



# Randonderzoek bij conforme afbeelding

<https://hdl.handle.net/1874/344817>

RANDONDERZOEK BIJ  
CONFORME AFBEELDING

ss.  
cht











RANDONDERZOEK BIJ CONFORME  
AFBEELDING



*Diss. Utrecht, 1939*

# RANDONDERZOEK BIJ CONFORME AFBEELDING

## PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN  
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE  
AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT  
OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS  
DR. TH. M. VAN LEEUWEN, HOOGLEERAAR IN DE  
FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BE-  
SLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT  
TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT  
DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN  
OP MAANDAG 23 JANUARI 1939, DES NAMIDDAGS  
TE 3 UUR

DOOR

SIGOFRED JACOBUS VLES

GEBOREN TE ZALT-BOMMEL

P. NOORDHOFF N.V. - 1939 - GRONINGEN-BATAVIA

BIBLIOTHEEK DER  
RIJKSUNIVERSITEIT  
UTRECHT





*Aan mijn vrouw.*





PROMOTOR: PROF. DR. J. WOLFF



## LITTERATUUR.

1. Lars Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der Konformen Abbildung und der Ganzen Funktionen.

Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nova Series A. Tome 1 No. 9.

2. J. Wolff, Over de grenswaarden van holomorfe functies. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Deel XXXVI No. 10.

3. J. Wolff, Sur la représentation conforme des bandes.

Compositio Mathematica, Vol. I, Fasc. 2.

4. J. Wolff. Démonstration d'un théorème sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière.

Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings Vol. XXXVIII No. 1.

5. C. Carathéodory, Conformal representation. Cambridge University Press. 1932.

6. J. Wolff, La représentation d'un demi-plan sur un demi-plan à une infinité d'incisions circulaires.

C. R. de l'Académie des Sciences, Séance du 18 Février 1935.

---





## § 1.

### 1. Definitie van het begrip strook.

Een **strook**  $\Omega$  van het  $z$ -vlak (coördinaten  $x$  en  $y$ ) is een enkelvoudig samenhangend gebied, dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

a) in  $\Omega$  ligt een kromme  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $0 < t < 1$ , waarvoor geldt  $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -\infty$  en  $\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = +\infty$ .

b) op iedere rechte  $x = \text{const.}$  is ieder lijnsegment van  $\Omega$  begrensd.

### 2. Het op elke rechte $R(z) = x$ kiezen van een lijnsegment $\theta_x$ .

Het lijninterval in  $\Omega$  gelegen op de rechte  $R(z) = x$ , hetwelk door de kromme  $z = z(t)$ ,  $0 < t < 1$  bij toenemende  $t$  het eerste getroffen wordt, noemen we  $\theta_x$ .

De lengte van  $\theta_x$  stellen we voor door  $\theta(x)$ .

### 3. Conforme afbeelding van een strook op een andere.

Bij conforme afbeelding van de strook  $\Omega$  op een strook  $T$  gelegen in het  $\zeta$ -vlak (coördinaten  $\xi$  en  $\eta$ ), gaat het segment  $\theta_x$  over in een kromme  $\gamma_x$ .

De onderste grens van  $\xi$  op  $\theta_x$  zij  $\xi_1$ , de bovenste grens zij  $\xi_2$ . De schommeling van  $\xi$  op  $\theta_x$  is dan:  $\omega(x) = \xi_2(x) - \xi_1(x)$ .

### 4. Begrenzing naar beneden van $\xi_1(x_2) - \xi_2(x_1)$ , bij conforme afbeelding van $\Omega$ op een strook $T$ , waarvoor geldt $|\eta| < \frac{a}{2}$ .

Indien  $\Omega$  conform wordt afgebeeld op een strook  $T \left[ \left| \eta \right| < \frac{a}{2} \right]$ , en indien deze afbeelding zoodanig is, dat, de oneigenlijke punten van  $\Omega$  en  $T$  correspondeeren dan geldt, voor  $x_1 < x_2$ .

$$\xi_1(x_2) - \xi_2(x_1) \geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} - 4a, \text{ indien voldaan is aan de}$$

voorwaarde  $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} > 2. \text{ }^1)$ .

<sup>1)</sup> De getallen zijn verwijzingen naar de gebruikte literatuur.

De ongelijkheid geldt in het bijzonder, indien:  $x_2 - x_1 > 2\theta_m(x_1, x_2)$  is.  $\theta_m(x_1, x_2)$  is de bovenste grens van  $\theta$  in het interval  $(x_1, x_2)$ .

**5. Begrenzing naar boven van  $\xi_2(x_2) - \xi_1(x_1)$  bij conforme afbeelding van  $\Omega$  op een strook  $T$ , waarvoor geldt  $|\eta| < \frac{a}{2}$ .**

Indien de strook  $\Omega$  nog voldoet aan de volgende voorwaarden:

- a)  $\Omega$  is symmetrisch t.o.v. de reële as,
- b) op elke rechte  $R(z) = x$  ligt slechts één tot het gebied behoorend lijnsegment n.l.  $\theta_x$
- c) de variatie van de functie  $\theta(x)$  is in elk eindig interval begrensd

d)  $\theta(x)$  is begrensd voor  $-\infty < x < \infty$ .  
dan geldt, indien  $\theta(x)$  L tot bovenste grens heeft:

$$\xi_2(x_2) - \xi_1(x_1) \leq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} + Q(x_1, x_2), \quad 1)$$

waarbij:

$$Q(x_1, x_2) = 8a + 16aL^2 \frac{\theta_m(x_1 - 4L, x_2 + 4L)^2 + V(x_1 - 4L, x_2 + 4L)}{\theta_m(x_1 - 4L, x_2 + 4L)^4}$$

$\theta_m(x_1, x_2)$  is het minimum van  $\theta$  in het interval  $(x_1, x_2)$

$V(x_1, x_2)$  is de variatie van  $\theta(x)^2$  in het interval  $(x_1, x_2)$ .

**6. Uitbreiding van de in no. 5 besproken stelling.**

$\Omega'$  zij een gebied, dat een als in No. 5 gedefinieerd gebied  $\Omega$  bevat.

$\zeta(z)$  beelde het gebied  $\Omega'$  conform af op de strook  $T \left[ \left| \eta \right| < \frac{a}{2} \right]$ .

$\xi_1(x)$  en  $\xi_2(x)$  zijn respectievelijk de onderste en bovenste grens van  $R[\zeta(z)]$  op het bij het gebied  $\Omega$  behoorende lijnsegment  $\theta_x$ .

L,  $\theta_m(x_1, x_2)$  en  $V(x_1, x_2)$  hebben betrekking op het gebied  $\Omega$ .

Nu geldt:

$$\xi_2(x_2) - \xi_1(x_1) \leq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} + 4a + Q(x_1, x_2) \quad 1).$$



### 1. Definitie van „hoekafgeleide”.

$\zeta = \zeta(z)$  zij een holomorfe functie van  $z$  voor  $R(z) > 0$ ,  $z_0$  zij een punt van de imaginaire as.

Indien nu in elke hoek  $-\frac{\pi}{2} + \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$  ( $\alpha > 0$ )

uniform:

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} \zeta(z) = \zeta(z_0)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\zeta(z) - \zeta(z_0)}{z - z_0} = \tau \text{ is, dan definieeren we } \tau \text{ als hoekaf-}$$

geleide van  $\zeta(z)$  in het punt  $z_0$ .

Is  $z_0 = \infty$  en  $\zeta(z_0) \neq \infty$ , dan wordt, indien:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z[\zeta(z) - \zeta(z_0)] = \tau \text{ is uniform voor } -\frac{\pi}{2} + \alpha \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$\tau$  als hoekafgeleide van  $\zeta(z)$  in het punt  $\infty$  gedefinieerd.

Indien nu ook nog  $\zeta(z_0) = \infty$  is, dan luidt de definitie:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\zeta(z)}{z} = \tau.$$

2. Indien  $\lim_{z \rightarrow z_0} \zeta'(z)$  voor  $|\arg(z - z_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , bestaat dan bezit  $\zeta(z)$  in het punt  $z_0$  een hoekafgeleide, die gelijk is aan  $\lim_{z \rightarrow z_0} \zeta'(z)$ .

