Récréations mathématiques et physiques : qui contiennent les problêmes & les questions les plus remarquables ...

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME PREMIER.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problêmes & les Queſtions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curioſité, tant des Mathématiques que de la Phyſique; le tout traité d'une maniere à la portée des Lecteurs qui ont ſeulement quelques connoiſſances légeres de ces Sciences.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale des Sciences, &c.

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & conſidérablement augmentée par M. de C. G. F.

TOME PREMIER,

Contenant L'ARITHMÉTIQUE & la GÉOMÉTRIE.

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, l'Artillerie et le Génie, grav. et fond. en caractères.

M. DCC. XC.

PRÉFACE.

Quoique les Mathématiques soient vulgairement & avec quelque raison réputées les plus épineuses des connoissances humaines, tous ceux qui y sont même légérement initiés, ne sauroient disconvenir qu'elles présentent un grand nombre de questions sur les nombres, & sur l'étendue, (sans parler des Mathématiques mixtes, comme l'Optique, la Mécanique, l'Astronomie, &c.) qui, sans être d'un degré de difficulté capable de beaucoup occuper un esprit cultivé, sont propres à piquer sa curiosité, soit par leur solution, soit par les moyens dont on a pu y parvenir. Nous ne prétendons pas que des esprits, uniquement accoutumés à des lectures légères ou frivoles, & qui n'ont pas même les connoissances élémentaires des sciences exactes, puissent trouver dans ces questions de quoi les intéresser & les amuser. Mais, comme il entre aujourd'hui, non-seulement dans toute éducation recherchée, mais même dans l'éducation publique, de donner des idées au moins élémentaires & superficielles des Mathématiques & de la Physique, il n'y a nul doute qu'il ne se trouve en ce siécle un grand nombre de personnes capables de s'intéresser à un ouvrage qui leur présentera un choix bien fait de ce qu'il y a dans ces sciences de plus curieux par son usage ou sa singularité. D'ailleurs, il est des esprits de toutes les trempes, comme des caractères & des visages différents. Ce qu'un ordre d'hommes honore d'une profonde indifférence, d'autres en font leurs délices. C'est en cela que consiste l'harmonie de l'univers.

Nous ajouterons que jamais les Mathématiques & la Physique ne furent plus cultivées qu'elles le sont actuellement. Or, il y a deux classes de personnes qui les cultivent : les unes par état, ou par le désir de s'illustrer en reculant leurs limites ; les autres par pur amusement, ou par un goût naturel qui les porte vers ce genre de nos connoissances. Ce sera, si l'on veut, à cette dernière classe de Mathématiciens & de Physiciens que cet ouvrage sera destiné ; quoique nous ne renoncions pas à intéresser en quelques endroits ceux de la première. Enfin, il peut servir à aiguillonner l'esprit de ceux qui commencent à étudier ces sciences ; & c'est-là la raison pour laquelle, dans la plupart des livres élémentaires, on tâche d'envelopper les questions proposées pour exercer les commençans, d'un énoncé moins abſtrait que celui des Mathématiques pures, & qui puiſſe intéreſſer & piquer la curioſité. Si, par exemple, on propoſoit ſimplement de diviſer un triangle en 3, 4 ou 5 parties égales, par des lignes tirées d'un point déterminé au dedans de ce triangle, il n'y a guère que ceux qui ſont vraiment doués du goût de la Géométrie qui y priſſent intérêt. Mais ſi, au lieu de propoſer le problême de cette manière abſtraite, on diſoit : *Un père de famille laiſſe en mourant à ſes trois fils, un champ triangulaire à ſe partager entre eux également ; il y a dans ce champ un puits qui doit être commun aux trois co-héritiers ; ce qui néceſſite que les lignes de diviſion partent de ce point : comment feront-ils pour ſe conformer à la volonté du teſtateur?* cet expoſé fera ſans doute déſirer à la plupart des eſprits de connoître la manière d'y parvenir ; & pour peu qu'on ſoit doué du goût des ſciences exactes, on ſera tenté d'exercer ſes forces à la trouver.

Nous ne croyons pas qu'il ſoit beſoin de montrer avec M. Ozanam, par des exemples, qu'un Géomètre peut ſans honte deſcendre quelquefois de l'abſtraction de ſes calculs & de ſes méditations, pour ſe replier ſur des queſtions de ſon art plus curieuſes & faciles, qu'utiles & épineuſes.

Telles ſont en effet quelques-unes, & même la plupart de celles de cet ouvrage. Mais les exemples cités par M. Ozanam ſont, il faut l'avouer, aſſez mal choiſis. Quel rapport ont avec ce ſujet les énigmes que ſe propoſoient, dit-on, les rois de Syrie ou d'Egypte; ou les calculs d'éclipſes & de phénomènes cèleſtes que s'envoyoient, à ce qu'il ajoute, entre amis, les Babyloniens & les Egyptiens? Je ne ſçais d'ailleurs où M. Ozanam a puiſé cette anecdote. Il étoit plus naturel de dire, que l'eſprit ne peut pas être toujours tendu; qu'après avoir approfondi un ſujet, il y a quelquefois du plaiſir à voler légérement ſur ſa ſurface; enfin, s'il eſt dans cet ouvrage pluſieurs queſtions frivoles, on peut dire pour les juſtifier, que la Sageſſe a beſoin quelquefois de ſe ſauver dans les bras de la Folie.

Les Grecs nous ont donné le premier exemple de ces jeux mathématiques. Car on trouve dans l'Anthologie grecque, un grand nombre d'épigrammes qui ne ſont que des queſtions arithmétiques; telles ſont la fameuſe queſtion de l'*Ane* & du *Mulet*; celle de l'*Amour rempliſſant en différens temps, par divers canaux, la capacité d'un baſſin*, *&c.* qu'on y lit énoncées en vers. On trouvera les plus remarquables dans le premier volume de cet ouvrage.

Ce ſont, à ce qu'il paroît, ces queſtions & les conſidérations précédentes, qui engagèrent M. Bachet de Méziriac, d'ailleurs célèbre algébriſte, ainſi qu'on le voit par ſes commentaires ſur Diophante, à recueillir un grand nombre de queſtions ſur les nombres, qu'il publia en 1626, & qu'il intitula *Problêmes plaiſans & délectables ſur les Nombres*. Ce livre eſt, après les problêmes de l'Anthologie grecque, le premier germe de toutes les *Récréations Mathématiques* qui ont paru dans la ſuite, plus ou moins augmentées, & en différentes langues. Mais nous nous bornerons à parler des ouvrages françois qui ont eu cet objet.

Les premières *Récréations Mathématiques* parurent en 1627, in-8°, ſous le titre de *Récréation Mathématique, compoſée de pluſieurs Problêmes plaiſans & facétieux*, par H. van Etten. C'étoit, il faut en convenir, une pitoyable rapſodie. Auſſi excita-t-elle la bile de Mydorge, géomètre célèbre de ce temps, qui en releva durement les ſottiſes. Mais, malgré cela, les éditions poſtérieures qui en furent faites, ne valent guère mieux que la première. C'eſt un fatras de queſtions dont grand nombre ſont ſottes & puériles, un déſordre & un langage barbares qui devoient dès-lors rebuter tout eſprit un peu raiſonnable.

Cela engagea ſans doute, vers la fin du ſiècle dernier, M. Ozanam à faire un recueil plus choiſi de ces queſtions mathématiques & phyſiques, & il l'exécuta en 1692, en donnant ſes nouvelles *Récréations Mathématiques & Phyſiques*, en deux volumes in-8°, qui, par diverſes additions, ſe ſont accrues juſqu'à quatre volumes in-8°. Comme les changemens, les additions & les retranchemens que nous y avons faits ſont très-conſidérables, nous devons rendre compte au Lecteur des motifs qui nous y ont engagés. Il eſt auſſi à propos de donner ici une idée de la manière dont l'ouvrage ſe préſente au monde ſavant dans cette nouvelle Edition.

Si le grand nombre des éditions d'un ouvrage eſt une preuve inconteſtable de ſa bonté & de ſon utilité, les *Récréations Mathématiques & Phyſiques* de feu M. Ozanam devroient être regardées comme un des livres les meilleurs & les plus utiles qui aient été faits. On ne peut diſconvenir cependant que ce livre ne ſoit en lui-même très fautif & très-incomplet. Mais il y a lieu de croire que ſon auteur l'auroit rendu beaucoup plus intéreſſant, & qu'il l'auroit porté à un plus haut point de perfection, s'il eût vécu dans un ſiècle plus ſavant, & plus inſtruit ſur ce qui regarde les Mathématiques & la Phyſique expérimentale. En effet, depuis la mort de ce Mathématicien, les ſciences & les arts ont éprouvé de ſi grands accroiſſemens, que ce qui pouvoit alors paſſer pour médiocre, ne ſeroit pas même ſupportable aujourd'hui. Combien de nouvelles découvertes dans la Phyſique, tant ordinaire & commune, que céleſte! combien de nouveaux phénomènes obſervés, dont quelques-uns ont même donné naiſſance à des branches fécondes de la Phyſique! Nous nous bornerons à citer l'*Electricité*, ſource intariſſable de réflexions profondes & d'expériences ſinguliérement amuſantes. La *Chimie* eſt auſſi une ſcience dont M. Ozanam ne ſoupçonnoit pas même les principes les plus connus & les plus triviaux. Enfin, nous ne craindrons point de le dire, on y trouve une multitude de matières traitées avec une apparence de crédulité & une prolixité telles, qu'il ſemble que l'auteur, ou plutôt ſes continuateurs, n'ont eu en vue que de multiplier les volumes.

Il étoit donc néceſſaire, pour rendre cet ouvrage plus digne du ſiècle éclairé où nous vivons, d'y faire des corrections, & des additions nombreuſes & conſidérables. C'eſt ce qu'on a tâché de faire. Nous allons rendre compte ici de ces améliorations.

Le premier volume comprend l'*Arithmétique* & la *Géométrie*, ces deux branches des Mathématiques que Platon appeloit à ſi juſte titre *les ailes du Mathématicien*. Dans la première, on expoſe la nature des diverſes eſpèces d'arithmétique, quantité de propriétés ſingulières des nombres, dont pluſieurs étoient probablement inconnues à M. Ozanam; celles des triangles rectangles en nombre & des nombres polygones, mais réduites à ce qu'elles préſentent d'intéreſſant & de facile: on donne enſuite les principes de la doctrine des combinaiſons, mis dans un jour fort clair, & un aſſez grand nombre de problêmes curieux, dont pluſieurs nouveaux, ſur les jeux. On paſſe de-là aux différentes eſpèces de progreſſions, & on réſout divers problêmes qu'elles préſentent: on propoſe & l'on explique pluſieurs tours de ſubtilité, fondés ſur des combinaiſons arithmétiques, ſuivis d'un grand nombre de problêmes curieux, & très-propres à exercer les jeunes Mathématiciens. On finit par ce que présente de plus curieux l'arithmétique politique, sur la population & la durée de la vie des hommes, &c.

La seconde partie de ce volume est destinée à la Géométrie. Elle contient environ soixante-quinze problêmes, qu'on croit pour la plupart assez heureusement choisis, soit par l'énoncé qu'on a tâché de rendre intéressant, soit par l'élégance ou la simplicité de la solution. On y trouve même quelques théorêmes élégans & singuliers, desquels résulte la généralisation de certains théorêmes fameux, par exemple, celui de la quarante-septième d'Euclide, qu'on y démontre aussi par diverses transpositions de parties, qui sont assez ingénieuses. Nous donnons aussi quelques transmutations d'espaces rectilignes, en autres de formes différentes, du quarré, par exemple, en rectangles, par simple décomposition & transposition de parties, ce qui, quoique élémentaire & peu difficile, est nouveau. Il y a dans cette même partie une digression curieuse & historique sur la quadrature du cercle; un grand nombre de problêmes remarquables sur les lunules d'Hippocrate, & autres formées à leur imitation. Enfin ce volume est terminé par une centaine de problêmes aſſez curieux, dont on donne ſeulement l'énoncé, & qu'on propoſe aux jeunes Arithméticiens ou Géomètres, pour y éprouver leurs forces. En général ils ſont plus élégans que difficiles. Il en eſt cependant quelques-uns qui ne ſont pas indignes d'un Géomètre ou d'un Analyſte exercé.

Le ſecond volume commence par la *Mécanique*. On y préſente un grand nombre de problêmes intéreſſans, & en général d'un meilleur choix que dans les éditions précédentes. On y voit l'analyſe de pluſieurs tentatives du mouvement perpétuel, & divers traits curieux ſur ce ſujet. On termine le tout par une hiſtoire ſommaire des machines les plus renommées, tant anciennes que modernes, comme ſont, parmi ces dernières, les fameuſes horloges de Strasbourg & de Lyon; les machines inventées par Truchet, Camus, Vaucanſon; la machine de Marly, les machines à feu. On dit ſur tous ces objets des choſes auſſi intéreſſantes que nouvelles.

Le même volume contient l'*Optique*. Nous pouvons aſſurer qu'elle eſt beaucoup perfectionnée, tant par l'ordre, que par la préciſion & la nouveauté des matières. On finit l'Optique par un précis de tout ce qu'il y a, dans les obſervations microſcopiques, de plus neuf & de plus digne d'être connu.

L'*Acouſtique*, & la *Muſique* qui en dérive, terminent ce volume. Les principes de la formation & de la propagation du ſon, leurs phénomènes, le développement de la muſique ancienne & moderne, divers traits fort curieux ſur les effets de l'une & de l'autre, pluſieurs queſtions ſur le mécaniſme de l'harmonie, les propriétés de divers inſtrumens, quelques paradoxes muſicaux, ſont les principaux objets qui compoſent cette partie, & terminent le ſecond volume.

Le ſuivant ou troiſième comprend l'*Aſtronomie*, la *Géographie* en ce qu'elle tient à cette ſcience, le *Calendrier*, la *Gnomonique*, la *Navigation*, l'*Architecture*, & la *Pyrotechnie* ou l'art des feux d'artifice. Il ſeroit trop long d'entrer dans les détails des corrections & des augmentations conſidérables faites à ces différens traités du livre de M. Ozanam. En général on l'a abrégé & ſimplifié; on a corrigé les erreurs qu'il a pu commettre; car il faut avouer que M. Ozanam ayant peu cultivé l'Aſtronomie n'avoit preſque aucune connoiſſance des vérités phyſico-aſtronomiques déja démontrées de ſon temps: auſſi rien de ſi ſuperficiel que ce qu'il dit ſur le ſyſtême de l'univers. On y a ſubſtitué un tableau de ce ſyſtême, & des divers corps qui le compoſent. Selon les apparences, on le trouvera piquant, ſoit par l'expoſition des phénomènes, ſoit par quelques comparaiſons aſſez ſingulières pour donner une idée de ſon immenſité.

Nous ne diſons qu'un mot du Calendrier: c'eſt, à quelques introductions près, l'ouvrage de M. Ozanam; on n'a pas cru devoir y faire beaucoup de changemens. La Gnomonique eſt preſque toute nouvelle, & contient pluſieurs problêmes nouveaux, & beaucoup mieux choiſis que dans le livre de cet auteur. La partie ſuivante eſt toute neuve, & préſente pluſieurs problêmes curieux, tant ſur l'art du pilotage que ſur la manœuvre. On y lit une hiſtoire aſſez détaillée du fameux problême des longitudes. Il en eſt de même de l'Architecture, où nous avons trouvé matière à pluſieurs queſtions curieuſes, relatives ſoit à la conſtruction, ſoit au toiſé, ſoit à l'art enviſagé comme art de goût.

La Pyrotechnie termine le volume. M. Ozanam y eſt abrégé en pluſieurs endroits, & enrichi dans d'autres.

Enfin, le quatrième volume eſt entièrement conſacré à la *Phyſique*. La première diviſion de ce volume, qui eſt la onzième de l'ouvrage, eſt une eſpèce de *Miſcellanea* de Phyſique, où l'on a eu pour objet de faire entrer toutes les queſtions les plus curieuſes. Elle commence par une introduction néceſſaire, qui contient avec beaucoup de préciſion tout ce qu'on connoît de mieux prouvé ſur les propriétés du Feu, de l'Air, de l'Eau & de la Terre. On parcourt enſuite toutes les branches de la Phyſique générale; expériences ſur l'Air, jeux d'hydraulique & d'hydroſtatique; hiſtoire & conſtruction des thermomètres, baromètres & hygromètres; problêmes ſinguliers d'Aſtronomie phyſique, réſolus d'après leurs véritables principes; obſervations curieuſes ſur la diviſibilité de la matière, ſur la ténuité des odeurs, ſur celle de la lumière, &c. queſtions ſur les comètes; expoſition & examen de quelques opinions ſingulières & brillantes ſur ce ſujet; explication & hiſtoire des fontaines intermittentes; phénomènes de la glace, du jeu manière de la produire; analyſe du cerf-volant, &c: telles ſont à peu près les matières de cette onzième partie. On n'en peut prendre une idée juſte qu'en parcourant la Table.

On ne pouvoit terminer plus heureuſement ce qui regarde la Phyſique ſyſtématique & expérimentale, que par un Traité particulier ſur l'*Aimant*. Tout ce qu'il y a de plus curieux & de plus neuf ſur les phénomènes de cette étrange production de la nature, ſes diverſes propriétés, les utilités qu'on en retire, les jeux & les tours principaux qu'on opère par leur combinaiſon, les aimans artificiels, &c. forment la matière de ce Traité.

L'*Electricité* tient parmi les phénomènes de la nature un rang trop remarquable, pour ne pas trouver ici une place. On en traite fort au long, ſi l'on conſidère la multitude de faits & d'expériences qu'on fait connoître ; & avec beaucoup de préciſion, ſi l'on fait attention à la manière dont ils ſont expoſés. Un objet intéreſſant de ce petit traité, eſt ce qu'on rapporte ſur l'analogie de la foudre avec le feu électrique. On n'a pas négligé les divers jeux qu'on opère au moyen de cette propriété ſingulière des corps ; & l'on y dit auſſi un mot ſur les guériſons opérées par l'Electricité.

La *Chimie*, ſource de tant de phénomènes curieux, ſuccède à l'Electricité. On a commencé par en développer ſuccintement les principes, en donnant une idée préciſe des diverſes ſubſtances dont le jeu & l'action mutuelle des unes ſur les autres, opèrent les principaux phénomènes de cette ſcience. Après cette introduction, on parcourt les expériences les plus ſimples & les plus curieuſes de la Chimie, qu'on explique d'après les principes poſés précédemment. Les encres ſympathiques, & les jeux qu'on peut exécuter par leur moyen, n'y ſont pas oubliés, non plus que les végétations métalliques. On finit par une digreſſion ſur la pierre philoſophale, l'or potable & la palingénéſie; problêmes chimiques dont on donne une ſorte d'hiſtoire curieuſe, inſtructive & philoſophique.

Deux Supplémens terminent ce volume; l'un traite des *Phoſphores*, tant naturels qu'artificiels; l'autre, des *Lampes* prétendues *perpétuelles*. Mais on n'a pas été auſſi prolixe que M. Ozanam, ou plutôt l'auteur de la pitoyable compilation qu'on lit dans le quatrième volume de ſon ouvrage. On croit, ou plutôt on aſſure avec confiance, que ſous un volume incomparablement moindre, on rapporte ſur les Phoſphores, tant naturels qu'artificiels, beaucoup plus de choſes & plus exactement que ne fait l'auteur de ce traité, inſéré dans l'édition des *Récréations Mathématiques* faite après la mort de l'auteur. Quant aux Lampes perpétuelles, après en avoir donné l'hiſtoire, on fait voir en aſſez peu de pages, & d'après les principes de la ſaine phyſique, que c'eſt une chimère digne d'être miſe dans la même claſſe que la Palingénéſie & la Baguette divinatoire.

Nous ne devons point paſſer ſous ſilence un mérite particulier que préſentera cet Ouvrage aux Mathématiciens & aux Phyſiciens. Ce ſont diverſes Tables aſſez étendues, & qui ſont d'un uſage fréquent dans les Mathématiques & dans la Phyſique. Chaque jour les calculateurs ſont arrêtés faute de ſavoir où les trouver. Ces Tables ſont:

Volume I. Celle du rapport du pied des différens pays, comparé avec celui de Paris.

La Table du rapport des meſures anciennes de contenue, avec le pied cubique de Paris.

Volume II. La Table des peſanteurs ſpécifiques des matières les plus uſuelles. Elle eſt à divers égards plus conſidérable que celle de Muſchenbroeck, & certainement plus exacte.

La Table du rapport des différens poids tant anciens que modernes, & étrangers, avec notre livre.

Volume III. La Table des longitudes & latitudes des principaux lieux de la Terre,

Terre, plus étendue qu'aucune de celles qui aient encore été données.

Celle du rapport des mesures itinéraires anciennes & modernes.

Celle des éclipses visibles sur l'horizon de Paris jusqu'en 1800.

Volume IV. Une Table des degrés de chaleur ou de froid auxquels différentes matières se fondent ou se glacent.

Une autre des différens degrés de chaleur ou de froid observés en différens lieux de la Terre, ou nécessaires pour certaines opérations.

Une de la dilatation des métaux.

Une des hauteurs de divers lieux & de plusieurs montagnes, tant de ce continent que de l'Amérique, au dessus du niveau de la mer.

Tel est le plan de cette nouvelle édition des *Récréations Mathématiques*. On peut dire avec certitude, & le Censeur de cet Ouvrage l'atteste par son approbation, que dans l'état où il est aujourd'hui, il n'est point indigne des regards des Mathématiciens & des Physiciens les plus instruits; & ceux de toutes les classes pourront également, en le lisant, s'amuser, s'instruire, & même s'exercer, par le choix des questions qui y sont résolues ou proposées, Quant à la partie typographique, elle a été traitée avec tout le ſoin qu'exigeoit un Ouvrage auſſi intéreſſant, tant par le choix du papier, que par la netteté du caractère. Les planches, au nombre de *quatre-vingt-dix*, très-bien gravées par M. de la Gardette, artiſte connu, réuniſſent à tous ces avantages celui de ſortir entièrement hors du livre, ce qui manquoit aux précédentes éditions.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, les *Récréations Mathématiques & Physiques* de feu M. OZANAM, corrigées & considérablement augmentées : il m'a paru que cet Ouvrage, fort imparfait dans ses éditions antérieures, a acquis dans celle-ci un degré d'amélioration considérable, qui peut lui mériter place parmi les bons livres sur ces matières. Fait à Paris le 5 août 1775.

MONTUCLA, *Censeur Royal.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le sieur JOMBERT, fils aîné, notre Libraire à Paris, nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public *Les Œuvres de Mathématiques de MM. Ozanam & Clermont*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilège pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre royaume, pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance. Comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie,

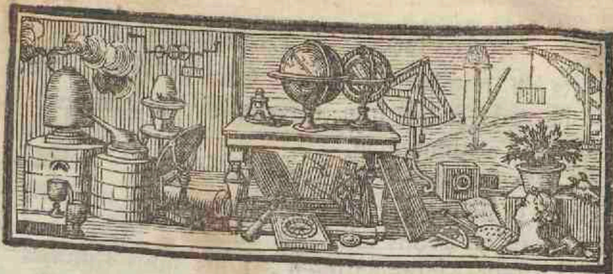
& notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du présent Privilege; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où les approbations y auront été données, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur HUE DE MIROMÉNIL; qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le sieur de MAUPEOU, & un dans celle dudit sieur HUE DE MIROMÉNIL, le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le trentieme jour du mois d'Août l'an mil sept cent soixante-quinze, & de notre regne le deuxieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé LE BEGUE.

Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n° 167, fol. 6, conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 4 Septembre 1775.

Signé *SAILLANT, Syndic.*

RECRÉATIONS



RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

PREMIERE PARTIE,

CONTENANT les Problêmes les plus curieux & les Vérités les plus intéressantes de l'Arithmétique.

LES deux ailes du Mathématicien, disoit Platon, sont l'Arithmétique & la Géométrie. En effet, toutes les questions des Mathématiques se réduisent à des déterminations de rapports de nombres ou de grandeur. On pourroit même dire, en continuant la comparaison de l'ancien philosophe, que l'Arithmétique est l'aile droite du Mathématicien ; car il est incontestable que les déterminations géométriques n'offriroient le plus souvent rien de satisfaisant à l'esprit, si les rapports ainsi déterminés ne pouvoient se réduire à des rapports de nombre à nombre. Ceci justifie l'usage où l'on est, & que nous suivons ici, de commencer par l'arithmétique.

Cette science offre un grand nombre de spéculations & de recherches curieuses : dans la moisson que nous en avons faite, & que nous présentons au Lecteur Mathématicien, nous nous sommes bornés à ce qui est le plus propre à piquer la curiosité de ceux qui ont le goût des mathématiques.

CHAPITRE PREMIER.

De notre Systême numérique, & des diverses especes d'Arithmétiques.

IL n'est personne qui n'ait remarqué que toutes les nations connues comptent par périodes de dix, c'est-à-dire, qu'après avoir compté les unités depuis 1 jusqu'à dix, on recommence par ajouter des unités à une dixaine ; que, parvenu à deux dixaines ou 20, on recommence à ajouter des unités jusqu'à trente ou trois dixaines, & ainsi de suite jusqu'à cent ou dix dixaines ; que de dix fois cent on a formé les mille, &c. Cela est-il nécessaire, ou a-t-il été occasionné par quelque cause physique, ou est-ce simplement un effet du hasard ?

Pour peu qu'on réfléchisse sur cet accord unanime, l'on ne pensera point que ce soit l'ouvrage du hasard. Il est non-seulement probable, mais comme démontré, que ce systême tire son origine de notre conformation physique. Tous les hommes ont dix doigts aux mains, à quelques-uns près, & en très-petit nombre, qui, par un jeu de la nature, sont sexdigitaires. Or, les premiers hommes ont commencé par compter ſur leurs doigts. Après les avoir épuiſés en comptant les unités, il leur falloit en former un premier total, & recommencer à compter par les mêmes doigts, juſqu'à ce qu'ils fuſſent épuiſés une ſeconde fois; puis une troiſieme, &c. De-là l'origine des dixaines, qui, retenues elles-mêmes ſur les doigts, n'ont pas dû aller au-delà de dix, ſans obliger d'en former un nouveau total appellé centaine, &c; de dix centaines, le mille, &c; & ainſi de ſuite.

Il ſuit de-là une conſéquence curieuſe; c'eſt que ſi, au lieu de 10 doigts, nous en avions eu douze, notre ſyſtême de numération auroit été différent. En effet, au lieu de dire après 10, dix plus un ou onze, dix plus deux ou douze, nous aurions monté par des noms ſimples juſqu'à douze; enſuite nous aurions compté par douze plus un, douze plus deux, &c, juſqu'à deux douzaines; le cent eût été douze douzaines, le mille eût été douze fois douze douzaines, &c. Un peuple ſexdigitaire auroit sûrement une arithmétique de cette eſpece, & n'en ſeroit pas plus mal, ou, pour mieux dire, il jouiroit de divers avantages dont notre ſyſtême numérique eſt privé.

Cela a engagé des philoſophes à examiner les propriétés de quelques autres ſyſtêmes de numération. Le célebre Leibnitz a conſidéré celui où, après deux, on recommenceroit par deux plus un; c'eſt ce qu'il appelle l'arithmétique binaire. Dans ce ſyſtême arithmétique, on n'auroit que deux chiffres, 1 & 0; & les nombres s'y marqueroient ainſi:

Un.	1
Deux.	10
Trois.	11
Quatre.	100

Cinq.	101
Six.	110
Sept.	111
Huit.	1000
Neuf.	1001
Dix.	1010
Onze.	1011
Douze.	1100
Treize.	1101
Quatorze.	1110
Quinze.	1111
Seize.	10000
Trente-deux.	100000
Soixante-quatre.	1000000
Deux mille trois cents ſoixante-dix-neuf	100101001011

Comme M. Leibnitz trouvoit, dans cette maniere d'exprimer les nombres, quelques avantages particuliers, il a donné, dans les *Mémoires de Berlin*, (tome 1 des anciens Mémoires) les regles pour pratiquer, dans cette eſpece d'arithmétique, les opérations ordinaires de l'arithmétique vulgaire. Mais il eſt aiſé de voir que ce nouveau ſyſtême a, quant à l'uſage ordinaire, l'inconvénient d'exiger un trop grand nombre de caracteres : il en faudroit vingt pour exprimer un nombre d'environ un million ; ce qui ſeroit extrêmement incommode dans la pratique.

Il ne faut pas, au reſte, omettre ici une choſe curieuſe au ſujet de cette arithmétique binaire ; c'eſt qu'elle donne l'explication d'un ſymbole Chinois, qui avoit fort tourmenté les ſçavants en antiquités Chinoiſes. Il étoit queſtion de certains caracteres révérés par les Chinois, & conſiſtants dans les différentes combinaiſons d'une petite ligne entiere &

d'une brisée ; caracteres attribués à leur ancien empereur Fohi. Le P. Bouvet, Jésuite, célebre missionnaire de la Chine, ayant été informé des idées de M. Leibnitz, remarqua que, si la ligne entiere représente notre 1, & la ligne brisée notre 0, ces caracteres ne sont autre chose que la suite des nombres exprimés par l'arithmétique binaire. Il seroit fort singulier qu'une énigme Chinoise n'eût trouvé son Œdipe qu'en Europe. Mais peut-être tout cela est-il plus ingénieux que solide.

Mais si l'on a bien fait de laisser au nombre des spéculations curieuses l'arithmétique binaire de Leibnitz, il n'en est pas de même de l'arithmétique duodénaire ; de cette arithmétique qui, ainsi que nous l'avons dit plus haut, auroit eu lieu, si nous eussions été sexdigitaires. En effet, elle eût été tout aussi expéditive, & même un peu plus, que l'arithmétique actuelle : le nombre de caracteres, qui n'eût été augmenté que de deux pour exprimer dix & onze, n'eût pas plus surchargé la mémoire que celui des caracteres actuels ; & il en résulteroit des avantages qui doivent faire regretter qu'elle n'ait pas été primitivement mise en usage.

Cela seroit probablement arrivé, si la philosophie eût présidé à cet établissement. Car on eût d'abord vu que le nombre *douze* est, de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 20, celui qui jouit de l'avantage d'être à-la-fois le plus petit, & d'avoir le plus grand nombre de diviseurs ; car 12 a 4 diviseurs qui le partagent sans fraction, sçavoir 2, 3, 4 & 6. Le nombre 18 a aussi à la vérité 4 diviseurs : mais, étant plus grand que 12, celui-ci méritoit la préférence pour mesurer les périodes de la numération. Elles eussent eu alors l'avantage de pouvoir être divisées, la premiere, d'un à douze, par 2, 3, 4, 6; la ſeconde, d'un à cent quarante-quatre, par 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72; tandis que, dans l'uſage ordinaire, la premiere période d'un à 10 n'a que deux diviſeurs, 2 & 5; la ſeconde n'a que 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50. On rencontreroit par conſéquent, dans la déſignation des nombres, plus rarement des fractions.

Mais, ce qu'il y eût eu ſur-tout d'avantageux dans cette ſorte de numération, c'eſt qu'elle eût introduit dans l'uſage les diviſions & les ſous-diviſions des meſures quelconques en progreſſion duodécimale. Ainſi, de même que, par haſard, le pied ſe diviſe en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, la ligne en 12 points; la livre ſe ſeroit diviſée en 12 onces, l'once en 12 gros, le gros en 12 ſcrupules ou autres parties dénommées comme on voudra; le jour eût été diviſé en 12 portions appellées heures, ſi l'on veut; l'heure en 12 autres parties qui auroient valu 10 minutes; chacune de ces parties en 12 autres, & ainſi ſucceſſivement. Il en eût été de même des meſures de contenance, &c, &c.

On demandera quels avantages il y eût eu dans cette diviſion? Le voici. On ſçait que tous les jours, quand il eſt queſtion de partager une meſure en 3, en 4 parties, en 6, on ne trouve pas un nombre entier de meſures de l'eſpece inférieure, ou c'eſt uniquement par haſard. Ainſi, un tiers, un 6e de livre ne donne pas un nombre juſte d'onces; un tiers de livre numéraire ne donne pas un nombre entier de ſous. Il en eſt de même du muid & de la plûpart des autres meſures des liquides, &c; on pourroit en trouver bien d'autres exemples. Ces inconvénients, qui compliquent le calcul, n'auroient point lieu, si l'on eût suivi par-tout la progression duodécimale.

Le second avantage résulteroit de la combinaison de l'arithmétique duodénaire avec cette progression duodécimale. Un nombre de livres, de sous, de deniers; un nombre de pieds, de pouces, de lignes; ou bien de livres, d'onces, &c, étant donné, seroit exprimé comme le font, dans l'arithmétique usuelle, les nombres entiers & de même espece. Par exemple, en supposant que la toise fût de 12 pieds, comme il faudroit dans ce systême de numération; si l'on avoit 9 toises 5 pieds 3 pouces 8 lignes à exprimer, il ne faudroit pas écrire $9^t\ 5^p\ 3^p\ 8^l$, mais simplement 9538; & toutes les fois qu'on auroit un nombre semblable, exprimant une dimension en toises, pieds, pouces, &c, le premier chiffre à droite exprimeroit des lignes, le second des pouces, le troisieme des pieds, le quatrieme des toises, le cinquieme des douzaines de toises, qu'on pourroit exprimer par un nom simple, par exemple, par le nom de corde, &c. Enfin, lorsqu'il seroit question d'ajouter, de soustraire, de multiplier ou diviser de semblables grandeurs entr'elles, on opéreroit comme sur des nombres entiers; & ce qui en résulteroit désigneroit de même, par l'ordre des chiffres, des lignes, pouces, pieds, &c.

Il est aisé de sentir combien cela seroit commode dans la pratique. Aussi un Mathématicien Hollandois (Stévin) avoit-il proposé d'adapter les divisions & subdivisions des mesures à notre systême de numération actuel, en les faisant décroître en progression décimale. Ainsi, la toise eût été de 10 pieds, le pied de 10 pouces, le pouce de 10 lignes, &c. Mais il ne faisoit pas attention à l'inconvénient de ſe priver de la commodité de pouvoir diviſer ces meſures par 3, 4, 6, ſans fraction; & c'en eſt un conſidérable.

Dans le ſyſtême de l'arithmétique duodécimale, il eſt évident que les 9 premiers nombres pourroient s'exprimer, comme à l'ordinaire, par les 9 caracteres connus, 1, 2, 3, &c; mais, comme la période ne doit ſe terminer qu'à douze, il eſt néceſſaire d'exprimer dix & onze par des caracteres ſimples. Nous choiſirons ceux-ci φ pour exprimer dix, & ʒ pour exprimer onze; alors il eſt évident que 10 exprimera douze,

11 déſignera	treize.
12 . . .	quatorze.
13 . . .	quinze.
14 . . .	ſeize.
15 . . .	dix-ſept.
16 . . .	dix-huit.
17 . . .	dix-neuf.
18 . . .	vingt.
19 . . .	vingt-un.
1φ . . .	vingt-deux.
1ʒ . . .	vingt-trois.
20 . . .	vingt-quatre.
30 . . .	trente-ſix.
40 . . .	quarante-huit.
50 . . .	ſoixante-douze.
100 feront	cent quarante-quatre.
200 . .	deux cents quatre-vingt-huit.
300 . .	quatre cents trente-deux.
1000 . .	mil ſept cents vingt-huit.
2000 . .	trois mille quatre cents cinquante-ſix.
10000 . .	vingt mille ſept cents trente-ſix.
100000 .	deux cents quarante-huit mille huit cents trente-deux.
&c. . . .	. . . .

Ainſi, le nombre déſigné par ces chiffres φ943 ſeroit dix-huit mille ſix cents vingt-ſept ; car φ000 eſt dix-ſept mille deux cents quatre-vingts, 900 eſt douze cents quatre-vingt-ſeize, 40 eſt quarante-huit, & 3, trois ; nombres qui, joints enſemble, font celui ci-deſſus.

Il ſeroit facile de tracer les regles de cette nouvelle arithmétique, à l'*inſtar* de notre arithmétique vulgaire ; mais, comme il n'y a pas d'apparence que ce nouveau calcul ſoit jamais admis dans la ſociété, nous nous bornerons ici à ce que nous en avons déja dit. Nous ajouterons ſeulement que nous avons vu un livre imprimé en Allemagne, où les 4 regles ordinaires de l'arithmétique vulgaire étoient expliquées dans tous les ſyſtêmes d'arithmétique binaire, ternaire, quaternaire, &c, juſqu'à la duodécimale incluſivement.

CHAPITRE II.

De quelques Manieres abrégées de faire les opérations arithmétiques.

§. I.

Maniere de ſouſtraire à-la-fois pluſieurs nombres de pluſieurs autres nombres donnés, ſans faire les additions partielles.

UN exemple ſuffira pour faire concevoir cette opération. On propoſe d'ôter toutes les ſommes au-deſſous de la ligne en B, de toutes celles au-deſſus en A. Pour cet effet, on commencera par ajouter les nombres de la premiere colonne d'en-bas à droite, comme à l'ordinaire; ils font 14, qu'on ôtera de la plus prochaine dixaine au-dessus, sçavoir, de 20. Le reste est 6 que vous ajouterez à la colonne correspondante de dessus en A; la somme totale sera 23 : vous écrirez 3 au-dessous; &, parce qu'il y a ici deux dixaines, comme auparavant, il n'y a rien à retenir. Ajoutez de la même façon les nombres de la colonne suivante d'en-bas: leur somme est 9, qui, étant ôtée de la plus proche dixaine supérieure, laisse 1. Ajoutez donc 1 à la seconde colonne des nombres d'en-haut, dont la somme est 20; laquelle étant ôtée de 20, le restant est 0. Ainsi il faudra écrire 0 au-dessous; &, parce qu'il y a ici deux dixaines, tandis que, dans la colonne d'en-bas, il n'y en avoit qu'une, il faut retenir la différence 1, qu'on ôtera de la colonne suivante d'en-bas, parce qu'il y avoit plus de dixaines dans la colonne des nombres A, que dans celle des nombres B; car il faudroit l'ajouter si c'étoit le contraire. Enfin, quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en-bas, pour n'y avoir plus de figures significatives, comme il arrive ici à la 5^e^ colonne, on l'ajoutera à la colonne d'en-haut, & l'on écrira toute la somme au-dessous de la ligne; ensorte que, dans cet exemple, on aura 162003 pour le reste de la soustraction.

$$\left.\begin{array}{r} 56243 \\ 84564 \\ 3252 \\ 26848 \end{array}\right\} A$$

$$\left.\begin{array}{r} 2942 \\ 3654 \\ 2308 \end{array}\right\} B$$

$$\begin{array}{r} \hline 162003 \\ \hline \end{array}$$

§. II.

Multiplication par les doigts.

Pour multiplier, par exemple, 9 par 8, prenez d'abord la différence de 9 à 10, qui eſt 1; &, ayant levé les 10 doigts des deux mains, abaiſſez 1 doigt d'une main, par exemple, la gauche. Prenez auſſi la différence de 8 à 10, qui eſt 2, & abaiſſez 2 doigts de la main droite.

Préſentement, ajoutez les doigts levés, qui ſont ici 7; ce ſera le nombre des dixaines du produit. Multipliez le nombre des doigts baiſſés d'une main par celui des doigts baiſſés de l'autre; ce produit, qui eſt 2, ſera le nombre des unités du produit. Ainſi, on trouvera que 9 par 8 fait 72.

On voit par-là qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des nombres donnés; que le produit de ces différences déſignées par les doigts baiſſés de chaque main, donne les unités du produit; & que la ſomme des doigts qui reſtent levés, eſt celle des dixaines de ce même produit.

Il eſt aiſé de voir que ceci eſt plus curieux qu'utile; car on ne peut multiplier de cette maniere que des nombres au-deſſus de dix; & tout le monde a dans la mémoire ces premiers produits, ſans leſquels on ſeroit arrêté à chaque multiplication complexe.

§. III.

De quelques Multiplications & Diviſions abrégées.

I. Il n'eſt perſonne qui ne ſçache que, pour multiplier un nombre par 10, il ſuffit de lui ajouter un zéro; pour le multiplier par 100, de lui en ajouter deux, &c.

D'où il ſuit que, pour multiplier par 5, il n'y a qu'à le diviſer par deux, en ſuppoſant un zéro ajouté à la fin. Ainſi, pour multiplier 127 par 5, on ſuppoſera un zéro ajouté; ce qui donneroit

1270, qu'on diviſera par 2 : le quotient 635 ſera le produit cherché.

De même, pour multiplier un nombre par 25, il faudroit le concevoir multiplié par 100, ou augmenté de deux zéro, & le diviſer par 4. Ainſi 127, multiplié par 25, feroit 3175; car 127, augmenté de deux zéro, donne 12700, qui, diviſé par 4, produit 3175.

Pareillement, pour multiplier par 125, il ſuffiroit d'ajouter ou concevoir ajoutés trois zéro au nombre à multiplier, & de diviſer par 8. Les raiſons de ces opérations ſont ſi aiſées à appercevoir, que ce ſeroit témoigner au lecteur bien peu de confiance en ſon intelligence, que de les expoſer.

II. La multiplication d'un nombre par 11 ſe réduit à une ſimple addition; car il eſt aiſé de voir que multiplier un nombre par 11, ce n'eſt autre choſe que l'ajouter à ſon décuple, c'eſt-à-dire à lui-même, ſuivi d'un zéro.

Soit, par exemple, le nombre 67583

Pour le multiplier par 11, on dira 3 & 0 font 3 : on écrira 3 au rang des unités; — 743413

enſuite 8 & 3 font 11; on écrira 1 au rang des dixaines, en retenant 1; puis 5 & 8, & 1 de retenu font 14 : on écrira 4 au 3^e^ rang, en retenant 1. Ce qu'on vient de dire ſuffit pour indiquer la ſuite de l'opération qui donnera 743413.

On pourroit pareillement multiplier le nombre ci-deſſus par 111, en prenant d'abord le premier chiffre des unités 3, enſuite la ſomme de 8 & 3, après cela celle de 5, 8 & 3, puis celle de 7, 5 & 8, & ainſi de ſuite.

III. Nous nous bornons à remarquer encore que, pour multiplier un nombre quelconque par 9, on peut employer la ſimple ſouſtraction. Prenons pour exemple le même nombre que ci-deſſus. Pour le multiplier par 9, on n'a qu'à ajouter par la penſée un zéro à la fin du nombre à multiplier, & enſuite ſouſtraire chaque chiffre de celui qui le précede, en commençant par la droite; ainſi, l'on ôtera 3 de zéro ou 10, ce qui donnera 7; enſuite 8 de 2 ou 12, ce qui donnera 4; on continuera ainſi de ſuite, en ayant attention aux unités empruntées pour augmenter de 10 la valeur des chiffres trop petits pour que la ſouſtraction puiſſe ſe faire, & l'on trouvera 608247.

$$\begin{array}{r} 67583 \\ \hline 608247 \\ \hline \end{array}$$

Il eſt aiſé d'appercevoir la raiſon de ces opérations. Car il eſt évident que, dans la premiere, on ne fait qu'ajouter le nombre lui-même à ſon décuple; &, dans celle-ci, on l'ôte de ce même décuple. Il ſuffit enfin de faire l'opération d'une maniere développée, pour en concevoir le procédé & la raiſon.

On peut employer des artifices ſemblables pour certains cas de diviſion, par exemple, pour diviſer un nombre par telle puiſſance qu'on voudra de 5. Car ſuppoſons qu'on veuille diviſer 128 par 5, il faut le doubler, ce qui donnera 256; puis retrancher le dernier chiffre qui repréſentera des décimales : ainſi, l'on aura pour quotient 25, 6, ou $25\frac{6}{10}$. Pour diviſer le même nombre par 25, il faudra le quadrupler, ce qui donnera 512, & retrancher les deux derniers chiffres qui ſeront des décimales; vous aurez 5 & $\frac{12}{100}$. Pour diviſer par 125, il faudra octupler le dividende, & retrancher enſuite 3 chiffres, & ainſi de ſuite. Mais, il faut l'avouer, de pareils abrégés de calcul ne menent pas loin.

§. IV.

Multiplication & Division abrégées par les bâtons arithmétiques de Neper.

Quand on a de grands nombres à multiplier les uns par les autres, il eſt aiſé de voir que l'on opéreroit avec beaucoup de rapidité, ſi l'on avoit préliminairement une eſpece de tarif du nombre à multiplier, doublé, triplé, quadruplé, & ainſi juſqu'au noncuple incluſivement. Or, il eſt bien aiſé de ſe procurer ce tarif par la ſimple addition, puiſqu'il n'y a qu'à ajouter le nombre à multiplier à lui-même, & on aura le double; puis l'ajouter de nouveau à ce double, & l'on aura le triple, & ainſi de ſuite. Mais, à moins que ce nombre à multiplier ne revînt bien fréquemment, ce ſeroit ſe procurer un abrégé de calcul par une opération beaucoup plus longue que celle qu'on auroit cherché à abréger.

Le fameux Neper, dont toutes les recherches paroiſſent avoir eu pour objet d'abréger les opérations de l'arithmétique & de la trigonométrie, ce qui nous a valu l'ingénieuſe & à jamais mémorable invention des logarithmes, a imaginé un moyen de ſe former au beſoin ce tarif dans le moment, par le moyen de certaines baguettes qu'il a décrites dans ſon ouvrage intitulé *Rhabdologia*, imprimé à Edimbourg en 1617. En voici la conſtruction.

