Continue iteratie

https://hdl.handle.net/1874/346435

CONTINUE ITERATIE

J. VAN KUIK

Diss. Utrecht. 1940

CONTINUE ITERATIE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. F. H. QUIX, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 3 JUNI 1940 OM 15 UUR

DOOR

JAN VAN KUIK

GEBOREN TE AMERSFOORT

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

AAN MIJN OUDERS,
AAN MIJN VROUW.

Bij de voltooiïng van dit proefschrift betuig ik gaarne mijn oprechte dank aan U, Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan de Rijks-Universiteit te Utrecht, voor het onderwijs, dat ik van U heb ontvangen.

Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor, de voortdurende hulp en steun die ik bij mijn werk van U heb ontvangen, stemmen mij jegens U tot grote dankbaarheid; het schenkt mij bijzondere voldoening, daaraan op deze plaats uitdrukking te kunnen geven.

INHOUD

Blz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I. **Enkele algemene eigenschappen van de continue iteratie** 4

§ 1. x_t neemt toe met t 4
§ 2. Twee krommen T(z) snijden elkaar niet 4
§ 3. z_t is een holomorfe functie van z 5
§ 4. Over $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$, arg $w(z_t)$ — log x_t, $|w(z_t)|$ x_t en arg $w(z_t)$ + log x_t 7
§ 5. Over de convergentie van z_t voor $t \to \infty$ 8

HOOFDSTUK II. **Gedrag van z_t voor $t \to \infty$, in het geval $\lambda > 0$** 9

§ 6. arg z_t convergeert voor $t \to +\infty$ 9
§ 7. Functie van Königs. 12
§ 8. Over de angulaire afgeleide van k(z) in het punt oneindig 14
§ 9. Een voorbeeld waarbij $\lim\limits_{z \to \infty\,(ang)} \frac{k(z)}{z} = 0$ 16
§ 10. Over het verband tussen 2 functies van Königs . . 17
§ 11. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\lim\limits_{z \to \infty} \text{ang.} \frac{k(z)}{z} > 0$. 18
§ 12. Enkele toepassingen van de functie van Königs . . 21

HOOFDSTUK III. **Gedrag van z_t voor $t \to \infty$ in het geval $\lambda = 0$.** 23

§ 13. Hoofdstelling 23
§ 14. Het geval $x_t \to c(z) < \infty$ 24

Blz.
§ 15. Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t. 26
§ 16. Een 2e nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t 34
§ 17. Een 3e nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t 35
§ 18. Enkele voorbeelden voor het geval $\lambda = 0$. 36
§ 19. Uitbreiding van de voorbeelden behandeld in § 18. 39
§ 20. Over functies, holomorf in D, met positief reëel deel, die zich in het oneindige angulair gedragen als $\frac{1}{z}$. 40
§ 21. Over functies, holomorf in D, met positief reëel deel, die zich in het oneindige gedragen als $\rho\, e^{i\alpha} z^{\nu}$ . . . 42
§ 22. Over functies, die zich niet in het oneindige gedragen als een zekere macht van z 44
§ 23. Een nodige voorwaarde voor $\liminf\limits_{t \to \infty} \arg z_t > 0$ 47
§ 24. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\liminf \arg z_t \geqslant \alpha > 0$ 50
§ 25. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$, $x_t \to \infty$. 51

HOOFDSTUK IV. **Gedrag van z_t voor $t < 0$**.. 55

§ 26. Het geval $x_t \to c(z) > 0$, voor $t \to -\infty$ 55
§ 27. Over de functie $\eta(z)$. 58
§ 28. De gevallen $z_t \to iy$, $|y| < \infty$ 60
§ 29. Het geval $x_t \to 0$, $y_t \to \infty$ voor $t \to -\infty$ 67

INLEIDING.

Wij zullen in het volgende functies van $z : w(z) = u(z) + iv(z)$ beschouwen, welke holomorf zijn voor $z = x + iy$ in het rechterhalfvlak D (dus $x > 0$). Verder wordt ondersteld dat $u(z) > 0$ in elk punt z van D. Aangetoond is dat de n^e geitereerde $z_n (z_1 = w(z), z_2 = w(z_1), \ldots, z_n = w(z_{n-1}))$ als n tot oneindig nadert, convergeert tot een limiet α (eindig of oneindig).

Deze limiet is onafhankelijk van het beginpunt z en de convergentie is uniform als z zich bevindt in een afgesloten en begrensd gedeelte van D [1]).

In het geval dat het limietpunt α eindig is en $R\alpha > 0$, blijkt α een wortel te zijn van de vergelijking $w(z) = z$. Men heeft dan een geval van iteratie, behandeld o.a. door Königs (aantrekkend dekpunt α).

Indien $w(z) = z$ geen wortel heeft in D, blijkt de grens van D een punt α te bevatten (dus $R\alpha = 0$ of $\alpha = \infty$), zó, dat $z_n \to \alpha$ als $n \to \infty$.

Neemt men (zonder de algemeenheid te schaden) $\alpha = \infty$, dan is te bewijzen dat voor een zodanige functie $w(z) = u(z) + iv(z)$, $u(z) \geqslant x$ (alleen in het geval: $w(z) = z + ib$ is $u = x$). Bij de iteratie heeft men dus

$$Rz_{n+1} \geqslant Rz_n.$$

Zie: J. Wolff, Comptes Rendus t. 182 p. 42, 200, 918.

Bij het onderzoek naar de eigenschappen van de iteratie (in het geval dat $\alpha = \infty$), wordt veelvuldig gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen:

Gegeven: $w(z) = u(z) + iv(z)$ *is een holomorfe functie van* $z = x + iy$, *gedefinieerd in het halfvlak* $D(x > 0)$. $u(z) > 0$.

---

[1]) Er zijn enige uitzonderingen, die samen te vatten zijn onder:

$$\frac{w(z) - a}{w(z) - a'} = \frac{z - a}{z - a'} e^{i\omega} \quad (a \text{ is een punt van } D,\ a' \text{ het spiegelbeeld van } a \text{ t.o.v. de imaginaire as})$$

Voor $\omega \neq 0$ is dit een niet-euclidische draaiïng om a.
Voor $\omega = 0$ is $w(z) = z$.

Eigenschappen: 1) $\left|\frac{dw}{dz}\right| \leqslant \frac{u}{x}$.

2) $\frac{u}{x}$ *is monotoon niet stijgend op elke rechte* $//$ *x-as (dus* $\frac{u}{x}$ *convergeert tot een limiet* $\lambda \geqslant 0$ *en* $< \infty$).

3) *Dit getal* λ *is zodanig, dat* $w(z) = \lambda z + \omega(z)$, *waarbij* $\omega(z) = u_1(z) + i v_1(z)$ *een holomorfe functie van* z *is, voor* z *in* D, *met* $u_1(z) \geqslant 0$, *terwijl voor* $z \to \infty$ *angulair, d.w.z. binnen een hoek:* $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0\right)$, $\frac{u_1}{x}$, $\frac{d\omega}{dz}$ *en* $\frac{\omega}{z}$ *gelijkmatig tot nul naderen.*

Daaruit volgt:

4) *Voor* $z \to \infty$ *(angulair) naderen* $\frac{u}{x}$, $\frac{dw}{dz}$ *en* $\frac{w}{z}$ *gelijkmatig tot* λ.

λ *heet de angulaire afgeleide van* $w(z)$ *in het punt oneindig.*

Zie o.a.: J. Wolff; Comptes Rendus t. 183. p. 500. G. Valiron, Bulletin des Sciences Math. 2e serie, t. 55, 1931 p. 4.

Voor de functies die bij bovengenoemde iteratie als limietpunt $\alpha = \infty$ hebben, geldt (omdat $u \geqslant x$) : $\lambda \geqslant 1$.

De gevallen waarbij $\lambda > 1$ vertonen een geheel ander karakter dan die waarbij $\lambda = 1$.

In het eenvoudigste geval: $\lambda > 1$, blijkt het argument van de geitereerde z een limiet te hebben, als n tot oneindig nadert.

Deze limiet is een *niet constante* harmonische functie van z, gelegen tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Het geval $\lambda = 1$ is meer ingewikkeld: arg z_n kan convergeren tot een limiet welke onafhankelijk is van z en welke ook $\pm\frac{\pi}{2}$ kan zijn (dit laatste gebeurt o.a. als x_n convergeert voor $n \to \infty$ en dus $y_n \to \pm \infty$).

Ook zijn er gevallen bekend dat arg z_n *niet* convergeert.

De eigenschappen van bovengenoemde iteratie vindt men in:

J. Wolff: Bulletin de la Société Math. t 57, 1929, p. 195.

G. Valiron: Bulletin des Sciences Math. t 55 Avril 1931.

J. Wolff: Proceedings, Kon. Akademie van Wetensch. Vol. XXXV, no. 4, 1932.

In de Comptes Rendus van 23 Mei 1938 voert J. Wolff het begrip *continue iteratie* in, voor $w(z) = u(z) + i\,v(z)$, holomorfe functie van z, gedefinieerd in $D(x > 0)$ terwijl $u(z) > 0$.

Stel t is een *reële* veranderlijke (dus bijv. de reële tijd), $\Delta t \neq 0$, z_0 in D en

$$z_1 = z_0 + (\Delta t) \,.\, w(z_0)$$

$$z_2 = z_1 + (\Delta t) \,.\, w(z_1)$$

$$z_{n+1} = z_n + (\Delta t) \,.\, w(z_n)$$

dus

$$\frac{\Delta z_n}{\Delta t} = w(z_n), \text{ als men } z_{n+1} - z_n = \Delta z_n \text{ stelt.}$$

Laat men Δt tot nul naderen, dan nadert de polygoon $z_0, z_1, z_2 \ldots$ tot een kromme $T(z_0)$, die gedefinieerd wordt door:

$$\frac{dz}{dt} = w(z) \text{ voor } t > 0, \text{met } z = z_0 \text{ voor } t = 0.$$

Om deze reden wordt de studie van de krommen $T(z)$ „continue iteratie" genoemd.

Het is gebleken dat vele eigenschappen van de gewone iteratie, uitgebreid kunnen worden tot die van de continue iteratie.

Bij de continue iteratie heeft men dat de gevallen, waarbij de afgeleide op oneindig van $w(z)$, groter is dan nul, alle een zelfde karakter vertonen (te vergelijken met het geval $\lambda > 1$ bij de gewone iteratie). Het blijkt dat arg z_t convergeert als $t \to \infty$ (z_t is de plaats van het punt z op het tijdstip t).

De limiet is een niet constante harmonische functie van z, die alle waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ aanneemt.

Het geval $\lambda = 0$ is te vergelijken met het geval $\lambda = 1$ bij de „gewone" iteratie.

Zie J. Wolff: Compositio Math. Vol. 6, fasc. 2 blz. 296).

De bedoeling van dit proefschrift is, de resultaten van J. Wolff te completeren. Allereerst zullen enkele algemene eigenschappen worden afgeleid.

HOOFDSTUK I.

ENKELE ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN DE CONTINUE ITERATIE.

§ 1. x_t neemt toe met t.

Wij beschouwen $w(z) = u(z) + iv(z)$. $w(z)$ is een holomorfe functie van z, voor z in het rechter halfvlak $D(x > 0)$. Verder is ondersteld dat $u(z) > 0$ in ieder punt z van D.

Door $\frac{dz}{dt} = w(z)$, met $z = z_0$ voor $t = 0$, wordt z als functie van t bepaald. Onder $z_t = x_t + iy_t$ verstaat men de plaats van het punt, dat op het tijdstip $t = 0$ de plaats $z_0 = x_0 + iy_0$ inneemt.

Men heeft nu:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = w(z) = u(z) + i\,v(z)$$

dus

$$\frac{dx}{dt} = u(z) > 0.$$

Dus *x_t neemt toe als t toeneemt.* De meetkundige plaats van de punten z_t voor de verschillende waarden van t, zullen wij $T(z)$ noemen.

§ 2. Twee krommen T(z) snijden elkaar niet.

Bij iedere z_t in D, zowel voor $t > 0$ als voor $t < 0$, behoort één z (dit in tegenstelling met de gewone iteratie in D, waar bij een bepaalde z_n, meerdere waarden van z kunnen behoren). *De kromme $T(z)$ is dus ondubbelzinnig bepaald door één punt.*

B e w ij s:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = u(z) + i\,v(z)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt} = u \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = v\end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = f(x, y)$$

$$f'_y = \frac{u\dfrac{\partial v}{\partial y} - v\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u^2} \quad \text{dus} \quad |f'_y| \leqslant \frac{\{u + |v|\}\,|w'|}{u^2}.$$

Twee integraalkrommen kunnen elkaar dus niet snijden, omdat in de omgeving van ieder punt $|f'_y|$ begrensd is, zodat aan de L i p s c h i t z-voorwaarde voldaan is.

O p m e r k i n g: Uit $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v}{u} = \operatorname{tg}(\arg w(z))$ volgt nog, dat de richting van de raaklijn aan de kromme $T(z)$, in een punt z van $T(z)$, gelijk is aan het argument van $w(z)$.

§ 3. z_t is een holomorfe functie van z.

Zowel voor $t > 0$ als voor $t < 0$ is z_t een holomorfe functie van z [1]. Beschouw nl. de functie

$$\zeta(z) = \int_1^z \frac{dz}{w(z)} \quad \text{(de integratieweg mag willekeurig genomen worden in } D\text{)}.$$

$\zeta(z)$ is een holomorfe functie van z.

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{w(z)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}.$$

Daar het reële deel van $\dfrac{d\zeta}{dz}$ groter is dan nul, is ζ univalent (zie opmerking blz. 6)

$$\zeta(z_t) = \int_1^{z_t} \frac{dz}{w(z)}.$$

[1]) Wat het geval $t < 0$ betreft, geldt dit alleen voor die waarden van t, waarvoor z_t in D. Het blijkt nl. (zie § 28) dat er punten z zijn waarbij z_t de y-as bereikt voor $t = -\infty$, maar ook punten waarbij dit gebeurt voor $t > -\infty$.

Uit $\frac{dz}{dt} = w(z)$ volgt dat $\zeta_t = \zeta_0 + t$. (1)

De krommen $T(z)$ worden dus door de functie $\zeta(z)$ afgebeeld op rechten // de reële as van het ζ vlak.

Met behulp van de functie $\zeta(z)$ kan men bewijzen dat z_t een holomorfe functie van z is.

Wegens de univalentie van $\zeta(z)$ volgt uit $\zeta(\alpha) = \zeta(\beta)$, dat $\alpha = \beta$ en uit $\zeta(\alpha) \to \zeta\,(\beta)$ volgt $\alpha \to \beta$, als α en β in D liggen.

Kies 2 punten z en z' in D en fixeer t. Dan is volgens (1):

$$t = \zeta(z_t) - \zeta(z) = \zeta(z'_t) - \zeta(z')$$

dus

$$\zeta(z'_t) - \zeta(z_t) = \zeta(z') - \zeta(z). \tag{A}$$

Als $z' \to z$, $z' \neq z$, geldt dus:

$$\zeta(z'_t) \to \zeta(z_t),\ z'_t \to z_t,\ z'_t \neq z_t.$$

Nu is voor $z' \to z$, (dus $z'_t \to z_t$) : $\zeta(z'_t) - \zeta(z_t) \backsim \zeta'(z_t) \,.\, (z'_t - z_t)$ (B)
en ook:

$$\zeta(z') - \zeta(z) \backsim \zeta'(z)\,(z' - z). \tag{C}$$

Uit (A), (B) en (C) volgt:

$$\frac{z'_t - z_t}{z' - z} \backsim \frac{\zeta'(z)}{\zeta'(z_t)} = \frac{w(z_t)}{w(z)} \quad \text{dus} \quad \frac{dz_t}{dz} = \frac{w(z_t)}{w(z)},\ z_t \text{ holomorf in } D.$$

O p m e r k i n g: Bij het bewijs van bovenstaande stelling is gebruik gemaakt van de volgende eigenschap:

Indien $f(z)$, holomorfe functie van z, in het convexe gebied G een afgeleide functie heeft, waarvan het reële deel in ieder punt z van G positief is, dan is $f(z)$ univalent.

Om deze bewering te bewijzen, is voldoende om te bewijzen, dat voor $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(z)dz.$$

Neem (wat geoorloofd is, wegens het holomorf zijn van $f'(z)$ en het convex zijn van G) als integratieweg de rechte verbindingslijn van a en b, dan is:

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (b - a)\, f'(a + \overline{b - a}\, t)dt$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\int_0^1 f'(a+\overline{b-a}\,t)dt.$$

Daar de integraal in het rechterlid een positief reëel deel heeft, is het linkerlid niet gelijk aan nul, dus $f(b) \neq f(a)$.

§ 4. Over $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$, arg $w(z_t)$ — log x_t, $|w(z_t)|\,x_t$ en arg $w(z_t)$ + log x_t.

S t e l l i n g (W o l f f): *$\frac{|w(z_t)|}{x_t}$ en $\arg w(z_t) - \log x_t$ nemen niet toe als t toeneemt, terwijl $x_t\,|w(z_t)|$ en $\arg w(z_t) + \log x_t$ niet afnemen bij toenemende t.*

B e w ij s (zie ook Compositio Math. Vol 6, fasc 2, bldz. 296).

$$\frac{dw(z_t)}{dt}=w'(z_t)\,\frac{dz_t}{dt}=w'(z_t)\,w(z_t).$$

Nu is (zie bldz. 2):

$$|w'(z_t)| \leqslant \frac{u(z_t)}{x_t}=\frac{1}{x_t}\,\frac{dx_t}{dt}$$

dus:

$$\left|\frac{1}{w(z_t)}\,\frac{dw(z_t)}{dt}\right| \leqslant \frac{1}{x_t}\,\frac{dx_t}{dt}$$

$$\left|\frac{d\log w(z_t)}{dt}\right| \leqslant \frac{d\log x_t}{dt}$$

dus ook:

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{d\log|w(z_t)|}{dt}\right| &\leqslant \frac{d\log x_t}{dt}\\ \left|\frac{d\arg w(z_t)}{dt}\right| &\leqslant \frac{d\log x_t}{dt}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{d\log x_t}{dt} \leqslant \frac{d\log|w(z_t)|}{dt} &\leqslant \frac{d\log x_t}{dt}\\ -\frac{d\log x_t}{dt} \leqslant \frac{d\arg w(z_t)}{dt} &\leqslant \frac{d\log x_t}{dt}\end{aligned}\right\}$$

Hieruit volgt direct het gestelde.

§ 5. Over de convergentie van z_t voor $t \to \infty$.

Men heeft voor elk beginpunt z: $z_t \to \infty$ *als* $t \to \infty$.

B e w ij s: Omdat x_t groeit bij toenemende t, heeft men voor $t \to \infty$: $x_t \to \infty$ of $x_t \to c$ $(0 < c < \infty)$.

Als $x_t \to \infty$ dan $z_t \to \infty$.

Als $x_t \to c$ dan $y_t \to \pm\infty$, dus $z_t \to \infty$.

Immers volgens § 4 is:

$$\frac{|\,w(z_t)\,|}{x_t} \to l_1 \text{ voor } t \to \infty \; (0 \leqslant l_1 < \infty)$$

$$|\,w(z_t)\,|\, x_t \to l_2 \text{ voor } t \to \infty \; (l_2 > 0).$$

Wegens $x_t \to c$ volgt hieruit dat $|\,w(z_t)\,|$ convergeert tot een van nul verschillende limiet. Ook arg $w(z_t)$ convergeert (dat volgt uit § 4) dus $w(z_t)$ convergeert tot een van nul verschillende limiet: $a(z) + ib(z)$

dus:
$$\frac{dx_t}{dt} \to a(z) \text{ voor } t \to \infty,$$

$$\frac{dy_t}{dt} \to b(z) \text{ voor } t \to \infty.$$

Omdat x_t convergeert, is $a(z) = 0$ dus $b(z) \neq 0$. Als $b(z) > 0$ heeft men $y_t \to +\infty$ en als $b(z) < 0$ heeft men $y_t \to -\infty$.

O p m e r k i n g e n: 1) Bovengenoemde functie $a(z) + i\,b(z)$ is een holomorfe functie van z (want de verzameling van holomorfe functies van z : $w(z_t)$ is normaal in den zin van Montel).

Omdat $a(z) = 0$ is $b(z)$ constant.

2) Ook met de afbeelding genoemd in § 3 kan men bewijzen dat $z_t \to \infty$ voor $t \to \infty$:

$$\zeta(z) = \int_1^z \frac{dz}{w(z)}\,, \quad \zeta(z_t) = \zeta(z) + t$$

dus $\zeta(z_t) \to \infty$ als $t \to \infty$, wat alleen mogelijk is als z_t nadert tot de grens van het rechterhalfvlak D. Omdat x_t groeit met t, heeft men dat $z_t \to \infty$ voor $t \to \infty$.

HOOFDSTUK II.

GEDRAG VAN z_t VOOR $t \to \infty$, IN HET GEVAL $\lambda > 0$.

§ 6. arg z_t convergeert voor $t \to +\infty$.

Stelling (Wolff): *Als de afgeleide λ van $w(z)$, in het punt oneindig groter is dan nul, dan nadert op iedere kromme $T(z)$ het argument van z_t, voor $t \to +\infty$, tot een limiet $\varphi(z)$, welke een niet constante harmonische functie is van z en welke alle waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ aanneemt.*

Bewijs: $w(z) = u(z) + i\,v(z)$.

Men heeft $\frac{u(z)}{x} \geqslant \lambda$ (zie blz. 2)

dus:

$$\frac{1}{x_t}\,\frac{dx_t}{dt} \geqslant \lambda. \tag{1}$$

Ook geldt (§ 4): $\left|\frac{w(z_t)}{x_t}\right|$ begrensd voor $t > 0$,

dus ook:

$$\frac{\left|\frac{dy_t}{dt}\right|}{x_t}. \tag{2}$$

Uit 1) en 2) volgt dat $\frac{dy_t}{dx_t}$ begrensd is dus ook $\frac{y_t}{x_t}$.