$z \rightarrow z_0$

3. Indien in een hoek van het halfvlak, waarvoor geldt:  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , uniform  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\zeta(z)}{z} = \tau$  is,  $\tau \neq 0$ , dan geldt:

$\lim_{z \rightarrow \infty} \zeta'(z) = \tau$  uniform in elke hoek, die voldoet aan:

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha', \quad \alpha' > \alpha.$$

Bewijs: Bij elk positief getal  $\varepsilon$  behoort een waarde  $\varrho_\varepsilon$ , zoodanig, dat de functie  $\varphi(z) = \zeta(z) - z\tau$  in het gebied bepaald door de ongelijkheden:

$$|z| \geq \varrho_\varepsilon \text{ en} \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

voldoet aan de voorwaarde:

$$|\varphi(z)| < \varepsilon \cdot |z|$$

$z_0$  zij een punt van de hoek  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha'$ .

$$\text{Verder zij: } |z_0| > \frac{\varrho_\varepsilon}{1 - \sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Nu ligt de cirkel  $C_{z_0}$  met middelpunt  $z_0$  en straal  $|z_0| \sin(\alpha' - \alpha)$  geheel in het gebied  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Uit:

$$\varphi'(z_0) = \zeta'(z_0) - \tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0}} \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

volgt dan direct:

$$|\zeta'(z_0) - \tau| \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{\sin(\alpha' - \alpha)} \right).$$

Hiermede is de stelling bewezen.

### § 3.

**Onderzoek naar noodige voorwaarden voor het bestaan van een van 0 en  $\infty$  verschillende hoekafgeleide op oneindig bij conforme afbeelding van het rechter  $\zeta$ -halfvlak door middel van de functie  $z(\zeta)$  op een in het  $z$ -vlak gelegen gebied  $G$ , zoodanig, dat het oneindig verre punt van de reële as van het  $\zeta$ -vlak correspondeert met het oneindig verre punt van de reële as van het  $z$ -vlak.**

We onderstellen, dat de functie  $z(\zeta)$  een van nul en  $\infty$  verschillende hoekafgeleide bezit. Deze hoekafgeleide wordt reëel verondersteld. Dit is steeds te verwezenlijken door een draaiing van het gebied  $G$ .

Onderstel, dat het punt  $z = 0$  een randpunt van  $G$  is. Dit is steeds door een translatie te bereiken. Transformeer de gebieden  $G$  en  $R(\zeta) > 0$  met behulp van de transformaties  $s = x' + iy' = \log z$  en  $\sigma = \xi' + i\eta' = \log \zeta$  in 2 strooken  $\Omega$  en  $T$ .  $\left[ |\eta| < \frac{\pi}{2} \right]$ .

Volgens het onderstelde blijft  $\left| \frac{\zeta}{z(\zeta)} \right|$  begrensd voor  $|\zeta|$  voldoende groot op de reële as van het  $\zeta$ -halfvlak. Dus bestaat er een eindige constante  $M$ , zoodanig, dat op deze as voor  $|\zeta|$  grooter dan een vast, positief getal:

$$\log \left| \frac{\zeta}{z(\zeta)} \right| = \xi' - x'(\sigma) < M \text{ is.}$$

Met de reële as van het  $\zeta$ -vlak correspondeert in het  $z$ -vlak een kromme, die alle doorsneden  $\theta_x$  van het gebied  $\Omega$  snijdt.

Dus is er op elke doorsnede, waarvoor  $x$  groot genoeg is, minstens een punt, waarvoor:

$$\xi'(s) - x' < M \text{ is.}$$

Voeren we de notatie van § 1,3 in, dan kunnen we schrijven:

$$\xi_1'(x') - x' < M \dots \dots \dots (1)$$

Volgens de stelling van § 1,4 geldt, indien  $x > 4\pi$  is;

$$\xi_1'(x') - \xi_2'(0) \geq \pi \int_0^{x'} \frac{dx'}{\theta(x')} - 4\pi \dots \dots \dots (2)$$

(2) en (1) geven samen:

$$\pi \int_0^{x'} \frac{dx'}{\theta(x')} - x' = \int_0^{x'} \frac{\pi - \theta(x')}{\theta(x')} dx' < M - \xi_2'(0) + 4\pi$$

d.w.z. de integraal  $\int_0^{x'} \frac{\pi - \theta}{\theta} dx'$  blijft naar boven begrensd.



De interpretatie hiervan voor het  $z$ -vlak is de volgende:

Indien  $\theta(r)$  de openingshoek voorstelt van die op de cirkel  $|z| = r$  gelegen boog, welke correspondeert met de doorsnede  $\theta_{\log r}$ , dan is een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een eindige positieve hoekafgeleide, dat de integraal

$$\int_1^r \frac{\pi - \theta(r)}{\theta(r)} \frac{dr}{r}$$

onder een eindige grens blijft.

We wenschen ook nog een tweede noodige voorwaarde te verkrijgen. Dit is mogelijk met behulp van § 1; 6.  $\bar{\Omega}$  zij een in  $\Omega$  gelegen, t.o.v. de  $X'$ -as symmetrisch gebied, dat op elke rechte  $R(s) = x'$ , waarvoor  $x'$  groot genoeg is, slechts één doorsnede  $\bar{\theta}_{x'}$  bevat, waarvan de lengte wordt voorgesteld door  $\bar{\theta}(x')$ .

Verder onderstellen we nog, dat er een interval  $(x'_0, \infty)$  bestaat, waarin de totale variatie van  $\bar{\theta}(x')^2$  eindig is.

$\left| \frac{z(\zeta)}{\zeta} \right|$  blijft begrensd voor  $|\zeta|$  voldoende groot op de reële as van het  $\zeta$ -halfvlak.

Voor  $x'$  groot genoeg geldt:

$$\xi'(x') - x' > -M' \quad (M' \text{ is een eindige constante}).$$

Dan geldt dus a fortiori

$$\xi'_2(x') - x' > -M', \dots \dots \dots (1)$$

waarbij  $\xi'_2(x')$  de bovenste grens van  $\xi'(s)$  op  $\bar{\theta}_{x'}$  is.

We onderstellen nu, dat  $\liminf_{x' \rightarrow \infty} \bar{\theta}(x') > 0$  is en we kiezen in de stelling van § 1; 6,  $x'_1$ , zoodanig dat:  $x'_1 > x'_0 + 8\pi$  is. De ongelijkheid (1) geeft voor  $x' > x'_1$

$$\xi'_2(x') - \xi'(x'_1) \leq \pi \int_{x'_1}^{x'} \frac{dx'}{\bar{\theta}(x')} + 4\pi + Q(x'_1, x')$$

In de restterm kan men  $L = 2\pi$  stellen en vindt, daar als ondersteld  $V(x'_0, \infty)$  eindig blijft en  $\theta_m(x'_1 - 8\pi, x')$  grooter dan een positief getal blijft, dat  $Q(x'_1, x')$  onder een van  $x'$  onafhankelijke eindige grens ligt.

Dit geeft samen met (1) dat:

$$\pi \int_{x_1'}^{x'} \frac{dx'}{\bar{\theta}(x')} - (x' - x_1') = \int_{x_1'}^{x'} \frac{\pi - \bar{\theta}(x')}{\bar{\theta}(x')} dx'$$

naar onderen begrensd blijft.

Hetzelfde resultaat geldt natuurlijk ook, indien  $\lim_{x \rightarrow \infty} \inf \bar{\theta}(x') = 0$  is. Want, daar  $\Omega$  alle genoeg veraf gelegen punten van de hoek  $|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{4}$  bevat, kan  $\bar{\Omega}$  door een ander gebied vervangen worden, waarvan de doorsneden gelijk zijn aan  $M\left[\bar{\theta}(x'), \frac{\pi}{4}\right]$ .

Omdat de bij dit gebied behorende integraal naar onderen begrensd blijft, geldt dit a fortiori voor de grootere bij  $\bar{\Omega}$  behorende integraal.

Bij transformatie van het gevonden resultaat naar het  $z$ -vlak krijgen we de volgende voorwaarde:

$\bar{G}$  zij een willekeurig in  $G$  gelegen, ten opzichte van de reële as symmetrisch gebied, dat van elke cirkel  $|z| = r$  slechts één boog bevat. De openingshoek van deze boog zij  $\bar{\theta}(r)$ . Indien er een interval  $(r_0, \infty)$  is, waarin de variatie van  $\bar{\theta}(r)^2$  eindig is, dan is voor het bestaan van een van nul en oneindig verschillende hoekafgeleide noodig, dat:

$$\int_{r_0}^r \frac{\pi - \bar{\theta}(r)}{\bar{\theta}(r)} \cdot \frac{dr}{r}$$

voor elke  $r > r_0$  boven een eindige grens ligt. Hieruit volgt:

Indien een van nul en  $\infty$  verschillende hoekafgeleide bestaat, dan kan  $G$  geen hoek grooter dan  $\pi$  bevatten. Beschouw een hoek, die symmetrisch is t.o.v. de reële as. Indien we deze hoek als gebied  $\bar{\Omega}$  beschouwen, dan is de  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\theta}(r) > \pi$ , waaruit volgt, dat de integraal negatief oneindig wordt.

Noodige voorwaarden zijn dus:

$$1) \int_1^r \frac{\pi - \theta(r)}{\theta(r)} \frac{dr}{r} \text{ is naar boven begrensd.}$$

- 2)  $\int_{r_0}^r \frac{\pi - \bar{\theta}(r)}{\bar{\theta}(r)} \cdot \frac{dr}{r}$  is voor elke  $r > r_0$  naar beneden begrensd.
- 3)  $G$  kan geen hoek grooter, dan  $\pi$  bevatten.