On préparera pluſieurs bandes de carton, ou de cuivre, qui aient en longueur environ 9 fois leur largeur, & que l'on diviſera en 9 quarrés
Pl. 1. égaux (*Planche 1, fig. 1*). On inſcrira en tête,
fig. 1. c'eſt-à-dire dans le premier quarré de chacune, un des nombres de la ſuite naturelle, 1, 2, 3,

4, &c, jusqu'à 9 inclusivement. Il faudra diviser ensuite chacun des quarrés inférieurs en deux, par une diagonale tirée de l'angle supérieur à droite, à l'angle inférieur à gauche; après quoi, l'on inscrira dans chacune de ces cases par ordre en descendant, le double, le triple, le quadruple du nombre porté en tête, avec cette attention que, quand ce multiple ne sera que d'un chiffre, il faudra le placer dans le triangle inférieur; &, quand il sera composé de deux, on placera celuides unités dans le triangle inférieur, & celui des dixaines dans le supérieur, ainsi qu'on voit dans la *figure* Pl. 1.
premiere. Il faudra avoir une de ces bandes dont fig. 1.
les cases ne soient point divisées, & dans lesquelles seront inscrits simplement les nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 9. Il sera aussi à propos d'avoir plusieurs de ces bandes pour chaque chiffre.

Cette préparation faite, supposons qu'on ait à multiplier le nombre 6785399; on arrangera l'une à côté de l'autre les 7 bandes portant en tête les nombres 6, 7, 8, &c. & à côté d'elles en premier rang celles qui portent les chiffres simples, comme on voit dans la *figure seconde;* au moyen fig. 2.
de quoi, l'on aura le tarif de tous les multiples du nombre à multiplier; & il ne restera presque que la peine de les transcrire. Par exemple, on aura celui de 6, en écrivant d'abord à gauche le chiffre 4 qui est celui des unités, & ajoutant ensuite les chiffres 5 & 4, placés, le premier dans le triangle supérieur de la case 54, & le second dans l'inférieur de la case à côté, en reculant vers la gauche, & ainsi successivement, suivant les regles ordinaires de l'addition. Ce multiple se trouvera donc 40712394.

Le reste de l'opération sera le même que dans la multiplication ordinaire. Le multiplicateur & le nombre à multiplier étant écrits l'un ſous l'autre, comme on a coutume de faire ; comme le premier chiffre du multiplicateur eſt 8, on prendra le nombre qui eſt dans le rang horizontal à côté de 8, qu'on trouve, par la ſimple addition, être 54283192 ; & on l'écrira. On prendra enſuite celui qui eſt à côté de 3, & on l'écrira en rétrogradant d'une place ; & ainſi des autres. On ajoutera enſuite tous ces produits partiaux comme à l'ordinaire, & l'on aura le produit total qu'on voit ci-contre.

$$
\begin{array}{r}
6785399 \\
\underline{839938} \\
54283192 \\
20356797 \\
61068591 \\
61068591 \\
20356797 \\
\underline{54283192} \\
\underline{5709314465262}
\end{array}
$$

On peut employer ce même artifice pour abréger la diviſion, ſur-tout lorſqu'on a de grands nombres à diviſer fréquemment par un même diviſeur. Qu'on ait, par exemple, le nombre 1492992 à diviſer par 432, & que, dans une ſuite d'opérations, ce même diviſeur doive ſe préſenter ſouvent, on commencera à ſe former, par le moyen décrit plus haut, le tarif des multiples de 432 ; ce qui n'exigera preſque qu'une ſimple tranſcription, comme on voit ci-deſſous à gauche.

1 . . .	432
2 . . .	864
3 . . .	1296
4 . . .	1728
5 . . .	2160
6 . . .	2592
7 . . .	3024
8 . . .	3456
9 . . .	3888

$$
\begin{array}{rl}
1492992 & (\ 3456 \\
\underline{1296} & \\
1969 & \\
\underline{1728} & \\
2419 & \\
\underline{2160} & \\
2592 & \\
\underline{2592} & \\
0000 &
\end{array}
$$

Cela

Cela fait, on verra d'abord que, puisque 432 n'est point compris dans les trois premiers chiffres du dividende, ce doit être un multiple de ce nombre qui sera compris dans les quatre premiers, sçavoir, 1492. Pour le trouver, il suffira de jetter les yeux sur la table, & l'on verra que le multiple de 432 le plus prochainement moindre, est 1296 : on écrira donc 3 au quotient, & 1296 sous 1492; on fera la soustraction, & il restera 196 : on abaissera le chiffre suivant du dividende, ce qui donnera 1969. L'inspection seule de la table fera encore connoître que 1728 est le plus grand multiple de 432 qui soit contenu dans 1969. Ainsi l'on écrira 4 au quotient, & l'on fera la soustraction comme ci-dessus. On continuera ainsi l'opération, & l'on trouvera pour les chiffres suivants du quotient, 5 & 6; & comme le dernier multiple ne laisse aucun reste, la division sera exacte & parfaite.

Remarque.

On ne s'est pas borné à tâcher de simplifier les opérations de l'arithmétique par ces voies; on a tenté quelque chose de plus, & de réduire à une pure méchanique toutes les opérations de l'arithmétique. Le célebre Pascal a le premier imaginé une machine de cette espece, dont on voit la description dans le Recueil des Machines présentées à l'Académie, T. IV. Le chevalier Morland, sans sçavoir probablement ce que Pascal avoit fait à cet égard, publia en 1673 ses deux machines arithmétiques, l'une pour l'addition & la soustraction, & l'autre pour la multiplication, sans néanmoins dévoiler la construction intérieure. Le célebre Leibnitz s'occupa du même objet vers le même temps, & ensuite le marquis Poleni. On voit la description de leurs machines arithmétiques dans le *Theatrum arithm.* de M. Leupold, imprimé en 1727, avec celle de M. Leupold lui-même, & dans les *Miscell. Berol.* de 1709. On a aussi l'*Abaque rabdologique* de M. Perrault, dans le recueil de ses machines, donné en 1700. Il sert pour l'addition, la soustraction & la multiplication. Le Recueil des Machines présentées à l'Académie royale des Sciences, offre encore une machine arithmétique de M. Lespine, & trois de M. de Boistissandeau. Enfin M. Gersten, professeur de mathématiques de Giessen, a donné en 1735, à la Société royale de Londres, la description très-détaillée de sa machine propre. Nous nous bornerons ici à ces indications. Cependant nous croyons faire plaisir aux curieux d'indiquer, dans le paragraphe qui suit, une arithmétique ingénieuse, inventée par M. Saunderson, célebre mathématicien, aveugle dès son enfance.

§. V.

Arithmétique palpable, ou maniere de pratiquer l'Arihmétique à l'usage des aveugles, ou dans l'obscurité.

Ceci paroîtra sans doute au premier abord un paradoxe, mais ce n'en est pas moins une réalité; & cette arithmétique étoit pratiquée par le fameux docteur Saunderson, devenu aveugle à l'âge d'un an; ce qui ne l'empêcha pas de faire des progrès profonds dans les mathématiques, & de remplir avec l'admiration de tout le monde une chaire dans l'université de Cambridge.

Pl. 2. *bis*. fig. 1. Soit un quarré ABCD, divisé en quatre autres quarrés par deux lignes paralleles aux côtés, lesquelles s'entrecoupent au centre. Ces deux lignes donnent encore, avec les côtés du quarré, quatre interſections; ce qui, joint aux quatre angles du quarré primitif, donne neuf points. Que chacun de ces points préſente un trou dans lequel on puiſſe ficher ou une épingle, ou une cheville: il eſt évident qu'on aura neuf places diſtinctes pour les neuf chiffres ſimples & ſignificatifs de notre arithmétique, & il n'y aura qu'à convenir d'un ordre dans lequel on comptera ces points ou places de l'épingle ou cheville mobile. Ainſi, pour marquer 1, on la placera au centre; pour ſignifier 2, on la mettra immédiatement au deſſus du centre en montant; à l'angle ſupérieur à droite, pour ſignifier 3; & ainſi de ſuite, comme le marquent les nombres apposés à chacun de ces points.

Mais il y a un caractere qui joue un très-grand rôle dans notre arithmétique, ſçavoir, le zéro. Il y auroit un parti fort ſimple à prendre, celui de laiſſer toutes les places vuides, & le zéro ſeroit ſignifié par-là; toutefois Saunderſon préféroit de placer dans la caſe du milieu une épingle à groſſe tête: il l'y laiſſoit même, à moins qu'ayant l'unité à exprimer, il ne fût obligé de la remplacer par une épingle à petite tête. Il en réſultoit pour lui l'avantage de mieux guider ſes mains, & de reconnoître plus facilement, par la poſition des épingles à petite tête à l'égard de la groſſe épingle centrale, ce que ces premieres ſignifioient. On doit s'y tenir, car Saunderſon avoit ſûrement choiſi le moyen le plus ſignificatif à ſes doigts.

Nous venons de voir comment on peut exprimer un nombre ſimple; rien de ſi facile. Il ne l'eſt pas moins d'exprimer un nombre composé; car, ſupposons plusieurs quarrés tels que le précédent, rangés sur une même ligne, & séparés par un petit intervalle, pour pouvoir les distinguer facilement par le tact : il ne faut qu'être au fait de l'arithmétique vulgaire, pour voir que le premier quarré à droite servira à exprimer les unités ; le suivant, en reculant vers la gauche, servira aux dixaines ; le troisieme aux centaines, &c. Ainsi, dans la *fig.* 2, les cinq quarrés garnis comme l'on voit, représenteront le nombre 54023.

Pl. 2. *bis.* fig. 2.

Ayez enfin une tablette divisée en plusieurs bandes horizontales, dont chacune portera sept ou huit quarrés semblables, suivant le besoin ; que ces bandes soient séparées par un intervalle convenable pour les mieux distinguer ; enfin, que tous les quarrés du même ordre, dans chacune de ces bandes, soient tellement espacés qu'ils se répondent perpendiculairement les uns aux autres ; vous pourrez, par le moyen de cette machine, faire les diverses opérations d'arithmétique. On s'est borné ici à représenter une addition de quatre nombres, & leur somme, suivant les deux manieres.

Cette machine ingénieuse ne servoit pas seulement à Saunderson pour les opérations de l'arithmétique ; il s'en servoit aussi à représenter des figures de géométrie, en plaçant ses épingles, & tendant des filets de l'une à l'autre. Mais en voilà assez sur ce sujet. Ceux à qui ceci ne suffiroit pas, n'ont qu'à consulter l'Algebre de Saunderson, traduite par M. de Joncourt en 1756, & qui se débite chez Jombert ; ou la traduction des Eléments abrégés de Wolf, où cette arithmétique palpable est expliquée au long, & peut-être pas plus clairement qu'ici.

PROBLÊME.

Multiplier 11 l. 11 ſ. 11 den. par 11 l. 11 ſ. 11 d.

J'AI vu propoſer ce problême par un arithméticien juré. C'étoit l'épreuve à laquelle il mettoit la capacité d'un jeune homme qu'on lui annonçoit comme poſſédant bien l'arithmétique. Il avoit raiſon, quoique peut-être il n'en ſentît pas la difficulté : car ce problême, indépendamment de l'embarras qui réſulte de la multiplication de quantités de diverſes eſpeces & de leurs réductions, eſt propre à éprouver l'intelligence d'un arithméticien.

On eût pu en effet peut-être embarraſſer, par une queſtion fort ſimple, celui qui propoſoit cette opération : c'eût été en demandant quelle nature de produit étoit celle de livres, ſous & deniers, multipliés par des livres, ſous & deniers. Nous ſçavons que celui d'une toiſe par une toiſe eſt repréſenté par une toiſe quarrée, parcequ'on eſt convenu en géométrie d'appeller toiſe quarrée, la ſurface quarrée ayant une toiſe de hauteur ſur une toiſe de baſe; & 6 toiſes par 4 donnent 24 toiſes quarrées, parceque la ſurface rectangle ayant ſix toiſes ſur quatre, contient 24 toiſes quarrées, comme le produit de 4 par 6 contient 24 unités. Mais qui dira ce que c'eſt que le produit d'un ſou par un ſou, d'un ſou par une livre, &c?

La queſtion conſidérée ſous cet aſpect eſt donc abſurde; ce que ne ſent pas le vulgaire des arithméticiens.

On peut néanmoins la conſidérer ſous divers points de vue qui la rendent ſuſceptible de ſolution. Le premier eſt de faire attention que la livre contient 20 ſous & 240 deniers ; enſorte qu'on peut réduire le problême à celui-ci en nombre abſtraits : multiplier 11 plus $\frac{11}{20}$ plus $\frac{11}{240}$, par 11 plus $\frac{11}{20}$ plus $\frac{11}{240}$; alors le produit ſera 134 plus $\frac{9}{20}$ plus $\frac{3}{240}$ plus $\frac{49}{57600}$.

La ſeconde maniere d'enviſager la queſtion eſt celle-ci. Tout produit eſt le quatrieme terme d'une proportion dont le premier terme eſt l'unité, & dont les deux quantités à multiplier ſont les deuxieme & troiſieme termes. Ainſi il n'eſt queſtion que de fixer le genre d'unité qui doit être le premier terme de la proportion.

On peut dire, par exemple, ſi une livre employée dans telle entrepriſe a produit 11 l. 11 ſ. 11 deniers, combien produiront 11 l. 11 ſ. 11 deniers ? Alors le produit ſera le même que ci-deſſus, ſçavoir 134 l. 9 ſ. 3 d. & $\frac{49}{240}$ de denier.

Mais cette même unité pourroit être 1 ſou : car qui empêcheroit de former cette queſtion : Si un ſou a produit 11 l. 11 ſ. 11 deniers, combien doivent produire 11 l. 11 ſ. 11 deniers ? Alors le produit ſera 2689 l. 5 ſ. 4 d. & $\frac{1}{12}$ de denier.

Enfin cette unité pourroit être 1 denier, & le produit ſeroit alors 32271 l. 4 ſ. 1 denier.

CHAPITRE III.

De quelques Propriétés des Nombres.

Il ne ſera pas ici queſtion des propriétés des nombres qui occuperent tant les anciens, & dans leſquelles ils trouvoient tant de vertus myſtérieuſes. Pour peu qu'on ſoit doué d'un eſprit dégagé de crédulité, on ne peut s'empêcher de rire en voyant le bon chanoine de Cézene, Pierre Bungo, rassembler dans un volume in-4°, intitulé *de Mysteriis Numerorum*, toutes les sottises que Nicomaque, Ptolémée, Porphyre, & divers autres anciens, avoient puérilement débitées sur les nombres. Comment a-t-il pu entrer dans des esprits raisonnables, d'attribuer une énergie physique à des êtres purement métaphysiques? Car les nombres ne sont que pures appréhensions de l'esprit: conséquemment ils ne sçauroient avoir aucune influence dans la nature.

Il ne peut donc y avoir que des bonnes-femmes ou des sots qui puissent croire aux vertus des nombres. Si, de treize personnes assises à la même table, on a vu fréquemment en périr une dans l'année, il y a encore bien plus de probabilité qu'il en périra une si l'on est vingt-quatre.

I.

Le nombre 9 a cette propriété, que les chiffres qui composent ses multiples, ajoutés ensemble, sont toujours aussi un multiple de 9; ensorte que les additionnant, & rejettant 9 toutes les fois que la somme surpasse ce nombre, le reste est toujours zéro. Cela se remarque facilement dans les multiples de 9, comme 18, 27, 36, &c. &c.

Cette observation est utile pour reconnoître si un nombre est divisible par 9: car toutes les fois que les chiffres qui l'expriment, étant ajoutés ensemble, font 9 ou un de ses multiples, on peut être assuré que le nombre est divisible par 9, & conséquemment par 3.

Mais cette propriété est-elle unique ou particuliere au nombre 9? Non. Le nombre 3 a une propriété tout-à-fait semblable. Qu'on ajoute les chiffres qui expriment un multiple quelconque de 3, on verra que leur ſomme eſt pareillement toujours multiple de 3 ; & quand le nombre propoſé ne ſera pas un pareil multiple, ce qu'on trouvera en ſus de ce multiple en additionnant les chiffres, ſera auſſi ce dont le nombre propoſé eût dû être diminué, pour être diviſible par trois ſans reſte.

On peut employer cette remarque pour reconnoître, pour ainſi dire au premier coup d'œil, ſi une ſomme propoſée eſt payable en écus, ſans reſte : car ſi cette ſomme eſt telle, que les chiffres qui l'expriment, ajoutés enſemble, faſſent 3 ou un multiple de 3, elle ſera payable ſans reſte en écus, ſçavoir de ſix livres ſi elle eſt paire, & de trois livres ſi elle eſt impaire. Si les nombres qui expriment la ſomme en queſtion, forment par leur addition un nombre qui excede 3 ou un multiple de 3, ce dont il excédera ce multiple ſera le nombre de livres en ſus, qu'il faudra ajouter aux écus. Par exemple, ſoit propoſée la ſomme de 1343 livres : la ſomme des chiffres 1, 3, 4, 3, faiſant 11, ce qui ſurpaſſe de 2 le plus prochain multiple de 3, on pourra aſſurer que, pour payer cette ſomme, il faudra un certain nombre d'écus de trois livres & quarante ſous ; car, ôtant 2, le reſte eſt 1341, qui eſt payable en écus de trois livres, ainſi qu'il eſt aiſé de s'en aſſurer.

De même on trouvera que la ſomme 1327 eſt payable en écus de ſix livres avec vingt ſous : car ces quatre chiffres font 13, qui excedent 12 de 1 ; or, ôtant 1 de 1327, reſtent 1326, nombre qui eſt pair, & dont les chiffres faiſant 12, multiple de 3, indiquent que la ſomme eſt payable en écus de ſix livres. En effet, 1326 livres font 221 écus de ſix livres.

Nous ne devons pas omettre ici une obſervation très-ingénieuſe de l'auteur de l'Hiſtoire de l'Académie des Sciences (année 1726) ; c'eſt que, ſi nous euſſions adopté un ſyſtême de numération différent de celui qui eſt en uſage, par exemple, celui de la progreſſion duodécuple, nous verrions le nombre onze, ou en général l'avant-dernier de la période, jouir de la même propriété dont jouit le nombre neuf dans le ſyſtême actuel de numération. Prenons en effet un multiple de *onze*, comme neuf cents cinquante-ſept ; exprimons-les en chiffres ſuivant ce ſyſtême ; ce ſera 7φ5 ; or 7 & φ font dix-ſept, & 5 font vingt-deux, qui eſt un multiple de onze.

Nous n'entreprendrons pas ici de démontrer comment cette propriété eſt, pour ainſi dire, attachée à l'avant-dernier nombre de la période adoptée pour la numération ; cela nous engageroit dans une analyſe un peu trop compliquée. Nous laiſſons le lecteur s'exercer, s'il le juge à propos, ſur ce ſujet.

II.

Tout nombre quarré finit néceſſairement par un de ces cinq chiffres, 1, 4, 5, 6, 9 ; ou par des zéro en nombre pair, précédés de l'un de ces chiffres. Cela eſt aiſé à démontrer, & utile pour reconnoître quand un nombre n'eſt pas quarré. Nous diſons pour reconnoître quand un nombre n'eſt pas quarré ; car, quoiqu'un nombre finiſſe comme on vient de dire, il n'eſt cependant pas toujours un quarré parfait ; mais du moins, quand il ne finit pas de cette maniere, on eſt sûr qu'il ne l'eſt pas ; ce qui évite des tentatives inutiles.

Quant aux nombres cubes, ils peuvent finir par tous les nombres ſans exception ; mais s'ils ſe terminent par des zéro, il faut qu'ils ſoient au nombre de trois, ou ſix, ou neuf, &c.

III.

Tout nombre quarré ou eſt diviſible par trois, ou le devient étant diminué de l'unité. Il eſt facile d'en faire l'épreuve ſur tel quarré qu'on voudra. Ainſi 4 moins 1, 16 moins 1, 25 moins 1, 49 moins 1, 121 moins un, &c. ſont diviſibles par 3 ; & ainſi des autres : ce qu'on peut démontrer directement.

Tout quarré eſt encore diviſible par quatre, ou le devient étant diminué de l'unité. Il eſt également facile de l'éprouver.

Tout quarré eſt auſſi diviſible par cinq, ou le devient étant augmenté ou diminué de l'unité ; ce qu'on peut également démontrer. Ainſi $36-1$, $49+1$, $64+1$, $81-1$, &c. ſont diviſibles par 5.

Tout quarré impair eſt un multiple de 8, augmenté de l'unité. On en a des exemples dans 9, 25, 49, 81, &c. deſquels ôtant 1, le reſte eſt diviſible par 8.

IV.

Tout nombre eſt ou quarré, ou diviſible en deux, ou trois, ou quatre quarrés. Ainſi 30 eſt égal à $25+4+1$; $31=25+4+1+1$; $33=16+16+1$; $63=49+9+4+1$, ou $36+25+1+1$.

J'ajouterai ici, par anticipation, quoiqu'on ne ſçache pas encore ce que c'eſt que nombre triangulaire, pentagone, &c. que

Tout nombre eſt ou triangulaire, ou compoſé de deux ou trois triangulaires.

Il eſt ou pentagone, ou compoſé de deux, ou trois, ou quatre, ou cinq pentagones; & ainſi des autres.

J'ajouterai enfin que tout quarré pair, hors le premier 1, eſt réſoluble au moins en quatre quarrés égaux; & que tout quarré impair l'eſt au moins en trois, s'il ne l'eſt en deux. Ainſi $81=36+36+9$; $121=81+36+4$; $169=144+25$; $625=400+144+81$.

V.

Toute puiſſance de cinq ou de ſix, finit néceſſairement par cinq ou par ſix.

VI.

Si on prend deux nombres quelconques, l'un des deux, ou leur ſomme, ou leur différence, eſt néceſſairement diviſible par trois. Soient pris les nombres 20 & 17; aucun d'eux, ni leur ſomme 37, n'étant pas diviſible par 3, leur différence l'eſt, car elle eſt trois.

Il eſt aiſé de démontrer que cela doit arriver néceſſairement, quels que ſoient les nombres qu'on prendra.

VII.

Si deux nombres ſont tels, que leurs quarrés ajoutés enſemble faſſent un quarré, le produit de ces deux nombres eſt diviſible par ſix.

Tels ſont, pour en donner un exemple, les nombres 3 & 4, dont les quarrés 9 & 16 ajoutés enſemble font le nombre quarré 25: leur produit 12 eſt diviſible par 6.

La démonſtration générale de cette propriété ne ſçauroit trouver place ici ; mais l'on peut tirer de ce qu'on vient de dire, un moyen de

Trouver deux nombres dont les quarrés ajoutés enſemble faſſent un nombre quarré. Pour cet effet, multipliez deux nombres quelconques ; le double de leur produit ſera l'un des deux nombres cherchés, & la différence de leurs quarrés ſera l'autre.

Comme ſi l'on multiplie l'un par l'autre ces deux nombres 2, 3, dont les quarrés ſont 4, 9, leur produit ſera 6, dont le double 12, & la différence de leurs quarrés 5, ſont deux nombres tels que la ſomme de leurs quarrés eſt égale à un autre nombre quarré : car ces quarrés ſont 144 & 25, qui ſont 169, quarré de 13.

VIII.

Lorſque deux nombres ſont tels, que la différence de leurs quarrés eſt un nombre quarré, la ſomme & la différence de ces nombres ſont elles-mêmes un nombre quarré, ou le double.

Tels ſont, par exemple, les nombres 13 & 12, dont les quarrés ſont 169, 144, dont la différence eſt 25, qui eſt auſſi un quarré ; la ſomme de ces nombres eſt 25, nombre quarré.

Les nombres 6 & 10 ayant pour quarrés 36 & 100, dont la différence eſt 64, nombre quarré, on trouve que leur ſomme eſt 16, qui eſt auſſi un nombre quarré, ainſi que leur différence 4.

Les nombres 8 & 10 ayant des quarrés dont la différence eſt 36, on voit auſſi que la ſomme de ces nombres eſt 18, qui eſt double de 9, nombre quarré ; & leur différence 2 eſt le double de 1, nombre quarré, &c.

IX.

Si on multiplie deux nombres dont la différence eſt 2, leur produit augmenté de l'unité ſera le quarré du nombre intermédiaire.

Ainſi le produit de 12 par 14 eſt 168, qui, augmenté de 1, donne 169, quarré de 13, nombre moyen entre 12 & 14.

Rien n'eſt plus aiſé que de démontrer que cela doit toujours arriver; & l'on verra qu'en général le produit de deux nombres, augmenté du quarré de la demi-différence, donne le quarré du nombre moyen.

X.

On appelle nombre *premier*, celui qui n'a d'autre diviſeur que l'unité. Les nombres de cette eſpece ne peuvent donc être pairs, à l'exception du nombre deux; ni être terminés par cinq, excepté le nombre cinq lui-même : d'où il ſuit qu'à l'exception de ceux qui ſont renfermés dans la premiere dixaine, ils doivent néceſſairement ſe terminer par un, ou trois, ou ſept, ou neuf.

N. B. Voici une propriété curieuſe des nombres premiers. *Tout nombre premier* (hors 2 & 3) *étant augmenté ou diminué de l'unité, eſt diviſible par ſix.* Il eſt aiſé de le voir par l'exemple de tous ceux qu'on voudra, comme 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c.; mais je ne crois pas que perſonne l'ait démontré *à priori.*

Mais l'inverſe n'eſt pas vraie, c'eſt-à-dire tout nombre qui, augmenté ou diminué de l'unité, eſt diviſible par ſix, n'eſt pas pour cela un nombre premier.

Il eſt ſouvent utile de connoître, ſans recourir au calcul, ſi un nombre eſt premier ou non : c'eſt pour cela que nous donnerons ici une Table de tous les nombres premiers depuis un juſqu'à 10000.

TABLE

Des Nombres premiers entre 1 & 10000.

2	199	461	743	1039	1361	1663	1999	2339	2683
3	211	463	751	1049	1367	1667	2003	2341	2687
5	223	467	757	1051	1373	1669	2011	2347	2689
7	227	479	761	1061	1381	1693	2017	2351	2693
11	229	487	769	1063	1399	1697	2027	2357	2699
13	233	491	773	1069	1409	1699	2029	2371	2707
17	239	499	787	1087	1423	1709	2039	2377	2711
19	241	503	797	1091	1427	1721	2053	2381	2713
23	251	509	811	1093	1429	1723	2063	2383	2719
29	257	521	821	1097	1433	1733	2069	2389	2729
31	263	533	823	1103	1439	1741	2081	2393	2731
37	269	541	827	1109	1447	1747	2083	2399	2741
41	271	547	829	1117	1451	1753	2087	2411	2749
43	277	557	839	1123	1453	1759	2089	2417	2753
47	281	563	853	1129	1459	1777	2099	2423	2767
53	283	569	857	1151	1471	1783	2111	2437	2777
59	293	571	859	1153	1481	1787	2113	2441	2789
61	307	577	863	1163	1483	1789	2129	2447	2791
67	311	587	877	1171	1487	1801	2131	2459	2797
71	313	593	881	1181	1489	1811	2137	2467	2801
73	317	599	883	1187	1493	1823	2141	2473	2803
79	331	601	887	1193	1499	1831	2143	2477	2819
83	337	607	907	1201	1511	1847	2153	2503	2833
89	347	613	911	1213	1523	1861	2161	2521	2837
97	349	617	919	1217	1531	1867	2179	2531	2843
101	353	619	929	1223	1543	1871	2203	2539	2851
103	359	631	937	1229	1549	1873	2207	2543	2857
107	367	641	941	1231	1553	1877	2213	2549	2861
109	373	643	947	1237	1559	1879	2221	2551	2879
113	379	647	953	1249	1567	1889	2237	2557	2887
127	383	653	967	1259	1571	1901	2239	2579	2897
131	389	659	971	1277	1579	1907	2243	2591	2903
137	397	661	977	1279	1583	1913	2251	2593	2909
139	401	673	983	1283	1597	1931	2267	2609	2917
149	409	677	991	1289	1601	1933	2269	2617	2927
151	419	683	997	1291	1607	1949	2273	2621	2939
157	421	691	1009	1297	1609	1951	2281	2633	2953
163	431	701	1013	1301	1613	1973	2287	2647	2957
167	433	709	1019	1303	1619	1979	2293	2657	2963
173	439	719	1021	1307	1621	1987	2297	2659	2969
179	443	727	1031	1319	1627	1993	2309	2663	2971
181	449	733	1033	1321	1637	1997	2311	2671	2999
191	457	739		1327	1657		2333	2677	
193									
197									

TABLE des Nombres premiers entre 1 & 10000.

3001	3389	3739	4127	4513	4919		5683	6079	6451
3011	3391	3761	4129	4517	4931	5303	5689	6089	6469
3019		3767	4133	4519	4933	5309	5693	6091	6473
3023	3407	3769	4139	4523	4937	5323			6481
3037	3413	3779	4153	4547	4943	5333	5701	6101	6491
3041	3433	3793	4157	4549	4951	5347	5711	6113	
3049	3449	3797	4159	4561	4957	5351	5717	6121	6521
3061	3457		4177	4567	4967	5381	5737	6131	6529
3067	3461	3803		4583	4969	5387	5741	6133	6547
3079	3463	3821	4201	4591	4973	5393	5743	6143	6551
3083	3467	3823	4211	4597	4987	5399	5749	6151	6553
3089	3469	3833	4217		4993		5779	6163	6563
	3491	3847	4219	4603	4999	5407	5783	6173	6569
3109	3499	3851	4229	4621		5413	5791	6197	6571
3119		3853	4231	4637	5003	5417		6199	6577
3121	3511	3863	4241	4639	5009	5419	5801		6581
3137	3517	3877	4243	4643	5011	5431	5807	6203	6599
3163	3527	3881	4253	4649	5021	5437	5813	6211	
3167	3529	3889	4259	4651	5023	5441	5821	6217	6607
3169	3533		4261	4657	5039	5443	5827	6221	6619
3181	3539	3907	4271	4663	5051	5449	5839	6229	6637
3187	3541	3911	4273	4673	5059	5471	5843	6247	6653
3191	3547	3917	4283	4679	5077	5477	5849	6257	6659
	3557	3919	4289	4691	5081	5479	5851	6263	6661
3203	3559	3923	4297		5087	5483	5857	6269	6673
3209	3571	3929		4703	5099		5861	6271	6679
3217	3581	3931	4327	4721		5501	5867	6277	6689
3221	3583	3943	4337	4723	5101	5503	5869	6287	6691
3229	3593	3947	4339	4729	5107	5507	5879	6299	
3251		3967	4349	4733	5113	5519	5881		6701
3253	3607	3989	4357	4751	5119	5521	5897	6301	6703
3257	3613		4363	4759	5147	5527		6311	6709
3259	3617	4001	4373	4773	5153	5531	5903	6317	6719
3271	3623	4003	4391	4787	5167	5557	5923	6323	6733
3299	3631	4007	4397	4789	5171	5563	5927	6329	6737
	3637	4013		4793	5179	5569	5939	6337	6761
3301	3643	4019	4409	4799	5189	5573	5953	6343	6763
3307	3659	4021	4421		5197	5581	5981	6353	6779
3313	3671	4027	4423	4801		5591	5987	6359	6781
3319	3673	4049	4441	4813	5209			6361	6791
3323	3677	4051	4447	4817	5227	5623	6007	6367	6793
3329	3691	4057	4451	4831	5231	5639	6011	6373	
3331	3697	4073	4457	4861	5233	5641	6029	6379	6803
3343		4079	4463	4871	5237	5647	6037	6389	6823
3347	3701	4091	4481	4877	5261	5651	6043	6397	6827
3359	3709	4093	4483	4889	5273	5653	6047		6829
3361	3719	4099	4493		5279	5657	6053	6421	6833
3371	3727			4903	5281	5659	6067	6427	6841
3373	3733	4111	4507	4909	5297	5669	6073	6449	6857

TABLE des Nombres premiers entre 1 & 10000.

6863	7187	7517	—	8123	8447	8753	9067	9391	9689
6869	7193	7523	7817	8147	8461	8761	9091	9397	9697
6871	—	7529	7823	8161	8467	8779	—	—	—
6883	7207	7537	7829	8167	—	8783	9103	9403	9719
6899	7211	7541	7841	8171	8501	—	9109	9413	9721
—	7213	7547	7853	8179	8513	8803	9127	9419	9733
6907	7219	7549	7867	8191	8521	8807	9133	9421	9739
6911	7229	7559	7873	—	8527	8819	9137	9431	9743
6917	7237	7561	7877	8209	8537	8821	9151	9433	9749
6947	7243	7573	7879	8219	8539	8831	9157	9437	9767
6949	7247	7577	7883	8221	8543	8837	9161	9439	9769
6959	7253	7583	—	8231	8563	8839	9173	9461	9781
6961	7283	7589	7901	8233	8573	8849	9181	9463	9787
6967	7297	7591	7907	8237	8581	8861	9187	9467	9791
6971	—	—	7917	8243	8597	8863	9199	9473	—
6977	7307	7603	7927	8263	8599	8867	—	9479	9803
6983	7309	7607	7933	8269	—	8887	9203	9491	9811
6991	7321	7621	7937	8273	8609	8893	9209	9497	9817
6997	7331	7639	7949	8287	8623	—	9221	—	9829
—	7333	7643	7951	8291	8627	8923	9227	9511	9833
7001	7349	7649	7963	8293	8629	8929	9239	9521	9839
7013	7351	7669	7993	8297	8641	8933	9241	9533	9851
7019	7369	7673	—	—	8647	8941	9257	9539	9857
7027	7393	7681	8009	8311	8663	8951	9277	9547	9859
7039	—	7687	8011	8317	8669	8963	9281	9551	9871
7043	7411	7691	8017	8329	8677	8969	9283	9587	9883
7057	7417	7699	8039	8353	8681	8971	9293	—	9887
7069	7433	—	8053	8363	8689	8999	—	9601	—
7079	7451	7703	8059	8369	8693	—	9311	9613	9901
—	7457	7717	8069	8377	8699	9001	9319	9619	9907
7103	7459	7723	8081	8387	—	9007	9323	9623	9923
7109	7477	7727	8087	8389	8707	9011	9337	9629	9929
7121	7481	7741	8089	—	8713	9013	9341	9631	9931
7127	7487	7753	8093	8419	8719	9029	9343	9643	9941
7129	7489	7757	—	8423	8731	9041	9349	9649	9949
7151	7499	7759	8101	8429	8737	9043	9371	9661	9967
7159	—	7789	8111	8431	8741	9049	9377	9677	9973
7177	7507	7793	8117	8443	8747	9059		9679	

XI.

Voici une autre espece de nombres qui jouissent d'une propriété singuliere & curieuse : ce sont les nombres *parfaits*. On donne ce nom à un nombre dont les parties aliquotes ajoutées ensemble, forment

forment précisément ce nombre même. On en a un exemple dans le nombre 6 ; car ses parties aliquotes sont 1, 2, 3, qui font ensemble 6. Le nombre 28 jouit de la même propriété ; car ses parties aliquotes sont 1, 2, 4, 7, 14, dont la somme est 28.

Pour trouver tous les nombres parfaits de la progression numérique, prenez la progression double 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, &c. & examinez tous ceux de ces termes qui, étant diminués de l'unité, sont des nombres premiers. Ceux à qui convient cette propriété sont 4, 8, 32, 128, 8192 ; car ces nombres diminués de l'unité, sont 3, 7, 31, 127, 8191. Multipliez donc chacun de ces nombres, par celui de la progression géométrique qui précédoit celui dont il dérive, par exemple, 3 par 2, 7 par 4, 31 par 16, 127 par 64, 8191 par 4096, &c. ; & vous aurez 6, 28, 496, 8128, 33550336, qui seront des nombres parfaits.

Ces nombres au reste ne sont pas à beaucoup près aussi nombreux que l'ont cru divers auteurs (*a*). Voici, d'après un mémoire de M. Krafft, qu'on lit dans le Tome VII des Mémoires de Pétersbourg, une suite des nombres tant parfaits, que réputés parfaits par ces auteurs, faute d'attention suffisante. Ceux à qui convient véritablement cette propriété, sont marqués d'une étoile.

(*a*) La regle que donne M. Ozanam est fausse, & produit une multitude de nombres, comme 130816, 2096128, &c. qui ne sont point des nombres parfaits : cela vient de ce que M. Ozanam n'a pas fait attention qu'il falloit que l'un des multiplicateurs fût un nombre premier. Or 511 & 2047 ne le sont pas.

* 6.
* 28.
* 496.
* 8128.
130816.
2096128.
* 33550336.
536854528.
* 8589869056.
* 137438691328.
2199022206976.
35184367894528.
562949936644096.
9007199187632128.
144115187807420416.
* 2305843008139952128.
36893488143124135936.

Ainsi l'on voit que de 1 à 10 il n'y a qu'un nombre parfait, un depuis 10 jusqu'à 100, un depuis 100 jusqu'à 1000, un depuis 1000 jusqu'à 10000 : mais on se tromperoit si on en concluoit qu'il y en a pareillement un depuis dix mille jusqu'à cent mille, un depuis cent mille jusqu'à un million, &c.; car depuis dix mille jusqu'à huit cents millions il ne s'en trouve plus qu'un. La rareté des nombres parfaits, dit un auteur, est un symbole de celle de la perfection.

Tous les nombres parfaits sont terminés par 6 ou 28, mais non alternativement.

XII.

Il y a des nombres qu'on nomme *amiables* entr'eux, à cause d'une propriété qui leur donne une sorte d'affinité. Elle consiste en ce que les parties aliquotes de l'un ſont enſemble égales à l'autre, & que celles de celui-ci forment à leur tour une ſomme égale au premier : tels ſont les nombres 220 & 284 ; car le premier 220, eſt égal à la ſomme des parties aliquotes de 284, ſçavoir, 1, 2, 4, 71, 142 ; & réciproquement 284 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 du premier 220.

On trouvera des nombres amiables par la méthode ſuivante. Ecrivez, comme on le voit ci-après, les termes de la progreſſion géométrique double, en commençant par 2 ; triplez chacun de ces termes, & placez ces nombres triples chacun ſous celui dont il eſt formé ; ces mêmes nombres diminués de l'unité, 5, 11, 23, &c. & placés chacun au deſſus de ſon correſpondant de la progreſſion géométrique, formeront une troiſieme ſuite au deſſus de cette derniere. Enfin on aura les nombres de la ſuite inférieure, 71, 287, &c. en multipliant chacun des termes de la ſuite 6, 12, 24, &c. par ſon précédent, & diminuant le produit de l'unité.

5	11	23	47	95	191	383.
2	4	8	16	32	64	128.
6	12	24	48	96	192	384.
	71	287	1151	4607	18431	73727.

Prenez à préſent un nombre de la ſuite inférieure, par exemple 71, dont le nombre correſpondant dans la ſuite ſupérieure, ſçavoir 11, & celui qui précede ce dernier, ſçavoir 5, ſont, ainſi que 71, des nombres premiers ; multipliez 5 par 11, & le produit 55 par 4, terme correſpondant de la ſuite géométrique, vous aurez 220 pour l'un des nombres cherchés ; le ſecond ſe trouvera en multipliant le nombre 71 par le même nombre 4, ce qui donnera 284.

Pareillement avec 1151, 47 & 23, qui ſont des nombres premiers, on trouveroit deux autres nombres amiables, 17296 & 18416; mais 4607 n'en donneroit pas, parce que, des deux autres nombres correſpondants 47 & 95, celui-ci 95 n'eſt pas premier. Il en eſt de même du nombre 18431, parce que le nombre 95 ſe trouve parmi ſes correſpondants; mais le ſuivant 73727 donne, avec 383 & 191, deux nouveaux nombres amiables, 9363584 & 9437056.

On voit par-là que ſi les nombres parfaits ſont rares, les couples de nombres amiables le ſont bien davantage, ce dont il eſt au reſte bien aiſé d'appercevoir la raiſon.

XIII.

Si on prend la ſuite des quarrés des nombres naturels, ſçavoir, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. qu'on prenne la différence de chacun avec le ſuivant, & enſuite les différences de ces différences, ces dernieres ſeront égales à 2, ainſi qu'on le voit par l'exemple ci-deſſous.

	1	4	9	16	25	36	49
1res *Diff.*	3	5	7	9	11	13	
2es *Diff.*	2	2	2	2	2		

Ainſi l'on voit que les nombres quarrés ſont formés par l'addition continuelle des nombres impairs 1, 3, 5, &c. qui ſe ſurpaſſent de 2.

Dans la ſuite des cubes des nombres naturels, ſçavoir, 1, 8, 27, &c. ce ne ſont plus les ſecondes différences qui ſont égales, mais ſeulement les troisiemes, qui sont toujours 6. L'exemple ci-dessous le met sous les yeux.

Cubes.	1		8		27		64		125		216
1res Diff.		7		19		37		61		91	
2es Diff.			12		18		24		30		
3es Diff.				6		6		6			

S'il est question de la suite des quatriemes puissances, ou quarré-quarrés des nombres naturels, ce seront les quatriemes différences seulement qui seront égales, & elles seront 24. Dans le cas de cinquiemes puissances, les cinquiemes différences seulement seront égales, & seront constamment 120.

On trouve ces nombres 2, 6, 24, 120, &c. en multipliant de suite les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Pour la deuxieme puissance, on multiplie les deux premiers; pour la troisieme, les trois premiers; & ainsi de suite.

XIV.

La progression des cubes 1, 8, 27, 64, 125, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. a cette propriété remarquable, qu'en ajoutant tel nombre qu'on voudra de ses termes, en commençant par le premier, cette somme sera toujours un quarré. Ainsi 1 & 8 font 9: ajoutez-y encore 27, vous aurez 36, nombre quarré; & en y ajoutant 64, vous aurez 100; & ainsi de suite.

XV.

Le nombre 120 a la propriété d'être égal à la moitié de la somme de ses parties aliquotes ou diviseurs, sçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, qui font ensemble 240. Le nombre 672 est pareillement la moitié de la somme 1344 de ses parties aliquotes. On pourroit en trouver plusieurs autres qui jouissent de la même propriété ; on pourroit même en trouver qui ne seroient que le tiers ou le quart de la somme de leurs parties aliquotes; enfin qui en fussent le double, le triple, le quadruple. Voilà de la matiere aux recherches de ceux qui voudront s'exercer.

CHAPITRE IV.

Des Nombres figurés.

SI l'on a une progression arithmétique, la plus simple de toutes, par exemple, comme celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. & qu'on prenne le premier terme, la somme des deux premiers, celle des trois premiers, & ainsi de suite, il en résultera une nouvelle suite de nombres, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c. auxquels on a donné le nom de *triangulaires*, parce qu'ils peuvent toujours être rangés en triangle équilatéral, comme
Pl. 1. l'on voit *Planche* 1, *fig.* 3.
fig. 3. Les nombres quarrés, comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. naissent d'une pareille addition des premiers termes de la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. dont la différence des termes est 2. Ces nombres se peuvent pareillement ranger en figures quarrées, comme tout le monde sçait.

De pareille sommation des termes de la progression arithmétique, dont la différence est 3, comme 1, 4, 7, 10, 13, &c. naissent les nombres 1, 5, 12, 22, &c. qu'on appelle pentagones, parce qu'ils repréſentent le nombre des points qui peuvent s'arranger ſur les côtés & dans l'intérieur d'un pentagone régulier, comme on le voit dans la *fig.* 5, où ſont trois pentagones dans un angle commun, repréſentant le nombre des points qui croît arithmétiquement, & dont le premier a deux points ſur chaque côté, le ſecond trois, le troiſieme quatre, ce qui pourroit être continué. Pl. 1. fig. 5.

C'eſt dans ce ſens & de cette maniere qu'on doit concevoir arrangés les nombres figurés.

Il eſt preſque inutile de dire que de la progreſſion 1, 5, 9, 13, 17, &c. dont la différence eſt 4, naiſſent, par une pareille ſommation, les nombres exagones, qui ſont 1, 6, 15, 28, 45, &c; & ainſi de ſuite pour les eptagones, octogones, &c.

Il y a une autre ſorte de nombres polygones, qui réſultent du nombre des points qu'on peut ranger au centre & ſur les côtés d'un ou de pluſieurs polygones ſemblables, ayant un centre commun: ils different des précédents, car la ſuite des triangulaires de cette eſpece eſt 1, 4, 10, 19, 31, &c. qui ſont formés par l'addition ſucceſſive des nombres 1, 3, 6, 9, 12.

Les nombres quarrés centraux ſont 1, 5, 13, 25, 41, 61, &c. formés pareillement par l'addition ſucceſſive des nombres 1, 4, 8, 12, 16, 20, &c.

Les pentagones centraux ſont 1, 6, 16, 31, 51, 76, &c. formés par l'addition des nombres 1, 5, 10, 15, 20, &c.

Mais nous n'en dirons pas davantage ſur cette eſpece de nombres polygones, parce que ce ne ſont pas ceux que les mathématiciens entendent communément par ce nom. Revenons aux nombres polygones ordinaires.

On appelle la racine d'un nombre polygone, le nombre des termes de la progreſſion qu'il a fallu ſommer pour avoir ce nombre. Ainſi la racine du nombre triangulaire 21 eſt 6, parce que ce nombre réſulte de l'addition ſucceſſive des ſix nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. De même 4 eſt la racine du nombre quarré 16, conſidéré comme nombre figuré, parce que ce nombre réſulte de l'addition des quatre termes 1, 3, 5, 7, de la progreſſion des nombres impairs.

Après cette expoſition, voici quelques problêmes ſur les nombres polygones.

PROBLÊME I.

Un nombre étant propoſé, trouver s'il eſt triangulaire, quarré, pentagone, &c.

La maniere de trouver ſi un nombre eſt quarré, eſt connue de tout le monde, & ſert de baſe pour reconnoître les autres nombres figurés. Cela ſuppoſé, pour déterminer ſi un nombre propoſé eſt un nombre polygone, voici la regle générale.

Multipliez par 8 le nombre des angles du polygone diminué de 2, & par ce premier produit multipliez le nombre propoſé, & enfin, à ce nouveau produit ajoutez le quarré du nombre égal à celui des angles du polygone diminué de 4; ſi la ſomme eſt un quarré parfait, le nombre propoſé eſt un polygone de l'eſpece déterminée.