Daarom is (zie blz. 2):

$$\frac{|\,w(z_t)\,|}{|\,z_t\,|} \to \lambda \quad \text{als } t \to \infty. \tag{3}$$

Uit § 4 volgt dat $\frac{|\,w\,(z_t)\,|}{x_t}$ convergeert. (4)

Stel deze limiet $= \mu(z)$, dan is wegens (3) : $\mu(z) \geqslant \lambda$, want $|z_t| \geqslant x_t$.

Uit 3) en 4) volgt: $\dfrac{x_t}{|z_t|} \to \dfrac{\lambda}{\mu(z)}$ dus

$$\cos(\arg z_t) \to \frac{\lambda}{\mu(z)} \qquad 0 < \frac{\lambda}{\mu(z)} \leqslant 1.$$

Omdat arg z_t bovendien een continue functie van t is, volgt hieruit dat arg z_t convergeert. Arg z_t is voor iedere waarde van t een harmonische begrensde functie van z, zodat de *grensfunctie* $\varphi(z)$ *harmonisch is* ($\varphi(z)$ *is niet constant,* zie onderstaande o p m. 1).

Ook $\varphi(z)$ — arg z is een begrensde harmonische functie van z. Deze functie nadert op iedere kromme $T(z)$ voor $z \to \infty$, tot nul. Daaruit volgt dat $\varphi(z)$ — *arg* z *uniform tot nul nadert voor* $z \to \infty$ *in iedere hoek* $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (Zie o p m e r k i n g 2). Omdat arg z *iedere waarde tussen* $-\frac{\pi}{2}$ *en* $+\frac{\pi}{2}$ kan aannemen, *neemt* $\varphi(z)$ *ook iedere zodanige waarde aan.*

O p m e r k i n g 1: Dat $\varphi(z) = \lim \arg z_t$ niet constant is, kan men als volgt bewijzen:

Stel dat $\varphi(z)$ constant is. Beschouw in D een punt α (vast) en een punt z.

$$\lim_{t\to\infty} \arg \alpha_t = \lim_{t\to\infty} \arg z_t, \text{ dus } \lim_{t\to\infty} \arg \frac{z_t}{\alpha_t} = 0.$$

De functies $\dfrac{z_t}{\alpha_t}$ van z (holomorf in D) vormen een „normale" functierij (want ze nemen geen negatieve waarden aan). Er is dus een rij van functies (z_{t_n}) te extraheren, zodat $\dfrac{z_{t_n}}{\alpha_{t_n}}$ convergeert voor $t_n \to \infty$ tot de constante 1 (want het argument van de limietfunctie is nul, dus deze functie is een positieve constante; dat deze constante $= 1$, ziet men als men $z = \alpha$ neemt). Men heeft dus nu:

$$\frac{z_{t_n}}{\alpha_{t_n}} \to 1 \text{ voor } t_n \to \infty, \text{ voor iedere } z \text{ in D,} \tag{1}$$

dus ook:

$$\frac{(z_\delta)_{t_n}}{\alpha_{t_n}} \to 1 \text{ voor } t_n \to \infty, \text{ voor iedere } z \text{ in D.} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\frac{(z_\delta)_{t_n}}{z_{t_n}} \to 1 \quad \text{of} \quad \frac{z_{t_n+\delta}}{z_{t_n}} \to 1. \tag{3}$$

Verder is op $T(z)$: $w(z_t) \backsim \lambda\, z_t$.
Stel $\delta > 0$ (δ is vast).

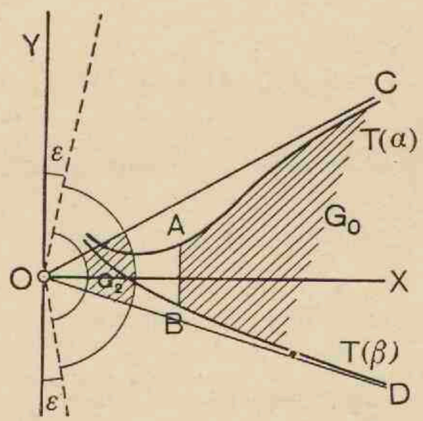
Volgens § 3 is: $\displaystyle\int_{z_{t_n}}^{z_{t_n+\delta}} \frac{dz}{w(z)} = \delta.$

Bijgevolg: $\displaystyle\int_{z_{t_n}}^{z_{t_n+\delta}} \frac{dz}{\lambda z} \to \delta$ voor $t_n \to \infty$,

waaruit: $\log \dfrac{z_{t_n+\delta}}{z_{t_n}} \to \lambda\delta$ of $\dfrac{z_{t_n+\delta}}{z_{t_n}} \to e^{\lambda\delta}$.

Het hierboven onder 3) vermelde resultaat is hiermede in strijd, zodat dus $\varphi(z)$ *niet constant* is.

Opmerking 2: Dat $\varphi(z) - \arg z \to 0$ als $z \to \infty$, uniform voor $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ kan als volgt bewezen worden:



Figuur 1.

Beschouw (zie fig. 1) een gebied G_0 begrensd door 2 krommen $T(\alpha)$ en $T(\beta)$ (waarvan resp. OC en OD asymptotische richtingen zijn) en het lijnstuk AB. Volgens o p m. 1) kunnen α en β zo gekozen worden dat OC en OD niet samenvallen.

Beschouw in G_0 de harmonische begrensde functie: $\psi(z) = \varphi(z) + - arg\ z$. Deze neemt in het punt oneindig de randlimiet nul aan, als $z \to \infty$ over $T(\alpha)$ en ook als $z \to \infty$ over $T(\beta)$.

Definiëren we nu de waarde dezer harmonische functie in het punt oneindig als nul, dan is de randwaardencollectie continu in het punt oneindig dus $\psi \to 0$ voor $z \to \infty$ in G_0 tweedimensionaal. Beschouw nu in het gebied G_1 (begrensd door de cirkels $|z| = 1$ en $|z| = 2$ en de rechten $arg\ z = \pm(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$) de rij van begrensde harmonische functies: $\psi_n(z) = \varphi(2^n z) - arg\ (2^n z)$.

In ieder punt van het gebied G_2 (begrensd door de cirkels $|z| = 1$ en $|z| = 2$ en de rechten OC en OD) convergeert deze rij volgens het bovenstaande tot nul, dus ook in bovengenoemd gebied G_1.

De convergentie is gelijkmatig (wegens het begrensd zijn van $\psi_n(z)$).

Men heeft dus dat $\varphi(z) - arg\ z \to 0$ als $z \to \infty$, uniform in iedere hoek: $|arg\ z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Q.E.D.

Van de stelling op blz. 9 geven we nog een eenvoudig voorbeeld:

$$\frac{dz}{dt} = \tfrac{1}{2} z \ (\lambda = \tfrac{1}{2}).$$

$$\frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}\, dt \quad , \quad d \log z = \tfrac{1}{2}\, dt.$$

$z_t = (a + bi)e^{\frac{1}{2}t}$, a en b constant, $a > 0$.

$$\left.\begin{aligned} x_t &= ae^{\frac{1}{2}t} \\ y_t &= be^{\frac{1}{2}t} \end{aligned}\right| \frac{y_t}{x_t} = \frac{a}{b}\,.$$

De integraalkrommen $T(z)$ zijn halfrechten door de oorsprong.

§ 7. Functie van Königs.

Beschouw de functies van $z : \dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ voor $t \geqslant 0$, z en α beide in D, α vast.

Dit zijn holomorfe functies van z met argument $= arg\ z_t$. Volgens § 6 convergeert $arg\ z_t$ tot een niet constante limiet, voor $t \to \infty$.

Omdat $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ *niet* $\to \infty$ (zie opm. hieronder), is nu te bewijzen dat

voor $t \to \infty$, $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ *convergeert tot een niet constante holomorfe functie. De convergentie is uniform in ieder afgesloten, begrensd gebied van* D.

Immers: de verzameling der functies $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ is normaal in den zin van Montel (het reële deel > 0). Door extractie is een deelrij (t_p) te verkrijgen welke tot een holomorfe functie $F_1(z)$ convergeert voor $t_p \to \infty$.

Neemt men een andere deelrij t_q, welke convergeert tot bijv. $F_2(z)$, dan hebben $F_1(z)$ en $F_2(z)$ gelijk argument (*nl.* $\varphi(z)$ d.i. $\lim\limits_{t\to\infty} arg\ z_t$).

Omdat $F_1(z)$ en $F_2(z)$ voor $z = \alpha$ beide de modulus 1 hebben, zijn ze identiek. Hieruit volgt dat de rij $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ convergeert voor $t \to \infty$ tot een functie $k(z)$, holomorf in D. De convergentie is, wegens het normaal zijn van de verzameling $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$, uniform in ieder afgesloten en begrensd gebied van D.

$k(z)$ heeft een positief reëel deel omdat $arg\ k(z) = \lim\limits_{t\to\infty} arg\ z_t$ tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $+\dfrac{\pi}{2}$ ligt.

Opmerking: Dat $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ *niet* $\to \infty$, is als volgt te bewijzen:

De verzameling der functies $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ is normaal. Indien men nu voor één z had: $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|} \to \infty$, dan zou dat voor alle z gelden, dus ook voor α.

Dit is onmogelijk want $\left|\dfrac{\alpha_t}{|\alpha_t|}\right| = 1$.

Wij leiden nu nog enkele eigenschappen af van $k(z)$:

1) $k(z) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ *is univalent.*

Bewijs: $\dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ is univalent (zie § 2) dus ook $k(z)$ volgens de stelling:

Een uniform convergente rij van univalente functies convergeert tot een univalente functie.

2) $k(z)$ *voldoet aan de vergelijking* $k(z_t) = e^{\lambda t}\, k(z)$.

B e w ij s: Op blz. 11 is afgeleid:

$$\frac{z_{t+\delta}}{z_t} \to e^{\lambda\delta} \text{ als } t \to \infty.$$

Verder is: $k(z_\delta) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_{t+\delta}}{|\alpha_t|}$, $k(z) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ dus $k(z_\delta) = e^{\lambda\delta}\, k(z)$

of wel: $k(z_t) = e^{\lambda t}\, k(z)$.

$k(z)$ kan men een functie van K ö n i g s noemen behorende bij de continue iteratie. $k(z)$ is door $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$ bepaald op een constante factor na (want α is een willekeurig punt van D).

§ 8. Over de angulaire afgeleide van k(z) in het punt oneindig.

Het is bekend dat bij het klassieke geval van de iteratie, behandeld o.a. door K ö n i g s, waar het gaat over een aantrekkend dekpunt in welks omgeving de functie holomorf is, de afgeleide van de bijbehorende functie van K ö n i g s *niet gelijk is aan nul* in dat punt. Bij de door ons in de inleiding vermelde iteratie in D kan de (angulaire) afgeleide van $k(z)$ in het punt oneindig, dat met zo'n dekpunt te vergelijken is, gelijk zijn aan nul.

Dit is ook het geval bij de functie van K ö n i g s (waarvan de waardevoorraad in D) welke voldoet aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$ (dus behorende bij de continue iteratie).

Noemt men de afgeleide in het punt oneindig van een zodanige functie $k(z)$: γ, dan is

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{k(z_t)}{z_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{k(z)}{z_t e^{-\lambda t}}.$$

Hieruit volgt dat òf $z_t e^{-\lambda t}$ convergeert òf $z_t e^{-\lambda t} \to \infty$ (want $\gamma \geqslant 0$) en verder dat het van $\lim\limits_{t\to\infty} z_t e^{-\lambda t}$, dus van $\lim\limits_{t\to\infty} |z_t|\, e^{-\lambda t}$ zal afhangen of $\gamma = 0$ is, of dat $\gamma > 0$.

Als $\lim\limits_{t\to\infty} |z_t|\, e^{-\lambda t} = \infty$, dan is $\gamma = 0$.

Omdat $\dfrac{|z_t|}{x_t}$ convergeert tot een eindige positieve limiet, hangt het al of niet nul zijn van γ af van resp. de divergentie of convergentie van $x_t e^{-\lambda t}$. Nu is:

$$\frac{dz}{dt} = w\,(z) = \lambda z + \omega(z).$$

Daar $\dfrac{Rw(z)}{x} = \dfrac{u}{x} \geqslant \lambda$ is $R\omega(z) = u_1(z) \geqslant 0$

dus $\dfrac{dx_t}{dt} \geqslant \lambda\, x_t$ of $\dfrac{d\,(\log x_t - \lambda t)}{dt} \geqslant 0.$

Dus $x_t e^{-\lambda t}$ neemt niet af, als t toeneemt.

Omdat $x_t e^{-\lambda t}$, voor iedere waarde van $t \geqslant o$, een harmonische functie van z is, convergeert $x_t e^{-\lambda t}$ als $t \to \infty$ voor elke z in D, als dit voor één waarde van z gebeurt (Theorema van Harnack). Anders heeft men, dat voor iedere z in D: $x_t e^{-\lambda t} \to \infty$. (1)

Verder is: $\dfrac{d\,(\log x_t - \lambda t)}{dt} = \dfrac{u_1(z_t)}{x_t}.$

Dus $\lim\limits_{t\to\infty} x_t e^{-\lambda t}$ is *eindig* of *oneindig naar gelang* $\displaystyle\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\,dt$ *convergeert of divergeert.* Uit het bovenstaande volgt tevens dat laatstgenoemde integraal in D óf overal convergeert óf overal divergeert (zie (1)). Men heeft verder nog:

$$\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\,dt = \int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t \dfrac{dx_t}{dt}}\,dx_t = \int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} \frac{u_1(z)}{x^2}\,\frac{x}{u(z)}\,dx.$$

Omdat $\dfrac{u(z)}{x} \to \lambda > 0$ als $z \to \infty$ over $T(z)$, convergeert of divergeert laatstgenoemde integraal tegelijk met $\displaystyle\int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} \frac{u_1(z)}{x^2}\,dx.$

Vatten wij de resultaten van § 7 en § 8 samen, dan krijgen we:

Bij de continue iteratie, in het geval $\lambda > 0$, treedt een functie $k(z)$ op, holomorf in D, univalent en te definiëren door $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_t}{|\alpha_t|}$. Het reële deel van $k(z)$ is groter dan nul. $k(z)$ voldoet aan de verg. $k(z_t) = e^{\lambda t}\, k(z)$ en heeft een (angulaire) afgeleide in het punt oneindig welke positief is of nul naar gelang de integraal $\displaystyle\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\,dt \left(\text{of} \int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} \frac{u_1(z)}{x^2}\,dx\right)$ convergeert *of divergeert voor één punt z. Bovengenoemde integralen zijn overal in D convergent of overal divergent.*

Opmerkingen. 1) In het geval dat $z_t e^{-\lambda t}$ convergeert voor $t \to \infty$, volgt uit de door ons afgeleide gelijkheid: $\gamma = \dfrac{k(z)}{\lim\limits_{t \to \infty} z_t e^{-\lambda t}}$

dat $\lim\limits_{t\to\infty} z_t e^{-\lambda t} = \dfrac{k(z)}{\gamma} (\gamma \neq 0)$.

$\mathop{Lim}\limits_{t\to\infty} z_t e^{-\lambda t}$ is dus nu een holomorfe functie van z welke voldoet aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$. De angulaire afgeleide in het punt oneindig, van deze functie, is gelijk aan 1.

2) Er zijn ook holomorfe functies van z die voldoen aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$, waarvan de waardevoorraad niet in D ligt. Voorbeeld: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_t}{\alpha_t}$.

§ 9. Een voorbeeld waarbij $\lim\limits_{z\to\infty\,(ang)} \dfrac{k(z)}{z} = 0$.

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + \frac{z}{log\,(z+3)} \quad , \quad \lambda > 0.$$

$\dfrac{1}{log\,(z+3)}$ heeft als teken van het argument dat van $arg\,(x - iy)$.

$\dfrac{z}{log\,(z+3)}$ behoort dus tot D. De (*ang.*) afgeleide, in het punt oneindig, van $\dfrac{z}{log\,(z+3)}$, is gelijk aan nul.

Voor z reëel is $\dfrac{dz}{dt}$ reëel, dus $T(z)$ is hier de x-as.

$$\int^{\infty} \frac{u_1}{x^2}\, dx \text{ over } T(z) = \int^{\infty} \frac{dx}{x\, log\,(x+3)} =$$

$$= \int^{\infty} \frac{x+3}{x} \times \frac{d\, log\,(x+3)}{log\,(x+3)}.$$

Daar $\dfrac{x+3}{x} \to 1$ en $\displaystyle\int^{\infty} \frac{d\, log\,(x+3)}{log\,(x+3)} = log\, log\,(x+3) \Big|^{\infty}$

divergeert, zal $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \frac{u_1}{x^2}\,dx$ ook divergeren, dus $k(z)$ $\left(= lim \frac{z_t}{|\alpha_t|}\right)$ heeft de (*ang.*) afgeleide nul in het punt oneindig.

Ook op een andere wijze kan men tot dit resultaat komen:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + \frac{z}{log\,(z+3)} = w(z)$$

$$\frac{dz}{z} - \lambda dt - \frac{dt}{log\,(z+3)} = 0, \quad \int\limits_{z}^{z_t} \frac{dz}{z} - \lambda \int\limits_{0}^{t} dt - \int\limits_{z}^{z_t} \frac{z(1/z)\,dz}{w(z) log\,(z+3)} = 0.$$

Hieruit volgt dat $log\, z_t - \lambda t - \lambda^{-1} log\, log\, z_t$ een eindige limiet heeft voor $t \to \infty$ $\left(\text{want } \frac{z_t}{w(z_t)} \to \frac{1}{\lambda} \text{ voor } t \to \infty\right)$. Omdat $log\, log\, z_t \to \infty$, heeft men $\lim\limits_{t \to \infty} z_t e^{-\lambda t} = \infty$ zodat volgens blz. 14: $\gamma = 0$.

§ 10. Over het verband tussen 2 functies van Königs.

S t e l l i n g: *Indien $k(z)$ een functie (van Königs) is welke voldoet aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$, dan is elke zodanige functie $K(z)$ gelijk aan een constante $\times\, k(z)$.*

Alle functies van Königs die voldoen aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$ en hun waardevoorraad in D hebben, kunnen slechts een positieve constante factor verschillen.

B e w ij s:

$$\left.\begin{matrix} K(z_t) = e^{\lambda t} K(z) \\ k(z_t) = e^{\lambda t}\, k(z) \end{matrix}\right\} \frac{K(z_t)}{k(z_t)} = \frac{K(z)}{k(z)} \text{ voor iedere } t.$$

$\frac{K(z)}{k(z)}$ is een holomorfe functie van z, welke constant is op $T(z)$, dus in D.

dus $\frac{K(z)}{k(z)} = \rho e^{i\theta}$ (ρ en θ constant; $\rho \neq 0$, dit zou geven $K(z) \equiv 0$)

dus $K(z) = \rho e^{i\theta} k(z)$.

B e w ij s v a n h e t 2e g e d e e l t e: Neem voor $k(z) : \lim\limits_{t \to \infty} \frac{z_t}{|\alpha_t|}$ ($k(z)$ heeft haar waardevoorraad in D).

$arg\, k(z) = \varphi(z)$ en daar $\varphi(z)$ alle waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ aanneemt (zie blz. 10) moet $\theta = 0$ zijn, aangezien $K(z)$ haar waardevoorraad in D heeft.

G e v o l g: Alle eigenschappen van $lim \frac{z_t}{|\alpha_t|}$ gelden voor iedere functie van Königs welke voldoet aan $k(z_t) = e^{\lambda t} k(z)$ en welke haar waardevoorraad in D heeft. In het bijzonder geldt: *Indien één zodanige functie een (ang.) afgeleide heeft in het punt oneindig, welke* > 0, *dan is dat met elke functie het geval.*

O p m e r k i n g: Een soortgelijke stelling als het 2e gedeelte van de bovenstaande stelling treft men aan bij de „gewone" iteratie in D (Zie: J. W o l f f: Proceedings Kon. Akad. van Wetensch. vol. XXXV No. 4 1932 blz. 504), met dit verschil echter dat het dáár nodig was om te onderstellen, dat één functie $k(z)$ (waarvan de waardevoorraad in D) een angulaire afgeleide in het oneindige heeft, welke > 0.

§ 11. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\lim\limits_{z \to \infty} \text{ang.} \frac{k(z)}{z} > 0$.

Wij zullen in het volgende een stelling afleiden, waardoor wij in het bezit komen van een nodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig van $k(z)$ $\left(\text{dus} \lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{k(z)}{z} > 0\right)$, anders dan vermeld op blz. 15.

Iets dergelijks is voor de „gewone" iteratie in D af te leiden uit de theorema's 3, 4 en 5 van de in § 10 vermelde publicatie van J. W o l f f.

S t e l l i n g: *Uit de convergentie van* $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \left|\frac{\omega(z)}{z^2}\right| |dz|$ *(gelijkwaardig met* $\lambda \int^{\infty} \left|\frac{\omega(z_t)}{z_t}\right| dt$*) volgt de convergentie van* $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \frac{u_1}{x^2} dx$ $\left(\backsim \lambda \int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t} dt\right)$ *en omgekeerd.*

B e w ij s: Het eerste gedeelte van deze stelling is direct duidelijk want: $|\omega(z_t)| \geqslant u_1(z_t)$ en omdat $\frac{|z_t|}{x_t}$ convergeert tot een eindige limiet, besluit men dat als $\int^{\infty} \frac{|\omega(z_t)|}{|z_t|} dt$ convergeert voor één waarde van z, $\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t} dt$ dit ook doet voor die z (dus voor iedere z).

Bewijs van het omgekeerde: Gegeven is dus dat $\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\, dt$ convergeert.

Te bewijzen: $\int^{\infty} \left| \frac{\omega(z_t)}{z_t} \right| dt$ convergeert.

Uit het gegeven volgt dat de functie $x_t e^{-\lambda t}$ convergeert tot een eindige positieve limiet (zie blz. 15), zodat dus ook $\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{e^{\lambda t}}\, dt$ convergeert.