## § 4.

**Stelling van Fatou.**

Indien  $f(z)$  voor  $|z| < 1$  holomorfe en begrensd is ( $|f(z)| < M$ ), dan bestaan bij radiale nadering tot de rand  $|z| = 1$  de grenswaarden

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}) \quad z = re^{i\varphi}$$

bijna overal (hoogstens met uitzondering van een  $\varphi$ -verzameling van de maat nul).

Bij het bewijs van de stelling maken we gebruik van een stelling van Lebesgue. Deze zegt, dat een reële functie met begrensde differentiequotienten bijna overal (hoogstens met uitzondering van een verzameling van de maat nul) differentieerbaar is.

Beschouw de functie  $F(z)$  gedefinieerd door:

$$F(z) = \int_0^z f(t) dt \quad |z| \leq 1$$

Dan is:

$$|F(z) - F(z')| \leq M |z - z'| < \varepsilon$$

indien

$$|z - z'| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Er bestaat dus een 2 dimensionale limiet van  $F(z)$  voor  $|z| = 1$ .  $F(z)$  „wordt” dus continu voor  $|z| \leq 1$ .

$F(z)$  op  $|z| = 1$  voldoet dus ook aan:

$$|F(z) - F(z')| \leq M |z - z'| < \varepsilon$$

Dus geldt:

$\frac{dF(e^{i\varphi})}{d\varphi}$  heeft op volle maat  $E$  een afgeleide, welke in absolute

waarde  $\leq M$  is Volgens Poisson is:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{i\varphi})(1-r^2)}{\rho^2} d\varphi.$$

Bekend is: waar  $F(e^{i\varphi})$  een afgeleide heeft, daar is radiaal:

$$\frac{\partial F(re^{i\varphi})}{r \partial \varphi} = F'(re^{i\varphi}) \cdot ie^{i\varphi} \rightarrow \frac{dF(e^{i\varphi})}{d\varphi}$$

dus:  $F'(re^{i\varphi}) = f(re^{i\varphi}) \rightarrow -e^{-\varphi i} \frac{dF(e^{i\varphi})}{d\varphi}.$

Hiermede is de stelling bewezen.

### § 5.

#### Uitbreiding van de stelling van Fatou.

Een uitbreiding van de stelling van Fatou werd door de gebroeders Riess gegeven en wel in de volgende vorm: De in de vorige § bedoelde limiet is slechts voor een  $\varphi$ -verzameling van de maat nul gelijk aan  $\alpha$ , indien  $\alpha$  een willekeurig getal is.

Een zeer eenvoudig bewijs is hiervan gegeven door Wolff<sup>2)</sup>. Hierbij werd zonder aan de algemeenheid te kort te doen, aangenomen, dat  $f(0) \neq \alpha$  is,  $[f(z)]$  was holomorf en begrensd voor  $|z| < 1$ .

Nu is voor  $0 < r < 1$  volgens Jenssen:

$$2\pi \lg |f(0) - \alpha| \leq \int_0^{2\pi} \lg |f(re^{i\varphi}) - \alpha| d\varphi \dots (1)$$

Zij  $0 < \varepsilon < 1$  en zij  $E_n$  de intervalverzameling van de waarden van  $\varphi$ , waarvoor geldt:

$$\left| f \left\{ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\varphi} \right\} - \alpha \right| < \varepsilon$$

Is  $\mu E_n$  de maat van  $E_n$ , dan volgt uit (1) en uit  $|f - \alpha| < 2M$  dat:



$$2\pi \lg |f(0) - \alpha| \leq \mu E_n \lg \varepsilon + 2\pi \lg (2M)$$

dus:  $\mu E_n \leq \frac{c}{\lg \frac{1}{\varepsilon}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  C constant.

De waarden van  $\varphi$ , waarvoor  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = \alpha$  is, behooren tot de limes inferior van  $E_n$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

Dus de maat van de verzameling dier waarden is hoogstens  $\frac{c}{\lg \frac{1}{\varepsilon}}$  en daar  $\varepsilon$  willekeurig tusschen 0 en 1 kan worden gekozen, is deze maat nul.

### § 6.

Indien de begrensde functie  $u(z)$  ( $|u(z)| < M$ ) harmonisch is voor  $x > 0$  en indien op de imaginaire as  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{u(ti) - u(-ti)\}$  nul is, dan bestaat  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x)$ , ( $v(z)$  is een geconjugeerde functie van  $u(z)$ )

indien:  $\int_0^{\infty} \frac{u(-ti) - u(ti)}{1+t^2} t dt$  convergeert.

Bewijs:

$$u(x) + iv(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(ti) \left( \frac{1}{x-ti} + \frac{1}{1+ti} \right) dt + \text{constante.}$$

In de integraal is  $u(ti)$  de Fatou'sche  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x+ti)$ .

Neem de constante = 0.

Zij  $\varepsilon > 0$  en vast en zij  $x$  zoo groot, dat voor  $t > \varepsilon x$ :

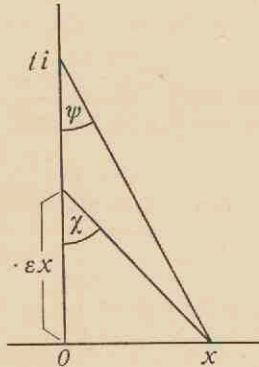
$$|u(ti) - u(-ti)| < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \text{ is, dan is:}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{|t| > \varepsilon x} u(ti) \left( \frac{1}{x-ti} + \frac{1}{1+ti} \right) dt \right| &= \left| \int_{t > \varepsilon x} \{u(ti) - u(-ti)\} \frac{(x+1)dt}{(x-ti)(1+ti)} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \int_{t > \varepsilon x} \frac{(x+1)dt}{\sqrt{x^2+t^2} \sqrt{1+t^2}} = A. \end{aligned}$$



Nu is:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t^2} > |t| &= \sqrt{x^2+t^2} \cos \psi > \sqrt{x^2+t^2} \cos \chi = \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \sqrt{x^2+t^2},\end{aligned}$$



dus:

$$A < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} (x+1) \int_{t > \varepsilon x} \frac{dt}{x^2+t^2} = \varepsilon \frac{(x+1)}{x} \left( \frac{\pi}{2} - \text{Bgtg } \varepsilon \right)$$

dus:  $A < \pi \varepsilon$  voor  $x$  voldoende groot . . . . . (1)

$$\begin{aligned}I &= \Im \int_{|t| \leq \varepsilon x} u(ti) \left( \frac{1}{x-ti} + \frac{1}{1+ti} \right) dt = \int_{|t| \leq \varepsilon x} \frac{t(1-x^2)u(ti)dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \\ &= \int_0^{\varepsilon x} \frac{(1-x^2) \{u(ti) - u(-ti)\}}{(1+t^2)(x^2+t^2)} t dt.\end{aligned}$$

Nu is:

$$\frac{1-x^2}{x^2+t^2} = -1 + \frac{1+t^2}{x^2+t^2}$$

dus

$$I = \int_0^{\varepsilon x} \frac{u(-ti) - u(ti)}{1+t^2} t dt + J$$

$$|J| \leq 2M \int_0^{\varepsilon x} \frac{t dt}{x^2 + t^2} = M \log(1 + \varepsilon^2) < M\varepsilon^2 \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt nu:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon x} \frac{u(-ti) - u(ti)}{1 + t^2} t dt - \pi\varepsilon - M\varepsilon^2 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} v(x) \leq$$

$$\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} v(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon x} \frac{u(-ti) - u(ti)}{1 + t^2} t dt + \pi\varepsilon + M\varepsilon^2.$$

1. Convergeert  $\int_0^{\infty}$ , dan is  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \int_0^{\infty}$

2. Bestaat  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = l$ , dan is  $\int_0^{\infty} = l$ , daar uit (1) en (2)

ook volgt:

$$l - \pi\varepsilon - M\varepsilon^2 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon x} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon x} \leq l + \pi\varepsilon + M\varepsilon^2$$

Opmerking:

Noodig en voldoende is ook de convergentie van

$$\int_1^{\infty} \frac{u(-ti) - u(ti)}{t} dt, \quad \text{wegens}$$

$$\frac{t}{1 + t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t(1 + t^2)}.$$

### § 7.

Indien  $\zeta(z)$  holomorfe is voor  $R(z) > 0$  en als bovendien geldt:  $\xi > 0$ , dan nadert in iedere hoek  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  het quotiënt  $\frac{\zeta(z)}{z}$ , indien  $z$  tot  $\infty$  nadert, uniform to een reële eindige grens-

waarde  $\geq 0$ , welke dezelfde is als de onderste grens van  $\frac{\xi(z)}{x}$  voor  $x > 0$ , m.a.w. er bestaat steeds een eindige hoekafgeleide op oneindig en deze is positief of nul.

