIBUS INDICATUR

$$\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha + x'}\right) = 1, \left(\frac{y}{\alpha - x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha - x'}\right) = 1.$$

De generali videamus hocce capite affinitate, de qua Capite I° sermo erat, aequationibus $uu' = 1$, $vv' = 1$ indicata; coordinatas autem u ac v non jam orthogonales sive vulgares designare statuamus coordinatas x et y, sed hunc in modum definiamus: Duo sint puncta fixa A et B (fig. 15), quae *polorum* nomine donemus rectaque conjungamus X′ A B X; punctum jam quodlibet C definiatur duarum rectarum A C et B C intersectione, quarum altera polum A, altera polum B transeat, h. e. definiatur angulis C A B et C B A sive ψ et χ, quos cum recta X′X faciunt radii vectores A C et B C sive rectae, cum alterutro polo punctum C conjungentes. Et affirmativa quidem sit angulo ψ directio L B N R, negativa R N B L (h. e. puncto C sit $\psi = +$ B A C, puncto autem L sit $\psi = -$ B A L), angulo contra χ affirmativa sit directio L A N S, negativa S N A L; recta autem X′X sit utrique angulo initialis sive unde in angulis ψ et χ computandis exeamus. Coordinatas jam u ac v si ipsos designare statuimus angulos ψ ac χ, figurarum prodit affinitas haecce

$$\psi\psi' = 1 \quad \chi\chi' = 1$$

quae tamen haud profert simplicem aliquam multarum proprietatum analogiam; quare praestat, pro angulo ψ et χ eorundem tangentes substituere. Cujuslibet igitur puncti C coordinata u sit tg. ψ sive tg. C A B, coordinata autem v sit tg. χ sive tg. C B A. Affinitas ita oritur, de qua hocce capite agamus,

$$(\text{tg.}\ \psi)\ (\text{tg.}\ \psi') = 1 \qquad (\text{tg.}\ \chi)\ (\text{tg.}\ \chi') = 1.$$

Symmetrica jam illa coordinatarum u ac v mutua relatio, quam, quod ad analyticas formulas attinet, inter generales istas exstare coordinatas monuimus capitis I initio —— quam eandem, si u ac v orthogonales designant coordinatas, intactam subsistere, quod ad geometricas attinet proprietates, ex iis apparet, quae in reliqua capitis I parte occurrunt —— eadem illa symmetria hic quoque inter coordinatas reperietur tg. ψ ac tg. χ, siquidem nulla est caussa, cur polorum alteruter prae altero praestet. Quod hic quoque iterationum fugiendarum nobis copiam facit, siquidem, quae de altero polo de alterave figurae cujusdem parte monuerimus, de altero alterave quoque affirmare licebit.

Ut jam possimus ea, quae capite I° reperimus, nostrum in locum transferre, videamus antea, quidnam hoc loco sibi velint elementa elementorumve series finitaeve coordinatarum u ac v functiones: coordinatarum igitur quotiens $\frac{v}{u}$ ex hacce nostri capitis coordinatarum definitione huc redit:

$$\frac{v}{u} = \frac{\text{tg.}\ \chi}{\text{tg.}\ \psi} = \frac{\text{tg. CBA}}{\text{tg. CAB}} = \frac{\left(\frac{CM}{BM}\right)}{\left(\frac{CM}{AM}\right)} = \frac{AM}{BM} \qquad \text{(fig. 15)}$$

adeoque quotientem indicat distantiarum AM ac BM, quibus a polis distat rectae polos conjungentis X'X cum perpendiculari CM intersectionis punctum M.

Ipsorum jam elementorum, quorum mutuam analogiam relationes (8) nos supra docuerunt, si significatum quaerimus, e nostra coordinatarum definitione illis contingentem, dubia quaedam se nobis offerunt, quae ut accuratius de iis videamus requirunt. Primum enim, si elementum quoddam proponitur $u = + b$, $v = - b$, cujus coordinatae non magnitudine sed signo tantum discrepent, erit nobis, e coordinatarum definitione supra allata, per utrumque polum recta quaedam ducenda, ita quidem, ut recta AC cum X'X angulum faciat CAB, cujus tangens b ab alterius anguli CBA tangente non nisi signo discrepet, h. e. qui sit anguli CBA, quem cum X'X altera recta BC facit, supplementum. Rectas igitur vides CA et CB fore sibi parallelas, nec fore iis adeo ullum intersectionis punctum; unde sequi credas, ut hujusmodi elemento nullum indicetur nostro capite punctum. Attendamus tamen, elementum $u = + b$, $v = - b$ limitem esse, quo infinita quanti ω deminutione tendat elementum $u = + b$, $v = - (b + \omega)$, h. e.

rectarum, eadem fere directione procedentium, intersectionis esse punctum, a polis infinite distans: facile jam apparet, elementum nostrum $u = + b$, $v = - b$ terminum indicare, quo tendat punctum, rectam AC aliamve huic parallelam finiteque ab hac distantem haud deserens, a polis autem infinite recedens. Quod si in elementum transfertur $u = + \infty$, $v = - \infty$, terminum apparet indicari puncti, in recta RAT aliave in recta rectae $X'X$ perpendiculari siti, a $X'X$ autem infinite recedentis. Elementum igitur $u = + \infty$, $v = - \infty$ nostra e coordinatarum definitione indefinitum esse vides, siquidem cuncta indicat puncta, quorum a rectis RAT vel SBU quaelibet finita sit vel etiam nulla distantia, modo a recta $X'X$ infinita sit eorum distantia. Nec tamen nostro hoc coordinatarum systemati tribuendum: eadem enim ambiguitas, si vulgaribus utaris coordinatis $u = x$ et $v = y$, elemento inest $u = + \infty$ $v = - \infty$, quo quodlibet designatur quarti quadrantis punctum, cujus infinita sit a rectis $X'X$ et YY' distantia, indefinito puncti situ; quam situs ambiguitatem si tollere cupias, adjici oportet $\frac{v}{u} = \frac{y}{x} = \text{tg.}\ \phi = b$. Idem hoc loco faciamus: ad elementum enim ceteroquin ambiguum $u = + \infty$, $v = - \infty$ definiendum adjiciamus, quinam sit coordinatarum quotienti tribuendus valor, h. e. quaenam sit distantiarum AM et BM relatio: quo facto, determinatur punctum M, definiturque adeo, rectamne RAT an vero SBU an vero neutram punctum nostrum occupet. Eadem ambiguitas elemento inest $u = o$, $v = o$: quo indicatur intersectionis punctum rectarum, polos A et B ita transeuntium, ut angulum cum recta $X'X$ faciant nullum vel saltem infinite parvum: quas adeo rectas vel ipsam esse rectam oportet $X'X$ vel rectas saltem, quae, quamdiu a polis finite distent, cum recta $X'X$ congruant, nec nisi infinita a polis distantia finitam a recta $X'X$ distantiam nanciscantur. Elemento igitur $u = o$, $v = o$ cuncta vides designari rectae $X'X$ puncta cunctaque praeterea puncta, quorum finita a $X'X$, infinita a polis sit distantia. Itaque hujus quoque elementi ambiguitas additione quotientis $\frac{v}{u} = \frac{AM}{BM}$ punctique adeo M definitione tollatur necesse est. Videndum tandem de elementis, quibus sit $u = o$, v contra finitum: quibus indicantur intersectionis puncta duarum rectarum, quarum altera rectam $X'X$ in polo B certo sub angulo transit, altera polum contra A pervadit angulumque cum $X'X$ facit nullum adeoque cum $X'X$ congruit: hanc autem rectam, nisi sit v item $= o$, non posse a recta polum B pervadente in alio puncto nisi in ipso polo B secari manifestum est; unde apparet, istiusmodi elementis ipsum significari polum B. Quae tamen ratiocinatio non amplius valet, si figura polum B infinite quidem appropinquet nec tamen transeat —— quemadmodum fieri solet, si polus B figurae sit *punctum* ut dicitur *asymptotum*. Lineam enim fingamus quamdam $f(u, v) = o$, cujus coordinata v varios inde a *b* usque ad *c* nanciscente valores $b, b', b'' \ldots . c$, altera contra coordinata u maneat semper $= o$; cujusmodi linea, si vulgaribus utimur coordinatis $u = x$ et $v = y$, lineam indicat FGHJ (fig. 16), cum axe YY' sive $x = o$ per aliquod spatium congruentem; cujusmodi vero lineae e nostra coordinatarum definitione hoc proprium est, ut polum B infinitae parvitatis gyro $p\ p'\ p'' \ldots$ circumvolvatur. Hujusmodi igitur lineae varia elementa

$$u = o \quad v = b$$
$$u = o \quad v = b'$$
$$u = o \quad v = b''$$

non polum cuncta indicant, at varia potius indicant gyri istius puncta p, p', p'', etc. Sin polus B non fuerit istiusmodi *punctum asymptotum*, sed a figurae contra ramo KBMN transvadatur, angulus χ sive ABM, quem cum recta X'X facit radius vector BM puncti M a polo B paullulum distantis, ipsum indicat angulum ABP, quo figurae ramus KBMN sive ejusdem recta tangentialis BMP rectam X'X secat; quo casu elementis modo memoratis non varia, ut supra, indicantur figurae puncta, loco definito, directione indefinita, at unum contra semper indicatur punctum, ipse videlicet polus B, adjecta tamen directionis, qua figura eum transit, definitione. Eadem autem illa, mutatis mutandis, de elementis item valere

$$u = a \quad v = o$$
$$u = a' \quad v = o$$
$$u = a'' \quad v = o$$

monere vix opus est.

Haec jam attendentibus nobis facile erit elementorum definire nostri e coordinatarum systematis sensu significatum. Qua in re brevitatis caussa statuamus, ad neutrum polorum A vel B, nisi eosdem pervadat, infinite figuram nostram appropinquare, neutrumque adeo polum esse ei *punctum* ut dicitur *asymptotum*, siquidem non occurrunt haecce puncta in illis figuris, quarum hocce capite videbimus analogiam. Videmus itaque

elementa			designare
$u = o$	$v = o$	$\frac{v}{u} = o$	rectae X'X tactio in polo A
——	——	$\frac{v}{u} = \infty$	—————— B
——	——	$\frac{v}{u} = b$	punctum rectae X'X, cujus finita sit a polis distantia.
——	——	$\frac{v}{u} = +1$	punctum O, inter polos A et B intermedium.
——	——	$\frac{v}{u} = -1$	punctum, cujus a X'X nulla vel finita, a polis infinita sit distantia.
$u = \infty$	$v = \infty$	$\frac{v}{u} = o$	terminus puncti, rectam RAT haud deserentis, a polis infinite recedentis.
——	——	$\frac{v}{u} = \infty$	terminus ejusdem puncti, rectam SBU haud deserentis.

elementa		designare
$u = o$	$v = b$	rectae $X'X$ intersectio in polo B sub angulo $CBA = b$
$u = a$	$v = o$	—— A —— $CAB = a$
$u = o$	$v = \infty$	rectae SBU tactio in polo B
$u = \infty$	$v = o$	—— RAT —— A
$u = \infty$	$v = a$	punctum rectae RAT, a polis finite distans.
$u = a$	$v = \infty$	—— SBU, ——
$u = a$	$v = b$	punctum, cujus distantia a rectis $X'X$, RAT, SBU finita.
$u = -b$	$v = +b$	punctum, cujus distantia a rectis $X'X$, RAT, SBU infinita, ita tamen (ut nulla reliquas infinities superet.
$u = +b$	$v = +b$	punctum rectae YOY'.

Attendentibus jam nobis, elementorum seriem $u = o$ cuncta designare ista elementa

$$u = o \quad v = o$$
$$u = o \quad v = b$$
$$u = o \quad v = b'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u = o \quad v = \infty$$

quibus, varios nanciscente coordinata v valores, sit semper $u = o$, idemque de reliquis valere elementorum seriebus, perfacile jam erit, ex elementorum significatubus modo definitis, quid sibi hoc loco variae velint elementorum series jam definire. Videmus enim

elementorum seriebus	designari
$u = o$	rectam $X'X$, adjectis punctis, a $X'X$ finite, a polis infinite distantibus.
$v = o$	—— $X'X$, iisdem adjectis punctis.
$u = a$	—— polum A transeuntem, modo ne sit $X'X$ vel RAT vel SBU.
$v = b$	—— B ——
$u = \infty$	rectam RAT, adjectis punctis, a RAT finite, a $X'X$ infinite distantibus.
$v = \infty$	—— SBU, —— SBU ——
$\frac{v}{u} = c$	—— rectae $X'X$ perpendicularem.
$\frac{v}{u} = o$	—— RAT
$\frac{v}{u} = \infty$	—— SBU
$\frac{v}{u} = +1$	—— YOY', inter RAT ac SBU intermediam.
$\frac{v}{u} = -1$	—— $x = \pm \infty$ seu terminum rectae, rectae $X'X$ perpendicularis, (a polis infinite recedentis.

Quibus jam definitis, nostrum in locum transferamus quam Capite I° reperimus mutuam elementorum mutuamve serierum elementorum analogiam. E relationibus (4—6) igitur apparet, fore ut ex hac quoque nostri capitis affinitate nonnullae sint rectae, quibus analogas facile invenire possis. Docent enim relationes (4), cuilibet rectae polum A transeunti aliam respondere rectam, idem punctum trauseuntem; relationes (5) contra, cuilibet rectae polum B pervadenti aliam analogam esse rectam monent, quae eundem polum permeet; relationes (6) tandem, cuilibet rectae, rectae $X'X$ perpendiculari, aliam respondere docent alterius figurae rectam eidem $X'X$ perpendicularem. Ex his tamen rectis alterutrum polum transeuntibus excipiendam esse apparet ipsam rectam $X'X$: serierum enim $u = o$ ac $u' = \infty$ serierumve $v = o$ ac $v' = \infty$ si mutuam quaerimus analogiam, attendendum erit, universarum serierum hinc oriri mutuam analogiam, quod analoga utriusque seriei elementa sibi invicem respondeant: seriem itaque $u = o$ ita respondere seriei $u' = \infty$, ut prioris seriei elementum $u = o$, $v = o$ (h. e. recta $X'X$) respondeat alterius seriei elemento $u' = \infty$, $v' = \infty$ (h. e. punctis a $X'X$ infinite distantibus), reliqua autem prioris seriei elementa $u = o$, v finitum vel infinitum (h. e. poli B variis sub angulis transitio) reliquis respondeant alterius seriei elementis $u' = \infty$, v' finitum vel infinite parvum (h. e. variis rectae RAT punctis).

Inter has autem rectas, e relationibus (4—6) sibi invicem analogas, 6 esse vidimus Capite I°, quae ipsae sibimet respondeant: rectas videlicet

$$u = +1$$
$$u = -1$$
$$v = +1$$
$$v = -1$$

rectas nostro loco designantes ANS, ALU, BNR, BLT (fig. 15), rectam $X'X$ in polis sub angulo $\pm$ 45 graduum secantes; rectam praeterea $\frac{v}{u} = +1$ sive YOY'; rectamque tandem $\frac{v}{u} = -1$ seu terminum $x = \pm\infty$ rectae ab YOY' infinite recedentis. Quam tamen analogiam non ita intelligendam esse vidimus Capite I°, ut quodlibet earum punctum sive elementum ipsum sibimet esset analogum: nam 4 tantum esse elementa, quibus talis contingat in transitione ad analogam figuram constantia: elementa primum

$$u = +1 \quad v = +1$$
$$u = -1 \quad v = -1$$

h. e. puncta N et L, in quibus rectae se invicem A N S ac B N R rectaeve se invicem A L U ac B L T offendunt; elementa deinde

$$u = +1 \quad v = -1$$
$$u = -1 \quad v = +1$$

h. e. puncta, quorum infinita a X'X, eadem tamen a R A T quoque vel a S B U infinita est distantia, h. e. termini puncti, rectam A N S aliamve huic parallelam vel rectam contra A L U aliamve huic parallelam haud deserentis, a polis autem infinite recedentis. Reliqua contra elementa non fore sibimet ipsis ex affinitate nostra analoga, docent nos relationes (8).

