Untersuchungen über die Ptolemäische Theorie der Mondbewegung

https://hdl.handle.net/1874/340721

1661.

134

Dr P. Kempf,

Ptolemäische Theorie

der Mondbewegung.

Untersuchungen

über die

Ptolemäische Theorie

der

Mondbewegung

von

Paul Kempf,
Dr. phil.

Berlin 1878.
A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade), Stallschreiberstr. 47.

Der Mond ist schon in den ältesten Zeiten mit grosser Sorgfalt beobachtet worden. Es war ja ein mannichfaches Interesse, welches die Völker seinem Laufe zuwendeten; nicht nur weil er es war, der das Dunkel der Nächte erhellte und durch seine wiederkehrenden Lichtgestalten dem Menschen das Mittel zu einer geregelten Zeiteintheilung bot: durch die Finsternisserscheinungen hatte er in jenen Zeiten, wo die Furcht vor den Naturgewalten und dem darin geoffenbarten Willen der Götter eine so grosse Macht auf die Gemüther ausübte, noch einen besonderen Anspruch auf die Aufmerksamkeit der Völker. Wir sehen deshalb auch, dass die ältesten Mondbeobachtungen Aufzeichnungen der Finsternisse zum Gegenstand haben, und dass das Bemühen der alten Astronomen dahin gerichtet war, diese Erscheinungen mit einiger Sicherheit vorhersagen zu können. Wir finden, dass die Babylonier und Chaldäer, die den Griechen so manches Denkmal ihrer astronomischen Thätigkeit hinterliessen, schon Einzelnes über die wahre Bewegung des Mondes erforscht hatten, aber es war ein Verdienst, welches den Hellenen überlassen blieb, dieses Einzelne theoretisch zu verbinden. Hipparch und Ptolemäus vor Allem sind es, die auch auf diesem Gebiete unserer Wissenschaft den Grund zu der heutigen Strenge gelegt haben. Jener begann den Bau, wies die Principien, nach welchen man verfahren müsse und that die ersten grossen Züge der Ausführung; dieser übernahm das begonnene Werk und förderte es noch weiter, um einen Schritt, von welchem selbst Delambre, der sonst fast nur Worte des Tadels und der Verdächtigung für ihn hat, sagt: Cette découverte importante suffirait seule pour placer son auteur parmi les astronomes de première ligne.

Mit dieser Mondtheorie, wie sie uns Ptolemäus in seinem Almagest*) überliefert hat, wollen wir uns in den folgenden Zeilen beschäftigen.

Wir werden die Eigenthümlichkeiten der Theorie nur dann recht verstehen können, wenn wir die Entwicklung derselben in ihrem besonderen Gange im Auge behalten. Die Griechen waren nicht in der Lage, über genügendes Material gebietend, eine Hypothese aufbauen zu können, welche sogleich sämmtliche Erscheinungen hinreichend darstellte. Sie mussten vielmehr, schrittweise vorgehend, erst die ältesten Beobachtungen ausnutzen und dann, soweit diese unzureichend waren, neue hinzufügen, um damit ihre Theorie auszufeilen. Es sind also gerade die alten Mondfinsternissbeobachtungen, welche Ptolemäus πρὸς τὰς καθόλου καταλήψεις, zur Ergründung der allgemeinen Theorie, benutzen will; sie sind auch noch insofern am meisten dazu geeignet, wie er ausdrücklich hervorhebt, als sie allein den wahren Mondort ergeben, frei von den störenden Einflüssen der Parallaxe. Nicht als ob er die Wirkungen derselben nicht bestimmen könnte, im Gegentheil, er unterwirft sie seinen Berechnungen und giebt sogar Tafeln dafür; aber er traut ihnen doch wohl nicht die Sicherheit zu, die erforderlich ist, um eine Theorie darauf gründen zu dürfen. Erst nachdem dieser erste Theil der Hypothese, welcher die Bewegungen in den Syzygien (Neumond und Vollmond) darstellte, vollendet war, gingen die Alten weiter, unterwarfen den Mond auch in anderen Punkten seiner Bahn einer genaueren Untersuchung und bauten so, Glied für Glied, ihre Theorie auf.

Dass sich der Mond sehr wenig gleichförmig bewege, war schon in den ältesten Zeiten erkannt worden, und es war daher das erste Ziel, welches die Astronomen zu erreichen suchten, einen umfassenden Cyclus zu finden, in welchem sich alle diese Ungleichförmigkeiten periodisch wiederholten. Die Chaldäer gaben dafür die bekannte Periode von 18 Jahren 10 Tagen, oder vielmehr von $6585\frac{1}{3}$ Tagen: Hipparch jedoch fand dieselbe nicht genau genug und ersetzte sie durch die andere von 126007 Tagen 1 Stunde. In diesem Zeitraume fand er 4267 synodische Monate, 4573 Perioden der Anomalie, 4612 siderische Umläufe $-7\frac{1}{2}^0$ und 345 Sonnenjahre weniger $7\frac{1}{2}^0$. Die beiden ersten Zahlen durch den gemein-

*) Dem Verfasser lag die Ausgabe von Halma vor Κλαυδίου Πτολεμαίου μαθηματικὴ σύνταξις Paris 1813, während an zweifelhaften Stellen noch die Ausgabe von Simon Grynaeus, Basel 1538 verglichen wurde.

samen Divisor 17 theilend, fand er noch, dass 251 synodische Monate gerade gleich 269 Restitutionen der Anomalie seien, und endlich entsprachen nach ihm 5458 synodische Monate 5923 Umläufen des Argumentes der Breite*).

Aus diesen Daten ergeben sich nun leicht die mittleren Bewegungen des Mondes. Wir finden zunächst für die Dauer eines synodischen Monates $\frac{126007\frac{1}{24}}{4267}$ Tage = 29 Tage 31′ 50″ 8‴ 20⁗, wie Ptolemäus sagt**). Multipliciren wir ferner die tägliche Bewegung der Sonne mit der Zahl der Tage im Monat, so erhalten wir:

$$29^0\ 6'\ 23''\ 1'''\ 24^{IV}\ 2^{V}\ 30^{VI}\ 57^{VII}.$$

Der Mond hat aber in derselben Zeit offenbar 360^0 mehr zurückgelegt, also $389^0\ 6'$ u. s. w.

Indem wir dies durch die Anzahl der Tage im Monat dividiren, finden wir für die mittlere tägliche Bewegung des Mondes in Länge:

$$13^0 . 10 . 34 . 58 . 33 . 30 . 30.$$

Ferner geben die 269 Restitutionen der Anomalie $269 . 360^0 = 96840^0$. Dies entspricht 251 Monaten, d. h. $7412^d . 10 . 44 . 51 . 40$. Mithin wird die mittlere tägliche Bewegung der Anomalie

$$13^0 . 3 . 53 . 56 . 29 . 38 . 38.$$

Ebenso ergeben die 5923 Umläufe des Argumentes der Breite 2132280^0, die 5458 Monate $161177^d . 58 . 58 . 3 . 20$. Also erhalten wir als mittlere tägliche Bewegung des Argumentes der Breite:

$$13^0 . 13 . 45 . 39 . 40 . 17 . 19.$$

Die Differenz endlich zwischen der mittleren täglichen Bewegung der Sonne und der des Mondes ergiebt uns als tägliche Be-

*) Ptolemäus kennt die Bezeichnung „Argument der Breite" nicht. Das Wort „πλάτος", Breite, bezeichnet ihm sowohl das, was wir noch heut darunter verstehen, also den senkrechten Abstand von der Ekliptik, als auch unser „Argument der Breite". In den meisten Fällen meint er das Letztere, da die Breite selbst bei ihm nur eine untergeordnete Rolle spielt.

**) Die griechischen Astronomen hatten bei allen Theilungen das Sexagesimalsystem eingeführt; Ptolemäus zerlegt daher auch den Tag in Sechzigstel erster, zweiter, dritter u. s w. Ordnung. Er findet für den Monat $29^d . 31 . 50 . 8 . 20$. ἔγγιστα; es sind aber genauer $29 . 31 . 50 . 8 . 9,_{33648}$. Wenn wir mit dieser Zahl die anderen Daten berechnen, so erhalten wir bei allen vier Angaben ca. $4'''',_5$ mehr. An den weiteren Resultaten wird jedoch dadurch nichts geändert, da Ptolemäus bald an die Hipparch'schen Zahlen eine Correktion anbringt, wodurch auch diese Abweichung gehoben würde. Auffallend bleibt aber dieses Versehen, da sonst alle Rechnungen mit grosser Genauigkeit ausgeführt sind.

wegung der Elongation, d. h. der Winkeldistanz zwischen Sonne und Mond

$$12^0 . 11 . 26 . 41 . 20 . 17 . 59.$$

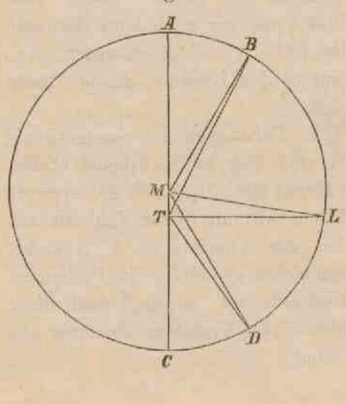
Ptolemäus bringt an diese Hipparch'schen Zahlen, wie wir später sehen werden, nur noch unbedeutende Correktionen an und entwirft dann mit ihnen Tafeln für die mittleren Bewegungen des Mondes, wonach man leicht für jeden Zeitpunkt den mittleren Mondort berechnen kann. Es handelt sich nun aber um die Abweichungen der wahren Mondbewegung von dieser angenommenen mittleren.

Die Ebene der Mondbahn macht mit der Ekliptik einen Winkel von nur etwa 5^0; es ist daher ersichtlich, dass für die Beobachtungen der Alten die Längen-Coordinate weitaus die wichtigste war. Ausserdem gewährt uns aber die geringe Neigung noch den Vortheil, dass wir sie bei der Betrachtung der Länge gänzlich vernachlässigen können; in der That, das Glied, welches den Mondort auf die Ekliptik reducirt, hat nur einen Coëfficienten von wenigen Minuten, welcher in den anderen Irrthümern der alten Theorie vollkommen untergeht.

Ptolemäus unterscheidet in dem Mondlaufe zwei Ungleichheiten; da jedoch die zweite in den Syzygien ganz verschwindet und die erste gerade aus Mondfinsternissen, also aus Beobachtungen in der Opposition bestimmt werden soll, so kann man die Untersuchung derselben auch ohne Kenntniss der zweiten ausführen.

Zwei Hypothesen sind es nun, deren sich die Alten bei der Darstellung solcher periodischen Ungleichheiten zu bedienen pflegten, die excentrische und die epicyklische, von denen die eine die Abweichungen des wahren Laufes von dem mittleren dadurch erklärt, dass sie das centrum visionis von dem Mittelpunkte der gleichförmigen Bewegung loslöst, während die andere dem wahren Monde wirklich einen anderen Ort anweist, als er seiner mittleren Bewegung nach inne hat. Betrachten wir beide noch etwas näher.

Fig. 1.

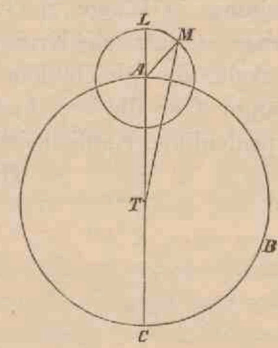


Es sei (Fig. 1) $ABDC$ der Kreis der gleichförmigen Bewegung, auf welchem sich das Gestirn entsprechend der Restitution der Anomalie bewegt, T sei die excentrisch gelegene Erde,

A das Apogäum, C das Perigäum. Es ist dann klar, dass, während der Radiusvektor die beiden gleichen Bögen AB und DC beschreibt, dieselben dem Auge in T nicht gleich erscheinen. Es wird vielmehr der Bogen CD, welcher der Erde näher ist, unter einem grösseren Winkel gesehen werden, als AB. Der Unterschied der wahren und mittleren Bewegung wird in jedem Falle dargestellt durch die Winkel MBT und MDT, denn diese sind gleich $AMB - ATB$ resp. $= AMD - ATD$. Die wahre Bewegung wird mit der mittleren übereinstimmen, wenn der genannte Winkel verschwindet, wenn also der Himmelskörper in A oder C, im Apogäum oder Perigäum ist; ein Maximum wird die Abweichung sein, wenn die scheinbare Entfernung vom Apogäum ein rechter Winkel ist, die Visirrichtung also senkrecht auf der Apsidenlinie steht. In der That, es ist in allen Lagen $\sin MBT = \sin MTB \frac{MT}{MB}$. Da hierin $\frac{MT}{MB}$ constant ist, so wird MBT sein Maximum erreichen, wenn MTB gleich einem Rechten ist, also in der Lage MTL.

Nun sei andrerseits T die Erde, der Mittelpunkt der gleichförmigen Bewegung, dargestellt durch den Kreis ABC (Fig. 2). In A befinde sich das Centrum des Epicykels. Es wird dann offenbar, wenn sich gleichzeitig der Himmelskörper auf dem Epicykel in L befindet, die mittlere Bewegung mit der wahren zusammenfallen; befindet er sich aber in irgend einem anderen Punkte, z. B. in M, so giebt der Winkel LTM (die Mittelpunktsgleichung), die Grösse der Abweichung an, die ein Maximum sein wird, wenn TM den Epicykel tangirt.

Fig. 2.