Bewijs:

Zij  $\alpha$  (reële deel  $a$ ) een punt van het  $z$ -vlak en zij  $\alpha'$  het spiegelbeeld van  $\alpha$  t.o.v. de imaginaire as van het  $z$ -vlak.

Zij verder  $\beta$  (reële deel  $b$ ) het door  $\zeta(z)$  aan  $\alpha$  toegevoegde punt en zij  $\beta'$  het spiegelbeeld van  $\zeta$  t.o.v. de imaginaire as van het  $\zeta$ -vlak,  
dan beelden de functies:

$$\varphi = \frac{z - \alpha}{z - \alpha'} \quad \text{en}$$

$$\psi = \frac{\zeta - \beta}{\zeta - \beta'} \quad \text{de halfvlakken}$$

$x > 0$  en  $\xi > 0$  af op de eenheidscirkels  $|\varphi| < 1$  en  $|\psi| < 1$ .

Nu is  $\psi(\varphi)$  een holomorfe functie van  $\varphi$  voor  $|\varphi| < 1$ .

Verder is  $\psi(0) = 0[\psi = \psi(\varphi)]$ .

Aan de voorwaarden van het Schwarz' lemma is dus voldaan zoodat geldt:

$$|\psi(\varphi)| \leq |\varphi|$$

dus:

$$\left| \frac{\zeta - \beta}{\zeta - \beta'} \right| \leq \left| \frac{z - \alpha}{z - \alpha'} \right|$$

Indien nu  $z$  tot  $\alpha$  nadert, dan nadert:

$$\zeta \rightarrow \beta$$

$$\alpha' \rightarrow -\alpha$$

$$\beta' \rightarrow -\beta$$

$$\left| \frac{\zeta - \beta}{z - \alpha} \right| \leq \left| \frac{\zeta - \beta'}{z - \alpha'} \right| \text{ geeft dan:}$$

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\alpha} \leq \frac{2b}{2a}.$$

Dus algemeen geldt overal:

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \leq \frac{\xi}{x}$$

Op elke rechte // de reële as van het  $z$ -vlak geldt dus:

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \leq \frac{\xi}{x},$$

dus  $\frac{\xi}{x}$  daalt monotoon op iedere zoodanige rechte

$$\frac{\xi}{x} \downarrow \lambda \geq 0.$$

Deze limiet is op alle rechten //  $0x$  gelijk

Op de  $X$ -as geldt:  $\frac{\xi}{x} \downarrow \lambda$

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right| \leq \frac{\xi}{x}.$$

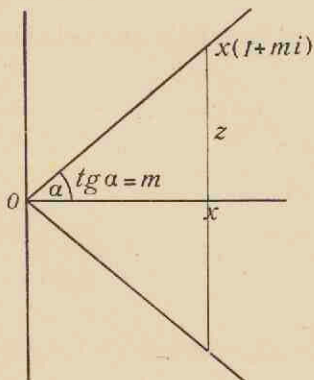
Op het lijnsegment  $x, x(1 + mi)$  geldt derhalve:

$$-\frac{dy}{x} \leq \frac{d\xi}{\xi} \leq \frac{dy}{x}$$

Zij eerst  $\lambda = 0$ :

$$\frac{\xi(z)}{x} \leq \frac{\xi(x)e^m}{x}.$$

Voor  $x \rightarrow \infty$  volgt hieruit:  $\frac{\xi(z)}{x} \rightarrow 0$ , dus  $\frac{\xi}{x} \rightarrow 0$  angularair.



$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \leq \frac{\xi}{x}, \text{ dus } \frac{d\zeta}{dz} \rightarrow 0 \text{ angular.}$$

$$\text{Eveneens } \frac{\zeta}{z} \rightarrow 0$$

Beschouw nu het geval  $\lambda > 0$ .

We kijken dan naar  $\zeta - \lambda z$ .

$$R(\zeta - \lambda z) \geq 0$$

$$\text{Op de reële as geldt: } \frac{\xi - \lambda x}{x} = \frac{\xi}{x} - \lambda \downarrow 0.$$

De hoekafgeleide van  $(\zeta - \lambda z)$  op oneindig is dus 0.

$$\text{Dus: } \lim \text{ang.} \left( \frac{\xi}{x} - \lambda \right) = 0, \text{ dus } \lim \text{ang.} \frac{\xi}{x} = \lambda$$

$$\lim \text{ang.} \left( \frac{\zeta}{z} - \lambda \right) = 0, \text{ dus } \lim \text{ang.} \frac{\zeta}{z} = \lambda$$

$$\lim \text{ang.} \left( \frac{d\zeta}{dz} - \lambda \right) = 0, \text{ dus } \lim \text{ang.} \frac{d\zeta}{dz} = \lambda.$$

### § 8.

#### **Uitbreiding van de stelling van § 7.**

$G_1$  zij een enkelvoudig samenhangend gebied dat alle voldoende verre punten der reële positieve as bevat.

$G_1$  zij gelegen in het halfvlak  $\xi > 0$  en  $z_1(\zeta)$  zij een functie, welke  $G_1$  conform afbeeldt op het halfvlak  $R(z_1) > 0$ , zoodanig, dat het oneindig verre punt van de reële as van het  $\zeta$ -vlak correspondeert met het oneindig verre punt van de reële as van het  $z$ -vlak.

Verder wordt ondersteld, dat  $\frac{z_1(\xi)}{\xi}$  voor  $\xi$  voldoende groot begrensd is.

Dan bestaat voor elke in  $G_1$  holomorfe functie  $z(\zeta)$ , welke een positief reëel gedeelte heeft, de limiet:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{z(\zeta)}{\zeta},$$

indien:

$$|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\alpha > 0) \text{ is.}$$

Deze limiet is reëel en eindig.

Bewijs:  $\zeta(z_1)$  zij de omkeeringsfunctie van  $z_1(\zeta)$ .

Omdat  $R[\zeta_1(z)] > 0$  is, bestaat de limiet:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\zeta(z_1)}{z} = m_1 > 0, \text{ uniform in elke hoek, waarvoor geldt}$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ook de functie  $z[\zeta(z_1)]$ , die in het rechter  $z$ -halfvlak gedefinieerd is, bezit daar een positief reëel gedeelte:

Dus:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z[\zeta(z_1)]}{z} = m_0 < \infty$ , uniform in elke tot het gebied behorende hoek.

Dus is in elke hoek, waarvoor geldt:

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ uniform}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z[\zeta(z_1)]}{\zeta(z_1)} = \frac{m_0}{m_1} < \infty.$$

Daar  $m_1$  van nul en oneindig verschilt geldt:

a) alle punten van de hoek  $|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  voor  $|\zeta| > \varrho_\varepsilon$  behoren tot het gebied  $G_1$ .



b) hun beeldpunten in het  $z$ -vlak vallen binnen een iets grootere hoek  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon'$

$$\varepsilon' < \varepsilon$$

Dus is in elke hoek  $|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , uniform

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{z(\zeta)}{\zeta} = \frac{m_0}{m_1}.$$

### § 9.

Onderzoek naar voldoende voorwaarden voor het bestaan van een van 0 en  $\infty$  verschillende hoekafgeleide op oneindig bij conforme afbeelding van het rechter  $\zeta$ -halfvlak door middel van de functie  $z(\zeta)$  op een in het  $z$ -vlak gelegen gebied  $G$  waarbij het oneindig verre punt van de reële as van het  $\zeta$ -halfvlak correspondeert met het oneindig verre punt van de reële as van het  $z$ -vlak.

Transformeer de gebieden  $G$  en  $R(\zeta) > 0$  door de transformaties  $s = x' + iy' = \log z$  en  $\sigma = \xi' + i\eta' = \log \zeta$  in 2 strooken  $\Omega$  en  $T$ .

Beschouw de functie  $\theta_1(x')$ .

$\theta_1(x')$  definiëren we als de lengte van het grootste op  $\theta_x'$  gelegen t.o.v. de  $X'$ -as symmetrische segment. We voeren nu in:

$$\alpha(x') = \frac{1}{2}[\pi - \theta_1(x')]$$

Zij  $k$  een positieve constante en zij  $m_p$  het maximum van  $\alpha(x')$  in het interval  $pk \leq x' \leq (p+1)k$ , indien dit maximum positief is.

Is dit niet het geval, dan zij  $m_p = 0$ .

Voor het  $z$ -vlak wil dit zeggen:

$m_p$  in het grootste van de getallen 0 en  $\max \frac{1}{2}[\pi - \theta_1(\log r)]$  in het interval  $K^p \leq r \leq K^{p+1}$ , waarbij  $K = e^k$  is.