Quae autem e relationibus his (8) sequitur punctorum analogia mutuam quamdam nobis praebet illarum utriusque figurae proprietatum analogiam, quae ab ipsis elementis pendet; siquidem, primitiva si punctum quoddam transeat, punctum puncto huic e relationibus (8) analogum analogae esse figurae transeundum manifestum est. Quae tamen proprietatum mutua analogia hoc loco non unice —— sicut Capite I° fiebat —— ad analogum spectabit utriusque figurae situm, directionum analogiae nulla habita ratione, sed partim situs, partim directionis respiciet analogiam. Suppositione enim supra a nobis facta —— non fore A vel B *punctum asymptotum* —— factum est, ut elementa hocce capite et locum denotent, quem occupet figura, et directionem interdum, qua procedat.

Quod igitur e relationibus (8) elementa

$$u = a \quad v = b \qquad \text{ac} \qquad u' = {}^1/a \quad v' = {}^1/b$$

sibi invicem respondeant, hoc loco nos docet: Prout primitiva a rectis X'X, R A T, S B U aut finite distarit aut non finite, idem esse de analoga dicendum. Quod autem

elementis	$u = o$	$v = b$	respondeant	$u' = \infty$	$v' = {}^1/b$
	$u = a$	$v = o$		$u' = {}^1/a$	$v' = \infty$
	$u = \infty$	$v = b$		$u' = o$	$v' = {}^1/b$
	$u = a$	$v = \infty$		$u' = {}^1/a$	$v' = o$

nos docet: Quoties primitiva alterutrum polum, A vel B, obliquo sub angulo transierit, toties analogam certum quoddam transire punctum alterius alterum polum B vel A transeuntis rectae S B U vel R A T; cujus quidem puncti finitam a X'X distantiam certa quadam ratione pendere a directione, qua polum A vel B primitiva transierit; indefinitum tamen esse, nisi differentiales coordinatarum functiones attenderis vel accuratiorem saltem rei investigationem institueris, quanam directione rectam illam SBU vel RAT offenderit analoga, rectamne illam tetigerit an vero secarit. Vicissim: quoties rectarum RAT vel SBU alterutram primitiva, qualibet directione, at certa quadam finita a $X'X$ distantia offenderit, toties analogam alterum transire polum B vel A, et ea quidem directione, quae a situ pendeat puncti, quo rectam RAT vel SBU primitiva offenderit (*). Mutua porro elementorum

$$u = 0 \quad v = \infty \quad \text{ac} \quad u' = \infty \quad v' = 0$$

$$u = \infty \quad v = 0 \quad \text{ac} \quad u' = 0 \quad v' = \infty$$

analogia nos monet: rectarum SBU vel RAT alterutram si primitiva in ipso tetigerit rectae illius cum recta $X'X$ intersectionis puncto, h. e. in ipso polo B vel A, analogam requiri alterius rectae RAT vel SBU in altero polo A vel B ab analoga figura tactionem (†). Mutua tandem elementorum

$$u = 0 \quad v = 0 \quad \text{ac} \quad u' = \infty \quad v' = \infty$$

$$u = \infty \quad v = \infty \quad \text{ac} \quad u' = 0 \quad v' = 0$$

analogia ob indefinitum horum elementorum significatum nullam quidem universe affert proprietatum analogiam; sin elementa accuratius definimus, attendimusque, ex aequatione (3) esse $\frac{v}{u} = \frac{u'}{v'}$, videmus

elementis	$u = 0 \quad v = 0$	$\frac{v}{u} = 0$	respondere elementa	$u' = \infty \quad v' = \infty$	$\frac{v'}{u'} = \infty$
		$\frac{v}{u} = \infty$			$\frac{v'}{u'} = 0$
	$u = \infty \quad v = \infty$	$\frac{v}{u} = 0$		$u' = 0 \quad v' = 0$	$\frac{v'}{u'} = \infty$
		$\frac{v}{u} = \infty$			$\frac{v'}{u'} = 0$

h. e. quoties analogarum figurarum alterutri alterutra rectarum RAT vel SBU asymptotae partes praestarit, toties rectam $X'X$ ab analoga figura in altero polo B vel A tangi (§); vicissim, rectam $X'X$ si in alterutro polo primitiva tetigerit, analogae nullam ab altera rectarum RAT

(*) Exempla praebent rectae WK (fig. 24), parabolarumve (fig. 25), hyperbolarumve (fig. 26 et 27), circulorumve (fig. 28) intersectionis puncta K et K' cum recta RAT, P et P' cum recta SBU, quibus respondent obliquae in polis B et A rectae $X'X$ ab analogis figuris transitiones.

(†) Exemplum praebet fig. 21: quum enim primitiva ellipsis HAJB rectam RAT in polo A tangat, analogam videmus respondere alterius rectae SBU ab altera ellipsi H'AJ'B tactionem in polo B; vicissim primitivae HAJB rectam SBU tangenti analogam H'AJ'B respondere videmus, rectam RAT tangentem.

(§) Exempla praebent analogae hyperbolae (fig. 22) analogaeve sibi cissoides (fig. 23), et rectam $X'X$ in polo B tangentes et recta RAT asymptota gaudentes: alterutrius enim per polum B transitioni ramus respondet alterius, rectam RAT tanquam asymptotam persequens.

vel SBU, infinitam a X'X fore distantiam, adeoque, nisi analogae obstarit directio accuratius investiganda, alteram illam rectam RAT vel SBU analogae fore asymptotam. Quod porro elementis

$$u = o \quad v = o \quad \frac{v}{u} = c \qquad \text{respondeant} \qquad u' = \infty \quad v' = \infty \quad \frac{v'}{u'} = {}^{1}/c$$

$$u = \infty \quad v = \infty \quad \frac{v}{u} = c \qquad\qquad u' = o \quad v' = o \quad \frac{v'}{u'} = {}^{1}/c$$

nos docet: Quot alterutri figurae sint asymptotae, rectis RAT ac SBU parallelae finiteque ab illis distantes, toties rectam X'X ab analoga figura offendi (*); contrarium statui non posse, nisi directionum sinat analogia; plerumque igitur fieri (si ponamus $c = -1$), ut alterius figurae ramus parabolicus sive cui recta $x = \pm \infty$ sit asymptota, alterius figurae ramo sit analogus, qui recta X'X aliave huic parallela finiteque ab hac distante tamquam asymptota utatur; ad istiusmodi tamen asymptotarum analogiam requiri directionum praeterea mutuam analogiam, a differentialibus coordinatarum functionibus repetendam. Quod tandem elementa sibi invicem

$$u = -b \quad v = +b \quad \text{ac} \quad u' = -\left(\frac{1}{b}\right) \quad v' = +\left(\frac{1}{b}\right)$$

respondeant, indicio nobis est: Primitivae si asymptota fuerit, rectae X'X nec parallela nec perpendicularis, alteri quoque figurae —— modo directionum sinat analogia —— asymptotam fore, quae rectam X'X obliquo angulo secet (†); ac si angulus quidem ille fuerit $+45$ vel -45 graduum in primitiva, eandem fore angulo illi in analoga figura magnitudinem (§). Analogia tandem, qua sex elementorum series (7) vel qua elementa

$$u = +1 \quad v = +1$$
$$u = -1 \quad v = -1$$

sibimet ipsa respondere supra vidimus, hanc affert proprietatum analogiam: Quoties rectarum YOY', ANS, ALU, BNR, BLT (fig. 15) unam alteramve primitiva offenderit punctorumve N vel L alterutrum transierit, toties analogam in analoga figura requiri ejusdem rectae offensionem ejusdemve puncti transitionem (**).

(*) Primitivae e. g. hyperbolae asymptota D E (fig. 24 et 26) respondentem sibi habet rectae X'X transitionem ab analoga recta W K in puncto V (fig. 24) analogave ab hyperbola in puncto V' (fig. 26.).

(†) Exempla praebent analogae analogarum hyperbolarum asymptotae F G ac F' G' (fig. 22 ac 26) vel D E, F G ac D' E', F' G' (fig. 27), respondentesve sibi invicem analogarum parabolarum asymptotae (fig. 25), vel recta tandem W K (fig. 24), quae ipsa sibimet est asymptota respondentemque sibi adeo habet analogae hyperbolae asymptotam F G (fig. 24).

(§) Exempla videmus in asymptotis hyperbolae V' A W' V B W (fig. 27), sibimet ipsius respondentis.

(**) Punctum e. g. L et a primitiva WK et ab analoga FAEDLBG transiri videmus (fig. 24); circulum autem ANBL (fig. 21), ipsum sibimet respondentem, utrumque videmus punctum transire, et L et N.

Ut jam capitis I relationes (10) ac (11) huc possimus transferre, videamus quidnam hoc loco affirmativa vel negativa sibi velint coordinatarum signa. Attendentibus igitur nobis, anguli alicujus tangentem esse

$$> o \text{ vel contra } < o$$

prout angulo isti magnitudo contingat

inter -180° ac -90°				inter -90° ac -0
—— $+0$ ac $+90^\circ$		vel contra		—— $+90^\circ$ ac $+180^\circ$
—— $+180^\circ$ ac $+270^\circ$				—— $+270^\circ$ ac $+360^\circ$
etc.				etc.

facile apparet, cuncta puncta, quibus $u = \text{tg.}\ \psi = \text{tg.}\ CAB$ (fig. 15) sit affirmativum, in quadrantium RABX vel X′AT alterutro esse sita; eademque ratione procedentes, puncta videmus, quibus sit

$u > o$	$v > o$	sita esse	in rectangulo SBAR
$u < o$	$v < o$		—————— TABU
$u > o$	$v < o$		in alterutro rectangulorum SBX vel X′AT
$u < o$	$v > o$		—————————— RAX′ vel XBU

Docent nos igitur relationes (10): Primitiva si alicubi in hac illave e quatuor istis universi spatii partibus versata sit, requiri, ut analogum quoque alterius figurae punctum in eadem spatii parte versetur (†). Dubium itaque videri possit, si primitivae punctum consideramus in rectangulo SBX situm, sitne in eodem rectangulo SBX an vero in X′AT analogum huic alterius figurae punctum quaerendum. Attendamus tamen, puncta, quibus sit inter coordinatarum signa + vel — discordia,

prout sit	$u > v$	sita esse	in X′AR vel X′AT
	$u < v$		in XBS vel XBU

modo eam intelligamus alterius coordinatae prae altera praestantiam, quae ad magnitudinem tantum, non ad signum spectat. Relationes (11) in memoriam jam revocantibus nobis apparet,

---

(†) Primitiva igitur si non extra RAT ac SBU extenditur, neque faciet analoga (fig. 21 et 23); primitiva contra si quatuor spatii partes memoratas transierit, in cunctis erit analogae item figurae pars aliqua reperienda (fig. 28); sin reliquas quidem primitiva transierit, unam tamen e. g. TABU transire neglexerit, ejusdem partis transitio ab analoga item omittetur (fig. 22 et 26), etc.

puncto primitivae, quod in SBX, UBX, RAX', TAX' situm sit, punctum contra respondere alterius figurae, cujus in TAX', RAX', UBX, SBX locus reperiendus (*).

Vidimus porro Capite I°, unum uni semper respondere ex affinitate nostra elementum elemento; nequaquam tamen inde, si u ac v orthogonales designent coordinatas, sequi, ut unum uni quoque respondeat semper punctum puncto; excipienda enim esse puncta, in alterutro axium XX' vel YY' sita; quorum unicuique infinitam respondere analogorum punctorum multitudinem. Eadem exceptio hic quoque e nostra coordinatarum definitione obtinet, non tamen in punctis rectae YY' —— quorum unicuique aliud ejusdem rectae respondere supra vidimus punctum —— sed in punctis contra alterius rectae X'X; quorum unicuique innumera respondent hic quoque alterius figurae puncta, quibus eadem quidem est a rectis RAT ac SBU distantia, variae contra sint a recta X'X distantiae infinitae. Ex his tamen punctis rectae X'X ipsi excipiendi poli A ac B; horum enim alteruter, si per se spectatur sive figurae eum transeuntis non ratione habita, cunctis respondet alterius rectarum RAT vel SBU punctis, sive finita sive infinita sit illorum a X'X distantia; sin non ipsum polum, sed figurae polum transeuntis istud spectaveris punctum quod polum occupet, unum tantummodo puncto huic respondet alterius rectarum RAT vel SBU punctum; nisi rectam X'X statuas in polorum alterutro tangi; quo casu istud quoque figurae punctum, quod polum occupat, cum reliquis rectae X'X punctis hac in re convenit, quod infinita ei respondet punctorum multitudo, alteram rectarum RAT vel SBU occupantium, a recta autem X'X infinite recedentium.

Ex his jam facile patet, capitis I relationes (12), in nostrum locum translatas, de duplicibus punctis haec nos monere: primitivae si fuerit alicubi punctum duplex, ex hac quoque nostri capitis affinitate requiri, ut ejusdem singularitatis punctum in analoga item reperiatur: excipienda tamen esse puncta duplicia, in recta X'X sita, quibus vel duplicia posse respondere alterius figurae puncta vel duos contra ramos, qui, finita a se invicem distantia servata, a recta X'X infinite recesserint; majore etiam jure excipienda esse puncta in alterutro polo duplicia; cujusmodi puncto primitivae —— nisi ob ramorum parallelismum tactionis simul punctum fuerit —— non duplex alterius figurae respondet punctum, at duplex contra respondet rectae RAT vel SBU alterum

(*) Haec autem rectangulorum analogia facile nobis reddit, quinam primitivae rami quibusnam respondeant ramis analogae investigare. Hyperbolarum e. g. F B R T J G ac F B R T J' G' (fig. 22) hanc videmus esse mutuam analogiam, ut ramus F B respondeat alterius ramo G' J' T respondeantque sibi deinceps invicem rami B R ac R B, T J G ac B F. Rectae autem W K haec erit cum analoga hyperbola mutua ramorum analogia, ut respondeant sibi rami W P ac F A, P V ac A E, V L ac D L, L K ac L B, extrema tandem rectae pars ramo hyperbolae B G polum transeuntis ab analoga figura offensio; nec infinita erit —— quod in ramis duplici puncto respondentibus requiri modo videbamus —— ramorum illorum a recta X'X distantia, at qualibet ab hacce recta distare possunt distantia finita.

Eandem tandem quam Capite I° adhibentes ratiocinationem, nostra quoque videmus ex affinitate, si primitivae fuerit alicubi punctum *a reliquis separatum* punctumve *interstitionis*, analogum requiri in altera figura ejusdem singularitatis punctum, nisi coordinatarum u ac v alterutra fuerit = o, h. e. nisi rectam X'X singularia ista puncta occuparint. Quo casu, si dirimi velimus quaestionem, sitne analogum analogae punctum singulare necne, primitivae nobis erit natura accuratius investiganda. Primitivae e. g. si hujusmodi contigerit elementorum series

$u = o \quad v = b$	cui analoga alterius series respondeat	$u' = \infty \quad v' = \frac{1}{b}$
$u = o \quad v = b'$		$u' = \infty \quad v' = \frac{1}{b'}$
$u = o \quad v = b''$		$u' = \infty \quad v' = \frac{1}{b''}$
etc.		etc. . . . . .
$u = o \quad v = c$		$u' = \infty \quad v' = \frac{1}{c}$

erit primitivae punctum *a reliquis separatum*, ipsum occupans polum B; cui tamen puncto non analogum in altera figura punctum ejusdem singularitatis, at rectae contra R A T certa quadam pars respondebit.