Il eſt aiſé de voir que le nombre des angles étant 3 pour le triangle, 4 pour le quarré, 5 dans le pentagone, &c. on aura pour le multiplicateur du nombre propoſé, dans le cas du nombre triangulaire, 8; pour le nombre quadrangulaire, 16; pour le pentagone, 24; pour l'exagone, 32.

Pareillement le nombre des angles, diminué de 4, étant pour le triangle − 1, pour le quarré 0, pour le pentagone 1, pour l'exagone 2, &c. les nombres à ajouter au produit ci-dessus seront, pour le triangle, 1, (car le quarré de − 1 est 1); pour le quarré, 0; pour le pentagone, 1; pour l'exagone, 4; pour l'eptagone, 9, &c. : d'où dérivent les regles suivantes, que nous éclaircirons en même temps par des exemples.

On demande si 21 est un nombre triangulaire. Multipliez 21 par 8, au produit ajoutez 1; la somme est 169, qui est un quarré parfait : conséquemment 21 est un nombre triangulaire.

Voulez-vous reconnoître si 35 est un pentagone? Multipliez 35 par 24, le produit est 840; à quoi ajoutant 1, on a 841 qui est un quarré : donc on peut assurer que 35 est un nombre pentagone.

PROBLÊME II.

Un nombre triangulaire ou figuré quelconque étant donné, trouver sa racine, ou le nombre de termes de la progression arithmétique dont il est la somme.

Il faut d'abord faire l'opération indiquée dans le problême précédent; & après avoir trouvé la racine quarrée, dont la possibilité indique si le nombre est figuré ou non, *ajoutez à cette racine un nombre égal à celui des angles du polygone proposé, moins 4, & divisez cette somme par le double du même nombre des angles diminué de 2; le quotient qui en proviendra sera la racine du polygone.*

Le nombre à ajouter est donc pour le triangle − 1, c'est-à-dire 1 à ôter; il est 0 pour le quarré, 1 pour le pentagone, 2 pour l'exagone, &c.

Quant au diviſeur, il eſt aiſé de voir qu'il eſt 2 pour le triangle, (car le double de 3 diminué de 2, eſt 2); pour le quarré c'eſt 4, pour le pentagone 6, pour l'exagone 8, &c.

Soit donc demandé la racine du nombre triangulaire 36. Après avoir fait l'opération développée par le problême précédent, & avoir trouvé le produit 289, dont la racine quarrée eſt 17, ôtez de ce nombre l'unité, & diviſez le reſtant par 2; le quotient 8 ſera la racine ou le côté du nombre triangulaire égal à 36.

On demande maintenant quelle eſt la racine du pentagone 35. Ayant trouvé, comme ci-deſſus, la racine 29, ajoutez-y 1, ce qui donne 30, & diviſez par 6; le quotient 5 ſera la racine de ce nombre pentagone, c'eſt-à-dire qu'il eſt formé par l'addition des 5 nombres 1, 4, 7, 10, 13.

PROBLÊME III.

La racine d'un nombre polygone étant donnée, trouver ce nombre.

LA regle eſt fort ſimple. *Prenez le quarré de la racine donnée, ôtez-en le produit de cette même racine, par le nombre égal à celui des angles diminué de 4; la moitié du reſtant ſera le polygone cherché.*

Donnons quelques exemples de cette regle. Quel eſt, demande-t-on, le nombre triangulaire dont la racine eſt 12? Le quarré de 12 eſt 144; le nombre égal à celui des angles moins 4, eſt −1, qui multipliant 12, donne −12: or il faudroit, ſuivant la regle, ôter −12, ce qui eſt la même choſe qu'ajouter 12; on aura donc 156, qui étant partagé par la moitié, donne 78.

Quel eſt le nombre eptagone dont la racine eſt 20? Pour le trouver, je prends le quarré de 20, qui eſt 400; je multiplie enſuite 20 par 3, qui eſt le nombre des angles diminué de 4; j'ai 60, que j'ôte de 400; le reſte eſt 340, que je diviſe par 2; le quotient 170 eſt le nombre cherché, ou l'eptagone dont la racine eſt 20.

Remarquons ici, avant de finir, que le même nombre peut être polygone ou figuré de différentes manieres. Et d'abord tout nombre plus grand que 3, eſt polygone d'un nombre de côtés ou d'angles égal à celui de ſes unités.

Ainſi 36 eſt un polygone de 36 côtés, dont la racine eſt 2; car les deux premiers termes de la progreſſion ſont 1, 35. Le même nombre 36 eſt quarré; enfin il eſt triangulaire, ayant pour racine 8.

Pareillement 21 eſt à la fois polygone de 21 côtés; il eſt auſſi triangulaire; & il eſt enfin octogone.

PROBLÊME IV.

Trouver la ſomme de tant de nombres triangulaires, ou de tant de nombres quarrés, ou de tant de nombres pentagones qu'on voudra.

De même qu'en ajoutant ſucceſſivement les termes de différentes progreſſions arithmétiques, il en eſt réſulté de nouvelles progreſſions de nombres qu'on a nommés triangulaires, quarrés, pentagones, &c. on peut auſſi ſommer ces dernieres progreſſions; ce qui donne naiſſance à des nombres figurés d'un ordre ſupérieur, qu'on appelle *pyramidaux*. On donne le nom de pyramidaux du premier ordre, à ceux qui viennent de la progreſſion des nombres triangulaires : les *pyramidaux du deuxieme ordre* ſont ceux qui viennent de la ſommation des nombres quarrés : ceux du troiſieme ordre proviennent de la progreſſion des pentagones. On peut enfin faire la même ſpéculation ſur les nombres pyramidaux ; ce qui engendre les *pyramido - pyramidaux*. Mais le peu d'utilité de ces nombres, qui peuvent tout au plus donner lieu à des recherches propres à exercer & développer l'eſprit analytique, ne nous permet pas de nous étendre davantage ſur ce ſujet. Nous nous bornerons à donner une regle générale pour ſommer tant de nombres figurés qu'on voudra.

Prenez le cube du nombre de termes à ſommer, & multipliez-le par le nombre des angles du polygone diminué de 2 ; ajoutez à la ſomme trois fois le quarré du même nombre de termes à ſommer ; ſouſtraiſez enfin le produit de ce même nombre, par celui des angles diminué de 5 ; vous aurez une ſomme qui, étant toujours diviſée par 6, donnera celle des termes de la progreſſion.

Soient les huit premiers nombres triangulaires dont on demande la ſomme. Le cube de 8 eſt 512 ; ce qui, multiplié par le nombre des angles du polygone diminué de 2, ou par 1, donne encore 512 ; ajoutez-y le triple du quarré de 8 ou 192 ; enfin, comme le nombre des angles moins 5 donne −2 qui doit multiplier le côté 8, ce qui donne −16, ajoutez à la ſomme ci-deſſus 704 ce nombre 16 ; vous aurez 720, qui, diviſé par 6, donnera 120 pour la ſomme des huit premiers nombres triangulaires.

On la trouvera au reſte plus facilement, en multipliant de ſuite le nombre 8 des termes demandés, par 9, & le produit par 10 ; ce qui donnera également 720, qu'il faudra diviser par 6, & l'on aura 120, comme ci-dessus.

Dans le cas d'une suite de quarrés, que je suppose au nombre de 10, il n'y aura qu'à faire le produit du nombre de termes, sçavoir 10, de ce même nombre augmenté de l'unité ou 11, & enfin du double du même nombre, plus 1, c'est-à-dire 21; le produit de ces trois nombres 2310, divisé par 6, donne 385, qui est la somme des dix premiers nombres quarrés 1, 4, 9, 16, &c.

CHAPITRE V.

Des Triangles rectangles en nombres.

On appelle triangle rectangle en nombres, trois nombres tels que la somme des quarrés de deux est égale au quarré du troisieme. Tels sont, par exemple, les trois nombres 3, 4, 5, qui expriment le triangle rectangle le plus simple de tous; car le quarré de 3 qui est 9, étant ajouté à celui de 4 qui est 16, la somme est 25 qui est le quarré de 5. Les nombres 3, 4, 5, expriment donc les trois côtés d'un triangle rectangle.

Ces nombres au reste doivent nécessairement être inégaux; car si deux de ces nombres étoient égaux, ce seroient les deux côtés d'un triangle rectangle isoscele : or il est démontré que, dans ces cas; l'hypothénuse ne sçauroit être exprimée par un nombre rationnel, entier ou fractionnaire, puisqu'un pareil triangle est la moitié d'un quarré dont les deux côtés égaux sont les côtés, & la base ou l'hypothénuse est la diagonale : or la diagonale est incommensurable au côté.

Il eſt encore néceſſaire que les trois nombres qui forment le triangle ſoient rationaux, ſoit entiers, ſoit fractions ; car ſans cela il n'y auroit aucun art à trouver tant de nombres de cette eſpece qu'on voudroit, puiſqu'il n'y auroit qu'à prendre deux nombres quelconques, comme 2 & 6, dont la ſomme des quarrés eſt 40, & l'hypothénuſe ſeroit $\sqrt{40}$; mais $\sqrt{40}$ ne ſignifie rien de précis, & ce n'eſt qu'un ſigne de l'extraction de la racine de 40, qui eſt impoſſible.

Après ces détails, nous allons propoſer ſur les triangles rectangles en nombres, quelques-uns des problêmes les plus curieux & les moins épineux.

PROBLÊME I.

Trouver tant de Triangles rectangles en nombres qu'on voudra.

PRENEZ deux nombres à volonté, que nous nommerons générateurs, par exemple, 1 & 2 ; multipliez-les enſemble, & doublez le produit : ce double, qui eſt ici 4, ſera un des côtés du triangle. Faites enſuite les quarrés des deux nombres générateurs, qui ſeront, dans l'exemple actuel, 4 & 1. Leur différence donnera le ſecond côté 3 du triangle, & leur ſomme 5 ſera l'hypothénuſe. Ainſi le triangle dont les nombres générateurs ſont 1 & 2, eſt 3, 4, 5.

Si l'on avoit pris pour nombres générateurs 2 & 3, on auroit trouvé 5, 12 & 13 ; les nombres 1 & 3 euſſent donné 6, 8 & 10.

Autre maniere. Prenez une progreſſion de nombres entiers & fractionnaires, comme $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$,

$3\frac{3}{7}$, $4\frac{4}{9}$, &c. dont la propriété eſt celle-ci: 1° Les nombres entiers ont pour différence l'unité, & ſont ceux de la ſuite naturelle. 2° Les numérateurs des fractions jointes aux entiers, ſont auſſi les nombres naturels. 3° Les dénominateurs de ces mêmes fractions ſont les nombres impairs 3, 5, 7, &c. Expoſons maintenant l'uſage de cette progreſſion.

Prenez un terme quelconque, par exemple, $3\frac{3}{7}$, & réduiſez-le en forme de fraction, en multipliant l'entier 3 par 7, & ajoutant au produit 21 le numérateur 3; vous aurez l'expreſſion ſous la forme fractionnaire $\frac{24}{7}$. Les nombres 7 & 24 ſeront les côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuſe ſe trouvera en ajoutant 49 & 576; ce qui donne 625, dont la racine quarrée 25 eſt l'hypothénuſe cherchée. Ainſi le triangle donné par ce terme de la progreſſion génératrice, eſt 7, 24, 25.

Le premier terme $1\frac{1}{3}$ donne le triangle rectangle 3, 4, 5;

Le deuxieme $2\frac{2}{5}$, donne 5, 12, 13;

Le troiſieme $4\frac{4}{9}$, donne 9, 40, 41, tous triangles de rapports différents entre les côtés, & qui ont tous cette propriété, que le plus grand côté & l'hypothénuſe ne different que de l'unité.

Voici une autre progreſſion de même nature que la précédente, ſçavoir, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, &c. Le premier terme donne le triangle rectangle 8, 15, 17; le deuxieme produit 12, 35, 37; du troiſieme dérive le triangle 16, 63, 65, &c. Ils ſont, comme l'on voit auſſi, tous de proportions différentes, & ont la propriété particuliere, que leur plus grand côté & l'hypothénuſe ne different jamais que de 2.

PROBLÊME II.

Trouver tant qu'on voudra de Triangles rectangles en nombres, dont les côtés ne different que de l'unité.

POUR résoudre ce problême, il faut chercher des nombres tels, que le double de leur quarré, plus ou moins l'unité, fasse encore un nombre quarré : tels sont les nombres 1, 2, 5, 12, 29, 70, &c; car deux fois le quarré de 1 font 2, qui, diminué de l'unité, laisse 1 qui est un nombre quarré. De même le double du quarré de 2 est 8, à quoi ajoutant 1, la somme 9 est un nombre quarré; &c.

Cela étant trouvé, prenez deux de ces nombres quelconques qui se suivent immédiatement, comme 1 & 2, ou 2 & 5, ou 12 & 29, pour nombres générateurs; les triangles rectangles qui en naîtront auront la propriété que leurs deux côtés ne différeront que de l'unité. Voici une table de ces triangles, avec leurs nombres générateurs.

Nomb. génér.		*Côtés.*		*Hypoth.*
1	2	3	4	5
2	5	20	21	29
5	12	119	120	169
12	29	696	697	985
29	70	4059	4060	5741
70	169	23660	23661	33461

Mais si l'on vouloit *trouver une suite de triangles tels, que dans chacun l'hypothénuse ne surpassât un des côtés que de l'unité*, on y parviendroit plus facilement : il suffiroit de prendre pour nombres générateurs du triangle cherché, deux nombres quelconques qui se surpassassent l'un l'autre de l'unité. Voici une table semblable à la précédente, des

des six premiers triangles rectangles que donnent les premiers nombres de la progression naturelle.

Nomb. génér.		*Côtés.*		*Hypoth.*
1	2	3	4	5
2	3	5	12	13
3	4	7	24	25
4	5	9	40	41
5	6	11	60	61
6	7	13	84	85

Si l'on prenoit pour nombres générateurs les côtés respectifs de la suite des triangles précédents, on auroit une nouvelle suite de triangles rectangles, dont l'hypothénuse seroit toujours un nombre quarré, comme on le voit dans la table suivante.

Nomb. génér.		*Côtés.*		*Hypoth.*	*Racines.*
3	4	7	24	25	5
5	12	119	120	169	13
7	24	336	527	625	25
9	40	720	1519	1681	41
11	60	1320	3479	3721	61
13	84	2184	6887	7225	85

On peut remarquer ici, que les racines des hypothénuses sont toujours le plus grand des nombres générateurs, augmenté de l'unité.

Mais si, pour nombres générateurs, vous preniez le second côté & l'hypothénuse de la même table, qui ne different entr'eux que de l'unité, vous auriez une suite de triangles rectangles, dont le moindre côté seroit toujours un quarré. En voici quelques-uns.

Nomb.	*génér.*	*Côtés.*		*Hypoth.*
4	5	9	40	41
12	13	25	312	313
24	25	49	1200	1201
40	41	81	3280	3281

Voulez-vous enfin avoir une ſuite de triangles rectangles, dont un des côtés ſoit conſtamment un cube, il n'y a qu'à prendre pour générateurs deux nombres qui ſe ſuivent dans la progreſſion des triangulaires, comme 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. Nous nous bornons à donner les quatre premiers de ces triangles.

Nomb.	*génér.*	*Côtés.*		*Hypoth.*
1	3	6	8	10
3	6	36	27	45
6	10	120	64	136
10	15	300	125	326

PROBLÊME III.

Trouver trois différents Triangles rectangles, dont les aires ſoient égales.

VOICI trois triangles rectangles qui jouiſſent de cette propriété. Le premier eſt celui dont les côtés ſont, 40, 42, 48; le ſecond a pour côtés, 70, 24, 74; ceux enfin du troiſieme ſont, 15, 112 & 113.

La méthode par laquelle on les a trouvés, eſt celle-ci:

Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques à la ſomme de leurs quarrés, on aura le premier nombre; la différence de leurs quarrés ſera le ſecond;

& le double de la ſomme de leur produit & du quarré du plus petit, ſera le troiſieme.

Ces trois nombres trouvés, formez trois triangles rectangles, ſçavoir, l'un des deux premiers, comme générateurs; le deuxieme, des deux extrêmes; & le troiſieme, du premier & de la ſomme des deux autres. Ces trois triangles rectangles ſeront égaux entr'eux.

On ne peut trouver plus de trois triangles rectangles, en entiers, qui ſoient égaux entr'eux; mais on peut en trouver tant qu'on voudra en nombres rompus, par le moyen de la formule ſuivante.

Faites, de l'hypothénuſe d'un des triangles ci-deſſus, & du quadruple de ſon aire, un autre triangle rectangle, que vous diviſerez par le double du produit qui viendra, en multipliant l'hypothénuſe du triangle choiſi, par la différence des quarrés des deux autres côtés; & le triangle qui en proviendra, ſera le triangle propoſé.

PROBLÊME IV.

Trouver un Triangle rectangle, dont les côtés ſoient en proportion arithmétique.

PRENEZ deux nombres générateurs, qui ſoient l'un à l'autre dans le rapport d'un à deux; le triangle rectangle qui en proviendra, aura ſes côtés en progreſſion arithmétique.

Le plus ſimple de ces triangles eſt celui-ci, 3, 4, 5, qui provient des nombres 1 & 2 pris pour générateurs. Mais il faut obſerver que tous les autres triangles, qui ont la même propriété, ſont ſemblables à ce premier, & n'en ſont que des multiples. Il eſt aiſé de démontrer de bien des manieres, qu'il ne ſçauroit y en avoir d'autre.

REMARQUE.

SI l'on demandoit un triangle rectangle en nombres, dont les trois côtés fussent en proportion géométrique, nous répondrions qu'il n'y en a aucun en nombres entiers ; car les deux nombres générateurs devroient être dans le rapport de 1 à $\sqrt{\sqrt{5}-2}$; ce qui est un nombre irrationnel.

PROBLÊME V.

Trouver un Triangle rectangle, dont l'aire, exprimée en nombre, soit égale au contour ; ou en raison donnée avec lui.

FORMEZ, d'un nombre quarré quelconque, & de ce même quarré augmenté de 2, un triangle rectangle, dont vous diviserez les côtés par ce nombre quarré : les quotients donneront les côtés d'un nouveau triangle rectangle, dont l'aire, exprimée numériquement, sera égale au contour.

Ainsi, en prenant pour nombres générateurs 1 & 3, vous aurez le triangle 6, 8, 10, dont les côtés, divisés par l'unité, sont 6, 8, 10, & forment le triangle qui a la propriété demandée ; car l'aire est 24, & le contour est aussi 24. De même, prenant pour générateurs 2 & 6, vous aurez pour triangle cherché 5, 12, 13, où la propriété demandée se vérifie encore.

Ces deux triangles sont les seuls, en nombres entiers, susceptibles de cette propriété ; mais on en trouvera une infinité d'autres en nombres rompus, par le moyen des quarrés 9, 16, &c ; tels sont ceux-ci : $\frac{40}{9}$, $\frac{198}{9}$, $\frac{202}{9}$; $\frac{68}{16}$, $\frac{576}{16}$, $\frac{580}{16}$; ou en moindres termes, $\frac{17}{4}$, $\frac{144}{4}$, $\frac{145}{4}$.

Si vous voulez que l'aire du triangle cherché ſoit ſeulement en raiſon donnée avec le contour, par exemple, les $\frac{3}{2}$, *prenez pour nombres générateurs un quarré, & ce même quarré augmenté de* 3, *& formez, comme ci-deſſus, par leur moyen, un triangle rectangle:* ce triangle jouira de la propriété demandée. Tels ſont, en nombres entiers, les deux triangles 8, 15, 17, & 7, 24, 25; & une infinité d'autres en fractions.

Nous croyons devoir terminer ici ces queſtions ſur les triangles en nombres, & être plus ſobres ſur ce ſujet que feu M. Ozanam; car rien de plus ſec que ces problêmes: & probablement M. Ozanam n'en auroit pas tant entaſſé, s'il n'eût voulu profiter, pour ſes *Récréations Mathématiques*, d'une beſogne toute faite dans ſon *Algebre*, où il s'en propoſe juſqu'à ſatiété.

CHAPITRE VI.

Quelques Problêmes curieux ſur les Nombres quarrés & cubes.

PROBLÊME I.

Un nombre quarré étant donné, le diviſer en deux autres quarrés.

ON trouvera, de la maniere ſuivante, une infinité de ſolutions de ce problême. Soit, par exemple, le quarré 16, dont la racine eſt 4, à diviſer en deux autres nombres quarrés, qui ne peuvent être que des fractions, comme il eſt aiſé de voir.

Prenez deux nombres quelconques, comme 3 & 2; multipliez-les enſemble; &, par leur produit, multipliez encore le double de la racine 4 du quarré propoſé: ce produit, qui ſera ici 48, ſera le dénominateur d'une fraction, dont le numérateur ſe trouvera en prenant la ſomme 13 des quarrés des nombres ci-deſſus: cette fraction $\frac{48}{13}$, ſera le côté du premier quarré cherché, qui ſera conſéquemment $\frac{2304}{169}$.

Pour avoir le ſecond, on multipliera le quarré donné par le dénominateur ci-deſſus, 169; &, du produit qui eſt 2704, on ôtera le numérateur 2304: le reſte (qui ſera toujours un quarré) ſera 400, dont la racine 20 étant priſe pour numérateur, & 13 pour dénominateur, donnera la fraction $\frac{20}{13}$ pour le côté du ſecond quarré.

Ainſi, les deux côtés des quarrés cherchés ſeront $\frac{48}{13}$ & $\frac{20}{13}$, dont les quarrés $\frac{2304}{169}$ & $\frac{400}{169}$, font effectivement enſemble le nombre quarré 16.

Si on eût pris pour nombres primitifs 2 & 1, on auroit eu les racines $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$, dont les quarrés ſont $\frac{256}{25}$ & $\frac{144}{25}$; ce qui fait $\frac{400}{25}$ ou 16.

Les nombres 4 & 3 auroient donné les racines $\frac{96}{25}$ & $\frac{28}{25}$, dont les quarrés $\frac{9216}{625}$ & $\frac{724}{625}$, font encore $\frac{10000}{625}$ ou 16.

Ainſi, l'on voit qu'en variant ces ſuppoſitions des deux premiers nombres arbitraires, on variera auſſi à l'infini ſes ſolutions.

Remarque.

Mais peut-on également diviſer un cube donné en deux autres cubes? Nous répondrons, ſur la parole d'un grand analyſte, ſçavoir M. de Fermat, que cela n'eſt pas poſſible. Il ne l'eſt pas non plus de diviſer aucune puiſſance au deſſus du quarré, en deux parties qui ſoient des puiſſances de même eſpece ; par exemple, un quarré-quarré, en deux quarrés-quarrés.

PROBLÊME II.

Diviſer un Nombre qui eſt la ſomme de deux quarrés, en deux autres quarrés.

SOIT propoſé le nombre 13, qui eſt compoſé des deux quarrés 9 & 4 : on demande de le diviſer en deux autres quarrés.

Prenez deux nombres quelconques, par exemple, 4 & 3; multipliez par le premier 4, le double 6 de la racine 3 d'un des quarrés ci-deſſus, & par le ſecond 3, le double de la racine 2 de l'autre quarré, les produits ſeront 24 & 12. Otez-les l'un de l'autre, la différence 12 ſera le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera 25, la ſomme des quarrés des nombres choiſis. Cette fraction ſera donc $\frac{12}{25}$: multipliez-la par chacun des nombres pris à volonté, vous aurez d'un côté $\frac{48}{25}$, & de l'autre $\frac{36}{25}$. Le plus grand de ces nombres étant ôté de la racine du plus grand quarré contenu en 13, ſçavoir 3, le reſtant ſera $\frac{27}{25}$; & l'autre, étant ajouté au côté du plus petit quarré 2, donnera $\frac{86}{25}$. Les deux fractions $\frac{27}{25}$ & $\frac{86}{25}$, ſeront les côtés des deux quarrés cherchés $\frac{729}{625}$ & $\frac{7396}{625}$, qui enſemble font 13, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer.

D'autres ſuppoſitions de nombres auroient donné d'autres quarrés ; mais nous laiſſons au lecteur le plaiſir de s'exercer en les cherchant.

REMARQUE.

POUR qu'un nombre ſoit diviſible d'une infinité de manieres en deux quarrés, il faut qu'il ſoit ou quarré, ou composé de deux quarrés : tels ſont, par ordre, les nombres 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, &c. Nous ne connoiſſons pas, ni ne croyons poſſible de trouver le moyen de diviſer en deux quarrés, un nombre qui n'eſt pas quarré ou la ſomme de deux quarrés; & nous croyons qu'on peut avancer comme une regle, que tout nombre entier, qui n'eſt pas quarré ou composé de deux quarrés en nombres entiers, ne ſçauroit être diviſé d'aucune maniere en deux quarrés. C'eſt ce dont il ſeroit curieux de trouver une démonſtration.

Mais tout nombre eſt diviſible d'une infinité de manieres, au moins en quatre quarrés; car il n'en eſt point qui ne ſoit ou quarré, ou la ſomme de deux, ou trois, ou quatre quarrés. Bachet de Méziriac avoit avancé cette propoſition (*a*), de la vérité de laquelle il s'étoit aſſuré autant qu'on le peut faire, en eſſayant tous les nombres depuis 1 juſqu'à 325. M. de Fermat (*b*) ajoute qu'il peut démontrer cette propriété générale & curieuſe des nombres, ſçavoir, que

Tout nombre eſt ou triangulaire, ou composé de deux ou trois nombres triangulaires.

Tout nombre eſt ou quarré, ou composé de deux, ou trois, ou quatre nombres quarrés.

Tout nombre eſt ou pentagone, ou composé de deux, ou trois, ou quatre, ou cinq pentagones; & ainſi de ſuite.

(a) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum lib. 6; cum Comm. C. G. Bacheti, &c. Toloſæ, 1670, in-fol. pag. 179.*

(b) *Ibidem, pag. 180.*

La démonſtration de cette propriété des nombres, ſi elle eſt réelle, ſeroit vraiment curieuſe.

PROBLÊME III.

Trouver quatre Cubes, dont deux, pris enſemble, ſoient égaux à la ſomme des deux autres.

On les trouvera par la méthode ſuivante, qui eſt fort ſimple. Prenez deux nombres tels que le double du cube du plus petit ſurpaſſe le cube du plus grand; enſuite, du double du plus grand cube, ôtez le moindre; & multipliez ce reſtant, auſſi-bien que la ſomme des cubes, par le moindre des nombres choiſis: les deux produits ſeront les côtés des deux premiers cubes cherchés.

Pareillement ôtez le plus grand des cubes des nombres choiſis, du double du moindre; & que le reſtant, ainſi que la ſomme des mêmes cubes, ſoit multiplié par le plus grand des nombres choiſis: les deux nouveaux produits ſeront les deux côtés des deux autres cubes.

Par exemple, qu'on prenne les nombres 4 & 5, qui ont la condition requiſe ci-deſſus, on trouvera pour les côtés des deux premiers cubes, 744, 756; & pour les deux autres, 945 & 15, qui, étant diviſés par 3, donnent, pour les deux premiers, 248, 252; & pour les deux derniers, 315, 5.

Si vous prenez 5 & 6, vous aurez 1535 & 1705 pour les côtés des deux premiers cubes, & 2046, 204 pour les côtés des ſeconds.

REMARQUE.

Un nombre compoſé de deux cubes étant

donné, il eſt poſſible de trouver deux autres cubes, dont la ſomme ſoit égale à celle des deux premiers. Viete avoit penſé le contraire ; mais M. de Fermat indique le moyen d'y parvenir, dans ſes obſervations ſur les *Queſtions arithmétiques de Diophante*, commentées par M. Bachet de Méziriac. Il eſt vrai que le calcul conduit à des nombres extrêmement compliqués, & capables d'effrayer l'arithméticien le plus intrépide : on en jugera par l'exemple ſuivant. C'eſt celui ou il eſt queſtion de diviſer la ſomme des deux cubes 8 & 1, en deux autres. En ſuivant la méthode indiquée par M. de Fermat, le P. de Billy a trouvé que les côtés des deux nouveaux cubes étoient les nombres ſuivants,

$$\frac{1243617773399009783648 1}{6096238356613729744 9}$$

$$\& \quad \frac{4872671717143523365 60}{6096238356613729744 9}$$

Il en faut croire le P. de Billy ; car je ne ſçais ſi jamais il ſe trouvera quelqu'un qui oſe examiner s'il s'eſt trompé.

Mais on peut, ſans beaucoup de peine, réſoudre cette autre queſtion analogue aux précédentes : *Trouver trois cubes qui, pris enſemble, ſoient égaux à un quatrieme.* D'après la méthode indiquée dans le livre cité ci-deſſus, on trouvera que les moindres nombres entiers qui réſolvent la queſtion, ſont 3, 4 & 5 ; car leurs cubes ajoutés enſemble font 216, qui eſt le cube de 6.

Nous nous ſommes bornés à quelques-unes des queſtions de cette eſpece, qu'on peut multiplier à l'infini. Elles ont un genre particulier de difficulté qui les rend intéreſſantes. Auſſi divers analyſtes s'en ſont fort occupés : tels ſont, parmi les anciens, Diophante d'Alexandrie, qui avoit écrit treize livres de Queſtions arithmétiques, dont les ſix premiers ſeulement nous ſont parvenus, avec un autre ſur les Nombres polygones. M. Viete s'exerça ſur ce genre de queſtions, ainſi que M. Bachet de Méziriac, qui a commenté l'ouvrage de l'arithméticien Grec. Le célebre M. de Fermat porta plus loin que perſonne avant lui cette eſpece d'analyſe. Le P. de Billy donna, vers le même temps, des preuves de ſa ſubtilité en ce genre, par ſon ouvrage intitulé *Diophantus redivivus*, où il laiſſoit bien loin derriere lui l'analyſte ancien. Enfin, M. Ozanam avoit donné des preuves d'une très-grande force en ce genre, par la ſolution de quelques queſtions qu'on avoit jugées inſolubles. Il avoit écrit ſur cette matiere ; mais ſon ouvrage a reſté manuſcrit, & eſt tombé, après ſa mort, entre les mains de feu M. Dagueſſeau. C'eſt ce que nous apprend l'hiſtorien de l'Académie.

CHAPITRE VII.

Des Progreſſions arithmétiques & géométriques, & de quelques Problêmes qui en dépendent.

§. I.

Expoſition des principales Propriétés de la Progreſſion arithmétique.

SI l'on a une ſuite de nombres continuellement croiſſants ou décroiſſants, tels que la différence du premier au ſecond ſoit égale à celle du ſecond au troiſieme, du troiſieme au quatrieme, &c. & ainſi de ſuite, ces nombres ſeront en progreſſion arithmétique.

Ces ſuites de nombres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ou 1, 5, 9, 13, &c. ou 20, 18, 16, 14, 12, &c. ou 15, 12, 9, 6, 3, ſont donc des progreſſions arithmétiques; car, dans la premiere, la différence du ſecond terme au ſuivant qui le ſurpaſſe, eſt toujours 1; dans la ſeconde elle eſt 2: elle eſt pareillement toujours 2 dans la troiſieme qui va en décroiſſant, & trois dans la quatrieme.

Il eſt aiſé de voir au premier coup d'œil, que la progreſſion arithmétique croiſſante peut être continuée à l'infini; mais elle ne peut pas l'être de même, en un certain ſens, lorſqu'elle décroît; car on arrivera toujours néceſſairement à un terme dont la différence commune étant ôtée, le reſtant ſera zéro ou un nombre négatif. Ainſi la progreſſion 19, 15, 11, 7, 3, ne ſçauroit aller plus loin, en nombres positifs du moins ; car on ne peut ôter 4 de 3 ; ou si on l'ôte, on a, en langage analytique, -1 (*a*). On auroit, en continuant la soustraction -5, -9, &c.

Les principales propriétés des progressions arithmétiques suivent facilement de la définition que nous venons d'énoncer & de développer ; car on verra d'abord, en y faisant attention,

1° Que chaque terme n'est autre chose que le premier, plus ou moins la différence commune, multipliée par le nombre des intervalles entre ce terme & le premier. Ainsi, dans la progression 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. dont la différence est 3, il y a, entre le sixieme terme & le premier, cinq intervalles ; c'est pourquoi ce sixieme terme est égal au premier, plus le produit 15 de la différence commune 3 par 5. Or, comme ce nombre d'intervalles est toujours moindre de l'unité que le nombre des termes, il suit qu'on aura chaque terme dont on connoîtra le rang, en multipliant la différence commune par le nombre qui exprime ce rang, diminué de l'unité. Ainsi le centieme terme d'une progression croissante sera égal au premier, plus 99 fois la différence commune. Si elle est décroissante, ce sera le premier terme, diminué de ce même produit.

Pour avoir donc, dans une progression arithmé-

(*a*) Comme les quantités appellées négatives ne sont que des quantités réelles, prises dans un sens contraire à celui des quantités appellées positives, il est évident que, dans la rigueur mathématique & analytique, la progression arithmétique se continue à l'infini, autant en décroissant qu'en croissant ; mais nous nous énonçons ici comme on le fait vulgairement.

tique dont on connoît la différence commune, un terme quelconque dont la place est connue, multipliez cette différence par le nombre qui indique cette place, diminué de l'unité, & ajoutez le produit au premier terme si la progression va en croissant, & ôtez-le si elle va en décroissant; vous aurez le terme cherché.

2° Dans toute progression arithmétique, le premier & le dernier termes font une somme égale à celle du second & de l'avant-dernier, à celle du troisieme & de l'antépénultieme, &c. enfin égale à la somme des termes moyens, si le nombre des termes est pair, ou au double du moyen, si ce nombre de termes est impair.

Cela est aisé à démontrer d'après ce qu'on vient de dire : car nommons le premier terme A, & supposons, par exemple, vingt termes à la progression; le vingtieme, si elle est croissante, sera donc égal à A plus dix-neuf fois la différence commune, & leur somme sera deux fois le premier terme plus dix-neuf fois cette différence. Or le second terme est égal au premier plus la différence commune; & le dix-neuvieme terme, ou l'avant-dernier dans notre supposition, est égal au premier plus dix-huit fois la différence. Aussi la somme du deuxieme & de l'avant-dernier est deux fois le premier terme plus dix-neuf fois la différence commune; & ainsi du troisieme & de l'antépénultieme.

3° Cette derniere propriété sert à démontrer aisément comment on peut trouver la somme de tous les termes d'une progression arithmétique; car, puisque le premier & le dernier termes font une même somme que le deuxieme & le pénultieme, le troisieme & l'antépénultieme, &c. enfin que les deux moyens, si le nombre des termes est pair; il suit que la progression contient en total autant de fois la somme du premier & du dernier termes, qu'on peut faire de pareils couples. Or ce nombre de couples est égal à la moitié du nombre des termes; conséquemment la somme de toute la progression est égale au produit de la somme des premier & dernier termes, multipliée par la moitié du nombre des termes, ou, ce qui revient au même, à la moitié du produit de la somme des premier & dernier termes, par le nombre de ceux de la progression.

Si le nombre des termes est impair, par exemple, 9, il est aisé de voir que le terme moyen est la moitié de la somme des deux qui l'avoisinent, & par conséquent de la somme du premier & du dernier. Or la somme de tous les termes, le moyen excepté, est égale au produit de la derniere somme des premier & dernier par le nombre des termes diminué de l'unité, par exemple par 8, dans le cas proposé où il y a neuf termes; conséquemment, en y ajoutant le terme moyen qui complettera la somme de la progression, & qui est égal à la demi-somme des premier & dernier termes, on aura, pour la somme totale de la progression, autant de fois la demi-somme ci-dessus, qu'il y a de termes dans la progression; ce qui est la même chose que le produit de la demi-somme des premier & dernier termes par le nombre de ces termes, ou le produit de cette somme par la moitié du nombre des termes.

Lorsqu'on aura bien connu les regles précédentes, il sera aisé de résoudre les questions qui suivent.

PROBLÊME I.

Il y a un panier & cent cailloux rangés en ligne droite & à des espaces égaux d'une toise. On propose de les ramasser & les rapporter dans le panier un à un, en allant d'abord chercher le premier, ensuite le second, & ainsi de suite jusqu'au dernier. Combien de toises doit faire celui qui entreprendra cet ouvrage?

Il est bien clair que pour le premier caillou il faut faire deux toises, une pour aller, & l'autre pour revenir; que pour le second il faut faire quatre toises, deux pour aller, deux pour revenir; & ainsi de suite, en augmentant de deux jusqu'au centieme, qui exigera deux cents toises de chemin, cent pour aller, cent pour revenir. Il est d'ailleurs facile d'appercevoir que ces nombres forment une progression arithmétique, dont le nombre des termes est 100; le premier 2, & le centieme 200. Ainsi la somme totale sera le produit de 202 par 50, ou 10100 toises; ce qui fait plus de quatre lieues moyennes de France, ou cinq petites lieues.

Remarque.

Il n'est donc pas étonnant que ceux qui n'ont pas de connoissances mathématiques ne se persuadent pas qu'une pareille entreprise exige tant de chemin. On a vu, il y a quelques années, au Luxembourg, une personne parier qu'elle iroit de ce palais au château de Meudon toucher la grille d'entrée, & reviendroit au Luxembourg, avant qu'une autre eût ramassé cent pierres espacées comme

comme ci-dessus, & sous les mêmes conditions. La derniere ne pouvoit se le persuader, & gagea une somme assez forte ; mais elle perdit. Et en effet elle devoit perdre ; car je doute qu'il y ait du Luxembourg à Meudon 5050 toises, ce qui en fait pour aller & revenir 10100. Or celui qui alloit à Meudon avoit, sur celui qui ramassoit les pierres, l'avantage de n'avoir pas à se baisser cent fois de suite & se relever autant de fois ; ce qui devoit extrêmement ralentir son opération. Aussi la premiere fut-elle de retour, à ce qu'on m'a raconté, que l'autre étoit à peine à la quatre-vingt-cinquieme pierre.

PROBLÊME II.

Un Propriétaire est convenu avec un Maçon qui doit lui creuser un puits, de lui donner trois livres pour la premiere toise de profondeur, cinq pour la seconde, sept pour la troisieme, & ainsi jusqu'à la vingtieme toise inclusivement, où il doit rencontrer l'eau. On demande combien il sera dû au Maçon quand il aura fini son ouvrage ?

LA réponse est facile, au moyen des regles données plus haut : car la différence des termes est ici 2, le nombre des termes est 20 ; conséquemment, pour avoir le vingtieme terme, il faut multiplier 2 par 19, & ajouter le produit 38 à 3, premier terme ; ce qui donnera 41 pour le vingtieme terme.

Ajoutez ensuite le premier & dernier termes, c'est-à-dire 3 & 41, ce qui donne 44, & multipliez cette somme par 10, moitié du nombre des termes ; vous aurez 440 pour la somme de tous les termes de la progression, & pour le prix total de l'ouvrage.

PROBLÊME III.

Un autre Propriétaire étant convenu avec un Maçon, pour creuſer un puits de vingt toiſes de profondeur, de lui payer une ſomme de 400 livres, ce Maçon tombe malade à la huitieme toiſe, & ne peut continuer l'ouvrage. On demande combien il lui eſt dû?

CE ſeroit aſſurément ſe tromper, que de prétendre qu'il fût dû à cet ouvrier les deux cinquiemes du prix total, parce que 8 toiſes ſont les deux cinquiemes de la profondeur convenue : car il eſt aiſé de voir que la peine augmente à meſure qu'on parvient à une plus grande profondeur. On ſuppoſe au reſte, car il ſeroit difficile de le déterminer préciſément, que la difficulté croît arithmétiquement comme la profondeur, enſorte que le prix doive croître de même.

Il faut donc, pour réſoudre ce problême, diſtribuer la ſomme de 400 livres en vingt termes qui ſoient en progreſſion arithmétique : la ſomme des huit premiers donnera ce qui eſt dû au maçon pour ſon ouvrage.

Mais la ſomme de 400 livres peut être diſtribuée en vingt termes arithmétiquement proportionnels de bien des manieres différentes, ſuivant qu'on déterminera le premier terme qui eſt ici indéterminé : car ſi on le ſuppoſoit, par exemple, d'une livre, la progreſſion ſeroit 1, 3, 5, 7, &c. dont 39 ſeroit le dernier terme ; ce qui donneroit pour les huit premiers termes la ſomme de 64 livres. Au contraire, ſi on le ſuppoſoit, par exemple, $10\frac{1}{2}$, la ſuite des termes ſeroit $10\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{2}$, &c : ce qui donneroit pour les huit premiers la ſomme de 116 livres.

Ainſi, pour réſoudre le problême convenablement, & aſſigner avec équité ce qui eſt dû, dans le cas propoſé, à l'ouvrier pour ce commencement d'ouvrage, il faudroit commencer par déterminer ce que vaut équitablement une toiſe d'ouvrage ſemblable à la premiere, & prendre ce prix pour premier terme de la progreſſion. Je ſuppoſe que ce prix ſoit la ſomme de 5 livres: alors on aura pour la progreſſion cherchée $5, 6\frac{11}{19}, 8\frac{3}{19}, 9\frac{14}{19}, 11\frac{5}{19}, 13\frac{16}{19}$, &c. dont la différence eſt $\frac{30}{19}$, & le dernier terme 35.

Pour trouver donc la ſomme des huit premiers termes, il faut d'abord trouver le huitieme terme, & pour cet effet multiplier la différence commune, ou $\frac{30}{19}$, par 7, ce qui donne $11\frac{1}{9}$; l'ajouter au premier terme 5, ce qui donne pour ce huitieme terme $16\frac{1}{19}$: ajoutez-y encore le premier terme, & multipliez la ſomme $21\frac{1}{19}$ par 4; le produit $84\frac{4}{19}$ ſera la ſomme des huit premiers termes, ou ce qui eſt dû à l'ouvrier pour la portion d'ouvrage qu'il a faite.

PROBLÊME IV.

Un homme doit 1860 livres à un créancier qui veut bien lui faciliter le moyen de s'acquitter en un an, ſous les conditions ſuivantes; ſçavoir, de lui payer le premier mois la ſomme de 100, & enſuite chaque mois une ſomme de plus que le précédent, juſqu'au douzieme qui complettera le paiement. On demande quelle eſt cette ſomme dont le paiement de chaque mois doit être augmenté?

DANS ce problême, les paiements à faire de mois en mois doivent augmenter en progreſſion arithmétique, & l'on a la ſomme des termes, ſçavoir, ladite ſomme totale due : on connoît auſſi leur nombre, qui eſt 12. Mais la différence des termes eſt inconnue ; car c'eſt celle dont les paiements doivent croître de mois en mois.

Pour la trouver, ôtez d'abord de la ſomme totale le premier paiement multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire ici 1200 livres, il reſtera 660 ; multipliez enſuite le nombre des termes diminué de l'unité ou 11, par la moitié du nombre des termes ou 6, vous aurez le nombre 66, par lequel vous diviſerez le reſte 660 : le quotient ſera 10, & ſera la différence cherchée. Ainſi le premier paiement étant 100, le ſecond ſera 110, le troiſieme 120, enfin le dernier 210.

§. II.

Des Progreſſions géométriques : expoſition de leurs principales Propriétés.

Lorſqu'on a une ſuite de termes dont chacun eſt le produit du précédent par un même nombre, ou, ce qui eſt la même choſe, dont chacun eſt au précédent dans le même rapport, ils forment ce qu'on appelle une progreſſion géométrique : ainſi 1, 2, 4, 8, 16, &c. forment une progreſſion géométrique ; car le ſecond eſt le double du premier, le troiſieme le double du ſecond, & ainſi de ſuite. Les termes 1, 3, 9, 27, 81, &c. forment auſſi une progreſſion géométrique, chaque terme étant triple de celui qui le précede.

I. La principale propriété de la progreſſion géométrique eſt que, ſi l'on prend de ſuite trois termes quelconques, comme 3, 9, 27, le produit 81 des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen

9 : de même si l'on en prend quatre de suite, comme 3, 9, 27, 81, le produit des extrêmes 243, est égal au produit des deux moyens 9 & 27.

Enfin, si l'on prend un nombre quelconque de suite, comme 2, 4, 8, 16, 32, 64, le produit des extrêmes 2 & 64, est égal au produit des deux qui en sont également éloignés, sçavoir 4 & 32, ou bien 8 & 16. Si le nombre des termes étoit impair, il est évident qu'il y auroit un terme unique également éloigné des deux extrêmes ; & alors le quarré de ce terme seroit égal au produit des extrêmes, ou de deux autres quelconques, également éloignés d'eux ou du moyen.

II. Il y a entre la progression géométrique & la progression arithmétique une analogie qui doit être remarquée ici, & qui consiste en ce que ce qui convient à la derniere en employant l'addition & la soustraction, convient à l'autre en y employant la multiplication & la division. Lorsque dans la derniere on prend la moitié ou le tiers, dans la premiere on emploie l'extraction de la racine quarrée, ou cubique, &c.

Ainsi, pour trouver un nombre moyen arithmétique entre deux autres, par exemple 3, 12, on ajoute les deux extrêmes donnés, & l'on prend la moitié $7\frac{1}{2}$ de la somme 15, qui est le nombre cherché : mais pour trouver un moyen géométrique entre deux nombres, on multiplie les extrêmes donnés, & l'on tire la racine quarrée du produit. Soient, par exemple, ces nombres 3, 12 ; leur produit est 36, dont la racine quarrée 6 est le nombre cherché.

Si l'on a une progression géométrique quelconque, comme 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. & qu'on écrive, comme on voit dans l'exemple ci-dessous, les termes d'une progression arithmétique par ordre au dessus de ceux de la progression géométrique,

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

on remarquera les propriétés suivantes dans cette combinaison,

1° Qu'on prenne deux termes quelconques de la progression arithmétique, par exemple 4 & 64, & qu'on les multiplie, leur produit est 256. Qu'on prenne pareillement les deux termes de la progression géométrique répondants à 4 & 64, qui sont 2 & 6, & qu'on les ajoute, la somme 8 répondra au produit ci-dessus 256.