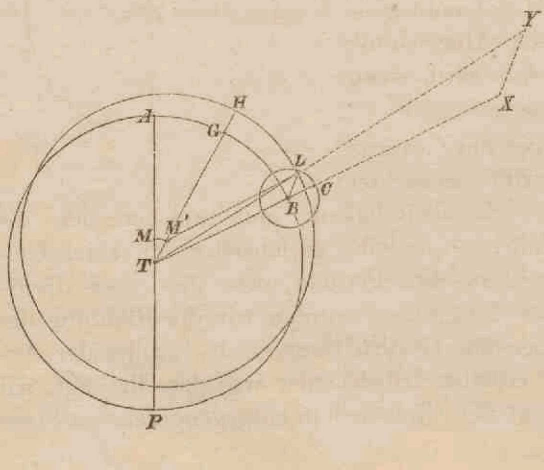
Was die Bewegung des Gestirns auf dem Epicykel betrifft, so richtet sich diese nach der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Anomalie ändert. Vollendet dieselbe gleichzeitig mit einer Umdrehung des Radiusvektors ihre Periode, wie dies nach Ptolemäus bei der Sonne der Fall ist, so werden wir die Richtung des Epicykelradius, welcher das Gestirn trägt, stets parallel der Anfangsrichtung AC zu erhalten haben; oder was dasselbe sagt, wir müssen dem Gestirn auf dem Epicykel in entgegengesetztem Sinne dieselbe Geschwindigkeit ertheilen, die der Radiusvektor in seiner Rotation um T hat. Es wird dann auch hier im Apogäum und Perigäum die wahre Bewegung mit der mittleren zusammenfallen, und die grösste Abweichung stattfinden, wenn die Anomalie ungefähr gleich einem Rechten ist.

Beim Monde dagegen wird es anders sein, da dieser früher an denselben Punkt der Ekliptik wiederkehrt, als in dieselbe Lage zur Apsidenlinie. Es wird durch diesen Umstand eine Complikation in der Darstellung der Mondbewegung durch den excentrischen Kreis nothwendig, wenn man sie mit der durch den Epicykel in Einklang bringen will, die wir sogleich werden zu erwähnen haben.

Zwischen diesen beiden Hypothesen hat also Ptolemäus bei der Darstellung der ersten Ungleichheit des Mondes die Wahl. Er zeigt zunächst, dass man sich beider mit gleichem Erfolge bedienen kann; beide Hypothesen bringen den Mond an denselben Ort, wenn man folgende Festsetzungen trifft.

Der Mond auf dem Epicykel und im excentrischen Kreise bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, die der Restitution der Anomalie entspricht, in der Epicykeltheorie entgegengesetzt, in der andren gemäss der Ordnung der Zeichen. Das Epicykelcentrum rotirt proportional der Zeit entsprechend der mittleren Bewegung in Länge um das centrum visionis. Ferner rotirt der ganze excentrische Kreis um denselben Punkt mit einer Geschwindigkeit, die gleich dem Ueberschusse der mittleren Bewegung in Länge über die der Anomalie ist, d. h. gleich der Bewegung der Apsidenlinie. Endlich sind die Radien des deferirenden und des excentrischen Kreises einander gleich, der Abstand der beiden Centren aber (centr. excentr. — Erde) gleich dem Radius des Epicykels zu nehmen.

Fig. 3.



Es sei (Fig. 3) T die Erde im Mittelpunkte der Ekliptik, A und P das Apogäum und Perigäum, ABP der Kreis, auf welchem sich das Epicykelcentrum bewegt; M endlich der Mittelpunkt des excentrischen Kreises. Wenn sich das Epicykelcentrum in A befindet, so sei der Mond in C, im Apogäum des Epicykels.

Nun habe der Radiusvektor den Bogen AB beschrieben, der Mond auf dem Epicykel gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne den, nach dem oben Gesagten kleineren Bogen CL. Wir ziehen TG parallel BL, dann ist $BG = LC$. Der Bogen AG giebt also die Bewegung der Apsidenlinie. Genau um diesen Betrag soll sich aber der Mittelpunkt des excentrischen Kreises um T bewegt haben, es ist daher der Punkt M nach M' gelangt, wenn $TM' = TM$. Beschreiben wir nun um M' den excentrischen Kreis, so muss derselbe offenbar auch durch L hindurchgehen, da ja $M'L = TB = M'H$. Ferner ist aber unter diesen Annahmen der Bogen $HL = LC$ und wir sehen so in der That, dass in der einen wie in der anderen Hypothese L den Ort des Mondes repräsentirt, beide Theorien also in gleicher Weise die Mondbewegung darstellen. Es ist zugleich klar, dass nur durch die Bewegung der Apsidenlinie, d. h. durch die Ungleichheit der Bögen AB und LC die Rotation des excentrischen Kreises erforderlich wird.

Wir haben bei dieser Betrachtung noch den Radius des excentrischen Kreises gleich dem des deferirenden vorausgesetzt und den Abstand der beiden Centren gleich dem Radius des Epicykels. Es genügt, dass das Verhältniss der beiden erstgenannten Grössen gleich dem der beiden anderen sei. Wir könnten ja an Stelle des Radius TB einen beliebig grösseren TX annehmen. Wenn das erwähnte Verhältniss dann ungeändert bleiben soll, würden wir, wenn XY parallel BL, als Mondort den Punkt Y erhalten, welcher auf der Verlängerung von TL liegt, dem Auge sich also in demselben Punkte darbietet.

Bei der Wahl zwischen den beiden Hypothesen entscheidet sich Ptolemäus für die epicyklische, indem er sich den excentrischen Kreis für die Erklärung der zweiten Ungleichheit vorbehält. Seine Theorie ist nun folgende.

Man denke sich einen Kreis, concentrisch zur Ekliptik, aber gegen dieselbe geneigt um einen Winkel von etwa 5^0. Diesen Kreis lasse man gleichförmig, entgegengesetzt der Ordnung der Zeichen, um die Normale zur Ekliptik rotiren und zwar mit einer Geschwindigkeit, die gleich dem Ueberschusse der Bewegung des Argumentes der Breite über die Bewegung in Länge ist. Auf dem Kreise bewegt sich rechtläufig entsprechend der Bewegung des

Argumentes der Breite das Epicykelcentrum, und auf dem Epicykel endlich läuft der Mond entgegengesetzt der Ordnung der Zeichen und entsprechend der Bewegung der Anomalie.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Kreis um die Erde rotirt, ist offenbar nichts anderes als die rückgängige Bewegung der Knotenlinie; denn in der That, da Ptolemäus von der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik absieht, so setzt sich die Bewegung des Argumentes der Breite zusammen aus der rechtläufigen Bewegung in Länge und der rückläufigen Bewegung der Knotenlinie.

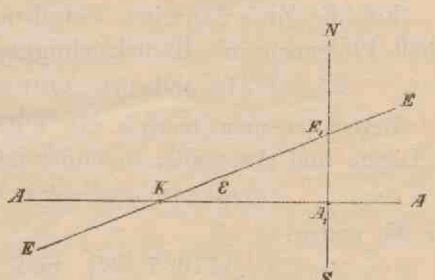
Die nächste Aufgabe muss nun sein, das Verhältniss des Epicykelradius zum deferirenden festzustellen, da hierdurch offenbar die ganze Darstellung bedingt wird. Ptolemäus bestimmt dasselbe zweimal, einmal aus den drei ältesten babylonischen Beobachtungen, die ihm zugänglich sind, und zweitens aus solchen, die er selbst zu Alexandria mit grösster Sorgfalt angestellt hat. Die Uebereinstimmung beider Resultate giebt ihm ausser der Controlle, zugleich durch die grosse Zwischenzeit ein Mittel an die Hand, die Hipparch'schen Zahlen der mittleren Bewegung zu prüfen.

Bevor wir jedoch näher auf die Beobachtungen eingehen, wollen wir, um das Verständniss der folgenden Angaben zu erleichtern, noch eine kurze Bemerkung über das Zeitmass vorausschicken, welches denselben zu Grunde liegt.

Ptolemäus unterscheidet zwei verschiedene Stunden ὥραι ἰσημεριναί, d. h. „Stunden" nach unserer jetzigen Bezeichnung und ὥραι καιρικαί. Letztere verdanken ihre Entstehung der Sitte der Alten, sowohl Tag wie Nacht, unbekümmert um ihre Länge, in zwölf Intervalle zu theilen. Diese „bürgerlichen Stunden," wie man sie nennen kann, sind also von sehr verschiedener Dauer; will man sie untereinander vergleichen, so müssen sie erst in ὥραι ἰσημεριναὶ (Aequinoxialstunden) verwandelt werden. Aber auch diese sind noch von ungleicher Länge, da Ptolemäus den wahren Sonnentag zu Grunde legt und also noch die Zeitgleichung berücksichtigen muss, um ein wirklich gleichförmiges Zeitmass zu erhalten. Mit Ausnahme der Mondtheorie ist ihm indessen diese Correction zu unbedeutend, als dass er sie in Betracht ziehen sollte. Er zeigt nämlich, dass das Maximum der Zeitgleichung $4\frac{1}{6}^0$ oder $16\frac{2}{3}^m$ betrage, so dass sich zwei Sonnentage um $1^h\frac{1}{9}$ unterscheiden können, eine Abweichung, welche nach ihm bei der Sonnenbewegung οὐδενὶ ἂν αἰσθητῷ καταβλάπτοι, bei der Mondbewegung dagegen einen Fehler von $\frac{3}{5}^{0}$ hervorbringen kann. Es wird deshalb hier der Ort sein, in Kürze zu zeigen, wie er den Unterschied von wahrer und mittlerer Zeit berechnet.

Bekanntlich sind es zwei Ursachen, die sich vereinigen, um die „ἀνισότης τῶν νυχθημέρων“ hervorzubringen. Zunächst die ungleichförmige Bewegung der Sonne in der Ekliptik, und dann die Neigung der letzteren gegen den Aequator, in Folge deren die Bewegung der Sonne in Rektascension, wenn sich auch die Länge proportional der Zeit änderte, doch eine ungleichförmige sein würde. Ptolemäus berücksichtigt diese beiden Theile einzeln. Wie man in jedem Falle den wahren Sonnenort findet, hat er bereits gelehrt; aus der Differenz zweier derselben erhält er den wahren Weg, welchen die Sonne während der betreffenden Zeit in der Ekliptik zurückgelegt hat. Es fragt sich, wie gross die Bewegung in Rektascension ist, welche dieser schiefen Bewegung entspricht. Um dies zu ermitteln, benutzt Ptolemäus eine Tafel, in der er für jeden zehnten Grad der Ekliptik den Punkt des Aequators berechnet hat, welcher gleichzeitig den Meridian passirt. Es ist leicht, diese entsprechenden Punkte zu bestimmen, denn es sei (Fig. 4) NS der Meridian, EE die Ekliptik, AA der Aequator, so ist, wenn die Punkte E' und $A_{\prime}$ gleichzeitig durch den Meridian gehen

Fig. 4.



$$\operatorname{tg} KA_{\prime} = \operatorname{tg} KE_{\prime} \,.\, \cos \varepsilon.$$

Auf diese Weise projicirt Ptolemäus Anfangs- und Endpunkt des wahren Sonnenweges auf den Aequator und erhält so die wahre Bewegung der Sonne in Rektascension. Die mittlere Bewegung entnimmt er aus seinen Tafeln, der Unterschied zwischen beiden giebt ihm die Differenz der beiden Zeitgleichungen, welche man anzubringen hat, um das in wahrer Sonnenzeit gegebene Intervall in mittlerer Zeit auszudrücken.

Wir wollen nun sehen, wie Ptolemäus aus den Beobachtungen seine Resultate herleitet.

Die erste der drei babylonischen Finsternisse ereignete sich, wie er berichtet, im ersten Jahre des Mardocempadus in der Nacht vom 29. zum 30. des Monats Thoth *). Die Finsterniss war eine totale und begann eine gute Stunde nach Aufgang, d. h. etwa $4\frac{1}{2}$ Stunde vor Mitternacht, da die Nacht damals 12 Stunden dauerte. Die Mitte der Finsterniss trat, da sie total war, etwa $2\frac{1}{2}$ Stunde vor Mitternacht in Babylon ein. Alexandria liegt nach den Angaben der Alten 50^m westlicher als Babylon, also haben wir für die Mitte der Finsterniss nach Alexandrinischer Zeit $3^h\,20^m$ vor Mitternacht. Ebenso erhalten wir für die zweite Finsterniss die Nacht vom 18. zum 19. Thoth im 2. Jahre des Mardocempadus. Die Mitte trat für Alexandria 50^m vor Mitternacht ein. Für die dritte endlich finden wir die Nacht vom 15. zum 16. Phamenoth desselben Jahres $4^h\,20^m$ vor Mitternacht.

Die Sonnenörter für die drei Finsternisse ergeben sich zu

$$11^s\,24^0\,30'; \quad 11^s\,13^0\,45'; \quad 5^s\,3^0\,15'\ ^{**)}.$$

Mithin die Mondörter

$$174^0\,30'; \quad 163^0\,45'; \quad 333^0\,15'.$$

Für die Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Finsternissen erhält Ptolemäus mit Berücksichtigung der Zeitgleichung

$$354^d\,2^h\,34^m \text{ und } 176^d\,20^h\,12^m \text{ (genauer ist } 13^m\text{)}:$$

Berechnet man hiermit die mittlere Bewegung des Mondes in Länge und Anomalie, so findet man für die erste Zwischenzeit

$$345^0\,51' \text{ und } 306^0\,25'\ [24]\ ^{***)},$$

für die andere

$$170^0\,7'\ [8] \text{ und } 150^0\,26'.$$

Der wahre Unterschied in Länge ist aber zwischen den beiden ersten Oertern $349^0\,15'$, zwischen den beiden anderen $169^0\,30'$. Es ist daher in dem ersten Intervalle die wahre Bewegung um $3^0\,24'$ grösser als die mittlere und in dem zweiten um $0^0\,37'$ kleiner; d. h. es ist der Unterschied der beiden ersten Mittelpunktsgleichungen gleich $3^0\,24'$, der der beiden letzten gleich $0^0\,37'$.