We zullen bewijzen, dat voor het bestaan van een van nul en oneindig verschillende hoekafgeleide op oneindig, voldoende is, dat:

de reeks  $\sum_{p=0}^{\infty} m_p$  en de integraal  $\int_1^{\infty} [\theta(r) - \pi] \frac{dr}{r}$  convergeeren<sup>1)</sup>.

Bewijs: Uit de convergentie van de reeks  $\sum_{v=0}^{\infty} m_v$  volgt, dat vanaf een zekere  $v$ -waarde ( $v_0$ ),  $m_v < \frac{1}{2} \pi$  is.

Beschouw in het  $s$ -vlak het gebied  $\bar{Q}_1$ , dat bestaat uit de rechte hoeken  $vk < x' \leq (v+1)k$ ,  $|y| < \frac{\pi}{2} - m_v$ , voor  $v \geq v_0$ .

Dit gebied correspondeert in het  $z$ -vlak met een gebied  $\bar{G}_1$ , dat symmetrisch is t.o.v. de reële as en dat zowel in het halfvlak  $R(z) > 0$  als in het gebied  $G$  bevat is.

We zullen nu bewijzen, dat het gebied  $\bar{G}_1$  voldoet aan de eischen, die gesteld zijn in § 8.

Het bewijs leveren we door gebruikmaking van § 1; 6. De bij het gebied  $\bar{Q}_1$  behorende functie  $\bar{\theta}_1(x')$  is in het interval  $vk < x' < (v+1)k$  steeds gelijk aan:  $\pi - 2m_v$ .

Dus:

$$\pi \int_{v_1 k}^{v_2 k} \frac{dx'}{\bar{\theta}_1(x')} = \sum_{v_1}^{v_2-1} \frac{\pi k}{\pi - 2m_v} = (v_2 - v_1)k + \sum_{v_1}^{v_2-1} \frac{2m_v k}{\pi - 2m_v} \quad (1)$$

Indien  $\bar{\sigma}(s) = \bar{\xi}'(s) + i\bar{\eta}'(s)$  de functie is, die met behoud der symmetrie het gebied  $\bar{Q}_1$  op de strook  $|\bar{\eta}'| < \frac{\pi}{2}$  conform afbeeldt, dan geldt:

$$\bar{\xi}'_2(v_2 k) - \bar{\xi}'_1(v_1 k) \leq (v_2 - v_1)k + \sum_{v_1}^{v_2-1} \frac{2m_v k}{\pi - 2m_v} + Q(v_1 k, v_2 k) \quad (2)$$

In de restterm kan men  $L = 2\pi$  kiezen. Indien nu  $\lambda$  een geheel getal groter dan  $\frac{8\pi}{k}$  is, krijgen we:

$$\begin{aligned}
 V(v_1 k - 4L, v_2 k + 4L) &\leq \sum_{v_1 - \lambda}^{v_2 + \lambda - 1} |(\pi - 2m_v)^2 - (\pi - 2m_{v+1})^2| \\
 &\leq 4\pi \sum_{v_1 - \lambda}^{v_2 + \lambda - 1} |m_v - m_{v+1}| \leq 8\pi \sum_{v_1 - \lambda}^{v_2 + \lambda} m_v.
 \end{aligned}$$

Wegens de convergentie van de reeks  $\sum_{v=0}^{\infty} m_v$  blijft dus:  $V(v_1 k - 4L, v_2 k + 4L)$  van willekeurige  $v_2$  begrensd. Kiezen we  $v_1$  zoo groot, dat voor  $v > v_1 - \lambda$ ,  $m_v < \frac{\pi}{4}$  is, dan is voor iedere  $v_2 > v_1$   $\theta_m(v_1 k - 4L, v_2 k + 4L) > \frac{\pi}{2}$ . Hieruit zien we, dat de restterm  $Q(v_1 k, v_2 k)$  voor elke  $v_2$  begrensd blijft.

Dit geldt ook voor de in het rechterlid van (1) staande som, want de reeks:

$$\sum_0^{\infty} \frac{2m_v}{\pi - 2m_v}$$

konvergeert tegelijk met de reeks:

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v.$$

Uit (2) volgt nu, dat:  $\bar{\xi}_2'(vk) - vk$  voor elke  $v$  begrensd blijft.

Hetzelfde geldt dan ook voor:  $\bar{\xi}_2'(x') - x'$ , voor  $x'$  willekeurig want als  $(v-1)k < x' \leq vk$  is, dan is:  $\bar{\xi}_2'(x') - x' \leq \bar{\xi}_2'(vk) - vk + k$ . Dit beteekent echter voor de functie  $\bar{\zeta}(z) = e^{\bar{\pi}(\log z)}$ , die  $\bar{G}_1$  op het halfvlak  $R(\zeta) > 0$  conform afbeeldt, dat  $\left| \frac{\bar{\zeta}(z)}{z} \right|$  in  $\bar{G}_1$  gelijkmatig begrensd blijft, d.w.z.  $\bar{G}_1$  voldoet aan de voorwaarden van § 1; 6.

Dus bestaat in elke hoek  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$  de eindige limiet:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{\zeta}(z)}{z} \right|.$$

Nu moet nog aangetoond worden, dat deze limiet niet  $= 0$  kan zijn.

Hiervoor maken we gebruik van § 1; 4.

Bij afbeelding van  $\Omega$  op de strook  $|\eta'| < \frac{\pi}{2}$  geldt:

$$\xi_1'(x') - \xi'(0) > \pi \int_0^{x'} \frac{dx'}{\theta} - 4\pi$$

indien  $x' > 4\pi$  is.

Nu is:

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{x'} \frac{dx'}{\theta} &= x' - \frac{1}{\pi} \int_0^{x'} (\theta - \pi) dx' + \frac{1}{\pi} \int_0^{x'} \frac{(\theta - \pi)^2}{\theta} dx' \\ &> x' - \frac{1}{\pi} \int_0^{x'} (\theta - \pi) dx'. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\xi_1'(x') - x' \geq -\frac{1}{\pi} \int_0^{x'} (\theta - \pi) dx' - 4\pi + \xi_2'(0) \quad (3)$$

Volgens het onderstelde blijft:

$$\int_0^{x'} (\theta - \pi) dx' \text{ begrensd.}$$

Uit (3) volgt dan, dat:

$\xi_1'(x') - x'$  voor elke  $x'$  boven een eindige grens ligt, d.w.z.

$\left| \frac{\zeta(z)}{z} \right|$  blijft op de cirkelbogen  $\theta_r$ , die corresponderen met de doorsneden  $\theta_{x'}$ , grooter dan een positief getal.

Dus kan de limiet  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\zeta(z)}{z} \right|$  niet nul zijn.

Uit het bestaan en van nul en oneindig verschillen van deze

limiet concludeeren we dat de afbeelding op oneindig conform is en dat:

$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{z(\zeta)}{\zeta}$  gelijkmatig aanwezig is in elke hoek met

$|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$  en van nul en  $\infty$  verschilt.

### § 10.

#### Stelling van Caratheodory.

$G$  zij een gebied van het  $\zeta$ -vlak, dat het oneindig verre punt van de reële as van het  $\zeta$ -vlak bevat.  $D$  zij het halfvlak  $R(z) > 0$ .

$\zeta = \zeta(z)$  beelde het halfvlak  $R(z) > 0$  af op het gebied  $G$  zoodanig, dat het oneindig verre punt van de reële as van het  $z$ -vlak correspondeert met het oneindig verre punt van de reële as van het  $\zeta$ -vlak.

Nu is door Carathéodory bewezen, dat voor het bestaan van een nul en oneindig verschillende hoekafgeleide in het punt  $z = \infty$ , voldoende is, dat het gebied  $G$  een halfvlak bevat en zelf in een halfvlak bevat is.

Het bewijs van deze stelling volgt makkelijk uit de vorige §.

Want als  $G$  het halfvlak  $R(\zeta) > \delta$  bevat en zelf bevat is in het halfvlak  $R(\zeta) > -\delta$ , dan is:

$$m_\nu \leq \arcsin \frac{\delta}{K^\nu}$$

en

$$|\theta(r) - \pi| \leq 2 \arcsin \frac{\delta}{r}$$

Hieruit volgt direct de convergentie van de reeks

$\sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu$  en van de integraal

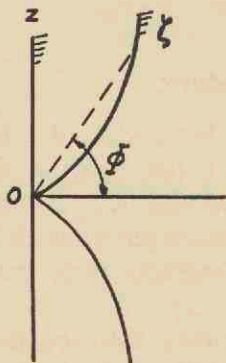
$$\int_1^{\infty} [\theta(r) - \pi] \frac{dr}{r}$$



**Uitbreiding van de stelling van Caratheodory.**

De in de vorige § beschreven stelling is zeer te verfijnen.