2° Prenez dans la progression inférieure quatre termes en proportion géométrique, par exemple 2, 16, 64, 512; les nombres de la progression supérieure correspondants seront 1, 4, 6, 9, qui sont en proportion arithmétique, car la différence de 4 à 1 est la même que celle de 9 à 6.

3° Si l'on prend dans la suite inférieure un nombre quarré, 64 par exemple, & dans la suite supérieure le terme qui lui répond, sçavoir 6, la moitié de ce dernier, 3, se trouvera répondre à la racine quarrée de 64, sçavoir 8.

En prenant dans la suite inférieure un cube, par exemple 512, & dans la supérieure le nombre correspondant 9, il se trouve que le tiers de ce dernier, qui est 3, est aussi correspondant à la racine cubique 8 du premier.

Ainsi l'on voit que ce qui, dans la progression géométrique, est multiplication, est addition dans l'arithmétique; ce qui est division dans la premiere, eſt ſouſtraction dans la derniere ; ce qui eſt enfin extraction de racine quarrée, cubique, &c. dans la progreſſion géométrique, eſt ſimple diviſion par 2, par 3, &c. dans l'arithmétique.

Cette analogie remarquable eſt le fondement de la théorie vulgaire des logarithmes ; & nous a paru par cette raiſon mériter que nous entraſſions ici dans quelques détails à ſon ſujet.

III. Il eſt évident que toutes les puiſſances par ordre d'un même nombre, forment une progreſſion géométrique ; telle eſt la ſuivante, qui eſt celle des puiſſances du nombre 2,

2 4 8 16 32 64 128 &c.

Il en eſt de même des puiſſances du nombre 3, qui forment la ſuite

3 9 27 81 243 729 &c.

La premiere de ces ſuites a une propriété particuliere, ſçavoir, que ſi l'on prend les premier, deuxieme, quatrieme, huitieme, ſeizieme, trente-deuxieme termes, & qu'on y ajoute l'unité, il en réſultera des nombres premiers.

IV. On appelle l'expoſant d'une progreſſion géométrique, le nombre qui réſulte de la diviſion d'un terme quelconque par celui qui le précede : ainſi, dans la progreſſion géométrique 2, 8, 32, 128, 512, l'expoſant eſt 4 ; car, en diviſant 128 par 32, ou 32 par 8, ou 8 par 2, le quotient eſt toujours 4. Ainſi l'expoſant joue dans la progreſſion géométrique, le même rôle que la différence dans la progreſſion arithmétique, c'eſt-à-dire qu'il eſt toujours conſtant.

Pour trouver donc, dans une progreſſion géométrique dont le premier terme & l'expoſant ſont connus, un terme quelconque, par exemple le huitieme, multipliez cet exposant par lui-même sept fois de suite, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans son rang, moins un; ou, ce qui est la même chose, élevez cet exposant à la septieme puissance; enfin multipliez le premier terme par le produit : le nouveau produit sera le huitieme terme cherché. Soit, par exemple, le premier terme 3, & l'exposant de la progression 2 : pour avoir le huitieme terme, on prendra la septieme puissance de 2, qui est 128; multipliez ensuite par 128 le premier terme 3; le produit, qui sera 384, donnera le huitieme terme cherché de la progression.

Remarquons ici que s'il eût été question d'une progression arithmétique dont le premier terme eût été donné ainsi que la différence, & qu'on eût voulu avoir le huitieme terme, on eût multiplié cette différence par 7, & on eût ajouté le produit au premier terme. On voit par conséquent ici une suite de l'analogie remarquée dans le paragraphe III.

V. On trouve la somme des termes d'une progression géométrique déterminée, de la maniere suivante.

Multipliez le premier terme par lui-même, & le dernier par le second, & prenez la différence de ces deux produits.

Divisez ensuite cette différence par celle des deux premiers termes, le quotient sera la somme de tous les termes.

Soit, par exemple, la progression 3, 6, 12, 24, &c. dont le huitieme terme est 384, & qu'on demande la somme de ces huit termes; le produit du premier par lui-même est 9, celui du dernier par le second est 2304, la différence est 2295:

divisez donc 2295 par 3, différence des premier & second termes, & vous aurez pour quotient le nombre 765, qui sera la somme de ces huit termes.

VI. Une progression géométrique peut décroître à l'infini, sans qu'on parvienne jamais à zéro; car il est évident qu'une partie quelconque d'une quantité qui est plus grande que zéro, ne peut jamais être zéro. Ainsi une progression géométrique décroissante peut se prolonger à l'infini: il n'y a qu'à diviser le dernier terme par l'exposant de la progression, & l'on aura le terme suivant. Voici quelques exemples de progressions géométriques décroissantes:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \&c.$$

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \&c.$$

VII. La somme d'une progression géométrique croissante & continuée à l'infini, est évidemment infinie: mais celle d'une progression géométrique décroissante, quelque nombre de termes qu'on en prenne, est toujours finie. Ainsi la somme de tous les termes à l'infini de cette progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, &c. n'est que 2; celle de la progression $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, &c. à l'infini, n'est que $1\frac{1}{2}$, &c. Cela suit nécessairement de la méthode donnée plus haut pour trouver la somme de tant de termes qu'on voudra d'une progression géométrique; car si nous la supposons prolongée à l'infini & décroissante, le dernier terme sera infiniment petit ou zéro: ainsi le produit du second terme par le dernier sera zéro; & conséquemment il n'y aura qu'à diviser le quarré du premier terme, par la différence du premier & du second. C'est ainsi qu'on a trouvé que 1,

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. à l'infini, eſt égal à 2, & que 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $= \frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$; car le quarré de 1 eſt 1, la différence de 1 & $1\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{2}$: enfin l'unité diviſée par $\frac{1}{2}$ donne 2; de même 1, étant diviſé par $\frac{2}{3}$, qui eſt la différence de 1 & de $\frac{1}{3}$, donne $\frac{3}{2}$.

Remarque.

LORSQU'ON dit qu'une progreſſion continuée à l'infini peut être égale à une quantité finie, on ne prétend pas, à l'exemple de M. de Fontenelle, dire que l'infini puiſſe avoir une exiſtence réelle. Ce qu'on entend ſeulement par-là, & à quoi l'on doit réduire toutes les expreſſions ſemblables, c'eſt que, quelque nombre de termes qu'on prenne de la progreſſion, leur ſomme ne ſçauroit égaler la quantité finie déterminée, quoiqu'elle en approche de maniere, que leur différence peut devenir plus petite qu'aucune quantité aſſignable.

PROBLÊME I.

Achille va dix fois plus vîte qu'une tortue qui a une ſtade d'avance. On demande s'il eſt poſſible qu'il l'atteigne, & à quelle diſtance il l'atteindra?

CETTE queſtion n'a de la célébrité que parce que Zénon, chef des Stoïciens, prétendoit, par un ſophiſme, prouver qu'Achille n'atteindroit jamais la tortue: car, diſoit-il, pendant qu'Achille fera une ſtade, la tortue en aura fait une dixieme; & pendant qu'il fera cette dixieme, la tortue en fera une centieme qu'elle aura encore d'avance; & ainſi à l'infini: par conſéquent il s'écoulera un nombre infini d'inſtants avant que le héros ait atteint le reptile: donc il ne l'atteindra jamais.

Il ne faut cependant qu'avoir le ſens commun pour voir qu'Achille atteindra bientôt la tortue, puisqu'il la dépassera. D'où vient donc le sophisme? Le voici.

Achille n'atteindroit en effet jamais la tortue, si les intervalles de temps pendant lesquels on suppose qu'il a fait la premiere stade, & ensuite les dixieme, centieme, millieme de stades que la tortue a eus successivement d'avance sur lui, étoient égaux; mais en supposant qu'il ait fait la premiere stade dans 10 minutes de temps, il ne mettra qu'une minute à parcourir une dixieme de stade, ensuite $\frac{1}{10}$ de minute pour parcourir une centieme, &c: ainsi les intervalles de temps qu'Achille emploiera à parcourir l'avance que la tortue a gagnée pendant le temps précédent, iront en décroissant de cette maniere, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. ce qui forme une progression géométrique sous-décuple, dont la somme est égale à $11\frac{1}{9}$. C'est l'intervalle de temps après lequel Achille aura atteint la tortue?

PROBLÊME II.

Les deux aiguilles d'une pendule à minutes partent ensemble du point de midi. On demande quels seront les points du cadran où elles se rencontreront successivement, pendant une révolution entiere de celle des heures?

CE problême, considéré d'une certaine maniere, ne differe pas du précédent. L'aiguille des minutes joue ici le rôle que faisoit Achille dans le premier; & celle des heures, qui va douze fois moins vîte, celui de la tortue. Enfin, si l'on considere l'aiguille des heures comme commençant une seconde révolution, & celle des minutes comme commençant la premiere, l'avance de l'une sur l'autre sera un tour entier du cadran. Lorsque celle des minutes aura fait une révolution, celle des heures en aura fait une douzieme ; & ainsi progressivement. Il n'est donc question, pour résoudre ce problême, que d'appliquer à ses données la méthode employée pour celui de la tortue, & l'on trouvera que l'intervalle, depuis midi jusqu'au point où se rencontreront de nouveau les deux aiguilles, sera $\frac{1}{11}$ de la révolution entiere ; ou, ce qui revient au même, celui d'une heure & $\frac{1}{11}$ d'heure. Elles se rencontreront ensuite à 2 heures & $\frac{2}{11}$, à 3 heures & $\frac{3}{11}$, à 4 heures & $\frac{4}{11}$; enfin à 11 heures & $\frac{11}{11}$, c'est-à-dire à 12 heures.

On peut aussi résoudre le problême sans considération de la progression géométrique; car, puisque l'aiguille des minutes va douze fois aussi vîte que celle des heures, la premiere parcourra, dans le temps écoulé depuis leur départ du point de midi jusqu'à leur nouvelle rencontre, un espace égal à douze fois le chemin de la seconde depuis ce même point de midi ; par conséquent ce chemin sera $\frac{1}{11}$ de la révolution entiere, ainsi qu'il est aisé de se le démontrer.

PROBLÊME III.

Un homme ayant fait quelque chose de fort agréable à un souverain, celui-ci veut le récompenser, & lui ordonne de faire la demande qu'il voudra, lui promettant qu'elle lui sera accordée. Cet homme qui est instruit dans la science des nombres, se borne à supplier le monarque de lui faire donner la quantité de bled qui proviendroit en commen-

çant par un grain, & en doublant ſoixante-trois fois de ſuite. On demande quelle eſt la valeur de cette récompenſe?

Un auteur Arabe, *Al-Sephadi*, raconte l'origine de ce problême d'une maniere aſſez curieuſe pour trouver place ici. Un roi de Perſe, dit-il, ayant imaginé le jeu de *Tric-trac*, en étoit tout glorieux. Mais il y avoit dans les Etats d'un roi de l'Inde un mathématicien nommé *Seſſa*, fils de Daher, qui inventa le jeu d'*Echecs*. Il le préſenta à ſon maître, qui en fut ſi ſatisfait, qu'il voulut lui en donner une marque digne de ſa magnificence, & lui ordonna de demander la récompenſe qu'il voudroit, lui promettant qu'elle lui ſeroit accordée. Le mathématicien ſe borna à demander un grain de bled pour la premiere caſe de ſon échiquier, deux pour la ſeconde, quatre pour la troiſieme, & ainſi de ſuite, juſqu'à la derniere ou la ſoixante-quatrieme. Le prince s'indigna preſque d'une demande qu'il jugeoit répondre mal à ſa libéralité, & ordonna à ſon viſir de ſatisfaire Seſſa. Mais quel fut l'étonnement de ce miniſtre, lorſqu'ayant fait calculer la quantité de bled néceſſaire pour remplir l'ordre du prince, il vit que non-ſeulement il n'y avoit pas aſſez de grains dans ſes greniers, mais même dans tous ceux de ſes ſujets & dans toute l'Aſie! Il en rendit compte au roi, qui fit appeller le mathématicien, & lui dit qu'il reconnoiſſoit n'être pas aſſez riche pour remplir ſa demande, dont la ſubtilité l'étonnoit encore plus que l'invention du jeu qu'il lui avoit préſenté.

Telle eſt, pour le remarquer en paſſant, l'origine du jeu des Echecs, du moins au rapport de l'hiſtorien Arabe Al-Sephadi. Mais ce n'eſt pas ici notre objet de discuter ce qui en est : occupons-nous du calcul des grains demandés par le mathématicien Sessa.

On trouve, en faisant ce calcul, que le soixante-quatrieme terme de la progression double en commençant par l'unité, est le nombre 922337203 6854775808. Or, dans la progression double commençant par l'unité, la somme de tous les termes se trouve en doublant le dernier & en ôtant l'unité. Ainsi le nombre des grains de bled nécessaire pour remplir la demande de Sessa, étoit le suivant, 18446744073709551615. Or l'on trouve qu'une livre de bled de médiocre grosseur & médiocrement sec contient environ 12800 grains, & conséquemment le setier de bled, qui est de 240 livres poids moyen, en contiendroit environ 3072000; je le suppose de 3100000 : divisant donc le nombre des grains trouvés ci-dessus par ce dernier nombre, il en résulteroit 59505620044 422 setiers, qu'il eût fallu pour acquitter la promesse du roi Indien. En supposant encore qu'un arpent de terre ensemencé rendît cinq setiers, il faudroit, pour produire en une année la quantité de setiers ci-dessus, la quantité de 1190112408 884 arpents; ce qui fait près de huit fois la surface entiere du globe de la terre : car la circonférence de la terre, étant supposée de 9000 lieues moyennes, c'est-à-dire de 2280 toises au degré, sa surface entiere, y comprise celle des eaux de toute espece, se trouve de 148882176000 arpents.

M. Wallis envisage la chose un peu autrement, & trouve dans son Arithmétique, que la quantité de bled nécessaire pour remplir la promesse faite à Sessa, formeroit une pyramide de 9 milles anglois de longueur, de largeur & de hauteur; ce qui revient à une pareille pyramide qui auroit 3 de nos lieues (d'environ 3000 toises) en tout sens de base, & trois lieues de hauteur, ou à une masse parallélipipede de 9 lieues quarrées de base, sur une hauteur uniforme d'une lieue. Or 3000 toises de hauteur font 18000 pieds; ainsi ce solide est l'équivalent d'un autre de 162000 lieues quarrées sur un pied de hauteur: d'où il suit que la quantité de bled ci-dessus couvriroit 162000 lieues quarrées, à la hauteur d'un pied; ce qui fait au moins trois fois la surface de la France, qui ne contient, je pense, toute réduction faite, guere plus de 50000 lieues quarrées.

En supposant le setier de bled à une pistole, la quantité de bled ci-dessus vaudroit 595056260 444220 livres, ce qui fait 5950562 milliards, somme qui excede probablement toutes les richesses existantes sur la terre.

On propose le même problême d'une autre maniere que voici. *Un maquignon possede un très-beau cheval dont un homme a envie; mais cet acheteur, peu disposé à y mettre le prix convenable, est indécis. Le maquignon, pour le déterminer par l'apparence d'un prix médiocre, lui offre de se contenter du prix du vingt-quatrieme clou des fers du cheval, payé à raison d'un denier pour le premier clou, de deux pour le deuxieme, quatre pour le troisieme, &c. jusqu'au vingt-quatrieme. L'acheteur, croyant le marché fort avantageux pour lui, l'accepte. On demande le prix du cheval?*

Ce cheval coûteroit fort cher; car, en faisant le calcul, on trouve que le vingt-quatrieme terme de cette progression 1, 2, 4, 8, &c. est 8388608; ainsi ce seroit ce nombre de deniers que devroit donner l'acheteur, ce qui revient à trente-quatre mille neuf cents cinquante-deux livres dix sous huit deniers. Aucun cheval Arabe de la plus noble race ne se vendit jamais ce prix.

Si le prix convenu du cheval eût été la valeur de tous les clous, en payant le premier un denier, le second deux, le troisieme quatre, &c. il seroit du double, moins le premier terme, c'est-à-dire de 69908 liv. 1 s. 3 den.

Nous allons terminer ce chapitre par quelques remarques physico-mathématiques sur la prodigieuse fécondité, & la multiplication progressive des animaux & des végétaux, qui auroit lieu si les forces de la nature n'éprouvoient pas continuellement des obstacles.

I. On ne sera point étonné que la race d'Abraham, après 260 ans de séjour en Egypte, ait pu former une nation capable de donner de l'inquiétude aux souverains du pays. En effet, l'Ecriture raconte que Jacob s'établit dans cette contrée avec soixante-dix personnes: je suppose que de ces soixante-dix personnes il y en eût vingt, ou trop avancées en âge, ou trop jeunes pour être propres à la génération; que des cinquante autres restantes il y en eût vingt-cinq mâles & vingt-cinq femelles, formant vingt-cinq mariages; que chaque couple enfin eût produit dans la durée de vingt-cinq ans, huit enfants l'un portant l'autre, ce qui ne paroît pas difficile à croire dans un pays renommé par la fécondité de ses habitants; on trouvera qu'au bout de 25 ans ce nombre de soixante-dix a pu s'accroître jusqu'à deux cents soixante-dix, dont ôtant les morts, il n'y a peut-être pas d'exagération à le porter à deux cents dix: ainsi la race de Jacob a pu être triplée après vingt-cinq ans de séjour en Egypte. Par la même raison ces

ces deux cents dix perſonnes, après vingt-cinq autres années, ont pu s'augmenter juſqu'à ſix cents trente, & ainſi de ſuite en progreſſion géométrique triple; d'où il ſuit qu'après deux cents vingt-cinq ans, la population a pu monter à 1377810 perſonnes, parmi leſquelles il a pu aiſément y en avoir 5 à 600 mille adultes & en état de porter les armes.

II. En ſuppoſant que la race du premier homme, toute déduction faite des morts, eût doublé tous les vingt ans, ce qui n'eſt aſſurément pas contraire aux forces de la nature, le nombre des hommes, après cinq ſiecles, a pu monter à 1048576. Ainſi, Adam ayant vécu environ 900 ans, il a pu voir au milieu de ſa vie, c'eſt-à-dire vers l'an 500 de ſon âge, une poſtérité de 1048576 perſonnes.

III. Quelle ne ſeroit pas la multiplication de pluſieurs animaux, ſi la difficulté de la ſubſiſtance, ſi la guerre que les uns font aux autres, ou la conſommation qu'en font les hommes, ne mettoient pas des bornes à leur propagation? Il eſt aiſé de démontrer que la race d'une truie qui auroit mis bas ſix petits, dont deux mâles & quatre femelles, en ſuppoſant enſuite chaque femelle mettre bas pareillement chaque année ſix petits, dont quatre femelles & deux mâles, monteroit, après douze ans, à 33554230.

Pluſieurs autres animaux, comme les lapins, les chats, &c. qui ne portent que pendant quelques ſemaines, multiplieroient encore avec bien plus de rapidité: la ſurface de la terre ne ſuffiroit pas, après un demi-ſiecle ſeulement, pour leur donner la ſubſiſtance, ou même pour les contenir.

Il ne faudroit qu'un bien petit nombre d'années pour qu'un hareng remplît l'Océan de ſa poſtérité, ſi tous ſes œufs étoient fécondés ; car il n'eſt guere de poiſſon ovipare qui ne contienne pluſieurs milliers d'œufs qu'il jette dans le temps du frai. Suppoſons que ce nombre monte ſeulement à 2000, qui donnent naiſſance à autant de poiſſons, moitié mâles, moitié femelles : dans la ſeconde année il y en auroit plus de 200000 ; dans la troiſieme, plus de 200000000 ; & dans la huitieme année ce nombre ſurpaſſeroit celui qui eſt exprimé par 2 ſuivi de 24 zéro. Or la ſolidité de la terre contient à peine autant de pouces cubes. Ainſi l'Océan, quand même il occuperoit toute la ſurface du globe terreſtre & toute ſa profondeur, ne ſuffiroit pas pour contenir tous ces poiſſons.

IV. Pluſieurs végétaux couvriroient en très-peu d'années toute la ſurface du globe, ſi toutes leurs ſemences étoient miſes en terre : il ne faudroit pour cela que quatre ans à la juſquiame, qui eſt peut-être, de toutes les plantes connues, celle qui donne la plus grande quantité de ſemences. D'après quelques expériences, on a trouvé qu'une tige de juſquiame donne quelquefois plus de 50000 grains : réduiſons ce nombre à 10000 ; à la quatrieme génération il monteroit à 1 ſuivi de 16 zéro. Or la ſurface de la terre ne contient pas plus de 5359758336000000 pieds quarrés. Ainſi, en allouant à chaque tige un pied quarré ſeulement, l'on voit que la ſurface entiere de la terre ne ſuffiroit pas pour toutes les plantes provenantes d'une ſeule de cette eſpece à la fin de la quatrieme année.

Nous ne pouſſerons pas cette énumération plus loin, de crainte de tomber dans le défaut qu'on peut juſtement reprocher à l'ancien auteur des *Récréations Mathématiques*. Il n'eſt aucun lecteur à qui ce que nous venons de dire ne ſuffiſe.

§. III.

De quelques autres Progressions, & entr'autres de la Progression harmonique.

La proportion harmonique regne entre trois nombres, lorsque le premier est au dernier, comme la différence du premier avec le second est à celle du second avec le troisieme. Ainsi les nombres 6, 3, 2, sont en proportion harmonique; car 6 est à 2, comme 3, différence des deux premiers nombres, est à 1, différence des deux derniers. Cette espece de rapport est appellé harmonique, par la raison qu'on verra plus bas.

I. Deux nombres étant donnés, on trouve le troisieme qui forme avec eux la proportion harmonique, en multipliant ces deux nombres, & divisant leur produit par l'excès du double du premier sur le second. Ainsi, étant donnés 6 & 3, on a trouvé le troisieme en multipliant 6 par 3, & divisant le produit 18, par 9 qui est l'excès de 12, double de 6, sur 3 le second des nombres donnés. Ainsi ce quotient est 2.

Il est aisé de voir par-là qu'il n'est pas toujours, en un sens, possible de trouver un troisieme nombre en proportion harmonique avec deux autres; car lorsque le premier est le plus petit, si son double est égal ou moindre que le second, on rencontrera un nombre infini, ou négatif. Ainsi le troisieme harmonique à 2 & 4, est infini; car on trouve que le nombre cherché est égal à 8 divisé par 4−4, ou zéro. Or, pour peu qu'on soit arithméticien, on sçait que plus le dénominateur d'une fraction est au dessous de l'unité, plus la fraction est grande. Conséquemment une fraction dont le dénominateur est 0, est infinie.

Si le double du premier nombre étoit moindre que le second, (comme il arriveroit, si l'on proposoit de trouver un troisieme harmonique à 2 & 6) alors le diviseur cherché seroit un nombre négatif : c'est, dans l'exemple proposé, -2 : c'est pourquoi le troisieme harmonique cherché seroit ici 12 divisé par -2, c'est-à-dire -6 (a).

Mais cet inconvénient, si c'en est un, n'est pas à craindre lorsque le plus grand nombre est le premier de la proportion ; car si le premier surpasse le second, à plus forte raison son double le surpassera-t-il. Ainsi le troisieme harmonique sera toujours, dans ce cas, un nombre fini & positif.

II. Lorsqu'on a trois nombres en proportion harmonique décroissante, par exemple 6, 3, 2, il est aisé d'en trouver un quatrieme ; il n'y a qu'à chercher un troisieme harmonique aux deux derniers, ce sera le quatrieme : pareillement le troisieme & le quatrieme serviront à trouver le cinquieme, & ainsi de suite ; ce qui formera ce qu'on appelle une progression harmonique, laquelle, par les raisons ci-dessus, pourra toujours se prolonger en décroissant. Dans l'exemple présent, cette suite se trouvera 6, 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$, 1, $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{8}$, &c.

Si les deux premiers nombres eussent été 2 & 1, on auroit eu la progression harmonique

$$2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{10},\ \&c.$$

Ainsi c'est une propriété remarquable de la suite des fractions dont le numérateur est l'unité, & dont les dénominateurs sont les nombres de la

(a) Voyez ce qu'on a dit plus haut sur les quantités négatives, à l'occasion de la progression arithmétique.

progreſſion naturelle, d'être en progreſſion harmonique.

En effet, indépendamment du rapport numérique défini ci-deſſus, on trouve dans la ſuite de ces nombres toutes les conſonnances muſicales poſſibles : car le rapport de 1 à $\frac{1}{2}$ donne l'octave ; celui de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$, ou de 3 à 2, donne la quinte ; celui de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}$, ou de 4 à 3, donne la quarte ; celui de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$, la tierce majeure ; celui de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$, ou de 6 à 5, la tierce mineure ; celui de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{9}$, ou de 9 à 8, le ton majeur ; enfin celui de $\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{10}$ ou de 10 à 9, le ton mineur. Mais ceci ſera expliqué plus au long dans la partie de cet ouvrage relative à la muſique.

PROBLÊME.

Quelle eſt la ſomme de la ſuite infinie des nombres en progreſſion harmonique $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c ?

On a vu que la ſuite des nombres en progreſſion géométrique, fût-elle prolongée à l'infini, eſt toujours égale à un nombre fini qu'il eſt aiſé de déterminer. En eſt-il de même dans le cas du problême que nous propoſons ?

Nous diſons que non, quoique dans le Journal de Trévoux (année 17) un auteur ſe ſoit donné beaucoup de peine à prouver que la ſomme de ces fractions eſt finie. Mais ſes raiſonnements ſont de vrais paralogiſmes qu'il n'eût pas haſardés s'il eût été plus géometre (*a*) ; car il eſt bien démontré

(*a*) L'infinité de la ſomme de la progreſſion $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. ſuit néceſſairement d'une propriété connue de l'hyperbole entre les aſymptotes, ſçavoir, que l'aire compriſe entre la courbe & l'aſymptote, eſt plus grande qu'aucune aire finie, ou qu'elle eſt, en langage vulgaire, infinie.

que la ſuite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. peut toujours être prolongée de maniere à ſurpaſſer tout nombre fini, quel qu'il ſoit.

§. IV.

De diverſes Progreſſions décroiſſantes à l'infini, dont on connoît la ſomme.

I. On peut former, ſuivant des loix différentes, une infinité de progreſſions décroiſſantes ſur leſquelles les mathématiciens ſe ſont exercés. Le numérateur, par exemple, étant conſtamment l'unité, les dénominateurs peuvent croître ſelon le rapport des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. Telle eſt la progreſſion ſuivante:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \text{\&c.}$$

Sa ſomme eſt finie, & préciſément égale à 2.

De même la ſomme de la progreſſion dont, les numérateurs étant conſtamment l'unité, les dénominateurs ſont les nombres pyramidaux, comme

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{35}, \frac{1}{56}, \text{\&c.}$$

eſt égale à $1\frac{1}{2}$.

Celle où les dénominateurs ſont les pyramidaux du ſecond ordre, comme celle-ci,

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{70}, \frac{1}{126}, \text{\&c.}$$

eſt égale à $1\frac{1}{3}$.

Celle où ils ſont les pyramidaux du troiſieme ordre, comme

$$1, \frac{1}{6}, \frac{1}{21}, \frac{1}{56}, \frac{1}{126}, \frac{1}{252}, \text{\&c.}$$

eſt égale à $1\frac{1}{4}$.

Ainſi la loi que ſuivent ces ſommes eſt apparente; & ſi l'on demandoit, par exemple, quelle ſeroit la ſomme de la progreſſion ſemblable, dont les dénominateurs ſeroient les nombres pyramidaux du dixieme ordre, il ſeroit aiſé de répondre qu'elle eſt égale à $1\frac{1}{11}$.

II. Suppoſons préſentement cette progreſſion,

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{36},\ \&c.$$

dans laquelle les dénominateurs ſont les quarrés des nombres de la progreſſion naturelle;

Si l'on eſt curieux de ſçavoir quelle eſt ſa ſomme, nous répondrons, avec M. Jean Bernoulli qui l'a trouvée le premier, qu'elle eſt finie, & égale au quarré de la circonférence du cercle diviſé par 6, ou à $\frac{\overline{3.14152}^2}{6}$.

Quant à celle où les dénominateurs ſont les cubes des nombres naturels, le même M. Bernoulli convient ne l'avoir pu encore découvrir.

Le Lecteur curieux de ces recherches peut recourir à l'ouvrage de M. Jacques Bernoulli, intitulé *Tractatus de Seriebus infinitis*, qui eſt à la ſuite de celui publié en 1713, à Bâle, ſous le titre de *Ars conjectandi;* il y trouvera amplement de quoi ſe ſatisfaire. Il doit auſſi voir divers Mémoires, tant de M. Jean Bernoulli, qui ſe trouvent dans le recueil de ſes œuvres, que de M. Euler, qui ſont inſérés dans les Mémoires de Pétersbourg.

CHAPITRE VIII.

Des Combinaiſons & Changements d'ordre.

AVANT d'entrer en matiere, il eſt néceſſaire de développer la conſtruction d'une table qui eſt d'un grand uſage pour abréger les calculs : C'eſt le triangle arithmétique de M. Paſcal. Voici comment il eſt formé, & quelques-unes de ſes propriétés.

Formez d'abord une bande AB de dix quarrés égaux ; au deſſous de cette bande, en vous retirant d'un quarré de gauche à droite, formez une bande ſemblable CD, qui aura conſéquemment

A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B
C		1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
			1	3	6	10	15	21	28	36	
				1	4	10	20	35	56	84	
					1	5	15	35	70	126	
						1	6	21	56	126	
							1	7	28	84	
								1	8	36	
									1	9	
										1	
										E	

un quarré de moins ; & continuez ainſi, en vous retirant toujours d'un quarré, &c : vous aurez une ſuite de quarrés diſpoſés par bandes verticales & horizontales, & finiſſant par un ſeul, ce qui formera un triangle diviſé par compartiments égaux ; c'eſt ce qui lui a fait donner le nom de triangle arithmétique.

On y diſpoſera les nombres dont il doit être rempli, de la maniere ſuivante.

Dans chacune des caſes de la premiere bande on inſcrira l'unité, ainſi que dans chacune des caſes qui ſont ſur la diagonale AE.

Enſuite on ajoutera le nombre de la premiere caſe de la bande C qui eſt l'unité, avec celui qui eſt dans la caſe immédiatement au deſſus, & on inſcrira la ſomme 2 dans la caſe ſuivante. On ajoutera pareillement ce nombre avec celui de la caſe au deſſus, ce qui donnera 3 qu'on inſcrira dans la caſe ſuivante. On aura par ce moyen la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c.

La maniere de remplir les autres bandes horizontales eſt toujours la même ; chaque caſe doit toujours contenir la ſomme du nombre qui eſt dans la caſe précédente du même rang, & de celui qui eſt immédiatement au deſſus de cette caſe précédente. Ainſi le nombre 15, qui remplit la cinquieme caſe de la troiſieme bande, eſt égal à la ſomme de 10 qui eſt dans la caſe précédente, & de 5 qui eſt dans la caſe au deſſus de celle-ci. Il en eſt de même de 21, qui eſt la ſomme de 15 & de 6 ; de 35, dans la quatrieme ligne, qui eſt la ſomme de 15 & de 20 ; &c. &c.

La premiere propriété de cette table eſt de donner dans ſes bandes horizontales les différents nombres naturels, triangulaires, pyramidaux, &c; car dans la deuxieme on a les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c; dans la troisieme, les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, &c; dans la quatrieme, les nombres pyramidaux du premier ordre, 1, 4, 10, 20, 35, &c; dans la cinquieme, les pyramidaux du deuxieme ordre, 1, 5, 15, 35, 70, &c. C'est une suite nécessaire de la maniere dont la table est formée; car il est facile de voir que le nombre qui remplit chaque case, est toujours la somme de ceux qui remplissent les cases précédentes à gauche dans la bande immédiatement au dessus.

On retrouve les mêmes nombres dans les bandes paralleles à la diagonale, ou l'hypothénuse du triangle.

Mais une propriété bien plus remarquable, & que concevront seulement ceux de nos lecteurs à qui l'algebre n'est pas inconnue, c'est que les bandes perpendiculaires présentent les coefficients ou les nombres qui affectent les différentes parties d'une puissance quelconque, à laquelle un binome, comme $a+b$, peut être élevé; la troisieme bande, ceux des trois membres d'un quarré; la quatrieme, celle des quatre membres d'un cube; la cinquieme, celle des cinq membres d'un quarré-quarré. Mais nous nous bornons à cette indication, & nous passons à expliquer ce qu'on entend par combinaisons.

On appelle *combinaisons* les différents choix qu'on peut faire de plusieurs choses dont le nombre est connu, en les prenant une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. sans avoir égard à leur ordre. Soient, par exemple, les quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d*, & qu'on propoſe de ſçavoir de combien de manieres on peut prendre deux de ces lettres, on verra ſans peine qu'on peut en faire les combinaiſons ſuivantes, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; ainſi quatre choſes ſe combinent deux à deux de ces ſix manieres. Trois de ces lettres ſe combineroient de quatre manieres, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*; c'eſt pourquoi les combinaiſons de quatre choſes trois à trois, ne ſont qu'au nombre de quatre.

Dans les combinaiſons proprement dites, on ne fait point attention à l'ordre des choſes; voilà la raiſon pour laquelle nous n'avons fait aucune mention des combinaiſons ſuivantes, *ba*, *ca*, *da*, *cb*, *db*, *dc*. Si, par exemple, on avoit mis dans un chapeau les quatre billets marqués *a*, *b*, *c*, *d*, & que quelqu'un pariât d'amener les billets *a* & *d*, ſoit en en prenant deux à la fois, ſoit en les prenant l'un après l'autre, il n'importeroit en aucune maniere que *a* vînt le premier ou le dernier: ainſi les combinaiſons *ad* ou *da*, ne doivent être ici regardées que comme une combinaiſon unique.

Mais ſi quelqu'un parioit d'amener *a* au premier coup & *d* au ſecond, alors le cas ſeroit bien différent, & il faudroit faire attention à l'ordre ſuivant lequel ces quatre lettres peuvent être priſes & arrangées enſemble deux à deux: l'on verra facilement que ces manieres ſont, *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*, *bc*, *cb*, *bd*, *db*, *cd*, *dc*. Pareillement ces quatre lettres pourroient ſe combiner & s'arranger trois à trois de ces vingt-quatre façons, *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, *adb*, *abd*, *dba*, *dab*, *bad*, *bda*, *acd*, *adc*, *dac*, *dca*, *cad*, *cda*, *bcd*, *dbc*, *cbd*, *bdc*, *cdb*, *dcb*; & l'on ne ſçauroit en trouver davantage. C'eſt ce qu'on appelle *permutations* & *changements d'ordre*.

PROBLÊME I.

Etant donné un nombre quelconque de choſes, déterminer de combien de manieres elles ſe peuvent combiner deux à deux, trois à trois, &c. ſans égard à l'ordre.

La ſolution de ce problême eſt facile en faiſant uſage du triangle arithmétique. Si vous avez huit choſes à combiner trois à trois, par exemple; prenez la neuvieme bande verticale, (c'eſt-à-dire toujours celle dont le quantieme eſt exprimé par un nombre excédant de l'unité celui des choſes à combiner); prenez enſuite la quatrieme bande horizontale, (c'eſt-a-dire celle dont le quantieme eſt d'une unité plus grand que le nombre des choſes à prendre enſemble); vous trouverez dans la caſe commune le nombre de combinaiſons cherché : il eſt, dans l'exemple préſent, égal à 56.

Mais l'on peut ne pas avoir ſous ſa main un triangle arithmétique, ou bien le nombre des choſes à combiner peut être trop conſidérable pour ſe trouver dans cette table; voici, dans ce cas, une autre méthode très-ſimple.

Le nombre des choſes à combiner étant donné, ainſi que la maniere dont elles doivent être priſes, ſçavoir, ou deux à deux, ou trois à trois, &c.

1° *Formez deux progreſſions arithmétiques, l'une, dont les termes aillent en décroiſſant de l'unité, à commencer par le nombre donné des choſes à combiner, l'autre, celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c;*

2° *Après cela, prenez de chacune autant de termes qu'il y a de choſes à prendre enſemble dans la combinaiſon propoſée;*

3° *Multipliez ensemble les termes de la premiere progression, & faites-en autant de ceux de la seconde ;*

4° *Divisez enfin le premier produit par le second : le quotient sera le nombre des combinaisons demandé.*

Cette regle a été trouvée par une induction des cas les plus simples aux plus compliqués. Mais il seroit trop long d'entrer ici dans ce détail ; on peut recourir aux livres qui traitent spécialement de ces matieres : nous nous bornerons à donner quelques exemples de l'application de la méthode.

§. I.

De combien de manieres se peuvent prendre 90 nombres combinés deux à deux ?

Suivant la regle ci-dessus, il faut multiplier 90 par 89, & diviser le produit 8010 par le produit de 1 & 2, c'est-à-dire par 2 ; le quotient 4005 est le nombre des combinaisons deux à deux qui peuvent résulter de 90 nombres.

Si l'on demandoit de combien de manieres les mêmes nombres peuvent être combinés trois à trois, la réponse seroit aussi facile : il n'y auroit qu'à multiplier ensemble 90, 89, 88, & diviser le produit, qui est 704880, par celui des trois nombres 1, 2, 3 ; le quotient 117480 est le nombre cherché.

On trouvera de même que 90 nombres se peuvent combiner quatre à quatre de 2555190 manieres, sçavoir, en divisant le produit de 90, 89, 88, 87, par 24, produit de 1, 2, 3, 4.

Enfin, si l'on cherchoit quel seroit le nombre des combinaiſons cinq à cinq dont ſeroient ſuſceptibles les mêmes 90 nombres, on trouveroit, en ſuivant la même regle, qu'il y en a 43949268.

REMARQUE.

ON verra, dans le Chapitre ſuivant, l'application de cette queſtion à l'analyſe de la loterie connue aujourd'hui ſous le nom de l'*Ecole Royale Militaire.*

§. II.

Si l'on demandoit *combien les ſept planetes peuvent former entr'elles de différentes conjonctions deux à deux*, il ſeroit aiſé de répondre 21 ; car, ſuivant la regle générale, il faut multiplier 7 par 6, ce qui donne 42, & diviſer ce nombre par le produit de 1 & 2, c'eſt-à-dire par 2 : le quotient eſt donc 21.

Si l'on vouloit abſolument ſçavoir quel eſt le nombre de conjonctions poſſibles de ces ſept planetes, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. on en trouveroit 120, en cherchant ſéparément le nombre des conjonctions deux à deux, celui des conjonctions trois à trois, &c. & les additionnant enſemble.

On pourroit encore y parvenir en ajoutant les ſept termes de la progreſſion géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; ce qui donne 127. Mais de ce nombre on doit ôter 7, à cauſe que, quand on parle de conjonction de planete, il faut évidemment qu'elles ſoient réunies enſemble au moins deux ; car le nombre 127 comprend abſolument toutes les manieres dont ſept choſes peuvent être priſes une à une, deux à deux, trois à trois, &c.

Or de ce nombre il faut ôter, dans la queſtion préſente, celui où les choſes ſont priſes une à une, puiſqu'une planete iſolée ne fait pas une conjonction.

PROBLÊME II.

Un nombre quelconque de choſes étant donné, trouver de combien de manieres elles peuvent être arrangées.

LA ſolution de ce problême eſt facile en ſe ſervant de la voie d'induction. En effet,

1° Une choſe *a* ne peut être arrangée que d'une maniere : le nombre des arrangements eſt donc, dans ce cas, =1.

2° Deux choſes peuvent être arrangées entre elles de deux manieres ; ainſi, avec les lettres *a* & *b*, on peut faire les arrangements *ab* & *ba* : le nombre des arrangements eſt donc égal à 2, ou au produit de 1 & 2.

3° Les arrangements de trois choſes, *a*, *b*, *c*, ſont au nombre de ſix : car *ab* peut en former, avec la troiſieme *c*, trois différents, *abc*, *acb*, *cab* ; & *ba* en formera auſſi trois différents, *bac*, *bca*, *cba* : & il ne ſçauroit y en avoir davantage. Le nombre cherché eſt donc évidemment égal au précédent multiplié par 3, ou égal au produit de 1, 2 & 3.

4° Ajoutons une quatrieme choſe, déſignée par *d* : il eſt évident que chacun des arrangements précédents ſe combinant de quatre façons avec cette quatrieme choſe, ce nombre doit être multiplié par 4, pour avoir celui des arrangements résultants de quatre choſes ; c'eſt-à-dire qu'il ſera 24, ou le produit de 1, 2, 3, 4.

Il eſt inutile d'aller plus avant ; & rien n'eſt plus facile que d'appercevoir qu'un nombre quelconque de choſes étant donné, on aura le nombre d'arrangements dont elles ſont ſuſceptibles, en multipliant enſemble autant de termes de la progreſſion géométrique quil y a de choſes propoſées.

REMARQUE.

1° IL peut ſe faire que, parmi les choſes propoſées, la même ſe trouve répetée pluſieurs fois ; comme ſi l'on demandoit de combien de manieres ces quatre lettres *a*, *a*, *b*, *c*, peuvent être arrangées enſemble : alors on trouve que quatre choſes où deux ſont les mêmes, ne ſont plus ſuſceptibles que de 12 arrangements au lieu de 24 ; que cinq où deux ſont répetées, n'en peuvent plus faire que 60 au lieu de 120.

Mais ſi, dans quatre choſes, la même y étoit répetée trois fois, il n'y auroit plus que 4 combinaiſons au lieu de 24 ; cinq choſes où la même ſeroit répetée trois fois, n'en donneroient plus que 20 au lieu de 120, ou la ſixieme partie.

Or le nombre 2 eſt celui des arrangements dont ſont ſuſceptibles deux choſes différentes, le nombre 6 eſt celui des arrangements de trois choſes différentes ; d'où ſuit la regle ſuivante :

Lorſque, dans un nombre de choſes dont on cherche les arrangements différents, la même s'y trouve répetée pluſieurs fois, diviſez le nombre des arrangements que donne la regle générale, par le nombre d'arrangements que donneroient les choſes répetées *répétées si elles étoient différentes ; le quotient sera le nombre cherché.*

2° Si, dans le nombre des choses dont on demande les arrangements différents, il s'en trouve plusieurs qui soient répétées plusieurs fois, une deux fois, par exemple, & l'autre trois, il n'y aura qu'à chercher le nombre des arrangements suivant la regle générale, & le diviser par le produit des nombres qui exprimeroient les arrangements dont seroit susceptible chacune des choses répétées, si, au lieu d'être la même, elles étoient différentes. Ainsi, dans le cas présent, les choses répétées deux fois étant susceptibles de deux arrangements si elles étoient différentes, & celles qui le sont trois fois pouvant donner six arrangements si elles n'étoient point répétées, on multipliera 6 par 2, & le produit 12 donnera le nombre par lequel il faut diviser celui qu'on trouve par la regle générale. Ces cinq lettres, par exemple, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, peuvent s'arranger de 10 manieres seulement ; car, si elles étoient différentes, elles donneroient 120 arrangements ; mais l'une étant répétée deux fois, & l'autre trois, il faut diviser 120 par le produit de 2 & 3, ou par 12, ce qui donne 10.

On peut, d'après la solution de ce problême, résoudre les questions suivantes.

§. I.

Sept personnes devant dîner ensemble, il s'éleve entr'elles un combat de politesse sur les places (a) ; *enfin, quelqu'un voulant terminer la contestation,*

(a) C'est probablement dans quelque ville de province éloignée de la capitale.

propoſe de ſe mettre à table comme l'on ſe trouve, ſauf à dîner enſemble le lendemain & les jours ſuivants, juſqu'à ce qu'on ait épuiſé tous les arrangements poſſibles. On demande combien de dîners devront être donnés pour cet effet ?

Il eſt aiſé de répondre qu'il en faudroit 5040, ce qui exigeroit 13 ans & plus de 9 mois

§. II.

Si l'on a un mot quelconque, par exemple AMOR, & qu'on veuille ſçavoir combien de mots différents on peut former de ſes quatre lettres, ce qui donne tous les anagrammes poſſibles du mot AMOR, on trouve qu'ils ſont au nombre de 24, ſçavoir, le produit ſucceſſif de 1, 2, 3, 4. Les voici par ordre,

AMOR.	MORA.	ORAM.	RAMO.
AMRO.	MOAR.	ORMA.	RAOM.
AOMR.	MROA.	OARM.	RMAO.
AORM.	MRAO.	OAMR.	RMOA.
ARMO.	MAOR.	OMRA.	ROAM.
AROM.	MARO.	OMAR.	ROMA.

Ainſi les anagrammes latines du mot *amor* ſont au nombre de ſept, ſçavoir, *Roma*, *mora*, *maro*, *oram*, *ramo*, *armo*, *orma*. Mais ſi, dans le mot propoſé, il y avoit une ou pluſieurs lettres répétées, il faudroit faire uſage de la remarque qui ſuit la ſolution du problême ci-deſſus. Ainſi le mot *Leopoldus*, où la lettre *l* eſt deux fois, & la lettre *o* pareillement deux fois, n'eſt ſuſceptible que de 90720 arrangements ou anagrammes différents, au lieu de 362880 qui s'y trouveroient ſi aucune lettre n'étoit répétée ; car, par la regle donnée dans la remarque ci-deſſus, il faut diviſer ce nombre par le produit de 2 par 2, ou par 4, ce qui donne 90720.

Le mot *ſtudioſus*, où l'*u* eſt répété deux fois, & l'*ſ* trois, n'eſt ſuſceptible que de 30240 arrangements ; car il faut diviſer le nombre des arrangements de 9 lettres, qui eſt 362880, par le produit de 2 & 6, ou 12, & le quotient eſt 30240.

On trouveroit ainſi le nombre de tous les anagrammes poſſibles d'un mot quelconque ; mais il faut convenir que, pour peu nombreuſes que ſoient les lettres d'un mot, le nombre des arrangements qui en réſulte eſt ſi conſidérable, que le travail de les parcourir tous abſorberoit la vie d'un homme. Au reſte, ſi l'art des anagrammes ne tire pas de là un grand ſecours, c'eſt un art ſi futile qu'il n'y a pas grand mal.