---

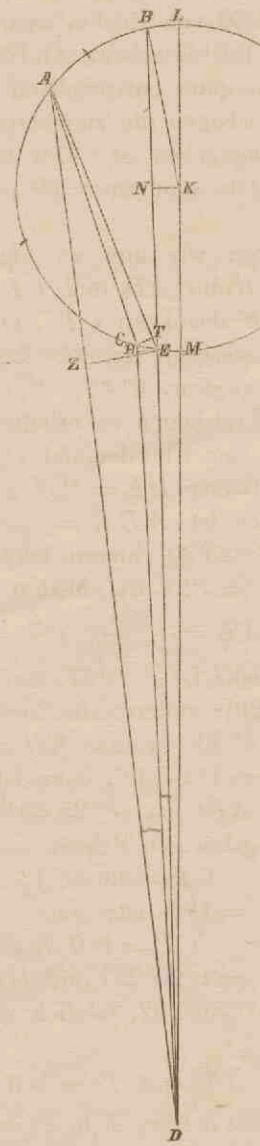
*) Die zwölf ägyptischen Monate sind: Thoth, Phaophi, Athyr, Choiak, Tybi, Mechir, Phamenoth, Pharmuthi, Pachom, Payni, Epiphi, Mesore; jeder zu 30 Tagen und ausserdem 5 ἡμέραι ἐπαγόμεναι.

**) Ptolemäus macht häufig von der Eintheilung der Ekliptik in die zwölf Zeichen des Thierkreises Gebrauch, deren jedes $= 30^0$ ist. Die obige Angabe bedeutet also $24^0\,30'$ der Fische oder $354^0\,30'$ u. s. w.

***) Die eingeklammerten Zahlen geben die Werthe, die der Verfasser bei Ausführung derselben Rechnungen gefunden hat.

Es sei nun (Fig. 5) D das centrum visionis, die Erde, K der Epicykelmittelpunkt, ferner A, B, C die Punkte, in welchen sich der Mond während der Mitten der drei Finsternisse befand. Dann geht aus dem eben Gesagten hervor, dass $\angle ADB = 3^0 24'$, $CDB = 0^0 37'$, ADC also $= 2^0 47'$ ist. Ferner der Bogen $BA = 53^0 35'$, $AC = 96^0 51$, $BC = 150^0 26'$. Aus diesen Daten soll das Verhältniss der beiden Radien $DK : LK$ berechnet werden.

Fig. 5.



Wir wollen uns zwar im Allgemeinen bei der Ausführung solcher Rechnungen der Hülfsmittel bedienen, welche sich die moderne Mathematik geschaffen hat; da es aber nicht ohne Interesse sein dürfte, einen Einblick in die Rechnungsweise der Griechen zu erhalten, so wollen wir dieses erste Beispiel ganz nach dem Verfahren des Ptolemäus wiedergeben. Wir werden sehen, wie er trotz der Unbehülflichkeit seines Rechnungsapparates sehr genaue Resultate erzielt.

Es handelt sich in dem vorliegenden Beispiele um eine trigonometrische Aufgabe und zwar um eine Reihe von Dreiecksauflösungen. Die alten Griechen pflegten alle derartigen Rechnungen auf Lösungen rechtwinkliger Dreiecke zurückzuführen. Die Hypotenuse derselben betrachteten sie als Durchmesser eines Kreises, so dass die drei Seiten des Dreiecks als Sehnen (Chorden) aufgefasst wurden. Die Bögen aber, zu welchen dieselben gehörten, waren doppelt so gross, als die ursprünglich gegebenen Dreiecks-winkel. Dies berücksichtigten sie dadurch in ihren Rechnungen, dass sie einen Unterschied machten zwischen solchen Graden, von welchen 360 vier Rechte ausmachen und anderen, von denen 360 nur zwei Rechte geben. An Stelle unserer trigonometrischen Tafeln haben sie ganz entsprechend die Chordentafeln, in welchen für jeden Kreisbogen die zugehörige Sehne im Verhältniss zum Durchmesser angegeben ist. Der Radius des Kreises wird dabei nicht $= 1$ gesetzt, sondern $= 60$ partes (μοῖραι), der Durchmesser also $= 120^p$.

Kehren wir nun zu unserem Beispiele zurück. Ptolemäus fällt von E auf AD und CD die Lothe EZ und EH und von C auf AE das Loth CT. Dann ist der Winkel $EDZ = 3^0\,24'$ τοιούτων, οἵων μέν εἰσιν αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ τξ (360), οἵων δὲ αἱ δύο ὀρθαί τξ, τοιούτων $6^0\,48'$. Er muss eben den Winkel verdoppeln, um den Kreisbogen zu erhalten, dessen Peripheriewinkel $= 3^0\,24'$ ist. Aus der Chordentafel ergiebt sich als Sehne hierfür, wenn die Hypotenuse $DE = 120^p$ gesetzt wird, $EZ = 7^p\,7'$.

Ferner ist $AEB = 26^0\,47'\,30''$, $EDA = 3^0\,24'$, folglich $EAD = 23^0\,23'\,30''$; hieraus folgt $EZ =$ Chorde $2\,(EAD) = 47^p\,38'\,30''$, wenn $AE = 120^p$ ist. Mithin, wenn $EZ = 7^p\,7'$, so ist

$$AE = \frac{120^p}{47^p\,38\frac{1}{2}} \cdot 7^p\,7' = 17^p\,55'\,32''; \; DE = 120.$$

Nun ist $BDC = 0^0\,37'$, also die zugehörige Sehne $EH = 1^p\,17'\,30''$ $(DE = 120)$; andererseits ist $BEC = 75^0\,13'$, $CDE = 0^0\,37'$, also $ECD = 74^0\,36'$, woraus $EH = 115^p\,41'\,29''$ $(EC = 120)$. Wenn also $EH = 1^p\,17'\,30''$, dann ist $EC = 1^p\,20'\,23''$ und $DE = 120^p$.

$$AEC \text{ ist } 48^0\,25'\,30'' \text{ und } T\cancel{H}E = 41^0\,34'\,30'',$$

C

die dazu gehörigen Sehnen also

$$CT = 89^p\,46'\,13'' \text{ und } ET = 79^p\,37'\,55'',$$

wenn $CE = 120^p$ ist; aber

$$CT = 1^p\,0\,.\,8 \text{ und } ET = 0^p\,.\,53\,.\,21,$$

wenn $EC = 1^p\,20'\,23''$ und $DE = 120^p$. AE hatte von denselben Theilen $17^p\,.\,55\,.\,32$, folglich wird $AT = 17^p\,.\,2\,.\,11$.

Nun ist

$$\overline{AC}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{CT}^2 = 1^p\,0'\,16'' + 290^p\,14'\,19'' = 291^p\,14'\,35''.$$

Hieraus ergiebt sich $AC = 17^p\,3'\,57''$ von den Theilen, wovon DE 120 enthält. Andererseits ist aber auch $AC =$ Chorde AEC $= 89^p\,46'\,14''$, wenn der Durchmesser des Epicykels $2r = 120^p$ ist. Aus der Vergleichung dieser beiden Resultate ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} DE = 631^p\,13'\,48'' \\ CE = \;\;\;7\;\;\;2\;\;50 \end{array}\right\} \text{ wenn } r = 60^p \text{ ist.}$$

Der Bogen über CE wird hiernach $CAE = 6^0\,44'\,1''$ und da arc $BAC = 150^0\,26'$ war, so ist $BCE = 157^0\,10'\,1''$; die Sehne BE mithin $= 117^p\,37'\,32''$. Es ist dies kleiner als der Durchmesser 120, folglich liegt das Centrum des Epicykels ausserhalb des Kreisabschnittes $BACE$, wie wir auch in der Figur angenommen haben.

Nun ist

$$BD = BE + ED,$$

ferner $BD \,.\, DE = LD \,.\, DM$, wenn M das Perigäum, L das Apogäum des Epicykels ist, oder

$$BD \,.\, DE = DL(LD - LM) = \overline{LD}^2 - LD \,.\, LM.$$

Andererseits ist

$$\overline{DK}^2 = \overline{LK}^2 + \overline{LD}^2 - LM \,.\, LD = \overline{LK}^2 + BD \,.\, DE.$$

Es ist

	$BD =$	748^p	51^0	$20''$
	$DE =$	631	13	48
Das Produkt	$=$	472700	5	32
	$\overline{LK}^2 =$	3600	0	0
	$\overline{DK}^2 =$	476300	5	32
	$DK =$	690	8	42,

während der Epicykelradius $= 60$ ist. Setzen wir daher $DK = 60^p$, so wird der Epicykelradius $= 5^p\,12{,}978$, oder wie Ptolemäus sagt

$$r = 5^p\,13' \quad \text{ἔγγιστα}.$$

Er bestimmt ausserdem noch die Entfernung des Punktes B vom Apogäum und die Mittelpunktsgleichung für die zweite Finsterniss, also die Winkel LKB und LDB, zwei Grössen, die wir sogleich gebrauchen werden.

Fällen wir von K aus auf die Linie BD das Loth KN, dann ist $DN = DE + \frac{1}{2}BE$.

Als Bogen, der zur Chorde DN gehört, ergiebt sich dann DKN. Das Supplement zu DKN ist LKN und das Complement die gesuchte Mittelpunktsgleichung LBD. Endlich ist noch

$$LKB = LKN - \tfrac{1}{2}BKE.$$

Die Rechnung ist die folgende:

$$DE = 631^p\,13'\,48''$$
$$\tfrac{1}{2}BE = 58\quad 48\quad 46$$
$$DN = 690\quad 2\;34;\; DK = 690\quad 8\;42.$$

Setzen wir also $DK = 120^p$, dann wird

$$DN = 119^p\,58'\,57''$$

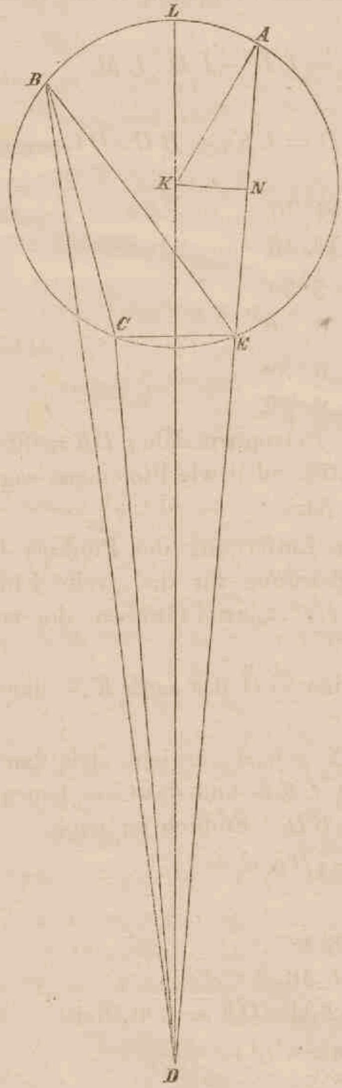
Hieraus folgt

$$DKN = 89^0\ 1'; \quad LKN = 90^0\ 59'$$
$$LDB = 0\ 59$$
$$LKB = 12\ 24.$$

Wie aus der Figur ersichtlich ist, war zur Zeit der zweiten Finsterniss der wahre Mond noch hinter dem mittleren zurück; wir müssen also die $0^0\ 59'$ zu dem wahren Orte hinzufügen, um den mittleren zu erhalten. Dieser wird also

$$164^0\ 44'.$$

Fig. 6.



Genau ebenso verfährt nun Ptolemäus mit den drei Finsternissen, die er selbst beobachtet hat. Wir erhalten für dieselben nach Ausführung aller Reductionen die folgenden Daten:

Mittlere Zeit Alexandria für die Mitte der Finsternisse.

1) 17. Jahr des Adrian Payni 20 $11^h\ 15^m$
2) 19. Jahr des Adrian Choiak 2 $11^h\ 0^m$
3) 20. Jahr des Adrian Pharmuthi 19 $16^h\ 0^m$

Die drei Sonnenörter waren $43^0\ 15'$; $205^0\ 10'$; $344^0\ 5'$, folglich die Mondörter $223^0\ 15'$; $25^0\ 10'$; $164^0\ 5'$.

Die beiden Zwischenzeiten sind

$531^d\ 23^h\ 37^m.5$ [38] und
$502^d\ 5^h\ 30^m.0$ [28^m].

In diesen Zeiten betragen die mittleren Bewegungen

	in Länge	der Anomalie
1)	$169^0\ 37'$ [38']	$110^0\ 21'$ [22']
2)	$137^0\ 34'$	$81^0\ 36'$ [37']

Die wahren Bewegungen in Länge sind $161^0\ 55'$ und $138^0\ 55$, die Vermehrung der Mittelpunktsgleichungen also

$$-7^0\ 42' \text{ und } +1^0\ 21'.$$

Die Rechnung gestaltet sich genau wie oben, doch führen wir sie mit Hülfe der trigonometrischen und Logarithmentafeln aus.

Es ist zunächst (Fig. 6)

$$CB = 2r \sin \frac{BKC}{2}$$

ferner

$$BE = DE \frac{\sin EDB}{\sin EBD}; \quad CE = DE \frac{\sin EDC}{\sin ECD}.$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 - 2\,BE\,.\,EC \cos BEC.$$

Hieraus ergiebt sich das Verhältniss von DE zu r. Dann ist ferner $\sin CBE = \sin BEC \frac{EC}{BC}$. Es folgt daraus arc EC und arc AE. Dann wird endlich $AE = 2r \sin(\frac{1}{2} \operatorname{arc} AE)$, und das Andere bleibt wie oben.

Wir führen nun die Rechnung aus.