Verder heeft men voor $t \geqslant 0$:
$|z_t|\, e^{-\lambda t} \geqslant x_t\, e^{-\lambda t} \geqslant x$ (want $x_t\, e^{-\lambda t}$ is niet afnemend als t toeneemt, zie blz. 15).

Daaruit volgt, dat het voldoende is om te bewijzen dat $\int^{\infty} \frac{|\omega(z_t)|}{e^{\lambda t}}\, dt$ convergeert.

Men heeft nu:

$$|\omega'(z)| \leqslant \frac{u_1}{x} \quad \text{dus} \quad |\omega(z_t) - \omega(z_0)| \leqslant \int\limits_{\substack{z_0 \\ over\, T(z)}}^{z_t} \frac{u_1}{x}\, |dz|$$

$$\int\limits_{\substack{z_0 \\ over\, T(z)}}^{z_t} \frac{u_1}{x}\, |dz| = \int_0^t \frac{u_1(z_t)}{x_t}\, \underbrace{\frac{|dz_t|}{dt}}_{\downarrow \atop |w(z_t)|}\, dt$$

$$= \int_0^t u_1(z_t) \left| \frac{w(z_t)}{z_t} \right| \times \frac{|z_t|}{x_t}\, dt.$$

Nu convergeert $\left| \frac{w(z_t)}{z_t} \right|$ voor $t \to \infty$ tot λ en $\frac{|z_t|}{x_t}$ is begrensd, dus

$|\omega(z_t) - \omega(z_0)| < M \int_0^t u_1(z_t)\, dt$ (M onafhankelijk van t)

$|\omega(z_t)| < |\omega(z_0)| + M \int_0^t u_1(z_t) dt$

dus $\int^{\infty} \frac{|\omega(z_t)|}{e^{\lambda t}}\, dt < \int^{\infty} \frac{|\omega(z_0)|}{e^{\lambda t}}\, dt + M \int^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \left[\int_0^t u_1(z_p)\, dp \right].$

$\int^{\infty} \frac{|\omega(z_0)|}{e^{\lambda t}}\, dt$ convergeert en

$$\int^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \left[\int_0^t u_1(z_p)dp\right] = -\frac{1}{\lambda}\int^{\infty} d\, e^{-\lambda t}\left[\int_0^t u_1(z_p)dp\right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\underbrace{\left\{e^{-\lambda t}\int_0^t u_1(z_p)\,dp\right\}^{\infty}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}\int^{\infty} e^{-\lambda t}\, u_1(z_t)\, dt}_{\mathrm{II}}$$

De 2e integraal convergeert, terwijl

$e^{-\lambda t} \int_0^t u_1(z_p)dp > 0$, zodat dus ook het gedeelte I $< \infty$.

Hiermede is de stelling bewezen.

G e v o l g v a n b o v e n s t a a n d e s t e l l i n g:

Indien $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \left|\frac{\omega(z)}{z^2}\right| |dz|$ *divergeert* $\left(\textit{dus ook} \int^{\infty} \left|\frac{\omega(z_t)}{z_t}\right| dt\right)$, *dan divergeert* $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \frac{u_1}{x^2}\, dx \left(\textit{dus} \int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\, dt\right)$ *en omgekeerd.*

Verder:

$\int^{\infty} \left|\frac{\omega(z)}{z^2}\right| |dz|$ *over* $T(z)$ $\left(\textit{dus} \int^{\infty} \left|\frac{\omega(z_t)}{z_t}\right| dt\right)$ *is voor iedere z in D convergent of voor iedere z in D divergent.*

Met indirecte bewijzen en, wat de laatste stelling betreft, met behulp van de stelling dat $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \frac{u_1}{x^2}\, dx$ $\left(\text{of} \int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t}\, dt\right)$ voor iedere z in D òf convergeert òf divergeert, zijn deze stellingen eenvoudig te bewijzen.

O p m e r k i n g: Omdat op $T(z) : 1 \leqslant \left|\frac{dz}{dx}\right| < M < \infty$ mag in het bovenstaande $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \left|\frac{\omega(z)}{z^2}\right| |dz|$ vervangen worden door

$$\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} \left|\frac{\omega(z)}{z^2}\right| dx.$$

Als 2e *nodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig van* $k(z)$ hebben we dus gevonden:

$$\textit{De convergentie van} \int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} \left| \frac{\omega(z)}{z^2} \right| dx \left(\text{of} \int^{\infty} \left| \frac{\omega(z_t)}{z_t} \right| dt \right).$$

Opmerking: Indien $\left| \dfrac{\omega(z)}{z} \right| \backsim \left\{ \dfrac{1}{log\,|\,z\,|} \right\}^{1+\varepsilon}$, waarin $\varepsilon > 0$, is met bovenstaand criterium de conformiteit op oneindig van $k(z)$ te bewijzen:

$$\int^{\infty} \left| \frac{\omega(z_t)}{z_t} \right| dt \backsim \int^{\infty} \frac{1}{\{log\,|\,z_t\,|\}^{1+\varepsilon}}\, dt.$$

Nu is: $|\,z_t\,|\, e^{-\lambda t} \geqslant x_t e^{-\lambda t} \geqslant x$ (zie blz. 19)

$|\,z_t\,| \geqslant x\, e^{\lambda t}$ ($x =$ constant > 0).

$log\,|\,z_t\,| \geqslant \underbrace{\text{constante}}_{\text{C}} + \lambda t$

$\{\,log\,|\,z_t\,|\,\}^{1+\varepsilon} \geqslant (C + \lambda t)^{1+\varepsilon}$ dus

$$\int^{\infty} \frac{1}{\{\,log\,|\,z_t\,|\,\}^{1+\varepsilon}}\, dt \text{ convergeert.}$$

§ 12. Enkele toepassingen van de functie van Königs.

Door een functie $k(z)$ (waarvan de waardevoorraad in D) wordt het rechterhalfvlak D afgebeeld op een deelgebied van D.

Uit $k(z_t) = e^{\lambda t}\, k(z)$ volgt, dat z_t een beeld heeft, dat uit het beeld van z verkregen wordt door vermenigvuldiging met $e^{\lambda t}$ t.o.v. de oorsprong van het k vlak. De afbeelding van een kromme $T(z)$ is dus een halfrechte in het k vlak: $arg\, k =$ constant, $|\,k\,| > m(z)$, waarbij $m(z)$ positief is of nul, als z_t de grens van $D(x = o)$ bereikt resp. voor $t > -\infty$ of voor $t = -\infty$.

Afgeleid is door ons (zie blz. 17) dat een functie $k(z)$, welke haar waardevoorraad in D heeft, op een positieve constante factor na voorgesteld kan worden door $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{z_t}{|\,\alpha_t\,|}$. $k(z)$ heeft dus het argument $\varphi(z)$ d.w.z. van de richting waarin z_t over $T(z)$ naar het oneindige gaat. Het beeld van $T(z)$ in het k vlak van $T(z)$ is dus gelegen op de halfrechte $arg\ k = \varphi(z)$.

Indien $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \dfrac{k(z)}{z} = \gamma > 0$, heeft men $arg \dfrac{k(z_t)}{z_t} \to 0$ voor $t \to \infty$, want $\dfrac{k(z_t)}{z_t} \to \gamma > o$.

Dit geldt ook in het geval dat $\gamma = 0$, want:

$arg\, k(z_t) = \varphi(z)$ en $arg\, z_t \to \varphi(z)$ voor $t \to \infty$, dus $arg \dfrac{k(z_t)}{z_t} \to 0$ voor $t \to \infty$.

Ook in het geval dat $\gamma = 0$ is dus de afbeelding van D door $k(z)$, hoewel niet conform in het oneindige, toch hoektrouw in het grenspunt $z = \infty$, want uit het bovenstaande volgt dat 2 koorden k_1 en k_2 in het k-vlak, die elkaar in $k = \infty$ snijden onder een hoek θ, de beelden zijn van 2 krommen T_1 en T_2 die elkaar onder dezelfde hoek θ in $z = \infty$ snijden.

Tenslotte kan men nog dit opmerken:

Beweegt z zich naar het oneindige zó, dat $arg\, z = \alpha =$ constant $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, dan nadert $arg\, k(z)$ tot α.

HOOFDSTUK III.

GEDRAG VAN z_t VOOR $t \to \infty$ IN HET GEVAL $\lambda = 0$.

§ 13. Hoofdstelling.

G e g e v e n: *$w(z) = u(z) + iv(z)$ is een holomorfe functie van z in D. $u(z) > 0$ in elk punt z van D, $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \dfrac{w(z)}{z} = 0$, $\dfrac{dz}{dt} = w(z)$.*

B e w e r i n g: *Als voor één punt z_0, arg z_t een limiet φ heeft voor $t \to \infty$, dan heeft voor elk ander punt z, arg z_t dezelfde limiet.*

B e w ij s: Onderstel eerst $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Dan is $\frac{y_t}{x_t}$ voor elke z in D begrensd. Immers indien dit niet zo was voor een punt z_1, dan zou er een deelrij t_n zijn, zó, dat $arg\ (z_1)_{t_n} \to +\frac{\pi}{2}$ bijvoorbeeld, voor $t_n \to \infty$. Daar $arg\ z_{t_n}$ een harmonische functie van z is, en wèl een begrensde, bevat de rij (n) een deelrij (p), zodat $arg\ z_{t_p}$ convergeert tot een harmonische functie van z.

Daar deze voor $z = z_1$ haar maximum bereikt is zij voor elke z in D gelijk aan $\frac{\pi}{2}$, dus ook voor $z = z_0$, wat wegens $\varphi < \frac{\pi}{2}$ onmogelijk is.

De onderstelling voert dus tot een ongerijmdheid, dus $\frac{y_t}{x_t}$ is begrensd voor $t \to \infty$, bij vaste z. Men heeft nu:

$$\frac{dz_t}{dt} = w(z_t)$$

$$\frac{d\ log\ z_t}{dt} = \frac{w(z_t)}{z_t}$$

$$\frac{d\ log\ z_t}{dz} \times w(z) = \frac{w(z_t)}{z_t} \quad \text{dus} \quad \frac{d\ log\ z_t}{dz} = \frac{w(z_t)}{w(z) z_t}.$$

$$\frac{w(z_t)}{w(z) z_t} \to o \quad \text{voor} \quad t \to \infty \quad \text{(want } \frac{y_t}{x_t} \text{ is begrensd).}$$

De convergentie is uniform in elk begrensd en gesloten gebied van D (want de verzameling van holomorfe functies van z: $\frac{w(z_t)}{z_t}$ is normaal in den zin van Montel).

Neemt men nu $z_1 \neq z_0$, dan is:

$$log \frac{(z_1)_t}{(z_0)_t} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{d \log z_t}{dz} dz = \int_{z_0}^{z_1} \frac{w(z_t)}{w(z) z_t} dz.$$

Voor $t \to \infty$ heeft men dus $\log \frac{(z_1)_t}{(z_0)_t} \to 0$ dus $\frac{(z_1)_t}{(z_0)_t} \to 1$, $arg\ (z_1)_t - arg\ (z_0)_t \to 0$.

Omdat $arg\ (z_0)_t \to \varphi$, convergeert $arg\ z_t$ voor elke z in D ook tot φ.

We nemen nu aan dat $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ bijvoorbeeld, dus $arg\ (z_0)_t \to \frac{\pi}{2}$.

Dan is voor elke z in D: $arg\ z_t \to +\frac{\pi}{2}$ voor $t \to \infty$.

Immers, indien dit niet zo was voor een punt $z = z_1$, zou er een deelrij t_n zijn, zodat $arg\ (z_1)_{t_n} \to \alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ voor $t_n \to \infty$.

Daar $arg\ z_{t_n}$ een harmonische functie van z is, en wèl een begrensde, bevat de rij (n) een deelrij (p), zodat $arg\ z_{t_p}$ convergeert tot een harmonische functie van z. Daar deze voor $z = z_0$ haar max $= \frac{\pi}{2}$ bereikt, is zij overal $\frac{\pi}{2}$, dus ook voor $z = z_1$, wat wegens $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ onmogelijk is.

Men heeft dus $arg\ z_t \to \frac{\pi}{2}$ voor $t \to \infty$.

Gevolg van bovenstaande stelling: *Blijft, bij $\lambda = 0$, voor één punt z in D, $arg\ z_t$ schommelen, dan is dit het geval voor elke z in D..*

Voor alle beginpunten is het gedrag van $arg\ z_t$ voor $t \to \infty$ hetzelfde.

§ 14. Het geval $x_t \to c(z) < \infty$.

$$\frac{dz}{dt} = w(z), \qquad \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = u(z) + iv(z), \qquad \frac{dx_t}{dt} = u(z) > 0,$$

dus x_t neemt toe met t.

Er zijn dus 2 gevallen mogelijk:

$$x_t \to c(z) < \infty \text{ voor } t \to \infty \quad \text{of}$$

$$x_t \to \infty \qquad \text{voor } t \to \infty.$$

Eerste geval: $x_t \to c(z) < \infty$ voor $t \to \infty$ dus $y_t \to +\infty$ (of $-\infty$) want $z_t \to \infty$.

Afgeleid is (§ 5) dat $\frac{dy_t}{dt} \to b$ voor $t \to \infty$, b onafhankelijk van z en $b \neq 0$, dus $y_t \to +\infty$ als $b > 0$, $y_t \to -\infty$ als $b < 0$.

x_t is voor iedere waarde van t een harmonische functie van z, welke toeneemt als t toeneemt, zodat x_t voor elke z in D convergeert (tot een harmonische functie $c(z)$) als dat voor één punt z gebeurt. Elke kromme $T(z)$ heeft dus een asymptoot aan de rechterkant, als dat bij één het geval is. De harmonische functie van z : $c(z) - x_t$, nadert tot nul voor $t \to \infty$, dus $c(z) - x \to 0$ voor $z \to \infty$ op iedere kromme $T(z)$. Daaruit volgt, dat *als* bovengenoemd getal $b > 0$: $c(z) - x \to 0$ *voor* $y \to +\infty$, *uniform in iedere strook* $B(\varepsilon)$: $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Bewijs: (zie fig. 2).

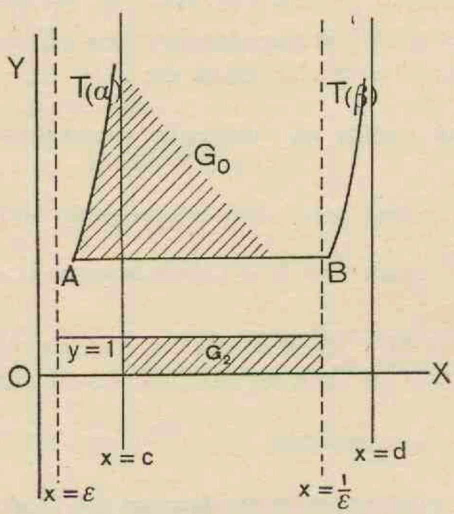


Fig. 2.

Beschouw een gebied G_0 begrensd door 2 krommen $T(\alpha)$ en $T(\beta)$ (die resp. de asymptoten $x = c$ en $x = d$ hebben) en het lijnstuk AB. Beschouw in G_0 de harmonische functie $c(z) - x$. Deze functie (welke begrensd is in G_0, want $c < c(z) < d$ en $0 < x < d$) neemt in het punt oneindig de randlimiet nul aan, als $z \to \infty$ over $T(\alpha)$ en ook als $z \to \infty$ over $T(\beta)$. De harmonische functie van z : $c(z) - x$, nadert dus tot nul als $z \to \infty$, tweedimensionaal in G_0.

Om te bewijzen, dat de convergentie van $c(z) - x$ tot nul, voor $y \to \infty$, uniform is in elke strook $B(\varepsilon)$, beschouwen we in het gebied G_1, begrensd door de rechten $y = 0$, $y = 1$, $x = \varepsilon$, $x = \frac{1}{\varepsilon}$, de rij van begrensde harmonische functies van z : $c(z + in) - x$ (n is een natuurlijk getal). In ieder punt van het gebied G_2 $\left(\text{indien bijv. } c > \varepsilon \text{ en } d > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ is } G_2 \text{ begrensd door } y = 1,\ y = 0,\ x = c,\ x = \frac{1}{\varepsilon}\right)$ convergeert deze rij volgens het bovenstaande tot nul, dus ook in bovengenoemd gebied G_1. De convergentie is gelijkmatig (wegens het begrensd zijn van $c(z + in) - x$). Men heeft dus $c(z) - x \to 0$ als $y \to \infty$ uniform in $B(\varepsilon)$.

G e v o l g van b o v e n s t a a n d e s t e l l i n g: *$c(z)$ kan willekeurig dicht bij iedere positieve waarde komen, dus wegens de continuïteit ook elke positieve waarde aannemen.*

O p m e r k i n g: Als $z \to \infty$ over $T(\alpha)$ dan: $w(z) \to ib$, evenals in het geval dat $z \to \infty$ over $T(\beta)$ (zie § 5). Op dezelfde wijze als bij bovenstaande stelling kan men dus bewijzen: *Als $b > 0$ dan $w(z) \to ib$ voor $y \to \infty$, uniform in elke strook $B(\varepsilon)$.*

§ 15. Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t.

Een nodige voorwaarde voor convergentie van x_t is allereerst:
$\lambda = \lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{w(z)}{z} = 0$, omdat voor $\lambda > 0$, zoals bewezen is, $x_t \to \infty$ voor $t \to \infty$.

Wij nemen nu aan dat de krommen $T(z)$ een verticale asymptoot aan de rechterkant hebben en dat bijv. $b > 0$, dus $y_t \to +\infty$ voor $t \to \infty$.

Men kan nu bewijzen dat:

$\int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} u\, dy$ convergeert en tengevolge daarvan ook $\int^{\infty} u\, dy$ over elke verticale rechte in D: $x =$ constant.

I m m e r s: Stel $x = c$ is de asymptoot behorende bij $T(z)$. Dan is:

$$\int\limits_{\text{over } T(z)}^{\infty} u\, dy = \int\limits_{\text{over } T(z)}^{c} u \frac{dy}{dx}\, dx = \int\limits_{\text{over } T(z)}^{c} v\, dx \quad \text{want} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u},$$

Omdat $v \to b$ als $z \to \infty$ over $T(z)$ en $c < \infty$, convergeert laatstgenoemde integraal, dus: $\int\limits_{over\ T(z)}^{\infty} u\, dy < \infty$.

Volgens blz. 2 is voor $h > 0$:

$$\frac{u(z)}{x} \geqslant \frac{u(z+h)}{x+h}. \tag{I}$$

Toegepast op het bovenstaande geeft dit voor $d \geqslant c$:

$$\frac{u(x_t + iy_t)}{x_t} \geqslant \frac{u(d + iy_t)}{d} \quad \text{(want } x_t < d)$$

dus
$$u(d + iy_t) < \frac{d}{x_0} u(x_t + iy_t).$$

Hieruit leidt men af dat $\int^{\infty} u(d + iy)dy$ convergeert voor $d \geqslant c$. Daar dit geldig is voor elke positieve waarde van c (zie G e v o l g op blz. 26) is $\int^{\infty} u\, dy$ convergent op elke verticale rechte in D.

Neemt men omgekeerd aan dat voor een functie $w(z) = u(z) + iv(z)$, holomorf in D met $u > 0$, $\int^{\infty} u\,(c + iy)dy$ $(c > 0)$ *convergeert* (waaruit, volgens bovenstaande ongelijkheid (I), de convergentie van $\int^{\infty} u(d + iy)dy$ voor $d > c$ en volgens o p m. 1 op blz. 30 ook voor $0 < d < c$ volgt), dan kan men bewijzen:

1) $w(z) \to ib$ *(b constant) als* $y \to \infty$.

2) *Als* $b > 0$, *dan hebben de krommen* $T(z)$ *een verticale asymptoot aan de rechterkant.*

B e w ij s: Beschouw op een rechte $x = d$ twee punten $d + pi$ en $d + qi$ $(0 < p < q)$.

Dan is:

$$|\,w(d + qi) - w(d + pi)\,| = \left|\int_p^q w'_y(d + yi)\, dy\right| \leqslant \int_p^q \frac{u(d + yi)}{d}\, dy. \tag{II}$$

want $|\,w'(d + yi)\,| \leqslant \dfrac{u(d + yi)}{d}$ (zie blz. 2).

Omdat $\int^{\infty} u(d + yi)\, dy$ convergeert, convergeert w (dus ook u) op de rechte $x = d$ tot een eindige limiet, als $y \to \infty$.

Uit de convergentie van $\int^{\infty} u(d + yi)dy$ volgt dat $\lim\limits_{y \to \infty} u = o$, zodat bovengenoemde $\lim\limits_{y \to \infty\ op\ x = d} w(z)$ zuiver imaginair is, stel ib. Deze limiet is constant op alle verticale rechten in D volgens de stelling:

Een functie $w = f(z)$, holomorf en begrensd in een gebied G_z en op de rand Γ_z links continu en rechts continu in een punt z_0, kan langs Γ_z in 2 verschillende richtingen naar z_0 geen twee verschillende limieten hebben [1]).

Deze stelling geldt ook voor functies die begrensd zijn „in ruimere zin" (dus o.a. voor $w(z)$, waarbij $u(z) > o$), omdat men deze gevallen door een passende transformatie tot het genoemde kan terugvoeren. Voor G_z nemen wij in ons geval het gebied begrensd door 2 verticale rechten in D en een lijnstuk dat een punt op de ene verbindt met een punt op de andere; z_0 is hier het punt oneindig. Dat de convergentie $w(z) \to ib$ voor $y \to \infty$ uniform is in iedere strook $B(z)$ kan bewezen worden als op blz. 26; maar ook voor de rechten $x = d$, $d \geqslant c > 0$ (c vast) is de convergentie uniform, omdat volgens de ongelijkheid (II) op blz. 27:

$$| bi - w(d + pi) | \leqslant \int_p^\infty \frac{u(d + iy)}{d}\, dy \leqslant \int_p^\infty \frac{u(c + iy)}{c}\, dy$$

en $\int^\infty u(c + iy)\, dy$ convergeert.