Ad differentiales jam coordinatarum functiones anteaquam transeamus, de Capitis I aequationibus (2) ac (3) breviter videamus. Quotientis igitur $\frac{v}{u}$ significatum supra (pag. 61) definitum si attendamus, aequationem (3) huc videmus redire: Duo si habeas analoga sibi analogarum figurarum puncta C et C', e quorum utroque in rectam X'X perpendicularem ducas CM vel C'M', harum jam perpendicularium cum recta X'X intersectionis puncta M et M' distantiis a polis A et B distabunt AM, AM', BM, BM', quas inter haec erit relatio:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right) \times \left(\frac{AM'}{BM'}\right) = 1 \quad \text{sive } AM : BM = BM' : AM'$$

Aequatio (2) contra non est hoc loco satis magni momenti. Quare hanc potius nostro capite ei substituamus inter coordinatarum functiones relationem:

$$\frac{u' + v'}{1 - u'v'} = \frac{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}{1 - \frac{1}{uv}} = \frac{\frac{v + u}{uv}}{\frac{uv - 1}{uv}} = - \frac{u + v}{u - uv}$$

Est autem functio illa $\frac{u + v}{1 - uv}$ ex hacce nostri capitis coordinatarum definitione $= \frac{\text{tg.}\ \psi + \text{tg.}\ \chi}{1 - \text{tg.}\ \psi .\ \text{tg.}\ \chi} = \text{tg.}\ (\psi + \chi) = -\ \text{tg.}\ [180^0 - (\psi + \chi)] = -\ \text{tg.}\ ACB$. (fig. 15). Hanc igitur functionem quum ex affinitate nostra, si ad analogam transeatur figuram, eandem videamus servare magnitudinem, at signum $\pm$ mutare, sequitur fore ut angulus ACB, quem puncti cujuslibet bini radii vectores AC et BC secum faciunt, si ad analogum transeatur analogae figurae punctum, in supplementum sui abeat (*).

Et haec quidem sufficiant de proprietatum analogia, quae ex ipsarum coordinatarum sequitur relatione. Ad differentiales transeamus coordinatarum functiones, ac primum quidem ad functiones ordinis primi. Quarum quinam sit hoc loco significatus, ita apparebit: Duo fingamus figurae cujusdam $ICC'J$ (fig. 17) puncta C et C', quorum infinite parva sit distantia: utrumque jam punctum si cum utroque jungimus polo et A et B, alterius puncti C radii vectores CA et CB alterius erunt puncti C' radiis vectoribus $C'A$ et $C'B$, ob infinite parvam punctorum C ac C' distantiam, paralleli aut saltem infinite parvo directionis discrimine procedentes; eademque erit caussa, cur eadem fere in utroque puncto sit lineae $ICC'J$ recta tangentialis $MCC'Q$. In quam ab utroque polo perpendicularem ducamus AG et BH; a punctisque praeterea C ac C' in alterius puncti radios vectores $C'A$ ac CB' perpendiculares ducamus CD ac $C'D'$. Attendentibus jam nobis, si a puncto C ad punctum procedamus C', augeri angulum $CBA = \chi$, minui contra angulum $CAB = \psi$, hisque adeo angulis in processu illo incrementa contingere $CAC' = -\ d\psi$, $CBC' = +\ d\chi$, hic jam prodibit differentialis coordinatarum quotientis significatus:

$$CD = AC.\ \text{sin.}\ CAC' = AC.\ \text{sin.}\ (-\ d\psi) = -\ AC \times d\psi$$

$$C'D' = BC.\ \text{sin.}\ CBC' = BC.\ \text{sin.}\ (+\ d\chi) = +\ BC \times d\chi$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{CC'.\ \text{sin.}\ AC'C}{CC'.\ \text{sin.}\ BCC'} = \frac{\text{sin.}\ AC'C}{\text{sin.}\ BCC'} = \frac{\text{sin.}\ ACG}{\text{sin.}\ BCH}$$

$$\frac{AG}{BH} = \frac{AC.\ \text{sin.}\ ACG}{BC.\ \text{sin.}\ BCH} = \frac{AC}{BC} \times \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{BC} \times \frac{AC}{BC} \times \frac{-\ d\psi}{d\chi} =$$

$$= \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \times \frac{-\ d\psi}{d\chi} = \left(\frac{CM.\ \text{cosec.}\ \psi}{CM.\ \text{cosec.}\ \chi}\right)^2 \times \frac{-\ d\psi}{d\chi}\ \text{(fig. 15)} = -\frac{\text{sin.}^2\chi .\ d\psi}{\text{sin.}^2\psi .\ d\chi} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{d\psi}{\text{cos.}^2\psi}\right)}{\left(\frac{d\chi}{\text{cos.}^2\chi}\right)} \times \frac{\text{cos.}^2\psi .\ \text{sin.}^2\chi}{\text{cos.}^2\chi .\ \text{sin.}^2\psi} = -\frac{d\ (\text{tg.}\ \psi)}{d\ (\text{tg.}\ \chi)} \times \frac{\text{tg.}^2\chi}{\text{tg.}^2\psi} = -\left(\frac{v}{u}\right)^2 . \frac{du}{dv}$$

(*) Exemplum praebent analogi sibi circuli (fig. 28), quorum in primitivo quum constans maneat iste binorum radiorum vectorum angulus, sequitur ut in altero item circulo similis occurrat analogi anguli constantia.

Differentialis igitur quotiens $\frac{du}{dv}$ hoc loco quotientem indicat $\frac{AG}{BH}$ (*) perpendicularium, ab utroque polo in rectam tangentialem ductarum, modo statuamus esse ibi $\frac{v}{u} = +1$ —— h. e. modo de istorum primitivae punctorum differentiali quotiente $\frac{du}{dv}$ agatur, quae rectam YOY′ occupant —— vel esse $\frac{v}{u} = -1$ —— h. e. modo ista considerentur figurae nostrae puncta, quae asymptotas rectae X′X non perpendiculares persequantur aliave quadam ratione infinite a rectis RAT ac SBU recedant inque terminali adeo recta $x = \pm \infty$ sita sint. Sin non sit $\frac{v}{u} = +1$ vel $= -1$, functionem $\left(\frac{v}{u}\right)^2 \cdot \frac{du}{dv}$ apparet faciliore nos posse ac simpliciore ratione hoc loco geometrice interpretari, quam possimus functionem $\frac{du}{dv}$; cujus rei contrarium obtinuit in Capite I°, ubi functionis $\frac{du}{dv}$ major erat quam functionis $\left(\frac{v}{u}\right)^2 \cdot \frac{du}{dv}$ ratio habenda.

Definito itaque differentialium harum functionum significatu, mutuas jam in memoriam revocemus earum relationes, in Capite I° olim repertas (pag. 11):

$$\frac{dv'}{du'} = \left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} \quad (13)$$

$$\frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'} = \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du} \quad (14)$$

Quarum posterior nos docet: Si perpendicularium, in tangentialem rectam ductarum, quotiens $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = \frac{BH}{AG}$ (fig. 17) cum coordinatarum quotiente $\frac{v}{u} = \frac{AM}{BM}$ (fig. 15) multiplicetur, productum oriri $\frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{BH}{AG} \times \frac{AM}{BM}$, quod, si ad analogum transeas analogae figurae punctum, nullam subeat nec signi nec magnitudinis mutationem. Sit e. g. productum istud $= 1$ adeoque $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$ sive $\frac{BH}{AG} = \frac{BM}{AM}$, h. e. figura nostra vel sit rectae X′X perpendicularis habeatque adeo $BH = BM$ ac $AG = AM$, vel rectam X′X in puncto aliquo K (fig. 18) offendat [quo casu punctum M (fig. 15) in ipso illo puncto K (fig. 18) erit situm, eritque adeo ob triangulorum KAG ac KBH similitudinem $\frac{BH}{AG} = \frac{BK}{AK}$ h. e. $\frac{BH}{AG} = \frac{BM}{AM}$]; in analoga jam figura analogum productum $\frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'}$ erit $= 1$, adeoque analoga quoque figura vel rectam X′X secabit vel erit rectae huic perpendicularis: unde sequitur, si primitiva alicubi finite a rectis X′X, RAT, SBU distarit fueritque ibidem rectae X′X perpendicularis, eandem requiri in analoga alterius figurae parte perpendicularitatem (†).

Ad aequationem (13) jam transeamus. Quam supra vidimus (pag. 12) aliis ortum praebere

---

(*) Vel, si mavis, $-\frac{AG}{BH}$, sicut e formulis modo allatis efficias. Quum tamen arbitraria plane sit ratio, qua perpendicularibus AG ac BH affirmativam dicimus vel negativam contingere longitudinem, quotientis $\frac{AG}{BH}$ hoc loco signum $\mp$ non attendamus; de hoc enim infra agetur (pag. 79).

(†) Exempla praebent respondentia sibi analogorum circulorum puncta V ac W′, W ac V′ (fig. 28) analogave analogarum parabolarum puncta H et H′ (fig. 25).

relationibus (18-20); quas tamen parva hacce afficiamus nostro loco mutatione, ut pro functione ibi occurrente $\frac{dv}{du}$ functionem ubique substituamus $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$, cujus majus est hoc loco quam illius momentum; quae non obstat mutatio, quominus integrae subsistant relationes (18-20). Relationum igitur (18), quae mutatione nostra hanc induunt formam

$$\text{si sit} \left| \begin{array}{ll} \frac{v}{u} \text{ finitum}, \left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} & = o \\ \rule{6em}{0.4pt} & \text{finitum} \\ \rule{6em}{0.4pt} & = \infty \end{array} \right| \text{ fore } \left| \begin{array}{ll} \left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'} & = o \\ \rule{5em}{0.4pt} & \text{finitum} \\ \rule{5em}{0.4pt} & = \infty \end{array} \right.$$

varius in variis punctis erit sensus. Primum enim fieri potest, ut non quotiens tantum $\frac{u}{v}$, sed ipsae quoque coordinatae u ac v sint finitae: cujusmodi punctorum duo sunt genera, alterum illorum quae a rectis X'X, RAT, SBU finite distant, alterum illorum, quibus a rectis illis infinita est distantia, nulla tamen distantia reliquas infinities superante. Fieri deinde potest ut sit $\frac{v}{u}$ quidem finitum, u ac v contra $= o$, vel ut sit $\frac{v}{u}$ finitum, u ac v $= \infty$. In quaternis hisce punctorum generibus relationes (18) adhibeamus.

Primum itaque istiusmodi fingamus primitivae punctum, quod a rectis X'X, RAT, SBU finite distet. Cujusmodi in puncto fieri quidem posse patet, ut quae punctum illud transit recta tangentialis alterutrum praeterea polum pervadat perpendiculariumque adeo AG ac BH alterutram ad nihil reducat, non vero fieri posse, ut utrumque eodem simul tempore permeet recta tangentialis polum, neque adeo posse et AG et BH simul evanescere; nec vero fieri posse patet, ut sit in istiusmodi puncto perpendicularium AG ac BH alterutra infinita. Quotiens igitur $\frac{BH}{AG}$ ut sit in istiusmodi puncto vel $= o$ vel $= \infty$ vel finitum, requiri apparet, ut sit vel $BH = o$, AG finitum, vel $AG = o$, BH finitum, vel tandem BH ac AG finita, h. e. ut recta tangentialis vel polum B vel polum contra A vel neutrum tandem transeat polum. Docet nos igitur relatio (18): Si primitiva alicubi finite a rectis X'X, RAT, SBU distarit ejusdemque ibi recta tangentialis alterutrum neutrumve transierit polum, requiri ut analoga analogae figurae recta tangentialis eundem, quem primitiva, neutrumve, si neutrum primitiva, transeat polum.

Sit jam deinceps primitivae alicubi $u = -b$, $v = +b$, $\frac{v}{u} = -1$ sitque adeo analogae $u' = -{}^1/b$, $v' = +{}^1/b$, $\frac{v'}{u'} = -1$, h. e. et primitiva et analoga a rectis X'X, RAT, SBU infinite distet, ita tamen ut ne una e tribus reliquas infinities superet distantias. In istiusmodi jam puncto si contingat primitivae asymptota, rectae X'X nec parallela nec perpendicularis eandemque rectam in alterutro polo vel finita saltem a polis distantia secans, —— utraque perpendicularis, et AG et BH, recte definitae erit nec tamen ejusdem magnitudinis, earumque adeo quoque quotiens $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ recte erit definitum nec tamen $= 1$: ac prout quidem asymptota vel polum A vel polum contra B vel neutrum tandem transit polum, erit $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ vel $= \infty$ vel $= 0$ vel finitum. Relatio (18) igitur —— si attendimus, analogum quotientem $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'} = \frac{dv}{du} = \left(\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{dv}{du}\right) \times \left(\frac{v}{u}\right)^2$. siquidem sit hoc loco $\frac{v}{u} = -1$, non posse esse $= 1$, nisi primitivus quoque quotiens $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ fuerit $= (-1)^2 = 1$: quod non fieri hoc loco posse, modo statuebamus —— nos docet, idem de quotientis $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'}$ quod de quotientis $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ magnitudine posse affirmari: h. e. alterutri figurae si asymptota fuerit, rectae X'X nec parallela nec perpendicularis eandemque in alterutro polo finitave saltem a polis distantia transvadens, similem requiri in altera figura asymptotam, quae eundem, atque primitiva, neutrumve, si neutrum primitiva, transeat polum. Quibus tollitur ambiguitas, quae de mutua hujusmodi asymptotarum ex affinitate nostra analogia se nobis supra (pag. 68) offerebat. Asymptota vero nostra si rectam X'X infinita a polis distantia permeet (*) vel si figura nostra infinite quidem a rectis X'X, RAT, SBU recesserit, asymptota vero ibidem careat (†), utraque perpendicularis, et AG et BH, erit infinita, earum autem discrimen nullum vel finitum, earumque adeo quotiens $\frac{\infty + a}{\infty + b}$ ad limitem tendet 1: hoc autem si fiat, analogum item quotientem $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'}$ fore $= 1$ modo videbamus; quod rursus fieri non potest, nisi in analoga quoque figura infinita sit utriusque perpendicularis magnitudo. Docet nos igitur relatio (18): Primitiva si infinita a rectis X'X, RAT, SBU, nec ab harum una alterave infinities majore quam a reliquis recesserit distantia, vulgari tamen caruerit asymptota, idem posse de analoga affirmari.

In tertio jam quartoque e punctorum generibus modo allatis non magnopere nos adjuvat relatio (18). Primitivae enim statuamus esse alicubi asymptotam aliquam, rectis RAT, YOY', SBU parallelam finiteque ab his distantem: erit ibi $u = \infty$, $v = \infty$, $\frac{v}{u}$ finitum, AG praeterea ac BH finita a seque diversa, earumque adeo quotiens $\frac{BH}{AG}$ sive $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ finitus ac recte definitus nec $= 1$; at, si primitiva finite quidem a rectis RAT ac SBU infiniteque a recta X'X recesserit, non vero habuerit ibi asymptotam, nisi forte talem, quae rectam X'X infinita a polis distantia secarit, erit $AG = \infty + a$, $BH = \infty + b$, earumque adeo quotiens

(*) Quemadmodo binis contingit parabolae (fig. 25) asymptotis sibi parallelis, quas ejusdem rami in infinitum excurrentes persequuntur.

(†) Quemadmodum, si finitae magnitudinis figura infinite a polis recedat, fieri solet.