§. III.

De combien de manieres peut-on, en conſervant la meſure, varier ce vers :

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cœlo ?

Ce vers, ouvrage d'un dévot Jéſuite de Louvain, nommé le P. Bauhuys, eſt célebre par le grand nombre d'arrangements dont il eſt ſuſceptible ſans enfreindre les loix de la meſure ; & divers mathématiciens ſe ſont exercés ou amuſés à en rechercher le nombre. *Erycius Puteanus* a pris la peine d'en faire une énumération en 48 pages, dans lesquelles il en a compris 1022, en les égalant au nombre des étoiles comprises dans les catalogues anciens des astronomes, & en remarquant très-dévotement que les arrangements de ces mots l'emportent même sur ce nombre, comme les perfections de la Vierge l'emportent sur le nombre des étoiles. Voyez aussi Vossius, *de Scient. Math. cap. 7.*

Le P. Prestet, dans la premiere édition de ses Eléments de Mathématiques, dit que ce vers est susceptible de 2196 variations, mais dans la seconde édition il l'étend jusqu'à 3276.

Wallis, dans l'édition de son algebre, faite à Oxford en 1693, en avoit compté 3096.

Mais aucun d'eux n'a précisément touché au but, ainsi que le remarque M. Jacques Bernoulli dans son *Ars conjectandi* : il y dit que les différentes combinaisons de ce vers, en en retranchant les spondaïques, & en admettant d'ailleurs ceux qui n'ont point de césures, montent précisément à 3312. On peut voir dans l'ouvrage cité la méthode par laquelle il en a fait l'énumération.

On cite encore ce vers de Thomas Lansius :

Mars, mors, sors, lis, vis, styx, pus, nox, fex, mala, crux, fraus.

Il n'est pas difficile de trouver qu'en conservant le mot *mala* à l'antépénultieme place, pour se conformer à la mesure, il est susceptible de 39916800 arrangements différents.

PROBLÊME III.

Des combinaiſons de quarreaux mi-partis de deux couleurs par la diagonale.

LE P. Sébaſtien Truchet, de l'Académie royale des Sciences, raconte dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'année 1704, qu'étant allé faire un voyage au canal d'Orléans, il rencontra, dans un château voiſin, des carreaux de faïance quarrés & mi-partis de deux couleurs par une diagonale : ils étoient deſtinés à carreler une chapelle & quelques appartements. Cela lui donna occaſion d'examiner de combien de manieres deux de ces carreaux pouvoient ſe joindre enſemble par le côté, pour en former différents deſſins.

On voit d'abord que, ſuivant la ſituation qu'un ſeul carreau peut prendre, il forme quatre deſſins différents, qui peuvent néanmoins ſe réduire à deux, n'y ayant entre le premier & le troiſieme, comme entre le deuxieme & le quatrieme, d'autre différence que dans la tranſpoſition du triangle le plus ombré à la place du plus clair. Pl. 2.

Maintenant, ſi l'on combine deux de ces carreaux enſemble, il en réſultera 64 manieres différentes de les ranger ; car, dans l'arrangement de deux carreaux, l'un des deux peut prendre quatre ſituations différentes, dans chacune deſquelles l'autre carreau peut changer 16 fois. Ainſi il en réſulte 64 combinaiſons qu'on peut voir dans la même planche.

On doit néanmoins remarquer encore, avec le P. Sébaſtien, que de ces 64 combinaiſons, il y en a une moitié préciſément qui ne fait que répéter l'autre abſolument dans le même ſens; ce qui les réduit à 32. On les réduiroit à 10, ſi l'on ne faiſoit point d'attention à la ſituation.

On pourroit ſemblablement combiner trois, quatre, cinq carreaux, &c. les uns avec les autres: on trouveroit que trois carreaux peuvent former entr'eux 128 deſſins; quatre en forment 256, &c.

Il eſt ſurprenant de voir la prodigieuſe variété de compartiments qui naiſſent d'un auſſi petit nombre d'éléments. Le P. Sébaſtien en donne, dans les Mémoires de l'Académie de 1704, trente différents, choiſis parmi cent autres qui ne ſont qu'une petite partie de ceux qu'on peut former. Nous en donnons dans la planche deuxieme quelques-uns des plus remarquables.

Le mémoire du P. Sébaſtien a donné à un de ſes confreres, le P. Douat, l'occaſion de cultiver davantage cette matiere. Il donna en 1722 un traité in-4°, où ce ſujet eſt enviſagé d'une maniere différente. On y voit que quatre carreaux mi-partis, pris quatre à quatre, répétés & permutés de toutes les manieres poſſibles, forment 256 figures différentes, qui, priſes elles-mêmes deux à deux, trois à trois, & ainſi de ſuite, forment une prodigieuſe multitude de compartiments, dont les exemples rempliſſent la plus grande partie de ſon livre (*a*).

(*a*) Il eſt intitulé: *Methode pour faire une infinité de deſſins différents, avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale;* ou, *Obſervations du P.* D. Douat, *religieux Carme de la P. de T. ſur un Mémoire inſéré dans l'Hiſt. de l'Acad. royale des Sciences de Paris, année 1704, par le P.* S. Truchet, *religieux du même Ordre.* Paris 1722, in-4°.

J'ai toujours été surpris de ce qu'on n'a pas fait en architecture plus d'usage de cette idée ; il me semble qu'il en eût pu résulter dans le carrelage & le parquet une variété très-agréable, & pour ainsi dire intarissable.

On en a fait du moins l'objet d'un petit jeu appellé le *Jeu du Parquet*, dont on trouve l'instrument chez les tabletiers. C'est une petite table garnie d'un rebord, & capable de recevoir 64 ou 100 petits quarrés mi-partis, dont on cherche à faire des combinaisons agréables. Ceux qui sont curieux de cet amusement, ne peuvent mieux faire que de se procurer l'ouvrage cité plus haut du P. Douat, qui leur fournira une foule de dessins plus agréables les uns que les autres.

CHAPITRE IX.

Application de la doctrine des Combinaisons aux Jeux de hazards & aux Probabilités.

QUOIQUE rien ne paroisse, au premier coup d'œil, moins du ressort des mathématiques que le hasard, l'esprit d'analyse n'a pas laissé d'enchaîner pour ainsi dire ce Protée, & de le soumettre au calcul. Il est venu à bout de mesurer les différents degrés de probabilité de certains événements ; ce qui a donné naissance à une branche curieuse des mathématiques, dont nous allons dévoiler les principes.

Lorsqu'un événement peut arriver de plusieurs manieres différentes, il est évident que la probabilité qu'il arrive d'une certaine maniere déterminée est d'autant plus grande, que, sur la totalité de ces manieres dont il peut arriver, il y en a un plus grand nombre qui le déterminent tel. Dans une loterie, par exemple, il n'est personne qui ne sente que la probabilité ou l'espérance d'amener un bon billet est d'autant plus grande d'un côté, que le nombre des bons billets est plus grand, & d'un autre, que le nombre total des billets est moindre. La probabilité d'un événement est donc en raison composée de la directe du nombre des cas qui peuvent lui donner lieu, & de l'inverse du nombre total de ceux suivant lesquels il peut se varier : par conséquent, elle peut s'exprimer par une fraction dont le nombre des cas favorables est le numérateur, & celui de la totalité des cas est le dénominateur.

Ainſi, dans une loterie où il y a mille billets deſquels 25 ſeulement ſont bons, la probabilité d'amener un de ces derniers ſera repréſentée par $\frac{25}{1000}$, ou $\frac{1}{40}$; & cette probabilité ſeroit double s'il y avoit 50 bons billets, car alors elle ſeroit égale à $\frac{1}{20}$; au contraire elle ne ſeroit que la moitié de celle ci-deſſus, ſi, au lieu de 1000 billets, il y en avoit deux mille. Elle ſeroit infiniment petite, ou nulle, ſi, le nombre de bons billets reſtant le même, le nombre total étoit infiniment grand; comme au contraire elle dégénéreroit en certitude, & ſeroit, dans ce cas, exprimée par l'unité, ſi le nombre des bons billets égaloit ceux de la loterie.

Un autre principe de cette théorie néceſſaire à expliquer ici, eſt le ſuivant, dont l'énonciation ſuffit pour en faire appercevoir la vérité.

On joue à jeu égal, lorſque les miſes qu'on dépoſe ſont en proportion directe des probabilités qu'il y a de gagner l'argent mis au jeu: car jouer à jeu égal n'eſt autre choſe que dépoſer une miſe tellement proportionnée avec la probabilité qu'on a de gagner, qu'après un très-grand nombre de coups on ſe trouve à peu près au pair: or il faut pour cela que les miſes ſoient proportionnelles au degré de probabilité que chacun des joueurs a en ſa faveur. Suppoſons, par exemple, que Pierre parie contre Jacques pour un coup de dés, & qu'il y ait pour lui deux événements & un pour Jacques; le jeu ſera égal ſi, après un grand nombre de coups, ils ſe retirent à peu près ſans perte. Or, y ayant deux cas pour Pierre & un pour Jacques, après trois cents coups Pierre en aura gagné à peu près deux cents, & Jacques une centaine. Il faut donc que Pierre dépoſe 2, & Jacques 1 ſeulement: car par-là Pierre, gagnant deux cents coups, gagnera 200; & Jacques, gagnant cent coups, gagnera aussi 200. Aussi s'exprime-t-on, en pareil cas, ordinairement en disant qu'il y a deux contre un à parier pour Pierre.

PROBLÊME I.

Dans le jeu de Croix ou Pile, quelle probabilité y a-t-il d'amener plusieurs fois de suite Croix, ou plusieurs fois de suite Pile; ou bien, en jouant avec plusieurs pieces, quelle probabilité y a-t-il qu'elles se trouveront toutes Croix ou toutes Pile?

TOUT le monde connoît le jeu de *croix ou pile*, ainsi il est superflu d'en donner ici l'explication; nous passons tout de suite à l'analyse du problême.

Il est évident, 1° que n'y ayant aucune raison pour que croix arrive plutôt que pile, ou pile que croix, la probabilité que l'un des deux arrivera est égale à $\frac{1}{2}$, ou qu'il y a également à parier pour ou contre.

Mais si l'on jouoit deux coups, & que quelqu'un pariât d'amener les deux fois croix, pour sçavoir ce qu'il devroit mettre au jeu, il faudroit faire attention que toutes les combinaisons de croix ou pile, qui peuvent arriver dans deux jets consécutifs de la même piece, sont *croix, croix; croix, pile; pile, croix; pile, pile;* dont une seule donne croix, croix. Il n'y a donc qu'un cas sur 4 qui fît gagner celui qui parieroit d'amener deux fois de suite croix: la probabilité de cet événement ne seroit conséquemment que $\frac{1}{4}$; & celui qui parieroit pour, ne devroit mettre au jeu qu'un écu, par exemple, pendant que l'autre en mettroit trois: car ce dernier auroit trois cas pour gagner, pendant que le premier n'en a qu'un. Ainſi leurs miſes, pour jouer à jeu égal, doivent être dans cette proportion.

On trouveroit de même que celui qui parieroit d'amener trois fois de ſuite *croix*, par exemple, auroit ſeulement pour lui une ſeule des huit combinaiſons de croix ou pile qui peuvent réſulter de trois jets ſucceſſifs de la même piece. La probabilité de cet événement ſeroit conſéquemment $\frac{1}{8}$, pendant que celle qu'auroit ſon adverſaire ſeroit $\frac{7}{8}$. Il ne devroit, pour jouer au pair, mettre au jeu que 1 contre 7.

Il eſt inutile de parcourir d'autres cas: il eſt aiſé de voir que la probabilité d'amener *croix* quatre fois de ſuite, eſt $\frac{1}{16}$; cinq fois de ſuite, $\frac{1}{32}$; &c.

Il n'eſt pas, au reſte, néceſſaire d'entrer dans l'énumération des différentes combinaiſons réſultantes des *croix* ou *pile;* mais l'on peut ſe ſervir d'une regle aiſée à démontrer, & que voici:

Connoiſſant les probabilités de deux ou pluſieurs événements iſolés, la probabilité qu'ils auront lieu tous enſemble ſe trouve tout ſimplement, en multipliant les probabilités de ces événements conſidérés comme iſolés. Ainſi la probabilité d'amener *croix* conſidéré comme iſolé étant exprimée à chaque jet par $\frac{1}{2}$, celle de l'amener deux fois de ſuite ſera $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$; celle de l'amener trois fois dans trois coups conſécutifs ſera $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$; &c.

2° Le problême de déterminer quelle eſt la probabilité d'amener, avec deux, trois, quatre pieces, tout *croix* ou tout *pile*, ſe réſout par les mêmes voies. Dans deux pieces jettées, il y a 4 combinaisons de *croix* & *pile*, dont une seule est toute *croix* : dans trois pieces jettées à la fois il y en a 8, dont une seule donne tout *croix*; &c. Ainsi les probabilités de chacun de ces cas sont les mêmes que celles des cas analogues examinés ci-dessus.

Il paroît même d'abord sans analyse que ces deux questions sont absolument les mêmes; & voici le raisonnement qu'on peut faire pour le prouver. Jetter les deux pieces A & B ensemble, ou les jetter l'une après l'autre après avoir donné à la premiere A le temps de se fixer, c'est assurément la même chose. Supposons donc que, la premiere A étant fixée, au lieu de jetter la seconde B, on releve la premiere A pour la jetter une seconde fois, ce sera la même chose que si, pour ce second jet, on avoit employé la piece B : car, par la supposition, elles sont toutes deux égales & semblables, du moins quant à l'indifférence parfaite qu'il arrive croix ou pile. Ainsi jetter à la fois les deux pieces A, B, ou jetter deux fois de suite la piece A, sont la même chose. Donc, &c.

3° On demande maintenant combien on peut parier d'amener au moins une fois *croix* en deux coups? Par la méthode ci-dessus, on trouvera qu'il y a 3 contre 1. En effet, il y a dans deux coups quatre combinaisons, dont trois donnent au moins une fois croix dans les deux coups, & une seule qui donne toujours pile; d'où il suit qu'il y a trois combinaisons en faveur de celui qui parie d'amener une fois croix en deux coups, & une seule contre lui.

PROBLÊME II.

Un nombre quelconque de dés étant donné, déterminer quelle probabilité il y a qu'on amenera un nombre de points assigné.

NOUS supposerons d'abord des dés ordinaires, c'est-à-dire à six faces, & marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6; & nous allons analyser quelques-uns des premiers cas du problême, pour nous élever par degré à des cas plus composés.

1° *On propose d'amener un point déterminé, 6 par exemple, avec un dé.*

Il est évident qu'y ayant au dé six faces dont une seule est marquée de 6, & chacune ayant autant de facilité à se trouver en dessus qu'aucune autre, il y a 5 hasards contre celui qui propose d'amener 6 en un coup, & 1 seul pour lui. Il doit donc, pour n'être pas dupe, parier seulement 1 contre 5.

2° *Qu'il soit proposé d'amener le même point 6 avec deux dés.*

Pour analyser ce cas, il faut d'abord observer que deux dés donnent 36 combinaisons différentes; car chacune des faces du dé A, par exemple, peut se combiner avec chacune de celles du dé B; ce qui produit 36 combinaisons. Il faut ensuite voir de combien de manieres le point 6 peut être amené avec deux dés. Or on trouve qu'il peut être d'abord amené par 3 & 3: 2° en amenant 2 avec le dé A & 4 avec le dé B, ou 4 avec le dé A & 2 avec le dé B; ce qui fait, comme il est aisé de voir, deux cas distincts : 3° en amenant 1 du dé A & 5 du dé B, ou 1 du dé B & 5 du dé A ; ce qui donne encore deux cas : on n'en sçauroit évidemment trouver d'autres. Ainsi il y a 5 cas favorables sur 36 : conséquemment la probabilité d'amener 6 avec deux dés est $\frac{5}{36}$, & la probabilité de ne le pas amener est $\frac{31}{36}$; & c'est le rapport dans lequel doivent être les mises des joueurs.

En analysant les autres cas, on trouve qu'il y a, pour amener deux avec deux dés, 1 cas sur 36, 2 pour amener trois, 3 pour amener quatre, 4 pour amener cinq, 5 pour amener six, 6 pour amener sept, 5 pour huit, 4 pour neuf, 3 pour dix, 2 pour onze, & 1 pour douze ou sonnez.

Si l'on proposoit trois dés, avec lesquels il est évident que le moindre point seroit trois, & le plus grand dix-huit, on trouveroit, au moyen d'une semblable analyse, que sur 216 coups différents possibles avec trois dés, il y en a 1 pour pour amener trois, 3 pour amener quatre, 6 pour amener cinq, &c. suivant la Table ci-jointe, dont voici l'usage.

Voulez-vous trouver, par exemple, de combien de manieres 13 peut s'amener avec trois dés ; cherchez, dans la premiere colonne verticale à gauche, le nombre 13, & au haut de la Table le chiffre romain qui indique le nombre de dés ; la case commune à la bande horizontale vis-à-vis 13, & à la colonne verticale qui répond à III, donnera 21 pour le nombre des manieres dont 13 peut être amené avec trois dés. On trouveroit semblablement qu'il peut être amené, avec quatre dés, de 140 façons ; avec cinq dés, de 420 ; &c.

TABLE des nombres de manieres différentes dont un point quelconque peut être amené avec un, deux, trois, ou plus de dés.

	Nombre des Dés.					
Nombre des Points.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7		6	15	20	15	6
8		5	21	35	35	21
9		4	25	56	70	56
10		3	27	80	126	126
11		2	27	104	205	252
12		1	25	125	305	456
13			21	140	420	756
14			15	146	540	1161
15			10	140	651	1666
16			6	125	735	2247
17			3	104	780	2856
18			1	80	780	3431
19				56	735	3906
20				35	651	4221
21				20	540	4332
22				10	420	4221
23				4	305	3906
24				1	205	3431
25					126	2856

Lorſqu'on connoît une fois de combien de manieres on peut amener un point avec un certain nombre de dés, il eſt aiſé de trouver quelle probabilité il y a de l'amener : il n'y a qu'à former une fraction dont le numérateur ſoit le nombre de manieres dont peut arriver ce point, & le dénominateur le nombre 6 élevé à une puiſſance déſignée par le nombre des dés, comme le cube de 6 ou 216 pour trois dés, le quarré-quarré ou 1296 pour quatre, &c.

Ainſi, pour amener 13 avec trois dés, la probabilité eſt $\frac{21}{216}$; pour l'amener avec quatre, elle eſt $\frac{140}{1296}$.

On peut encore propoſer ſur le jeu des dés pluſieurs autres queſtions dont nous allons analyſer quelques-unes.

1° *Déterminer entre deux joueurs quel eſt l'avantage ou le déſavantage de celui qui entreprend d'amener une face déterminée, par exemple 6, en un certain nombre de coups.*

Suppoſons qu'on l'entreprenne en un ſeul coup : pour ſçavoir quelle eſt la probabilité d'y réuſſir, on conſidérera que celui qui tient le dé n'a qu'un haſard pour gagner, & cinq pour perdre ; par conſéquent, pour l'entreprendre en un ſeul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5. Ainſi il y a un grand déſavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en un ſeul coup de dé.

Pour ſçavoir quelle eſt la probabilité d'amener au moins une face marquée 6, en deux coups, avec un même dé, on conſidérera que c'eſt la même choſe, ainſi qu'on l'a obſervé plus haut au ſujet du jeu de croix ou pile, que d'entreprendre, en jettant deux dés à-la-fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé n'a que 11 haſards

hasards ou combinaisons pour gagner : car il peut amener 6 avec le premier dé, & 1, 2, 3, 4 ou 5 avec le second ; ou bien 6 avec le second dé, & 1, 2, 3, 4 ou 5 avec le premier ; ou 6 avec chaque dé. Mais il y a 26 combinaisons ou hasards pour ne point gagner, comme on voit dans la table ci-dessous.

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5

D'où il est aisé de conclure que celui qui entreprend d'amener un 6 avec deux dés, ne doit mettre que 11 contre 25, & conséquemment qu'il a du désavantage à l'entreprendre au pair.

On doit remarquer que la somme 36 de tous les hasards ou combinaisons possibles en deux coups de dés, est le quarré du nombre donné 6, qui est celui des faces d'un dé ; & que le nombre 25 des hasards contraires à celui qui parie d'amener une face déterminée, est le quarré du même nombre donné 6 diminué de l'unité, ou de 5 : c'est pourquoi le nombre des hasards favorables est, dans ce cas, la différence des quarrés de 36 & de 25, ou du quarré du nombre des faces du dé, & de celui des faces de ce même dé moins un.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups de dé, on considérera semblablement que c'est la même chose que d'entreprendre, en jettant trois dés, d'amener au moins un 6 : or, des 216 combinaisons différentes que donnent trois dés, il y en a 125 où il n'y a aucun 6, & 91 où il y a au moins un 6 ; conſéquemment celui qui parie d'amener un 6 ou en trois coups de dés, ou en un ſeul coup avec trois dés, ne doit parier que 91 contre 125, & il y auroit du déſavantage à l'entreprendre au pair.

Vous obſerverez ici que le nombre 91 eſt la différence du cube du nombre des faces d'un dé, ſçavoir 216, & du cube 125 de ce même nombre diminué de l'unité, ou de 5. Ainſi l'on voit qu'en général, pour trouver la probabilité d'amener une face déterminée en un certain nombre de coups, ou en un coup avec un certain nombre de dés, il faut élever 6, le nombre des faces d'un dé, à la puiſſance déſignée par le nombre des coups à jouer, ou des dés à jetter une fois ; faire enſuite la ſemblable puiſſance de 6 moins l'unité, ou de 5, & l'ôter de la premiere : le reſtant & cette derniere puiſſance de 5 ſeront les nombres de haſards reſpectifs pour gagner ou perdre.

Par exemple, ſi on parie d'amener au moins un 3 avec quatre dés, on fera la quatrieme puiſſance ou le quarré-quarré de 6, qui eſt 1296 ; on en ôtera le quarré-quarré de 5, ou 625 ; le reſtant 671 ſera le nombre des haſards favorables pour gagner, & le nombre 625 celui des haſards pour perdre : conſéquemment il y aura de l'avantage à parier au pair.

Il y en aura encore davantage à entreprendre au pair d'amener un point déterminé, par exemple 3, en cinq coups ou avec cinq dés ; car ſi de la cinquieme puiſſance de 6, qui eſt 7776, on ôte la cinquieme puiſſance de 5, ou 3125, le reſte 4651 ſera le nombre des haſards favorables, & 3125 celui des haſards contraires. Conſéquemment, pour jouer à jeu égal, celui qui parie pour devroit mettre 4651 contre 3125, ou près de 3 contre 2.

3° *En combien de coups peut-on parier avec égalité qu'on amenera un doublet déterminé, par exemple sonnez, avec deux dés ?*

On sçait déja que la probabilité de ne point amener un sonnez avec deux dés est exprimée par $\frac{35}{36}$: conséquemment la probabilité de ne les point amener en deux coups sera comme le quarré de cette fraction ; en trois coups, comme le cube ; &c. Or, de même qu'une puissance d'un nombre tant soit peu au dessus de l'unité va toujours en augmentant, celle d'un nombre tant soit peu au dessous va toujours en diminuant : par conséquent les puissances consécutives de $\frac{35}{36}$ iront toujours en diminuant. Qu'on conçoive donc $\frac{35}{36}$ élevée à une puissance telle qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}$; on trouve que la vingt-quatrieme puissance de $\frac{35}{36}$ est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$, & que la vingt-cinquieme est un peu moindre (*a*) : d'où il suit qu'on peut parier avec quelque avantage au pair, qu'en 24 coups on n'amenera pas un sonnez avec deux dés ; mais qu'il y a du désavantage à parier au pair qu'on ne l'amenera pas en 25 : conséquemment il y a pour celui qui parie de l'amener en 24 coups du désa-

(*a*) Soit n l'exposant de la puissance de $\frac{35}{36}$ qui est égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $\frac{35^n}{36^n}$ soit égal à $\frac{1}{2}$. Comme la quantité inconnue n se trouve dans l'exposant, il faut l'en dégager ; ce qu'on fait par le moyen des logarithmes. Car si $\frac{35^n}{36^n} = \frac{1}{2}$, en prenant les logarithmes on aura n log. 35, $- n$ log. 36 $=$ log. $\frac{1}{2}$, ou $=$ $-$ log. 2 ; car log. $\frac{1}{2} = -$ log. 2. Donc n log 35 $- n$ log. 36 $= -$ log. 2, ou log. 2 $= n$ log. 36 $- n$ log. 35. Donc $n = \frac{\text{log. } 2}{\text{log. } 36 - \text{log. } 35}$. Ce qui donne $n = 24\frac{6}{10}$.

vantage, & il y a de l'avantage à parier au pair qu'il l'amenera en 25.

4° *Quelle est la probabilité d'amener en un coup, avec deux ou plusieurs dés, un doublet déterminé, par exemple terne?*

Pour le découvrir, on considérera qu'à l'entreprendre avec deux dés, il y a un seul hasard favorable sur les 36 hasards ou combinaisons que donnent deux dés; d'où il suit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35.

S'il étoit question de trois dés, on trouveroit qu'il faut mettre seulement 16 contre 200; car le nombre des hasards ou combinaisons possibles avec trois dés est 216. Mais quand il est question d'amener terne avec trois dés, on peut l'amener de 16 façons différentes: car, des 36 combinaisons des dés A & B, toutes celles où entre un 3 seulement, comme 1, 3; 3, 1; &c. qui sont au nombre de 10, se combinant avec la face marquée 3 du dé C, donnent un terne. De plus, la combinaison 3, 3, des dés A, B, se combinant avec une des six faces du troisieme dé C, donnera un terne. Ainsi voilà 16 façons d'amener terne avec trois dés; ce qui donne 16 hasards favorables sur 216. Conséquemment la probabilité d'amener un terne avec trois dés est $\frac{16}{216}$, & l'on ne devroit parier pour la réussite que 16 contre 200, ou 2 contre 25.

Si l'on demande quelle probabilité il y a d'amener un terne avec quatre dés, on trouvera qu'elle est exprimée par $\frac{171}{1296}$; car, sur les 1296 combinaisons des faces de quatre dés, il y en a 150 qui donnent un terne, 20 qui donnent trois 3, & 1 qui en donne 4, en tout 171 coups où il y a deux, ou trois, ou quatre 3. Conséquemment il ne faudroit parier que 19 contre 144, ou environ 1 contre $7\frac{1}{2}$, qu'on amenera au moins un terne avec quatre dés.

Enfin si vous voulez sçavoir *quelle probabilité il y a d'amener du premier coup un doublet quelconque avec deux dés ou davantage*, il sera aisé de la déterminer au moyen du calcul précédent; car, lorsqu'il est question d'un doublet indéterminé, il est évident que la probabilité est six fois aussi grande que lorsqu'il s'agit d'un doublet assigné: ainsi il n'y a qu'à multiplier par 6 les probabilités trouvées ci-dessus. Elles sont donc, pour deux dés, $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$; pour trois dés, $\frac{96}{216}$ ou $\frac{4}{9}$; pour quatre dés, $\frac{73}{108}$: ensorte qu'il y a de l'avantage à parier au pair qu'avec quatre dés on amenera au moins un doublet.

PROBLÊME III.

Deux joueurs jouent ensemble en un certain nombre de parties liées, par exemple trois: l'un des deux a 2 parties, l'autre une: ne pouvant ou ne voulant point continuer le jeu, ils conviennent de le cesser, & de partager la mise. On demande de quelle maniere cela doit être fait?

Ce problême est un des premiers dont s'occupa M. Pascal, lorsqu'il commença à traiter le calcul des probabilités. Il le proposa à M. de Fermat, célebre géometre de son temps, qui le résolut aussi par une méthode différente, sçavoir celle des combinaisons. Nous allons faire connoître l'une & l'autre.

Il est évident que chacun des joueurs, en mettant son argent au jeu, en a abdiqué la proprieté, mais qu'en revanche ils ont droit d'attendre ce que le hasard peut leur en donner : ainsi, cessant de jouer, ils doivent partager l'argent de la mise en rapport de la probabilité que chacun auroit eue de gagner tout l'argent.

1er Cas. On trouvera ce rapport par le raisonnement suivant. Puisqu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & deux au second, on reconnoîtra aisément que s'ils continuoient de jouer, & que le second gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever; & que dans ce cas, les deux joueurs étant également avancés, leurs espérances ou sorts pour gagner le tout seroient égales. Ainsi, dans cette supposition, ils auroient un égal droit à l'enjeu; & conséquemment ils devroient le partager également.

Il est donc certain que si le premier gagne la partie qui va se jouer, tout l'argent qui est au jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. Ainsi, l'un étant aussi probable que l'autre, le premier a droit à la moitié de ces deux sommes prises ensemble. Or, prises ensemble, elles font $\frac{3}{2}$: donc la moitié est $\frac{3}{4}$. Telle est la portion de la mise qui appartient au premier joueur; par conséquent la portion qui revient au second n'est que $\frac{1}{4}$.

2e Cas. Ce premier cas résolu servira à résoudre le suivant, où l'on suppose qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & trois au second. Car si le premier gagne une partie, il a tout l'argent du jeu; & s'il perd une partie, ensorte qu'il ne faille plus que deux parties au second pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{3}{4}$ de l'argent, puisqu'ils se trouveront alors dans l'état du cas précédent. C'eſt pourquoi, l'un & l'autre de ces deux événements étant également probable, il doit appartenir au premier la moitié des deux ſommes priſes enſemble, ou la moitié de $\frac{7}{4}$, c'eſt-à-dire $\frac{7}{8}$: le reſte $\frac{1}{8}$ ſera ce qui reviendra au ſecond joueur.

On trouvera, par un raiſonnement ſemblable, que ſi l'on ſuppoſoit deux parties manquer au premier joueur & trois au ſecond, ils devroient, en ceſſant de jouer, partager la miſe de ſorte que le premier eût $\frac{11}{16}$, & le ſecond $\frac{5}{16}$ de la miſe. *3^e^ Cas.*

S'ils jouoient en quatre parties, & qu'il manquât au premier deux parties ſeulement & quatre au ſecond, la miſe devroit être diſtribuée de maniere que le premier en eût les $\frac{13}{16}$, & le ſecond les $\frac{3}{16}$. *4^e^ Cas.*

D'après ces raiſonnements, on a établi cette regle générale qui diſpenſe du raiſonnement employé ci-deſſus, & qui procede au moyen du triangle arithmétique.

Prenez la ſomme des parties qui manquent aux deux joueurs; je la ſuppoſe 3, comme dans le premier cas propoſé ci-deſſus: ainſi l'on prendra la troiſieme diagonale du triangle arithmétique; & comme il ne manque qu'une partie au premier joueur, on ne prendra que le premier nombre de cette diagonale; & attendu qu'il en manque deux au ſecond, on prendra la ſomme des deux premiers nombres 1, 2, ce qui donnera 3. Ces deux nombres 1 & 3 indiqueront que la miſe doit être partagée dans le même rapport: ainſi le premier joueur devra en avoir les $\frac{3}{4}$, & le ſecond le $\frac{1}{4}$.

L'application de cette regle aux autres cas quelconques eſt aiſée à faire; c'eſt pourquoi, afin d'abréger, nous ne nous étendrons pas davantage ſur ce ſujet.

Nous avons dit plus haut que nous ſerions connoître la ſeconde méthode de réſoudre ces ſortes de problêmes, qui eſt celle des combinaiſons; la voici.

Pour réſoudre, par exemple, le quatrieme cas, où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever & quatre au ſecond, enſorte qu'il leur manque enſemble ſix parties, ôtez l'unité de cette ſomme; &, parcequ'il reſte 5, on ſuppoſera ces cinq lettres ſemblables *aaaaa* favorables au premier joueur, & ces cinq autres *bbbbb* favorables au ſecond : on les combinera enſemble comme vous le voyez dans la Table ci-deſſous, où, des 32 combinaiſons, les 26 premieres vers la gauche, où ſe rencontre au moins deux fois *a*, indiquent le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le premier, & les 6 derniers vers la droite, où *a* ne ſe trouve qu'une fois, indiquent le nombre des haſards qui feront gagner le ſecond.

aaaaa	*aaabb*	*aabbb*	*abbbb*
aaaab	*aabba*	*abbba*	*bbbba*
aaaba	*abbaa*	*bbbaa*	*babbb*
aabaa	*bbaaa*	*ababb*	*bbabb*
abaaa	*aabab*	*abbab*	*bbbab*
baaaa	*abaab*	*bbaab*	*bbbbb*
	baaab	*baabb*	
	baaba	*babba*	
	babaa	*bbaba*	
	ababa	*babab*	

Ainſi l'attente du premier joueur ſera à celle du ſecond comme 26 eſt à 6, ou comme 13 à 3.

Pareillement, pour résoudre le cas où l'on suppose un des joueurs ayant trois parties & le second n'en ayant aucune, celui-là devant gagner qui aura plutôt quatre parties, on aura le même nombre de parties manquantes 5, qu'il faut diminuer de l'unité pour avoir 4. Il faudra ensuite examiner de combien de manieres on peut combiner les lettres *a* & *b* quatre à quatre, & l'on trouvera qu'il y en a 16, sçavoir:

aaaa	*aabb*	*abbb*	
aaab	*abab*	*babb*	*bbbb*
aaba	*baab*	*bbab*	
abaa	*abba*	*bbba*	
baaa	*baba*		
	bbaa		

Or, de ces 16, il est évident qu'il y en a 15 dans lesquelles *a* se trouve au moins une fois, ce qui désigne 15 combinaisons ou hasards favorables pour le premier joueur, & un seul pour le second. Conséquemment ils devront partager la mise en raison de 15 à 1, ou bien le premier en devra avoir les $\frac{15}{16}$, & le second $\frac{1}{16}$.

PROBLÊME IV.

Sur la Loterie de l'École Royale Militaire.

TOUT le monde connoît aujourd'hui ce jeu, depuis qu'il a été transplanté d'Italie en France (*a*).

(*a*) Ce jeu a pris naissance à Genes, où chaque année, depuis très long-temps, on tire par la voie du sort cinq membres du sénat, qui est composé de 90 personnes, pour en former un conseil particulier. De-là quelques gens oisifs prirent occasion de parier que le sort tomberoit

Son analyse se réduit à la solution de ce problême-ci: *Etant donnés 90 nombres dont 5 sont extraits au hasard, déterminer quelle est la probabilité que, parmi ces cinq nombres, se trouveront un, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq nombres qu'on a pris sur les 90.*

Or il est aisé de voir que s'il n'étoit question que d'un nombre déterminé, & qu'on ne tirât de la roue qu'un seul nombre, il n'y auroit pour le joueur qu'un seul hasard favorable sur 90; mais comme on tire cinq nombres de la roue, cela quintuple le sort favorable au joueur, de sorte qu'il y a pour lui cinq hasards favorables sur les quatre-vingt-dix. Ainsi la probabilité de gagner est $\frac{1}{18}$; &, pour jouer absolument à jeu égal, les mises devroient être dans le même rapport, ou, ce qui revient au même, le tenant de la loterie devroit rembourser la mise dix-huit fois.

Pour sçavoir quelle probabilité il y a que deux nombres pris sortiront tous deux, ce qu'on ap-

sur tels ou tels sénateurs. Le gouvernement, voyant ensuite avec quelle vivacité on s'intéressoit dans ces paris, en prit l'idée d'établir une loterie sur le même principe. Elle eut un tel succès, que toutes les villes d'Italie s'y intéressoient, & envoyoient à Genes beaucoup d'argent. Ce motif, & sans doute celui de se former un revenu, engagea le pape à en établir une semblable à Rome. Ses habitants sont si passionnés pour ce jeu, qu'on voit communément des malheureux s'épargner & à leur famille les choses les plus nécessaires à la vie, pour s'y intéresser. On les voit encore donner, pour se procurer des nombres heureux, dans mille extravagances inspirées par la crédulité ou la superstition. La raison qui regne plus généralement sur le peuple François, & sur-tout ses occupations, l'ont préservé de cette ardeur excessive & de toutes ces folies.

pelle jouer par *ambes*, il faut déterminer combien d'ambes ou de combinaiſons deux à deux donnent 90 nombres. Or on a montré, en parlant des combinaiſons, qu'il y en a 4005. Mais comme on tire cinq nombres de la roue, & que ces cinq nombres combinés enſemble deux à deux font dix ambes, il en réſulte que, ſur ces 4005 haſards, il n'y en a que 10 qui ſoient favorables au joueur. Ainſi la probabilité que les deux nombres choiſis ſeront parmi ceux tirés de la roue, ſera exprimée par $\frac{10}{4005}$ ou $\frac{1}{400\frac{1}{2}}$. C'eſt pourquoi le tenant de la loterie devroit donner au joueur, en cas de gain, $400\frac{1}{2}$ fois ſa miſe.

Lorſqu'on joue par *terne*, c'eſt-à-dire ſous la condition que les trois nombres choiſis ſe trouveront parmi les cinq tirés de la roue, pour trouver quelle eſt la probabilité de cet événement, il faut déterminer de combien de manieres 90 nombres peuvent ſe combiner trois à trois, ou combien de ternes ils font: on trouve qu'ils montent à 117480. Or, comme les cinq nombres extraits de la roue forment 10 ternes, il y a pour le joueur dix cas favorables ſur 117480; & la probabilité en faveur du joueur eſt de $\frac{10}{117480}$ ou $\frac{1}{11748}$. Ainſi, pour jouer à jeu égal, la loterie devroit rembourſer au joueur 11748 fois ſa miſe.

Enfin l'on trouve qu'il n'y a ſur 511038 haſards qu'un ſeul favorable pour celui qui parieroit que quatre nombres déterminés ſortiront de la roue; & 1 ſur 43949268, en faveur de celui qui parieroit que cinq nombres déterminés ſeront préciſément les cinq ſortants de la roue. Il faudroit conſéquemment, dans ce dernier cas, pour jouer à jeu mathématiquement égal, payer au joueur, en cas d'événement heureux, près de quarante-quatre millions de fois sa mise.

Je finirai cet article en observant que quoique ce jeu, à ne le considérer que mathématiquement, présente au premier coup d'œil un grand avantage pour celui ou ceux qui le tiennent, on doit néanmoins, pour en juger avec équité, avoir égard à quelques considérations particulieres. Il est certain que si toute la loterie étoit pleine à chaque tirage, le gain seroit sûr, & si considérable, qu'il mériteroit l'animadversion du gouvernement; car il y auroit de gain, toute distribution des lots faite, plus de la moitié de la mise des joueurs. Mais il s'en faut bien qu'il en soit ainsi, & même il seroit impraticable d'attendre que cette loterie fût pleine pour la tirer. On la tire donc à des époques fixes, telle qu'elle se trouve. Or il peut arriver qu'on ait mis considérablement sur un terne, ou même sur plusieurs, tandis qu'à peine on aura mis sur les autres. Si donc ces premiers venoient à sortir, la somme à payer seroit immense. Car supposons un seul terne chargé de 150 liv. qui est la somme à laquelle on a fixé en France la mise sur ce hasard, & que ce terne sorte, il en coûteroit à la loterie 780000 livres; & comme il en sort dix à chaque extraction, si chacun étoit chargé d'une pareille somme, il faudroit pour payer les joueurs celle de 7800000 livres.

On voit par-là que, quoique les entrepreneurs de la loterie aient un grand avantage, cependant ce jeu est fort dangereux pour eux: il ne faut, après dix ans de bonheur, qu'un revers malheureux pour les ruiner, ou pour leur enlever tout le gain qu'ils auroient fait, & beaucoup au-delà; & c'est en compensation de ce danger qu'il paroît équitable de leur accorder un avantage. On n'entreprendra pas de le déterminer, car cette détermination eſt impoſſible ; mais il eſt aiſé de voir que quoique, mathématiquement parlant, ce ſoit la même choſe de jouer un million contre cent mille livres, que 1000 liv. contre 100 livres, ce n'eſt point la même choſe moralement parlant ; la perte de la premiere ſomme entraînant la ruine abſolue de celui qui la fait, & cette derniere étant pour ainſi dire ſans conſéquence, du moins pour ceux qui jouiſſent d'une fortune médiocre. Or il eſt certain que le public ne joue contre les entrepreneurs de la loterie dont il s'agit que des ſommes limitées, & ordinairement aſſez petites, au lieu qu'ils jouent une ſomme pour ainſi dire illimitée. Au reſte ces haſards malheureux dont nous parlons, quoique fort éloignés, ne le ſont pas tellement qu'ils n'arrivent quelquefois : auſſi n'y a-t-il en Italie aucune de ces loteries qui n'ait été débanquée.

PROBLÊME V.

Pierre a un certain nombre de cartes, dont aucune n'eſt répétée : il les tire ſucceſſivement en appellant, ſuivant l'ordre des cartes, as, deux, trois, &c. juſqu'au roi qui eſt la derniere ; & il parie qu'il arrivera au moins une fois qu'en tirant une carte il la nommera. On demande quelle eſt la probabilité qu'il a en ſa faveur ?

ON appelle ce jeu le *Jeu de Treize*, parcequ'on le joue ordinairement ou avec un livret de treize cartes, ou qu'après treize cartes paſſées on recommence par un ou as.

Il ſeroit trop long d'entrer ici dans le détail de l'analyſe de ce jeu : il nous ſuffira de dire que M. de Montmort trouve que ſi Pierre ne tient que deux cartes, la probabilité qu'il a de gagner eſt $\frac{1}{2}$; que s'il y en a trois, elle eſt $\frac{2}{3}$; que s'il y en a quatre, elle eſt $\frac{5}{8}$; enfin que s'il y en a treize, elle eſt $\frac{1093396663}{1729728000}$: enſorte que, pour jouer à jeu égal, Pierre doit parier un peu moins de 11 contre 6.

PROBLÊME VI.

Pierre & Paul jouent au Piquet : Pierre eſt premier en cartes & n'a point d'as ; quelle probabilité y a-t-il qu'il lui en rentrera ou un, ou deux, ou trois, ou les quatre?

On trouve que le ſort de Pierre, pour avoir un as quelconque, eſt . . . . $\frac{455}{969}$;
pour en avoir deux . . . . $\frac{270}{969}$;
pour en avoir trois . . . . $\frac{30}{969}$;
pour en avoir quatre . . . . $\frac{1}{969}$.

D'où il ſuit que la probabilité qu'il en aura quelqu'un dans les cinq cartes qu'il a à prendre, eſt $\frac{232}{323}$: enſorte qu'il y a à parier 232 contre 91 qu'il rentrera quelque as à Pierre.

Suppoſons actuellement que c'eſt Paul qui eſt dernier en cartes; on demande ce qu'il y a à parier qu'il prendra au moins un as dans ſes trois cartes?

Le ſort de Paul, pour prendre un as dans trois cartes, eſt . . . . $\frac{8}{19}$;
pour en prendre deux, il eſt . . . . . $\frac{24}{285}$;
pour en prendre trois . . . . $\frac{1}{285}$.

Par conſéquent la probabilité qu'il en prendra ou un, ou deux, ou trois indéterminément, est égale à $\frac{29}{57}$: ainsi Paul peut parier but à but avec avantage qu'il lui en rentrera quelqu'un; car le juste rapport des mises seroit de 29 à 28.

PROBLÊME VII.

Au jeu de Whisk, quelle probabilité y a-t-il que les quatre honneurs ne se trouveront pas entre deux parteners quelconques?

M. DE MOIVRE, dans son traité intitulé *The Doctrine of Chances*, montre qu'il y a bien près de 27 contre 2 à parier, que les partners dont l'un donne n'ont pas les quatre honneurs;

Qu'il y a à parier 23 environ contre 1, que les deux autres partners ne les ont pas;

Qu'il y a 8 bien près contre 1 à parier qu'ils ne se trouvent d'aucun côté;

Qu'on peut parier sans désavantage 13 environ contre 7, que les partners où est la main ne compteront pas des honneurs;

Qu'on peut mettre environ 20 contre 7, que les deux autres ne les compteront pas;

Enfin, qu'il y a 25 contre 16 à parier que l'un des deux côtés comptera des honneurs, ou qu'ils ne seront pas partagés également.

PROBLÊME VIII.

Sur le Jeu des Sauvages.

LE baron de la Hontan rapporte, dans ses Voyages en Canada, que les Indiens jouent au jeu suivant.

Ils ont 8 noyaux noirs d'un côté, & blancs de l'autre: on les jette en l'air: alors, s'il se trouve que les noirs ſoient impairs, le joueur a gagné l'enjeu convenu; & s'ils ſe trouvent ou tous noirs, ou tous blancs, il gagne le double; mais s'ils ſe trouvent répartis en nombres pairs, il a perdu ſa miſe.

M. de Montmort examine ce jeu, & trouve que celui qui jette les noyaux a un avantage qui peut être évalué à $\frac{3}{216}$; & que, pour que le jeu fût égal, il faudroit qu'il mît 22 quand ſon adverſaire met 21.

PROBLÊME IX.

Sur le Jeu de Trictrac.

Le jeu de trictrac eſt un de ceux où l'eſprit de combinaiſon ſe manifeſte davantage, & où il eſt plus utile de connoître, à chaque coup qu'on va jouer, ce qu'on peut eſpérer ou craindre des coups de dés ſuivants, ſoit des ſiens, ſoit de ceux de ſon adverſaire. Il faut jouer ſes dames de telle maniere que ſi l'on a en vue, par exemple, de ſe mettre en état de remplir, ou de battre le coin de ſon adverſaire ou telles autres dames qui ſont expoſées; il faut, dis-je, jouer de maniere qu'on ſe ménage le plus grand nombre de coups de dés favorables. L'eſpérance enfin qu'on a à chaque coup qu'on va jouer, eſt toujours ſuſceptible d'être appréciée mathématiquement. Parmi les exemples nombreux qu'on en pourroit donner, on ſe bornera à un petit nombre des plus curieux & des moins difficiles.