$\sin BDE = 9.127060$	$\sin EDC = 9.043762$
$\sin EBD = 9.867457$	$\sin ECD = \quad -9$
$BE = 9.259603\,.\,DE$	$CE = 9.043771\,.\,DE$
$\overline{BE}^2 = 8.519206$	$BE = 9.259603$
$\overline{CE}^2 = 8.087542$	$2\,CE\,.\,BE = 8.604404$
$\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = 8.655963$	$\cos BEC = 9.879093$
$2\,CE\,.\,BE \cos BEC = 8.483497$	$\sin BEC = 9.815193$
	$2\,r = 0.301030\,.\,r$
$\overline{BC}^2 = 8.171499$	$BC = 0.116223\,.\,r$
$BC = 9.085750\,.\,DE$	

$$DE = 1.030473\,r$$

$EC = 9.043771$	$CBE = 36^\circ\,23'\,8''$
$BC = 9.085750$	$CE = 72\;\;46\;\;16$
$\sin BEC = 9.815193$	$AC = 168\;\;3$
$\sin CBE = 9.773214$	$AE = 95\;\;16\;\;44$
$DE = 1.030473\,r$	$\frac{1}{2} AE = 47\;\;38\;\;22$
$AE = 0.169627\,r$	$\sin \frac{1}{2} AE = 9.868597$
$\frac{1}{2} AE = 9.868597\,r$	$2\,r = 0.301030\,r$
$DA = 1.086527\,r$	$AE = 0.169627\,r$
$AD\,.\,DE = 2.117000\,r^2$	$DN = 1.059404$
$\overline{DK}^2 = 2.120305\,r^2$	$DK = 1.060152$
$DK = 1.060152\,r$	$\cos LDA = 9.999252$
Wenn also $DK = 60 = 1.778151$	$LDA = 3^\circ\,21'\,40''$
so ist $r = 0.717999$	$LKN = 93\;\;21\;\;40$

Nun war $\frac{1}{2} AE = 47^0\,38'\,22''$, also wird $LA = 45^0\,43'\,18''$, woraus endlich, da $AB = 110^0\,21'$

$$LB = 64^0\,37'\,42''$$
$$LDB = 4^0\,20'$$

r ergiebt sich

$$r = 5^p\,13',44.$$

Ptolemäus giebt die folgenden Zahlen:

$$LB = 64^0\,38'$$
$$LDB = 4^0\,20'$$
$$r = 5^p\,14'.$$

Also ist er in ganz guter Uebereinstimmung mit unseren Werthen. Die beiden Beispiele haben ihm somit für den Epicykelradius ergeben $5^p\,13'$ und $5^p\,14'$. In dem weiteren Verlaufe seiner Betrachtungen legt er jedoch weder den einen, noch den anderen Werth zu Grunde, sondern setzt den Radius $= 5\frac{1}{4}^p$, also $5^p\,15'$. Wir werden später noch einmal auf diesen Punkt zurückkommen.

Ptolemäus benutzt nun gleich die vorliegenden Resultate, um die Richtigkeit der Hipparch'schen mittleren Bewegungen zu kontrolliren. Der mittlere Mondort zur Zeit der zweiten babylonischen Finsterniss hatte sich gefunden zu:

$164^0\,44'$, der Abstand vom Apogäum $= 12^0\,24'$.

Für die zweite der drei vom Ptolemäus beobachteten sind dieselben Zahlen:

$29^0\,30'$ und $64^0\,38'$.

In der Zwischenzeit betrug also, abgesehen von ganzen Umläufen, die Bewegung in Länge:

$224^0\,46'$, und die Veränderung der Anomalie $52^0\,14'$.

Die Zwischenzeit ist aber nach den obigen Angaben gleich 854 Jahren $73^d\,23^h\,50^m$, oder mit Berücksichtigung der Zeitgleichung 854 Jahren $73^d\,23^h\,20^m$ [22^m]. Wenn hiermit nach den Hipparch'schen Tafeln die mittleren Bewegungen berechnet werden, so findet man, abgesehen von ganzen Umläufen, für die Länge $224^0\,46'$ [$47'$], für die Anomalie $52^0\,31'$ [$32'$]. Es erhält Ptolemäus somit für die mittlere Bewegung in Länge dasselbe Resultat wie Hipparch, während er für die Bewegung der Anomalie einen Unterschied von $17'$ findet. Wenn er diese auf die 854 Jahre 74 Tage vertheilt, so erhält er als Correktion für einen Tag $11^{IV}\,46^{V}\,39^{VI}$, und die mittlere tägliche Bewegung der Anomalie wird somit:

$$13^0 . 3 . 53 . 56 . 17 . 51 . 59.$$

Mit diesem Werthe sind auch seine Tafeln der mittleren Bewegung konstruirt. Um dieselben vollständig zu machen, fehlt jetzt nur noch die Angabe einer Epoche für den mittleren Ort. Er wählt dazu das erste Jahr der Regierung Nabonassar's, und zwar den Mittag des ersten Thoth. Von diesem Zeitpunkte bis zur Mitte der zweiten der obigen Finsternisse sind 27 Jahre $17^d\,11\frac{1}{6}{}^h$ verflossen [$11^h\,7^m$]. Die mittlere Bewegung in dieser Zeit ist für die Länge

$123^0\,22'$ [23'], für die Anomalie $103^0\,35'$.

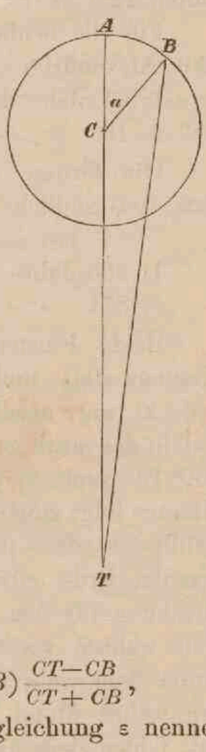
Der mittlere Ort war aber für die zweite Finsterniss

$164^0\,44'$, die Anomalie $= 12^0\,24'$.

Mithin erhalten wir als Epochen für den Mond bei Beginn der Nabonassar'schen Aera für die Länge $41^0\,22'$, für die Anomalie $268^0\,49'$.

Und da die Sonne sich zu derselben Zeit in den Fischen $0^0\,45'$ befand, so erhalten wir noch als Epoche der Elongation $70^0\,37'$. = $41°22' - 330°45'$

Fig. 7.



Die erste Ungleichheit des Mondes hat Ptolemäus jetzt also ermittelt und ihren Betrag festgestellt. Die grösste Abweichung hat offenbar statt, wenn die Absehenslinie den Epicykel tangirt; dann ist aber

$$\sin \text{aequ.} = \frac{5\frac{1}{4}}{60},$$

die grösste Gleichung ist daher $= 5^0\,1'$.

Ptolemäus giebt schon hier eine Tafel, aus welcher man mit der Anomalie als Argument den jedesmaligen Betrag der Ungleichheit entnehmen kann. Wir werden sogleich einige Male die Mittelpunktsgleichung zu benutzen haben und wollen daher eine Formel aufstellen, nach welcher sie berechnet werden kann.

Es sei (Fig. 7) T die Erde, C das Epicykelcentrum, A das Apogäum, B der wahre Mondort. ACB ist die Anomalie $= a$. Nach einem bekannten Satze der Trigonometrie ist dann:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(CBT - CTB) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(CBT + CTB)\,\frac{CT - CB}{CT + CB},$$

oder aber, wenn wir die gesuchte Mittelpunktsgleichung ε nennen und die gefundenen Zahlenwerthe einsetzen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\;\frac{54\frac{3}{4}}{65\frac{1}{4}}$$

oder endlich:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,[9.923804].$$

Wenn α gegeben, ist ε leicht hiernach zu bestimmen.

Dem Beispiele des Ptolemäus folgend, haben wir bisher einen Punkt noch nicht in unsere Betrachtungen gezogen, die Bewegung des Argumentes der Breite. Sie ist insofern von Wichtigkeit, als von ihr die Breite des Mondes, mithin die Grösse der Finsternisse abhängt, und es werden daher umgekehrt auch zu ihrer Untersuchung am vortheilhaftesten die Grössen der Verfinsterungen benutzt werden. Ptolemäus wählt zwei Finsternisse, in welchen Grösse und Art, d. h. Himmelsrichtung der Bedeckung dieselbe war, während welcher sich ferner der Mond in gleichen Entfernungen von der Erde und in der Nähe desselben Knotens befand. Wenn diese Bedingungen gleichzeitig alle erfüllt sind, so ist man sicher, dass der Mond gerade eine volle Anzahl von Umläufen κατὰ πλάτος vollendet hat.

Für die beiden gewählten Finsternisse erhalten wir: Mittlere Zeit Alexandria

1. 31. Jahr des Darius I, Tybi 4 $10^h\,40^m$
2. 19. - - Adrian, Pachom 17 $8^h\,24^m$.

Die Grösse der Bedeckung war in beiden Fällen 2 Zoll (δάκτυλοι) südlich.

	Zeit nach der Epoche	Zwischenzeit
1.	256 Jahre $122^d\,10^h\,15^m$ $[19^m]$	615 Jahre $133^d\,21^h\,50^m$.
2.	871 - 256 8 5 $[10^m]$	

Beide Finsternisse fanden in der Nähe des aufsteigenden Knotens statt, und zwar stand der Mond, da sein südlicher Theil bedeckt war, nördlich von der Ekliptik. Nun finden wir aus den Tafeln der mittleren Bewegung, dass in dem ersten Falle der Mond $100^0\,19'$ vom Apogäum entfernt war, in dem zweiten $251^0\,53'$. Hieraus folgt zunächst, dass auch die vierte nothwendige Bedingung erfüllt ist, dass der Mond nämlich in beiden Fällen gleich weit von der Erde entfernt war. Ferner ergiebt sich als Mittelpunktsgleichung für den ersten Ort $-5^0\,0'$ (der mittlere Mond war also dem wahren voraus), für den andren $+4^0\,53'$ (der mittlere war hinter dem wahren zurück). In der Zwischenzeit also, in welcher der wahre Mond gerade eine Anzahl ganzer Umläufe vollendet hat, fehlen dem mittleren daran noch $9^0\,53'$. Berechnet man aber die mittlere Bewegung nach den Hipparch'schen Zahlen, so findet man für diesen Unterschied $10^0\,2'$ [3'], sodass sich eine Correktion von 9′ ergiebt. Vertheilen wir dieselben auf die 615 Jahre 134 Tage, so erhalten wir für den Tag $8^{IV}\ 39^{V}\ 18^{VI}$; die mittlere tägliche Bewegung des Argumentes der Breite wird also $= 13^0 13.45.39.48.56.37$.

Diese Zahl hat Ptolemäus seinen Tafeln zu Grunde gelegt.

Es handelt sich aber auch hier noch um die Feststellung der Epoche. Ptolemäus giebt dazu zwei Finsternisse an, welche dieselben Bedingungen erfüllen, wie oben, nur mit dem Unterschiede, dass sie nicht beide bei demselben Knoten stattfanden, sondern an entgegengesetzten. Die Beobachtungszeiten sind nach mittl. Zeit Alex.

1) 2. Jahr des Mardocempadus, Thoth 18, $11^h\ 10^m$
2) 20. Jahr des Darius, Epiphi 28, $10^h\ 45^m$.

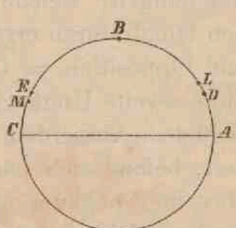
Die Grösse der Bedeckung war in beiden Fällen drei Zolle südlich. Nun ist

	Zeit nach der Epoche	Abstand v. Apog.	Mittelpunktsgl.
1)	27 J. $17^d\ 11^h\ 10^m$ [7]	$12^0\ 24'$	$-59'$
2)	245 327 10 15	$2^0\ 44'$	$-13'$.

Es geht hieraus zunächst hervor, dass sich der Mond in beiden Fällen im Apogäum befand, in der ersten Finsterniss in der Nähe, und zwar nördlich vom aufsteigenden, in der zweiten nördlich und dicht beim niedersteigenden Knoten.

Wenn also (Fig. 8) ABC die Bahn des Mondes darstellt, B den nördlichsten Punkt derselben, A den aufsteigenden, C den niedersteigenden Knoten, so repräsentiren uns die Punkte D und E die Mondörter während der beiden Finsternisse, wenn $AD = EC$. Die mittleren Oerter werden durch die Punkte L und M dargestellt werden, vorausgesetzt, dass $LD = 59'$ und $ME = 13'$.

Fig. 8.



Nun ist die Zwischenzeit zwischen beiden Finsternissen $=$ 218 Jahren $309^d\ 23^h\ 5^m$. Das Argument der Breite hat in derselben vermöge seiner mittleren Bewegung $160^0\ 4'$ [3′] zurückgelegt. Der Bogen LM muss also $= 160^0\ 4'$ sein. Daraus ergiebt sich für DE $160^0\ 50'$ und es bleibt $AD + EC = 19^0\ 10'$

$$AD = EC = 9^0\ 35'.$$

Der Abstand des mittleren Mondes vom Knoten ist somit

$$AL = 10^0\ 34'; \quad MC = 9^0\ 22'$$

folglich $BL = 280^0\ 34'$; $BM = 80^0\ 38'$.

Für die Epoche erhalten wir deshalb, da während der obigen Zeiten die Bewegung des Argumentes der Breite 286° 19′ und 86° 22′ beträgt

$$280^0\,34' - 286^0\,19' = 354^0\,15'$$

$$\text{und}\quad 80^0\,38' - 86^0\,22' = 354^0\,16'.$$

Ptolemäus nimmt den ersten Werth.

Soweit wir die Theorie bis jetzt verfolgt haben, war sie bereits Eigenthum des Hipparch, der sie nicht nur erkannt, sondern auch zahlenmässig festgestellt hatte. Sie basirt, wie wir gesehen haben, ausschliesslich auf Beobachtungen von Mondfinsternissen und kann daher auch nur Anspruch darauf machen, die Mondbewegung zur Zeit der Syzygien genügend darzustellen. Hipparch ging aber schon weiter, untersuchte, ob seine Theorie sich auch für die Zwischenzeiten bewähre und beobachtete zu dem Ende den Mond in anderen Phasen, vornehmlich in den Quadraturen. Dabei fand er nun bemerkenswerthe Abweichungen, gelangte jedoch zu keinem endgültigen Resultate darüber, sondern musste Ptolemäus das Verdienst überlassen, das Gesetz der Evektion zu ermitteln.