$\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = \frac{\infty + b}{\infty + a}$ ad limitem tendet 1. Unde patet, vulgarisne sit primitivae asymptota necne, non inde pendere, unde supra pendebat, h. e. utrum finitus an vero $= o$ vel $= \infty$ esset quotiens $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$, sed hinc contra hoc loco pendere, sitne $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = 1$ necne. Dubitationem igitur de mutua asymptotarum analogia supra ortam haud posse relatione (18) tolli vides, quae de hoc tantummodo agat, sintne functiones $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ ac $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'}$ finitae an vero $= o$ vel $= \infty$. Relatione (18) igitur omissa, ita potius ratiocinemur: Primativa si rectam X'X finita a rectis RAT, SBU, YOY' distantia perpendiculariter vel oblique offenderit, erit ibi $u = o$, $v = o$, $\frac{v}{u}$ finitum, AG praeterea ac BH finita a seque diversa; earumque adeo quotiens $\frac{BH}{AG} = \left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ finitum quoddam ac recte definitum quantum c aequiparabit, nec erit $= 1$; vidimus autem supra (pag. 73), esse ibi $\frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'} = 1$: erit itaque $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'} = {}^1/c$ neque adeo $= 1$; unde sequitur, analogae fore asymptotam rectae X'X perpendicularem. Vicissim, si fuerit primitivae hujusmodi asymptota, erit ei $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = {}^1/c$ ac $\frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du} = 1$ eritque adeo analogae $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'} = c$; cui conditioni satisfaciet rectae X'X ab analoga figura sectio vel etiam tactio, modo ei quotiens sit $\frac{BH}{AG} = \frac{o}{o}$, ad limitem tendens c. At, si finite quidem a rectis RAT ac SBU primitiva infiniteque a recta X'X recesserit, vulgari tamen caruerit asymptota, erit ei quotiens $\frac{BH}{AG} = \left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = \frac{\infty + b}{\infty + a}$, ad limitem tendens 1; neque adeo rectam X'X secabit analoga, sed tanget, ita quidem, ut sit ei perpendicularium quotiens $\frac{BH}{AG} = \frac{o}{o}$, ad limitem tendens 1. Rectam tandem X'X primitiva si tetigerit quotientisque adeo $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ limitem habuerit $\frac{o}{o} = 1$, ambiguitatem fore apparet directionis, qua analoga procedat figura, sitne vulgaris ei asymptota necne, siquidem hoc tantum requiritur, ut sit ei quotienits $\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'}$ valor, ad limitem tendens 1. Alteram igitur, quam de mutua asymptotarum analogia supra reperiebamus ambiguitatem, partim tolli vides, partim ad differentialium quotientium secundi ordinis mutuae analogiae investigationem remitti.

Quae de asymptotis superest ex ambiguitatibus supra allatis —— si alterutri figurae recta X'X rectave huic parallela finiteque ab hac distans fuerit asymptota, sitne alteri figurae ramus parabolicus sive quae recta $x = \infty$ asymptota gaudeat necne —— non tollitur haec relationibus (18). Quae enim in primitivae asymptotam aliquam sive rectam tangentialem ducuntur perpendiculares AG ac BH, ejusdem ambae erunt, si tangens illa sive asymptota rectae X'X parallela procedat, magnitudinis quotientemque adeo proferent $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = 1$. Ad alteram jam si transeamus figuram, perpendicularium quotiens e relatione (18) oritur

$$\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'} = \frac{dv}{du} = \left(\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{dv}{du}\right) \times \left(\frac{v^2}{u^2}\right) = 1 \times (-1)^2 = 1.$$

Huic autem conditioni quaecumque satisfaciet analogae rectae tangentialis directio, modo ne alterutrum polum transeat finitave saltem a polis distantia rectam $X'X$ secet: hoc enim si non fieri statuas nullumque adeo rectae tangentiali cum recta $X'X$ intersectionis esse punctum nisi quod infinite a polis distet, erit utraque analogae perpendicularis $= \infty$, eritque finitum vel nullum utriusque perpendicularis discrimen, tenditque adeo perpendicularium quotiens $\frac{\infty + a}{\infty + b}$ ad limitem 1; unde apparet, nullius ad directionum analogiam definiendam esse relationem (18) hoc loco momenti. Neque juvat, huc afferre aequationem (14) sive $\frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'} = \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du}$: est enim in istiusmodi puncto primitivae, ut supra videbamus (pag. 73), $\frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du} = 1$, requiriturque adeo, ut sit quoque $\frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'} = 1$; huic autem conditioni quaelibet satisfaciet analogae directio, modo rectam $X'X$ infinita a polis distantia secet: erit enim analogae semper $AM = \infty$, $BM = \infty$, $AG = \infty$, $BH = \infty$, adeoque semper $\frac{AM}{BM} = 1 = \frac{AG}{BH}$. Istiusmodi igitur primitivae ramis, quae asymptotas rectae $X'X$ parallelas persequuntur, si analogas velimus reperire analogorum ramorum directiones, ad differentiales coordinatarum functiones ordinis secundi erit refugiendum accuratiorve saltem rei investigatio erit instituenda.

Quae porro ex aequatione (13) sequebantur in Capite Iº relationes (19) ac (20), nostri e coordinatarum systematis sensu interpretatae, nos docent, primitivae alterutrum polum transeuntis curvedo sive directionis mutatio quomodo cum alterius figurae rectam RAT rectamve SBU offendentis directione cohaereat, h. e. certa aliqua primitivae curvedo requiratne rectae RAT rectaeve SBU ab analoga figura tactionem an vero sectionem. Quae tamen accuratius investigare vel reliquas quas Caput I proferebat inter differentiales coordinatarum functiones relationes (15—17, 21—22) accurate hoc loco persequi, minoris erit momenti. Quare unice de aequatione (21) paucis videamus. Qua paullulum hunc in modum mutata, ut pro functione $\frac{dv}{du}$, quae minoris est hoc loco momenti, functionem substituamus $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$, relatio ita prodens

	vel $\frac{v}{u} = -1$
ut sit $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = \left(\frac{u'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{dv'}{du'}$	——— $+ 1$
requiri ut sit	—— $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = 0$
	——— $= \infty$

nos docet: Perpendicularium quotientem $\frac{BH}{AG}$ si velimus in transitione ad analogum analogae figurae punctum intactam suam servare magnitudinem, horum unum alterumve requiri: vel ut alterutrum polum tangentialis primitivae recta pervaserit —— quo casu primitivae altera erit perpendicularis finita altera infinite parva, earumque adeo quotiens $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = o$ vel $= \infty$: quod si fiat, alterius item figurae tangentiali rectae supra vidimus eundem esse polum transeundum, perpendiculariumque adeo quotientem eundem atque in primitiva nancisci infinitae parvitatis magnitudinisve valorem —— vel ut sit $\frac{v}{u} = +1$ —— h. e. ut tangentiales rectae considerentur istiusmodi primitivae punctorum quae in recta Y O Y′ sita sint —— vel tandem ut sit $\frac{v}{u} = -1$ —— h. e. ut primitiva terminalem rectam $x = \pm\infty$ offendat sive a rectis R A T ac S B U infinite recedat. Cujusmodi infinita recessio quum in istis fiat primitivae ramis, qui asymptotas rectae X′X non perpendiculares persequuntur, e relatione (21) sequi videmus: Primitivae in asymptotam quamlibet, rectae X′X non perpendicularem, si ex utroque polo perpendicularem ducamus A G ac B H, eundem harum fore perpendicularium quotientem, atque illarum, quae in analogam analogae figurae asymptotam ducuntur. Ex eadem relatione (21) sequitur quoque: Si primitiva alicubi rectae X′X fuerit parallela habueritque adeo A G = B H sive $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du} = 1$, fieri non posse ut analoga alterius figurae pars eidem rectae X′X parallela procedat, nisi vel rectam Y O Y′ primitivaque analogaque perpendiculariter secarint (*) vel asymptotas rectae Y O Y′ perpendiculares primitivaque analogaque habuerint.

Eadem jam qua supra (pag. 14) adhibita ratiocinatione, duorum videmus ramorum tactionem *cuspidem*ve *mucronem*ve, quae primitivae contigerit, analogum poscere in altera figura punctum ejusdem singularitatis, modo fuerint coordinatae u ac v finitae, h. e. modo punctum singulare memoratum finite a rectis X′X, R A T, S B U distarit; sin minus, non semper singularitatum illam esse analogiam, sed ita se rem habere: Duo primitivae rami si rectam X′X in eodem ambae puncto tetigerint, analogos alterius figurae ramos et situ posse et directione a se invicem discrepare, h. e. vel tactionis posse respondere punctum vel punctum duplex vel ramos duos parallelos vel ramos denique non parallelos. In alterutro autem polo B vel A si fuerit primitivae mutua duorum ramorum tactio, requiri, ut alterum polum transiens recta R A T vel S B U a duobus alterius figurae ramis in uno aliquo puncto offendatur, h. e. ut analogae figurae sit in recta illa vel punctum duplex vel mutua duorum ramorum tactio. Nisi tactionis punctum primitivae hinc originem ceperit, quod rectam X′X duo ejus rami in alterutro polo A vel B tetigerint (fig. 23); quo casu requiri supra vidimus, ut alterum polum transiens recta S B U vel R A T sit analogae figurae asymptota. Recta igitur R A T vel S B U si alicubi a primitivae quodam ramo bis offenditur nec tamen transsecatur, h. e. si primitiva rectam illam tangit in rectave illa

(*) Quemadmodum in analogis fit analogarum ellipsium (fig. 21) punctis H ac H′, J ac J′.

cuspidem habeat vel *mucronem*, cujus uterque ramus ab eadem rectae illius parte maneat, analogae videmus fore *cuspidem*, in altero polo B vel A sitam (*).

Quod jan ad affirmativa vel negativa attinet signa, quae differentialibus contingant coordinatarum functionibus, vidimus supra esse $\frac{dv}{du} = \frac{d(\text{tg.}\,\chi)}{d(\text{tg.}\,\psi)} = \frac{\frac{d\chi}{\cos.^2\chi}}{\frac{d\psi}{\cos.^2\psi}} = \frac{d\chi}{d\psi} \times \left(\frac{\cos.\,\psi}{\cos.\,\chi}\right)^2$. Hujus autem producti alter factor $\left(\frac{\cos.\,\psi}{\cos.\,\chi}\right)^2$, quum sit quadratum, erit semper affirmativus, nisi de imaginario agatur figurae ramo. Quare universa functio $\frac{dv}{du}$ erit vel $>$ o vel $<$ o, prout sit $\frac{d\chi}{d\psi}$ vel $>$ o vel $<$ o, h. e. prout anguli ψ et χ in transitione a puncto C vel C'' ad contiguum ei punctum C' vel C''' (fig. 18) vel augentur ambae ambaeve minuuntur vel contra augetur alter, alter minuitur, h. e. prout vel in puncto aliquo K', polos A et B interjacente, rectam X'X offendit figurae nostrae I' C'' C''' J' recta tangentialis G' H' vel contra extra polos in puncto aliquo K rectam X'X secat figurae I C C' J recta tangentialis GH. Relationem (24) igitur Capitis I si ex hocce nostri coordinatarum systematis sensu interpretamur, affinitatem videmus nostram esse hujusmodi, ut, prout primitivae recta tangentialis rectam X'X vel intra (†) vel extra (§) polos secarit, idem possit de analoga analogae figurae tangentiali recta affirmari.

Haec jam attendentibus nobis in memoriamque revocantibus, functionem $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ [functionemque adeo quoque $\frac{dv}{du}$, modo sit $\frac{v}{u}$ finitum] esse vel $=$ o vel $= \infty$, prout tangentialis recta vel polum B vel alterum transeat polum A, facile jam erit relationes (25) nostri e coordinatarum systematis sensu interpretari. Quas huc redire apparet: Prout in primitiva figura rectae tangentialis cum recta X'X intersectionis punctum K vel intra polos antea fuerit polosque jam deserat vel contra extra polos antea fuerit polisque se jam interponat, ac prout quidem punctum K in transitione illa vel polum A vel alterum occupaverit polum B, idem esse de analogo alterius figurae intersectionis puncto affirmandum: h. e. si primitiva sinum alicubi confecerit J' C H' vel J'' C' H'' (fig. 19), in alterutrum polum B vel A, non vero in alterum polum A vel B spectan-

---

(*) Parabola e. g. si sit aliqua $y = p + (x - \alpha)^2$, cujus vertex rectam S B U in puncto tangat P, a polo B distantia B P $=$ p distante, cujus autem diametrae sint rectae X'X parallelae, analogae figurae erit in polo A *cuspis*, parabolae vertici respondens.

(†) Rectae e. g. W K (fig. 24), quae ipsa sibimet est recta tangentialis, quum rectam X'X in puncto secet V, cunctae item respondentis hyperbolae F A E D L B G tangentiales rectae partem rectae X'X offendunt A B, polis interjacentem. Primitivae autem hyperbolae (fig. 27) quum asymptotae contingant D E ac F G, rectam in puncto O transeuntes, analogae item respondentis hyperbolae asymptotae D'E' ac F'G' rectam X'X intra polos secant.

(§) Exemplum praebent analogae analogarum hyperbolarum asymptotae D E ac D' E', F G ac F' G' (fig. 22 ac 26) respondentesve sibi respondentium sibi parabolarum asymptotae (fig. 25).

tem, vel sinum confecerit J C H vel $J''' C' H'''$, ab utroque polo recedentem rectaeque $X'X$ terminum X' vel X respicientem, fore ut analoga analogum conficiat sinum, ad idem atque primitiva pertinens sinuum genus e quatuor generibus allatis. In puncto jam, quod a rectis $X'X$, R A T, S B U finite distet, primitivae functionem $\frac{dv}{du}$ vel $\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{dv}{du}$ statuamus ad valorem quidem pervenisse o vel ∞, nec tamen signi $\pm$ ibi mutationem subire, sed hunc huic functioni maximum aliquem esse minimumve valorem: idem ut in analoga fiat functione, requiri manifestum est. Quae nos docent: si primitiva alicubi a rectis $X'X$, R A T, S B U finite distarit, ejusdemque ibi tangens alterutrum polum transierit, punctumque ibi fuerit *inflexionis*, ab hac illave tangentialis rectae parte situm, idem quod de primitiva de analoga quoque esse statuendum.

Et haec quidem sufficiant de differentialibus coordinatarum functionibus ordinis primi. Ad differentiales jam functiones ordinis secundi transeuntibus nobis, nec satis simplices mutuas earum esse relationes ex aequationibus (27–31) apparet, nec significatum iis e nostri capitis coordinatarum definitione inesse satis memorabilem facile patet. Unde sequitur, affinitatem nostram ad punctorum *inflexionis* vel *radiorum osculi* aliarumve ad proprietatum a curvedine pendentium mutuam analogiam investigandam parum esse aptam, nisi proprietates illae certa aliqua directione progredienti certoque aliquo situ gaudenti primitivae contingant; quo casu fieri potest, ut singulari ista directione vel situ illo singulari mutua proprietatum curvedinem spectantium analogia aliquatenus simplicior reddatur (*). Nec vero ab altera parte simplicem aliquam ac satis memorabilem figurae, ex affinitate nostra sibi analogae, proferunt proprietatum analogiam, quae ab integralibus coordinatarum functionibus pendeat, h. e. quae superficierum magnitudinem respiciat. Elementares quidem sectores $A C C'$ ac $B C C'$ (fig. 17), quas elementaris aliqua figurae propositae pars $C C'$, radiorum vectorum ope ex utroque polo ei allatorum, includit, quotientem proferunt

$$\frac{A C C'}{B C C'} = \frac{\frac{1}{2} A C' \times C D}{\frac{1}{2} B C \times C' D'} = \frac{\frac{1}{2} A C \times C D}{\frac{1}{2} B C \times C' D'} \quad (\dagger)$$

quod supra (pag. 72) vidimus esse $= \left(\frac{v}{u}\right)^2 \cdot \frac{du}{dv}$ adeoque simplici sane ratione cum analogo alterius figurae quotiente cohaerebit. Sin ad universas transeas superficies $A C X'$ ac $B_1 C X'$ (fig. 20), quas figuraque proposita $C C' C'' C'''$ radiusque alteruter vector A C vel B C rectaque tandem $X'X$ intercludunt, nec alterutra superficies nec earundem quotiens aliave functio simplici satis ratione, si ad analogam figuram transeas, commutabitur.

(*) Quemadmodum mutuam punctorum *inflexionis* analogiam, si sit $\frac{dv}{du} = o$ vel $= \infty$, simpliciorem fieri modo videbamus.

(†) Discriminis enim $A C' - A C = C' D$ infinite parva est, quoad A C, magnitudo adeoque negligenda.