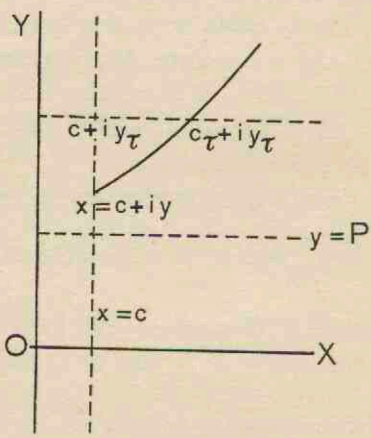


Fig. 3.

Stel nu $b > 0$, dan volgt uit de gelijkmatige convergentie: $w(z) = u(z) + iv(z) \to ib$ voor $y \to \infty$ $(x \geqslant c)$, dat er een getal P zó te bepalen is,

dat $v > \frac{1}{2} b$ in het gebied $G \begin{cases} x \geqslant c \\ y \geqslant P \end{cases}$

Voor elk punt van G heeft men dus $y_t \to +\infty$. Beschouw een beginpunt $z = c + iy$, $y > P$. Stel $z_t = c_t + iy_t$ de plaats van dat punt op het tijdstip t en $T(z)$ de meetk. plaats van de punten z_t. Voor $t > 0$ liggen de punten van $T(z)$ in G (want voor $z = c + iy$ is $u > 0$ en $v > \frac{1}{2} b$).

[1]) Zie o.a. J. H. Wansink: Enige randproblemen der conforme afbeelding Proefschrift 1931 blz. 69.

Men heeft (zie fig. 3):

$$\frac{u(c_t + iy_t)}{c_t} \leqslant \frac{u(c + iy_t)}{c}$$

$$u(c + iy_t) \geqslant \frac{c}{c_t} u(c_t + iy_t)$$

$$> \frac{c}{c_\tau} u(c_t + iy_t) \text{ als } \tau > t.$$

Men heeft dus voor $\tau > 0$:

$$\underset{\text{over } x=c}{\int_y^{y_T}} u\,dy > \frac{c}{c_\tau} \underset{\text{over } T(z)}{\int_z^{z_T}} u(z)\,dy$$

dus

$$\underset{\text{over } x=c}{\int_y^{y_T}} u\,dy > \frac{c}{c_\tau} \underset{\text{over } T(z)}{\int_z^{z_T}} u(z) \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{c}{c_\tau} \underset{\text{over } T(z)}{\int_z^{z_T}} v\,dx$$

dus

$$\underset{\text{over } x=c}{\int_y^{y_T}} u\,dy > \frac{c}{c_\tau} \times \tfrac{1}{2}\, b\,(c_\tau - c) = \tfrac{1}{2}\, bc\left(1 - \frac{c}{c_\tau}\right).$$

Als men aanneemt dat $c_\tau \to +\infty$ voor $\tau \to \infty$ dan is

$$\underset{\text{over } x=c}{\int_y^{\infty}} u\,dy \geqslant \tfrac{1}{2}\, bc.$$

Daar y zo groot gekozen kan worden als men wil, is de laatste ongelijkheid in strijd met de convergentie van $\underset{\text{over } x=c}{\int^{\infty}} u\,dy$. Dus c_τ convergeert voor $\tau \to \infty$, dus iedere kromme $T(z)$ heeft een verticale asymptoot aan de rechterkant.

Als x_t convergeert voor $t \to \infty$ en als $b < 0$, dan is te bewijzen dat $\int_{-\infty} u\,dy$ op elke verticale rechte in D convergent is en ook omgekeerd:

Als $\int_{-\infty} u\,dy$ over één verticale rechte convergent is en als bovendien op die rechte $w(z) \to bi$ met $b < 0$, voor $y \to -\infty$, dan wordt op dezelfde wijze als hierboven bewezen dat x_t convergeert.

Samenvattende krijgt men de volgende stelling (van J. Wolff):
Een nodige en voldoende voorwaarde opdat de krommen $T(z)$ een verticale

asymptoot aan de rechterkant hebben, is de convergentie van $\int^{\infty} u\,dy$ *(of van* $\int_{-\infty} u\,dy$*) over één verticale rechte in D (waaruit de convergentie op alle verticale rechten in D volgt) en verder dat de limiet b van* $v(z)$ *voor* $x > 0$ *en* $y \to \infty$ *(of in het geval dat* $\int_{-\infty} u\,dy$ *convergeert, voor* $y \to -\infty$*), waarvan het bestaan door bovenstaande convergentie van* $\int^{\infty} u\,dy$ *(resp.* $\int_{-\infty} u\,dy$*) verzekerd is, positief (resp. negatief) is.*

Voor $b > 0$ *heeft men* $y_t \to \infty$, *als* $t \to +\infty$.

Voor $b < 0$ *heeft men* $y_t \to -\infty$, *als* $t \to +\infty$.

Opmerking. 1. Op blz. 27 wordt beweerd dat uit de convergentie van $\int^{\infty} u\,dy$ op één verticale rechte in D, de convergentie op elke verticale rechte in D volgt. Voor de rechten $x = d,\ d > c$ was dit duidelijk. Wij zullen bewijzen, dat ook op de rechten $x = d,\ 0 < d < c$, $\int^{\infty} u\,dy$ convergeert.

Zij dus $\int^{\infty} u\,(c + yi)\,dy < \infty$ en $0 < d < c$. (1)

$$|\,w'(z)\,| \leqslant \frac{u}{x} \quad \text{dus} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant \frac{u}{x}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{u}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \geqslant -\frac{u}{x}$$

dus $$\frac{\partial \log u}{\partial x} + \frac{\partial \log x}{\partial x} \geqslant 0.$$

Dus ux neemt niet af bij constante y en toenemende x, waaruit:

$$u(d + yi) \leqslant \frac{c}{d}\,u(c + yi),$$

$$\int^{\infty} u\,(d + yi)\,dy < \infty \text{ (volgens (1))}.$$

Opmerking 2: Bij de stelling op bl. 29 is niet als voorwaarde vermeld: $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{w(z)}{z} = 0$. Dit is ook niet nodig, omdat dit uit de andere voorwaarden af te leiden is: op $x = c$ heeft men $w(z) \to ib$, dus $\frac{w(z)}{z} \to 0$ als $z \to \infty$ op $x = c$. $\frac{w(z)}{z}$ is een holomorfe functie van z, welke geen negatieve waarden aanneemt, dus is begrensd, „in ruimere zin'', zodat volgens de stelling op blz. 28 ook $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{w(z)}{z} = 0$.

Het volgende voorbeeld illustreert bovenstaande stelling:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} + i = u(z) + iv(z)$$

$$u(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Stel $c > 0$.

$$\int\limits_{over\ x=c}^{\infty} u\, dy = arc\ tg\ \frac{y}{c}\Big|^{\infty}$$

dus $\int\limits_{over\ x=c}^{\infty} u\, dy$ convergeert.

$\lim\limits_{y \to \infty} w(x + iy) = i$ dus $b = 1$ dus x_t convergeert volgens genoemde stelling.

Dit is ook af te leiden als volgt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} + i, \qquad \frac{zdz}{1 + iz} = dt.$$

Op $T(z)$ is $Im. \int^{z} \frac{z\, dz}{1 + iz}$ constant.

$$Im. \int^{z} \frac{zdz}{1 + iz} = Im. \int^{z} \left(- idz + \frac{idz}{1 + iz} \right)$$

$$= Im. \{- iz + log\ (1 + iz)\}$$

$$1 + iz = i(z - i). \text{ Stel dus } z - i = \rho e^{i\theta}.$$

Op $T(z)$ is dus:

$$Im. \{- iz + log\ (i\rho\, e^{i\theta})\} = \text{Constant}, \ - x + \theta = C. \qquad (1)$$

Omdat $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, is op $T(z)$ x begrensd, dus $T(z)$ heeft een verticale asymptoot aan de rechterkant. Bij toenemende t groeit x dus volgens 1) ook θ, dus $\theta \to +\frac{\pi}{2}$, $arg\, z_t \to +\frac{\pi}{2}$ voor $t \to \infty$.

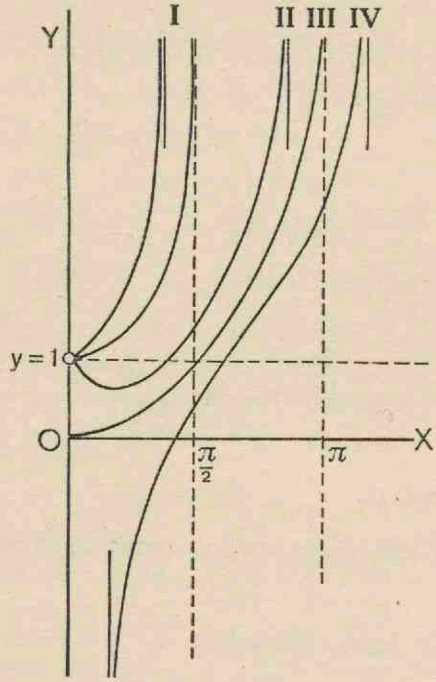


Fig. 4.

Wij onderzoeken het gedrag van de krommen $T(z)$ nader (zie fig 4).

Uit 1) volgt *a*) op $T(z)$ is $| x + C | < \frac{\pi}{2}$ (2)

b) voor iedere $T(z)$ is $C < \frac{\pi}{2}$ (3)

c) de verg. der baankrommen is:

$$-x + arc\, tg \frac{y-1}{x} = C$$

dus

$$y = 1 + x\, tg\, (x + C). \tag{4}$$

Voor het snijpunt van $T(z)$ met de rechte $y = 1$ is: $x\, tg(x + C) = 0$ dus $tg(x + C) = 0$ (want $x > 0$). In verband met (2) is dus $x + C = 0$, $x = -C$.

Alleen die krommen $T(z)$ snijden dus de lijn $y = 1$, voor $x > 0$, waarvoor $C < 0$.

Wij beschouwen nu de krommen $T(z)$ voor de verschillende waarden van C.

I) $\frac{\pi}{2} > C \geqslant 0$.

1) Geen snijpunt met $y = 1$ voor $x > 0$.

2) $x \to 0, x > 0$ dan $y \to 1$. De krommen komen dus uit het in punt $(0,1)$.

3) $x \to \frac{\pi}{2} - C$, $x < \frac{\pi}{2} - C$ dan $y \to +\infty$. De rechte $x = \frac{\pi}{2} - C$ is asymptoot van $T(z)$.

Voor $C = 0$ vinden we: de asymptoot $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx} = tg\, x + \frac{x}{cos^2 x} \to 0$ voor $x \to 0, x > 0$. De kromme $(C = 0)$ raakt in $(0,1)$ aan de lijn $y = 1$.

II) $0 > C > -\frac{\pi}{2}$.

1) Snijpunt met $y = 1$ voor $x > 0$: $x = -C$.

2) $x \to 0$, $x > 0$ dan $y \to 1$ en $0 \to C$.

3) $x \to \frac{\pi}{2} - C$ $x < \frac{\pi}{2} - C$ dan $y \to \infty$, dus asymptoot: $x = \frac{\pi}{2} - C$.

III) $C = -\frac{\pi}{2}$.

1) Snijpunt met $y = 1$ voor $x > 0$: $x = \frac{\pi}{2}$.

2) $x \to 0$, $x > 0$, $y \to 0$ en $\frac{dy}{dx} \to 0$. De kromme raakt in O aan de x-as.

3) asymptoot: $x = \pi$.

IV) $C < -\frac{\pi}{2}$.

1) Snijpunt met $y = 1$ voor $x > 0$: $x = -C$.

2) $x \to -\frac{\pi}{2} - C$, $x > -\frac{\pi}{2} - C$, dan $y \to -\infty$. De rechte $x = -\frac{\pi}{2} - C$ is asymptoot aan de linkerkant.

3) asymptoot aan de rechterkant: $x = \frac{\pi}{2} - C$.

§ 16. Een 2e nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t.

Stelling: *Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t, terwijl $y_t \to +\infty$, is, dat er een getal $d > 1$ aan te wijzen is zodat* $\lim\limits_{y \to +\infty} \eta(d + yi) \leqslant 0$, *waarbij* $\eta(d + yi) = Im. \int\limits_1^{d+yi} \frac{dz}{w(z)}$.

Bewijs:

a) Nodig: Beschouw $T(1)$, d.i. de kromme bepaald door:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= w(z) \\ z = 1 \text{ voor } t &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Op $T(1)$ is: $\eta(z) = Im. \int\limits_1^z \frac{dz}{w(z)} = 0$ (zie § 3).

$T(1)$ verdeelt $D(x > 0)$ in 2 gebieden, in het ene is: $\eta(z) > 0$, in het andere: $\eta(z) < 0$.

Wij noemen nu het gebied, waarin de punten liggen op de rechte: $x =$ constant, die grotere y hebben dan het punt van $T(1)$ op die rechte: „boven $T(1)$" en het andere gebied: „beneden $T(1)$".

Men heeft:

$$\eta(z) = Im. \int\limits_1^z \frac{dz}{w(z)} = -\underset{\text{over } x\text{—as}}{\int\limits_1^x} \frac{v dx}{u^2 + v^2} + \underset{\text{over } x = \text{const.}}{\int\limits_0^y} \frac{u dy}{u^2 + v^2}.$$

$\underset{\text{over } x = \text{const.}}{\int\limits_0^y} \frac{u dy}{u^2 + v^2}$ is groeiend met y, dus ook $\eta(z)$, dus:

$$\eta(z) < 0 \text{ beneden } T(1) \text{ en } \eta(z) > 0 \text{ boven } T(1).$$

Stel nu dat $T(1)$ een verticale asymptoot heeft aan de rechterkant, $x = c$ $(c > 1)$, dat $y_t \to +\infty$ en $d \geqslant c$.

Dan ligt d in het gebied beneden $T(1)$ dus

$$\eta(d + iy) < 0.$$

Omdat $\eta(d + iy)$ toeneemt met y, heeft men $\eta(d + iy) \rightarrow$ limiet $\leqslant o$, voor $y \rightarrow \infty$, dus $\eta(d + \infty i) \leqslant 0$.

b) V o l d o e n d e:

Stel dus dat er een getal $d > 1$ is met $\eta(d + \infty i) \leqslant 0$.

Dus op $x = d$ is $\eta(z) < 0$. Bijgevolg heeft de baan $T(1)$, waarop $\eta = 0$, geen punt met de rechte $x = d$ gemeen.

$T(1)$ heeft dus een verticale asymptoot aan de rechterkant.

Daar $\eta(z)$ beneden $T(1)$ negatief is, ligt de rechte $x = d$ in het gebied beneden $T(1)$, hetgeen alleen mogelijk is als op $T(1) : y_t \rightarrow + \infty$ voor $t \rightarrow \infty$. Op elke kromme $T(z)$ heeft men dus: $x_t \rightarrow c(z) < \infty$, $y_t \rightarrow + \infty$ voor $t \rightarrow \infty$ (zie § 14). Q.E.D.

V o o r b e e l d: Wij zullen bovenstaand criterium toepassen op het voorbeeld van § 15.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} + i = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + i$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\int\limits_1^x \frac{v dx}{u^2 + v^2} = \int\limits_1^x \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} dx = x - 1 - arc\, tg\, x + arc\, tg\, 1$$

$$\underset{\text{over } x = const.}{\int\limits_0^\infty} \frac{u\, dy}{u^2 + v^2} = \int\limits_0^\infty \frac{x\, dy}{(y - 1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} + arc\, tg\, \frac{1}{x}.$$

Wij zien direct dat er een getal $d > 1$ te bepalen is, zodat

$\eta(d + \infty i) < 0$, dus x_t convergeert en $y_t \rightarrow + \infty$.

O p m e r k i n g: Op gelijke wijze als hierboven bewijst men: *Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van* x_t, *terwijl* $y_t \rightarrow - \infty$, *is, dat er een getal* $d > 1$ *aan te wijzen is, zodat* $\eta(d - \infty i) \geqslant 0$.

§ 17. Een 3e nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t.

S t e l l i n g: *Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van* x_t *terwijl* $y_t \rightarrow + \infty$, *voor* $t \rightarrow + \infty$, *is*:

dat er 2 waarden van x zijn, c en d $(0 < c < d)$, *zodat*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \eta(c + yi) > \lim_{y \rightarrow +\infty} \eta(d + yi).$$

B e w ij s:

N o d i g: Stel dat een kromme $T(z)$ een asymptoot $x = d$ heeft, aan de rechterkant, en dat $c + iy_0$, een punt is van die kromme. Dan is (zie § 16):

$$\eta(c + iy_0) > \eta(z) \text{ voor } z \text{ op } x = d,$$

dus $$\eta(c + iy_0) \geqslant \eta(d + \infty i),$$

waaruit: $$\eta(c + \infty i) > \eta(d + \infty i).$$

V o l d o e n d e: Stel $0 < c < d$ en $\eta(c + \infty i) > \eta(d + \infty i)$. Volgens deze onderstelling is het dus mogelijk op de rechte $x = c$ een punt z te vinden zó, dat $\eta(z) > \eta(d + \infty i)$.

De rechte $x = d$ bevindt zich dus in het gebied beneden $T(z)$, waarmede bewezen is dat $T(z)$ een verticale asymptoot aan de rechterkant heeft en dat op $T(z)$, $y_t \to + \infty$ voor $t \to + \infty$. Dit gebeurt volgens § 14 voor elk beginpunt z.

G e v o l g:

Als voor 2 waarden van x, c en d, $0 < c < d$, voldaan is aan de voorwaarde: $\eta(c + \infty i) > \eta(d + \infty i)$, dan is $\eta(x + \infty i)$ een afnemende functie van x.

Dit volgt onmiddellijk uit het bovenstaande, als men bedenkt, dat in dit geval iedere verticale rechte in D asymptoot van een kromme $T(z)$ is (zie § 14).

O p m e r k i n g 1: Op gelijke wijze als hierboven kan men de volgende stelling afleiden:

Een nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie van x_t, terwijl $y_t \to - \infty$, is, dat er 2 waarden van x zijn, c en d $(0 < c < d)$ zodat $\eta(c - \infty i) < \eta(d - \infty i)$.

O p m e r k i n g 2: Bij het voorbeeld van § 15 (zie blz. 31) is $\eta(x + \infty i) = - x +$ constante, dus inderdaad afnemend bij toenemende x.

§ 18. Enkele voorbeelden voor het geval $\lambda = 0$.

1ste v o o r b e e ld: $\dfrac{dz}{dt} = 2 e^{i\pi/4} \sqrt{z}$.

$| arg \sqrt{z} | < \dfrac{\pi}{4}$ dus $2 e^{i\pi/4} \sqrt{z}$ is een functie van de door ons beschouwde klasse, met $\lambda = 0$.

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2 e^{i\pi/4} dt$$

$$\sqrt{z} = e^{i\pi/4} t + \alpha \qquad \alpha = \text{constant} = \sqrt{z_0} \text{ als } z_0$$

het beginpunt is.

$$z = (e^{i\pi/4}\, t + a + bi)^2 \quad (\text{als } \alpha = a + bi)$$

$$z = e^{i\pi/2}\, t^2 + 2(a + bi)\, e^{i\pi/4}\, t + a^2 - b^2 + 2abi$$

$$z = it^2 + (a + bi)\,(\sqrt{2} + i\sqrt{2})t + a^2 - b^2 + 2abi.$$

$$x = (a\sqrt{2} - b\sqrt{2})t + a^2 - b^2$$

$$y = t^2 + (b\sqrt{2} + a\sqrt{2})t + 2ab$$

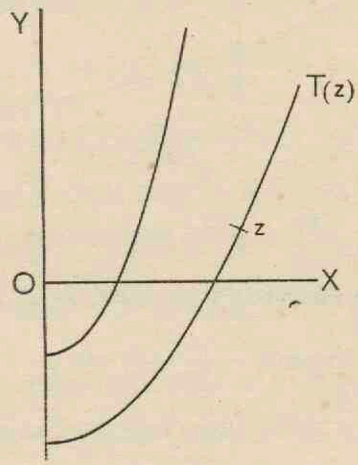


Fig. 5.

$T(z)$ is dus een parabool (fig. 5) met als as: de y-as en als top: $\{0, -\frac{1}{4}(a\sqrt{2} - b\sqrt{2})^2\}$.

Als $x \to +\infty$ dan $y \to +\infty$. Voor *elk* beginpunt z convergeert $arg\ z_t$ voor $t \to \infty$ tot dezelfde limiet *nl.* $\frac{\pi}{2}$, in overeenstemming met de stelling in § 13.

2e voorbeeld: $\dfrac{dz}{dt} = \sqrt{z}$.

Men kan dit op gelijke wijze als het vorige voorbeeld behandelen. Men vindt voor $T(z)$ dan parabolen met as: de x — as, terwijl de top op het negatieve gedeelte daarvan ligt (zie fig. 6).

Dus: $arg\ z_t \to 0$ voor $t \to \infty$.

Eenvoudiger vindt men het laatste resultaat als volgt: Neem een beginpunt z op de x-as. $\dfrac{dz}{dt} = \sqrt{z}$, $\sqrt{z}$ is reëel, zodat $T(z)$ de x-as is, dus $arg\ z_t \to 0$ voor $t \to \infty$ voor ieder beginpunt z in D, in verband met de stelling in § 13.

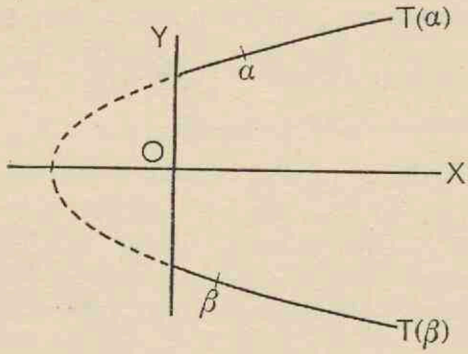


Fig. 6.