We beschouwen daartoe het rechter-halfvlak  $x > 0$ , en beelden dit af op een gebied, dat gelegen is in dit halfvlak en waarvan de



grens symmetrisch is t.o.v. de reële as. De vergelijking van de grenskromme zij:

$$\eta = \eta(\xi), \quad \eta = -\eta(\xi)$$

$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\eta}{\xi} = \infty$ ,  $\eta'(\xi)$  monotoon toenemend.

We onderstellen, dat met het oneindig verre punt van de reële as van het  $z$ -halfvlak het oneindig verre punt van de reële as van het  $\xi$ -gebied correspondeert en vragen nu naar de vorm, die de rand van het  $\xi$ -gebied moet hebben, opdat het bestaan van een positieve hoekafgeleide voor  $z \rightarrow \infty$  verzekerd is.

*We zullen bewijzen, dat noodig en voldoende is het convergeeren van:*

$$\int^{\infty} \frac{\xi d\eta}{\eta^2}.$$

Voor het bewijs moeten we gebruik maken van een paar hulpstellingen. Deze volgen nu eerst.



## § 12.

Gegeven zijn:

B is de strook  $|y| < 1$  van het  $z$ -vlak ( $z = x + iy$ ).

$\zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z)$  beeldt de strook B conform af op een in B gelegen gebied D, dat de volgende eigenschappen bezit:

a. D wordt begrensd door 2 Jordan-krommen  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ , die van  $x = -\infty$  tot  $x = +\infty$  in B loopen en die voor  $x = +\infty$  respectievelijk de rechten  $y = +1$  en  $y = -1$  tot asymptoten hebben.

b. er bestaan 2 getallen  $m$  en  $q$ , zoodanig, dat als P en Q 2 punten van  $\Gamma_1$  of  $\Gamma_2$  zijn, die dezelfde abscis  $u$  hebben, welke grooter is dan  $q$ , dat dan de schommeling van de abscis op de boog PQ kleiner is dan  $m$ .

c.  $u \rightarrow +\infty$ , indien  $x \rightarrow +\infty$ .

Dan geldt: als  $\sigma(a)$  de schommeling van  $\zeta - z$  voorstelt op het segment  $S_a(x = a, |y| \leq 1)$  van B.

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \sigma(a) \leq 2m. {}^3)$$

Indien in hypothese  $2m$  vervangen kan worden door  $m_1$  en  $m_2$  respectievelijk op  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ , dan heeft men voor elk getal  $\theta$  waarvoor geldt  $-1 < \theta < +1$ , de volgende ongelijkheden voor de schommelingen  $\sigma_1(a)$  en  $\sigma_2(a)$  voor  $\zeta(z) - z$  op de segmenten  $x = a, \theta \leq y \leq 1$  en  $x = a, -1 \leq y \leq \theta$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \sigma_1(a) \leq m_1$$

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \sigma_2(a) \leq m_2.$$

Voor het bewijs, met behulp van de stelling van § 16, zie <sup>3)</sup>.

## § 13.

Beschouw de gebieden B en D als gedefinieerd in § 12.

Op de bovenrand gelde:  $y = 1$ , voor  $x \rightarrow \infty : \eta - y \rightarrow 0$

Op de onderrand gelde:  $y = -1$ , voor  $x \rightarrow \infty : \eta - y \rightarrow 0$ .

Verder is  $\eta - y$  harmonisch en begrensd in de strook.

Dus  $\eta - y \rightarrow 0$  voor  $x \rightarrow \infty$ .

Voor  $x \rightarrow \infty$  geldt:

$$\eta_x \rightarrow 0$$

$$\eta_y \rightarrow 1$$

$$\zeta_x \rightarrow 1 \text{ uniform voor } 1 + \varepsilon < y < 1 - \varepsilon$$

$$\zeta_y \rightarrow 0$$

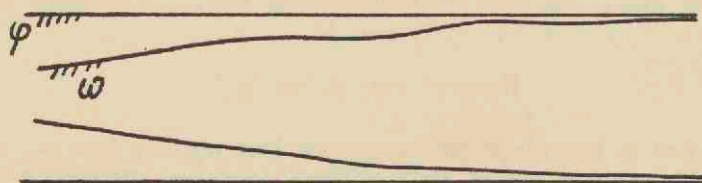
dus:  $\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow 1$  uniform voor  $1 + \varepsilon < y < 1 - \varepsilon$ .

#### § 14.

#### Bewijs van de stelling van § 11.

Ondersteld was, dat  $\zeta \rightarrow \infty$  voor  $z \rightarrow \infty$ .

Beeld het rechter halve  $z$ -vlak en het  $\zeta$ -gebied door de transformaties  $\varphi = \tau + i\chi = \log z$  en  $\omega = u + iv = \log \zeta$  af op onderstaande figuur.



Dan is voor  $\tau \rightarrow \infty$ ;  $u \rightarrow \infty$ .

Volgens de stelling van § 12 geldt dan:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} \rightarrow 1 \text{ voor } \tau \rightarrow \infty, \text{ uniform voor } |\chi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Hieruit volgt  $\frac{\omega}{\varphi} \rightarrow 1$ , uniform voor  $|\chi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  (1).

Volgens § 12 (geval  $m = 0$ ) zijn de beelden van de verticale streepen  $\tau = \text{constant}$ , voor voldoende groote  $\tau$  bijna recht en verticaal, d.w.z. de horizontale schommeling nadert tot nul voor

$\tau \rightarrow \infty$ . Dit gecombineerd met (1) levert dadelijk  $\frac{\omega}{\varphi} \rightarrow 1$  uniform voor  $\tau \rightarrow +\infty$ .

In de oorspronkelijke figuur beteekent dit:

$$\frac{\log \zeta}{\log z} \rightarrow 1, \text{ uniform voor } z \rightarrow \infty, \text{ dus } \log y \sim \log \eta. \quad (2)$$

Ter verkrijging van een kenmerk voor het bestaan van een positieve hoekafgeleide op oneindig maken we gebruik van § 6.

Daar werd nl. bewezen, dat, indien een functie  $u(z)$  begrensd en harmonisch is voor  $x > 0$  en indien  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{u(ti) - u(-ti)\}$  nul is,  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x)$  bestaat, als

$$\int_1^{\infty} \frac{u(-ti) - u(ti)}{t} dt \text{ convergeert.}$$

In dit geval nu definiëren we (zie blz. 22):

$$u = \frac{\pi}{2} - \Phi$$

Dan is:

$$v = \log \left| \frac{z}{\zeta(z)} \right|.$$

Voor het bestaan van  $\lim_{x \rightarrow \infty} v$  is nu noodig, dat:

$$\int_1^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi}{t} dt \text{ convergeert.}$$

Nu is:  $\frac{\pi}{2} - \Phi \sim \frac{\xi}{\eta}$  en  $\frac{dt}{t} = \frac{dy}{y}$ , dus  $\int_1^{\infty} \frac{\xi}{\eta} \frac{dy}{y}$  moet convergeren.

We wenschen echter een kenmerk, waarbij we  $y$  als functie van  $\eta$  niet noodig hebben, want we wenschen aan de randkromme van het  $\xi$ -gebied te zien of de hoekafgeleide ( $\lambda$ ) grooter dan nul is, zonder de afbeeldingsfunctie  $\zeta(z)$  te gebruiken.

De onbekende functie  $y(\eta)$  is te elimineeren met behulp van formule (2), blz. 24.

A. Zij  $\lambda > 0$ , dan is:

$$\int_1^n \frac{\xi}{\eta} \frac{dy}{y} = \frac{\xi(n)}{\eta(n)} \log n - \int_1^n \log y d \frac{\xi}{\eta} < \text{een constante } M < \infty. \text{ Daar}$$

$$d \frac{\xi}{\eta} < 0 \text{ is, is } \frac{\xi(n)}{\eta(n)} \log n < M \text{ en } - \int_1^n \log y d \frac{\xi}{\eta} < M.$$

Wegens (2) is ook:

$$- \int_{y=1}^n \log \eta d \frac{\xi}{\eta} < \text{constante} < \infty, \text{ dus:}$$

$$\frac{\xi(n)}{\eta(n)} \log n - \int_{y=1}^n \log \eta d \frac{\xi}{\eta} = \int_{y=1}^n \frac{\xi}{\eta} \frac{d\eta}{\eta} < \text{constante} < \infty,$$

dus:

$$\int_1^{\infty} \frac{\xi}{\eta^2} d\eta \text{ convergeert. . . . . (3)}$$

B. Convergeert  $\int_1^{\infty} \frac{\xi}{\eta^2} d\eta$ , dan bewijst men op dezelfde wijze, dat

$\int_1^n \frac{\xi}{\eta} \frac{dy}{y}$  convergeert, dat dus  $\lambda > 0$  is. De convergentie van  $\int_1^{\infty} \frac{\xi}{\eta^2} d\eta$  is dus noodig en voldoende voor  $\lambda > 0$ .