I. *Pierre & Paul jouent enſemble au trictrac. Pierre entreprend de prendre ſon grand coin en deux coups. Combien Paul peut-il parier contre lui?*

Ce problême eſt un des plus faciles qu'on puiſſe propoſer

propoſer ſur ce jeu ; car il eſt aiſé de remarquer que l'on ne peut prendre ſon grand coin en deux coups qu'en amenant ou deux fois de ſuite ſonnez, ou deux fois de ſuite ſix cinq, ou quines la premiere fois & ſonnez la ſeconde, ou enfin la premiere fois ſonnez & la ſeconde quines. Or la probabilité d'amener deux fois de ſuite ſonnez eſt $\frac{1}{1296}$; celle d'amener deux fois de ſuite ſix cinq ou cinq & ſix, eſt $\frac{4}{1296}$: car, comme on peut amener de deux façons ſix cinq avec deux dés, la probabilité de l'amener au premier coup eſt $\frac{2}{36}$; & conſéquemment celle de l'amener deux fois de ſuite eſt $\frac{2}{36} \times \frac{2}{36}$, ou $\frac{4}{1296}$. Pareillement la probabilité d'amener quines au premier coup & ſonnez au ſecond, eſt $\frac{1}{1296}$; & enfin celle d'amener ſonnez au premier coup & quines au ſecond, eſt encore $\frac{1}{1296}$. D'où il ſuit que la ſomme de toutes ces fractions ou $\frac{7}{1296}$, eſt la probabilité d'amener une de ces quatre combinaiſons de coups, ou de prendre ſon grand coin en deux coups. Ainſi Pierre ne doit parier, pour jouer au pair, que 7 contre 1289, ou 1 contre $184\frac{1}{7}$.

Il faut ſuppoſer ici que Pierre eſt premier à jouer, ce à quoi M. de Montmort ne paroît pas avoir fait attention ; car ſi Paul avoit pris lui-même ſon coin en deux coups, il eſt évident que la combinaiſon de deux fois de ſuite ſonnez feroit inutile, parceque Pierre ne ſçauroit prendre ſon grand coin par deux fois ſonnez, qu'autant que Pierre ne l'aura pas déja.

Suppoſons donc, pour réſoudre le problême plus complettement, que Pierre eſt ſecond à jouer ; il eſt évident qu'il aura également pour lui les haſards ci-deſſus, à l'exception de celui de deux fois ſonnez, car ce dernier ne lui ſervira qu'autant que ſon adverſaire n'aura pas déja pris ſon coin. D'où il ſuit que l'avantage de ce haſard pour Pierre ſera d'autant moindre, qu'il ſera plus probable que ſon adverſaire ait pris ſon coin en deux coups. Si la probabilité que Paul y réuſſira étoit, par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, il faudroit multiplier $\frac{1}{1296}$, valeur du haſard d'amener deux fois de ſuite ſonnez, par $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Ainſi il faudra ici multiplier $\frac{1}{1296}$ par $\frac{1289}{1296}$, qui eſt la probabilité que Paul ne prendra pas ſon coin en deux coups; le produit $\frac{1289}{1679616}$, qui eſt un peu moindre que $\frac{1}{1296}$, exprime pour le ſecond en jeu la valeur du haſard d'amener deux fois ſonnez, pour prendre ſon coin. Ajoutant donc les trois autres haſards, exprimés par $\frac{6}{1296}$, on aura, pour l'évaluation de la probabilité que le ſecond prendra en deux coups ſon coin, $\frac{6}{1296}+\frac{1289}{1679616}$, ou $\frac{9065}{1679616}$, ce qui eſt un peu moindre que $\frac{7}{1296}$.

II. *Au jeu de trictrac, l'un des joueurs à ſon jeu diſpoſé de cette maniere : 4 dames ſur la premiere fleche dont elles partent, 3 ſur la ſeconde, 2 ſur la troiſieme, 3 ſur la quatrieme, 2 ſur la cinquieme, & 1 ſur la ſixieme. On demande ce qu'il y a à parier qu'il remplira & fera ſon petit jan?*

Il eſt facile de voir que je remplirai par toutes les combinaiſons de dés dans leſquelles il y aura un *cinq*, ou un *deux*, ou un *quatre*, ou dans leſquelles les dés feront enſemble cinq, quatre ou deux. Or, des 36 combinaiſons que peuvent former deux dés, il y en a d'abord onze où il y a au moins un cinq: il y en a pareillement onze où il y a au moins un quatre; mais les combinaiſons quatre-cinq & cinq-quatre ayant déja été employées parmi les précédentes, nous n'en compterons que neuf. On compte auſſi onze combinaiſons de dés où il ſe trouve au moins un 2 ; mais, comme les combinaiſons deux-cinq & cinq-deux, deux-quatre & quatre-deux ont déja été employées, on n'en doit compter que ſept. On a enfin les coups ambeſas, un & trois, trois & un, qui ſont favorables pour remplir. Ainſi, ſur les trente-ſix combinaiſons des deux dés, il y en a trente avec leſquelles on remplira. Par conſéquent il y a 5 contre 1 à parier que, dans pareille poſition de dames, on fera ſon petit jan.

Si l'on ſuppoſoit que la dame qui eſt quatrieme ſur la premiere fleche fût ſur la troiſieme, alors il ſeroit aiſé de voir qu'il n'y auroit abſolument que ſonnez pour ne pas remplir; ainſi l'on pourroit parier 35 contre 1 qu'on feroit ſon petit jan.

Nous nous bornons à cette eſquiſſe de l'utilité de la doctrine des combinaiſons dans le jeu de trictrac. Il y a d'autres queſtions plus difficiles ſur ce jeu, que M. de Montmort a examinées dans ſon *Eſſai d'analyſe ſur les Jeux de haſard.* Mais nous invitons le lecteur à recourir à cet ouvrage.

PROBLÊME X.

Un charlatan tenoit dans une foire le Jeu ſuivant : il avoit 6 dés dont chacun n'étoit marqué que ſur une face, &c. l'un de l'as, l'autre de deux, juſqu'au ſixieme qui l'étoit de ſix : on lui donnoit une ſomme quelconque, & il offroit de rembourſer cent fois la miſe, ſi, en jettant ces 6 dés, on amenoit en vingt fois les 6 faces marquées. Lorſqu'on avoit perdu, il offroit la revanche ſous cette condition, qu'on mît une nouvelle *somme égale à la premiere; & il s'engageoit à rendre le tout, si on amenoit trois coups de suite toutes faces blanches. On demande quel étoit le sort des joueurs?*

CEUX qui ne connoissent point la route qu'il faut tenir pour résoudre les problêmes de cette nature, sont sujets à faire sur cette espece de dés une raisonnement fort erroné; car, remarquant qu'il y a cinq fois autant de faces blanches que de faces marquées, ils en concluent qu'il y a 5 à parier contre 1, qu'en les jettant on n'amenera aucun point. Ils sont néanmoins dans l'erreur; & il y a au contraire près de 2 contre 1 à parier qu'on n'amenera pas tout blanc: ce qu'on démontre ainsi.

Prenons un seul dé, il est évident qu'il y a 5 contre 1 à parier qu'on amenera blanc. Mais si nous y joignons un second dé, il est aisé de voir que la face marquée du premier peut se combiner avec chacune des faces blanches du second, & la face marquée du second avec chacune des blanches du premier, enfin la face marquée de l'une avec la face marquée de l'autre. Conséquemment, sur les 36 combinaisons des faces de ces deux dés, il y en a 11 où il y a au moins une face marquée. Or nous avons déja remarqué que ce nombre 11 est la différence du quarré du nombre 6 des faces d'un dé, avec le quarré de ce même nombre diminué de l'unité, ou de 5.

Joignons un troisieme dé, nous trouverons, par une semblable analyse, que, sur les 216 combinaisons des faces de trois dés, il y en a 91 où il y a au moins une face marquée; & ce nombre 91 est la différence du cube de 6 ou 216, avec le cube de 5 ou 125. Et ainsi de suite pour les cas plus composés. D'où l'on conclut que, sur les 46656 combinaisons des faces des 6 dés en question, il y en a 31031 où il y a au moins une face marquée, & 15625 où toutes les faces sont blanches. Conséquemment il y a près de deux contre un à parier qu'on amenera au moins quelque point ; tandis que, suivant le raisonnement ci-dessus, on trouvoit qu'il y avoit 5 contre 1 à parier pour le cas contraire.

Cet exemple est un de ceux qui peuvent servir à montrer combien, dans ces matieres, on doit se défier de ces demi-lueurs qui se présentent du premier abord. Je puis ajouter que l'expérience est conforme au raisonnement; car m'étant amusé, un soir de désœuvrement, à voir jouer à *la ferme*, & ayant compté pendant plusieurs heures tous les coups marqués de quelque point, & tous les choux-blancs, (on appelle ainsi dans ce jeu les coups où il n'y a aucune face marquée,) je trouvai le nombre de ces derniers beaucoup moindre que celui des premiers, & dans un rapport qui ne s'éloignoit guere de celui de un à deux. Mais revenons à notre charlatan.

Il est clair que, sur les 46656 combinaisons des faces des 6 dés dont il est question, il n'y en a qu'une qui donne toutes les faces marquées en dessus; ainsi la probabilité de les amener en un coup est exprimée par $\frac{1}{46656}$; &, comme on avoit 20 coups à jouer pour les amener, la probabilité d'y réussir étoit de $\frac{20}{46656}$, ce qui se réduit à un peu plus qu'une 2332^e^. Ainsi, pour jouer au pair, l'homme en question auroit dû rembourser 2332 fois la mise. Or il n'offroit que 100 fois cette mise; conséquemment il n'offroit qu'environ la vingt-troisieme partie de ce qu'il auroit dû offrir pour jouer à jeu égal, & il jouoit conséquemment avec un avantage de 22 contre un.

La revanche qu'il offroit étoit une autre supercherie, pour le succès de laquelle il profitoit habilement de la propension où est tout homme qui n'a pas suffisamment examiné la matiere, de faire le mauvais raisonnement dont nous avons parlé ci-dessus; & l'on devoit d'autant moins faire difficulté d'accepter cette revanche, qu'il semble qu'il y ait 5 contre 1 à parier qu'on amenera chou-blanc chaque coup, tandis qu'au contraire il y a 2 contre 1 à parier qu'on ne l'amenera pas. Or la probabilité de ne pas amener chou-blanc en un coup, étant à celle de l'amener comme 2 à 1, il suit delà que la probabilité de ne pas l'amener trois fois de suite, est à celle de l'amener comme 8 est à 1. Ainsi notre charlatan auroit dû mettre 7 contre 1 pour jouer à jeu égal: conséquemment il donnoit la revanche d'un jeu où il avoit un avantage de 22 contre un, à un autre où il en avoit encore un de 7 contre 1.

PROBLÊME XI.

En combien de coups peut-on parier au pair, avec 6 dés marqués sur toutes leurs faces, qu'on amenera 1, 2, 3, 4, 5, 6?

NOUS venons de voir qu'il y auroit 46655 à parier contre un qu'on n'ameneroit pas ces 6 points avec des dés marqués seulement sur une de leurs faces: mais le cas est bien différent avec 6 dés marqués sur toutes leurs faces; & pour le faire sentir, il suffit de faire observer que le point 1, par exemple, peut être également amené par chacun des dés, & ainsi de même le 2, le 3, &c; ce qui rend le hasard des 6 points 1, 2, 3, 4, &c. incomparablement plus facile.

Mais, pour analyser le problême plus exactement, nous remarquons que pour amener 1, 2, avec deux dés, il y a deux manieres, sçavoir, 1 avec le dé A & 2 avec le dé B, ou 1 avec le dé B & 2 avec le dé A. Pour amener 1, 2, 3, avec trois dés, sur la totalité des combinaisons de faces de ces trois dés, il y en a six qui donnent les points 1, 2, 3 : car on peut amener 1 avec le dé A, 2 avec B, 3 avec C; ou 1 avec le dé A, 2 avec C, & 3 avec B; ou 1 avec le dé B, 2 avec le dé A, & 3 avec C; ou 1 avec le dé B, 2 avec le dé C, & 3 avec A; ou 1 avec le dé C, 2 avec A, & 3 avec B; ou enfin 1 avec C, 2 avec B, & 3 avec A.

On voit donc par-là que, pour trouver les manieres dont on peut amener 1, 2, 3, avec trois dés, il faut multiplier les nombres 1, 2, 3. De même, pour trouver le nombre de manieres d'amener 1, 2, 3, 4, avec quatre dés, il faudra multiplier 1, 2, 3, 4, ensemble; ce qui donnera 24. Enfin, pour trouver de combien de manieres six dés peuvent donner 1, 2, 3, 4, 5, 6, il faudra multiplier ensemble ces six nombres, & l'on aura 720.

Si l'on divise donc le nombre 46656, qui est celui des combinaisons des faces de six dés, par 720, on aura $64\frac{4}{5}$ pour ce qu'il y aura à parier contre 1 qu'on n'amenera pas ces points en un coup, & conséquemment on pourra presque parier au pair de les amener en soixante-quatre coups : & il y aura plus du double à parier contre un qu'on les amenera en cent trente coups. Enfin, comme on peut facilement tirer cent trente coups de dés & plus en un quart-d'heure, on pourra parier, avec l'avantage de plus de 2 contre 1, de les amener dans cet intervalle de temps.

Celui qui faisoit la proposition de parier au pair d'amener ces points en un quart d'heure, comme je l'ai ouï dire à quelques personnes qui avoient parié contre, & qui y avoient perdu leur argent, faisoit donc un pari très-avantageux pour lui & très-désavantageux pour eux. Ne devoit-il pas en conscience leur rendre leur argent? La réponse peut s'en déduire de ce que nous venons de dire.

PROBLÊME XII.

Du Jeu des sept Dés.

QUELQU'UN propose de jouer avec 7 dés marqués sur toutes leurs faces, aux conditions suivantes: Celui qui tient le dé gagnera autant d'écus qu'il amenera de 6; mais s'il n'en amene aucun, il paiera à celui qui parie contre, autant d'écus qu'il y a de dés, c'est-à-dire sept. On demande quel rapport il y a entre leurs chances?

Pour résoudre ce problême, il faut l'analyser avec ordre. Supposons donc qu'il n'y eût qu'un dé; il est évident que, n'y ayant qu'un coup pour celui qui tient le dé, & cinq contre lui, le rapport des mises devroit être celui de 1 à 5. Ainsi, si le premier donnoit un écu toutes les fois qu'il n'ameneroit pas 6, & n'en recevoit qu'un lorsqu'il l'ameneroit, il joueroit à un jeu très-inégal.

Supposons maintenant deux dés. J'observe que, dans les 36 combinaisons différentes dont sont susceptibles les faces de deux dés, il y en a 25 qui ne donnent point de 6, qu'il y en a 10 qui en donnent un, & une seule qui en donne deux. Celui qui tient le dé n'a donc que 11 coups qui lui ſoient favorables, dont 10 lui feront gagner chacun un écu, & un lui en fera gagner deux : donc ſa chance pour gagner ſera ſuivant la regle générale $\frac{10}{36}+\frac{2}{36}$; & comme, chacun des 25 coups qui ne donnent point de 6 arrivant, il devra payer deux écus, la chance de ſon adverſaire ſera $\frac{50}{36}$. Conſéquemment la chance pour gagner ſera à celle pour perdre comme $\frac{12}{36}$ à $\frac{50}{36}$, ou 12 à 50, ou moins de 1 contre 4.

Pour déterminer, dans les cas plus compoſés, les coups qui ne donnent point de 6, ceux qui en donnent un, ceux qui en donnent deux, trois, &c; il faut faire attention qu'ils ſont toujours exprimés par les termes différents de la puiſſance de $5+1$, dont l'expoſant eſt égal au nombre des dés. Ainſi, lorſqu'il n'y a qu'un dé, le nombre $5+1$ exprime par ſon premier terme qu'il y a cinq coups ſans 6, & un qui donne un 6 : s'il y en a deux, le produit de $5+1$ par $5+1$, ou le quarré de $5+1$, étant $25+10+1$, le premier terme 25 indique qu'il y a 25 coups (ſur les 36) qui ne donnent point de 6, 10 qui en préſentent un, & 1 qui en préſente deux.

De même le cube de $5+1$ étant $125+75+15+1$, déſigne que, ſur les 216 combinaiſons des faces de ſix dés, il y en a 125 où il n'y a aucun 6, 75 où il y en a un, 15 où il y en a deux, & une où il y en a trois.

La quatrieme puiſſance de $5+1$ étant $625+500+150+20+1$, indique pareillement que, ſur les 1296 combinaiſons des faces de quatre dés, il y en a 625 ſans aucun 6, 500 qui donnent un 6, 150 qui en donnent deux, 20 qui en donnent trois, & une ſeule qui en donne quatre.

Je paſſe les cas intermédiaires, pour arriver à celui où il y a ſept dés. Or on trouve, dans ce cas, que la ſeptieme puiſſance de $5+1$ eſt $78125 + 109375 + 65625 + 21875 + 4375 + 525 + 35 + 1 =$ à 279936. Il y a donc, ſur les 279936 combinaiſons des faces de ſept dés, 78125 qui ne donnent aucun 6, 109375 où il s'en trouve un, 65625 où il y en a deux, 21875 où il y en a trois, &c. Or, chacun des 78125 premiers coups arrivant, celui qui tient le dé doit payer 7 écus: conſéquemment il faut, ſuivant la regle générale, multiplier ce nombre par 7, & diviſer le produit par la ſomme de tous les coups; & l'on aura la chance contre, égale à $\frac{546875}{279936}$. Pour avoir la chance qui lui eſt favorable, multipliez chacun des autres termes par le nombre des 6 qu'il préſente, additionnez les différents produits, & diviſez la ſomme par la totalité des coups, ou 279936: vous aurez, pour l'eſpérance du joueur qui tient le dé, $\frac{325592}{279936}$. Conſéquemment ſa chance pour gagner eſt à ſa chance pour perdre, comme 325592 à 546875; c'eſt-à-dire qu'il joue à un jeu de dupe, où il y a environ 54 contre 32, ou 27 contre 16, ou plus de 3 contre 2 à parier qu'il perdra.

Par un ſemblable procédé l'on trouve que, s'il y a huit dés, la chance de celui qui tient le dé eſt encore à celle de ſon adverſaire comme 2259488 à 3125000; ce qui eſt à peu près comme 3 contre 4.

S'il y avoit neuf dés, la chance pour celui qui tiendroit le dé ſeroit à celle de ſon adverſaire comme 151 environ à 175.

S'il y a dix dés, la chance du premier ſera à celle du ſecond comme 101176960 à 97656250, c'eſt-à-dire, à très-peu de choſe près, comme 101 à 97 $\frac{6}{10}$. Il commence donc à y avoir de l'avantage pour le premier, ſeulement lorſque le nombre des dés eſt 10; & il ne doit pas y en avoir moins pour jouer ce jeu avec quelque égalité.

CHAPITRE X.

Quelques Jeux arithmétiques de Divination ou de Combinaiſons.

M. OZANAM a été très-prolixe dans l'explication des différentes méthodes qu'on peut employer pour ces eſpeces de divination. Mais il faut convenir que le plus ſouvent ou elles ſont trop compliquées, ou ce ſont de ces adreſſes qu'en langage populaire on appelle des *ruſes couſues de fil blanc*. Nous nous bornerons, par cette raiſon, à ceux de ces moyens où l'artifice eſt moins apparent; ce qui en réduira beaucoup le nombre.

PROBLÊME I.

Deviner le nombre que quelqu'un aura penſé.

I.

DITES à celui qui a penſé un nombre de le tripler, & enſuite de prendre la moitié exacte de ce triple s'il eſt pair, ou la plus grande moitié ſi la diviſion ne peut pas ſe faire exactement, (ce dont vous vous ſouviendrez à part). Vous ferez encore tripler cette moitié, & vous demanderez combien de fois le nombre 9 s'y trouve compris. Le nombre penſé ſera le double, ſi la diviſion ci-deſſus par la moitié a pu ſe faire ; mais ſi cette diviſion n'a pu avoir lieu, il faudra ajouter l'unité.

Qu'on ait penſé 5, ſon triple eſt 15 qui ne peut ſe diviſer par 2. La plus grande moitié de 15 eſt 8 : ſi on la multiplie encore par 3, on aura 24, où 9 ſe trouve deux fois. Le nombre penſé eſt donc 4 plus 1, ou 5.

II.

Dites à celui qui a penſé un nombre de le multiplier par lui-même ; enſuite qu'il augmente ce nombre de l'unité, & qu'il le multiplie encore par lui-même : demandez-lui après cela la différence de ces deux nombres ; ce ſera certainement un nombre impair, dont la petite moitié ſera le nombre cherché.

Que le nombre penſé ſoit, par exemple, 10, ſon quarré eſt 100. Que 10 ſoit augmenté de 1, ce ſera 11, dont le quarré eſt 121. La différence des deux quarrés eſt 21, dont la moindre moitié 10 eſt le nombre cherché.

On pourra, pour varier l'artifice, faire faire le ſecond quarré du nombre penſé diminué d'une unité : alors, demandant la différence des deux quarrés, la plus grande moitié ſera le nombre cherché.

Dans l'exemple précédent, le quarré du nombre penſé eſt 100 ; celui de ce nombre diminué de l'unité, ou 9, eſt 81 ; la différence eſt 19, dont la plus grande moitié eſt 10, nombre cherché.

III.

Faites ajouter au nombre penſé ſa moitié exacte s'il eſt pair, ou ſa plus grande moitié s'il eſt impair, pour avoir une premiere ſomme. Faites auſſi ajouter à cette ſomme ſa moitié exacte, ou la plus grande moitié, ſelon qu'elle ſera un nombre pair ou impair, pour avoir une ſeconde ſomme, dont dont vous ferez ôter le double du nombre penſé; enſuite faites prendre la moitié du reſte, ou ſa plus petite moitié, au cas que ce reſte ſoit un nombre impair; continuez à faire prendre la moitié de la moitié, juſqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait, remarquez combien de ſous-diviſions on aura faites, & pour la premiere diviſion retenez 2, pour la ſeconde 4, pour la troiſieme 8, & ainſi des autres en proportion double. Obſervez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parcequ'en prenant cette plus petite moitié il reſte toujours 1, & qu'il faut ſeulement retenir 1 lorſqu'on n'aura pu faire aucune ſous-diviſion; car ainſi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés: alors le quadruple de ce nombre ſera le nombre penſé, au cas qu'il n'ait point fallu prendre au commencement la plus grande moitié; ce qui arrivera ſeulement lorſque le nombre penſé ſera pairement pair, ou diviſible par 4: autrement on ôtera 3 de ce quadruple, ſi à la premiere diviſion l'on a pris la plus grande moitié; ou bien ſeulement 2, ſi à la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié; ou bien enfin 5, ſi à chacune des deux diviſions on a pris la plus grande moitié: & alors le reſte ſera le nombre penſé.

Comme, ſi l'on a penſé 4, en lui ajoutant ſa moitié 2, on a 6, auquel ſi l'on ajoute pareillement ſa moitié 3, on a 9, d'où ôtant le double 8 du nombre penſé 4, il reſte 1, dont on ne ſçauroit prendre la moitié, parcequ'on eſt parvenu à l'unité ; c'eſt pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 5, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 3, on a 8, auquel ſi on ajoute ſa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre penſé 5, il reſte 2, dont la moitié eſt 1 : & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parcequ'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parcequ'il y a une ſous-diviſion. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parceque dans la premiere diviſion on a pris la plus grande moitié, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

IV.

Faites ôter 1 du nombre penſé, & enſuite doubler le reſte ; faites encore ôter 1 de ce double, & qu'on lui ajoute le nombre penſé ; enfin demandez le nombre qui provient de cette addition. Ajoutez-y 3 ; le tiers de cette ſomme ſera le nombre cherché.

Comme, ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte 1, il reſtera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reſte 7 étant augmenté du nombre penſé 5, on a cette ſomme 12, à laquelle ajoutant 3, on a cette autre ſomme 15, dont la troiſieme partie 5 eſt le nombre penſé.

REMARQUE.

CETTE maniere peut être variée de bien des façons ; car, au lieu de doubler le nombre penſé après en avoir fait ôter l'unité, on pourroit le faire tripler : alors, après avoir fait encore ôter l'unité de ce triple & ajouter le nombre penſé, il faudroit y ajouter 4. Le $\frac{1}{4}$ de la ſomme provenante de ces opérations ſeroit le nombre cherché.

Soit le nombre cherché x : qu'on en ôte l'unité, le reſtant ſera $x-1$: multipliez ce reſte par un nombre quelconque n, le produit ſera $nx-n$: ôtez-en encore l'unité, le reſte ſera $nx-n-1$: ajoutez-y le nombre penſé x, la ſomme ſera $\overline{n+1}\,x-n-1$. Si donc on ajoute le multiplicateur ci-deſſus augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire 3 ſi l'on a doublé, 4 ſi l'on a triplé, &c. le reſtant ſera $\overline{n-1}\,x$, qui étant diviſé par le même nombre, le quotient ſera x, le nombre cherché.

On pourroit, au lieu d'ôter l'unité, l'ajouter au nombre penſé; alors, au lieu d'ajouter à la fin le multiplicateur augmenté de l'unité, il faudroit le ſouſtraire, & faire la diviſion comme il eſt indiqué ci-deſſus.

Que 7, par exemple, ſoit le nombre penſé : faites ajouter l'unité, la ſomme ſera 8; en la triplant on aura 24 : qu'on ajoute encore 1, il viendra 25; qu'on ajoute 7, il proviendra 32, dont ôtant 4, parcequ'on a triplé, on aura 28, dont le quart ſera le nombre cherché.

V.

Faites ajouter 1 au triple du nombre penſé, & enſuite multiplier la ſomme par 3 : qu'on ajoute encore le nombre penſé, il en réſultera une ſomme dont ôtant 3, le reſtant ſera le décuple du nombre cherché. Ainſi, lorſqu'on vous aura dit cette derniere ſomme, ôtez-en 3, & du reſtant le zéro à droite; l'autre chiffre indiquera le nombre cherché.

Soit 6 le nombre penſé : ſon triple eſt 18; ce qui, en y ajoutant l'unité, fait 19 : le triple eſt 57 :

qu'on y ajoute 6, le produit est 63, dont ôtant 3, le reste est 60, dont coupant le zéro à droite, l'autre chiffre est 6, nombre cherché.

REMARQUE.

SI on ôtoit 1 du nombre pensé, qu'on triplât le reste, qu'on y ajoutât de nouveau le nombre pensé, il faudroit, après s'être fait dire cette somme qui se terminera toujours par 7, ajouter 3 au lieu de les en ôter comme on a fait ci-dessus, & la somme se trouveroit décuple du nombre pensé.

PROBLÊME II.

Deviner deux ou plusieurs nombres que quelqu'un aura pensés.

I.

LORSQUE chacun des nombres pensés ne sera pas plus grand que 9, on les pourra trouver facilement par cette maniere.

Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre pensé, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le second nombre. S'il y en a un troisieme, faites doubler cette premiere somme & y ajouter 1; &, après avoir fait multiplier cette nouvelle somme par 5, qu'on y ajoute le troisieme nombre. S'il y en a un quatrieme, on procédera de même, en faisant doubler la somme précédente, ajouter l'unité, multiplier par 5, & ajouter le quatrieme nombre, &c.

Cela fait, demandez le nombre qui provient de l'addition du dernier nombre pensé, & de ce nombre soustraisez 5 s'il n'y a que deux nombres, 55 s'il y en a trois, 555 s'il y en a quatre, & ainsi de de ſuite : le reſtant ſera compoſé de chiffres dont le premier à gauche ſera le premier nombre penſé, le ſecond le deuxieme, &c.

Qu'on ait penſé, par exemple, ces trois nombres, 3, 4, 6 : en ajoutant 1 au double 6 du premier, on aura 7, qu'on multipliera par 5, & on aura 35 ; à quoi ajoutant 4, le deuxieme nombre penſé, cela donnera 39, qu'il faut doubler pour avoir 78, y ajouter 1, & multiplier la ſomme 79 par 5, d'où réſultera 395 ; à quoi il faudra enfin ajouter 6, le troiſieme nombre penſé, & l'on aura 401, dont ôtant 55, il reſtera 346, dont les figures 3, 4, 6, indiquent par ordre les trois nombres penſés.

Nous omettons ici une autre maniere, parce-qu'on l'emploiera dans la ſolution d'un autre jeu de cette eſpece, appellé de l'*Anneau*.

II.

Si un ou pluſieurs des nombres penſés ſont plus grands que 9, il faut diſtinguer deux cas ; le premier où la multitude des nombres penſés eſt un nombre impair, & celui où elle eſt un nombre pair.

Dans le premier cas, demandez les ſommes du premier & du ſecond, du ſecond & du troiſieme, du troiſieme & du quatrieme, &c. juſqu'au dernier, & enfin la ſomme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces ſommes par ordre, ajoutez enſemble toutes celles qui ſont dans les lieux impairs, comme la premiere, la troiſieme, la cinquieme, &c : faites une autre ſomme de toutes celles qui ſont dans les lieux pairs, comme la deuxieme, la quatrieme, la sixieme, &c : ôtez cette seconde somme de la premiere ; le restant sera le double du premier nombre.

Qu'on ait pensé, par exemple, ces cinq nombres, 3, 7, 13, 17, 20, les premieres sommes prises comme on a dit sont 10, 20, 30, 37, 23; la somme des premiere, troisieme, cinquieme, est 63 ; celle des deuxieme & quatrieme est 57 : de 63 ôtez 57, le restant est 6, double du premier nombre 3. Ayant donc 3, vous l'ôterez de la premiere des sommes 10; le restant 7 sera le second nombre ; & ainsi de suite.

2e *Cas.* Si la multitude des nombres pensés est paire, il faut demander & écrire par ordre, comme ci-dessus, les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, &c ; mais au lieu de celle du premier & du dernier, on prendra celle du second & du dernier : alors ajoutez ensemble celles qui sont dans les lieux pairs, & formez-en une nouvelle somme à part ; ajoutez aussi ensemble celles qui sont dans les lieux impairs, à l'exception de la premiere, & ôtez cette nouvelle somme de la premiere : le restant sera le double du second des nombres : donc, l'ôtant de la somme des premier & second, on aura le premier ; & en l'ôtant de celle des second & troisieme, on aura le troisieme ; & ainsi de suite.

Soient, par exemple, les nombres pensés, 3, 7, 13, 17 : les sommes prises comme on vient de dire sont 10, 20, 30, 24 ; la somme des deuxieme & quatrieme est 44, dont ôtant la troisieme seulement, qui est 30, le restant est 14. Le second nombre cherché est donc 7, & le premier 3, & le troisieme 13, &c.

PROBLÊME III.

Une perſonne ayant dans une main un nombre pair d'écus ou de jetons, & dans l'autre un nombre impair, deviner en quelle main eſt le nombre pair.

FAITES multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un impair, 3 par exemple; faites ajouter les deux ſommes: ſi le total eſt impair, le nombre pair de pieces eſt dans la main droite, & l'impair dans la gauche; ſi ce total eſt pair, ce ſera le contraire.

Qu'il y ait, par exemple, dans la main droite 8 pieces, & dans la gauche 7: en multipliant 8 par 2 on aura 16, & le produit de 7 par 3 ſera 21. La ſomme eſt 37, nombre impair.

Si au contraire il y eût eu 9 dans la main droite, & 8 dans la gauche; en multipliant 9 par 2 on auroit eu 18, & multipliant 8 par 3 on auroit eu 24, qui, ajouté à 18, donne 42, nombre pair.

PROBLÊME IV.

Une perſonne tenant une piece d'or dans une main & une d'argent dans l'autre, trouver en quelle main eſt l'or, & en quelle eſt l'argent.

IL faut pour cet effet aſſigner à la piece d'or une valeur quelconque qui ſoit un nombre pair, par exemple 8, & à la piece d'argent une valeur qui ſoit un nombre impair, 3 par exemple; après quoi vous procéderez abſolument comme dans le problême précédent.

REMARQUES.

I. Pour laiſſer moins appercevoir l'artifice, il ſuffira de demander ſi le total des deux produits peut ſe partager par la moitié ; car, dans ce cas, le total ſera pair, & dans le cas contraire, impair.

II. On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même perſonne, on peut ſuppoſer que deux perſonnes auront pris, l'une le nombre pair, l'autre l'impair, ou l'une la piece d'or, l'autre celle d'argent. On fera donc à l'égard de ces deux perſonnes ce que l'on a fait à l'égard des deux mains, en déſignant à part ſoi l'une par la droite, l'autre par la gauche.

PROBLÊME V.

Le Jeu de l'Anneau.

CE jeu, qui n'eſt qu'une application d'une des manieres de deviner pluſieurs nombres penſés, peut ſe pratiquer dans une compagnie, dont le nombre des perſonnes ne doit pas ſurpaſſer 9. On propoſe un anneau qui doit être pris par une de ces perſonnes, & mis à un doigt de telle main & à telle jointure de ce doigt qu'elle voudra. Il faut deviner quelle perſonne a cet anneau, à quelle main, à quel doigt, à quelle jointure.

Pour cet effet on fera valoir 1 la premiere perſonne, 2 la deuxieme, 3 la troiſieme, &c : on fera auſſi valoir 1 la main droite, & 2 la gauche : on donnera pareillement 1 au premier doigt de la main, ſçavoir le pouce, 2 au ſecond, &c. juſqu'au petit doigt : on appellera enfin 1 la premiere jointure ou celle de l'extrémité du doigt, 2 la deuxieme, 3 la troiſieme. Ainſi le problême ſe réduit à deviner quatre nombres pris au haſard, dont aucun ne ſurpaſſe 9 ; ce qui ſe fera par la méthode ſuivante.

Supposons que la cinquieme personne ait pris la bague, & l'ait mise à la premiere jointure du quatrieme doigt de sa main gauche : les nombres à deviner seront 5, 2, 4, 1.

Pour y parvenir, faites doubler le premier nombre 5, vous aurez 10, dont vous ferez ôter 1 ; le reste sera 9, que vous ferez multiplier par 5, ce qui vous donnera 45. A ce produit faites ajouter le deuxieme nombre 2, vous aurez 47; à quoi faisant encore ajouter 5, il viendra 52, qu'il faudra faire doubler ; ce double sera 104, dont vous ferez ôter 1 ; le reste sera 103, que vous ferez multiplier par 5; vous aurez pour produit 515. A ce produit faites ajouter le troisieme nombre, ou le quantieme du doigt, 4, vous aurez 519 ; à quoi ajoutant encore 5, vous aurez 524, qu'il faudra faire doubler, & du double 1048 ôter 1 ; le restant sera 1047, que vous ferez encore multiplier par 5; le produit sera 5235. A ce produit faites ajouter le quatrieme nombre, ou le quantieme de la jointure, 1, il viendra 5236 ; à quoi faisant enfin ajouter 5, la somme sera 5241, dont les chiffres marquent par ordre les quantiemes de la personne, de la main, du doigt & de la jointure.

Il est clair que toutes ces opérations ne reviennent, au fond, qu'à celle de multiplier le nombre qui exprime le quantieme de la personne par 10, puis y ajouter celui qui exprime le quantieme de la main, multiplier encore par 10, &c. Mais l'artifice sauteroit trop facilement aux yeux ; & il faut encore convenir que, pour peu que celui qui fait ce calcul ait d'attention, il est difficile qu'il ne voie pas aussi-tôt que ces quatre chiffres représentent le quantieme de la personne, de la main, du doigt, &c. C'est pourquoi j'aimerois mieux y employer la maniere enſeignée au Problême II, nº I, pour deviner tant de nombres donnés qu'on voudra; car, au moyen du nombre qu'il en faut ſouſtraire, on pourra bien ne pas imaginer du tout l'artifice employé.

On pourroit propoſer le problême de la maniere ſuivante, & on le réſoudroit de même.

Trois ou un plus grand nombre de perſonnes ayant pris chacune une carte (dont le nombre des points n'excede pas 9) trouver les points de celle que chacun a priſe.

Dites à la premiere d'ajouter 1 au double du nombre de points de ſa carte, puis de multiplier la ſomme par 5, & au produit d'ajouter les points de la carte de la ſeconde; puis de doubler cette ſomme, d'y ajouter l'unité, de multiplier le total par 5, & d'ajouter à ce produit les points de la carte priſe par la troiſieme perſonne: en ôtant de ce produit 55 ſi le nombre des perſonnes eſt 3, ou 555 s'il eſt 4, ou 5555 s'il y en a cinq, le reſtant indiquera, par les chiffres qui le compoſeront, les points des cartes priſes par chaque perſonne dans le même ordre.

Nous ſupprimons l'exemple, afin d'abréger, & parcequ'on n'a qu'à recourir au premier exemple du Problême II.

PROBLÊME VI.

Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un jeu de cartes.

AYANT pris un jeu entier de 52 cartes, préſentez-le à quelqu'un de la compagnie, qui tirera celle qu'il lui plaira, ſans vous la montrer. Enſuite, en donnant à toutes les cartes leur valeur marquée, vous ferez valoir le valet 11, la dame 12, & le roi 13; puis, comptant les points de toutes les cartes, vous ajouterez les points de la premiere carte aux points de la ſeconde, ceux-ci aux points de la troiſieme, & ainſi de ſuite, en rejetant toujours 13, & gardant le reſte pour l'ajouter à la carte ſuivante. On voit qu'il eſt inutile de compter les rois qui valent 13. Enfin, s'il reſte quelques points à la derniere carte, vous ôterez ces points de 13, & le reſte marquera les points de la carte qu'on aura tirée : enſorte que, ſi le reſte eſt 11, ce ſera un valet qu'on aura tiré; ſi le reſte eſt 12, ce ſera une dame, &c; mais s'il ne reſte rien, on aura tiré un roi. Vous connoîtrez quel eſt ce roi, en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut ſe ſervir d'un jeu compoſé ſeulement de 32 cartes, dont on ſe ſert à préſent pour jouer au piquet, on ajoutera tous les points des cartes comme on vient de dire, mais on rejettera tous les 10 qui ſe trouveront en faiſant cette addition. Enfin on ajoutera 4 au point de la derniere carte pour avoir une ſomme, laquelle étant ôtée de 10 ſi elle eſt moindre, ou de 20 ſi elle ſurpaſſe 10, le reſte ſera le nombre de la carte qu'on aura tirée: de ſorte que, s'il reſte 2, ce ſera un valet; s'il reſte 3, ce ſera une dame; & ſi le reſte eſt 4, on aura tiré un roi, &c.

Si le jeu de cartes eſt imparfait, on doit prendre garde aux cartes qui manquent, & ajouter à la derniere ſomme le nombre des points de toutes ces cartes manquantes, après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il ſera poſſible : & la ſomme qui viendra de cette addition doit être, comme auparavant, ôtée de 10, ou de 20, ſelon qu'elle sera au dessous ou au dessus de 10. Il est évident que si l'on regarde encore une fois les cartes, on pourra nommer celle qui aura été tirée.

PROBLÊME VII.

Une personne ayant dans chaque main un nombre égal de jetons ou d'écus, trouver combien il y en a en tout.

DITES-LUI d'en faire passer, par exemple, 4 d'une main dans l'autre; & demandez-lui ensuite combien de fois le plus petit nombre est contenu dans le plus grand. Supposons qu'on réponde que l'un est triple de l'autre. Multipliez par 3 le nombre 4 des jetons passés d'une main dans l'autre, & y ajoutez ce même nombre, ce qui vous donnera 16. Au contraire, de ce même nombre 3 ôtez l'unité, resteront 2, par quoi vous diviserez 16; le quotient 8 sera le nombre contenu dans chaque main, conséquemment 16 en tout.

Supposons maintenant qu'en en faisant passer 4, on trouvât le plus petit nombre contenu 2 fois & $\frac{1}{3}$ dans le grand, on multiplieroit également 4 par 2 & $\frac{1}{3}$, ce qui donneroit $9\frac{1}{3}$, à quoi ajoutant 4, on aura $13\frac{1}{3}$ ou $\frac{40}{3}$. D'un autre côté, ôtant l'unité de $2\frac{1}{3}$, on aura $1\frac{1}{3}$ ou 4 tiers, par quoi on divisera $\frac{40}{3}$; & le quotient 10 sera le nombre de jetons de chaque main, comme il est aisé de le vérifier.

PROBLÊME VIII.

Deviner entre plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensée.

AYANT pris à volonté, dans un jeu de cartes, un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre sur une table à celui qui en veut penser une;

commencez par celle de deſſous, & mettez-les avec ſoin l'une ſous l'autre ; puis dites-lui de ſe ſouvenir du nombre qui exprime la quantieme qu'il aura penſée ; ſçavoir, de 1, s'il a penſé la premiere ; de 2, s'il a penſé la ſeconde ; de 3, s'il a penſé la troiſieme ; &c. Mais en même temps comptez ſecrétement celles que vous montrez, dont le nombre ſera, par exemple, 12, & ſéparez-les adroitement du reſte du jeu. Après cela mettez ces cartes, dont vous ſçavez le nombre, dans une ſituation contraire, en commençant à mettre ſur le reſte du jeu la carte qui aura été miſe la premiere ſur la table, & en finiſſant par celle qui aura été montrée la derniere. Enfin, ayant demandé le nombre de la carte penſée, que nous ſuppoſerons être la quatrieme, remettez à découvert vos cartes ſur la table l'une après l'autre, en commençant par celle de deſſus, à laquelle vous attribuerez le nombre 4 de la carte penſée, en comptant 5 ſur la ſeconde carte ſuivante, & pareillement 6 ſur la troiſieme carte plus baſſe, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez priſes au commencement ; car la carte ſur laquelle tombera ce nombre 12, ſera celle qui aura été penſée.

PROBLÊME IX.

Pluſieurs cartes différentes étant propoſées ſucceſſivement à autant de perſonnes, pour en retenir une dans ſa mémoire, deviner celle que chacune aura penſée.

S'IL y a, par exemple, trois perſonnes, montrez trois cartes à la premiere perſonne, pour en retenir une dans ſa penſée, & mettez à part ces trois cartes. Présentez aussi trois autres cartes à la seconde personne, pour en penser une à sa volonté, & mettez aussi à part ces trois cartes. Enfin présentez à la troisieme personne trois autres cartes, pour lui faire penser celle qu'elle voudra, & mettez pareillement à part ces trois dernieres cartes. Cela étant fait, disposez à découvert les trois premieres cartes en trois rangs, & mettez dessus les trois autres cartes, & dessus celles-ci les trois dernieres, pour avoir ainsi toutes les cartes disposées en trois rangs, dont chacun sera composé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque personne dans quel rang est la carte qu'elle a pensée : alors il sera facile de connoître cette carte, parceque la carte de la premiere personne sera la premiere de son rang ; de même la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang ; enfin la carte de la troisieme personne sera la troisieme de son rang.

PROBLÊME X.

Trois cartes ayant été présentées à trois personnes, deviner celle que chacune aura prise.

On doit sçavoir quelles cartes auront été présentées ; c'est pourquoi nous nommerons l'une A, l'autre B, & la troisieme C : mais on laisse la liberté aux trois personnes de choisir celle qu'il leur plaira. Ce choix, qui est susceptible de six facons différentes, étant fait, donnez à la premiere personne 12 jetons, 24 à la seconde, & 36 à la troisieme ; dites ensuite à la premiere personne d'ajouter ensemble la moitié du nombre des jetons de celle qui a pris la carte A, le tiers des jetons de celle qui a la carte B, & le quart des jetons de celle qui a pris la carte C ; & demandez-lui la ſomme, qui ne peut être que 23, ou 24, ou 25, ou 27, ou 28, ou 29, comme vous voyez dans la table ſuivante.

Premiere.	*Seconde.*	*Troiſieme.*	*Sommes.*
12	24	36	
A	B	C	23
A	C	B	24
B	A	C	25
C	A	B	27
B	C	A	28
C	B	A	29

Cette table montre que ſi cette ſomme eſt 25, par exemple, la premiere perſonne aura pris la carte B, la ſeconde la carte A, & la troiſieme la carte C; & que ſi cette ſomme eſt 28, la premiere perſonne aura pris la carte B, la deuxieme la carte C, & la troiſieme la carte A : & ainſi des autres.

PROBLÊME XI.

Ayant pris, dans un jeu entier de cinquante-deux cartes, une, deux, trois, ou quatre, ou plus de cartes, deviner la totalité de leurs points.

PRENEZ un nombre quelconque, 15 par exemple, qui excede le nombre de points de la plus haute carte, en faiſant valoir le valet 11, la dame 12, & le roi 13; & faites compter à part autant de cartes reſtantes du jeu qu'il en faut pour aller à 15, en comptant les points de la premiere carte : qu'on en faſſe autant pour la deuxieme, puis pour la troiſieme, pour la quatrieme, &c : faites-vous dire enſuite le nombre des cartes reſtantes du jeu. Ce nombre étant connu, vous opérerez ainſi.

Multipliez le nombre ci-dessus, 15 (ou tel autre que vous aurez pris) par le nombre des cartes prises. Nous les supposons ici 3; cela fera 45. A ce produit ajoutez le nombre de ces cartes; la somme sera 48, que vous ôterez de 52: le reste 4, vous l'ôterez du nombre des cartes qui auront resté: celui des cartes restantes après cette soustraction, sera le nombre des points cherché.

Qu'on ait pris, par exemple, un 7, un 10, & un valet qui vaut 11: pour accomplir 15 avec 7, il faut 8; pour accomplir ce même nombre avec 10, il faut 5; & 4 pour aller à 15 avec le valet valant 11. La somme de ces trois nombres avec les trois cartes, fait 20: par conséquent, cette opération faite, il restera 32 cartes.

Pour deviner la somme des nombres 7, 10, 11, vous multiplierez 15 par 3, ce qui vous donnera 45; & en y ajoutant le nombre des cartes prises, 48, dont le reste à 52 est 4. Otez donc 4 de 32; le reste 28 est la somme des points des trois cartes choisies, comme il est aisé de le vérifier.