Es handelt sich nämlich um die zweite der oben erwähnten Ungleichheiten des Mondes, eben dieselbe, die wir heute mit dem Namen der Evektion belegen. Ptolemäus erkannte, dass die Abweichungen, welche Hipparch constatirt hatte, ihr Maximum in den Quadraturen erreichten, während sie zur Zeit der Conjunktion und Opposition = 0 waren. Hieraus ging also hervor, dass sich diese zweite Ungleichheit nach der Stellung des Mondes zur Sonne richtete. Ausserdem zeigte sich aber noch eine andere Abhängigkeit; befand sich nämlich der Mond in den Quadraturen, zugleich aber im Apogäum oder Perigäum des Epicykels, so dass die Mittelpunktsgleichung = 0 war, dann fand wieder völlige Uebereinstimmung mit der obigen Theorie statt; dagegen war der Unterschied am grössten, wenn während der Quadraturen die Mittelpunktsgleichung ihr Maximum hatte. Die zweite Ungleichheit strebte also stets darnach, die Mittelpunktsgleichung, wie sie nach der ersten Hypothese berechnet war, ihrem absoluten Betrage nach zu vergrössern, am meisten in den Quadraturen. Ptolemäus zog daraus den Schluss, dass das Verhältniss des Epicykelradius zum deferirenden veränderlich und zwar in den Quadraturen grösser sei, als in den Syzygien. Wollte er also nicht den Epicykel bald grösser, bald kleiner werden lassen, so musste er seine

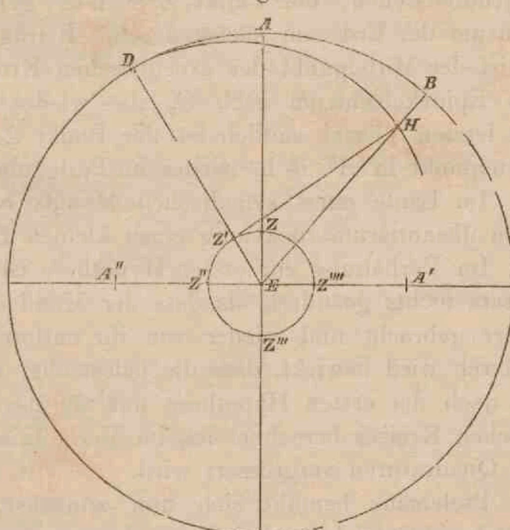
Entfernung von der Erde variiren, so dass er in den Quadraturen der Erde am nächsten, in den Syzygien am fernsten war. Diesen Weg schlägt nun Ptolemäus in der That ein; er behält zwar die Annahme bei, dass sich das Epicykelcentrum um die Erde proportional der Zeit bewege, zu diesem centrum aequans fügt er aber jetzt noch ein centrum distantiarum hinzu, d. h. einen Punkt, von welchem das Epicykelcentrum immer gleich weit entfernt bleibt. Mit anderen Worten: das Epicykelcentrum bewegt sich auf einem, im Verhältniss zur Erde excentrischen Kreise.

So erhalten wir die folgende Hypothese.

Die Bahnebene des Mondes dreht sich entsprechend der Bewegung der Knotenlinie rückläufig um die Normale zur Ekliptik. Der Mittelpunkt des Epicykels bewegt sich auf einem excentrischen Kreise rechtläufig um die Erde als centrum aequans entsprechend der Bewegung des Argumentes der Breite. Centrum und Apogäum dieses excentrischen Kreises aber rotiren ihrerseits wieder rückläufig um die Erde mit einer Geschwindigkeit, die gleich der doppelten Elongation weniger der Bewegung des Argumentes der Breite ist. Der Mond selbst bewegt sich auf dem Epicykel in demselben Sinne entsprechend der Bewegung der Anomalie.

Der Abstand des Epicykelcentrums vom Apogäum des excentrischen Kreises ist immer gleich der doppelten Elongation; das Centrum befindet sich also im Apogäum zur Zeit der beiden Syzygien, wenn die Elongation 0^0 oder 180^0 ist, und im Perigäum während der beiden Quadraturen, wo dieselbe 90^0 ist.

Fig. 9.



Mithin ist durch diese Anordnung in der That die Bedingung erfüllt, dass die Entfernung während der Syzygien am grössten, und zwar dieselbe, wie nach der ursprünglichen Hypothese, während der Quadraturen am kleinsten sei.

Es wird gut sein,

wenn wir uns dies an der Hand einer Figur und mit einigen Zahlen noch mehr verdeutlichen.

ABCD (Fig. 9) sei die Ebene der Mondbahn; in *A* befinde sich das Epicykelcentrum, das Apogäum des excentrischen Kreises und die mittlere Sonne. Diese Annahmen werden sämmtlich zur Zeit der mittleren Conjunktion, bei welcher die Elongation $= 0$ ist, erfüllt sein. *Z* sei der Mittelpunkt des excentrischen Kreises. Centrum und Apogäum des excentrischen Kreises bewegen sich nun rückläufig um einen Betrag, welcher gleich der doppelten Elongation weniger Argument der Breite ist. In einem Tage wäre dies $= 2 . (12^0\ 11',5) - 13^0\ 14' = 11^0\ 9'$. Es möge so das Centrum *Z* nach dem Punkte *Z'* gelangen, das Apogäum nach *D*. Gleichzeitig beschreibt der Radius *EA* rechtläufig den Bogen $13^0\ 14'$; das Epicykelcentrum gelange dadurch nach *B*, oder vielmehr, da es sich auf dem excentrischen Kreise bewegen soll, nach *H*. Es ist hier wohl zu beachten, dass sich die Rotation nicht um den Mittelpunkt des excentrischen Kreises, sondern um die Erde vollzieht. In dem anderen Falle hätten wir die $13^0\ 14'$ auf dem excentrischen Kreise zu zählen und würden, da der Winkel $DZ'H > DEH$, nicht bis *H* gelangt sein.

Der Abstand des Epicykelcentrums vom Apogäum, oder der Bogen *DB* beträgt jetzt also $24^0\ 23'$, d. h. die doppelte Elongation. Wenn die Elongation $= 90^0$ ist, der Mond sich also in Quadratur befindet, werden sich die Punkte *D* und *B* diametral gegenüberstehen, der Punkt *Z* nach *Z''* gelangen, das Epicykelcentrum der Erde am nächsten sein. Beträgt die Elongation 180^0, so ist der Mittelpunkt des excentrischen Kreises nach *Z'''* gelangt, das Epicykelcentrum nach *C*, also wieder nach dem Apogäum. Im letzten Viertel endlich ist der Punkt *Z* in *Z''''* der Epicykelmittelpunkt in *A''*, d. h. wieder im Perigäum.

Im Laufe eines synodischen Monats beschreibt so das centrum distantiarum rückläufig einen kleinen Kreis um die Erde.

Im Verhältniss zur ersten Hypothese ist offenbar durch diesen Zusatz nichts geändert, als dass der Mond der Erde abwechselnd näher gebracht und wieder von ihr entfernt wird. Aber gerade dadurch wird bewirkt, dass die jedesmalige Mittelpunktsgleichung, die nach der ersten Hypothese nur für das Apogäum des excentrischen Kreises berechnet ist, im Verhältniss zur Annäherung an die Quadraturen vergrössert wird.

Ptolemäus bemüht sich nun zunächst, das Maximum der Mittelpunktsgleichung bei dieser Anordnung der Dinge zu finden.

Er beobachtet daher den Mond in den Quadraturen, und zwar, während seine wahre Bewegung nahezu gleich der mittleren ist, d. h. während die Linie Erde — Mond den Epicykel tangirt, weil in dieser Stellung die Mittelpunktsgleichung nach der ersten Hypothese ihr Maximum hat, mithin auch nach der zweiten. Ausserdem wählt er solche Zeiten, wo sich der Mond im Nonagesimus*) befindet, um die Parallaxe in Länge möglichst zu vermeiden.

Bei Berücksichtigung aller dieser Umstände erhält er für die Mittelpunktsgleichung $7^0\frac{2}{3}$, während ihm die Beobachtungen in den Syzygien nur $5^0\,1'$ ergaben. Um dies an einigen Beispielen zu beweisen, giebt er an, dass er Sonne und Mond im zweiten Jahre des Antoninus beobachtet habe, am 24. Phamenoth $18^h\,45^m$. Der Sonnenort war $10^s\,18^0\,50'$. Der Mondort $7^s\,9^0\frac{2}{3}$; im Meridian stand $8^s\,4^0$. Es ist mithin

Zeit nach d. Epoche:	mittlerer Ort der Sonne,	des Mondes:	Anom. d. ☾:	Elongat.:
885 J. $203^d\,18^h\,45^m$;	$10^s\,16^0\,27'$ [26']	$7^s\,17^0\,20'$;	$87^0\,19'$ [18];	270^0.

Bringen wir an den Sonnenort die Mittelpunktsgleichung an, so erhalten wir $10^s\,18^0\,50'$ [43] καθὼς καὶ ἐν τῷ ἀστρολάβῳ διωπτεύετο, wie Ptolemäus sagt. Die Anomalie und die Elongation beweisen uns, dass die oben erwähnten Bedingungen erfüllt sind; der Unterschied zwischen dem wahren und mittleren Mondorte ist aber in der That $7^0\frac{2}{3}$, wie er beweisen wollte.

Ebenso giebt er noch ein Beispiel aus Hipparchs Beobachtungen, zu welchem er folgende Angaben macht. Mittlere Zeit Alexandria: 52. Jahr der 3. Epoche des Calippus den 15. Epiphi $17^h\,50^m$. Zeit nach der Epoche = 619 J. $314^d\;17\frac{3}{4}^h$.

Beobachtet ist:	Berechnet ist der mittlere Ort:
☉ = $4^s\;8^0\,35'$	☉ = $4^s\,10^0\,27'$ [29]
☾ = $1^s\,12^0\,20'$	☾ = $1^s\;4^0\,25'$
Elong = $2^s\,26^0\,15'$	☉ — ☾ = $3^s\;6^0\;2'$

Anomalie des Mondes = $257^0\,47'$

Bringen wir an den Sonnenort die Gleichung an, so erhalten wir $4^s\,8^0\,20'$ [22'].

Hiernach ist nun wahrer ☾ — mittlerer ☾ = $7^0\,55'$. Ptolemäus folgert aber so: Beobachtet ist

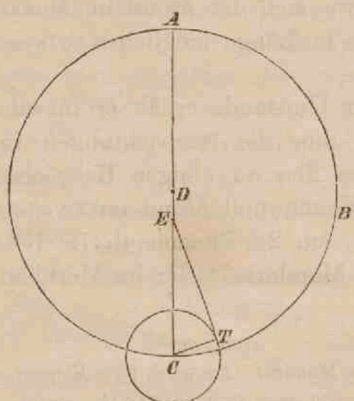
w. ☉ — w. ☾ = $86^0\,15'$; berechnet w. ☉ — m. ☾ = $93^0\,55'$,

also w. ☾ — m. ☾ = $7^0\,40'$.

*) Der Nonagesimus ist der Meridian der Ekliptik.

Er übergeht den Umstand mit Stillschweigen, dass der beobachtete und berechnete wahre Sonnenort um 15′ von einander abweichen.

Fig. 10.



Mit dem Werthe $7\frac{2}{3}^{0}$ als Maximum der gesammten Ungleichheit ist es nun leicht, das Verhältniss des Radius des excentrischen Kreises zu den anderen Elementen der Mondbahn zu bestimmen. Es sei (Fig. 10) ABC der excentrische Kreis, A das Apogäum, D der Mittelpunkt, C das Perigäum, E die Erde.

In C befinde sich das Epicykelcentrum, dann ist, wenn ET den Epicykel tangirt, $TEC = 7\frac{2}{3}^{0}$, woraus $EC = \frac{5\frac{1}{4}^{p}}{\sin 7\frac{2}{3}^{0}} = 39^{p},3525$. AE ist aber $= 60^{p}$, also wird $AD = \frac{1}{2}(99^{p},3525) = 49^{p},676$ oder

$$AD = 49^{p}\ 41'$$
$$DE = 10^{p}\ 19'.$$

Das Verhältniss von $EC : CT$ können wir mit ziemlicher Annäherung auch setzen $= 60 : 8$. In dieser Gestalt benutzt es Ptolemäus bei der Berechnung der Tafeln.

So war in der Theorie des Mondes wieder ein bedeutender Schritt vorwärts gethan. Hipparch hatte nur den Erscheinungen während der Syzygien Genüge geleistet; Ptolemäus fügte, wie wir eben gesehen haben, die Quadraturen hinzu. Er untersucht nun, wie seine neue Hypothese die Mondbewegung ausserhalb der vier Phasen darstellt, für welche sie zuvörderst nur berechnet ist. Er findet, dass die Beobachtungen nicht immer mit den Rechnungen übereinstimmen, jedoch leitet er aus diesen Abweichungen nicht eine dritte Ungleichheit her, sondern erklärt sie durch eine Besonderheit in der Richtung der Apsidenlinie des Epicykels.

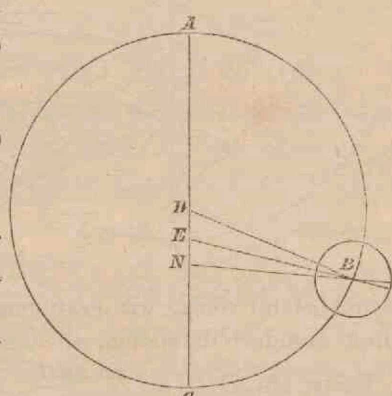
Bisher nämlich wies diese Richtung, wie es ja auch das Zunächstliegende ist, stets nach der Erde, um welche sich die Rotation vollzieht. Bei genauerer Untersuchung findet aber Ptolemäus, dass dies nicht der Fall sei, dass die Apsidenlinie zwar eine konstante Richtung bewahre, diese aber nach einem Punkte des excentrischen Durchmessers weise, welcher von der Erde ebenso weit entfernt ist, wie das centrum distantiarum, diesem aber gerade entgegengesetzt.