3e voorbeeld: $\dfrac{dz}{dt} = e^{i\pi/12}\ \sqrt[3]{z^2}\ (= w(z))$.

Dit behandelen we op soortgelijke wijze als het 2de voorbeeld.

$$arg\ w(z) = \frac{\pi}{12} + \tfrac{2}{3}\ arg\ z.$$

Wij bepalen nu een punt z waarvoor $arg\ z = arg\ w(z)$,

dus
$$arg\ z = \frac{\pi}{12} + \tfrac{2}{3}\ arg\ z$$

$$\tfrac{1}{3}\ arg\ z = \frac{\pi}{12} \quad \text{dus} \quad arg\ z = \frac{\pi}{4}.$$

Neem dus een beginpunt z op de rechte: $arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$. Omdat ook $arg\ w(z) = \dfrac{\pi}{4}$, blijft het punt z, voor $t > 0$, op de rechte $arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$, dus $T(z)$ is de rechte $arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$. Voor ieder beginpunt z heeft men dus $arg\ z_t \to \dfrac{\pi}{4}$.

Wij zien dat op deze manier andere voorbeelden te construeren zijn waarbij $lim\ arg\ z_t$ gelijk aan een willekeurige waarde tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $+\dfrac{\pi}{2}$ kan zijn. Wij komen dan tot een resultaat dat in § 19 afgeleid zal worden.

§ 19. Uitbreiding van de voorbeelden behandeld in § 18.

Beschouw de functie $w(z) = \rho\, e^{i\alpha} z^p$ (holomorf in D), waarvoor $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \dfrac{w(z)}{z} = 0$ (dus $p < 1$).

ρ is een positieve constante.

Het reële deel van $w(z) > 0$ dus $|\alpha| \leqslant (1 - |p|)\dfrac{\pi}{2}$.

Uit de laatste ongelijkheid volgt dat $|p| \leqslant 1$ moet zijn. Wij sluiten verder de gevallen uit waarvoor $\dfrac{\alpha}{1-p} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

B e w e r i n g: *arg* z_t *convergeert voor elk beginpunt* z, *tot* $\dfrac{\alpha}{1-p}$.

B e w ij s: Beschouw een punt z waarvoor $\arg z = \arg w(z)$ dus:

$\arg z = \alpha + p \times \arg z$,

$\arg z = \dfrac{\alpha}{1-p}$ (volgens onderstelling is $\left|\dfrac{\alpha}{1-p}\right| < \dfrac{\pi}{2}$, dus z in D).

De kromme $T(z)$ van zo'n punt is de rechte $\arg z = \dfrac{\alpha}{1-p}$, zodat men dus voor ieder beginpunt z heeft:

$$\arg z_t \to \frac{\alpha}{1-p} \text{ voor } t \to \infty.$$

O p m e r k i n g e n: 1) De stelling is juist voor $p = 0$ en $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$; $w(z)$ is dan een constante.

2) In het geval $p = -1$ moet, volgens onderstelling, $\alpha = 0$ zijn, zodat voor $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\rho}{z}$ geldt: $\arg z_t \to 0$.

Men kan dit direct controleren, maar het volgt ook uit een meer algemene stelling, welke in § 20 behandeld zal worden en welke geldt voor functies, holomorf in D, die zich in het oneindige angulair gedragen als $\dfrac{1}{z}$.

§ 20. Over functies, holomorf in D, met positief reëel deel, die zich in het oneindige angulair gedragen als $\frac{1}{z}$.

$$\frac{dz}{dt} = w(z) = u(z) + iv(z),\ u(z) > 0,\ \lim_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{w(z)}{z} = 0.$$

De functie $\frac{1}{w(z)}$ (holomorf in D) heeft een positief reëel deel, dus:

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} \frac{1}{zw(z)} = \lambda_1 \ (0 \leqslant \lambda_1 < \infty).$$

Daaruit volgt:

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ (ang)}} zw(z) = \rho,\ \ \rho > 0 \text{ of } \rho = \infty.$$

De convergentie is uniform voor $z \to \infty$ in iedere hoek:

$$|\, arg\, z \,| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ \ \frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0.$$

Als $\rho < \infty$ bestaat de volgende stelling (van J. W o l f f, iets uitgebreid).

Als de angulaire afgeleide van $w(z)$, in het punt oneindig, gelijk is aan nul en als bovendien de angulaire limiet van $zw(z)$ voor $z \to \infty$ eindig is, dan convergeert, voor elk beginpunt z, $arg\, z_t$ tot nul als $t \to \infty$.

B e w ij s: Wij bewijzen allereerst dat $\frac{y_t}{x_t}$ begrensd is.

Als $z \to \infty$ zó, dat $|\, arg\, z \,| \leqslant \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ dan:

$$zw(z) \to \rho > 0 \text{ (uniform)},$$

$$arg\, z + arg\, w(z) \to 0 \text{ (uniform)}.$$

Er is dus een positief getal P te vinden zó, dat

$$|\, arg\, z + arg\, w(z) \,| < \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad 1)$$

voor alle punten in het gebied:

$$\left.\begin{array}{r} x > P \\ |\, arg\, z \,| \leqslant \alpha \end{array}\right\} \text{ Zie fig. 7: } \angle \text{ AOB voor } x > \text{P}.$$

Beschouw een beginpunt z in dat gebied. $T(z)$ zal voor $t \geqslant 0$ in $\angle\, AOB$ liggen.

Trek nl CO en DO ($\angle$ COX $=$ $\angle$ DOX $= \frac{1}{2}\alpha$). Wanneer het beginpunt z, of een punt z_t voor $t > 0$ in $\angle$ AOC zou liggen (dus het *arg*. $> \frac{1}{2}\alpha$) dan volgt uit de ongelijkheid 1):

$$arg\, w < 0 \text{ in dat punt,}$$

$$\text{dus } arg \frac{dz}{dt} < 0.$$

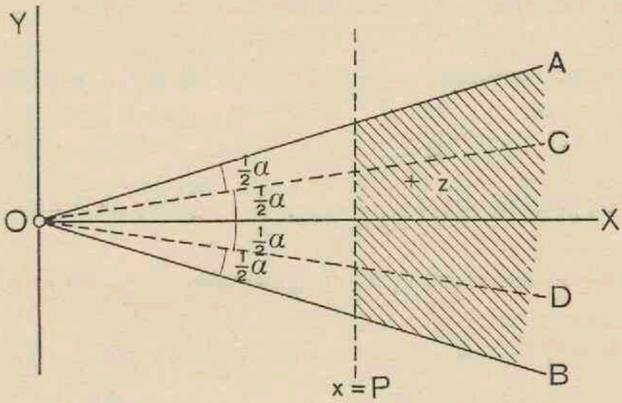


Fig. 7.

Wanneer het beginpunt z, of een punt z_t voor $t > 0$, in $\angle$ BOD zou liggen (dus het $arg. < -\frac{1}{2}\alpha$) dan is $arg \frac{dz}{dt} > 0$ in dat punt.

In beide gevallen nadert z_t bij toenemende t dus de x-as. Hieruit volgt dat voor het beschouwde punt $\frac{y_t}{x_t}$ begrensd is voor $t > 0$.

Dus: $$z_t\, w(z_t) \to \rho \quad \text{voor } t \to \infty$$

$$z_t \frac{dz_t}{dt} \to \rho \text{ dus } z_t^2 \backsim 2\,\rho\, t.$$

Hieruit volgt: $arg\, z_t \to 0$ voor $t \to \infty$.
Dit gebeurt nu (volgens § 13) voor ieder beginpunt z. Q.E.D.

De bovenstaande stelling is ontstaan door uitbreiding van het voorbeeld: $\frac{dz}{dt} = \frac{\rho}{z}$.

Ook de voorbeelden behandeld in § 19 kunnen op deze wijze worden uitgebreid. Men komt dan tot een stelling welke behandeld zal worden in § 21.

§ 21. Over functies, holomorf in D, met positief reëel deel, die zich in het oneindige gedragen als $\rho e^{i\alpha} z^p$.

Stelling: *Indien voor de functie $w(z)$, holomorf in D, met positief reëel deel geldt:*

$\dfrac{w(z)}{z^p} \to \rho e^{i\alpha}$ *voor* $z \to \infty$ *in een hoek* $\left| \arg z - \dfrac{\alpha}{1-p} \right| \leqslant \beta$, *waarbij*

(in verband met $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ (ang)}} \dfrac{w(z)}{z} = 0$ *en* $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ (ang)}} zw(z) = k$, $k > 0$ *of* $k = \infty$*)* p *voldoet aan de voorwaarde:* $-1 \leqslant p < 1$, *verder* α *een zodanig reëel getal is, dat* $\left| \dfrac{\alpha}{1-p} \right| < \dfrac{\pi}{2}$,

β *een positief getal is, zodat* $\left| \dfrac{\alpha}{1-p} \right| + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ *en* $\rho > 0$, *dan convergeert voor ieder beginpunt* z, $\arg z_t$ *tot de constante* $\dfrac{\alpha}{1-p}$, *als* $t \to \infty$.

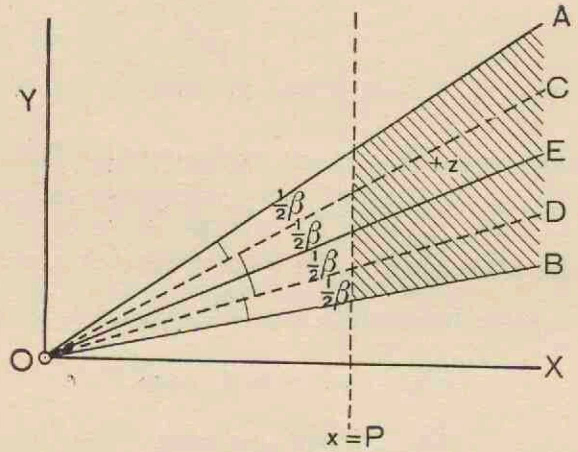


Fig 8.

Bewijs: $\dfrac{w(z)}{e^{i\alpha} z^p} \to \rho > 0$ voor $z \to \infty$ gelijkmatig in de hoek $\left| \arg z - \dfrac{\alpha}{1-p} \right| \leqslant \beta$.

Dus:

$\arg w(z) - \alpha - p \arg z \to 0$ voor $z \to \infty$ uniform in $\angle$ AOB (Zie fig. 8, OE is de rechte $\arg z = \dfrac{\alpha}{1-p}$ en $\angle$ AOE $= \angle$ BOE $= \beta$).

Men kan dus een positief getal P vinden, zodat voor alle punten in het gebied:

$$\left.\begin{array}{c}\left| arg\, z - \dfrac{\alpha}{1-p}\right| \leqslant \beta \\ x > P\end{array}\right\}$$

geldt:

$$|\, arg\, w(z) - \alpha - p\; arg\, z\, | < \tfrac{1}{2}(1-p)\beta \qquad (1)$$

(want $1 - p > 0$ en $\beta > 0$).

Beschouw een beginpunt z in dat gebied. De kromme $T(z)$ zal voor $t \geqslant 0$ in $\angle$ AOB liggen.

Trek nl. CO en DO ($\angle$ COE $=$ $\angle$ DOE $= \frac{1}{2}\beta$).

Wanneer een punt van $T(z)$ voor $t \geqslant 0$ in $\angle$ AOC ligt, dan is in zo'n punt:

$$arg\, z > \frac{\alpha}{1-p} + \tfrac{1}{2}\beta$$

$$(1-p)\, arg\, z > \alpha + \tfrac{1}{2}\beta(1-p) \quad \text{(want } 1-p > 0)$$

$$-p\; arg\, z - \alpha > -arg\, z + \tfrac{1}{2}\beta\,(1-p). \qquad (2)$$

Uit de ongelijkheid 1) volgt:

$$arg\, w(z) - \alpha - p\; arg\, z < \tfrac{1}{2}\beta\,(1-p).$$

In verband met 2) is dus

$$arg\, w(z) < arg\, z \text{ dus } arg\frac{dz}{dt} < arg\;z.$$

Bij toenemende t zal z_t dus de lijn OE naderen.

Neemt men aan dat een punt van $T(z)$ voor $t \geqslant 0$ in $\angle$ BOD ligt, dan is in zo'n punt:

$$arg\, z < \frac{\alpha}{1-p} - \tfrac{1}{2}\beta$$

$$-p\; arg\, z - \alpha < -arg\, z - \tfrac{1}{2}\beta\,(1-p). \qquad (3)$$

Uit 1) volgt: $arg\, w(z) - \alpha - p\; arg\, z > -\frac{1}{2}(1-p)\,\beta$ dus in verband met 3): $arg\, w(z) > arg\, z$, zodat ook hier z_t bij toenemende t de lijn OE nadert.

In beide gevallen is z_t voor $t \geqslant 0$ dus gelegen in de hoek:

$$\left| arg\, z - \frac{\alpha}{1-p}\right| < \beta.$$

Dus: $\dfrac{w(z_t)}{(z_t)^p} \to \rho\, e^{i\alpha}$ voor $t \to \infty$

$$\frac{1}{(z_t)^p} \frac{dz_t}{dt} \to \rho\, e^{i\alpha}$$

$$\frac{d\,(z_t)^{1-p}}{dt} \to (1-p)\, \rho\, e^{i\alpha}$$

$$(z_t)^{1-p} \backsim (1-p)\, \rho\, e^{i\alpha} t$$

$$(1-p)\ arg\ z_t \to \alpha \ \therefore\ arg\, z_t \to \frac{\alpha}{1-p}.$$

Volgens de stelling in § 13 gebeurt dit voor elk beginpunt z. Q.E.D.

Toepassingen van bovenstaande stelling zijn voldoende te vinden bijv.:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt[3]{z^2} + \sqrt{z} + i.$$

$$\frac{w(z)}{\sqrt[3]{z^2}} \to 1 \text{ voor } z \to \infty \text{ (dus } \alpha = 0,\ p = \tfrac{2}{3})$$

dus $arg\, z_t \to 0$ voor $t \to \infty$.

§ 22. Over functies die zich niet in het oneindige gedragen als een zekere macht van z.

In de stelling van § 21 worden functies beschouwd die zich in het oneindige gedragen als $\rho\, e^{i\alpha} z^p$ met een exponent p, zodat $-1 \leqslant p < 1$.

Bij de niet hieronder te rangschikken functies komen gevallen voor waarbij arg z_t convergeert, maar ook gevallen, waarbij arg z_t blijft schommelen. We geven van beide gevallen een voorbeeld:

1ste voorbeeld: $arg\, z_t$ convergeert.

$$\frac{dz}{dt} = w(z) = \frac{z+a}{log\,(z+a)}, \qquad a > 1.$$

$log\,(z+a)$ is holomorf in D en $w(z)$ (ook holomorf) heeft een positief reëel deel (want $z+a$ en $\dfrac{1}{log\,(z+a)}$ hebben argumenten die tegensteld van teken zijn).

$w(z)$ is niet te rangschikken onder de functies genoemd in § 21.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z+a}{log\,(z+a)}$$

$$\frac{d\,log\,(z+a)}{dt} = \frac{1}{log\,(z+a)} \text{ of } \frac{d\,\{log\,(z+a)\}^2}{dt} = 2$$

$$\{log\,(z+a)\}^2 = 2t + a + bi \ (a \text{ en } b \text{ constant}).$$

Stel $(z + a) = \rho e^{i\theta}$

$$\{ \log \rho + i\theta \}^2 = 2t + a + bi$$

$$\log^2 \rho - \theta^2 + 2i\theta \log \rho = 2t + a + bi$$

$$2\theta \log \rho = b = \text{constant.}$$

Omdat $\rho \to \infty$ voor $t \to \infty$, heeft men $\theta \to 0$ dus $\arg z_t \to 0$.

O p m e r k i n g: Ook op de volgende wijze ziet men in dat $\arg z_t \to 0$ voor $t \to \infty$:

Voor z op de x-as is $\frac{dz}{dt}$ reëel, dus $T(z)$ is de x-as.

Hieruit volgt $\arg z_t \to 0$ voor $t \to \infty$, voor elk beginpunt z.

2de v o o r b e e l d: *$\arg z_t$ blijft schommelen.*

$$\frac{dz}{dt} = w(z) = z^i + 2\,e^{\pi/2} \quad \text{waarbij} \quad (\text{als} \quad z = r\,e^{i\varphi})$$

$$z^i = e^{-\varphi}\,(\cos \log r + i \sin \log r)\,. \qquad |\,\varphi\,| < \frac{\pi}{2}\,.$$

$z^i + 2e^{\pi/2}$ heeft dus een positief reëel deel, terwijl de angulaire afgeleide in het oneindige gelijk is aan nul.

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\varphi} \cos \log r + 2e^{\pi/2} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\varphi} \sin \log r. \tag{2}$$

Omdat $|\,z^i\,| < e^{\pi/2}$, is $-\frac{\pi}{6} < \arg \frac{dz}{dt} < \frac{\pi}{6}$. (3)

Daaruit volgt dat de mogelijke limiet van $\arg z_t$ in ieder geval in absolute waarde niet groter dan $\frac{\pi}{6}$ kan zijn.

Stel nu dat $\arg z_t \to \alpha$ voor $t \to \infty \left(-\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$. Stel $\varepsilon > 0$, dan is voor t voldoende groot:

$$|\,\arg z_t - \alpha\,| < \varepsilon \ (\text{bij vaste } z).$$

Omdat $\left|\arg \frac{dz}{dt}\right| < \frac{\pi}{6}$ is er dus een waarde van t te bepalen ($t = \tau$), zodat voor het aangenomen punt z, r_t $(= |\,z_t\,|)$ toeneemt met t voor $t > \tau$.

Wij beschouwen nu de punten z_t van $T(z)$ voor $t > \tau$. Daarvoor is $\frac{dr}{dt} > 0$, maar ook:

$$\frac{dr}{dt} < 3\, e^{\pi/2} \quad \left(\text{want } \frac{dr}{dt} \leqslant \left|\frac{dz}{dt}\right|\right), \text{ dus:}$$

$$1 \Big/ \frac{dr}{dt} > \frac{1}{3\, e^{\pi/2}}. \tag{4}$$

Uit (2) volgt dat $\frac{dy}{dt}$ telkens van teken verandert als $r \to \infty$:

$\frac{dy}{dt} > o$ voor $e^{2n\pi} < r < e^{(2n+1)\pi}$ (n is een natuurlijk getal).

Als wij nu kunnen bewijzen dat de hoek, waaronder wij het stuk AB van $T(z)$ $\left(\text{waar } \frac{dy}{dt} > 0 \text{ (zie fig. 9)}\right)$ van O uit zien, groter blijft dan een *vast* positief bedrag, dan is bewezen dat $arg\, z_t$ onmogelijk kan convergeren.

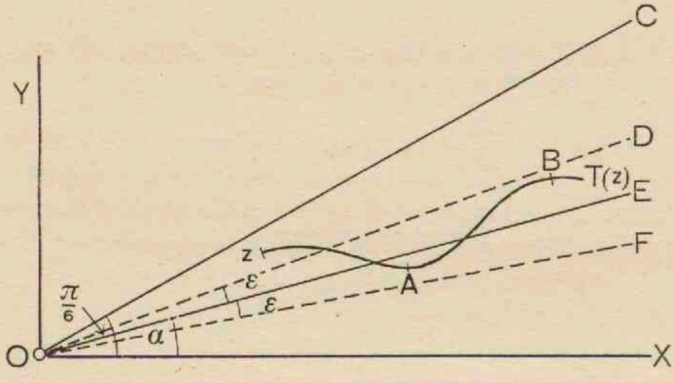


Fig. 9.

Voldoende is om te bewijzen dat

$$\frac{y_B - y_A}{r_A} > \delta \text{ (vast) } > 0$$

$$\frac{y_B - y_A}{r_A} = \frac{1}{r_A} \int_{e^{2n\pi}}^{e^{(2n+1)\pi}} \frac{dy}{dt} \times 1 \Big/ \frac{dr}{dt}\, dr \text{ (over } T(z))$$

$$= \frac{1}{r_A} \int_{e^{2n\pi}}^{e^{(2n+1)\pi}} e^{-\varphi} \sin \log r \times 1 \Big/ \frac{dr}{dt}\, dr$$

$$> \int\limits_{e^{2n\pi}}^{e^{(2n+1)\pi}} \frac{e^{-\varphi} \sin \log r}{3\, e^{\pi/2}} \times \frac{1}{r}\, dr,$$

want $\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r}$ voor z op AB, en verder volgens (4).

$$dus \quad \frac{y_B - y_A}{r_A} > \frac{1}{3\, e^{\pi/2}} \int\limits_{e^{2n\pi}}^{e^{(2n+1)\pi}} e^{-\varphi} \sin \log r \quad d \log r$$

$$\frac{y_B - y_A}{r_A} > \frac{1}{3\, e^{\pi/2} \times e^{\pi/2}} \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin u\, du, \text{ want } e^{-\varphi} > e^{-\pi/2}$$

$$\frac{y_B - y_A}{r_A} > \frac{2}{3e^{\pi}} > 0.$$

Hiermede is het bewijs geleverd.

§ 23. Een nodige voorwaarde voor $\liminf\limits_{t \to \infty} \arg z_t > 0$.

Stelling: *Een nodige voorwaarde, opdat lim inf arg* $z_t > 0$, *voor elk beginpunt* z *in* D, *is*:

$$\int\limits_{\substack{1 \\ \text{over de } x\text{—as}}}^{\infty} \frac{v}{u^2 + v^2}\, dx = + \infty.$$

Bewijs: Zij die *lim inf* $= \alpha > 0$. Stel $\angle ZOX = \beta$, $\alpha > \beta > 0$. (zie fig. 10).

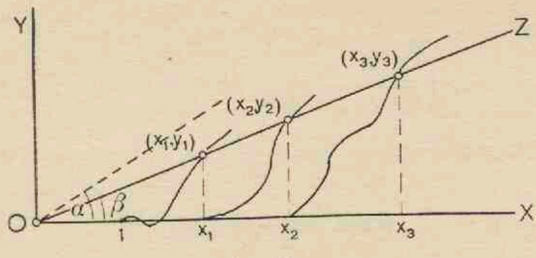


Fig. 10.