Autre Exemple.

On a pris deux cartes seulement, (ce sont le 4 & le roi 13) avec lesquelles on fait accomplir 15, & l'on dit qu'il reste 37 cartes.

Multipliez 15 par 2, le produit sera 30; à quoi vous ajouterez le nombre des cartes prises, 2, vous aurez 32, qui étant ôté de 52, il reste 20. Otez donc 20 de 37, nombre des cartes restantes, le restant 17 sera le nombre des points des deux cartes prises. En effet, 13 & 4 font 17.

REMARQUES.

I. Il pourra arriver, si l'on prend 4 ou 5 cartes, que dans le jeu de 52 cartes il n'y en aura même pas assez pour accomplir le nombre choisi ; mais la méthode ne manquera pas pour cela. Par exemple, qu'on ait pris 5 cartes dont les points soient 1, 2, 3, 4, 5 ; en faisant avec chacune de ces cartes compléter le nombre 15, il en faudroit, avec les 5, au moins 68, & il ne resteroit rien : mais il y en a seulement 52 ; ce sont conséquemment 16 de moins. Celui qui compte le jeu dira donc qu'il en manque 16.

D'un autre côté, celui qui entreprend de deviner multipliera 15 par 5, ce qui fait 75 ; à quoi il ajoutera le nombre des cartes 5, ce qui donnera 80, c'est-à-dire 28 en sus des 52 : de 28 ôtez 16, resteront 12 ; & ce sera le nombre des points des 5 cartes.

Mais supposons qu'il restât des cartes du jeu de 52, par exemple 22, (ce qui seroit si l'on avoit pris ces 5 cartes, 8, 9, 10, valet 11, & dame 12) alors il faudroit ajouter ces 22 à ce dont 5 fois 15 plus 5 excede 52, c'est-à-dire 28, & l'on aura tout juste 50 pour les points de ces 5 cartes ; comme cela est en effet.

II. Si le jeu n'étoit pas de 52 cartes, mais de 40, par exemple, il n'y auroit encore aucune différence ; le nombre des cartes restantes de 40 devroit être ôté du nombre produit par la multiplication du nombre des cartes choisies par le nombre accompli, en ajoutant à ce produit le nombre de ces cartes.

Soient, par exemple, ces points de cartes, 9, 10, 11, & qu'on fasse accomplir 12, le nombre restant des cartes du jeu sera 31. D'un autre côté, 3 fois 12 font 36 ; & 3 en sus, à cause des 3 cartes, 39, dont la différence à 40 est 1. Otez un de

31, le reſte 30 eſt le nombre des points cherchés.

III. On pourroit prendre des nombres différents pour les accomplir avec les points de chaque carte choiſie ; mais ce ſera encore la même choſe : il y aura ſeulement cette différence, qu'il faudra ajouter ces trois nombres avec celui des cartes, au lieu de multiplier le même nombre par le nombre des cartes priſes, & l'y ajouter. Cela n'a aucune difficulté ; &, pour abréger, nous omettons d'en donner un exemple.

IV. Nos lecteurs, ou quelques-uns d'entr'eux, deſireront probablement la démonſtration de cette méthode. Elle eſt fort ſimple : la voici. Soit a le nombre des cartes du jeu, c le nombre à atteindre en ajoutant des cartes aux points de chaque carte choiſie, b le reſtant du jeu : que x, y, z, expriment, par exemple, les points de 3 cartes ; (on n'en ſuppoſe que trois) on aura pour le nombre des cartes tirées, $c-x+c-y+c-z+3$; ce qui, avec le reſte des cartes b, doit en faire la totalité. On a donc $3c+3-x-y-z+b=a$, ou $x+z+y=3c+3+b-a$, ou $b-\overline{a-3c-3}=x+y+z$. Or $x+y+z$ eſt le nombre total des points, b eſt le reſtant des cartes du jeu, & $a-3c-3$ eſt le nombre total des cartes du jeu, moins le produit du nombre à compléter par le nombre des cartes choiſies, moins ce nombre. Donc, &c.

PROBLÊME XII.

Trois choſes ayant été ſecrétement diſtribuées à trois perſonnes, deviner celle que chacune aura priſe.

QUE ces trois choſes ſoient une bague, un écu & un gant ; vous vous repréſenterez la bague par la lettre A, l'écu par la lettre E, & le gant par I. Que les trois perſonnes ſoient Pierre, Simon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangés, que l'un, comme Pierre, ſera le premier, Simon le ſecond, & Thomas le troiſieme. Ayant fait ces diſpoſitions en vous-même, vous prendrez vingt-quatre jetons, dont vous donnerez un à Pierre, deux à Simon, & trois à Thomas ; vous laiſſerez les dix-huit autres ſur la table : enſuite vous vous retirerez de la compagnie, afin que les trois perſonnes ſe diſtribuent les trois choſes propoſées ſans que vous le voyiez. Cette diſtribution étant faite, vous direz que celui qui a pris la bague prenne, des dix-huit jetons qui ſont reſtés, autant de jetons que vous lui en avez donné ; que celui qui a pris l'écu prenne, des jetons reſtés, deux fois autant de jetons que vous lui en avez donné ; enfin, que celui qui a pris le gant prenne, ſur le reſte des jetons, quatre fois autant de jetons que vous lui en avez donné : (dans notre ſuppoſition Pierre en aura pris un, Simon quatre, & Thomas douze ; par conſéquent il ne ſera reſté qu'un jeton ſur la table). Cela étant fait, vous reviendrez, & vous connoîtrez par ce qui ſera reſté de jetons la choſe que chacun aura priſe, en faiſant uſage de ce vers françois :

1 2 3 5 6 7
Par fer Céſar jadis devint ſi grand prince.

Pour pouvoir ſe ſervir des mots de ce vers, il faut ſçavoir qu'il ne peut reſter qu'un jeton, ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, & jamais 4 : il faut de plus faire attention que chaque ſyllabe contient une des voyelles que nous avons dit repréſenter les trois choſes propoſées : enfin il faut conſidérer ce vers comme n'étant compoſé que de ſix mots, & que la premiere ſyllabe de chaque mot repréſente la premiere perſonne qui eſt Pierre, & la ſeconde ſyllabe repréſente la ſeconde perſonne qui eſt Simon. Cela bien conçu, s'il ne reſte qu'un jeton, comme dans notre ſuppoſition, vous vous ſervirez du premier mot, ou plutôt des deux premieres ſyllabes, *Par fer*, dont la premiere, qui contient A, fait voir que la premiere perſonne ou Pierre a la bague réprésentée par A; & la ſeconde ſyllabe, qui contient E, montre que la ſeconde perſonne ou Simon a l'écu repréſenté par E: d'où vous conclurez facilement que la troiſieme perſonne ou Thomas a le gant.

S'il reſtoit 2 jetons, vous conſulteriez le ſecond mot *Céſar*, dont la premiere ſyllabe, qui contient E, feroit connoître que la premiere perſonne auroit l'écu repréſenté par E; & la ſeconde ſyllabe, qui contient A, montreroit que la ſeconde perſonne auroit la bague repréſentée par A : d'où il ſeroit aiſé de conclure que la troiſieme perſonne auroit le gant. En un mot, ſelon le nombre des jetons qui reſteront, vous emploierez le mot du vers qui ſera marqué du même nombre.

REMARQUES.

Au lieu du vers françois qu'on a rapporté, on peut ſervir de ce vers latin :

1 2 3 5 6 7
Salve certa animæ ſemita vita quies.

Ce problême peut être exécuté un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à à plus de trois personnes : ceux qui voudront en être plus particuliérement instruits, peuvent consulter *Bachet*, dans le vingt-cinquieme de ses *Problêmes plaisants & délectables.*

PROBLÊME XIII.

Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

On se servira commodément des dix premieres cartes d'un jeu entier pour exécuter ce problême : on les disposera en rond, comme vous voyez les dix premiers nombres dans la figure. L'as sera représenté par la lettre A jointe à 1, & le dix sera représenté par la lettre K jointe à 10.

2 3 4
B C D
1 A E 5
10 K F 6
I H G
9 8 7

Ayant fait toucher un nombre, ou une carte telle que voudra celui qui en aura pensé une, ajoutez au nombre de cette carte touchée le nombre des cartes que l'on aura choisies, comme 10, dans cet exemple : puis faites compter la somme que vous aurez à celui qui a pensé la carte, par un ordre contraire à la suite naturelle des nombres, en commençant par la carte qu'il aura touchée, & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura pensée ; car, en comptant de la sorte, il finira à compter cette somme sur le nombre ou sur la carte qu'il aura pensée, & vous fera par conséquent connoître cette carte.

Comme, si l'on a pensé 3 marqué par la lettre C, & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F, ajoutez 10 à ce nombre 6, vous aurez la somme 16: puis faites compter (*a*) cette somme 16 depuis le nombre touché F, vers E, D, C, B, A, & ainsi de suite par un ordre rétrograde, ensorte que l'on commence à compter le nombre pensé 3 sur F, 4 sur E, 5 sur D, 6 sur C, & ainsi de suite jusqu'à 16; ce nombre 16 se terminera en C, & fera connoître qu'on a pensé 3 qui répond à C.

REMARQUES.

I. On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes, selon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15 ou 8 cartes, il faudroit ajouter 15 ou 8 au nombre de la carte touchée.

II. Pour mieux couvrir l'artifice, il faut renverser les cartes, ensorte que les points soient cachés, & bien retenir la suite naturelle des cartes, & en quel endroit est le premier nombre ou l'as, afin de sçavoir le nombre de la carte touchée, pour trouver celui jusqu'où il faut faire compter.

PROBLÊME XIV.

Deux personnes conviennent de prendre alternativement des nombres moindres qu'un nombre donné, par exemple 11, & de les ajouter ensemble jusqu'à

(*a*) Observez qu'on ne doit pas compter cette somme tout haut, mais en soi-même, & seulement par pensée.

ce que l'un des deux puisse atteindre, par exemple, 100; comment doit-on faire pour y arriver infailliblement le premier?

L'ARTIFICE de ce problême consiste à s'emparer tout de suite de certains nombres que nous allons faire connoître. Retranchez pour cet effet 11, par exemple, de 100 qu'il est question d'atteindre, une fois, deux fois, trois fois, & autant de fois que cela se peut; il restera 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 & 1, qu'il faut retenir; car celui qui, en ajoutant son nombre moindre que 11 à la somme des précédents, comptera un de ces nombres avant son adversaire, gagnera infailliblement, & sans que l'autre puisse l'en empêcher.

On trouvera encore plus facilement ces nombres en divisant 100 par 11, & prenant le reste 1, auquel on ajoutera continuellement 11 pour avoir 1, 12, 23, 34, &c.

Supposons, par exemple, que le premier qui sçait le jeu prenne 1; il est évident que son adversaire devant compter moins que 11, pourra tout au plus, en ajoutant son nombre, 10 par exemple, atteindre 11: le premier prendra encore 1, ce qui fera 12: que le second prenne 8, cela fera 20: le premier prendra 3, & aura 23: & ainsi successivement, il atteindra le premier à 34, 45, 56, 67, 78, 89. Arrivé là, le second ne pourra pas l'empêcher d'atteindre 100 le premier; car, quelque nombre que prenne le second, il ne pourra atteindre qu'à 99: le premier pourra donc dire, & 1 font 100. Si le second ne prenoit que 1 en sus de 89, cela feroit 90, & son adversaire prendroit 10, qui avec 90 font 100.

Il est clair que de deux personnes qui jouent à ce jeu, si toutes deux le sçavent, la première doit nécessairement gagner.

Mais si l'une le sçait, l'autre non, celle-ci, quoique premiere, pourra fort bien ne pas gagner; car elle croira trouver un grand avantage à prendre le plus fort nombre qu'elle puisse prendre, sçavoir 10; & alors la seconde, qui sçait la finesse du jeu, prendra 2, ce qui avec 10, fait 12, l'un des nombres dont il faut s'emparer. Elle pourra même négliger cet avantage, & ne prendre que 1 pour faire 11; car la premiere prendra probablement encore 10, ce qui fera 21 : la seconde pourra alors prendre 2, ce qui fera 23. Elle pourra enfin attendre encore plus tard pour se placer à quelqu'un des nombres suivants, 34, 45, 56, &c.

Si le premier veut gagner, il ne faut pas que le plus petit nombre proposé mesure le plus grand; car, dans ce cas, le premier n'auroit pas une regle infaillible pour gagner. Par exemple, si au lieu de 11 on avoit pris 10 qui mesure 100, en ôtant 10 de 100 autant de fois qu'on le peut, on auroit ces nombres, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le premier; ce qui fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10, si le second étoit aussi fin que lui, il pourroit prendre le reste à 10, & ainsi il auroit une regle infaillible pour gagner.

PROBLÊME XV.

Seize jetons étant disposés en deux rangs, trouver celui qui aura été pensé.

CES seize jetons étant disposés en deux rangs égaux, comme on voit dans la figure, on demandera à quelqu'un d'en penſer ou choiſir mentalement un, & de remarquer dans quel rang il ſe trouve.

A	B		C	B	D		E	B	F		H	B	I
o	o		o	o	o		o	o	o		o	o	*
o	o		o	o	o		*	o	o		o	o	o
o	o		*	o	o		o	o	o		o	o	o
o	o		o	o	o		o	o	o		o	o	o
*	o			o				o				o	
o	o			o				o				o	
o	o			o				o				o	
o	o			o				o				o	

Suppoſons qu'il ſoit dans le rang A, on levera tout ce rang dans le même ordre où il ſe trouve, & on le diſpoſera en deux rangées C & D, à droite & à gauche de la rangée B; mais, en les rangeant, faites enſorte que le premier du rang A ſoit le premier du rang C, le ſecond du rang A le premier du rang D, le troiſieme du rang A le ſecond du rang C, & ainſi de ſuite : cela fait, demandez de nouveau dans quelle rangée verticale C ou D ſe trouve le jeton penſé. Nous ſuppoſerons que ce ſoit en C; vous leverez ce rang ainſi que le rang D, en mettant ce dernier derriere le premier, & ſans rien déranger à l'ordre des jetons; vous en ferez deux autres rangées, comme l'on voit en E & F, & vous demanderez encore dans quelle rangée verticale ſe trouve le jeton penſé. Suppoſons que ce ſoit en E; on prendra encore cette rangée & la rangée F, comme deſſus, & on en fera de nouveau deux rangées à droite & à gauche de B. Cette fois le jeton penſé doit ſe trouver le premier d'un des deux rangs perpendiculaires H & I. Si donc on demande en quel rang il se trouve, on le reconnoîtra aussitôt; & comme on suppose qu'ils ont chacun quelque signe distinctif, on pourra dire de les mêler les uns avec les autres, & on le reconnoîtra toujours au signe qu'on aura remarqué.

On voit aisément qu'au lieu de jetons le jeu peut se faire avec seize cartes. Après avoir reconnu par le moyen ci-dessus celle qui aura été choisie, on les fera mêler, ce qui couvrira davantage l'artifice.

REMARQUE.

Si l'on supposoit un plus grand nombre de jetons (ou de cartes) disposés en deux rangées verticales, le jeton où la carte pensée ne se trouvera pas nécessairement en tête de son rang à la troisieme transposition : il en faudroit quatre s'il y avoit 32 jetons ou cartes, cinq s'il y en avoit 64, &c. pour pouvoir dire avec assurance que le jeton pensé (ou la carte) occupe la premiere place de son rang; car si ce jeton (ou cette carte) se trouvoit au plus bas de la rangée perpendiculaire A, ce ne seroit qu'après quatre transpositions qu'il arriveroit à la premiere place, s'il y en avoit 16 à chaque rangée, ou 32 en tout; & après cinq, s'il y en avoit 64, ou 32 à chaque rangée, &c : ce qui est aisé à démontrer.

PROBLÊME XVI.

Maniere de deviner entre plusieurs cartes celle qu'on aura pensée.

Il faut, pour faire ce jeu, que le nombre des cartes soit divisible par 3, &, pour le faire plus commodément encore, qu'il soit impair.

La premiere condition au moins étant ſuppoſée, on fera penſer une carte; puis, les tournant du côté du blanc, on les retournera par ordre, en les diſpoſant en trois tas, enſorte que la premiere du jeu ſoit la premiere du premier tas, la deuxieme la premiere du ſecond tas, la troiſieme la premiere du troiſieme tas, puis la quatrieme la ſeconde du premier tas, & ainſi de ſuite. La perſonne qui a penſé une des cartes doit être attentive à les voir paſſer; & on lui demandera, les tas étant achevés, dans lequel ſe trouve la carte penſée. On relevera donc les tas en les mettant l'un ſur l'autre, & en obſervant que celui où eſt la carte cherchée doit être toujours au milieu; après quoi, retournant le jeu, on fera de nouveau & de la même maniere trois tas, & l'on demandera encore dans lequel eſt la carte penſée. Ce tas étant connu, on le placera, comme ci-devant, entre les deux autres, & l'on formera trois nouveaux tas; après quoi on demandera encore dans lequel eſt la carte penſée. Alors on relevera pour la troiſieme & derniere fois les tas, en mettant au milieu celui où eſt la carte; &, en tournant le jeu du côté du blanc, on retournera les cartes juſqu'au nombre qui eſt la moitié de celles du jeu, par exemple la douzieme, s'il y en a 24: cette douzieme carte ſera, dans ce cas, la carte penſée.

Si le nombre des cartes eſt à-la-fois impair & diviſible par 3, comme 15, 21, 27, &c. le jeu en deviendra plus facile encore; car la carte penſée ſera toujours celle du milieu du tas où elle ſe trouvera la troiſieme fois, de maniere qu'il ſera facile de la reconnoître ſans compter les cartes: car en faiſant pour la troiſieme fois les tas, il ſera facile de ſe ſouvenir des trois cartes qui ſeront au milieu de chacun d'eux. Supposons, par exemple, que la carte du milieu du premier tas soit l'as de cœur, celle du second le roi de cœur, & celle du milieu du troisieme le valet de pique ; il est évident que, lorsqu'on vous dira que le tas où est la carte cherchée est le troisieme, vous sçaurez aussi-tôt que cette carte est le valet de pique. Vous pourrez donc faire mêler les cartes sans y toucher davantage; & en les parcourant, pour la forme, vous nommerez le valet de pique lorsqu'il se présentera.

PROBLÊME XVII.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvent sur mer dans un même vaisseau. Il survient une furieuse tempête. Après avoir jeté dans l'eau toutes les marchandises, le pilote annonce qu'il n'y a de moyen de se sauver, que de jeter encore à la mer la moitié des personnes. Il les fait ranger de suite; &, en comptant de 9 en 9, on jette le neuvieme à la mer, en recommençant à compter le premier du rang quand il est fini : il se trouve qu'après avoir jeté quinze personnes, les quinze Chrétiens sont restés. Comment a-t-il disposé les trente personnes pour sauver les Chrétiens ?

LA disposition de ces trente personnes se tirera de ces deux vers françois :

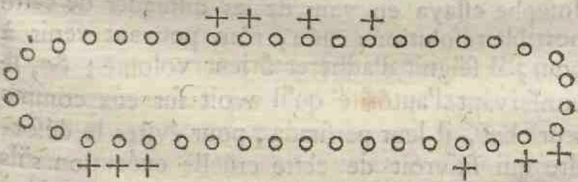
Mort, tu ne failliras pas
En me livrant le trépas.

Ou de ce vers latin, moins mauvais dans son espece :

Populeam virgam mater regina ferebat.

Pour s'en servir, il faut faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui se trouvent dans les syllabes de ces vers, en observant que A vaût 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, & U vaut 5. On commencera donc par mettre 4 Chrétiens, à cause de la voyelle O de la premiere syllabe; puis 5 Turcs, à cause de l'U de la seconde; & ainsi de suite jusqu'à la fin : on trouvera que, prenant toujours le neuvieme circulairement, c'est-à-dire en recommençant par le premier après avoir achevé le rang, le sort ne tombera absolument que sur des Turcs.

On peut aisément étendre davantage la solution de ce problême. Qu'il faille, par exemple, faire tomber le sort sur 10 personnes de 40, en comptant de 12 en 12 : on rangera à part circulairement 40 zéro, comme on voit ci-dessous; &, en



commençant par le premier, on marquera le douzieme d'une croix; l'on continuera en comptant jusqu'à 12, & l'on marquera pareillement d'une croix le zéro sur lequel on tombera en comptant 12; & ainsi de suite en tournant, & en faisant attention de passer les places déja croisées, attendu que ceux qui les occupoient sont censés déja retranchés du nombre. On continuera ainsi, jusqu'à ce qu'on ait le nombre requis de places marquées; & alors, en comptant le rang qu'elles occupent, en commençant par la premiere, on connoîtra facilement celles ſur leſquelles doit néceſſairement tomber le ſort de 12 en 12. On trouve, dans l'exemple propoſé, que ce ſont la ſeptieme, la huitieme, la dixieme, la douzieme, la vingt-unieme, la vingt-deuxieme, la vingt-quatrieme, la trente-quatrieme, la trente-cinquieme, & la trente-ſixieme.

Un capitaine, obligé de faire décimer ſa compagnie, pourroit uſer de cet expédient pour faire tomber le ſort ſur les ſujets les plus coupables, en les plaçant ſans affectation dans les places où le ſort tombera immanquablement.

On raconte que ce fut par ce moyen que l'hiſtorien Joſephe ſauva ſa vie. Il s'étoit réfugié avec quarante autres Juifs dans une caverne, après la priſe de Jotapat par les Romains. Ses compagnons réſolurent de s'entre-tuer plutôt que de ſe rendre. Joſephe eſſaya en vain de les diſſuader de cette horrible réſolution : enfin, n'en pouvant venir à bout, il feignit d'adhérer à leur volonté ; &, ſe conſervant l'autorité qu'il avoit ſur eux comme leur chef, il leur perſuada, pour éviter le déſordre qui ſuivroit de cette cruelle exécution s'ils s'entre-tuoient à la foule, de ſe ranger par ordre, &, en commençant de compter par un bout juſqu'à un certain nombre, de maſſacrer celui ſur qui tomberoit ce nombre, juſqu'à ce qu'il n'en demeurât qu'un ſeul qui ſe tueroit lui-même. Tous en étant demeurés d'accord, Joſephe les diſpoſa de telle ſorte, & choiſit pour lui-même une telle place, que, la tuerie étant continuée juſqu'à la fin, il demeura ſeul avec un autre auquel il perſuada de vivre, ou qu'il tua s'il ne voulut pas y conſentir.

Telle eſt l'hiſtoire qu'Hégéſippe raconte de Joſephe, & que nous ſommes bien éloignés de garantir. Quoi qu'il en ſoit, en appliquant à ce cas le moyen enſeigné ci-deſſus, & en ſuppoſant que chaque troiſieme dût être tué, on trouve que les deux dernieres places ſur leſquelles le ſort devoit tomber étoient les ſeizieme & trente-unieme; enſorte que Joſephe dut ſe mettre à l'une des deux, & placer à l'autre celui qu'il vouloit ſauver, s'il eût eu un complice de ſon artifice.

PROBLÊME XVIII.

Sur le bord d'une riviere ſe trouvent un loup, une chevre & un chou : il n'y a qu'un bateau ſi petit, que le batelier ſeul & l'un d'eux peuvent y tenir. Il eſt queſtion de les paſſer de ſorte que le loup ne faſſe aucun mal à la chevre, ni la chevre au chou.

LE batelier commencera par paſſer la chevre; puis il retournera prendre le loup: après avoir paſſé le loup il ramenera la chevre, qu'il laiſſera à bord pour paſſer le chou: enfin il retournera à vuide chercher la chevre, qu'il paſſera. Ainſi le loup ne ſe trouvera jamais avec la chevre, ni la chevre avec le chou, qu'en préſence du batelier.

PROBLÊME XIX.

Trois maris jaloux ſe trouvent avec leurs femmes au paſſage d'une rivière: ils rencontrent un bateau ſans batelier: ce bateau eſt ſi petit, qu'il ne peut porter que deux perſonnes à-la-fois. On demande comment ces ſix perſonnes paſſeront deux à deux *ensorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent?*

La solution de ce problême est contenue dans ces deux distiques latins :

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem,
Itque una; utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit & redeunt bini, mulierque sororem
Advehit; ad propriam sine maritus abit.

Ce qui signifie :

Deux femmes passeront d'abord; puis l'une ayant ramené le bateau, repassera avec la troisieme femme. Ensuite l'une des trois femmes ramenera le bateau, &, se mettant à terre, laissera passer les deux hommes dont les femmes sont de l'autre côté. Alors un des hommes ramenera sa femme; &, la mettant à terre, il prendra le troisieme homme, & repassera avec lui. Enfin la femme qui se trouve passée entrera dans le bateau, & ira en deux fois chercher les deux autres femmes.

On propose encore ce problême sous le titre des *trois maîtres & trois valets*. Les maîtres s'accordent bien ensemble & les valets aussi; mais chaque maître ne peut souffrir les valets des deux autres, de maniere que s'il se trouvoit avec un des deux valets en l'absence de son maître, il le battroit infailliblement.

PROBLÊME XX.

Comment peut-on disposer dans les huit cases extérieures d'un quarré divisé en neuf, des jetons, *enſorte qu'il y en ait toujours 9 dans chaque bande de l'enceinte, & que cependant ce nombre puiſſe varier depuis 20 juſqu'à 32 ?*

FEU M. Ozanam propoſe ce problême d'une maniere aſſez indécente, & commence même par-là ſes *Récréations Mathématiques*, apparemment pour piquer la curioſité de ſes lecteurs.

Il y a, dit-il, un couvent compoſé de neuf cellules, dont celle du milieu eſt occupée par une abbeſſe aveugle, & les autres par ſes religieuſes. La bonne abbeſſe, pour s'aſſurer que ſes nonnains ne violent point leur clôture, fait une premiere fois ſa viſite; &, trouvant 3 religieuſes dans chaque cellule, ce qui fait 9 par bande, elle va ſe coucher. Quatre religieuſes ſortent néanmoins: l'abbeſſe revient au milieu de la nuit compter ſes religieuſes; elle les trouve encore 9 par bande, & elle retourne ſe repoſer tranquille ſur leur conduite. Ces quatre religieuſes rentrent chacune avec un homme : l'abbeſſe fait une nouvelle viſite; &, comptant 9 perſonnes par bande, elle eſt encore dans la ſécurité. Il s'introduit cependant encore quatre hommes; & l'abbeſſe, comptant toujours 9 dans chaque bande, eſt dans la perſuaſion que perſonne n'eſt entré ni ſorti. On demande comment cela ſe peut faire ?

La ſolution de ce problême ſe trouvera facilement par l'inſpection des quatre tableaux qui ſuivent, dont le premier repréſente la diſpoſition primitive des jetons dans les cellules du quarré; le ſecond, celle des mêmes jetons lorſqu'on a ôté 4; le troiſieme, comment ils doivent être diſpoſés lorſqu'on en a fait rentrer 4 avec quatre autres; le quatrieme enfin, celle des mêmes jetons lorſqu'on y en ajoute encore 4. Il eſt clair qu'il y en a toujours 9 dans chaque bande d'enceinte ; & cependant, dans le premier cas, il y en a en tout 24, dans le ſecond 20, dans le troiſieme 28, & dans le quatrieme 32.

I.

3	3	3
3		3
3	3	3

II.

4	1	4
1		1
4	1	4

III.

2	5	2
5		5
2	5	2

IV.

1	7	1
7		7
1	7	1

M. Ozanam ne paroît pas s'être apperçu qu'on peut pouſſer la choſe plus loin ; qu'il eût pu faire entrer encore 4 hommes au couvent, ſans que ſon abbeſſe s'en apperçût ; & puis faire ſortir tous les hommes avec 6 religieuſes, enſorte qu'il n'en reſtât plus que 18, au lieu de 24 qu'elles étoient primitivement. Les deux tableaux ſuivants en montrent la poſſibilité.

V.

0	9	0
9		9
0	9	0

VI.

5	0	4
0		0
4	0	5

Il eſt ſans doute aſſez ſuperflu de montrer d'où provient l'illuſion de la bonne abbeſſe. C'eſt que les nombres qui ſont dans les caſes angulaires du quarré sont comptés deux fois, ces cases étant communes à deux bandes. Ainsi, plus on charge les cases angulaires, en vuidant celles du milieu de chaque bande, plus on fait de ces doubles emplois; ce qui fait qu'il paroît y avoir toujours même nombre, tandis qu'il est diminué. Le contraire arrive à mesure qu'on charge les cases du milieu, en vuidant les cases angulaires; ce qui fait qu'on est obligé d'y ajouter quelques unités pour avoir 9 dans chaque bande.

PROBLÊME XXI.

Quelqu'un ayant une bouteille de huit pintes pleine d'un vin excellent, en veut faire présent de la moitié ou de quatre pintes à un ami; mais il n'a pour le mesurer que deux autres vases, l'un de cinq, l'autre de trois pintes. Comment doit-il faire pour mettre quatre pintes dans le vase de cinq?

POUR cet effet appellons A la bouteille de 8 pintes, B celle de 5, & C celle de 3; en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la bouteille A, & que les deux autres B, C, soient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la bouteille B du vin de la bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, remplissez la bouteille C du vin de la bouteille B, où par conséquent il ne restera plus que 2 pintes, comme vous voyez en F: après cela versez le vin de la bouteille C dans la bouteille A, où

	8	5	3
	A	B	C
D	8	0	0
E	3	5	0
F	3	2	3
G	6	2	0
H	6	0	2
I	1	5	2
K	1	4	3

par conséquent il y aura 6 pintes, comme vous voyez en G ; & versez les 2 pintes de la bouteille B dans la bouteille C, où il y aura 2 pintes, comme vous voyez en H. Enfin, ayant rempli la bouteille B du vin de la bouteille A, où il restera seulement une pinte, comme vous voyez en I, achevez de remplir la bouteille C du vin de la bouteille B, où il restera 4 pintes, comme vous voyez en K ; & ainsi la question se trouvera résolue.

REMARQUE.

Si, au lieu de faire rester les 4 pintes de vin dans la bouteille B, vous voulez qu'elles restent dans la bouteille A, que nous avons supposée remplie de 8 pintes, remplissez la bouteille C du vin qui est dans la bouteille A, où alors il ne reste plus que 5 pintes, comme vous voyez en D, & versez les trois pintes de la bouteille C dans la bouteille B, où il y aura par conséquent 3 pintes de vin, comme vous voyez en E : puis, ayant rempli la bouteille C du vin de la bouteille A, où il ne restera plus que 2 pintes, comme vous voyez en F, achevez de remplir la bouteille B du vin qui est dans la bouteille C, où il ne restera plus qu'une pinte, comme vous voyez en G. Enfin, ayant versé le vin de la bouteille B dans la bouteille A, où il se trouvera 7 pintes, comme vous voyez en H, versez la pinte de vin qui est en C dans la bouteille B, où il y aura par conséquent une pinte, comme vous voyez en I, & remplissez la bouteille

	8	5	3
	A	B	C
	8	0	0
D	5	0	3
E	5	3	0
F	2	3	3
G	2	5	1
H	7	0	1
I	7	1	0
K	4	2	3

C

C du vin de la bouteille A, où il ne restera que 4 pintes, comme il étoit proposé, & comme vous voyez en K.

PROBLÊME XXII.

Une personne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner six pintes au frere quêteur : il n'a, pour les mesurer, que deux autres bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les six pintes dans la bouteille de sept pintes ?

CE problême est la même chose que le précédent ; on l'exécutera aussi de la même maniere. Soit nommée D la bouteille de 12 pintes, S celle de sept pintes, & C celle de 5 pintes. La bouteille D est pleine, & les deux autres S, C, sont vuides, comme on voit en G. Remplissez la bouteille C du vin qui est en D, & la bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes, comme on voit en H : puis versez dans S le vin que contient la bouteille C, qui demeurera vuide, & la bouteille S contiendra

	12	7	5
	D	S	C
G	12	0	0
H	7	0	5
I	7	5	0
K	2	5	5
L	2	7	3
M	9	3	0
N	4	7	1
O	11	1	0
P	6	6	0

5 pintes, comme on voit en I : ensuite, ayant rempli C avec le vin qui est en D, la bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes, la bouteille S en contiendra 5, & la bouteille C sera pleine, comme on voit en K : après cela versez de la bouteille C du vin dans la bouteille S, pour la remplir, & la bouteille D ne contiendra encore que 2 pintes, la bouteille S en contiendra 7, & la bouteille C n'en contiendra plus que 3, comme on voit en L,

Cela étant fait, vuidez S en D & C en S, & il y aura 9 pintes en D, 3 pintes en S, & C sera vuide, comme on le voit en M: ensuite remplissez C de la bouteille D, & de C versez en S pour la remplir; alors il y aura 4 pintes en D, 7 pintes en S, & une pinte en C, comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les 7 pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & D contiendra 11 pintes, S en contiendra 1, & C sera vuide, comme on le voit en O. Enfin, ayant rempli de la bouteille D la bouteille C qui contient 5 pintes, & ayant versé ces 5 pintes de C dans la bouteille S qui en contient déja une, on trouvera que D contient 6 pintes, & que S en contient aussi six; ainsi on est parvenu à ce qu'on souhaitoit.

PROBLÊME XXIII.

Faire parcourir au cavalier du jeu des Echecs toutes les cases du damier l'une après l'autre, sans passer deux fois sur la même.

NOTRE lecteur connoît probablement la marche du cavalier dans le jeu des échecs: dans le cas contraire, la voici. Le cavalier étant placé sur la case A, il ne peut aller à aucune de celles qui l'environnent immédiatement, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ni aux cases 9, 10, 11, 12, qui sont directement au dessus, ou au dessous, ou à côté, ni aux cases 13, 14, 15, 16, qui sont dans les diagonales, mais seulement à une de celles qui, dans la figure, sont vuides.

13		10		14
	1	2	3	
9	8	A	4	11
	7	6	5	
16		12		15

Quelques hommes célebres se sont amusés de ce problême de combinaisons ; sçavoir, M. de Montmort, M. de Moivre & M. de Mairan, & ils en ont donné chacun une solution. Dans les deux premieres, on suppose le cavalier placé d'abord sur une des cases angulaires de l'échiquier ; dans la troisieme, on le suppose partant de l'une des quatre du centre : mais je crois que, jusqu'à ces dernieres années, on n'en connoissoit aucune qui fût telle que, plaçant le cavalier sur une case quelconque, on pût lui faire parcourir tout le damier ; & même ensorte que, sans revenir sur ses pas, il pût continuer sa route, & parcourir encore une seconde fois le damier sous la même condition. Cette derniere solution est due à M. de W***, capitaine au régiment de Kinski, dragons, au service de l'Impératrice-Reine.

Nous allons donner les quatre tableaux de ces quatre solutions, avec une explication & quelques remarques.

I. *De M. de Montmort.*

1	38	31	44	3	46	29	42
32	35	2	39	30	43	4	47
37	8	33	26	45	6	41	28
34	25	36	7	40	27	48	5
9	60	17	56	11	52	19	50
24	51	10	63	18	49	12	53
61	16	59	22	55	14	51	20
58	23	62	15	64	21	54	13

II. *De M. de Moivre.*

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	22
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

III. *De M. de Mairan.*

40	9	26	53	42	7	64	29
25	52	41	8	27	30	43	6
10	39	24	57	54	63	28	31
23	56	51	60	1	44	5	62
50	11	38	55	58	61	32	45
37	22	59	48	19	2	15	4
12	49	20	35	14	17	46	33
21	36	13	18	47	34	3	16

IV. *De M. de W****.

25	22	37	8	35	20	47	6
38	9	24	21	52	7	34	19
23	26	11	36	59	48	5	46
10	39	62	51	56	53	18	33
27	12	55	58	49	60	45	4
40	63	50	61	54	57	32	17
13	28	1	42	15	30	3	44
64	41	14	29	2	43	16	31

De ces quatre manieres de résoudre le problême, celle de M. de Moivre est sans contredit la plus facile à s'imprimer dans la mémoire ; car le principe de sa méthode consiste à remplir autant qu'il est possible les deux bandes d'enceinte, & de ne se jetter sur la troisieme que lorsqu'il n'y a nul autre moyen de passer, de la place où l'on est, sur l'une des deux premieres ; regle qui nécessite la marche du cavalier, depuis son premier pas jusqu'au cinquantieme, de la maniere la plus claire, & même par-delà ; car, de la case marquée 50, il n'y a de choix pour se placer, que sur celles qui sont marquées 51 & 63 : mais la case 51, étant plus proche de la bande, doit être préférée, & alors la marche est nécessitée par 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61. Arrivé là, il est indifférent qu'on se pose sur celle marquée 64 ; car de-là on ira sur la pénultieme 63, & on finira sur 62 ; ou bien d'aller à 62 pour paſſer à 63, & finir à 64. Ainſi l'on peut dire que la marche du cavalier, dans cette ſolution, eſt preſque contrainte.

Il n'en eſt pas ainſi de la quatrieme: il eſt difficile de la pratiquer autrement que de mémoire; mais elle a un avantage très-grand; c'eſt qu'on peut commencer par la caſe que l'on voudra, ainſi que nous l'avons dit, parceque ſon auteur a eu l'induſtrie de ramener le cavalier, en finiſſant, dans une place d'où il peut repaſſer dans la premiere. Ainſi ſa marche eſt en quelque ſorte circulaire & interminable, en rempliſſant la condition de ne repaſſer ſur la même caſe qu'après ſoixante-quatre coups.

Il eſt facile de voir que, pour exécuter cette marche ſans confuſion, il faut à chaque pas marquer la caſe que quitte le cavalier. On couvrira donc toutes les caſes chacune d'un jeton, & on ôtera le jeton à meſure que le cavalier aura paſſé ſur la caſe: ou bien, au contraire, on mettra un jeton ſur chaque caſe à meſure que le cavalier aura paſſé deſſus.

PROBLÊME XXIV.

Diſtribuer entre trois perſonnes vingt-un tonneaux, dont ſept pleins, ſept vuides & ſept demi-pleins, enſorte que chacune ait la même quantité de vin & de tonneaux.

Ce problême admet deux ſolutions, qui ne ſçauroient être rendues plus clairement que par les deux tableaux qui ſuivent.

		Tonn. pleins.	*vuides.*	*demi-pleins.*
I.	1ere Perf.	2	2	3
	2e —	2	2	3
	3e —	3	3	1

		Tonn. pleins.	*vuides.*	*demi-pleins.*
II.	1ere Perf.	3	3	1
	2e —	3	3	1
	3e —	1	1	5

Il eſt évident que, dans ces deux combinaiſons, chaque perſonne aura 7 tonneaux, & 3 tonneaux & demi de vin.

Il eſt, au reſte, facile de voir qu'il eſt néceſſaire que le nombre total des tonneaux ſoit diviſible par le nombre des perſonnes; car, autrement, la choſe demandée ſeroit impoſſible.

On trouvera de la même maniere que, ſi l'on avoit 24 tonneaux à partager à trois perſonnes ſous les conditions ci-deſſus, on auroit trois ſolutions différentes, ſçavoir :

		Tonn. pleins.	*vuides.*	*demi-pleins.*
I.	1ere Perf.	3	3	2
	2e —	3	3	2
	3e —	2	2	4

		Tonn. pleins.	*vuides.*	*demi-pleins.*
II.	1ere Perf.	2	2	4
	2e —	2	2	4
	3e —	4	4	0

		Tonn. pleins.	vuides.	demi-pleins.
III.	1ere Perſ.	1	1	6
	2e —	3	3	2
	3e —	4	4	0

Si l'on avoit 27 tonneaux à partager, on auroit auſſi trois ſolutions.

		Tonn. pleins.	vuides.	demi-pleins.
I.	1ere Perſ.	3	3	3
	2e —	3	3	3
	3e —	3	3	3

		Tonn. pleins.	vuides.	demi-pleins.
II.	1ere Perſ.	1	1	7
	2e —	4	4	1
	3e —	4	4	1

		Tonn. pleins.	vuides.	demi-pleins.
III.	1ere Perſ.	2	2	5
	2e —	3	3	3
	3e —	4	4	1

CHAPITRE XI.

Contenant divers Problêmes arithmétiques, curieux.

PROBLÊME I.

Un pere de famille ordonne, par ſon teſtament, que l'aîné de ſes enfants prendra ſur tous ſes biens 10000 livres & la ſeptieme partie de ce qui reſtera; le ſecond 20000 livres, & la ſeptieme partie de ce qui reſtera; le troiſieme 30000 livres, & la ſeptieme partie du ſurplus; & ainſi juſqu'au dernier, en augmentant toujours de 10000 livres. Ses enfants ayant ſuivi la diſpoſition du teſtament, il ſe trouve qu'ils ont été également partagés. On demande combien il y avoit d'enfants, quel étoit le bien de ce pere, & quelle a été la part de chacun des enfants?

On trouve, par l'analyſe, que le bien du pere étoit de 360000 livres; qu'il y avoit ſix enfants, & qu'ils ont eu chacun 60000 livres.

En effet, le premier prenant 10000, le reſtant du bien eſt 350000 livres, dont la ſeptieme partie eſt 50000, qui, avec 10000, font 60000 livres. Le premier enfant ayant pris ſa portion, il reſte 300000 livres; ſur laquelle ſomme le ſecond prenant 20000 livres, le reſtant eſt 280000, dont la ſeptieme partie eſt 40000, qui, avec les 20000 ci-deſſus, font encore 60000 livres; & ainſi de ſuite.

PROBLÊME II.

Un homme rencontre, en sortant de sa maison, un certain nombre de pauvres: il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui. Il trouve qu'en donnant à chacun neuf sous, il en a trente-deux de moins qu'il ne faut; mais qu'en en donnant à chacun sept, il lui en reste vingt-quatre. Quels étoient le nombre des pauvres, & la somme que cet homme avoit dans sa bourse?

Réponse. Il y avoit 28 pauvres, & cet homme avoit dans sa bourse 11 livres; car, en multipliant 28 par 9, on trouve 252, dont ôtant 32, puisqu'il manquoit 32 sous, le restant est 220 sous, qui valent 11 livres: mais, en donnant à chacun des pauvres 7 sous, il n'en falloit que 196 ou 9 fois 16: par conséquent il restoit 1 liv. 4 sous.

PROBLÊME III.

Un particulier a acheté, pour la somme de 110 livres, un lot de bouteilles de vin, composé de cent bouteilles de vin de Bourgogne, & quatre-vingts de vin de Champagne. Un autre a pareillement acheté au même prix, pour la somme de 95 livres, quatre-vingt-cinq bouteilles du premier, & soixante-dix du second. On demande combien leur a coûté l'une & l'autre espece de vin?

On trouvera que le vin de Bourgogne leur a coûté 10 sous la bouteille, & celui de Champagne 15. Il est aisé de le prouver.

PROBLÊME IV.

Un pere en mourant laiſſe ſa femme enceinte. Il ordonne par ſon teſtament que, ſi elle accouche d'un mâle, il héritera des deux tiers de ſon bien, & ſa femme de l'autre tiers ; mais, ſi elle accouche d'une fille, la mere héritera des deux tiers & la fille d'un tiers. Cette femme accouche de deux enfants, un garçon & une fille. Quelle ſera la part de chacun ?

CE problême n'a de difficulté que celle de reconnoître la volonté du teſtateur. Or on a coutume de l'interpréter ainſi : Puiſque ce teſtateur a ordonné que, dans le cas où ſa femme accoucheroit d'un garçon, cet enfant aura les deux tiers de ſon bien & la mere un tiers, il s'enſuit que ſon deſſein a été de faire à ſon fils un avantage double de celui de la mere : & puiſque, dans le cas où celle-ci accouchera d'une fille, il a voulu que la mere eût les deux tiers de ſon bien & la fille l'autre tiers, on en doit conclure que ſon deſſein a été que la part de la mere fût double de celle de la fille. Pour allier donc ces deux conditions, il faut partager la ſucceſſion de maniere que le fils ait deux fois autant que la mere, & la mere deux fois autant que la fille. Ainſi, en ſuppoſant le bien à partager de 30000 écus, la part du fils ſeroit de 17142 liv. $\frac{6}{7}$; celle de la mere, de 8571 $\frac{3}{7}$; & celle de la fille, de 4285 $\frac{5}{7}$.

On propoſe ordinairement à la ſuite de ce problême une autre difficulté. On ſuppoſe que cette mere accouche de deux garçons & d'une fille, & l'on demande quel ſera, dans ce cas, le partage de la ſucceſſion ?

Nous croyons n'avoir d'autre réponse à faire que celle que feroient les jurisconsultes, sçavoir, que le testament seroit nul dans ce cas; car, y ayant un enfant d'omis dans le testament, toutes les loix connues en prononceroient la nullité, attendu 1° que la loi est précise; 2° qu'il est impossible de démêler quelles auroient été les dispositions du testateur s'il avoit eu deux garçons, ou s'il avoit prévu que sa femme en eût mis deux au monde.

PROBLÊME V.

Un lion de bronze, placé sur le bassin d'une fontaine, peut jeter l'eau par la gueule, par les yeux & par le pied droit. S'il jette l'eau par la gueule, il remplira le bassin en six heures; s'il la jette par l'œil droit, il le remplira en deux jours; la jetant par l'œil gauche, il le rempliroit en trois; enfin, en la jetant par le pied, il le remplira en quatre jours. En combien de temps le bassin sera-t-il rempli, lorsque l'eau sortira à la fois par toutes ces ouvertures?

POUR résoudre ce problême, on observera que, puisque le lion, jetant l'eau par la gueule, remplit le bassin dans 6 heures, il en remplira un sixieme dans une heure; & puisque, la jetant par l'œil droit, il le remplit en deux jours, dans une heure il en remplira $\frac{1}{48}$. On trouvera de même qu'il en remplira $\frac{1}{72}$ dans une heure en jetant l'eau par l'œil gauche, & $\frac{1}{96}$ en la jetant par le pied. Donc, la jetant par les quatre ouvertures à la fois, il en fournira dans une heure $\frac{1}{6}$ plus $\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{96}$, c'est-à-dire, en ajoutant toutes ces fractions, les $\frac{61}{288}$. Qu'on fasse donc cette proportion: Si les $\frac{61}{288}$

ont été fournies en une heure ou 60 minutes, combien la totalité du bassin ou les $\frac{288}{288}$ exigeront-elles de minutes? & l'on trouvera 4 heures 43 minutes 16 secondes, & $\frac{44}{61}$ ou environ 42 tierces.