Es ist klar, dass diese πρόςνευσις τοῦ ἐπικύκλου, wie Ptolemäus die Erscheinung nennt, nur insofern eine Aenderung hervorruft, als der Anfangspunkt der Zählung für die Anomalie eine kleine periodische Schwankung erleidet. Ptolemäus wird dadurch gezwungen, einen Unterschied zu machen zwischen einem mittleren und einem wahren Apogäum, und zwischen einer mittleren und einer wahren Anomalie. Die mittlere erhält er aus den Tafeln der mittleren Bewegungen, mit der wahren dagegen ist die Mittelpunktsgleichung zu berechnen.

Befindet sich das Epicykelcentrum im Apogäum oder Perigäum des excentrischen Kreises, so fällt die Richtung der wahren Apsidenlinie mit der der mittleren zusammen; für die Syzygien und Quadraturen ist daher nichts geändert. Dagegen muss offenbar der Unterschied am stärksten hervortreten, wenn der Mond in der mittleren Entfernung von der Erde ist.

Ein Punkt bleibt hierbei unklar. Ptolemäus sagt, als er zuerst von der Prosneusis spricht, dass er sie bemerkt habe, wenn der Mond μηνοειδὴς καὶ ἀμφίκυρτος war; das Maximum tritt nach ihm ein, wenn der Mond περὶ τὰς μέσας ἀποστάσεις ist, worunter doch wohl die Oktanten zu verstehen sind. Die Beispiele, die er giebt, und von welchen er ausdrücklich hervorhebt, dass in ihnen ἡ πλείστη διαφορὰ συμβαίνει τῶν ἐκκειμένων προςνεύσεων, zeigen uns auch in der That den Mond in den Oktanten; trotzdem ersehen wir aus seinen eigenen Tafeln, dass das Maximum vielmehr eintritt, wenn die Elongation etwa 60° oder 120°, genauer 57° oder 123° beträgt. Chasles, welcher in den Comptes rendus (1862 tome 54, p. 1007) hierauf aufmerksam gemacht hat, findet diesen Widerspruch so auffallend, dass er sagt, es sei hier vielleicht „une lacune dans la suite de la théorie lunaire.“

Fig. 11.



Eine Figur wird die Erscheinung noch mehr veranschaulichen. Es sei (Fig. 11) *ABC* der excentrische Kreis, *D* der Mittelpunkt desselben, *A* das Apogäum, *C* das Perigäum. *B* sei der Mittelpunkt des Epicykels, *E* die Erde, und

EN endlich = *DE*. Der Unterschied, welcher durch die Richtung der Apsidenlinie hervorgebracht wird, ist dargestellt durch den Winkel *EBN*. Dieser Winkel verschwindet aber offenbar, wenn *B* mit *A* oder *C* zusammenfällt, und er ist ein Maximum, wenn *AEB* ungefähr = 120^0 ist.

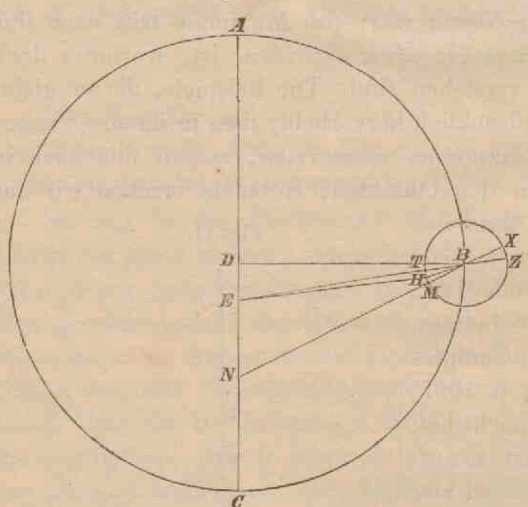
Zum Beweise seiner Behauptung führt nun Ptolemäus zwei Beobachtungen an, die wir in folgende Daten zusammenfassen können.

1) Mittlere Zeit Alexandria:
197. Jahr nach dem Tode Alexanders am 10. Pharmuthi $18^h\,20^m$. Beobachtet wurde

$$\odot = 37^0\,45'; ☾ = 351^0\,27'; ☾ - \odot = 313^0\,42'.$$

Die Zeit nach der Epoche ist 620 J. $219^d\,18^h\,0^m$ [$17^h\,57^m$]. Damit findet sich die mittlere Sonne = $36^0\,41'$ [37'], der wahre Ort = $37^0\,45'$ [44']. Ferner m. ☾ = $352^0\,13'$ [10'], die mittlere Elongation = $315^0\,32'$; endlich die mittlere Anomalie des Mondes = $185^0\,30'$ [28']. Die Mittelpunktsgleichung d. h. w. ☾ — m. ☾ ist = — $0^0\,46'$.

Fig. 12.



Es sei nun (Fig. 12) *ABC* der excentrische Kreis, *D* der Mittelpunkt desselben, *E* die Erde, *B* das Epicykelcentrum; dann ist *AEB* gleich der doppelten Elongation = $271^0\,4'$, oder der Ergänzung dazu $88^0\,56'$. Die Richtung *ETBZ* giebt die mittlere Apsidenlinie, *XM* sei die wahre, *N* also der Punkt, dessen Abstand von *E* wir bestimmen wollen. *H* endlich möge den wahren Mondort darstellen, so dass $BEH = 0^0\,46'$.

Es ist $\sin DBE = \frac{\sin AEB}{DB} \,.\, DE$; $EB = \frac{DB}{\sin AEB} \,.\, \sin EDB$.

$\sin EHB = \sin BEH \,.\, \frac{EB}{HB}$. Hieraus ergiebt sich dann zunächst der Bogen *TH*. Wir führen die Rechnung aus:

$$\begin{array}{rl} \sin AEB = & 9.999925 \\ DB = & 1\,696211 \\ \hline & 8.303714 \\ DE = & 1.013539 \\ \hline \sin DBE = & 9.317253 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} DBE = & 11^0\,58'\,57'' \\ AEB = & 88^0\,56' \\ \hline BDE = & 79^0\ \ 5'\ \ 3'' \\ \frac{DB}{\sin AEB} = & 1.696286 \\ \sin EDB = & 9.992070 \\ \hline EB = & 1.688356 \\ HB = & 0.720159 \\ \hline & 0.968197 \\ \sin BEH = & 8.126471 \\ \hline \sin EHB = & 9.094668 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} EHB = & 180 - 7^0\ 8'\,37'' \\ EBH = & \qquad 6^0\,22'\,37'' = TH \end{array}$$

Nun ist der Bogen $XH = 185^0\ 30'$, also $MH = 5^0\ 30'$, mithin TM d. h. $EBN = 11^0\ 52'\ 37''$ und $ENB = 77^0\ 3'\ 23''$.

Daraus folgt, da $EN = EB\,\frac{\sin EBN}{\sin ENB}$

$$\begin{array}{rl} EB = & 1.688356 \\ \sin EBN = & 9.313467 \\ \sin ENB = & 9.988823 \\ \hline EN = & 1.013000 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} EN = & 10^p,304 \\ \text{oder} & \\ EN = & 10^p\ \ 18' \\ \text{und es ist}\quad DE = & 10^p\ \ 19 \end{array}$$

Diese beiden Grössen sind also „ἴσαι ἔγγιστα.“

Genau ebenso verfährt Ptolemäus noch mit einem anderen Beispiele. Es ist von demselben Jahre, Payni 17, $4^h\ 0^m$, und zwar fand sich

$$\odot = 100^0\ 54';\ ☾ = 149^0;\ ☾ - \odot = 48^0\ 6'.$$

Die Zeit seit der Epoche ist 620 J. $286^d\ 3^h\ 40^m$ [41^m].

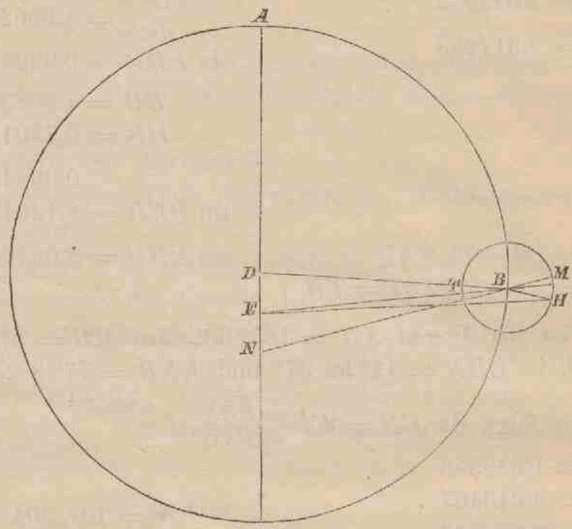
Hiernach findet man die m. $\odot = 102^0\ 5'$ [3'], die wahre $= 100^0\ 40'$ [41]; den mittl. $☾ = 147^0\ 20'$ [7' !], die Anomalie des Mondes $= 333^0\ 12'$ [1' !], die mittlere Elongation $= 45^0\ 15'$ [4].

Nun ist w. $☾$ — w. $\odot = 48^0\ \ 6'$;
ferner nach der Rechnung m. $☾$ — w. $\odot = 46^0\ 40'$.
Hieraus folgert Ptolemäus w. $☾$ — m. $\odot = \ 1^0\ 26'$.

Es war aber der wahre Mond $= 149^0$, der mittlere $= 147^0\ 20'$, also würden wir auf diesem Wege für die Mittelpunktsgleichung erhalten $1^0\ 40'$. Auch hier haben wir wieder den Fall, dass der berechnete Sonnenort von dem beobachteten um 14' abweicht, ohne dass indess Ptolemäus diesen Umstand erwähnt.

Es ist also (Fig. 13) $AEB = 90^0\,30'$, $BEH = 1^0\,26'$; $HM = 26^0\,48'$. Die Rechnung gestaltet sich daher folgendermassen:

Fig. 13.



$$\begin{aligned}
\sin AEB &= 9.999983 \\
DB &= 1.696211 \\
\hline
&\ 8.303772 \\
DE &= 1.013539 \\
\hline
\sin DBE &= 9.317311 \\
DBE &= 11^0\,59'\,3'' \\
AEB &= 90^0\,30' \\
\hline
BDE &= 77^0\,30'\,57''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{DB}{\sin AEB} &= 1.696228 \\
\sin BDE &= 9.989609 \\
\hline
EB &= 1.685837 \\
HB &= 0.720159 \\
\hline
&\ 0.965678 \\
\sin BEH &= 8.398179 \\
\hline
\sin EHB &= 9.363857 \\
EHB &= 13^0\,21'\,49'' \\
BEH &= \ \ 1^0\,26' \\
\hline
EBH &= 180 - 14^0\,47\,49 = TH
\end{aligned}$$

MH ist $= 26^0\,48'$, folglich $EBN = 12^0\,0'\,11''$; $ENB = 78^0\,29'\,49''$

$$\begin{aligned}
BE &= 1.685837 \\
\sin EBN &= 9.317988 \\
\sin ENB &= 9.991188 \\
\hline
EN &= 1.012637
\end{aligned}$$

$EN = 10^p,\,295$

oder

$EN = 10^p\ \ 18'$.

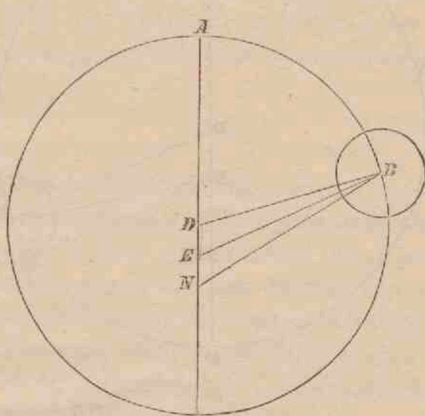
Ptolemäus sagt $EN = 10^p\,20'$.

Auch dieses Resultat zeigt dieselbe Uebereinstimmung wie oben. Die Abweichung von $2'$ zwischen seinem Werthe und dem, den wir gefunden haben, beruht auf einem kleinen Versehen des

Ptolemäus. Er sagt nämlich, dass zu dem Bogen $2^0\,52'$ die Chorde $2^p\,59'$ gehöre; es muss aber heissen $3^p\,0'\,6''$.

Nachdem Ptolemäus so die Prosneusis der Apsidenlinie nachgewiesen hat, geht er, am Schlusse seiner Theorie angelangt, dazu über, die Resultate seiner Untersuchungen tabellarisch zusammenzustellen, um dadurch das Berechnen der jedesmaligen Mittelpunktsgleichung zu erleichtern. Wie ersichtlich ist, handelt es sich zunächst um die Berechnung der Correktion der Anomalie. Wir können dabei, die Methode des Ptolemäus etwas vereinfachend, folgendermassen verfahren.

Fig. 14.