Ut jam exemplis res hucusque allatas illustremus, de nonnullis speciatim figuris videamus, ac quaenam iis ex affinitate nostra analogae respondeant lineae quaeramus. Quibus igitur aequationibus inter coordinatas u ac v satis simplicibus (33-41) simplices item vidimus Capite I° respondere inter easdem coordinatas aequationes, easdem jam aequationes nostri e coordinatarum systematis sensu interpretemur. Quod igitur primum ad aequationem attinet

$$a + bu + cv + duv = o \quad (36)$$

unum, si ponimus $u = o$ vel $v = o$, altera coordinata realem nanciscitur valorem $v = -\frac{a}{c}$ vel $u = -\frac{a}{b}$; unde apparet, lineam nostram rectam X'X in polo A sub angulo secare arc. tg. $\left(-\frac{a}{b}\right) = 180^\circ -$ arc. tg. $\left(\frac{a}{b}\right)$, in polo contra B sub angulo arc. tg. $\left(-\frac{a}{c}\right) = 180^\circ -$ arc. tg. $\left(\frac{a}{c}\right)$. Sin ponimus $u = -v$, aequatio nostra reducitur ad

$$a + (b - c)\,u - du^2 = o$$

adeoque, pro varia coefficientium a, b, c, d relatione vel nullum valorem vel duos contra valores a se diversos vel duos tandem ejusdem magnitudinis valores nanciscitur coordinata u; quod nos docet, lineae nostrae vel parallelas posse vel diversae directionis esse posse duas asymptotas vel tandem posse illam asymptotis carere. Ponamus tandem $u = \infty$ vel $v = \infty$: unus rursus alterius coordinatae prodit valor realis $v = -\frac{b}{d}$ vel $u = -\frac{c}{d}$; unde videmus, utramque rectam et RAT et SBU semel a figura nostra offendi. Quae in Capite I° sequitur aequatio

$$bu + cv + duv + eu^2 = o \quad (37)$$

si ponimus $v = o$, valores prodit reales $u = o$ ac $u = -\frac{b}{e}$, sin ponimus $u = o$, unum tantummodo admittit valorem $v = o$; quod nos docet, rectam X'X a figura nostra in polo A sub angulo transiri arc. tg. $\left(-\frac{b}{e}\right)$ in alioque praeterea ab ea offendi puncto, nec tamen, praeter haec duo, alia etiam habere cum ea puncta intersectionis, neque adeo polum B a figura nostra transiri. Ponamus jam $v = \infty$: duo produnt alterius coordinatae valores $u = \infty$ ac $u = -\frac{c}{d}$; sin ponimus $u = \infty$, prodit tantum $v = \infty$; unde rectam apparet SBU semel a figura nostra offendi, non offendi alteram rectam RAT nisi in ipso polo A, figuraeque nostrae esse praeterea asymptotam, rectae X'X perpendicularem. Ponamus tandem $u = -v$: duo produnt valores $u = o$ ac $u = \frac{b - c}{d - e}$; quorum prior rectam X'X a figura nostra secari docet, posterior contra, asymptotam ei esse, quae rectam X'X obliquo sub angulo arc. tg. $\left(\frac{b - c}{d - e}\right)$ secet. Eademque ratione procedentes, eorum ope possumus, quae supra vidimus (pag. 63 ac 72) de reliquis quoque agere Capitis I° aequationibus nonnullasque linearum ab iis indicatarum proprietates enunciare. Sin non unam alteramve velimus harum linearum proprietatem, sed universam potius earum investigare naturam, haud ita facile res procedet, nisi coordinatarum systematis hocce capite adhibiti universam antea naturam accuratius investigaverimus. Quod quum nos a re proposita abduceret, vulgaris potius coordinatarum systematis ope linearum sibi ex affinitate nostra analogarum naturam investigemus, videamusque adeo, quomodo a nostris possis hujus capitis coordinatis ad vulgares sive orthogonales transire coordinatas.

Abscissas in recta $X'X$, applicatas in recta YOY' computemus, sitque adeo coordinatarum initium punctum O, medium inter utrumque polum occupans locum. E nonnullis jam figurae cujusdam $CC'C''C'''$ (fig. 20) punctis C, C', C'', C''' perpendiculares in rectam $X'X$ ducamus CF, $C'F'$, $C''F''$, $C'''F'''$. Erit jam, si $AO = OB$ statuimus esse $= \alpha$,

$$\text{tg. } \chi = \text{tg. } (-ABC''') = -\frac{C'''F'''}{BF'''} = -\frac{C'''F'''}{BO+OF'''} = -\frac{-y}{\alpha+(-x)} = \frac{y}{\alpha-x}$$

$$\text{tg. } \chi = \text{tg. } (ABC'') = \frac{C''F''}{BF''} = \frac{C''F''}{BO+OF''} = \frac{y}{\alpha+(-x)} = \frac{y}{\alpha-x}$$

$$\text{tg. } \chi = \text{tg. } (ABC') = \frac{C'F'}{BF'} = \frac{C'F'}{BO-OF'} = \frac{y}{\alpha-x}$$

$$\text{tg. } \chi = \text{tg. } (ABC) = \text{tg. } (180^\circ - CBF) = -\text{tg. } CBF = -\frac{CF}{BF} = -\frac{CF}{OF-BO} = -\frac{y}{x-\alpha} = +\frac{y}{\alpha-x}$$

$$\text{tg. } \psi = \text{tg. } (BAC) = \frac{CF}{AF} = \frac{CF}{AO+OF} = \frac{y}{\alpha+x}$$

$$\text{tg. } \psi = \text{tg. } (BAC') = \text{etc.} \ldots .$$

Hinc jam apparet, formulas, quibus puncti cujuslibet coordinatas ψ et χ in vulgares mutare possimus coordinatas x et y, in universa figura proposita $CC'C''C'''$ fore hasce

$$u = \text{tg. } \psi = \frac{y}{\alpha+x}$$

$$v = \text{tg. } \chi = \frac{y}{\alpha-x}$$

Inter aequationes jam (33—41), quarum mutuam analogiam Capite I° vidimus, simplicissima prima prodit

$$u^m v^n = a \quad (33)$$

cui ejusdem formae aequationem respondere vidimus $u^m v^n = {}^1/a$, una tantum constante a discrepantem a primitiva. Sit e. g. $m = o$ vel $n = o$ vel $m + n = o$: serierum $v = a$, $u = b$, $\frac{v}{u} = c$ cum seriebus $v' = {}^1/a$, $u' = {}^1/b$, $\frac{v'}{u'} = {}^1/c$ mutua prodit analogia supra (pag. 65) jam considerata, h. e. rectarum alterutrum polum transeuntium rectaeve $X'X$ perpendicularium. Ac perpendicularium quidem $\frac{v}{u} = c$ ac $\frac{v'}{u'} = {}^1/c$, si ad orthogonales coordinatas transgrediaris, hanc apparet esse mutuam analogiam, ut rectae

$$\frac{v}{u} = c$$
$$\left(\frac{y}{\alpha - x}\right)\left(\frac{\alpha + x}{y}\right) = c$$
$$\frac{\alpha + x}{\alpha - x} = c$$
$$\alpha + x = \alpha c - c x$$
$$x = \alpha\left(\frac{c - 1}{c + 1}\right)$$

respondeat recta $\frac{v}{u} = {}^1/c$ sive $x = \alpha \left(\frac{\frac{1}{c} - 1}{\frac{1}{c} + 1}\right) = \alpha\left(\frac{1 - c}{1 + c}\right) = -\alpha\left(\frac{c - 1}{c + 1}\right)$ h. e. ut cuilibet perpendiculari, e. g. $x = a$, alia respondeat recta $x = - a$, ab altera axis $Y O Y'$ parte sita, sed eadem, atque primitiva, distantia ab illa distans.

Sit jam in aequatione (33) $n = -1$, m contra quemlibet designet numerum, sive affirmativum sive negativum, sive integrum sive fractionalem. Mutua ita prodit analogia linearum

$$v = \frac{u^m}{a} \quad \text{ac} \quad v = a\, u^m \quad (34)$$

quae, si ad orthogonales transimus coordinatas, formam induunt

$$\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) = {}^1/a \left(\frac{y}{\alpha + x}\right)^m \quad \text{ac} \quad \left(\frac{y}{\alpha - x}\right) = a\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)^m$$

sive $y^{m-1} = a\,(\alpha + x)^{+m}\ (\alpha - x)^{-1}$ ac $y^{m-1} = {}^1/a\ (\alpha + x)^{+m}\ (\alpha - x)^{-1}$
vel, coordinatarum initio a puncto O in polum translato, hanc referunt formam

$$y^{m-1} = \frac{a\, x'^m}{2\,\alpha - x} \quad \text{ac} \quad y^{m-1} = \frac{x'^m}{a\,(2\,\alpha - x)}$$

cujusmodi lineae universo nomine *ellipsium varii ordinis* indicari solent. Unde, ob mutuam coordinatarum u ac v symmetriam saepius jam consideratam, aliarum quoque, si m ponimus $= -1$, n indefinito relicto, sequitur linearum analogia

$$u = \frac{v^n}{a} \quad \text{ac} \quad u = a v^n$$
$$\text{sive } y^{n-1} = \frac{a\, x''^n}{2\,\alpha + x} \quad \text{ac} \quad y^{n-1} = \frac{x''^n}{a\,(2\,\alpha + x)}$$

h. e. earundem atque supra *varii ordinis ellipsium*, sed quibus polus B poli A vices agit.

Sit e. g. $m = +1$, $n = +1$: primitiva formam induit

$$uv = a$$
$$\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) = a$$
$$y^2 = a\,(\alpha^2 - x^2)$$
$$y^2 + a\,x^2 = \alpha^2 a$$
$$\frac{y^2}{\alpha^2 a} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$$

adeoque ellipsin indicat AHBJ (fig. 21), cui centrum est O, axes autem AB sive $2\,\alpha$ ac HJ sive $2\,\alpha\,\sqrt{a}$, vertices tandem A et B; hujusmodi igitur ellipsi alia respondet ex affinitate nostra ellipsis $uv = {}^1/a$ sive $\frac{a\,y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ sive AH′BJ′, cum primitiva congruens ellipsi, nisi quod alter axis $HJ = 2\,\alpha\,\sqrt{a}$ in $H'J' = \frac{2\,\alpha}{\sqrt{a}}$ abiit.

Sit jam $m = -1$, $n = +2$: primitivae haecce contingit aequatio

$$u = \frac{v^2}{a}$$

$$\frac{ay}{\alpha + x} = \left(\frac{y}{\alpha - x}\right)^2$$

$$y \qquad (\alpha - x)^2 (\alpha + x)$$

$$a\,(\alpha - x)^2 = y\,(\alpha + x)$$

$$ax^2 - 2\alpha ax + \alpha^2 a - xy - \alpha y = 0$$

$$y = \frac{a\,(\alpha - x)^2}{\alpha + x}$$

qua hyperbola indicatur FBRTJG (fig. 22), rectam X′X in polo B tangens; recta RAT ei est asymptota, altera autem asymptota FG rectam X′X obliquo sub angulo secat arc. tg. a. Huic igitur hyperbolae alia respondet ex affinitate nostra hyperbola F′BRTJ′G′, rectam X′X ipsa quoque in polo B tangens, recta RAT ipsa quoque asymptota gaudens; sed altera ejus asymptota F′G′ rectam X′X sub angulo secat arc. cotg. a.

Sit jam $m = -1$, $n = +3$: primitivae aequatio $u = \frac{v^3}{a}$ formam in vulgari coordinatarum systemate induit hancce

$$\frac{ay}{\alpha + x} = \left(\frac{y}{\alpha - x}\right)^3$$

$$y \qquad (\alpha - x)^3 (\alpha + x)$$

$$a\,(\alpha - x)^3 = y^2\,(\alpha + x)$$

sive, coordinatarum initio a puncto O in polum B translato atque substitutione adeo facta $x - \alpha = \xi$,

$$-\,a\,\xi^3 = y^2\,(2\,\alpha + \xi)$$

$$y = \pm\,\frac{\xi}{\sqrt{a}}\,\sqrt{\frac{-\,\xi}{2\,\alpha + \xi}}$$

qua aequatione, si sit $a = 1$, *cissois* indicatur, sin non sit $a = 1$, linea indicatur, a cissoide paullulum discrepans, iisdem tamen fere quibus cissois proprietatibus gaudens. Figurae enim nostrae RHBJT (fig. 23) recta RAT est asymptota, punctum autem *flexus contrarii* in polo B; duobusque constat figura nostra ramis RHB ac BJT, sui invicem similibus rectamque X′X in polo B tangentibus, nec extra rectas RAT ac SBU extenditur. Huic igitur primitivae analoga respondet figura $u = av^3$ sive $y = \pm\,\xi\sqrt{a}\sqrt{\frac{-\,\xi}{2\,\alpha + \xi}}$ sive RH′BJ′T, rectam X′X in polo B ipsa quoque tangens, rectaque RAT ipsa quoque asymptota gaudens, nec aliter a primitiva discrepans, nisi quod hujus brachia BH ac BJ longius a recta X′X quam brachia BH′ ac BJ′ recedant.

Harum autem linearum, quas universa complectitur aequatio (33), si analogiam in identitatem abire velis, requiri supra vidimus, ut sit $b = +1$ vel $= -1$. Circulum igitur apparet $uv = 1$ sive ANBL (fig. 21) sibimet ipsum ex affinitate nostra respondere: idemque in hyperbolas valere $u = v^2$, $v = u^2$, $u + v^2 = o$, $v + u^2 = o$, rectam X′X in alterutro polo tangentibus, rectaque RAT vel SBU asymptota gaudentibus, quarum autem altera asymptota rectam X′X sub angulo $+ 45$ vel $- 45$ graduum secat: idemque tandem affirmari posse de cissoidibus $u = v^3$ ac $v = u^3$.

Missa jam aequatione (33), ad reliquas transeamus Capitis I aequationes (35–41). Prima se offert primi gradus aequatio

$$au + bv + 1 = o \qquad (35)$$

quae nostro in coordinatarum systemate hanc indicat lineam

$$a\left(\frac{y}{\alpha + x}\right) + b\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) + 1 = o$$

$$ay(\alpha - x) + by(\alpha + x) + (\alpha^2 - x^2) = o$$

$$\alpha^2 + \alpha y(b + a) + xy(b - a) - x^2 = o$$

$$y = \frac{\alpha^2 - x^2}{(a - b)x - \alpha(a + b)}$$

h. e. hyperbolam FAEDLBG (fig. 24), utrumque polum permeantem, cujus altera asymptota DE sive $x = \alpha \frac{a + b}{a - b}$ rectis RAT ac SBU est parallela, altera vero asymptota FG obliquo sub angulo GVX = arc. cotg. $(a - b)$ rectam X′X secat. Huic igitur lineae hanc Caput I nos docet respondere lineam

$$bu + av + uv = o$$

$$\frac{by}{\alpha + x} + \frac{ay}{\alpha - x} + \left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) = o$$

$$y \qquad\qquad\qquad (\alpha^2 - x^2)$$

$$b(\alpha - x) + a(\alpha + x) + y = o$$

$$y = (b - a)x - \alpha(b + a)$$

h. e. rectam WPVK (fig. 24), quae rectam X′X sub angulo WVX = arc. tg. $(a - b)$ in puncto secat V, quod a puncto O inter polos medio eadem distat distantia, qua distat ab eo punctum, quo hyperbolae FAEDG perpendicularis asymptota DE rectam polos conjungentem X′X secat; at hyperbolae hocce intersectionis punctum ab altera situm est rectae YOY′ parte, ab altera rectae intersectio V. Nostrum igitur quod hocce capite adhibuimus coordinatarum systema cum vulgari ita cohaerere vides systemate, ut generalis primi gradus aequatio $au + bv + 1 = o$, quae in hoc rectam quamlibet designat lineam, in illo lineam repraesentet, rectae isti e Capitis IV. affinitate analogam, aequatio contra $bu + av + uv = o$ nostro hujus capitis sensu rectam quamlibet significet lineam, at in vulgari systemate lineam indicet, rectae isti e Capitis IV affinitate analogam.