### § 15.

*Indien een halfvlak  $H(x > 0)$  een gebied  $G$  bevat en indien  $G'$  een gebied  $G'$  bevat, dan is indien bij de afbeelding van  $H$  op  $G'$ , waarbij de oneindig verre punten corresponderen, de hoekafgeleide op oneindig positief is, deze ook positief bij de afbeelding van  $H$  op  $G$  met correspondentie van de oneindig verre punten.*

Noodig is aan te toonen de convergentie van de reeks  $\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu}$  en van de integraal  $\int_1^{\infty} [\theta(r) - \pi] \frac{dr}{r}$  bij afbeelding van  $H$  op  $G$ .

De convergentie van  $\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu}$  is verzekerd, daar de convergentie van deze reeks gegeven is bij afbeelding van  $H$  op  $G'$ , waarbij de termen grooter zijn dan bij de afbeelding van  $H$  op  $G$ .

De reeks  $\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu}$  convergeert dus a fortiori.

Eveneens is direct in te zien, dat  $\int_1^{\infty} [\theta(r) - \pi] \frac{dr}{r}$  a fortiori



convergeert bij afbeelding van  $H$  op  $G$ , daar zij dit reeds doet bij afbeelding van  $H$  op  $G'$ .

### § 16.

Gegeven is een gebied  $G$ .  $\alpha$  zij een zoodanig randpunt van  $G$ , dat  $G$  een punt bevat, dat op een afstand grooter, dan een vast getal  $h$  van  $\alpha$  is gelegen.

Beschouw nu de familie holomorfe eenwaardige functies,  $\Omega(z)$ , waarvan de absolute waarde in  $G$  kleiner dan 1 is.

$C$  zij een cirkel met middelpunt  $\alpha$  en met straal  $\rho < h$ .  $\sigma(\rho)$  zij de verzameling van tot  $C$  behorende bogen binnen  $G$  en  $\lambda(\rho)$  zij de totale lengte van het door  $\Omega(z)$  verkregen beeld van  $\sigma(\rho)$ .

Dan zullen we bewijzen:

*Bij elk positief getal  $\varepsilon$  behoort een getal  $\delta$  tusschen 0 en  $h$  zoodanig dat voor  $\delta^2 < \rho < \delta$  de lim. inf.  $\mu(\delta)$  van  $\lambda(\rho)$  kleiner is dan  $\varepsilon$ .  $\delta$  hangt noch van  $\varepsilon$  noch van  $h$  af.*

Het bewijs van deze stelling is eenvoudig.

Indien  $\rho$  en  $\varphi$  de poolcoördinaten van een punt  $z$  van  $G$  t.o.v.  $\alpha$  zijn, dan geldt:

$$\iint_G \left| \frac{d\Omega}{dz} \right|^2 \rho d\rho d\varphi \leq \pi.$$

Verder is  $\lambda(\rho) =$

$$\int_{\sigma(\rho)} \left| \frac{d\Omega}{dz} \right| \rho d\varphi \leq \left\{ 2\pi\rho \int_{\sigma(\rho)} \left| \frac{d\Omega}{dz} \right|^2 \rho d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uit deze beide ongelijkheden volgt:

$$\int_{\delta^2}^{\delta} \{\lambda(\rho)\}^2 \frac{d\rho}{\rho} < 2\pi^2 \text{ indien } 0 < \delta < h, \delta < 1$$

dus:

$$\{\mu(\delta)\}^2 < 2\pi^2 \left( \log \frac{1}{\delta} \right)^{-1}.$$

Dus is  $\mu(\delta) < \varepsilon$  indien  $\delta < e^{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}}$ .



## § 17.

**Hoektrouw in de buurt van een grenspunt bij conforme afbeelding van een gebied.**

$G$  zij een enkelvoudig samenhangend gebied, zoodanig, dat met elk getal  $\varepsilon$  tusschen 0 en  $\frac{\pi}{2}$  een getal  $R(\varepsilon)$  correspondeert zoodanig, dat het deel van  $G$ , gelegen buiten de cirkel  $|z| = R(\varepsilon)$  het gebied  $D(\varepsilon)$  bevat, gedefinieerd door  $|z| > R(\varepsilon)$ ,  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  en bevat is in het gebied  $\bar{D}(\varepsilon)$ , gedefinieerd door  $|z| > R(\varepsilon)$ ,  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ .

Nu is aan te toonen, dat elke in  $G$  holomorfe functie  $w(z) = u + iv$ , welke  $G$  op het halfvlak  $D(u > 0)$  afbeeldt, zoodanig, dat in elk gebied  $D(\varepsilon)$ :  $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \infty$  is, de volgende eigenschap bezit:

In elk gebied  $D(\varepsilon)$  geldt:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \arg \frac{w}{z} = 0$ .

Opmerking: Over de grens van  $G$  is **niet** de onderstelling gemaakt, dat zij een Jordan-kromme is.

Voor het bewijs van deze stelling maken we gebruik van een door Caratheodory <sup>5)</sup> bewezen stelling.

Deze luidt als volgt:

Zij  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied, dat met een enkelvoudig samenhangend deel  $g$  een grensstuk  $AB = \gamma$  gemeen heeft.

Men beeldt  $G$  en  $g$  op eenzelfde cirkelschijf  $E$  af, zoodanig dat  $\gamma$  beide keeren overgaat in eenzelfde boog  $\gamma_1 = A_1B_1$  van de grens  $\Gamma$  van  $E$ .

Zij  $\delta_1$  een in  $E$  gelegen cirkelboog  $A_1B_1$ , die  $\Delta$  en  $\delta$  tot beelden in  $G$  en  $g$  heeft, dan ligt  $\delta$  binnen het gebied, dat door  $\gamma$  en  $\Delta$  begrensd wordt.

Met behulp van deze stelling bewijzen we nu de in de aanvang van deze paragraaf vermelde stelling.

Zij  $A$  een bereikbaar grenspunt van  $G$ . Bij de toepassing der hulpstelling zal  $B$  het punt  $\infty$  zijn. Uit het onderstelde volgt het

bestaan van een kromme  $z$  in  $G$  van  $A$  naar  $\infty$ , waarop  $\arg z \rightarrow \frac{\pi}{2}$  voor  $z \rightarrow \infty$ .  $G$  wordt door  $z$  in twee gebieden verdeeld, waarvan er één ( $g$ ) alle voldoende verre punten van de positieve reële as bevat.

Zij  $E$  het halfvlak  $u > 0$ , dat op  $G$  en  $g$  conform wordt afgebeeld, zoodanig, dat het gemeenschappelijke grensstuk  $A \infty$  telkens correspondeert met het grensstuk  $v \leq 0$  van  $E$ . Zij  $\delta_1$  een kromme ( $0 \infty$ ) in  $E$ , waarop  $\arg. w \rightarrow \frac{\pi}{2}$  voor  $w \rightarrow \infty$ . Daar  $z$  een Jordan-

boog is, geldt op het beeld  $\delta$  van  $\delta_1$  in  $g$ :  $\arg z \rightarrow \frac{\pi}{2}$  voor  $z \rightarrow \infty$ .

Uit de hulpstelling volgt nu, dat op het beeld  $\Delta$  van  $\delta_1$  in  $G$  geldt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \inf. \arg. z \geq \frac{\pi}{2}.$$

Op een dergelijke manier bewijst men, dat op  $\Delta$  geldt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup. \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \text{ bijgevolg:}$$

$$\arg z - \arg. w \rightarrow 0 \text{ als } \arg. w \rightarrow \frac{\pi}{2} . . . . (1)$$

Evenzoo bewijst men, dat (1) geldt als  $\arg. w \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .

### § 18.

De gebieden  $G$  en  $G_1$  hebben een gedeeltelijk gemeenschappelijk grensstuk  $\gamma$ . Het gebied  $G_1$  is binnengebied van het gebied  $G$ . De gebieden  $G$  en  $G_1$  worden beide conform afgebeeld op eenzelfde cirkel, zoodanig, dat een tot de beide gebieden  $G$  en  $G_1$  behoorend inwendig punt bij de afbeelding overgaat in het middelpunt van de cirkel.

*Dan is de beeldlengte van  $\gamma$  bij de afbeelding van  $G_1$  kleiner dan bij de afbeelding van  $G$ .*

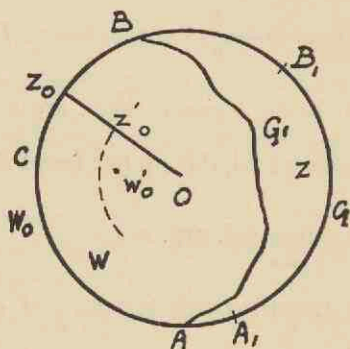
Voor het bewijs is het voldoende aan te nemen, dat de gebieden  $G$  en  $G_1$  respectievelijk zijn een cirkel en een willekeurig in deze

cirkel gelegen gebied, waarvan de rand voor een gedeelte gevormd wordt door de cirkelrand.