Voor $\liminf\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = \alpha > 0$, voor elk beginpunt z in D, is nodig, dat de rechte OZ door alle krommen $T(z)$, waarvan het beginpunt z op de x-as gelegen is, gesneden wordt voor $t > 0$.

Stel (x_1, y_1) is een snijpunt van T (1) met OZ $(x_1 > 1)$, (x_2, y_2) van $T(x_1)$ met OZ $(x_2 > x_1)$ enz.

Op iedere kromme $T(z)$ is $Im. \int_1^z \frac{dx}{w(z)} = \int_1^z \frac{udy - vdx}{u^2 + v^2} = \text{constant}$ (zie § 3). Bijgevolg is:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\text{over de } x\text{—as}}{\int_1^{x_1}} \frac{v}{u^2+v^2}\,dx = \underset{\text{over } x=x_1}{\int_0^{y_1}} \frac{u}{u^2+v^2}\,dy \\ &\underset{\text{over de } x\text{—as}}{\int_{x_1}^{x_2}} \frac{v}{u^2+v^2}\,dx = \underset{\text{over } x=x_2}{\int_0^{y_2}} \frac{u}{u^2+v^2}\,dy \\ &\qquad\qquad \text{enz.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Nu is $\frac{u}{u^2+v^2}$ het reële deel van $\frac{1}{w(z)}$. Omdat $\frac{u}{u^2+v^2} = u' > 0$,

heeft men:
$$\left|\frac{\partial u'}{\partial y}\right| \leqslant \frac{u'}{x} \text{ (zie blz. 2),}$$

dus voor $y > 0$:
$$u'(x,y) \geqslant u'(x,0)\, e^{-y/x}. \tag{2}$$

Zij (x, y) een punt van de rechte OZ, $x > 1$ en $tg\,\beta = m$.

Uit (2) volgt: $\underset{\text{over } x=\text{constant}}{\int_0^y} \frac{u}{u^2+v^2}\,dy = \underset{\text{over } x=\text{constant}}{\int_0^y} u'dy \geqslant m\, e^{-m}\, x\, u'(x, 0)$.

Omdat $x\,u'(x, 0)$ niet afneemt bij toenemende x (zie blz. 30), is voor (x, y) op OZ $(x > 1)$:

$$\underset{\text{over } x=\text{constant}}{\int_0^y} \frac{u}{u^2+v^2}\,dy > M > 0 \text{ (M onafhankelijk van x).}$$

Uit (1) volgt dus: $\underset{\text{over de } x\text{—as}}{\int_1^{x_n}} \frac{v}{u^2+v^2}\,dx > nM$,

dus
$$\underset{\text{over de } x\text{—as}}{\int_1^{x_n}} \frac{v}{u^2+v^2}\,dx \to +\infty \quad \text{voor} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Uit $\liminf_{t \to +\infty} \arg z_t = \alpha > 0$ volgt, dat voor x voldoende groot de x-as in het gebied beneden $T(x_n)$ is gelegen. Daar op iedere verticale rechte $\eta(z) = Im. \int_1^z \frac{dz}{w(z)}$ toenemend is met y (zie § 16) en daar verder op $T(x_n)$, $\eta(z)$ constant is $(= -\int_1^{x_n} \frac{v}{u^2 + v^2}\, dx)$, is voor x voldoende groót:

$$\int_{x_n}^{x} \frac{vdx}{u^2 + v^2} > 0.$$

In verband met (3) volgt hieruit:

$$\int_{\substack{1 \\ \text{over de } x\text{—as}}}^{\infty} \frac{v}{u^2 + v^2}\, dx = + \infty. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Opmerking: De genoemde voorwaarde is niet voldoende voor $\liminf_{t \to +\infty} \arg z_t > 0$, getuige het voorbeeld:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{z} + i.$$

$\int_{\substack{1 \\ \text{over de } x\text{—as}}}^{\infty} \frac{vdx}{u^2 + v^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + 1} = \infty$, zodat dus aan de genoemde voorwaarde voldaan is. Toch heeft men niet: $\liminf_{t \to +\infty} \arg z_t > 0$, want $\arg z_t \to 0$ voor $t \to + \infty$ (immers $\frac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z}} \to 1$ voor $z \to \infty$, zodat in verband met § 21, $\arg z_t \to 0$).

Opmerking 2: Op gelijke wijze als bij bovenstaande stelling, komt men tot het volgende:

Een nodige voorwaarde, opdat $\limsup_{t \to +\infty} \arg z_t < 0$ *voor ieder beginpunt* z *in* D, *is:*

$$\int_{\substack{1 \\ \text{over de } x\text{—as}}}^{x} \frac{v}{u^2 + v^2}\, dx = -\infty.$$

Wij zullen nu in § 24 een nodige en voldoende voorwaarde afleiden voor $\lim\inf.\ \arg z_t \geqslant \alpha > 0$ en daarbij gebruik maken van bovenstaande nodige voorwaarde.

§ 24. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\lim\inf \arg z_t \geqslant \alpha > 0$.

S t e l l i n g: *Een nodige en voldoende voorwaarde, opdat* $\lim\inf_{t \to +\infty} \arg z_t \geqslant \alpha > 0$ *voor ieder beginpunt* z *in* D, *is*: $\eta(z) \to -\infty$, *voor* $z \to \infty$ *in elke hoek* $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha$.

B e w ij s:

N o d i g: Wij zullen eerst bewijzen dat bij ieder positief getal P een getal Q aan te wijzen is zó, dat voor de punten z op de rechte $\arg z = \alpha - \varepsilon$, waarvoor $|z| > Q$, voldaan is aan: $\eta(z) < -P$. Dan is dus bewezen dat $\eta(z) \to -\infty$ voor $z \to \infty$ op de rechte $\arg z = \alpha - \varepsilon$.

Kies daartoe op de x-as een punt x zó, dat $\displaystyle\int_1^x \frac{v}{u^2 + v^2}\,dx > P$, dus $\eta(x) < -P$ (dit is mogelijk volgens § 23). Indien nu $\lim\inf_{t \to +\infty} \arg z_t \geqslant \alpha$, dan is voor voldoend grote $|z|$, de lijn $\arg z = \alpha - \varepsilon$ gelegen in het gebied beneden $T(x)$, dus $\eta(z) < -P$ voor die punten. Men heeft dus $\eta(z) \to -\infty$ voor $z \to \infty$, $\arg z = \alpha - \varepsilon$.

Dat ook geldt: $\eta(z) \to -\infty$, voor $z \to \infty$ in elke hoek $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha$, volgt uit het feit dat $\eta(z)$ op elke verticale rechte in D afneemt, als y afneemt.

V o l d o e n d e: Beschouw een punt z_0 in D. Op $T(z_0)$ is $\eta(z) = C$ (constant). Omdat op de rechte $\arg z = \alpha - \varepsilon$, $\eta(z) \to -\infty$ voor $z \to \infty$, is voor de punten z van die rechte waarvoor $|z|$ voldoende groot is: $\eta(z) < C$, zodat dus die rechte, voor $|z|$ voldoende groot, in het gebied beneden $T(z_0)$ gelegen is. Daaruit volgt:

$$\lim\inf_{t \to +\infty} \arg z_t \geqslant \alpha - \varepsilon. \tag{1}$$

Het getal ε voldoet aan de voorwaarde: $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$, maar is overigens willekeurig. Uit (1) volgt dus:

$$\lim\inf_{t \to +\infty} \arg z_t \geqslant \alpha.$$

Opmerking: Op gelijke wijze als hierboven komt men tot de volgende stelling:

Een nodige en voldoende voorwaarde opdat $\limsup\limits_{t \to +\infty} \arg z_t \leqslant \alpha < 0$ *voor ieder beginpunt z in D, is*: $\eta(z) \to +\infty$, *voor* $z \to \infty$ *in elke hoek* $\frac{\pi}{2} > \arg z \geqslant \alpha + \varepsilon > \alpha$.

§ 25. Een nodige en voldoende voorwaarde voor $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$, $x_t \to \infty$.

Als bijzonder geval van de stelling in § 24 vinden we de volgende nodige en voldoende voorwaarde voor $\lim\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = \frac{\pi}{2}$:

Voor $\lim\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = \frac{\pi}{2}$ *is nodig en voldoende*:

$$\lim_{z \to \infty\ (ang.)} \int_1^z \frac{u\,dy - v\,dx}{u^2 + v^2} = -\infty, \quad m.a.w.: \lim_{z \to \infty\ (ang.)} \eta(z) = -\infty.$$

Bij deze stelling kan $\lim\limits_{t \to +\infty} x_t$ zowel eindig als ∞ zijn.

In § 15, § 16 en § 17 hebben wij nodige en voldoende voorwaarden gegeven voor $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$, terwijl x_t convergeert voor $t \to +\infty$. Wij zullen nu een nodige en voldoende voorwaarde afleiden voor $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$ terwijl $x_t \to +\infty$, voor $t \to +\infty$.

Stelling: *Voor* $\lim \arg z_t = \frac{\pi}{2}$ *en* $x_t \to +\infty$, *is nodig en voldoende*:

$$\lim_{z \to \infty\ (ang.)} \eta(z) = -\infty, \tag{1}$$

terwijl verder:

$$\lim_{y \to +\infty,\ x = const.} \eta(x + yi) > 0 \ (voor\ x > 1). \tag{2}$$

Bewijs: Voor $\lim\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = \frac{\pi}{2}$ is, zoals bewezen is, nodig en voldoende: $\lim\limits_{z \to \infty\ (ang.)} \eta(z) = -\infty$.

Beschouw nu de kromme $T(1)$.

Op $T(1)$ is $\eta(z) = Im. \int\limits_1^z \frac{dz}{w(z)} = 0$; in het gebied boven $T(1)$ is $\eta(z) > 0$.

Neemt men nu aan, dat op $T(1): x_t \to \infty$ voor $t \to \infty$, dan ligt iedere verticale rechte, voor y voldoende groot en $x > 1$, in het gebied boven $T(1)$.

Op iedere verticale rechte is $\eta(z)$ toenemend met y. Bijgevolg is aan de voorwaarde (2) voldaan.

Is omgekeerd aan de voorwaarde (2) voldaan, dan is, mede in verband met (1), te bewijzen, dat $x_t \to +\infty$. Uit (2) volgt nl. dat iedere verticale rechte: $x = \text{constant}$, $x > 1$, voor y voldoende groot in het gebied boven $T(1)$ gelegen is. Omdat $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$, volgt hieruit dat op $T(1)$ (dus op iedere $T(z)$) $x_t \to +\infty$ als $t \to +\infty$.

O p m e r k i n g: In bovenstaande stelling mogen wij de voorwaarde (2) vervangen door:

$$\lim_{y\to\infty,\ x=\text{constant}} \eta\,(x+yi) \textit{ is niet afnemend met } x.$$

Het bewijs hiervan volgt uit § 17: „Gevolg”.

V o o r b e e l d: Wij beschouwen nogmaals het voorbeeld door ons in § 18 behandeld:

$$\frac{dz}{dt} = 2\, e^{i\,\pi/4} \sqrt{z}.$$

Gebleken is reeds, dat $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$ en $x_t \to +\infty$ als $t \to +\infty$.

Dit is ook af te leiden met bovenstaand criterium:

$$\eta(z) = Im. \int_1^z \frac{dz}{w(z)} \sim Im. \frac{\sqrt{z}}{e^{i\,\pi/4}} = \sqrt{\rho}\,\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \text{ als } z = \rho\, e^{i\theta}.$$

Dus $\eta(z) \to -\infty$ als $z \to \infty$ (angulair), dus $\arg z_t \to \frac{\pi}{2}$.

Als $z \to \infty$ over een verticale rechte zó, dat $y \to +\infty$, dan heeft men:

$$\eta(z) = \sqrt{\rho}\,\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \to \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ (want } \rho \sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{x \sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta} \to 0\text{)},$$ dus $x_t \to +\infty$, zowel volgens bovenstaande stelling, als volgens de voorwaarde genoemd in bovenstaande opmerking.

Wij merken nog op dat bij dit voorbeeld ook $\eta(z) \to -\infty$ als $z \to \infty$ over een verticale rechte zó, dat $y \to -\infty$. Dit is in overeenstemming met het feit dat iedere kromme $T(z)$ een eindpunt op de y-as heeft (zie fig. 5), zodat iedere verticale rechte voor $y < 0$ en $|y|$ groot genoeg, in het gebied beneden $T(z)$ ligt. Dit is niet het geval met het voorbeeld van § 15 (zie fig. 4). Men heeft daar: $\eta(x - \infty i) = -x +$ constante $> -\infty$.

Opmerking: Voor $\lim\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_t \to +\infty$, kan men, op gelijke wijze als hierboven, de volgende nodige en voldoende voorwaarde afleiden:

Voor $\lim\limits_{t \to +\infty} \arg z_t = -\dfrac{\pi}{2}$ *en* $x_t \to +\infty$ *is nodig en voldoende*:

$$\lim_{z \to \infty\ (ang.)} \eta(z) = +\infty \tag{1}$$

terwijl verder: $$\lim_{y \to -\infty,\ x = constant} \eta(x + yi) < 0 \ (voor\ x > 1). \tag{2}$$

De voorwaarde (2) mag vervangen worden door:

$$\lim_{y \to -\infty,\ x = constant} \eta(x + yi) \ \textit{is niet toenemend met } x. \tag{3}$$

Als voorbeeld van dit geval kan dienst doen: $\dfrac{dz}{dt} = 2\, e^{-\pi i/4} \sqrt{z}$.

We krijgen dan iets dergelijks als bij het vorige geval.

Wij geven nog een ander voorbeeld:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 - i\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Binnen een hoek: $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ is:

$\displaystyle\int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \int_1^z \frac{\sqrt{z}}{1 - i\sqrt{z}}\, dz \sim -\frac{z}{i} = ix - y$, dus aan voorwaarde (1) wordt voldaan.

Verder is: $\dfrac{\sqrt{z}}{1 - i\sqrt{z}} = i + \dfrac{1}{\sqrt{z} + i}$. Op een verticale rechte is het reële deel van $\dfrac{1}{\sqrt{z} + i}$, voor $y \to -\infty$, gelijkwaardig met $\dfrac{1}{\sqrt{-2y}}$

zodat $\lim\limits_{y \to -\infty,\ x = constant} \eta(z) = -\infty$. Aan voorwaarde (2) (en ook aan (3)) is dus voldaan, zodat men heeft:

$$\lim_{t \to +\infty} \arg z_t = -\frac{\pi}{2} \text{ en } x_t \to +\infty.$$

Dit resultaat is ook als volgt af te leiden:

$$w(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} - i.$$

$\int\limits_{-\infty \atop over\ x = const.} u dy \sim \int\limits_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{-2y}} dy = +\infty$, zodat in verband met de stelling op blz. 30, $x_t \to +\infty$ als $t \to +\infty$. Verder heeft men voor $x > 0$, dat $\arg w(z) \to -\frac{\pi}{2}$, uniform, als $y \to -\infty$. Daaruit kan men direct afleiden, dat op iedere kromme $T(z)$, $\arg z_t \to -\frac{\pi}{2}$, (zie Opmerking in § 2).

HOOFDSTUK IV.

GEDRAG VAN z_t VOOR $t < 0$.

§ 26. Het geval $x_t \to c(z) > 0$, voor $t \to -\infty$.

Reeds in § 15 is ons gebleken, dat de krommen $T(z)$ op verschillende wijze tegen de y-as kunnen „stoten". Bij het aldaar behandelde voorbeeld: $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} + i$, komen ook krommen voor, welke de y-as niet bereiken (zie fig. 4). Op deze krommen heeft men: $y_t \to -\infty$, voor $t \to -\infty$.

Bij het geval: $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} - i$, zullen op gelijke wijze krommen gevonden worden, die de y-as niet bereiken en waarop: $y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$.

Heeft men dat op één kromme $T(z)$: $x_t \to c > 0$, $y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$, dan volgt daaruit dat er een gebied is in D, bestaande uit zulke krommen $T(z)$. Immers we zien direct dat de krommen behorende bij punten in het gebied boven eerstgenoemde $T(z)$, de y-as niet kunnen bereiken. Het is duidelijk dat deze krommen een asymptoot hebben aan de linkerkant.

J. Wolff heeft de volgende nodige en voldoende voorwaarde voor het optreden van deze gevallen gegeven [1]:

Een nodige en voldoende voorwaarde, opdat een kromme $T(z)$ een verticale asymptoot aan de linkerkant heeft ($x = c > 0$) (waaruit het bestaan van een gebied $\triangle$ van zulke krommen volgt), is de convergentie van $\int^{\infty} u dy$ (of van $\int_{-\infty} u dy$) over één verticale rechte in D (waaruit de convergentie op alle verticale rechten in D volgt) en verder, dat de limiet b van $v(z)$, voor $x > 0$ en $y \to +\infty$ (resp. voor $y \to -\infty$), waarvan het bestaan door bovenstaande convergentie van $\int^{\infty} u dy$ (resp. *$\int_{-\infty} u dy$*) *verzekerd is, negatief (resp. positief) is.*

[1]) Comp. Math. Vol. 6 fasc. 2 blz. 303.

In $\triangle$ *heeft men dan, als* $t \to -\infty$:

$$y_t \to -\infty \text{ als } b > 0.$$
$$y_t \to +\infty \text{ als } b < 0.$$

Het bewijs van deze stelling is nagenoeg gelijk aan dat van de soortgelijke stelling, behandeld in § 15.

Een 2de nodige en voldoende voorwaarde voor $x_t \to c > 0$ als $t \to -\infty$, is af te leiden met behulp van de functie $\eta(z) = Im. \int\limits_1^z \frac{dz}{w(z)}$:

Een nodige en voldoende voorwaarde opdat $x_t \to C(z) > 0$, $y_t \to +\infty$, *als* $t \to -\infty$, *voor één punt* z *in* D *(waaruit het bestaan van een gebied* $\triangle$ *van zulke punten volgt), is:*

dat er 2 waarden van x *zijn,* c *en* d $(0 < c < d)$

zodat:
$$\lim_{y \to +\infty} \eta(c + yi) < \lim_{y \to +\infty} \eta(d + yi). \tag{1}$$

Het bewijs van deze stelling is gelijk aan dat van de stelling in § 17 (met verandering van enige ongelijkheidstekens).

Voor het in het begin van deze § genoemde voorbeeld: $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} - i$, is $\eta(x + \infty i) = x +$ constante, zodat aan de voorwaarde (1) voldaan is.

In aansluiting op bovenstaande 2de nodige en voldoende voorwaarde, behandelen we 2 stellingen:

Stelling 1: *Als voor 2 waarden van* x: c *en* d $(0 < c < d)$, *voldaan is aan de voorwaarde:*

$$\eta(c + \infty i) < \eta(d + \infty i), \tag{1}$$

dan is $\eta(x + \infty i)$ *een toenemende functie van* x.

Bewijs: Uit het gegeven (1) volgt:

$$\eta(c + \infty i) < \infty, \text{ dus } \underset{\text{over } x = c}{\int\limits_0^\infty \frac{u\,dy}{u^2 + v^2}} < \infty.$$

Daar $\frac{u}{u^2 + v^2}$ het reële deel van $\frac{1}{w(z)}$ is, volgt hieruit:

$$\int\limits_0^\infty \frac{u\,dy}{u^2 + v^2} < \infty \text{ over iedere verticale rechte (zie blz. 30 Opm. 1),}$$

dus
$$\eta(x + \infty i) < \infty, \text{ voor } x > 0. \tag{2}$$

Stel nu: $0 < x_1 < x_2$, dan zijn er 3 mogelijkheden:

I $\eta(x_1 + \infty i) > \eta(x_2 + \infty i)$,

II $\eta(x_1 + \infty i) = \eta(x_2 + \infty i)$,

III $\eta(x_1 + \infty i) < \eta(x_2 + \infty i)$.

I vervalt wegens § 17 „Gevolg"; dit laatste is nl. in strijd met het gegeven (1).

II vervalt eveneens. Immers in elk gebied $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ 0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$

is, volgens (2), $\eta(z)$ begrensd, zodat uit II zou volgen: $\eta(x + \infty i) =$ constant, voor $x > 0$, hetgeen in strijd is met (1).

Rest dus: III. Q.E.D.

S t e l l i n g 2: *Als op één kromme* $T(z)$: $x_t \to c > 0$, $y_t \to +\infty$, *voor* $t \to -\infty$, *dan is elke verticale rechte in D asymptoot aan de linkerkant van een zodanige kromme* $T(z)$.

B e w ij s: Stel $\delta > 0$ en $\eta(\delta + \infty i) = p$.

Uit het gegeven volgt, in verband met bovenstaande stelling 1, dat $\eta(x + \infty i)$ toenemend is met x en dat $p < \infty$.

Bijgevolg is het dus mogelijk in het gebied $x > \delta$, een punt z te vinden, zodat $\eta(z) = p$.

De bijbehorende kromme $T(z)$, waarop $\eta(z) = p$, heeft de rechte $x = \delta$ tot asymptoot. Immers op de rechte $x = \delta$ is $\eta(\delta + iy)$ afnemend als y afneemt, dus $\eta(\delta + iy) < p$. De lijn $x = \delta$ ligt dus in het gebied beneden $T(z)$, zodat noodzakelijk op $T(z)$: $y_t \to +\infty$ als $t \to -\infty$.

Stel nu dat op $T(z)$: $\lim\limits_{t \to -\infty} x_t = \mu > \delta$ en dat G het gebied is begrensd door $x = \delta$, $T(z)$ en een rechte welke 2 punten van die lijnen verbindt.

Omdat $\eta(z)$ begrensd is in G, heeft men nu:

$$\eta(z) \to p, \text{ als } z \to \infty \text{ in } G.$$

Dit is in strijd met het toenemen van $\eta(x + \infty i)$ als x toeneemt. Daaruit volgt dus dat de rechte $x = \delta$ asymptoot is van $T(z)$, waarmede de stelling bewezen is.