Es ist (Fig. 14)

$\sin DBE = \sin 2D \cdot \frac{DE}{DB}$;

$BE = DB \cdot \frac{\sin BDE}{\sin 2D}$, wo

$D =$ der mittleren Elongation gesetzt ist, also $AEB = 2D$. Dann ist, wenn wir die gesuchte Correktion χ nennen:

$$\operatorname{tg}(D - \chi) = \operatorname{tg} D \cdot \frac{BE - DE}{BE + DE}.$$

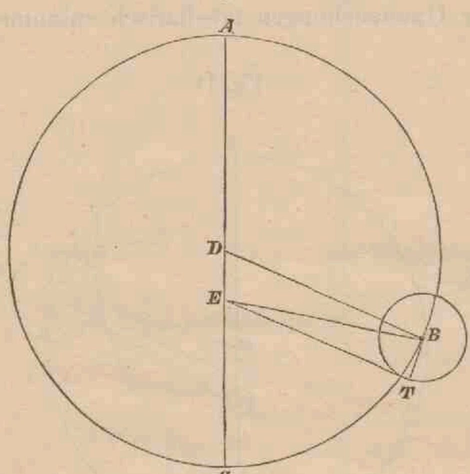
Man kann χ auch in eine Reihe entwickeln, wie z. B. Delambre gethan hat. Er erhält dafür:

$$\begin{aligned} \chi = {} & 12^0\,31'\,14'',27 \sin 2D - 2^0\,42'\,19,3 \sin 4D \\ & + 0^0\,33'\,45'',0 \sin 6D - 7'\,39,0 \sin 8D \\ & + 1'\,59'',66 \sin 10D - 32,3 \sin 12D \\ & + 14'',6 \sin 14D - 2,32 \sin 16D. \end{aligned}$$

Da man hier aber mindestens sechs Glieder mitzunehmen hat, so dürfte diese Art der Berechnung kaum vortheilhafter sein. Ausserdem ist Delambre's Entwickelung nicht ganz genau.

Mit der so korrigirten Anomalie ist die Mittelpunktsgleichung zu berechnen. Ptolemäus trennt die beiden Theile derselben, wie er sie auch einzeln entwickelt hat; für den ersten Theil hat er bereits Tafeln gegeben, den anderen erhält er auf folgendem Wege. Er berechnet die Mittelpunktsgleichung für das Perigäum, also mit dem Verhältniss 60 : 8, und tabulirt den Ueberschuss derselben über den ersten Theil. Dieser gilt aber offenbar nur für die Quadraturen, während er für die dazwischenliegenden Punkte kleiner sein muss. Das Beispiel, welches er hierbei anführt, wird sein Verfahren am deutlichsten machen.

Fig. 15.



ABC (Fig. 15) sei der excentrische Kreis, D der Mittelpunkt desselben, A das Apogäum, C das Perigäum; E die Erde, B das Epicykelcentrum. Wir ziehen die Tangente ET u. den Radius BT. Dann ist zunächst wieder, wie oben:

$$\sin DBE = \frac{\sin AEB}{DB} . DE;$$

$$BE = \frac{DB}{\sin AEB} . \sin BDE.$$

$\sin BET = \frac{BT}{EB}$. Es sei z. B. die Elongation $= 60^0$, AEB also $= 120^0$, dann wird

$\sin AEB = 9.937531$	$\sin BDE = 9.881951$
$DB = 1.696211$	$\frac{DB}{\sin AEB} = 1.758680$
8.241320	$BE = 1.640631$
$DE = 1.013539$	$BT = 0.720159$
$\sin DBE = 9.254859$	$\sin BET = 9.079528$
$DBE = 10^0\ 21'\ 35$	$BET = 6^0\ 53'\ 51'',5$
$BDE = 49^0\ 38'\ 25$	

Der Epicykelradius erscheint also bei dieser Grösse der Elongation unter einem Winkel von $6^0\ 54'$. Nach der ersten Hypothese beträgt dieser Winkel aber nur $5^0\ 1'$; durch den excentrischen Kreis wird also eine Vergrösserung von $1^0\ 53'$ bewirkt. Im Perigäum haben wir dafür $2^0\ 39'$; mithin wird bei einer Elongation von 60^0 der zweite Theil der Mittelpunktsgleichung verkleinert im Verhältniss von $2^0\ 39'$ zu $1^0\ 53'$, oder, wie Ptolemäus der damaligen Sitte gemäss schreibt, von $60^p : 42^p\ 38'$.

Demnach hat man jetzt beim Berechnen der Mittelpunktsgleichung nach Ptolemäus das folgende Verfahren einzuschlagen. Man geht mit der doppelten Elongation in die Tafeln ein, entnimmt daraus die Correktion für die Anomalie und den Bruch, welcher angiebt, in welchem Verhältniss bei dieser Elongation die zweite Ungleichheit verkleinert wird. Mit der korrigirten Anomalie geht man wieder in die Tafeln ein, entnimmt den ersten Theil der Gleichung, multiplicirt den zweiten mit dem obigen Bruche und fügt ihn zum ersten hinzu Diese Summe giebt uns die Mittelpunktsgleichung. War die Anomalie $< 180^0$, so ist sie negativ, war jene $> 180^0$, positiv an den mittleren Ort anzubringen.

Wir haben so die Mondtheorie des Ptolemäus, wie er sie uns im Almagest überliefert hat, entwickelt und wollen jetzt dazu übergehen, zu untersuchen, wie weit es ihm gelungen ist, durch seine Hypothesen die Bewegungserscheinungen wirklich darzustellen, mit anderen Worten, welche Genauigkeit seinen Resultaten beizumessen ist. Es wird hier zugleich der Ort sein, vorher noch Einiges über die Rechnungen des Ptolemäus und deren Genauigkeit vorauszuschicken, weil dadurch natürlich die der Resultate bedingt ist.

Es haben sich im Verlaufe der ausgeführten Rechnungen nicht selten kleine Abweichungen von den Werthen, die Ptolemäus giebt, herausgestellt. Am auffallendsten ist dies wohl bei Berechnungen von mittleren Bewegungen. Man hat ja dabei nur die Werthe für die einzelnen Angaben aus den Tafeln zu entnehmen und zu einander zu addiren. Trotzdem aber erhalten wir häufig gegen Ptolemäus eine Abweichung von $1 - 2'$, ja einmal sogar (S. 27) von $13'$ und $11'$. Was zunächst den letzteren Fall betrifft, so scheint derselbe auf einem Versehen des Ptolemäus zu beruhen. Er findet nämlich die Zeit der angeführten Beobachtung nach der Epoche = 620 J. 286^d und ἁπλῶς μὲν 4^h, ἀκριβῶς δὲ d. h. mit Berücksichtigung der Zeitgleichung $3^h\,40^m$. Mit diesem Werthe müssten also die mittleren Bewegungen des Mondes berechnet sein; die Zahlen des Ptolemäus erhalten wir dagegen, wenn wir den ungenauen Werth von 4^h zu Grunde legen.

Die kleineren Abweichungen von $1'$ oder $2'$ kann man sich häufig dadurch erklären, dass man annimmt, Ptolemäus habe jeden einzelnen Werth, welchen er aus den Tafeln entnimmt, sogleich bis auf die Minuten abgekürzt. Es ist klar, dass er so, wenn er z. B. zweimal $29''$ fortlässt, bereits einen Fehler von $1'$ begangen hat. Mitunter muss man jedoch zur Erklärung der Abweichungen noch die Annahme hinzufügen, dass er die Stundenbrüche noch mit den Secunden addirt und erst die Summe abkürzt.

Eine andere Quelle, aus welcher für seine Rechnungen manche Ungenauigkeit fliesst, ist die eigenthümliche Schreibweise der Brüche. Die Alten lieben besonders solche Brüche, deren Zähler $= 1$ ist, so schreiben sie z. B. nie $\frac{3}{4}$, sondern stets $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, für $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, für $37'$ giebt Ptolemäus $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, obwohl dies eigentlich $= 37'\frac{1}{2}$ ist.

Hierbei suchen sie ausserdem, mitunter selbst auf Kosten der Genauigkeit, möglichst kleine Zahlen im Nenner zu erhalten. Dies erklärt besonders die kleinen Abweichungen in den Zeitgleichungen, denn wenn es z. B. (S. 10) vorkommt, dass die verbesserte Zeit $= 176^d\ 20^h\ 13^m$ ist, so sind wir sicher, dass Ptolemäus schreibt $20\frac{1}{5}^h$. Für $23^h\ 21^m,7$ setzt er $23\frac{1}{3}^h$ u. dergl. m.

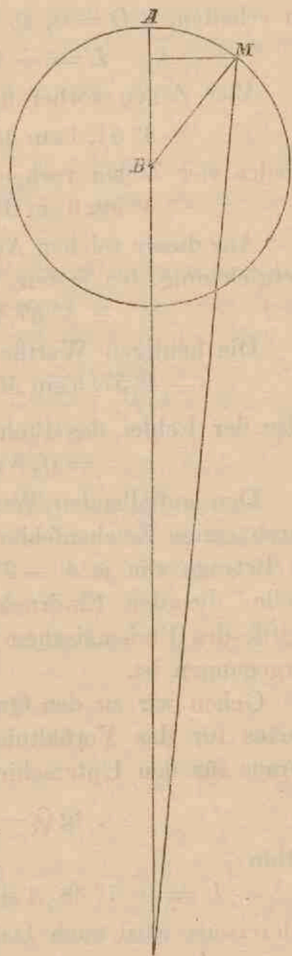
Diese Vorliebe für kleine Zahlen und einfache Verhältnisse ist aber nicht nur für die Rechnung von Bedeutung, sie tritt uns überall, auch in der Theorie selbst, entgegen, und ist auf die Gestaltung derselben häufig genug von entscheidendem Einflusse. Sie ist es gewiss, viel mehr als nur die Bequemlichkeit im Rechnen, die Ptolemäus bewog, statt der beiden gefundenen Werthe für den Epicykelradius $5^p\ 13'$ und $5^p\ 14'$ zu setzen $5\frac{1}{4}^p$, sie ist es, die ihm die genäherte Uebereinstimmung der Werthe $10^p\ 18'$ und $10^p\ 20'$ mit $10^p\ 19'$ zur vollständigen werden lässt, obwohl er doch gewiss zu den Beispielen, die er giebt, diejenigen ausgesucht hat, in welchen die Uebereinstimmung am deutlichsten hervortritt.

Aus allen diesen Dingen geht schon hervor, dass die Genauigkeit seiner Zahlen nach einem anderen Massstabe zu messen ist, als wir ihn an unsere heutigen Rechnungen anzulegen gewohnt sind. Man bedenke weiter die Unbeholfenheit des mathematischen Hülfsapparates, die Unvollkommenheit der Messinstrumente, ferner die ungenauen Angaben über die Mondfinsternisse, mit welchen Ptolemäus rechnen musste, wie μιᾶς ὥρας ἱκανῶς παρελθούσης oder ἡ σελήνη ἐφαίνετο ἐπέχουσα τοῦ λέοντος κθ (29) μάλιστα μοίρας; man bedenke endlich auch noch die geringen geographischen Kenntnisse des Ptolemäus (er nimmt z. B. den Meridian von Rhodus für denselben, wie den von Alexandria, während der Unterschied $2^0 = 8^m$ ist): und man wird zugestehen müssen, dass man nur eine Genauigkeit von höchstens $10'$ erwarten darf. Einen Betrag von $4'$ vernachlässigt Ptolemäus ohne Umstände, indem er hinzufügt, dass es οὐ παράδοξον ἔσται, τοσοῦτον καὶ παρ' αὐτὰς τὰς τηρήσεις πλεονάκις διαπεσεῖν. Wir dürfen uns aber nicht wundern, wenn sich auch grössere Fehler zeigen. Haben wir doch bei zweien seiner Beobachtungen (S. 24 und 27) gesehen, dass ihm selbst ein Irrthum von 15′ kein erwähnenswerther Umstand ist; er hätte doch sonst gewiss nicht gerade solche Beobachtungen in seinem Buche angeführt.

Sehen wir nun zu, wie sich innerhalb solcher Grenzen eine Vergleichung der heutigen Resultate mit denen des Ptolemäus gestaltet.

Von den Gliedern, welche uns die modernen Mondtafeln geben, brauchen wir, wie durch das eben Gesagte zur Genüge erwiesen ist, nur die drei wichtigsten zu betrachten, d. h. das Excentricitätsglied, die Evektion und die Variation. Alle anderen Glieder liegen unterhalb der bezeichneten Grenze, denn die jährliche Gleichung, deren Betrag noch 11′ ist, musste den griechischen Astronomen wegen ihrer grossen Periode entgehen.

Fig. 16.



Die drei genannten Glieder lauten nun nach Damoiseau (tables de la lune 1824), wenn L die mittlere, λ die wahre Länge bedeutet, M die mittlere Anomalie, D die mittlere Elongation:

$$\lambda - L = -6^0\,17',3 \sin M + 12',8 \sin 2M - 0',6 \sin 3M - 1^0\,16',5 \sin (2D - M) + 39',5 \sin 2D.$$

Was giebt uns nun Ptolemäus?

Es sei (Fig. 16) T die Erde, B der mittlere Mondort, M der wahre, A das Apogäum, also ABM die Anomalie, dann ist für die Syzygien $BT = 60$, $BM = 5\frac{1}{4}$.

Wir haben daher:

$$\text{tg aequ. centri} = -\frac{5\frac{1}{4}\sin M}{60 + 5\frac{1}{4}\cos M} = -\frac{\frac{7}{80}\sin M}{1 + \frac{7}{80}\cos M}$$

Entwickeln wir dies in eine Reihe, so erhalten wir für die Mittelpunktsgleichung

$$-5^0\,0',8 \sin M + 13',2 \sin 2M - 0',8 \sin 3M$$

Die Damoiseau'schen Zahlen dagegen ergeben, wenn wir, um die Syzygien zu erhalten, $2D = 0$ setzen:

$$-5^0\,0',8 \sin M + 12',8 \sin 2M - 0'\,6 \sin 3M.$$

Hieraus folgt:

$$\text{Dam.} - \text{Ptol.} = 0', 4 \sin 2\,M + 0', 2 \sin 3\,M.$$

Diese Zahlen sprechen sich ihr Urtheil selbst.

Delambre gelangt in seiner histoire de l'astronomie ancienne tome II, p. 206 zu ganz verschiedenen Resultaten. Er findet schliesslich, dass der Fehler des Ptolemäus in den Syzygien nicht weniger als

$$17', 5 \sin M - 0', 7 \sin 2\,M$$

betrage.