We gaan nu het gebied  $G_1$  afbeelden op de cirkel  $G$ . Bij deze afbeelding blijve het punt  $O$  invariant.

De afbeeldingsfunctie, welke het gebied  $G_1$  conform afbeeldt op de cirkel  $G$  zij  $z = z(w)$ .

(Het gebied  $G_1$  wordt beschouwd te liggen in het  $w$ -vlak, het gebied  $G$  wordt beschouwd te liggen in het  $z$ -vlak).



Nadert  $|w|$  tot boog  $AB$ , dan nadert:

$$|z| \rightarrow 1$$

De functie  $z = z(w)$  is voortzetbaar over  $AB$ .

Uit deze voortzetbaarheid volgt, dat  $\frac{dz}{dw}$  bestaat, continu is en ongelijk nul is op  $AB$ .

Nu is:  $(\text{boog } ACB)_{O, G_1} = (\text{boog } A_1CB_1)_{O, G}$ , waarbij algemeen onder  $(\text{boog } \gamma)_{O, G}$  verstaan wordt: de beeldlengte van  $\gamma$  als  $G$  wordt afgebeeld op de eenheidscirkel, zóó dat met het punt  $O$  van  $G$  het middelpunt van de cirkel correspondeert.

$w(z)$  is holomorf voor  $|z| < 1$ .

$$|w(z)| < 1$$

$$w(o) = 0$$

Nu is volgens het Schwarz-lemma:

$$|w| \leq |z|$$

Kies het punt  $z_0'$  op de straal  $Oz_0$ , dan is:

$$\left| \frac{w_0' - w_0}{z_0' - z_0} \right| \geq 1 \text{ volgens Schwarz.}$$

Laat nu  $z_0'$  naderen tot  $z_0$ , dan is:  $\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z_0} \geq 1$ .

De gelijkheid is uit te schakelen, want in dat geval zou  $w = z$  zijn in alle punten van boog AB en dan zou  $w \equiv z$  zijn.

Met deze mogelijkheid hoeven we geen rekening te houden.

Dus is:

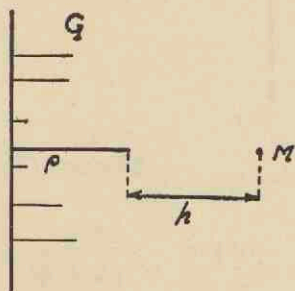
$$\left| \frac{dw}{dz} \right| > 1.$$

$(\gamma)_{O,G}$  wordt kleiner, als  $G$  krimpt.

## § 19.

### Toepassing.

Het gebied  $G$  van het  $z$ -vlak zij het rechter halve  $z$ -vlak met uitzondering van daarin liggende „franjes" (Schlitze). Het gebied



$G$  gaan we conform afbeelden op een halfvlak en we vragen nu naar de grenzen, waartusschen de afbeelding van „franje"  $\rho$  komt te liggen.

Daartoe bedenken we, dat in verband met de stelling uit de vorige paragraaf:

$$(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min alle franjes}} \leq (\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min eenige franje } \varrho}.$$

We gaan nu kijken naar de beeldlengte van boog  $\varrho$  bij afbeelding van het gebied  $(M, x > 0 \text{ min franje } \varrho)$  op een halfvlak.

We passen op dit gebied toe de transformatie:

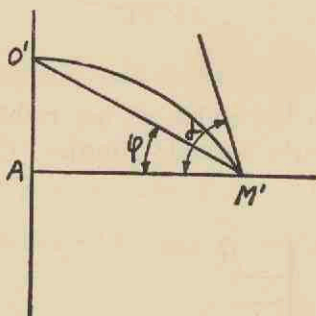
$$w = \sqrt{z^2 - \varrho^2}$$

We gaan na, wat er met boog  $\varrho$  gebeurt.

$$z = \varrho \text{ gaat over in } : w = 0$$

$$M(z = \varrho + h) \text{ ,, ,, ,, } : w = \sqrt{2\varrho h + h^2}$$

We beschouwen nu het  $w$ -vlak ( $w = u + iv$ ).



$$(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min franje } \varrho} = 2(\text{boog } AO')_{M', x > 0} = 2\alpha = 4\varphi$$

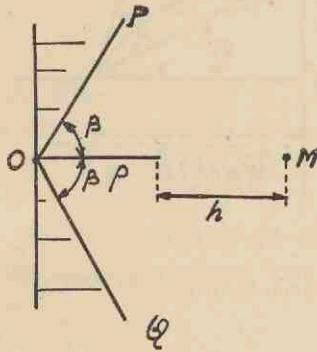
$$\text{tg } \varphi = \frac{\varrho}{\sqrt{2\varrho h + h^2}}$$

$$\text{Voor kleine } \varrho: \varphi \approx \frac{\varrho}{h}$$

$$(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min alle franjes}} \leq \frac{4\varrho}{\sqrt{2\varrho h + h^2}}$$



We willen nu een schatting hebben naar de andere kant. Teeken daartoe in het  $z$ -vlak hoek  $POQ$ , Binnen  $POQ$  is alléén franje  $\varrho$  gelegen.

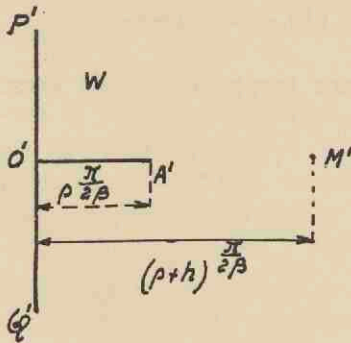


Nu is:

$$(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0, \text{ min alle franjes}} \cong (\text{boog } \varrho)_{M, \angle POQ, \text{ min franje } \varrho}$$

Pas toe de transformatie:  $w = z^{2\beta}$  op  $\angle POQ$  min franje  $\varrho$ .

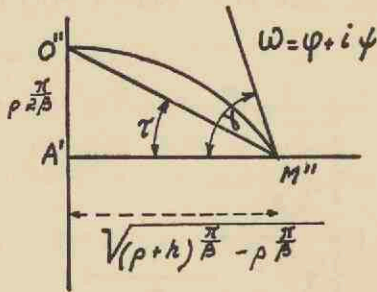
Het beeld in het  $w$ -vlak wordt dan als in onderstaande figuur is aangegeven.



Op de figuur in het  $w$ -vlak passen we nu toe de transformatie:

$$\omega = \sqrt{w^2 - \varrho^{\frac{\pi}{\beta}}}$$

We krijgen nu de volgende figuur:



$$\begin{aligned} \text{Nu is: } (\text{boog } \varrho)_M, \angle \text{POQ min franje } \varrho &= 2(\text{boog } \varrho^{\frac{\pi}{2\beta}})_{M', \varphi > 0} = \\ &= 2\gamma = 4\tau \leq 4 \frac{\varrho^{\frac{\pi}{2\beta}}}{\sqrt{(\varrho+h)^{\frac{\pi}{\beta}} - \varrho^{\frac{\pi}{\beta}}}} \end{aligned}$$

Samenvattende:

$$\liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min alle franjes}}}{\varrho^{\frac{\pi}{2\beta}}} \geq \frac{4}{h^{\frac{\pi}{2\beta}}},$$

$$(\text{boog } \varrho)_{M, x > 0 \text{ min alle franjes}} < \frac{4\varrho}{h}.$$

Deze schatting vindt toepassing bij de verscherping van een resultaat van Ahlfors<sup>6)</sup>.

## STELLINGEN.

1. Om een birationale afbeelding van de bollen van  $R_3$  op de rechten van  $R_3$  te vinden, kan men eenvoudiger te werk gaan dan SOPHUS LIE.
2. Bij het oplossen van vierdegraadsvergelijkingen is een aanzienlijke tijdsbesparing te verkrijgen door gebruik te maken van nomogrammen.
3. Het in de advertentiecampagne van een warenhuis geïnvesteerde kapitaal moet grootendeels als waardeloos worden beschouwd.
4. De methode van de directe waarneming is bij het doen van vliegproeven in het algemeen verkieselijk boven de registratiemethode. Het is daarom door het Nationaal Luchtvaartlaboratorium te Amsterdam juist gezien voor het meten van de baanhelling van een vliegtuig een direct aanwijzend instrument te gebruiken.
5. Het is onjuist, dat de golfweerstand steeds het overheerschende deel vormt van de totale weerstand van een lichaam, dat zich met een snelheid groter dan de geluidssnelheid voortbeweegt door een compressibel medium.
6. De vleugelbelasting van vliegtuigen zal in de toekomst blijven toenemen. In verband hiermede zal gebruik gemaakt moeten worden van bijzondere startmethoden.
7. Het is gewenscht uit vliegproeven de polaire van het vliegtuig te berekenen en de aldus verkregen polaire te vergelijken met de tunnelpolaire.













Ut

19