Ad secundi jam gradus aequationes transeuntibus nobis prima se offert aequatio (36)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{a + bu + cv + duv = o}{a + \frac{by}{\alpha + x} + \frac{cy}{\alpha - x} + d\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) = o}}{a(\alpha^2 - x^2) + by(\alpha - x) + cy(\alpha + x) + dy^2 = o}}{dy^2 - ax^2 + (c - b)xy + (c + b)\alpha y + \alpha^2 a = o}$$

qua aequatione vel ellipsis indicatur vel hyperbola vel parabola (*), utrumque polum permeans. (†) Ab eaque Caput I nos docet, non aequationis forma, sed coefficientium tantum magnitudine discrepare analogam

$$\frac{d + cu + bv + auv = o}{ay^2 - dx^2 + (b - c)xy + (b + c)\alpha y + \alpha^2 a = o}$$

Ac prout quidem primitiva fuerit vel parabola (§) vel ellipsis vel hyperbola, idem erit de analoga dicendum; prout enim fuerit in primitiva $\left(\frac{c - b}{2}\right)^2 + a\alpha \gtreqless o$, in analoga item fore apparet $\left(\frac{c - b}{2}\right)^2 + a\alpha \gtreqless o$.

Quae sequitur in Capite I° aequatio (37)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{bu + cv + duv + eu^2 = o}{\frac{by}{\alpha + x} + \frac{cy}{\alpha - x} + d\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) + e\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)^2 = o} \quad \frac{(\alpha + x)^2(\alpha - x)}{y}}{b(\alpha^2 - x^2) + c(\alpha + x)^2 + dy(\alpha + x) + ey(\alpha - x) = o}}{(c - b)x^2 + (d - e)xy + 2\alpha cx + (d + e)\alpha y + (b + c)\alpha^2 = o}$$

hyperbolam (**) indicat FVPADEJG (fig. 26). (††), quae polum A transeat (§§), asymp-

(*) Quanti enim $\left(\frac{c - b}{2}\right)^2 + a\alpha$, nisi coefficientes a, b, c definiamus, arbitraria est magnitudo.

(†) Aequatio enim nostra, si ponimus $y = o$, reducitur ad $a(\alpha^2 - x^2) = a(\alpha + x)(\alpha - x) = o$.

(§) Quemadmodum contingit primitivae NKBHPAJ (fig. 25).

(**) Quum sit $\left(\frac{d - e}{2}\right)^2 - o\,(c - b) > o$.

(††) Ne justo majus spatium occuparet figura 26, analogarum hyperbolarum alteri rami EJG ac E'J'G' omissi sunt; quas cogitatione suppleat lector benevolus.

(§§) Factore enim $\alpha + x$ gaudet quae hypothesi $y = o$ ex aequatione nostra prodit aequatio $b(\alpha^2 - x^2) + c(\alpha + x)^2 = o$.

totaque gaudeat DE, rectis RAT ac SBU parallela (*). Respondetque ei hyperbola F'V'P'AD'E'J'G' sive

$$\frac{du + ev + buv + cu^2 = o}{(e - d) x^2 + (b - c) xy + 2\alpha ex + (b + c) \alpha y + (d + e) \alpha^2 = o}$$

polum A ipsa quoque permeans, asymptotamque habens D'E', ipsam quoque rectis RAT ac SBU parallelam. Quae in Capite I° sequitur deinde relatio (38) eandem rursus profert earumdem hyperbolarum analogiam, non tamen polum jam A, at alterum contra polum B transeuntium. Varia autem constantium a, b, c, d, e definitione varia oritur hinc simpliciorum linearum analogia. Ponamus e. g. b = o: primitiva polum A vel B ita transit, ut rectam X'X ibi tangat: analogae autem asymptota, rectae X'X perpendicularis, in ipsam abit rectam SBU vel RAT.

Ab aequationibus jam gradus secundi si ad tertii gradus transimus aliasve algebraicas inter coordinatas u ac v aequationes, linearum sibi respondentium analogia prodibit haud ita simplicium; quare ad transcendentes potius transeamus aequationes. Quarum vidimus Capite I° esse nonnullas —— quas universa complectitur aequatio (40) —— quae, si ad analogas transeas aequationes, vix ullam subeunt nisi mutati transcendentium functionum ordinis mutationem: cujusmodi aequationes, si simplicior iis contigerit aequationis (41) forma, affinitate vidimus nostra eatenus tantummodo mutari, quod alio atque antea ordine constantes sive coefficientes sint dispositae. Quum tamen aequatio (41), si nostri e coordinatarum systematis sensu coordinatas u ac v interpretamur, lineam indicet haud ita usitatam, paullulum etiam simpliciorem eandem reddamus, primitivamque statuamus figuram alterutra harum indicari aequationum

$$\text{arc. tg. } u + \text{arc. tg. } v = e$$

$$\text{arc. tg. } u - \text{arc. tg. } v = e$$

quibus apparet respondere analogas

$$\text{arc. cotg. } u + \text{arc. cotg. } v = e$$

$$\text{arc. cotg. } u - \text{arc. cotg. } v = e$$

Qua ratione si aequationem (41) simplificamus, transcendens quidem illa remanet aequatio, at potest tamen ad algebraicam reduci formam. Quum enim sit

$$\text{arc. tg. } u + \text{arc. tg. } v = \text{arc. tg. } \left(\frac{u + v}{1 - uv}\right)$$

$$\text{arc. tg. } u - \text{arc. tg. } v = \text{arc. tg. } \left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

(*) Terminus enim, in quo secunda coordinatae y occurrat potestas, in aequatione nostra frustra quaeritur.

apparet, si primitivae contigerit aequatioñis forma

$$\text{arc. tg. } u + \text{arc. tg. } v = e$$

eandem aequatione quoque posse indicari

$$\text{arc. tg. } \left(\frac{u + v}{1 - uv}\right) = e$$

$$\frac{u + v}{1 - uv} = \text{tg. } e$$

$$u + v = \text{tg. } e - (\text{tg. } e)\, uv$$

adeoque unam quamdam esse linearum, quarum mutuam analogiam nos relatio (36) supra docuit; ac aequationem quidem contingere ei, si ad orthogonales transeamus coordinatas; hancce

$$\frac{y}{\alpha + x} + \frac{y}{\alpha - x} = \text{tg. } e - (\text{tg. } e)\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right)$$

$$y\,(\alpha - x) + y\,(\alpha + x) = (\text{tg. } e)\,(\alpha^2 - x^2) - (\text{tg. } e)\, y^2$$

$$x^2 + y^2 + (2\,\alpha \text{ cotg. } e)\, y - \alpha^2 = o$$

qua circulus indicatur A J B P K (fig. 28), utrumque polum pervadens, cujus centrum punctum quoddam rectae Y O Y′ occupat C, ab O distantia distans O C $= \alpha$ cotg. e. Analoga respondet huic linea

$$\text{arc. cotg. } u + \text{arc. cotg. } v = \text{arc. cotg. } \left(\frac{uv - 1}{u + v}\right) = e$$

$$\frac{uv - 1}{u + v} = \text{cotg. } e$$

$$u + v = (\text{tg. } e)\, uv - \text{tg. } e$$

$$x^2 + y^2 - (2\,\alpha \text{ cotg. } e)\, y - \alpha^2 = o$$

h. e. circulus A J′ B P′ K′, utrumque polum ipse quoque permeans, cui eadem atque primitivae contingit radii magnitudo A C′ = A C; sed ab altera rectae X′X parte situm est primitivae centrum C sive $x = o$, $y = + \alpha$. cotg. e, ab altera centrum C′ sive $x = o$, $y = - \alpha$. cotg. e. Primitiva contra si fuerit

$$\text{arc. tg. } u - \text{arc. tg. } v = \text{arc tg. } \left(\frac{u - v}{1 + uv}\right) = e$$

$$\frac{u - v}{1 + uv} = \text{tg. } e$$

$$u - v = (\text{tg. } e)\, uv + \text{tg. } e$$

$$\frac{y}{\alpha + x} - \frac{y}{\alpha - x} = (\text{tg. } e)\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y}{\alpha - x}\right) + \text{tg. } e$$

$$y\,(\alpha - x) - y\,(\alpha + x) = y^2.\ \text{tg. } e + (\text{tg. } e)\,(\alpha^2 - x^2)$$

$$x^2 - y^2 - (2 \text{ cotg. } e)\, xy - \alpha^2 = o$$

h. e. si primitiva fuerit hyperbola aequilatera D P B F G A K E (fig. 27), utrumque polum permeans, cujus centrum punctum occupet O, cujus autem asymptotae F G ac D E rectam X′X angulis secent $GOA = \frac{e}{2}$ ac $DOA = 90^\circ + \frac{e}{2}$ —— analoga quoque erit hyperbola aequilatera $D'BP'F'G'K'AE'$.

$$\frac{\frac{\text{arc. cotg. } u - \text{arc. cotg. } v = \text{arc. cotg. } \left(\frac{uv+1}{v-u}\right) = e}{v - u = (\text{tg. } e)\, uv + \text{tg. } e}}{x^2 - y^2 + (2 \text{ cotg. } e)\, xy - \alpha^2 = 0}$$

utrumque polum ipsa quoque pervadens, cujus centrum punctum rursus occupat O, at cujus asymptotae angulos cum recta $X'X$ faciunt $G'OA = 90^\circ - \frac{e}{2}$ ac $D'OA = 180^\circ - \frac{e}{2}$. Primitivam autem si cum analoga congruere velis, abeat utraque necesse est in circulum $x^2 + y^2 = \alpha^2$ sive ANBL (fig. 21), quem sibimet ipsum respondere supra jam vidimus (pag. 85), in hyperbolamve aequilateram $x^2 - y^2 = \alpha^2$ sive $VBWV'AW'$ (fig. 27), cujus vertices ipsos occupant polos, cujus autem asymptotae angulos cum recta $X'X$ faciunt $+ 45$ vel $- 45$ graduum.

Analogas autem sibi lineas si statuas non quatuor illis, de quibus modo agebamus, sed aliis indicari transcendentibus inter coordinatas u ac v aequationibus, linearum analogia prodibit minus usitatarum. Quare haec jam quidem mittamus, hoc tantum unum addentes: Quum rectae cuilibet hyperbola ex affinitate nostra respondeat, utrumque polum pervadens (ut supra vidimus pag. 85), fore ut n-gono seu primitivae, ex n rectarum intersectione ortae, n-gonum respondeat ut ita dicam hyperbolicum seu n constans ramis, qui singuli singularum istiusmodi hyperbolarum sint partes; quod ut in vulgare abeat n-gonum, requiri, ut primitivi latera partes fuerint rectarum alterutrum polum transeuntium rectaeve $X'X$ perpendicularium.

Affinitatis autem nostrae, aequationibus $(\text{tg. } \psi)(\text{tg. } \psi') = 1$, $(\text{tg. } \chi)(\text{tg. } \chi') = 1$ indicatae, quae e generali Capitis I$^{\underline{\text{i}}}$ affinitate $uu' = 1$, $vv' = 1$ nostra hujus capitis coordinatarum u ac v definitione orta est, ut magis etiam perspicua nobis sit natura, aliis jam inter alias coordinatas aequationibus eandem indicemus. Ac primum quidem non angulorum ψ ac χ tangentibus, sed ipsis hisce angulis in affinitate nostra definienda utamur: Aequationes ita produnt

$$\begin{array}{lcl}
\psi' = 90^\circ - \psi & \text{ac} & \chi' = 90^\circ - \chi \\
\psi' = 90^\circ - \psi & \text{ac} & \chi' = 270^\circ - \chi \\
\psi' = 270^\circ - \psi & \text{ac} & \chi' = 90^\circ - \chi \\
\psi' = 270^\circ - \psi & \text{ac} & \chi' = 270^\circ - \chi
\end{array}$$

Itaque quatuor credas una illa de qua hucusque egimus affinitate indicari affinitates inter se diversas, h. e. cuilibet figurae quatuor ex affinitate nostra respondere figuras analogas. Attendamus vero, duarum rectarum unum tantum esse punctum intersectionis, e quatuorque adeo uni alicui puncto $\psi = a$, $\chi = b$ respondentibus angulorum alterius figurae valoribus

$$\begin{array}{ll} \psi' = 90^\circ - a & \chi' = 90^\circ - b \\ \psi' = 90^\circ - a & \chi' = 270^\circ - b \\ \psi' = 270^\circ - a & \chi' = 90^\circ - b \\ \psi' = 270^\circ - a & \chi' = 270^\circ - b \end{array}$$

tres esse, qui imaginaria, unum tantum, qui reale indicet punctum. Affinitatem itaque nostram, quae una erat tangentium, unam quoque esse figurarum, quadruplicem contra esse patet angulorum, ita tamen ut non cunctae simul, sed altera post alteram prodant quatuor istae angulorum affinitates, h. e. ut, pro vario punctorum sibi analogorum situ, modo 90° modo 270° conficiat respondentium sibi angulorum summa $\psi + \psi'$ vel $\chi + \chi'$.

In affinitate jam nostra enuncianda nec angulis utamur ψ et χ nec horum tangentibus, sed vulgaribus potius sive orthogonalibus coordinatis x et y. In memoriam igitur revocantibus nobis, quibusnam possis formulis a nostris hujus capitis coordinatis ad vulgares transire coordinatas, aequationes se offerunt, affinitatis nostrae indicatrices:

$$\left(\frac{y}{\alpha + x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha + x'}\right) = 1 \qquad \left(\frac{y}{\alpha - x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha - x'}\right) = 1$$

$$(\alpha + x')(\alpha + x) = yy' = (\alpha - x)(\alpha - x')$$

$$\alpha^2 + xx' - 2\alpha(x + x') = \alpha^2 + xx' + 2\alpha(x + x')$$

$$o = 4\alpha(x + x')$$

$$x' = -x$$

$$y' = \frac{(\alpha + x)(\alpha + x')}{y} = \frac{(\alpha + x)(\alpha - x)}{y} = \frac{\alpha^2 - x^2}{y}$$

unde sequitur aequatio differentialis:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{d\left(\frac{\alpha^2 - x^2}{y}\right)}{d(-x)} = \frac{\left(\frac{-2xy\,dx - (\alpha^2 - x^2)\,dy}{y^2}\right)}{-dx} = \frac{2x}{y} + \frac{\alpha^2 - x^2}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

Aequationibus hisce constantem vides inesse arbitrariam α, quam in aequationibus fundamentalibus $uu' = 1$ $vv' = 1$ frustra quaeras. Unde tamen cave ne efficias, posteriorem hancce figurarum affinitatem, quam orthogonalibus coordinatis adhibitis oriri vides, minus esse definitam illâ, unde exiimus. Eadem enim arbitraria constans superiori quoque inest affinitati $uu' = 1$, $vv' = 1$, non tamen aequationibus inest sive mutuae analogarum coordinatarum relationi, sed ipsis inest coordinatis u ac v sive ipsi potius coordinatarum systemati hocce capite adhibito. Utriusque enim poli situm si indefinitum relinquimus, neque erit mutua horum distantia definita, eritque adeo arbitraria quoque distantiae hujus cum longitudinis unitate relatio α.