Setzt man in seiner allgemeinen Gleichung, um die Syzygien zu erhalten, $2\,D = 0$, so wird

$$\lambda - L = -4^0\,57, 2 \sin M + 20', 1 \sin 2\,M.$$

Vier Zeilen vorher findet man für denselben Werth

$$-4^0\,51, 1 \sin M + 11' \sin 2\,M - 0', 8 \sin 3\,M;$$

wieder vier Zeilen vorher steht

$$-4^0\,59, 6 \sin M + 11' \sin 2\,M - 0', 8 \sin 3\,M.$$

Aus dieser reichen Auswahl von Werthen wählt Delambre zur Vergleichung den ersten, also

$$-4^0\,57, 2 \sin M + 20', 1 \sin 2\,M.$$

Die heutigen Werthe sind nach ihm

$$\underline{-4^0\,57, 5 \sin M + 8', 6 \sin 2\,M - 0', 6 \sin 3\,M}$$

Also der Fehler des Ptolemäus

$$= 0', 3 \sin M - 11, 5 \sin 2\,M.$$

Den auffallenden Werth 17',5 sin M erhält Delambre theils durch einige Zeichenfehler, theils dadurch, dass er vier Glieder im Betrage von je 4' — 7' fortlässt. Es ist dies nicht die einzige Stelle, die den Eindruck hinterlässt, dass Delambre in seiner Kritik des Ptolemäischen Werkes nicht mit genügender Sorgfalt vorgegangen ist.

Gehen wir zu den Quadraturen über, so haben wir nach Ptolemäus für das Verhältniss der beiden Radien zu setzen 60 : 8, woraus für den Unterschied der wahren und mittleren Länge

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = -\frac{\frac{8}{60} \sin M}{1 + \frac{8}{60} \cos M}$$

mithin:

$$\lambda - L = -7^0\,38', 4 \sin M + 30', 6 \sin 2\,M - 2', 7 \sin 3\,M;$$

andererseits wird nach Damoiseau für $D = \pm 90^0$:

$$\lambda - L = -7^0\,33, 8 \sin M + 12, 8 \sin 2\,M - 0, 6 \sin 3\,M.$$

$$\text{Dam.} - \text{Ptol.} = +4', 6 \sin M - 17, 8 \sin 2\,M + 2', 1 \sin 3\,M.$$

Das Hauptglied ist also auch hier richtig bestimmt, und erst das zweite zeigt eine grössere Abweichung; indessen übersteigt auch diese die oben angegebene Grenze nicht um sehr viel. Sie kann im Maximum mit den anderen Gliedern zusammen, wenn M ungefähr $= 130^0$ ist, auf $22'$ steigen, für $M = 82^0\frac{1}{2}$ etwa verschwindet sie ganz.

Noch von einem anderen Gesichtspunkte aus möchten wir die Vergleichung für diese beiden Phasen des Mondes ausführen, indem wir die beiden Hauptglieder der Mondgleichung, die in den Syzygien und Quadraturen vereinigt auftreten, von einander trennen. Das Maximum der Gleichung für die Syzygien giebt Ptolemäus

	$= 5^0\ 1'$;	die heutigen Tafeln			$4^0\ 58'$
für die Quadraturen	$7^0\ 40'$	„	„	„	$7^0\ 38'$
Also die mittlere Gleichung	$6^0\ 20,5$	„	„	„	$6^0\ 18'$
die Evektion	$1^0\ 19,5$	„	„	„	$1^0\ 20'$

Wir sehen also die beiden Hauptglieder mit ansehnlicher Genauigkeit dargestellt.

Um eine allgemeine Vergleichung anstellen zu können, müssten wir die Ptolemäischen Resultate ganz allgemein in eine Reihe entwickeln. Dies ist aber wegen der Veränderlichkeit der Entfernung eine sehr komplicirte Aufgabe, welche in den zu erwartenden Resultaten keinen entsprechenden Ersatz bietet. Wir wollen uns daher mit einer flüchtigen Vergleichung begnügen, indem wir eine Reihenentwicklung zu Grunde legen, die Biot in dem Journal des Savants für 1843 giebt. Wegen der vielfachen Abkürzungen, die vorgenommen werden mussten, stellt sie die Ptolemäischen Zahlen nur mit einer Genauigkeit von etlichen Minuten dar. Es ist nach ihr

$$\lambda - L = - 6^0\,11',2 \sin M + 19',2 \sin 2M - 1',4 \sin 3M$$
$$- 1^0\,15',5 \sin(2D - M) + 7',8 \sin(4D + M) + 15',7 \sin(4D - M)$$
$$+ 8',0 \sin(2D - 2M).$$

Dagegen giebt Damoiseau

$$\lambda - L = - 6^0\,17',3 \sin M + 12',8 \sin 2M - 0',6 \sin 3M$$
$$- 1^0\,16',5 \sin(2D - M) - 0',6 \sin(4D - M) + 3',5 \sin(2D - 2M).$$

Der Unterschied ist

$$\text{Dam.} - \text{Ptol.} = - 6',1 \sin M - 6',4 \sin 2M + 0',8 \sin 3M$$
$$- 1',0 \sin(2D - M) - 7',8 \sin(4D + M) - 16',3 \sin(4D - M)$$
$$- 4',5 \sin(2D - 2M).$$

In dem Ausdrucke für die Evektion treten mehrere Glieder auf, für welche die Damoiseau'schen Tafeln gar keine entsprechenden haben. Es kommt dies daher, dass Ptolemäus durch die Prosneusis das Gesetz der Erscheinung nicht ganz richtig dargestellt hat. Für die beiden Beispiele, die er im Almagest anführt, heben sich die erwähnten Glieder zum grossen Theile auf; ihnen wird also in der That genügt, wenn wir, wie eben geschehen, die Variation vernachlässigen.

Wir wollen diese allgemeine Vergleichung nicht weiter führen, sondern wollen noch einen speziellen Fall hervorheben und untersuchen, welcher von grösserem Interesse ist, nämlich die Darstellung der Bewegung in den Oktanten.

In den Syzygien und Quadraturen vereinigen sich, wie wir gesehen haben, die beiden ersten Ungleichheiten des Mondes zu einem einzigen Gliede, in den Oktanten dagegen trennen sie sich nicht nur, sondern treten auch in ganz anderer Form auf; ausserdem geht noch die Variation mit ihrem vollem Betrage ein. Es hat diese Untersuchung noch ein allgemeineres Interesse. Bekanntlich wird die Entdeckung der Variation dem Tycho Brahe zugeschrieben. Dagegen erhoben sich vor etwa dreissig Jahren in der Pariser Akademie einige Stimmen, welche diese dritte Ungleichheit des Mondes bereits in einem Werke des arabischen Astronomen Abul Wefa aufgefunden hatten. Der Streit hierüber hat sich zwischen den Hauptvertretern Sédillot, Chasles einerseits und Munk, Biot, Bertrand andrerseits bis in die neueste Zeit hingezogen, und wir möchten schon in Rücksicht darauf etwas genauer auf die Oktanten eingehen, da es sich bei jener Frage natürlich auch darum handelte, ob Ptolemäus schon etwas von der Variation habe.

Was giebt er uns für die Oktanten?

Für $2D = \pm 90$ ist die Correktion $\chi = 11^0\,59'\,4''$; ferner $EB = DB \cos\chi = 48.6005$. Nun ist offenbar:

$$\operatorname{tg}(\lambda - L) = \frac{5\frac{1}{4}\,\sin(M+\gamma)}{EB + 5\frac{1}{4}\,\cos(M+\gamma)},$$

oder wenn wir entwickeln und die Werthe einsetzen:

$$\begin{aligned}\lambda - L = &- 6^0\;\; 3',3 \sin M + 18',3 \sin 2M - 1',2 \sin 3M \\ &- 1^0\, 17',1 \cos M + \;\, 8',1 \cos 2M - 0',9 \cos 3M.\end{aligned}$$

Damoiseau giebt dagegen:

$$\begin{aligned}\lambda - L = &- 6^0\, 17',3 \sin M + 12',8 \sin 2M - 0',6 \sin 3M \\ &- 1^0\, 16',5 \cos M \pm 39',5\end{aligned}$$

Mithin ist Dam. — Ptol. $= -14',0 \sin M - 5',5 \sin 2M + 0',6 \sin 3M$
$+ 0',6 \cos M - 8',1 \cos 2M + 0',9 \cos 3M \pm 39',5$.

Sehen wir von dem Variationsgliede (39',5) ab, so beträgt dieser Unterschied im Maximum 24'. Den Verlauf desselben bei verschiedenen Werthen von M für $2D = 90^0$ und 270^0 stellt folgendes Täfelchen dar:

	$2D$			$2D$			$2D$			$2D$	
M	90^0	270^0	M	90^0	270^0	M	90^0	270^0	M	90^0	270^0
0^0	$-7'$	$+7'$	90^0	$-7'$	$-23'$	180^0	$-10'$	$+10'$	270^0	$+23'$	$+7'$
10	-10	$+2$	100	-5	-20	190	-9	$+9$	280	$+24$	$+9$
20	-13	-3	110	-3	-17	200	-7	$+8$	290	$+23$	$+11$
30	-15	-8	120	-3	-12	210	-3	$+6$	300	$+20$	$+13$
40	-15	-13	130	-3	-7	220	$+2$	$+5$	310	$+17$	$+15$
50	-15	-17	140	-5	-2	230	$+7$	$+3$	320	$+13$	$+15$
60	-13	-20	150	-6	$+3$	240	$+12$	$+3$	330	$+8$	$+15$
70	-11	-23	160	-8	$+7$	250	$+17$	$+3$	340	$+3$	$+13$
80	-9	-24	170	-9	$+9$	260	$+20$	$+5$	350	-2	$+10$
90	-7	-23	180	-10	$+10$	270	$+23$	$+7$	360	-7	$+7$

Hieraus ersieht man, dass, wenn man die Variation hinzufügt, nämlich die Tafelwerthe bei $2D = 90^0$ um $+39',5$, bei $2D = 270^0$ um $-39',5$ verbessert, die Unterschiede der alten und neuen Theorie beträchtlich vermehrt werden, so dass alsdann die geringste Differenz 24' beträgt, das Maximum aber bis auf 63',5 steigt. Ohne die Variation dagegen haben wir eine Maximaldifferenz von 24', während es auch einige Werthe der Anomalie giebt, für welche der Unterschied $= 0$ ist.

Es ergiebt sich somit, dass in der Rechnung des Ptolemäus von der Variation noch nichts enthalten ist.

Auffallend ist es allerdings, dass ihm dieselbe entgehen konnte, obwohl er seine Beobachtungen gerade so angestellt hat, dass sie mit ihrem vollen Betrage einwirken musste; es müssen jedenfalls Beobachtungs- und auch wohl Rechnungsfehler dabei mitgespielt haben. Verfolgen wir seine Angaben bei den beiden Beispielen genauer, so finden wir in der That zahlreiche kleine Abweichungen, die sich beim zweiten, bei welchem noch ein Versehen in dem Sonnenorte hinzukommt, soweit summiren, dass wir statt $1^0\ 26'$ für die Mittelpunktsgleichung $1^0\ 52'$ bekommen können. Mit diesem

1186090

Werthe hätte Ptolemäus wenigstens einen grossen Theil der Variation erhalten.

Der Ruhm, die dritte Ungleichheit des Mondes entdeckt zu haben, muss daher dem Abul Wefa allein vorbehalten bleiben. (Siehe Sédillot, Matériaux, pour servir à l'histoire comparée etc. und Comptes rendus 1862 [Chasles].)

Auf einen Punkt möchten wir nun zum Schlusse noch aufmerksam machen, welcher uns eine Schwäche der Ptolemäischen Darstellungsweise erkennen lässt, einen Punkt, welcher ihm selbst wohl auch nicht entgangen ist, der ihm aber von zu untergeordneter Bedeutung war, um darauf grösseres Gewicht zu legen. Wir meinen die scheinbare Grösse des Mondradius, welche wegen der grossen Variabilität der Entfernung des Mondes sehr verschiedene Werthe annehmen müsste. In den Capiteln, in denen sich Ptolemäus mit der Parallaxe beschäftigt, bestimmt er den Mondradius für das Apogäum des Epicykels und des excentrischen Kreises zu $15'\frac{2}{3}$ [heute $14\frac{1}{2}$]. Bedenken wir nun, dass sich die grösste und kleinste Entfernung des Mondes verhalten, wie $\frac{60 + 5\frac{1}{4}}{39{,}4 - 5\frac{1}{4}} = \frac{65{,}25}{34{,}15}$, so finden wir für den scheinbaren Halbmesser im Perigäum 29'9 [heute nicht ganz 17']. Der Mond musste nach Ptolemäus im Perigäum fast doppelt so gross erscheinen, als im Apogäum. Er hat allerdings den Halbmesser des Mondes für das Perigäum nicht berechnet, wohl aber die Parallaxe, welche er für die Erdferne zu 53' 54" angiebt, für die Erdnähe zu 1^0 44', also doppelt so gross. Dass er trotz dieses Umstandes seine Hypothese beibehielt, hat wohl darin seinen Grund, dass die Distanz-Phänomene für ihn nur während der Syzygien von Wichtigkeit waren, in welchen der Mondhalbmesser auf die Grösse der Verfinsterungen von Einfluss ist. Wir haben ja (S. 6) gesehen, dass es ihm im Allgemeinen nur auf die Darstellung der Längenbewegung ankommt, indem er kein Bedenken trägt, den Radiusvektor, der das Gestirn trägt, beliebig zu vergrössern und doch hinzuzufügen, dass unter diesen Umständen τὰ αὐτὰ φαινόμενα συμβήσεται. Warum sollte er also seine Theorie, die den Mondlauf so gut darstellte, eines Umstandes wegen verwerfen, welcher ihm von keinem Interesse war, da er doch selbst als seine Aufgabe angiebt:

πειρᾶσθαι μὲν ὡς ἔνι μάλιστα τὰς ἁπλουστέρας τῶν ὑποθέσεων ἐφαρμόζειν ταῖς ἐν τῷ οὐρανῷ κινήσεσιν.