O p m e r k i n g: Op gelijke wijze als hierboven, komt men tot deze nodige en voldoende voorwaarde voor $x_t \to c > 0$, $y_t \to -\infty$ als $t \to -\infty$:

Een nodige en voldoende voorwaarde opdat $x_t \to C(z) > 0$, $y_t \to -\infty$, *als* $t \to -\infty$, *voor één punt* z *in* D (*waaruit het bestaan van een gebied* $\triangle$ *van zulke punten volgt*), *is*:

dat er 2 waarden van x *zijn,* c *en* d $(0 < c < d)$ *zodat*

$$\lim_{y\to-\infty} \eta(c+yi) > \lim_{y\to-\infty} \eta(d+yi).$$

Voor het voorbeeld $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{z} + i$ (zie fig. 4) is $\eta(x - \infty i) = -x +$ constante, zodat aan bovenstaande voorwaarde voldaan is.

Wij kunnen, zoals duidelijk is, gelijk hierboven, stellingen 1 en 2 afleiden. Wij komen dan tot dergelijke resultaten.

§ 27. Over de functie $\eta(z)$.

Voor het onderzoek naar de andere manieren waarop de krommen $T(z)$ tegen de y-as kunnen „stoten", is het noodzakelijk dat wij de functie

$$\eta(z) = Im. \int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \int_1^z \frac{udy - vdx}{u^2+v^2}$$

nader beschouwen.

Deze functie heeft ons in het voorgaande reeds vele diensten bewezen. Wij herinneren aan 2 daarvan en leiden daaruit enkele gevolgtrekkingen af:

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Op elke } T(z) \textit{ heeft men:}\\ x_t \to c_1(z) < \infty,\ y_t \to +\infty\\ \textit{voor } t \to +\infty.\end{array}\right\} \rightleftarrows \begin{array}{c}\eta(x+\infty i) \textit{ is afnemend}\\ \textit{als } x \textit{ toeneemt. } (\S\ 17).\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Op elke } T(z) \textit{, van een deelge-}\\ \textit{bied } \triangle \textit{ van } D\textit{, heeft men:}\\ x_t \to c_2(z) > 0,\ y_t \to +\infty\\ \textit{voor } t \to -\infty.\end{array}\right\} \rightleftarrows \begin{array}{c}\eta(x+\infty i) \textit{ is toenemend als}\\ x \textit{ toeneemt } (\S\ 26).\end{array}$$

G e v o l g 1: *Indien voor géén* z *in* D:

$$x_t \to c_1 < \infty,\ y_t \to +\infty,\ t \to +\infty$$

of

$$x_t \to c_2 > 0,\ y_t \to +\infty,\ t \to -\infty,$$

dan is $\eta(x + \infty i)$ *onafhankelijk van* x, *en omgekeerd.*

V o o r b e e l d: $\dfrac{dz}{dt} = z$, $\eta(x + \infty i) = \dfrac{\pi}{2}$.

G e v o l g 2: *Het is onmogelijk dat op een kromme* $T(z)$:

$$x_t \to c_1 < \infty,\ y_t \to +\infty,\ t \to +\infty$$

en $$x_t \to c_2 > 0,\ y_t \to +\infty,\ t \to -\infty.$$

of ook:

Het is onmogelijk dat bij een zelfde functie (van de door ons beschouwde klasse) krommen voorkomen waarop: $x_t \to c_1 < \infty$, $y_t \to +\infty$, *als* $t \to +\infty$ *en krommen waarop* $x_t \to c_2 > 0$, $y_t \to +\infty$, *als* $t \to -\infty$.

Tot het gevolg 2, kunnen we ook op andere wijze komen. Wij vinden dan nog een iets algemener resultaat:

Het is onmogelijk dat op een kromme $T(z)$:

$$x_t \to c_1 < \infty,\ y_t \to +\infty,\ \text{als } t \to +\infty$$

en $$x_t \to c_2 \geqslant 0,\ y_t \to +\infty,\ \text{als } t \to -\infty.$$

B e w ij s: Stel dat op een kromme $T(z)$:

$$x_t \to c_1 < \infty,\ y_t \to +\infty,\ \text{als } t \to +\infty$$

en $$x_t \to c_2 \geqslant 0,\ y_t \to +\infty,\ \text{als } t \to -\infty.$$

Beschouw in het gebied G boven $T(z)$, de harmonische functie van z:

$$\lim_{t \to +\infty} x_t.$$

Deze is begrensd in G (nl. $\leqslant c_2$) en op $T(z)$ gelijk aan c_2. Bijgevolg is de functie constant in G, hetgeen in strijd is met het gevondene in §15.

O p m.: Het is duidelijk dat ook de andere redactie van Gevolg 2 (iets uitgebreid) geldig is. We zullen daarvan gebruik maken in § 29.

Wij vermelden nu nog enkele eigenschappen van de harmonische functie $\eta(z)$.

I. *Voor iedere reële waarde van y bestaat* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = constant}} \eta(x + iy)$ [1].

De limietfunctie zullen we $\varphi(y)$ noemen.

II. $\varphi(y)$ *is een monotoon niet afnemende functie van* y.

Dit is duidelijk, want $\eta(x + iy)$ is toenemend met y op iedere verticale rechte in D.

[1]) Zie J. W o l f f. Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XVIII, 2e stuk, blz. 20.

III. *$\varphi(y)$ is zodanig dat de Stieltjes integraal* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(y)}{y^2+1}$ *convergeert* [1]).

IV. *De functie* $\frac{1}{w(z)}$ *kan worden voorgesteld door de formule:*

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{z - iy} + \frac{1}{1 + iy} \right\} d\varphi(y) + \lambda_1 z + \mu,$$

waarbij de integraal te nemen is in den zin van Stieltjes en $\varphi(y)$ de functie is, ingevoerd onder I. λ_1 en μ zijn constanten, waarbij λ_1 de angulaire afgeleide van $\frac{1}{w(z)}$ *is, in het punt oneindig* [1]).

Bovenstaande eigenschappen zullen in § 28 en § 29 toegepast worden.

De functie $\xi(z) = R.d. \int_1^z \frac{dz}{w(z)}$ is van belang voor het bepalen van de tijd waarop de krommen $T(z)$ de y-as bereiken. Immers voor de functie

$$\zeta(z) = \xi(z) + i\,\eta(z). \text{ geldt op } T(z):$$

$$\zeta(z_t) = \zeta(z_0) + t \qquad \text{(zie § 3)}$$

dus

$$\xi(z_t) = \xi(z_0) + t.$$

Op $T(z)$ is $\eta(z)$ constant. Door de univalente functie $\zeta(z)$ (zie § 3) wordt dus het gebied D afgebeeld op een gebied H, zodanig dat de krommen $T(z)$ tot beeld hebben rechten of halfrechten $\eta = \text{const.}$, naar gelang z_t de grens van D bereikt op een oneindige of eindige negatieve tijd.

§ 28. De gevallen $z_t \to iy$, $|y| < \infty$.

De monotoon niet afnemende functie $\varphi(y)$, gedefinieerd op de y-as (zie § 27) is van belang voor het onderzoek naar de manieren waarop de krommen $T(z)$ op de y-as kunnen uitmonden.

J. Wolff is tot de volgende resultaten gekomen:

Geval A: *p is een discontinuïteitspunt van $\varphi(y)$.*

---

[1]) Zie J. Wolff en F. de Kok. Bull. de la Soc. math. de France, 60, III—IV, 1932, p. 225.

D bevat een gebied $\triangle_p$ bestaande uit krommen die in ip uitmonden voor $t \to -\infty$. Op elke kromme nadert het argument van $z - ip$ tot een limiet, welke op de verschillende krommen van $\triangle_p$ varieert van $-\frac{\pi}{2}$ tot $+\frac{\pi}{2}$. Voor z in $\triangle_p$ heeft men: $w(z_t) \to 0$ als $t \to -\infty$.

Het gebied H waarop D door de functie $\zeta(z)$ wordt afgebeeld, (zie § 27) bevat een strook van rechten: $\eta(z) =$ constant, $\varphi(p - 0) \leqslant \eta \leqslant \varphi(p + 0), -\infty < \xi < +\infty$, welke de beelden zijn van de krommen $T(z)$ die in ip uitmonden.

G e v a l B: *q is een continuïteitspunt van $\varphi(y)$, dat niet het uiteinde is van, of gelegen is in een interval waar $\varphi(y)$ constant is.*

In iq mondt één kromme $T(z)$ uit, voor $t = -\infty$ of voor t eindig negatief, naar gelang de integraal:

$$\int_0^1 \frac{u(x + iq)}{|w(x + iq)|^2} dx$$

divergeert of convergeert.

G e v a l C. *Er is een eindig interval I op de y-as, waarvan $\underline{im}$ en $\underline{in}$ de uiteinden zijn, zodat $\varphi(y)$ constant is voor $m < y < n$.*

Uit het feit dat $\zeta(z)$ over I kan worden voortgezet (dus ook $\left.\frac{1}{w(z)}\right)$ is af te leiden:

Als een kromme $T(z)$ haar eindpunt heeft in een inwendig punt ir van I, dan is ir enkelvoudige pool van $w(z)$ en omgekeerd. $w(z)$ kan hoogstens één pool hebben op I. De raaklijn aan $T(z)$ in ir heeft de horizontale richting en ir wordt bereikt op een tijdstip, dat negatief eindig is.

Verder is af te leiden: Is in m (of n) $\varphi(y)$ continu, dan is im (resp. in) eindpunt van een kromme $T(z)$ als $v(z)$ op I, in de omgeving van im (resp. in), *negatief* (resp. *positief*) is. $w(z)$ heeft dan geen pool op I. Zijn m en n beide continuïteitspunten van $\varphi(y)$, dan mondt op het segment I ($m \leqslant y \leqslant n$) steeds één en niet meer dan één kromme uit, steeds op een eindig negatief tijdstip.

Het geval dat m en (of) n discontinuïteitspunten zijn, is vermeld onder A.

Voor de bewijzen: zie Compositio Math. Vol. 6, fasc. 2 blz. 301—302).

Wij volstaan met het geven van enige voorbeelden. Wij construeren allereerst een voorbeeld behorende bij een geval genoemd onder C.

We beginnen met $\varphi(y)$ aan te nemen op de y-as.

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(y) = 0, & \text{voor} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ \varphi(y) = y - 1, \text{voor} & y > 1 \\ \varphi(y) = y + 1, \text{voor} & y < -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \varphi(y) \text{ monotoon toenemend,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(y)}{y^2+1} \text{ convergent (zie III § 27),} \\ \varphi(y) \text{ constant op } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ \quad \text{en continu in de uiteinden.} \end{array}$$

Wij trachten een functie $\dfrac{1}{w(z)}$ te vinden met positief reëel deel, zodat $Im. \displaystyle\int_1^z \frac{dz}{w(z)}$ de goede randwaarden heeft. Wij merken op dat meerdere oplossingen voor $\dfrac{1}{w(z)}$ gevonden kunnen worden (men ziet bijvoorbeeld onmiddellijk dat de oplossingen, die in de cofactor van de term $\lambda_1 z$ verschillen (zie IV § 27) toch aanleiding geven tot dezelfde randwaarden van $Im. \left(\displaystyle\int_1^z \frac{dz}{w(z)}\right)$. Wij zoeken een oplossing voor $\dfrac{1}{w(z)}$ waarbij $\lambda_1 = 0$.

Wij beschouwen eerst het gedeelte zonder z, in de formule:

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-iy} + \frac{1}{1+iy}\right)d\varphi(y) + \mu.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi(y)}{1+iy} = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\left\{\frac{1}{1+iy} + \frac{1}{1-iy}\right\}dy = \tfrac{1}{2}.$$

Wij nemen dus: $\displaystyle\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-iy}\,d\varphi(y) + \mu_1.$

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\left\{\frac{1}{z+iy} + \frac{1}{z-iy}\right\}dy + \mu_1$$

$$= \mu_2 - \frac{i}{\pi}\log\frac{z-i}{z+i}.$$

Bepaling van μ_2:

$$\zeta(z) = \int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \mu_2 z \Big|_1^z + \frac{i}{\pi} \{(z+i)\log(z+i) - (z-i)\log(z-i)\}\Big|_1^z$$

Stel $\mu_2 = \alpha + i\beta$.

$$\eta(z) = \alpha y + \beta x - \beta + \frac{x}{\pi}\log\left|\frac{z+i}{z-i}\right| - \frac{y}{\pi}\{arg\,(z+i) - arg\,(z-i)\} + \frac{arg\,(z+i) + arg\,(z-i)}{\pi}.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Voor} & -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ is} & \varphi(y) = \alpha y - \beta - 1 \equiv 0 \\ \text{Voor} & y > 1 \text{ is} & \varphi(y) = \alpha y - \beta - 1 \equiv y - 1 \\ \text{Voor} & y < -1 \text{ is} & \varphi(y) = \alpha y - \beta + 1 \equiv y + 1 \end{array}\right\} \text{dus } \alpha = 1,\ \beta = 0.$$

dus:
$$\frac{1}{w(z)} = 1 - \frac{i}{\pi}\log\frac{z-i}{z+i}, \tag{1}$$

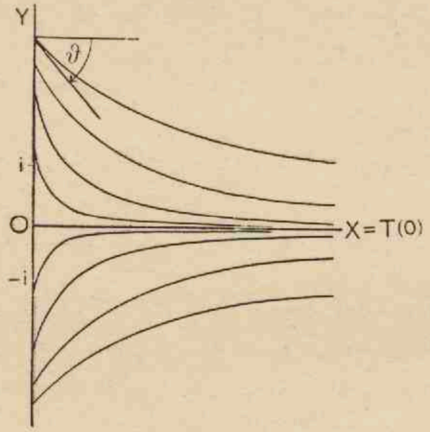
$$\eta(z) = y + \frac{x}{\pi}\log\left|\frac{z+i}{z-i}\right| - \frac{y+1}{\pi}\,arg\,(z+i) + \frac{y-1}{\pi}\,arg\,(z-i). \tag{2}$$

Op de x-as is $\eta(z) = 0$, dus de x-as is een $T(z)$ welke uitmondt in het punt O. O is een enkelvoudig nulpunt van $\frac{1}{w(z)}$ (zie (1), $\left(\frac{d\frac{1}{w}}{dz}\right)_{z=0} \neq 0$), dus O is een enkelvoudige pool van $w(z)$, in overeenstemming met het vermelde onder geval C. Er is geen andere kromme welke uitmondt op de y-as in een punt van het segment $\overline{I}$ (waarop $-1 \leqslant y \leqslant 1$). Immers op de krommen in het gebied boven de x-as is $\eta(z) > 0$, op die daar beneden is $\eta(z) < 0$, zodat geen van die krommen kan uitmonden op de y-as, in een punt van $\overline{I}$, ook niet in i of $-i$. Dit laatste is in overeenstemming met het feit dat op I, in de omgeving van i, $v(z)$ negatief is, in de omgeving van $-i$, $v(z)$ positief is. Dit is af te leiden uit:

$$Im.\frac{1}{w(z)} = -\frac{v}{u^2+v^2} = -\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{z-i}{z+i}\right|.$$

In fig. 11 zijn enige krommen getekend.

Voor punten met dezelfde x en tegengestelde y, is $\eta(z)$ tegengesteld (zie (2)). Het halfvlak D wordt dus door de x-as verdeeld in 2 delen zó, dat bij spiegeling t.o.v. de x-as van krommen $T(z)$ in het ene deel, krommen in het andere deel verkregen worden. Van de functie $w(z)$ is de *ang.* afgeleide in het punt oneindig, gelijk aan nul, zodat op alle krommen, $arg\, z_t$ tot dezelfde limiet (nul) convergeert als $t \to +\infty$.



Figuur 11.

De hoek θ (zie fig. 11), waaronder de krommen de y-as snijden, wordt bepaald met:

$$tg(arg\, w(z)) = \frac{v}{u} = -\frac{-\frac{1}{\pi} log \left|\frac{z-i}{z+i}\right|}{1+\frac{1}{\pi} arg \frac{z-i}{z+i}} \to \frac{1}{\pi} log \frac{y-1}{y+1}, \text{ als } x \to 0,\ y > 1.$$

dus voor $y > 1$ is: $tg\, \theta = \frac{1}{\pi} log \frac{y-1}{y+1}$

$$\theta \to 0, \text{ als } y \to +\infty.$$

$$\theta \to -\frac{\pi}{2}, \text{ als } y \to +1,\ y > +1.$$

Opmerking: Bovenstaand voorbeeld illustreert ook het geval B : $\varphi(y)$ is continu en niet constant voor $y > 1$ en $y < -1$. In ieder punt van de y-as (waarvoor $y > 1$ of $y < -1$) mondt één kromme $T(z)$ uit. Alle krommen bereiken de y-as op een tijdstip dat negatief eindig is:

$$\int_0^1 \frac{u(x+iq)}{|w(x+iq)|^2} dx = \int_0^1 \left\{1 + \frac{1}{\pi} arg \frac{z-i}{z+i}\right\} dx \text{ (convergent).}$$

2e voorbeeld: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3z^2+1}{z^3+z}$.

$$\zeta(z) = \int_1^z \frac{z^3+z}{3z^2+1}\,dz = \tfrac{1}{6}z^2 + \tfrac{1}{9}\log(3z^2+1) + \text{constante.}$$

$$\eta(z) = \tfrac{1}{3}xy + \tfrac{1}{9}\{\arg(z+\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}) + \arg(z-\tfrac{1}{3}i\sqrt{3})\} + \text{const.} \quad (1)$$

$$\xi(z) = \tfrac{1}{6}(x^2-y^2) + \tfrac{1}{9}\log|3z^2+1| + \text{const.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(y) = \dfrac{\pi}{9} + \alpha, & \text{voor } y > \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ \varphi(y) = 0 + \alpha, & \text{voor } -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} < y < \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ \varphi(y) = -\dfrac{\pi}{9} + \alpha, & \text{voor } y < -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \end{array}\right\} \alpha = \text{const.}$$

Polen van de functie $w(z) = \dfrac{3z^2+1}{z^3+z}$ op de y-as: i, 0 en $-i$.

De 3 krommen die uitmonden in resp. i, 0 en $-i$, zijn de enige krommen die uitmonden op de y-as in een punt waarvoor $y \neq \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$. De raaklijnen aan die krommen, in de eindpunten, lopen horizontaal. De x-as is de in O uitkomende kromme.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Als } z \to i, & \text{dan } \xi(z) \to -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9}\log 2 + \beta \\ \text{Als } z \to 0, & \text{dan } \xi(z) \to \beta \\ \text{Als } z \to -i, & \text{dan } \xi(z) \to -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9}\log 2 + \beta \end{array}\right\} |\beta| < \infty.$$

Bovengenoemde krommen bereiken dus de y-as op eindig negatief tijdstip.

$\varphi(y)$ heeft 2 discontinuïteitspunten: $\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$ en $-\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$. Er is dus een verzameling van krommen, die hun eindpunt hebben in $\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$ of $-\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$. (zie geval A). Als $z \to +\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$ of $z \to -\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$, heeft men: $\xi(z) \to -\infty$. De krommen die in $+\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$ of $-\tfrac{1}{3}i\sqrt{3}$ uitmonden, bereiken die punten voor $t = -\infty$.

Men heeft verder: $\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{v}{|w|^2}$ $\left(\text{want } \dfrac{d\zeta}{dz} = \dfrac{\partial\xi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)$.

Op de y-as is $v = \dfrac{-3y^2+1}{y^3-y}$.

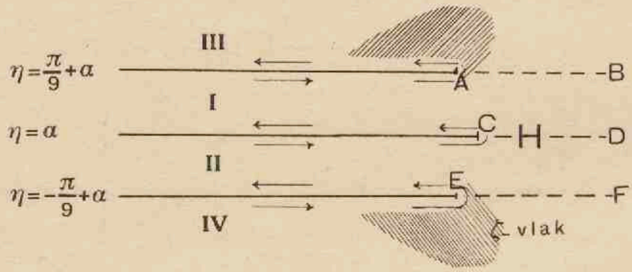
Dus op de y-as is ξ toenemend met y op de intervallen:

$$y < -1, \quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} < y < 0, \; \tfrac{1}{3}\sqrt{3} < y < 1$$

en afnemend voor:

$$-1 < y < -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \; 0 < y < \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \; y > 1.$$

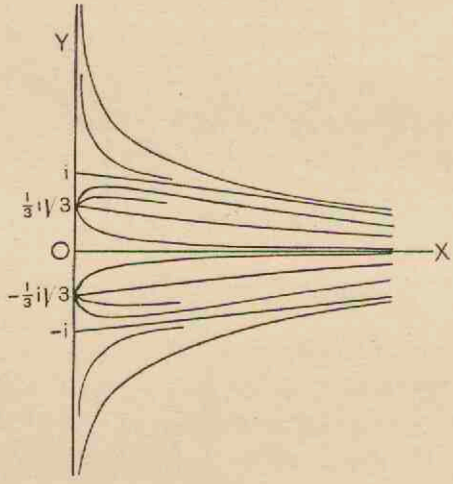
Wij kunnen nu met het bovenstaande gemakkelijk afleiden hoe de afbeelding is van D, door de functie $\zeta(z)$. (Zie fig. 12).



Figuur 12.

De halfrechten AB, CD en EF zijn de beelden van de krommen die uitmonden resp. in i, 0 en $-i$.

De rechten $\eta =$ constant in I en II zijn de beelden van de krommen die uitmonden in resp. $\frac{1}{3}i\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{3}i\sqrt{3}$, voor $t = -\infty$.



Figuur 13.

De rechten $\eta =$ constant in III en IV zijn de beelden van krommen welke de y-as niet bereiken. De krommen behorende bij III liggen in het gebied boven $T(i)$, zodat op die krommen voor $t \to -\infty$: $y_t \to +\infty$. In verband met (1) volgt hieruit dat $x_t \to 0$.