Harum autem aequationum ope, quibus affinitas nostra, vulgari adhibito coordinatarum systemate, indicatur, nonnullas potuisses ex affinitatis nostrae proprietatibus supra investigatis eâdem qua supra factum est facilitate invenire. Quod e. g. functionis $\frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{du}$ in transitione ad analogam functionem $\frac{u'}{v'} \cdot \frac{dv'}{du'}$ constantia nos supra docuit (pag. 73) —— si primitiva finite alicubi a rectis $X'X$, RAT, SBU distarit fueritque ibi rectae $X'X$ perpendicularis, eandem requiri in analoga figura perpendicularitatem —— idem e differentiali quoque aequatione modo allata facile apparet. Sit enim alicubi $\frac{dy}{dx} = \infty$: erit analogae $\frac{dy'}{dx'} = 2\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{\alpha + x}{y}\right)\left(\frac{\alpha - x}{y}\right)(\infty)$ eritque adeo $\frac{dy'}{dx'}$ quoque $= \infty$, modo $\frac{x}{y}$, $\frac{\alpha + x}{y}$, $\frac{\alpha - x}{y}$ finita esse statuas, h. e. modo primitivae punctum de quo agatur finite a rectis $X'X$, RAT, SBU distarit. Quin possis satis multa, quae relationem spectant, qua cum recta $X'X$ rectave YOY' analogae sibi figurae cohaerent —— distantias e. g. $y - x\frac{dy}{dx}$ ac $y' - x'\frac{dy'}{dx'}$, quibus a puncto O distant analogarum tangentium cum recta $X'X$ puncta intersectionis —— facilius ex aequationibus modo allatis quam e fundamentalibus affinitatis nostrae aequationibus efficere. Sin illa spectas, quae nostro coordinatarum systemati nostraeque adeo quoque affinitati sunt propria, h. e. quae ab utroque polo pendent, non faciliorem orthogonalium coordinatarum usus, at multo contra difficiliorem reddet mutuae proprietatum analogiae investigationem. Quod e. g. perpendicularium quotiens, ex utroque polo in asymptotam quamlibet ductarum, si ad analogas transeas perpendiculares, in analogam alterius figurae asymptotam ductas, intactam suam servet magnitudinem (ut supra vidimus pag. 78), non potuisses, orthogonalibus coordinatis adhibitis, nissi prolixioribus formulis reperiore.

THESES.

I.

Πάντα χωρεῖ καὶ οὐδὲν μένει.

HERACLITUS.

II.

Caussas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quae et vera sint et earum phaenomenis explicandis sufficiant.

NEWTON.

III.

Θαυμάζεται τῶν μὲν κατὰ φύσιν συμβαινόντων, ὅσων ἀγνοεῖται τὸ αἴτιον.

ARISTOTELES.

IV.

Le principe de d'Alembert.... ne revêt la forme d'un principe, que par un certain tour d'expression qu'on lui donne.

POINSOT.

V.

Linearium coordinatarum systema, quo usus est Plückerus (*Analytische Entwickelungen.* Vol. II), ad plerasque figurarum qualitates investigandas haud minus quam vulgare sive orthogonalium coordinatarum systema valet.

VI.

Si l'on avait primitivement donné le nom de *force* à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait eu pour ces nouvelles forces une Statique toute semblable (*à la Statique actuellement existante*).

POINSOT.

VII.

Die Eigenthümlichkeit und die Stärke der analytischen Geometrie beruht in dem vollständigsten Parallelismus zwischen geometrischen und analytischen Formen oder, um mich bestimmter auszudrücken, in dem Umstande, dass wir durch das Zusammenrücken, das Zusammenwachsen gleichsam von Construction und analytischer Darstellung dahin gelangen, über die grossartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebieten zu können, ohne irgend einen der unersetzlichen Vortheile, welche die unmittelbare Anschauung gewährt, aufzugeben.

PLÜCKER.

VIII.

E variis rationibus, quibus sonorum altitudinem cognoscere possimus, prae ceteris praestat instrumenti usus, *Siren* dicti, quod excogitavit Cagniard-de-la-Tour.

IX.

Il semble qu'on pourrait produire des sons, qui seraient encore perceptibles, quoque résultants d'un nombre de chocs beaucoup plus grand que 24000 par seconde.

SAVART.

X.

The various forms, under which the forces of matter are made manifest, have one common origin, or in other words, are so directly related and mutually dependent, that they are convertible as it were one into another and possess equivalents of power in their action.

FARADAY.

XI.

Tales sunt aquae, qualis terra per quam fluunt.

SENECA.

XII.

Rejicienda hypothesis, quae geologica phaenomena bene multa e motione explicat, quam telluris subierit olim axis rotationis.

XIII.

Lapides in patria nostra hic illic sparsos e glaciei montanis molibus *(Gletscher)* originem repetiisse contendo, quae eam olim texerint.

XIV.

Botanica systematica non minus histologia atque embryologia, quam externa niti debet plantarum forma.

XV.

Le degré de confusion entre les organes de la végetation et ceux de la propagation est la mesure du degré de la simplicité du végetal entier.

JUSSIEU.

XVI.

Il n'est pas vrai, comme on l'a dit, que les métamorphoses des animaux supérieurs sont toujours une représentation successive des diverses classes inférieures.

CUVIER.

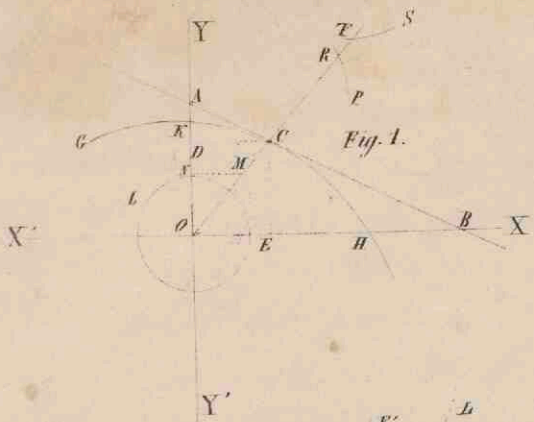


Fig. 1.

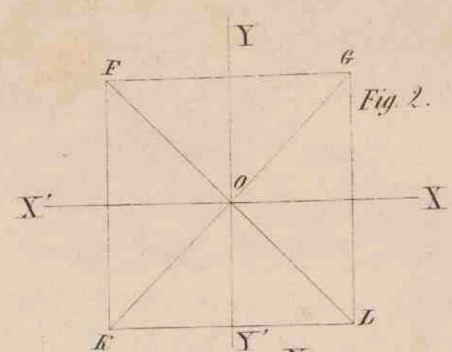


Fig. 2.

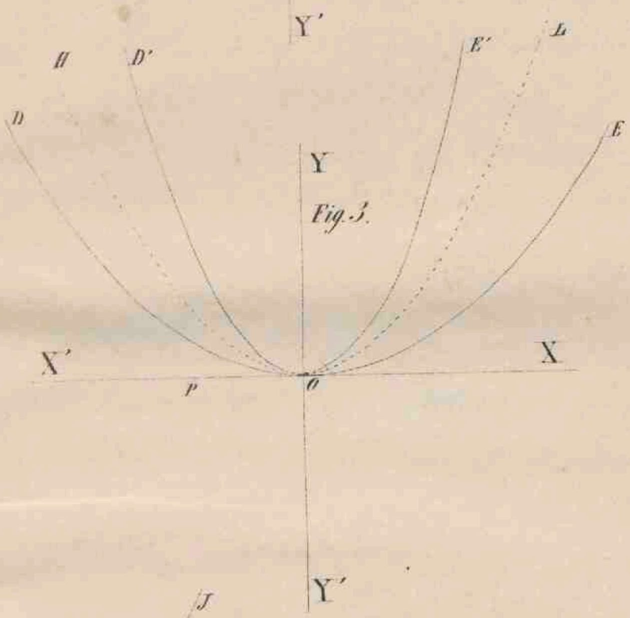


Fig. 3.

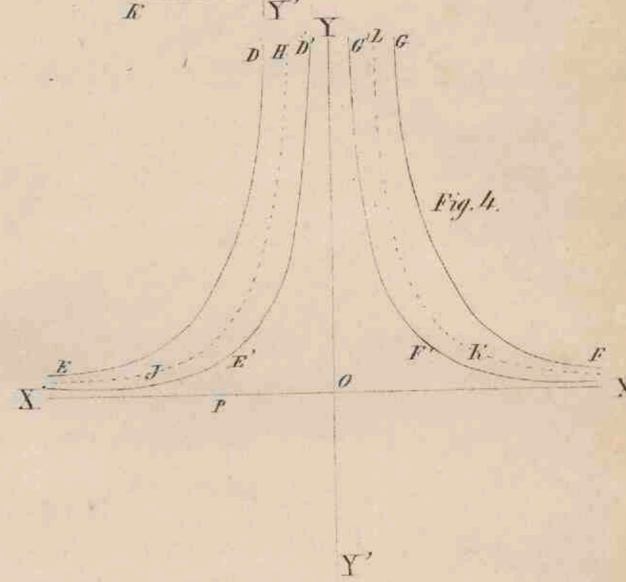


Fig. 4.

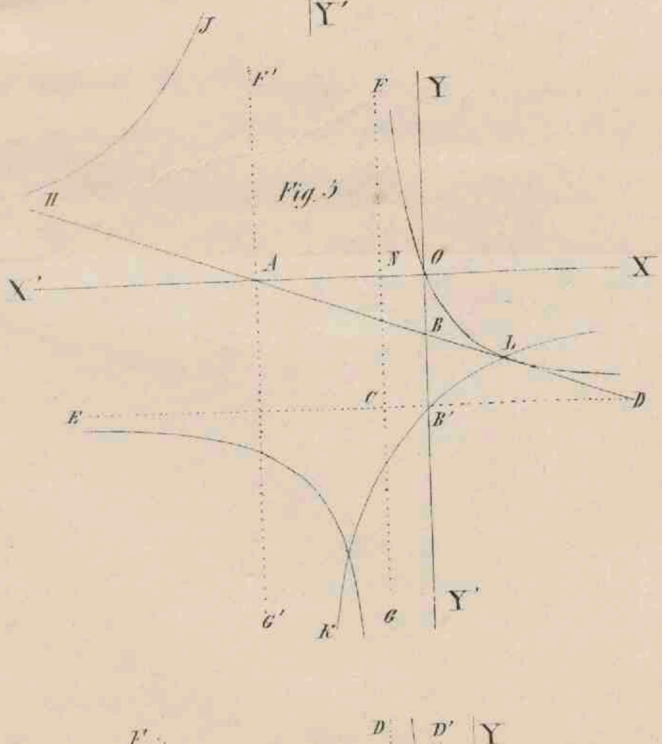


Fig. 5

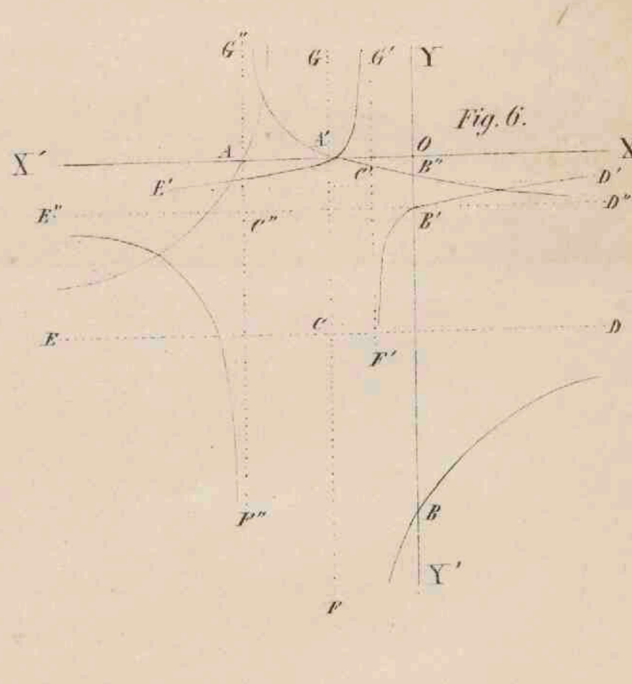


Fig. 6.

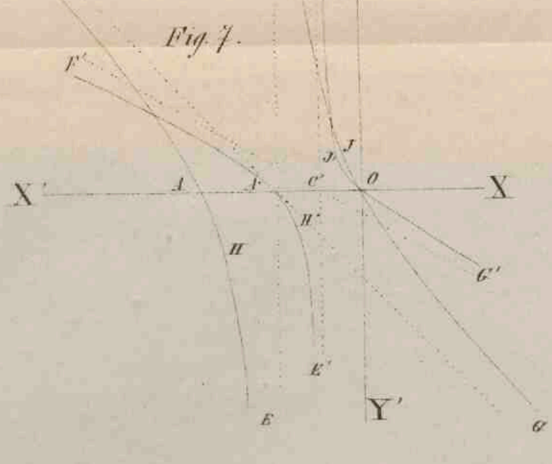


Fig. 7.

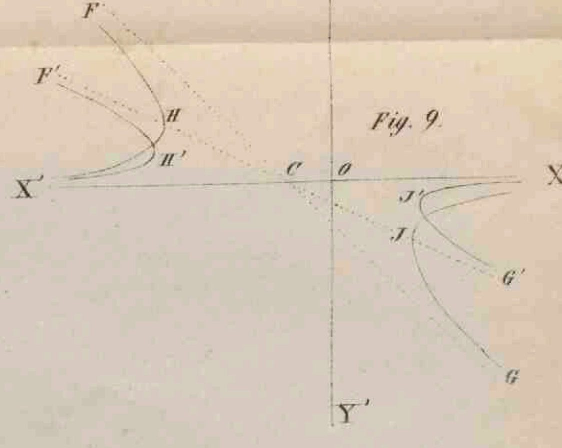


Fig. 9.

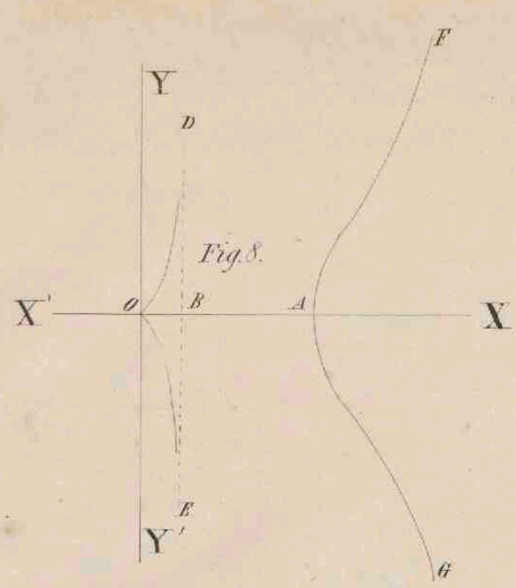


Fig. 8.

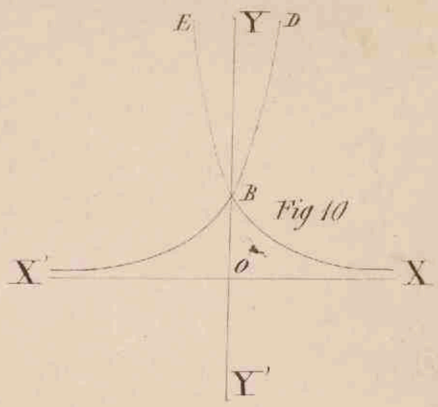


Fig 10

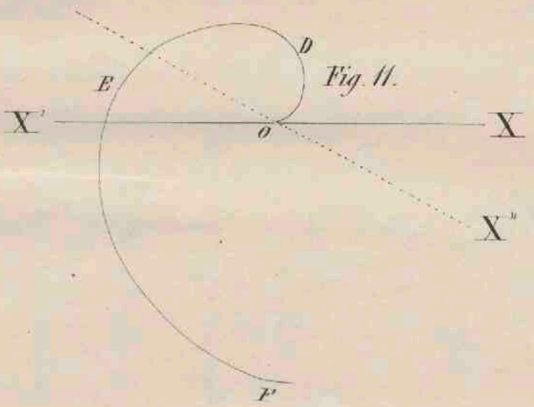


Fig. 11.

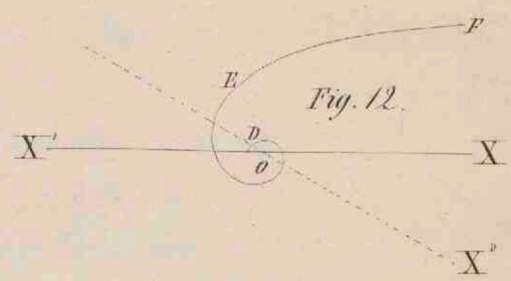


Fig. 12.

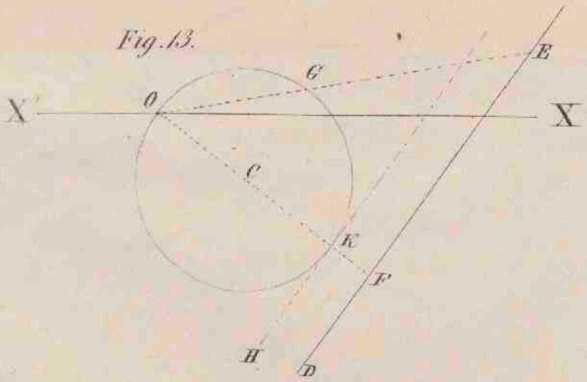


Fig. 13.

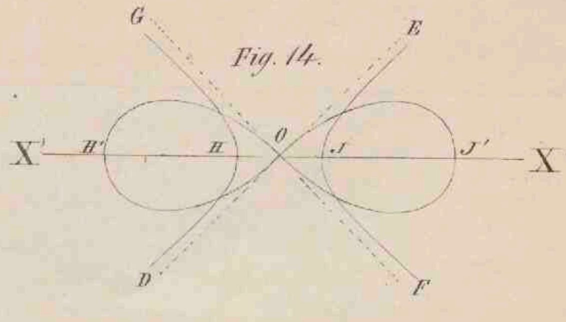


Fig. 14.

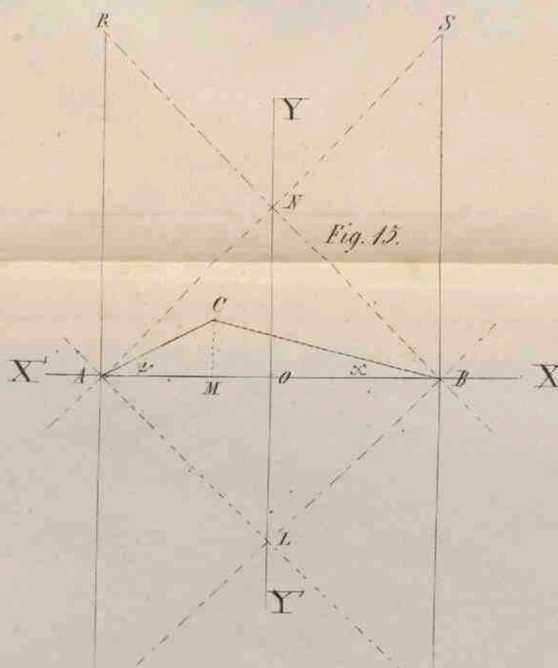


Fig. 15.

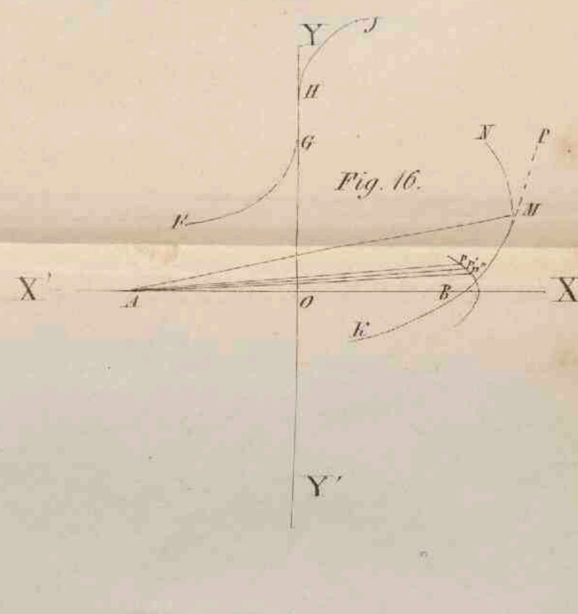


Fig. 16.

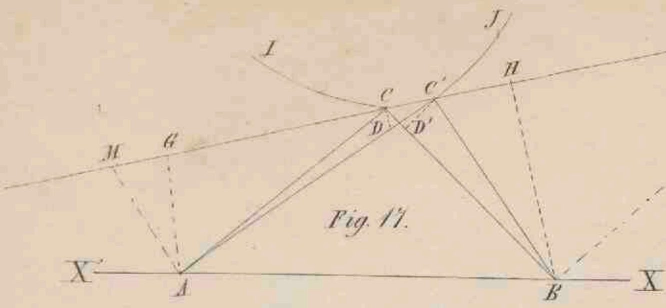


Fig. 17.

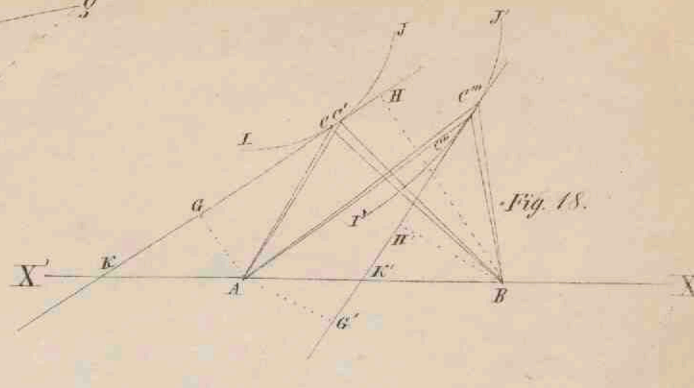


Fig. 18.

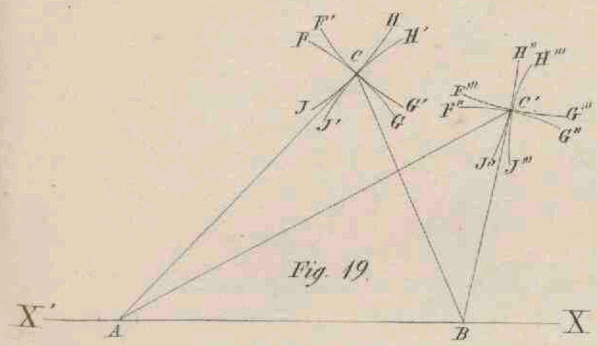


Fig. 19.

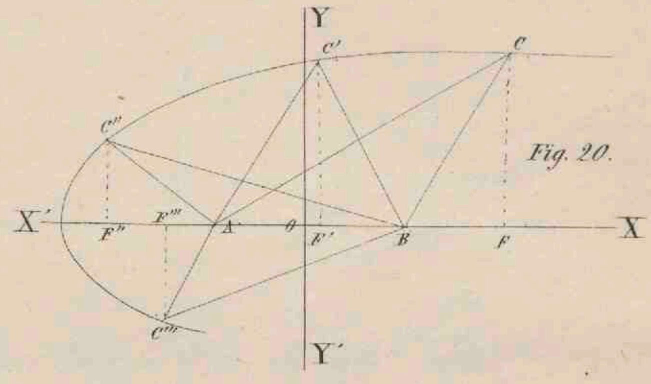


Fig. 20.

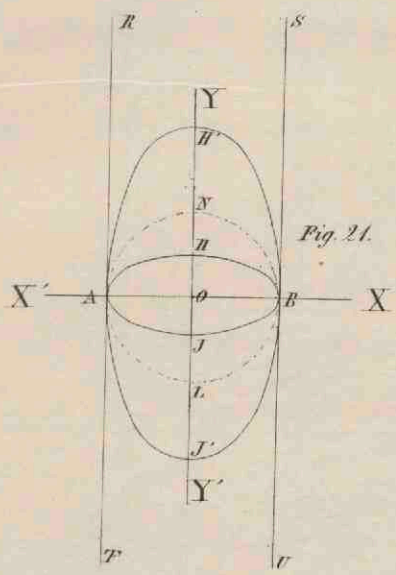


Fig. 21.

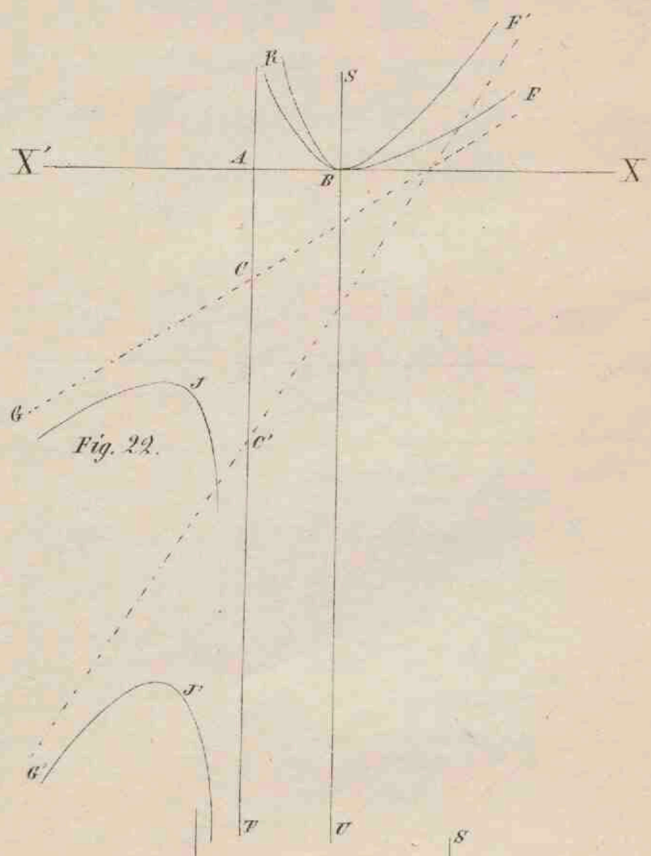


Fig. 22.

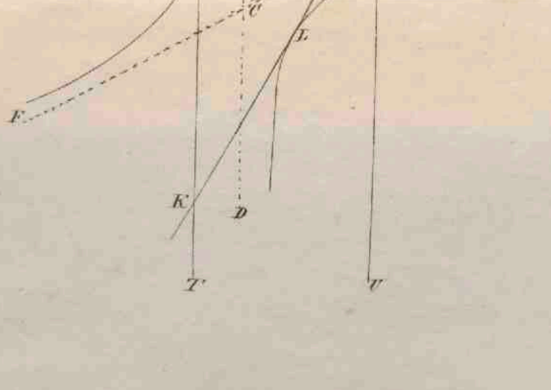


Fig. 24.

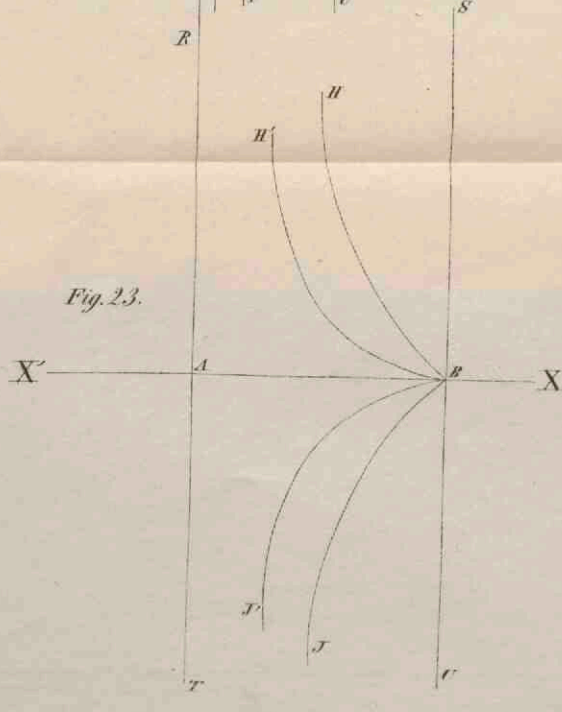


Fig. 23.

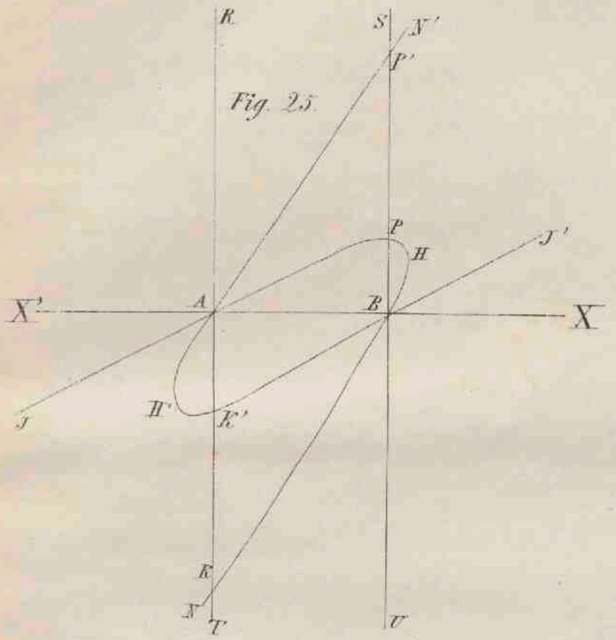


Fig. 25.

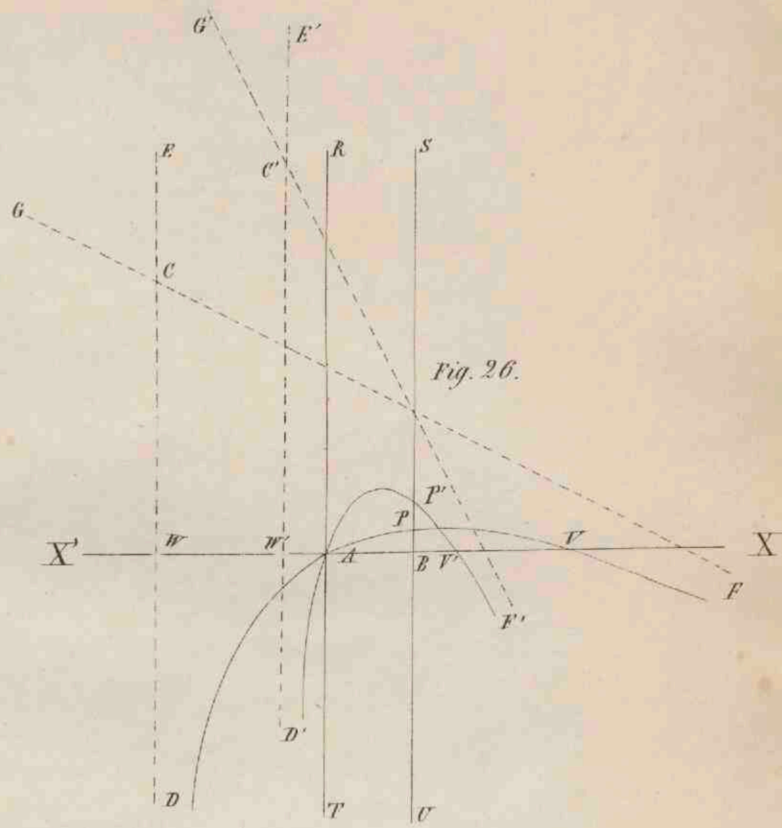


Fig. 26.

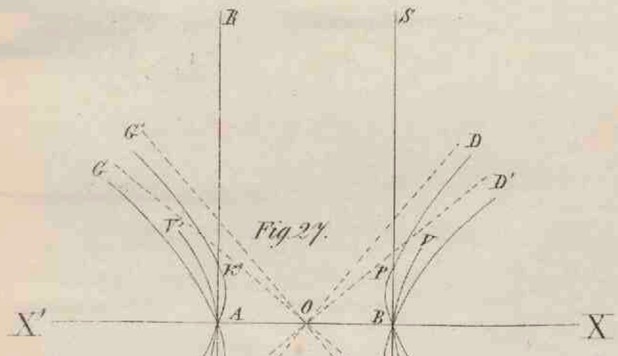


Fig 27.

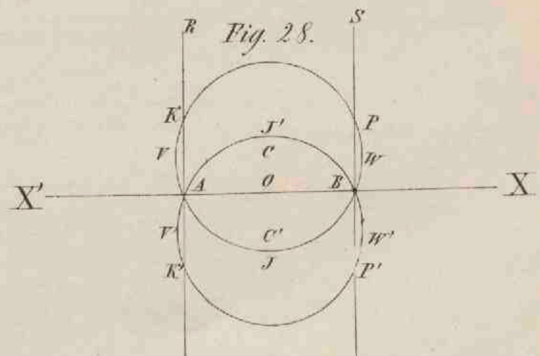


Fig. 28.