De krommen in het gebied boven $T(i)$ (en evenzo die in het gebied beneden $T(-i)$) hebben de y-as tot asymptoot aan de linkerkant.

In fig. 13 zijn enige krommen getekend.

Daar de angulaire afgeleide van $w(z)$, in het punt oneindig, gelijk is aan nul, en de x-as een kromme $T(z)$ is, heeft men op elke $T(z)$: $\arg z_t \to 0$ als $t \to +\infty$. Ook hier is de figuur symmetrisch t.o.v. de x-as.

§ 29. Het geval $x_t \to 0$, $y_t \to \infty$ voor $t \to -\infty$.

Bij het 2e voorbeeld van § 28 komen krommen voor welke de y-as als asymptoot aan de linkerkant hebben. De volgende stelling geeft een nodige en voldoende voorwaarde voor het optreden van dit geval:

Stelling (Wolff): *Een nodige en voldoende voorwaarde opdat 2 krommen $T(z)$, waarop $y_t \to +\infty$ (of $-\infty$) voor $t \to -\infty$, de asymptoot $x = 0$ hebben (waaruit het bestaan van een gebied Δ van zulke krommen volgt) is, dat de functie $\varphi(y)$ op de y-as (zie I § 27), begrensd is naar boven (resp. naar beneden) en dat*

$$\lim_{y \to +\infty,\, x = const.} \eta\,(x + iy) = +\infty \;(resp. \lim_{y \to -\infty,\, x = const.} \eta\,(x + iy) = -\infty),$$

voor $x > 0$. Men heeft dan in $\triangle$ voor $t \to -\infty$:

$$y_t \to +\infty \;\; (resp. \;-\infty).$$

Bewijs: Stel dat op de krommen $T(\alpha)$ en $T(\beta)$: $x_t \to 0$, $y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$, en stel dat β (dus $T(\beta)$) gelegen is in het gebied $\triangle$ boven $T(\alpha)$. Beschouw in Δ de harmonische functie van z: $\lim\limits_{t \to -\infty} x_t$. Deze functie is $\geqslant 0$ in Δ.

Voor $z = \beta$ (in Δ) is de functie nul, dus voor z in Δ is $\lim\limits_{t \to -\infty} x_t \equiv 0$. Elke kromme in Δ heeft dus de y-as tot asymptoot.

Nodig voor het optreden van dit geval is:

a) $\varphi(y)$ *is begrensd naar boven.*

Immers beneden $T(\alpha)$ is $\eta < \eta(\alpha)$, dus $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to 0} \eta\,(x + yi) \leqslant \eta(\alpha)$.

b) $\eta(x + \infty i) = \infty$ *voor* $x > 0$.

Immers volgens § 27: Gevolg 2 (uitgebreid) en § 17 kan $\eta(x+\infty i)$ niet afnemend zijn bij toenemende x, en omdat het gebied boven $T(\alpha)$ bestaat uit krommen waarop $x_t \to 0$, $y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$, kan volgens § 26, $\eta(x + \infty i)$ ook niet toenemend zijn. Gevolg: $\eta(x + \infty i) = C$ (constant), $x \geqslant 0$.

Stel $C < \infty$, dan heeft men wegens de begrensdheid van $\eta(z)$: $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$, wat onmogelijk is.

Dus $\qquad \eta(x + \infty i) = + \infty. \qquad$ Q.E.D.

V o l d o e n d e: Stel $\varphi(y)$ op de y-as begrensd naar boven en $\eta(x + \infty i) = \infty$, $x > 0$.

Volgens dit is het dus mogelijk een punt z in D aan te nemen zó, dat $\eta(z) > \lim\limits_{y \to +\infty} \varphi(y)$. De kromme $T(z)$ zal dus de y-as niet bereiken. Daar $T(z)$ gelegen is in het gebied boven een kromme welke op de y-as uitmondt, heeft men op $T(z) : y_t \to + \infty$.

Dat $x_t \to 0$ voor $t \to -\infty$, volgt uit het feit dat $\eta(x + \infty i) =$ const., voor $x > 0$, zodat niet mogelijk is: $x_t \to c > 0$, $y_t \to + \infty$ voor $t \to -\infty$ (zie § 26).

O p m e r k i n g 1. Als op de y-as voor $y > y_1 : \varphi(y) = C$ (const.) en als op één kromme $T(\beta)$: $x_t \to 0$, $y_t \to + \infty$ voor $t \to -\infty$ dan is te bewijzen dat er een gebied Δ is, bestaande uit dergelijke krommen. Immers op $T(\beta)$ is $\eta(z) > C$. Beschouwt men een punt α zó, dat $C < \eta(\alpha) < \eta(\beta)$, dan ziet men direct dat ook op $T(\alpha)$: $x_t \to 0$, $y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$, zodat men dan in het geval van bovenstaande stelling is.

O p m e r k i n g 2: Als men op één kromme $T(z)$ heeft: $x_t \to 0$, $y_t \to + \infty$ voor $t \to -\infty$, dan kan men niet de gevolgtrekking maken dat er dan een gebied Δ is, bestaande uit dergelijke krommen. Het volgende voorbeeld toont dit aan:

Beschouw op $x = 0$ de monotone functie: $\varphi(y) = -1$, $-\infty < y \leqslant 1$ en $\varphi(y) = -\dfrac{1}{y}$, $1 \leqslant y < \infty$.

Volgens de formule in IV § 27, is

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2(z - ti)} + \lambda_1 z + \mu. \quad \text{Neem} \quad \lambda_1 = 0.$$

Men vindt $\displaystyle \frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z} - \frac{\pi}{2z^2} + \frac{i}{z^2} \log (z - i) \right] + \mu.$

$$\zeta(z) = \int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \mu(z - 1) + \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - 1 \right) - \frac{i}{\pi z} \log (z - i) + \frac{i}{\pi} \log (1 - i) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \log \frac{z - i}{1 - i}.$$

Stel $\mu = \alpha + i\beta$.

$$\zeta(z) = (\alpha + i\beta)(x + iy) - (\alpha + i\beta) + \frac{x - iy}{2(x^2 + y^2)} - \tfrac{1}{2} +$$

$$- \frac{i(x - iy)}{\pi(x^2 + y^2)} \left\{ \tfrac{1}{2} \log [x^2 + (y - 1)^2] + i \arg (z - i) \right\} + \frac{i}{\pi} \left\{ \tfrac{1}{2} \log 2 - i \frac{\pi}{4} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \log [x^2 + (y - 1)^2] + i \arg (z - i) - \frac{1}{2} \log 2 + i \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (1)$$

$$\eta(z) = \alpha y + \beta x - \beta - \frac{y}{2(x^2 + y^2)} - \frac{x \log [x^2 + (y - 1)^2]}{2\pi (x^2 + y^2)} +$$

$$- \frac{y \arg (z - i)}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{\log 2}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \arg (z - i) + \tfrac{1}{4}. \quad (2)$$

Als $x \to 0$, $y > 1$ dan $\varphi(y) = \alpha y - \beta + \tfrac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2\pi} - \dfrac{1}{y} \equiv - \dfrac{1}{y}$.

Hieruit volgt: $\alpha = 0$, $\beta = \tfrac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2\pi}$.

Contrôle: als $x \to 0$, $y < 1$, dan $\varphi(y) = \alpha y - \beta + \dfrac{\log 2}{2\pi} - \tfrac{1}{4} \equiv - 1$.

Uit (2) volgt: $\eta(x + \infty i) = \beta x$. Omdat $\beta > 0$ is $\eta(x + \infty i)$ toenemend met x. Volgens § 26 is er dus een gebied van krommen waarop $x_t \to c(z) > 0$ voor $t \to - \infty$, terwijl $y_t \to + \infty$. $\eta(c + \infty i) = \beta c$ ($c > 0$). De kromme $T(z)$ waarop $\eta(z) = \beta c$ heeft de rechte $x = c$ tot asymptoot (zie het bewijs van Stelling 2 in § 26). De kromme $T(1)$, waarop $\eta(z) = 0$, heeft dus geen asymptoot $x = c > 0$, maar kan ook de y-as niet bereiken omdat $\varphi(y) < 0$. Omdat $T(1)$ gelegen is boven alle T waarop $\eta(z) < 0$ welke hun eindpunten op de y-as hebben (daarvan zijn er oneindig veel, want $\varphi(y)$ is continu en niet constant voor $y > 1$), is de y-as asymptoot van $T(1)$ zó, dat op $T(1)$: $y_t \to + \infty$ voor $t \to - \infty$. Zowel uit het bovenstaande als uit de in het begin van deze paragr. behandelde stelling, volgt dat er maar één kromme van deze soort is.

Men heeft verder: $\eta(x - \infty i) = \beta x - 1$, dus eveneens toenemend met x. Volgens § 17 hebben *alle* $T(z)$ een asymptoot $x = c(z)$ zó, dat op $T(z)$: $y_t \to - \infty$ voor $t \to + \infty$.

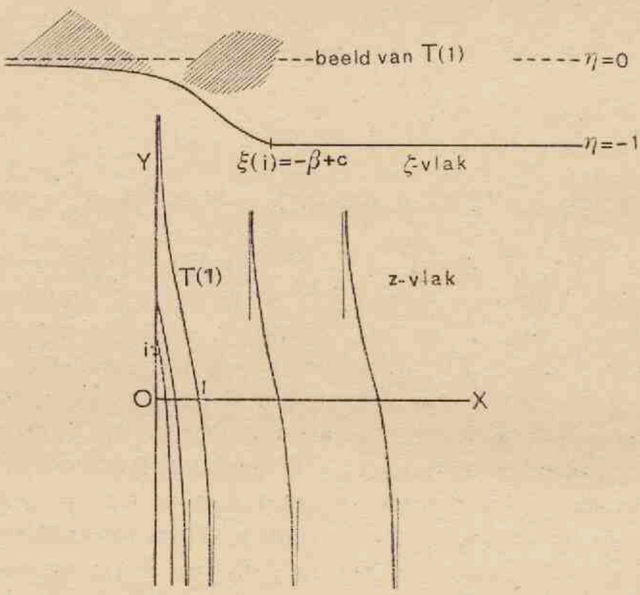
De krommen boven $T(1)$ hebben dus een asymptoot aan de linkerkant en één aan de rechterkant. Zijn deze voor een dergelijke kromme $T(z)$ resp.: $x = x_1$ en $x = x_2$, dan is: $\beta x_1 = \beta x_2 - 1$

dus:
$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\beta}.$$

Voor al die krommen $T(z)$ hebben de 2 asymptoten dezelfde afstand nl.

$$\frac{1}{\beta} = \frac{4\pi}{3\pi + 2\log 2} = 1{,}2..$$

Wij vragen ons tenslotte nog af, of i het eindpunt van een kromme $T(z)$ is. Op deze kromme is dan $\eta(z) = -1$. Uit $\eta(x - \infty i) = \beta x - 1$ volgt, dat de y-as asymptoot aan de rechterkant zou moeten zijn. Bijgevolg is er geen kromme $T(z)$ in D, waarvan het punt i eindpunt is, in overeenstemming met het feit dat $\frac{\partial \xi}{\partial y} < 0$ op de y-as voor $y < 1$, in de buurt van $y = 1$ $\left(\text{dat is af te leiden uit } \frac{\partial \xi}{\partial y} = -Im. \frac{1}{w(z)}\right)$.



Figuur 14.

Wij zien dit ook duidelijk als wij de afbeelding van D door de functie $\zeta(z)$ in het ζ vlak, beschouwen. Uit de uitdrukking voor $\zeta(z)$ (zie (1)) is af te leiden:

$$\xi(iy) = -\beta y + \frac{(y-1)\log|y-1|}{\pi y} + \text{const., voor } y \neq 0,\ y \neq 1.$$

$$\xi(i) = -\beta + \text{const.}$$

$$\xi(0) = +\frac{1}{\pi} + \text{const.}$$

Hieruit volgt dat $\xi(iy)$ een continue functie van y is.

$$\xi(i\,\infty) = -\infty, \text{ want } \beta > 0.$$

$$\xi(-i\,\infty) = +\infty.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\beta + \frac{y + \log|y-1|}{\pi y^2}.$$

Men heeft dus op de y-as:

Voor $-\infty < y < 1$: $\eta(iy) = -1$, $\xi(iy)$ afnemend van $+\infty$ tot $-\beta +$ const.

Voor $1 \leqslant y < \infty$: $\eta(iy) = -\dfrac{1}{y}$, $\xi(iy)$ afnemend van $-\beta +$ const. tot $-\infty$.

In figuur 14 is getekend:

1) het beeld van D in het ζ vlak.

2) enige krommen $T(z)$ in D.

Opmerking 3. naar aanleiding van Opm. 2.

Het is bij Opm. 2 gebleken dat de aard van de krommen in D bepaald wordt door het teken van het getal β.

Neemt voor de functie op de y-as:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(y) &= C - \frac{1}{y},\ 1 \leqslant y < \infty \\ \varphi(y) &= C - 1,\ -\infty < y < 1 \end{aligned}\right\} C = \text{constante},$$

dan blijkt β de volgende functie van C te zijn:

$$\beta = \tfrac{3}{4} + \frac{\log 2}{2\pi} - C.$$

Voor $C < \frac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2\pi}$ is $\beta > 0$. Men vindt dan een figuur als fig. 14.

Voor $C = \frac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2\pi}$ is $\beta = 0$. Zie fig. 15*a*.

Voor $C > \frac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2\pi}$ is $\beta < 0$. Bij dit geval vindt men:

$\eta(x + \infty i) = \beta x$, dus afnemend bij toenemende x, evenals $\eta(x - \infty i) = \beta x - 1$. Alle krommen hebben een asymptoot aan de rechterkant

($y_t \to +\infty$ voor $t \to +\infty$). Er is een gebied van krommen met een asymptoot aan de linkerkant ($y_t \to -\infty$ voor $t \to -\infty$), géén kromme welke de y-as tot asymptoot heeft.

Om te onderzoeken of i het eindpunt is van een kromme $T(z)$ diene het volgende:

$$\xi(i) = -\beta + \text{const.}$$

$$\xi(iy) = -\beta y + \frac{(y-1)\, log\, |y-1|}{\pi y} + \text{const.}$$

Omdat $\beta < 0$ is er altijd een waarde voor y te vinden, $y < 1$, zodat $\xi(iy) > \xi(i)$. Immers daarvoor is nodig:

$$-\beta y + \frac{(y-1)\, log\, (1-y)}{\pi y} > -\beta\,, \qquad y < 1$$

$$-\beta(y-1) + \frac{(y-1)\, log\, (1-y)}{\pi y} > 0\,, \qquad y < 1$$

$$\frac{log\, (1-y)}{\pi y} < \beta\,, \qquad y < 1.$$

Wij zien direct dat een zodanige y te vinden is.

Bijgevolg heeft géén kromme het eindpunt in i, en is er steeds een kromme welke uitmondt op de y-as in een punt waarvoor geldt: $y < 1$. Noemt men dit punt $i\alpha$, dan is $i\alpha$ noodzakelijk een nulpunt van $\dfrac{1}{w(z)}$. Voor $\beta = -\dfrac{1}{2\pi}$ is dit punt de oorsprong (zie de uitdrukking voor $\dfrac{1}{w(z)}$ onder Opm. 2.). De raaklijn aan de kromme in zo'n eindpunt loopt evenwijdig aan de x-as. De afbeelding van D door de functie $\zeta(z)$ vindt men gemakkelijk door nog gebruik te maken van de volgende gegevens:

$$\xi(i\infty) = +\infty$$

$$\xi(-i\,\infty) = -\infty$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\beta + \frac{y + log\, |y-1|}{\pi y^2}\,.$$

In fig. 15*b* treft men die afbeelding aan. Tevens zijn enige krommen in D getekend.

Neemt men bij de uitdrukking voor $\frac{1}{w(z)}$ een term $\lambda_1 z$ ($\lambda_1 > 0$) op (dit heeft geen invloed op de randwaarden van $\eta(z)$), dan komt bij de uitdrukking voor $\zeta(z)$ nog de term: $\frac{1}{2}\lambda_1 (z^2 - 1) = \frac{1}{2}\lambda_1 (x^2 - y^2 - 1) + i\lambda_1 xy$.

Men vindt dus: $\eta(x + \infty i) = +\infty$,

$$\eta(x - \infty i) = -\infty.$$

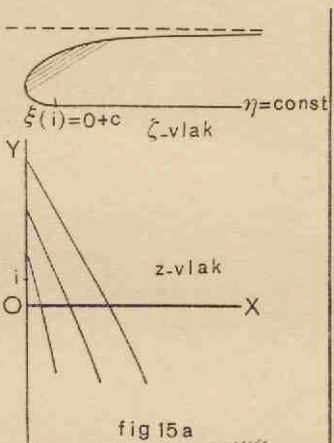


fig 15a

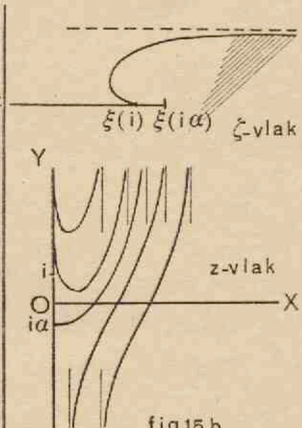


fig 15b

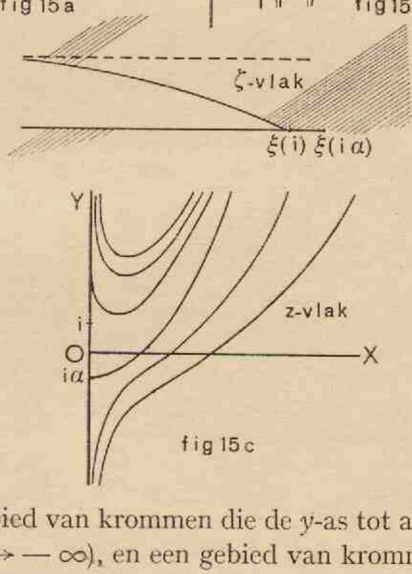


fig 15c

Er is dus een gebied van krommen die de y-as tot asymptoot hebben ($y_t \to +\infty$ voor $t \to -\infty$), en een gebied van krommen die eveneens de y-as tot asymptoot hebben, maar op deze krommen heeft men: $y_t \to -\infty$ voor $t \to -\infty$. Voor elke waarde van C is er één kromme welke uitmondt in een punt $i\alpha$ zó, dat $\alpha \leqslant 1$. De plaats van dat punt hangt af van de grootte van C en λ_1. In fig 15c is $\alpha < 1$. Het punt $i\alpha$ is dus een pool van $w(z)$.

STELLINGEN

I

Het bewijs van de stelling van Valiron-Wolff (Proceedings Kon. Akad. v. Wetensch. Vol. XXXV, No. 4, 1932, p. 504) is te vereenvoudigen.

II

De stelling van Jung, dat er bij een eindig aantal punten, gelegen in een plat vlak, één kleinste cirkel aan te wijzen is met straal $\varrho \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}}$ (d is de maximum afstand van 2 punten), waarbinnen of waarop alle punten gelegen zijn (zie o.a. Rademacher-Toeplitz: Von Zahlen und Figuren, 2e druk, p. 83), is ook geldig voor elke vlakke puntverzameling met diameter d. Dàn en alleen dàn is $\varrho = \frac{d}{\sqrt{3}}$, als de puntverzameling een drietal punten bevat, die de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek met zijde d.

III

Bezit de functie $f(x)$ voor $a < x < b$,

$$a = x_1 - \frac{|f(x_1) - x_1|}{1 - \alpha}, \qquad b = x_1 + \frac{|f(x_1) - x_1|}{1 - \alpha}, \; 0 < \alpha < 1,$$

differentiequotienten die in absolute waarde $< \alpha$ zijn, dan is de algorithme $x_{n+1} = f(x_n)$ steeds uitvoerbaar en $x_n \to \bar{x}$ voor $n \to \infty$, $a < \bar{x} < b$, waarbij $\bar{x}$ de enige wortel is, in het interval $a < x < b$, van de vergelijking $f(x) = x$.

IV

Het theorema III van J. Wolff kan beter behandeld worden na theorema V.

Proceedings Kon. Akad. v. W. Vol. XXXV No. 4, 1932, p. 504—506.

v. Kuik

V

In de door Pasch gegeven en o.a. bij Hilbert voorkomende formulering van het „Axioma van Pasch”, dient het gedeelte „dan snijdt *a* ook óf de zijde *AC* óf de zijde *BC*”, vervangen te worden door: dan snijdt *a* ook minstens één van de zijden *AC* en *BC*.

Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie § 2.
Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1930. § 3.

VI

In een verhandeling van R. Weitzenböck over affiene invarianten bij kegelsneden, worden invarianten *P* en *Q* berekend. De afleiding van de onder (30), (31), (32) voorkomende resultaten kan zeer vereenvoudigd worden.

R. Weitzenböck: Ueber affine Invarianten bei Kegelschnitten. Proceedings Kon. Akad. v. W. Vol. XLIII, No. I, II, 1940, p. 166.

VII

E. Feldheim geeft een nodige en voldoende voorwaarde opdat de oppervlakte van een parallelogram middenevenredig is tussen de oppervlakte van een omgeschreven en een ingeschreven parallelogram, waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig lopen.

De bewering van E. Feldheim, dat aan deze voorwaarde alleen voldaan is in het geval dat de parallelogrammen vierkanten zijn, is onjuist.

E. Feldheim, Problèmes sur les triangles inscrits dans un triangle donné.
L'Enseignement Mathém. 37me année, 1938, p. 335.

VIII

Het bewijs dat O. Bottema geeft van de (bijzondere) stelling van Desargues, is onvolledig.

O. Bottema, De elementaire meetkunde van het platte vlak, 1938, p. 7.

IX

De opmerking van Bedeau, dat de formule van Schottky niet geldt, wanneer er weinig electronen worden geëmitteerd, is onjuist.

F. Bedeau. Théorie et technique du bruit de fond, 1937, p. 10.