PROBLÊME VI.

Un mulet & un âne faisant voyage ensemble, l'âne se plaignoit du fardeau dont il étoit chargé. Le mulet lui dit: Animal paresseux, de quoi te plains-tu? Si tu me donnois un des sacs que tu portes, j'en aurois le double des tiens; mais si je t'en donnois un des miens, nous en aurions seulement autant l'un que l'autre. On demande quel étoit le nombre de sacs dont l'un & l'autre étoient chargés?

Ce problême, un de ceux qu'on propose ordinairement aux commençants en algebre, est tiré d'un recueil d'épigrammes grecques, connu sous le nom d'*Anthologie*. On a ainsi traduit en latin, presque littéralement, le problême grec avec sa solution.

Unà cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo graviter sub pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ipse gementem:
Mater, quid luges, teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto;
At si mensuram accipias, æqualia porto.
Dic mihi mensuras, sapiens geometer, istas?

L'analyse du problême a aussi été exprimée en assez mauvais vers latins, que nous donnerons ſeulement ici à cauſe de la ſingularité. Les voici :

Unam aſina accipiens, amittens mulus & unam,
Si fiant æqui, certè utrique antè duobus
Diſtabant à ſe. Accipiat ſi mulus at unam,
Amittatque aſina unam, tunc diſtantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cùm pondera dupla
Sint aſinæ, huic ſimplex, mulo eſt diſtantia dupla.
Ergo habet hæc quatuor tantùm, muluſque habet octo.
Unam aſinæ ſi addas, ſi reddat mulus & unam,
Menſuras quinque hæc, & ſeptem mulus habebunt.

C'eſt-à-dire :

Puiſque, le mulet donnant une de ſes meſures à l'âneſſe, ils ſe trouvent également chargés, il eſt évident que la différence des meſures qu'ils portent eſt égale à deux. Maintenant, ſi le mulet en reçoit une de celles de l'âneſſe, la différence ſera quatre ; mais alors le mulet aura le double du nombre des meſures de l'âneſſe : conſéquemment le mulet en aura huit, & l'âneſſe quatre. Que le mulet en rende donc une à l'âneſſe, celle-ci en aura cinq, & le premier en aura ſept. Ce ſont les nombres de meſures dont ils étoient chargés, & la réponſe à la queſtion.

On peut revêtir ce problême de bien des formes différentes ; mais il ſeroit puérile & ſuperflu de s'y arrêter.

Ce problême, au reſte, n'eſt pas le ſeul que nous préſente l'Anthologie grecque : en voici quelques autres traduits en vers latins par M. Bachet de Méziriac, qui les a inſérés dans une note ſur un des problêmes de Diophante.

I.

Aurea mala ferunt Charites, æqualia cuique
Mala insunt calatho; Musarum his obvia turba
Mala petunt, Charites cunctis æqualia donant;
Tunc æqualia tres contingit habere, novemque.
Dic quantùm dederint numerus sit ut omnibus idem?

Cela signifie : Les trois Graces portant des oranges, dont elles ont chacune un égal nombre, sont rencontrées par les neuf Muses qui leur en demandent : elles leur en donnent chacune le même nombre ; après cela chaque Muse & chaque Grace se trouve également partagée. Combien en avoient les premieres ?

Le moindre nombre qui satisfasse à la question est 12 ; car, en supposant que chaque Grace en eût donné une à chaque Muse, elles se trouveront en avoir chacune 3, & il en restera 3 à chaque Grace.

Les nombres 24, 36, &c. satisferont également à la question ; &, après la distribution faite, chacune des Graces & des Muses en eût eu 6, ou 9, &c.

II.

Dic, Heliconiadum decus, ô sublime Sororum
Pythagora! tua quot tyrones tecta frequentent,
Qui, sub te, sophiæ sudant in agone magistro?
Dicam; tuque animo mea dicta, Polycrates, hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata discit,
Quarta immortalem naturam nôsse laborat,

Septima, ſed tacitè, ſedet atque audita revolvit;
Tres ſunt fœminæi ſexûs.

Dis-moi, illuſtre Pythagore, combien de diſciples fréquentent ton école? Je vais te le dire, répond le philoſophe. Une moitié étudie les mathématiques, un quart la phyſique, une ſeptieme garde le ſilence; & il y a de plus trois femmes.

Ainſi, il s'agit de trouver un nombre dont une moitié, un quart & un ſeptieme, en y ajoutant 3, faſſent ce nombre lui-même. Il eſt aiſé de répondre que ce nombre eſt 28.

III.

Dic quota nunc hora eſt? Supereſt tantùm ecce diei
Quantùm bis gemini exactâ de luce trientes.

On demande quelle heure il eſt; & l'on répond que ce qui reſte du jour eſt les quatre tiers des heures déja écoulées.

En diviſant la durée du jour, comme faiſoient les anciens, en 12 parties, il eſt queſtion de partager ce nombre en deux parties, telles que les $\frac{4}{3}$ de la premiere ſoient enſemble égaux à la ſeconde; ce qui donne, pour le nombre des heures écoulées, $5\frac{1}{7}$, & conſéquemment, pour le reſte du jour, 6 heures & $\frac{6}{7}$.

IV.

Hîc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius mirâ denotat arte tibi.
Egit ſextantem juvenis, lanugine malâ
Veſtire hinc cœpit parte duodecimâ.

Septante

Septante uxori post hæc sociatur, & anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
Infelix subitâ morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur, hinc annos illius assequere.

Cette épitaphe est celle du célebre mathématicien Diophante. Elle signifie que Diophante passa la sixieme partie de sa vie dans la jeunesse, & la douzieme dans l'adolescence; qu'après un septieme de sa vie & cinq ans, il eut un fils qui mourut après avoir atteint la moitié de l'âge de son pere, & que ce dernier ne lui survéquit que de quatre ans.

Il faut trouver pour cela un nombre dont la sixieme, la douzieme, la septieme, la moitié, jointes ensemble, en y ajoutant 5 & 4, fassent le nombre lui-même. Ce nombre est 84.

V.

Qui jaculamur aquas tres hîc adstamus Amores;
Sed variè liquidas Euripo immittimus undas.
Dexter ego; summis & quæ mihi manat ab alis
Ipsum lympha replet solo sextante diei.
Quatuor ast horis lævus versâ influit urnâ;
Dimidiatque diem medius dùm fundit ab arcâ.
Dic, age, quàm paucis Euripum implebimus horis,
Ex arcâ simul atque alis urnâque fluentes?

Il y a trois Amours qui versent l'eau dans un bassin, mais inégalement. L'un le remplit en un sixieme de jour, l'autre en quatre heures, & le troisieme en une demi-journée. On demande combien de temps il faudra pour le remplir, lorsqu'ils verseront tous trois de l'eau ?

Ce problême est de la même nature que celui du lion de bronze, que nous avons résolu précédemment, & qui est aussi tiré de l'Anthologie grecque. En supposant le jour divisé en 12 heures, on trouvera que les trois Amours rempliront le bassin en $\frac{1}{11}$, ou un peu plus d'une heure.

PROBLÊME VII.

La somme de 500 liv. ayant été partagée entre quatre personnes, il se trouve que les deux premieres ensemble ont eu 285 livres, la seconde & la troisieme 220 livres, enfin la troisieme & la quatrieme 215 livres; de plus, le rapport de la part de la premiere à celle de la derniere est de 4 à 3. On demande combien chacune a eu?

LA solution de ce problême est des plus faciles. La premiere a eu 160 livres, la seconde 125, la troisieme 95, & la quatrieme 120.

Il faut remarquer que, sans la derniere condition, ou une quatrieme quelconque, le problême seroit indéterminé, c'est-à-dire qu'on pourroit y satisfaire d'une infinité de manieres : c'est cette derniere condition qui limite la solution à une seule.

PROBLÊME VIII.

Un ouvrier se loue à ces conditions, qu'on lui donnera 30 sous par jour lorsqu'il travaillera, mais que chaque jour qu'il chommera il rendra 15 sous.

Après quarante jours, son décompte monte à 31 livres. On demande combien de jours il a travaillé, combien il en a chommé?

RÉPONSE. IL a travaillé vingt-huit jours des quarante, & il en a chommé douze.

PROBLÊME IX.

Une lettre de change de 2000 livres a été payée en écus de trois livres, & en piastres dont la valeur est de cinq livres; & il y avoit précisément quatre cents cinquante pieces de monnoie. Combien y en avoit-il de chaque espece?

RÉPONSE. IL y avoit cent vingt-cinq écus de trois livres, & trois cents vingt-cinq piastres de cinq livres.

PROBLÊME X.

Un homme a perdu sa bourse, & ne sçait pas précisément le compte de l'argent qu'il y avoit: il se rappelle seulement qu'en le comptant deux à deux pieces, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il restoit toujours un; mais, en les comptant sept à sept, il ne restoit rien.

ON voit aisément que, pour résoudre ce problême, il est question de trouver un nombre qui, divisé par 7, ne laisse aucun reste, & étant divisé par 2, par 3, par 5, laisse toujours 1. Plusieurs méthodes plus ou moins sçavantes peuvent y conduire; mais voici la plus simple.

Puisque, le nombre des pieces étant compté sept à sept il ne reste rien, ce nombre est évidemment quelque multiple de 7; & puiſqu'en les comptant deux à deux il reſte 1, ce nombre eſt un multiple impair : il eſt donc quelqu'un des nombres de la ſuite 7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, &c.

De plus, ce nombre doit, étant diviſé par 3, laiſſer l'unité : or, dans la ſuite des nombres ci-deſſus, je trouve que 7, 49, 91, qui croiſſent arithmétiquement, & dont la différence eſt 42, ont la propriété demandée. Je trouve de plus, que le nombre 91 étant diviſé par 5, il reſte 1 : d'où je conclus que le premier nombre qui ſatisfait à la queſtion eſt 91, car il eſt multiple de 7; & étant diviſé par 2, par 3 & par 5, il reſte toujours un.

Je dis que 91 eſt le premier nombre qui ſatisfait à la queſtion ; car il y en a pluſieurs autres, qu'on trouvera par le moyen ſuivant : continuez la progreſſion ci-deſſus en cette ſorte, 7, 49, 91, 133, 175, 217, 259, 301, juſqu'à ce que vous trouviez un autre terme diviſible par 5, en laiſſant l'unité ; ce terme ſera 301, qui ſatisfera encore à la queſtion. Or ſa différence avec 91 eſt 210 : d'où je conclus que, formant cette progreſſion,

91, 301, 511, 721, 931, 1141, &c.

tous ces nombres rempliſſent également les conditions du problême.

Il ſeroit donc incertain quelle ſomme étoit dans la bourſe perdue, à moins que ſon maître ne ſçût à peu près quelle ſomme il y avoit. Ainſi, s'il diſoit ſçavoir qu'il y avoit environ 500 pieces, on lui répondroit que le nombre des pieces étoit de 511.

Suppoſons préſentement que l'homme à qui appartient la bourse eût dit que, *comptant son argent deux à deux pieces, il restoit l'unité; qu'en les comptant trois à trois, il en restoit deux; que comptées quatre à quatre, il restoit trois; que comptées cinq à cinq, il restoit quatre; que comptées six à six, il en restoit cinq; enfin, que les comptant sept à sept, il ne restoit rien:* on demande ce nombre.

Il est évident que ce nombre est, comme ci-dessus, un multiple impair de 7, & conséquemment un de ceux de la suite 7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, &c. Or, dans cette suite, les nombres 35 & 77 satisfont à la condition d'avoir 2 pour reste quand on les divise par 3 : leur différence est d'ailleurs 42. C'est pourquoi je forme cette nouvelle progression arithmétique, dont la différence est 42, sçavoir :

35, 77, 119, 161, 203, 245, 287, &c.

J'y cherche deux nombres qui, divisés par 4, laissent 3 pour reste, & je trouve que ce sont 35, 119, 203, 287. C'est pourquoi je forme cette nouvelle progression, où la différence des termes est 84:

35, 119, 203, 287, 371, 455, 539, 623, &c.

Je cherche encore ici deux termes qui, divisés par 5, laissent un reste égal à 4; & j'apperçois bientôt que ces deux nombres sont 119 & 539, dont la différence est 420. Ainsi la suite des termes répondant à toutes les conditions du problême, hors une, est

119, 539, 959, 1379, 1799, 2219, 2639, &c.

Or la derniere condition du problême est que, le nombre trouvé étant divisé par 6, il reste 5. Cette propriété convient à 119, 959, 1799, &c. en ajoutant toujours 840 : conſéquemment le nombre cherché eſt un de ceux de cette progreſſion. C'eſt pourquoi, auſſitôt qu'on ſçaura dans quelles limites à peu près il eſt contenu, on ſera en état de le déterminer.

Si donc le maître de la bourſe perdue dit qu'il y avoit environ cent pieces, le nombre cherché ſera 119 ; s'il diſoit qu'il y en avoit à peu près mille, ce ſeroit 959, &c.

Remarque.

Ce problême ſeroit réſolu imparfaitement par la méthode qu'enſeigne feu M. Ozanam ; car, ayant trouvé le plus petit nombre 119, qui ſatisfait aux conditions du problême, il ſe borneroit à dire que, pour avoir les autres nombres qui y ſatisfont, il faut multiplier de ſuite les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, & ajouter leur produit 5040 au premier nombre trouvé 119, & qu'on aura par-là le nombre 5159, qui remplit auſſi les conditions propoſées. Or il eſt aiſé de voir qu'il y a pluſieurs autres nombres entre 119 & 5159 qui rempliſſent ces conditions, ſçavoir, 959, 1799, 2639, 3479, 4319.

Nous donnerons, en traitant de la Chronologie, la ſolution d'un autre problême du même genre, ſçavoir ; de trouver l'année de la Période Julienne, dont le nombre d'or, le cycle ſolaire & l'indiction ſont donnés.

PROBLÊME XI.

Une certaine ſomme d'argent, placée à un certain intérêt, s'eſt accrue en huit mois juſqu'à 3616 livres 13 ſous 4 deniers, & en deux ans & demi *elle a monté à 3937 livres 10 ſous. On demande quel étoit le capital originaire, & à quel intérêt il a été placé?*

NOUS nous bornerons encore ici, pour exciter la ſagacité des jeunes algébriſtes, à indiquer la ſolution. Ils trouveront, en employant l'analyſe convenable, que le capital placé étoit de 3500 livres, & que l'intérêt étoit de cinq pour cent.

PROBLÊME XII.

Une femme a vendu 10 perdrix au marché, une ſeconde en a vendu 25, & une troiſieme en a vendu 30, & toutes au même prix. Au ſortir du marché elles ſe queſtionnent ſur l'argent qu'elles en rapportent, & il ſe trouve que chacune rapporte la même ſomme. On demande à quel prix & comment elles ont vendu?

IL eſt évident qu'afin que la choſe ſoit poſſible, il faut que ces femmes vendent au moins à deux différentes fois & à différents prix, quoiqu'à chaque fois elles vendent toutes enſemble au même prix; car, ſi celle qui avoit le moins de perdrix en a vendu un très-petit nombre au prix le plus bas, & qu'elle ait vendu le ſurplus au plus haut prix, tandis que celle qui en avoit le plus grand nombre en avoit vendu la plus grande partie au plus bas prix, & n'a pu en vendre qu'un petit nombre au plus haut, il eſt clair qu'elles auront pu faire des ſommes égales.

Il s'agit donc de diviſer chacun des nombres 10, 25, 30, en deux parties telles, que multipliant la premiere partie de chacun par le premier prix, & la ſeconde par le ſecond, la ſomme des deux produits ſoit par-tout la même.

Ce problême eſt indéterminé, & ſuſceptible de dix ſolutions différentes. Il eſt d'abord néceſſaire que la différence des prix de la premiere & de la ſeconde vente ſoit un diviſeur exact des différences 15, 20, 5, des trois nombres donnés : or le moindre diviſeur de ces trois nombres eſt 5 ; c'eſt pourquoi les prix doivent être 6 & 1, ou 7 & 2, ou 8 & 3, &c.

En ſuppoſant les deux prix être 6 & 1, on trouve ſept ſolutions différentes, comme on le voit dans la Table ſuivante.

	Ière Vente.	*IIe Vente.*	*Prod. total.*
1ere Fem.	4 Perd. à 6 ſ.	6 à 1 ſ.	30 ſ.
2e ——	1	24	30
3e ——	0	30	30
Ou bien,			
1ere Fem.	5	5	35
2e ——	2	23	35
3e ——	1	29	35
Ou bien,			
1ere Fem.	6	4	40
2e ——	3	22	40
3e ——	2	28	40
Ou bien,			
1ere Fem.	7	3	45
2e ——	4	21	45
3e ——	3	27	45
Ou bien,			
1ere Fem.	8	2	50
2e ——	5	20	50
3e ——	4	26	50

	Iere Vente.	*IIe Vente.*	*Prod. total.*
Ou bien,			
1ere Fem.	9 Perd. à 6 f.	1 à 1 f.	55 f.
2e ——	6	19	55
3e ——	5	25	55
Ou bien,			
1ere Fem.	10	0	60
2e ——	7	18	60
3e ——	6	24	60

Si l'on ſuppoſe les deux prix être 7 & 2, on aura encore les trois ſolutions ſuivantes.

	Iere Vente.	*IIe Vente.*	*Prod. total.*
1ere Fem.	8 Perd. à 7 f.	2 à 2 f.	60 f.
2e ——	2	23	60
3e ——	0	30	60
Ou bien,			
1ere Fem.	9	1	65
2e ——	3	22	65
3e ——	1	29	65
Ou bien,			
1ere Fem.	10	0	70
2e ——	4	21	70
3e ——	2	28	70

Il ſeroit inutile d'eſſayer 8 & 3, & tout autre nombre; on n'en pourroit tirer aucune ſolution, par les raiſons qu'on verra plus bas.

REMARQUES.

ON lit dans la ſeconde partie de l'*Arithmétique univerſelle* de M. de Lagny, page 456, que cette queſtion n'a que ſix ſolutions; en quoi cet auteur s'eſt trompé, car nous venons d'en indiquer 10. Nous croyons devoir enſeigner ici la méthode que l'on a employée, eſpérant que cela ſera plaiſir à ceux qui apprennent l'algebre.

J'appelle u le prix auquel les trois femmes ont vendu la premiere fois, & p celui auquel elles ont vendu la ſeconde.

Que x ſoit le nombre des perdrix vendues par la premiere femme au prix u; conſéquemment le nombre de celles vendues au prix p ſera $10-x$: l'argent retiré de la premiere vente ſera xu, celui de la ſeconde ſera $10p-px$; & la ſomme totale, $xu+10p-px$.

Que z ſoit le nombre des perdrix vendues par la ſeconde femme à la premiere vente, on aura uz pour l'argent retiré à la premiere vente, & $25p-pz$ pour l'argent retiré à la ſeconde; en tout, $zu+25p-pz$.

De même, nommant y le nombre de perdrix vendues la premiere fois par la troiſieme femme, on aura uy pour l'argent retiré à la premiere vente, $30p-py$ pour celui retiré à la ſeconde; enfin, pour le total des deux ventes, $uy+30-py$.

Mais, par la ſuppoſition, ces trois ſommes doivent être égales. Ainſi l'on a $xu+10p-px=zu+25p-pz$, $=uy+30p-py$; d'où je tire ces trois nouvelles équations:

$$xu-px=zu-pz+15p,$$
$$xu-px=uy-py+20p,$$
$$zu-pz=uy-py+5p;$$

&, divisant tout par $u-p$, on aura ces trois autres :

$$x=z+\frac{15p}{u-p},$$
$$x=y+\frac{20p}{u-p},$$
$$z=y+\frac{5p}{u-p}:$$

d'où l'on conclut d'abord que $u-p$ doit être un diviseur de 15, de 20 & de 5; car autrement $\frac{15p}{u-p}$, $\frac{20p}{u-p}$, & $\frac{5p}{u-p}$, ne seroient pas des nombres entiers, ce qui est nécessaire. Or le seul nombre qui divise à la fois 15, 20 & 5, est 5; ce qui montre que les prix des deux ventes ne peuvent être que 5 & 0, 6 & 1, 7 & 2, 5 & 3, &c.

On voit d'abord que la supposition de 5 & 0 ne peut servir, puisqu'il n'y auroit eu qu'une vente.

Il faut donc essayer la seconde supposition 6 & 1, sçavoir, $u=6$ & $p1$; ce qui donne pour les deux dernieres équations ces deux-ci, $x=y+4$, $z=y+1$.

Or nous avons ici trois inconnues, & seulement deux équations : c'est pourquoi une de ces inconnues doit être prise à volonté. Choisissons y, & supposons-la d'abord $=0$.

Cela donnera $x=4$ & $z=1$; & l'on aura la premiere solution, où l'on voit que la premiere femme a vendu la premiere fois 4 perdrix à 6 sous piece, & conséquemment, la seconde fois, 6 à 1 sou piece; tandis que la seconde femme en a vendu une la premiere fois à 6 sous piece, & les 24 autres à 1 sou piece; & la troisieme aura vendu toutes les siennes au second prix : elles auront alors toutes 30 pieces.

Si l'on fait $y=1$, on aura la seconde solution.

Si l'on fait $y=2$, on aura la troisieme.

En faisant $y=3$, on aura la quatrieme.

En faisant $y=4$, on aura la cinquieme.

En faisant $y=5$, on aura la sixieme.

En faisant $y=6$, on aura la septieme.

On ne peut pas supposer y plus grand que 6; car, si on le supposoit, on auroit $x=10$; ce qui est impossible, puisque la premiere femme n'a que 10 perdrix à vendre.

Il faut donc passer à la supposition suivante, sçavoir, de $u=7$ & $p=2$; ce qui donne deux équations, $x=y+8$, $z=y+2$.

Si donc l'on fait ici d'abord $y=0$, on aura $x=8$ & $z=2$; ce qui donne la huitieme solution.

En faisant $y=1$, on aura la neuvieme.

En faisant $y=2$, on aura la dixieme.

Mais on ne peut faire y plus grand; car on trouveroit x plus grand que 10, ce qui est impossible.

On essayeroit aussi inutilement pour u & p les valeurs 8 & 3, car elles donneroient nécessairement pour x une valeur plus grande que 10, ce qui ne peut être.

Ainsi l'on peut assurer que le problême n'a que les dix solutions ci-dessus.

PROBLÊME XIII.

En combien de manieres peut-on payer 60 sous, en employant toutes les monnoies d'usage, comme écu de 3 livres, pieces de 24, de 12, de 6, de 2 sous & de 18 deniers, sous, pieces de 2 liards & liards?

JE crois qu'il seroit fort difficile de résoudre ce problême, que par une sorte d'énumération; mais, comme elle eſt immenſe, il y a un ordre à ſuivre, ſans lequel on ne s'en démêleroit jamais. C'eſt ce que nous avons tâché de faire. Néanmoins, comme le détail de cette méthode nous meneroit beaucoup trop loin, nous nous bornerons à en donner les réſultats principaux. Nous avons donc trouvé que,

1° On peut payer 60 ſous en monnoies d'argent, de 13 manieres ſeulement.

2° On peut payer 6 ſous en monnoies de cuivre, ſeulement de 155 façons; 12 ſous, de 1292; 18 ſous, de 5104; 24 ſous, de 14147 façons; 30 ſous, de 31841; 36 ſous, de 62400; 42 ſous, de 111182; 48 ſous, de 183999; 54 ſous, de 287777; enfin 60 ſous, de 430264.

3° En combinant les monnoies de cuivre avec celles d'argent, j'ai trouvé que cette même ſomme de 60 ſous peut être payée de 1383622 manieres.

Conſéquemment, en ajoutant ces trois ſommes, ſçavoir 13, 430264 & 1383622, on aura 1813899 façons de payer une ſomme de 60 ſous.

Il paroîtra ſans doute étonnant qu'avec huit monnoies ſeulement il y ait autant de manieres de payer une ſi modique ſomme; mais, quoique je ne puiſſe abſolument aſſurer n'avoir pas commis quelque erreur dans mon calcul, parceque j'en ai perdu tout l'échaffaudage, & que je n'ai ni le courage ni le loiſir de le refaire, je ſuis aſſuré que ce nombre n'eſt guere inférieur.

PROBLÊME XIV.

Trouver le nombre & le rapport des poids avec lesquels on peut peser de la maniere la plus simple un nombre quelconque de livres, depuis l'unité jusqu'à un nombre donné.

QUOIQUE ce problême paroisse d'abord appartenir à la méchanique, il est cependant facile de voir que ce n'est qu'un problême arithmétique ; car il se réduit à trouver une suite de nombres commençants par l'unité, & qui, ajoutés ou soustraits les uns des autres de toutes les manieres possibles, forment tous les nombres depuis l'unité jusqu'au plus grand proposé.

Ce problême peut se résoudre de deux manieres, sçavoir, par la seule addition, ou par l'addition combinée avec la soustraction. Dans le premier cas, la suite des poids qui satisfait au problême, est celle des poids croissants en progression double ; & dans le second, c'est la progression triple.

Qu'on ait en effet ces poids, 1 livre, 2 livres, 4 livres, 8 livres, 16 livres, on pourra peser avec eux quelque nombre de livres que ce soit jusqu'à 31 ; car on formera trois livres avec 2 & 1, cinq livres avec 4 & 1, six avec 4 & 2, sept avec 4, 2 & 1, &c. Avec encore un poids de 32, on peseroit jusqu'à soixante-trois livres ; & ainsi de suite en doublant le dernier poids, & retranchant de ce double l'unité.

Mais qu'on emploie des poids en progression triple, 1, 3, 9, 27, 81, on pourra peser avec eux tout poids depuis une livre jusqu'à 121 ; car, avec le second moins le premier, c'est-à-dire en mettant le premier dans le bassin de la balance & le second dans l'autre, on fera deux livres; en les mettant tous les deux dans le même bassin, on formera quatre livres; cinq se formeront en mettant 9 d'un côté, & 3 & 1 de l'autre; avec 9 d'un côté & 3 de l'autre, on aura six; on fera sept livres avec 9 & 1 d'un côté, & 3 de l'autre; & ainsi de suite.

Au reste, il est évident que la derniere façon est la plus simple, étant celle qui exige le moins de poids différents.

L'une & l'autre de ces progressions sont enfin plus avantageuses qu'aucune des progressions arithmétiques qu'on pourroit essayer; car, avec des poids arithmétiquement croissants, 1, 2, 3, 4, &c. il en faudroit 15 pour peser 120 livres; pour en peser 121 avec des poids dans la progression 1, 3, 5, 7, &c. il en faudroit onze. Toute autre progression ne rempliroit pas tous les nombres possibles, depuis le poids d'une livre jusqu'au plus grand qui résulte de la totalité des poids. Ainsi la proportion triple est de toutes la plus favorable.

Il est, au reste, évident que la solution de ce problême a son utilité dans l'usage ordinaire de la vie & du commerce, puisqu'elle offre le moyen de faire toute sorte de pesée avec le moindre nombre possible de poids différents.

PROBLÊME XV.

Une femme de campagne porte des œufs au marché dans une ville de guerre où il y a trois corps-de-garde à passer. Au premier, elle laisse la moitié de ses œufs & la moitié d'un; au second, la moitié de ce qui lui restoit & la moitié d'un; au *troisieme, la moitié de ce qui lui restoit & la moitié d'un : enfin elle arrive au marché avec trois douzaines. Comment cela se peut-il faire sans rompre aucun œuf ?*

IL semble, du premier abord, que ce problême soit impossible ; car comment donner une moitié d'œuf sans en casser aucun ? Cependant on en verra la possibilité, quand on considérera que, lorsqu'on prend la grande moitié d'un nombre impair, on en prend la moitié exacte plus $\frac{1}{2}$. Ainsi on trouvera qu'avant le passage du dernier guichet, il restoit à la femme 73 œufs ; car, en ayant donné 37, qui est la moitié plus la moitié d'un, il lui en restera 36. De même, avant le deuxieme guichet, elle en avoit 147 ; & avant le premier, 295.

On peut proposer le problême autrement. *Un homme est sorti de chez lui avec une certaine quantité de louis pour faire des emplettes. A la premiere, il dépense la moitié de ses louis & la moitié d'un ; à la seconde, il dépense aussi la moitié de ses louis & la moitié d'un ; à la troisieme, pareillement ; & il rentre chez lui ayant dépensé tout son argent, & sans avoir jamais changé de l'or pour de l'argent.*

Il avoit 7 louis, & à la premiere emplette il en a dépensé 4 ; à la seconde, 2 ; à la troisieme, 1 ; car 4 est la moitié de 7, & de plus il y a un demi. Le restant étant 3, sa moitié est $\frac{3}{2}$; & conséquemment 2 excede cette moitié de $\frac{1}{2}$. Le restant est enfin 1 : or la moitié d'un plus $\frac{1}{2}$ sont égales à 1 ; conséquemment il ne reste plus rien.

REMARQUE.

SI le nombre d'emplettes après lesquelles notre homme

homme a dépensé tout son argent étoit plus grand, il n'y auroit qu'à faire une puissance de 2, dont l'exposant fût égal au nombre des emplettes, & la diminuer de l'unité. Ainsi, s'il y en avoit 4, la quatrieme puissance de 2 étant 16, le nombre cherché seroit 15; s'il y en avoit 5, la cinquieme puissance de 2 étant 32, le nombre cherché seroit 31.

PROBLÊME XVII.

Trois personnes ont un certain nombre d'écus chacune. Il est tel que, la premiere en donnant aux deux autres autant qu'elles en ont chacune, la seconde pareillement en donnant à chacune des deux autres autant qu'elle en a, enfin la troisieme faisant la même chose, elles se trouvent en avoir autant l'une que l'autre, sçavoir 8. Quelle est la somme qu'a chacune de ces personnes?

RÉPONSE. LA premiere en avoit 13, la seconde 7, & la troisieme 4; ce qui est aisé à démontrer, en distribuant les écus de chaque personne suivant l'énoncé du problême.

PROBLÊME XVIII.

Un marchand de vin n'a que de deux sortes de vin, qu'il vend l'une 10, l'autre 5 sous la bouteille. On lui demande du vin à 8 sous. Combien faut-il de bouteilles de chaque espece, pour en former un qui lui revienne à 8 sous la bouteille?

RÉPONSE. LA différence du plus haut prix, 10 sous, au prix moyen demandé, est 2; & celle de ce prix moyen au prix le plus bas, eſt 3 : ce qui montre qu'il faut qu'il prenne trois bouteilles du vin du plus haut prix & deux du moindre. Avec ce mélange il fera cinq bouteilles, qui lui reviendront à 8 ſous chacune.

En général, dans ces ſortes de regles d'alliage, comme la différence du plus haut prix avec le prix moyen, eſt à la différence du moyen avec le plus bas, ainſi le nombre des meſures du plus bas prix, eſt à celui des meſures du plus haut, qu'il faut mélanger enſemble pour avoir une pareille meſure au prix moyen.

PROBLÊME XIX.

Un homme veut placer chez un banquier une certaine ſomme, par exemple 100000 livres. Il veut de plus avoir mangé en vingt ans capital & intérêts, & avoir chaque année la même ſomme à dépenſer. Quelle ſera la ſomme que le banquier devra lui donner annuellement, en ſuppoſant qu'il lui en paie l'intérêt à raiſon de cinq pour cent ?

LA ſomme que lui devra donner le banquier, eſt de 8014 liv. 19 ſous, & une fraction de denier égale à $\frac{28416}{33168}$.

S'il n'étoit queſtion que d'un petit nombre d'années, par exemple cinq, on pourra réſoudre ce problême ſans algebre, par la voie rétrograde & par une fauſſe poſition; car, ſuppoſons que la ſomme qui épuiſe à la derniere année capital & intérêts eſt de 10000 livres, on trouvera que le capital ſeul étoit, au commencement de cette année, de 9523 liv. $\frac{17}{21}$: ajoutez-y 10000 liv. qui ont été payées à la fin de l'avant-derniere année, la ſomme 19523 liv. $\frac{17}{21}$ étoit le capital accru des intérêts de la quatrieme année; conſéquemment le capital n'étoit que de 18594 liv. $\frac{46}{441}$ au commencement de cette quatrieme année: d'où il ſuit qu'avant le paiement de la fin de la troiſieme année, la ſomme étoit de 28594 liv. $\frac{46}{441}$, qui repréſentoit un capital accru des intérêts de la troiſieme année. L'on remontera ainſi juſqu'au commencement de la premiere année, & l'on trouvera pour capital primitif la ſomme de 43294 liv. 15 ſ. 4 d. On fera enfin cette proportion, comme ce capital, à la ſomme de 10000 livres; ainſi la ſomme propoſée à placer ſous la condition ci-deſſus, à la ſomme à retirer chaque année.

Mais il eſt aiſé de ſentir que, s'il étoit queſtion de 20 ou 30 ans, cette méthode exigeroit des calculs très-longs, que l'algebre abrege infiniment (*a*).

PROBLÊME XX.

Quel eſt l'intérêt dont ſeroit accru au bout de l'année un capital quelconque, ſi, à chaque inſtant de la durée de l'année, l'intérêt échu devenoit capital, & portoit lui-même intérêt?

CE problême a beſoin d'une explication pour être facilement entendu. Quelqu'un pourroit pla-

---

(*a*) On trouve en effet que ſi a eſt le capital, m le denier de l'intérêt, n le nombre des années, la ſomme à retirer chaque année eſt $\frac{a \times \overline{1+\frac{1}{m}}|^{n}}{m \times \overline{1+\frac{1}{m}}|^{n} - m}$; ce qui, dans le cas de 20 années, & d'un intérêt à cinq pour cent (m étant alors $=20$), ſe trouve $= a \times \frac{2.6584}{33.1689}$.

cer ſon argent ſous cette condition ; que l'intérêt échu au bout d'un mois, ce qui feroit, à cinq pour cent par an, un ſoixantieme du capital, ſe joindroit à ce capital, & porteroit intérêt le mois ſuivant à ce même denier ; que ce mois expiré, l'intérêt de cette ſomme, qui feroit un ſoixantieme, plus un trois mille ſix centieme du capital primitif, accroîtroit encore au capital, accru de l'intérêt du premier mois, & porteroit intérêt le mois ſuivant, &c. juſqu'à la fin de l'année.

Ce qu'il fait ici pour un mois, il pourroit le faire pour un jour, pour une heure, pour une minute, pour une ſeconde, qu'on peut regarder comme une partie infiniment petite de l'année : il eſt queſtion de ſçavoir quel feroit ſur ce pied l'intérêt produit par le capital au bout de l'année, l'intérêt du premier inſtant étant à cinq pour cent, ou à $\frac{1}{20}$, ce que ce premier inſtant eſt à l'année entiere.

Il ſembleroit d'abord que cet intérêt composé & ſurcompoſé devroit beaucoup accroître les cinq pour cent : cependant on trouve qu'il en réſulte à peine un accroiſſement ſenſible ; car, ſi le capital eſt 1, le même capital, accru de l'intérêt ſimple à cinq pour cent, ſera $1+\frac{1}{20}$, ou $1+\frac{50}{1000}$, tandis qu'augmenté de l'intérêt accumulé à chaque inſtant, il ſera 1, $\frac{052}{1000}$, ou, plus exactement, 1, $\frac{05127}{100000}$.

PROBLÊME XXI.

Un ſommelier infidele, à chaque fois qu'il va à la cave, vole une pinte d'un tonneau particulier qui contient cent pintes, & la remplace par une égale quantité d'eau. Après un certain temps, *par exemple trente jours, on s'apperçoit de sa friponnerie ; on le chasse. Mais on demande quelle est la quantité de vin qu'il a prise, & celle qui reste dans le tonneau?*

Il est aisé de voir qu'il n'a pas pris 30 pintes ; car, dès la seconde fois qu'il puise dans le tonneau, & qu'il prend un centieme de ce qu'il contient, il y avoit déja une pinte d'eau ; & comme chaque jour il substitue à ce qu'il prend une pinte d'eau, chaque jour aussi il vole moins d'une pinte de vin. Il est donc question, pour résoudre le problême, de déterminer dans quelle progression décroît le vin qu'il vole à chaque fois.

Pour y parvenir, je remarque qu'après l'extraction de la premiere pinte de vin, il n'en reste dans le tonneau que 99, & la pinte d'eau qui y a été versée ; donc, lorsqu'on tire une pinte du mélange, on ne tire en effet que les $\frac{99}{100}$ d'une pinte de vin : mais il y avoit auparavant 99 pintes de vin ; donc, après cette extraction, il ne restera que 99 pintes moins $\frac{99}{100}$, c'est-à-dire $\frac{9801}{100}$, ou 98 pintes plus $\frac{1}{100}$. A la troisieme extraction, la quantité de vin contenue dans la pinte tirée, sera seulement $\frac{98}{100} + \frac{1}{10000}$; ce qui, étant ôté de la quantité de vin qu'il y avoit, sçavoir 98 $\frac{1}{100}$, fera $\frac{970229}{10000}$, ou 97 pintes & $\frac{229}{10000}$.

On doit présentement remarquer que $\frac{9801}{100}$ est le quarré de 99, divisé par 100, & que $\frac{970229}{10000}$ est le cube de 99, divisé par le quarré de 100, &c : conséquemment, après la seconde extraction, la quantité de vin restante sera le quarré de 99, divisé par la premiere puissance de 100 ; après la troisieme, ce sera le cube de 99, divisé par le quarré de 100, &c : d'où il suit qu'après la trentieme extraction, la quantité de vin restante sera la trentieme puissance de 99, divisée par la vingt-neuvieme de 100. Or on trouve, par le moyen des logarithmes, que cette quantité est 73, $\frac{97}{100}$: conséquemment la quantité de vin prise est 26. $\frac{3}{100}$ (a).

PROBLÊME XXII.

Il y a trois ouvriers que j'appelle Jacques, Jean, & Pierre. Les deux premiers, travaillant ensemble, ont fait un certain ouvrage en huit jours, Jacques & Pierre n'ont pu le faire qu'en neuf jours, & les deux derniers n'en ont fait un semblable qu'en dix jours. Il est question de déterminer combien chacun d'eux mettroit de jours à faire le même ouvrage.

RÉPONSE. LE premier le fera en 14 jours & $\frac{14}{49}$, le second en 17 & $\frac{23}{41}$, & le troisieme en 23 jours & $\frac{7}{31}$.

PROBLÊME XXIII.

Un Espagnol doit à un François 31 livres; mais il n'a, pour s'acquitter, que des piastres qui valent 5 livres, & le François n'a que des écus de 6 livres. Comment s'arrangeront-ils, c'est-à-dire

(a) En faisant le calcul à la maniere ordinaire, il faudroit calculer la trentieme puissance de 99, qui n'auroit pas moins de 59 chiffres, & la diviser par l'unité suivie de 58 zéro : au lieu qu'en opérant par le moyen des logarithmes, il suffit de multiplier le logarithme de 99 par 30; ce qui donne 598690560, & d'en retrancher le produit du logarithme de 100 multiplié par 29, qui est 580000000. Le restant 18690560 est le logarithme de la quantité cherchée, qu'on trouve, dans la table des logarithmes, être 73, $\frac{97}{100}$, à bien peu de chose près.

combien l'Eſpagnol donnera-t-il au François de piaſtres, & combien celui-ci lui rendra-t-il d'écus, pour que la différence ſoit égale à 31 livres, enſorte que cette dette ſoit acquittée?

RÉPONSE. LES nombres les plus ſimples qui ſatisfont à la queſtion, ſont onze piaſtres & quatre écus; car 11 piaſtres font 55 livres, & les quatre écus font 24 livres; conſéquemment leur différence, dont le François eſt avantagé dans cette eſpece d'échange, eſt de 31 livres.

Ce problême eſt, au reſte, ſuſceptible d'une infinité de ſolutions; car on trouve qu'on ſatisfera encore au problême avec dix-ſept piaſtres & neuf écus de 6 livres, avec vingt-trois piaſtres & quatorze écus; en augmentant toujours le nombre des piaſtres de ſix, & celui des écus de cinq.

REMARQUE.

VOICI la ſolution de ce problême, en faveur des jeunes analyſtes. Je nomme x le nombre des piaſtres, & y celui des écus; donc $5x$ ſera la ſomme donnée par l'Eſpagnol, & celle que le François donnera de ſon côté $=6y$. Leur différence doit être égale à 31; donc $5x-6y=31$ livres; donc $5x=31+6y$, & $x=\frac{31+6y}{5}$, ou $6+\frac{1+6y}{5}$ livres. Or x doit être un nombre entier; d'où il ſuit que 6 en étant un, $\frac{1+6y}{5}$ doit être auſſi de la même nature. Je le ſuppoſe égal à u; donc $5u=1+6y$, & $y=\frac{5u-1}{6}$. Or y eſt, par la ſuppoſition, un nombre entier; d'où il ſuit que $\frac{5u-1}{6}$ en eſt auſſi un. Il faut donc que u ſoit tel que, ſon quintuple étant diminué de l'unité, le reſtant ſoit diviſible par 6 : or le premier nombre qui a cette propriété eſt 5 ; car ſon quintuple 25, diminué de l'unité, eſt 24, qui eſt diviſible par 6 ; & ce quotient, qui eſt 4, eſt la valeur même de y. On trouvera enſuite x, en faiſant attention que $x = 6 + \frac{1+6y}{5}$; ce qui, en y ſubſtituant la valeur de y ou 4, donne 11 pour la valeur de x.

La ſeconde valeur de u qui remplit la condition requiſe, eſt 11 ; car cinq fois 11 font 55, qui, diminués de l'unité, donnent 54, lequel nombre diviſé par 6, donne 9. Ainſi 9 eſt la ſeconde valeur de y, & l'on trouve 17 pour la valeur correſpondante de x.

La troiſieme valeur de u qui réſout la queſtion, eſt 17 ; ce qui donne pour les valeurs correſpondantes de y & x, les nombres 14 & 23. Ainſi les nombres d'écus qui réſolvent la queſtion à l'infini ſont, 4, 9, 14, 19, 24, &c ; & les nombres correſpondants de piaſtres ſont, 11, 17, 23, 29, 35, &c.

CHAPITRE XII.

Des Quarrés magiques.

ON appelle quarré magique, un quarré divifé en plufieurs autres petits quarrés égaux ou cellules, qu'on remplit des termes d'une progreffion quelconque de nombres, ordinairement arithmétique, en telle forte que ceux de chaque bande, foit horizontale, foit verticale, foit diagonale, faffent toujours la même fomme.

Il y a auffi des quarrés dans lefquels le produit de tous les termes, dans chaque bande horizontale, verticale ou diagonale, refte toujours le même. On en parlera auffi, quoique légérement, parcequ'ils n'ont point de difficulté plus grande que celle des premiers.

On a donné à ces quarrés le nom de *magiques*, parceque les anciens leur attribuoient de grandes vertus, & que cette difpofition de nombres formoit la bafe & le principe de plufieurs de leurs talifmans.

Suivant eux, le quarré d'une cafe rempli par l'unité, étoit le fymbole de la divinité, à caufe de l'unité de Dieu & de fon immutabilité; car ils remarquoient que ce quarré étoit unique & immuable par fa nature, le produit de l'unité par elle-même étant toujours l'unité même. Le quarré de la racine 2 étoit le fymbole de la matiere imparfaite, tant à caufe des quatre éléments, que de l'impoffibilité d'arranger ce quarré magiquement, ainfi qu'on le verra plus bas.

Le quarré de neuf cafes étoit attribué ou confacré à Saturne; celui de feize, à Jupiter; on avoit dédié à Mars celui de vingt-cinq; au Soleil celui de trente-fix; à Vénus, celui de quarante-neuf; à Mercure celui de foixante-quatre; & enfin à la Lune, celui de quatre-vingt-un, ou de neuf de côté.

Il falloit fans doute avoir l'efprit bien enclin aux vifions, pour trouver aucune relation entre les planetes & ces difpofitions de nombres; mais tel étoit le ton de la philofophie myftérieufe des Jambliques, des Porphires, & de leurs difciples. Les mathématiciens modernes, en s'amufant de ces arrangements, qui exigent un efprit de combinaifon affez étendu, ne leur donnent que l'importance qu'ils méritent.

On divife les quarrés magiques en pairs & impairs. Les premiers font ceux dont la racine eft un nombre pair, comme 2, 4, 6, 8, &c: les autres font ceux qui ont une racine impaire, &, par une fuite néceffaire, un nombre impair de cafes ou cellules; tels font les quarrés de 3, 5, 7, 9, &c. La difpofition de ces derniers eft bien plus facile que celle des premiers; c'eft pourquoi nous commencerons par-là.

§. I.

Des quarrés magiques impairs.

Il y a plufieurs regles pour la conftruction de ces quarrés; mais de toutes la plus fimple & la plus commode, me paroît être celle que M. de la Loubere nous a rapportée d'après les Indiens de Surate, auprès defquels les quarrés magiques paroiffent n'avoir pas eu moins de crédit que parmi les rêveurs anciens dont nous avons parlé plus haut.

Le quarré étant impair, par exemple celui de la racine 5, qu'il eſt queſtion de remplir des vingt-cinq premiers nombres naturels, on commence à placer l'unité dans la caſe du milieu de la bande horizontale d'en haut; puis on va de gauche à droite en montant; &, comme on ſort du quarré, on tranſporte le 2 à la plus baſſe caſe de la bande verticale où il ſe trouveroit: on continue en montant de gauche à droite; & le 4 ſortant du quarré, on le tranſporte à la cellule la plus éloignée de la bande horizontale où il ſe trouveroit: on inſcrit 5 dans la cellule ſuivante, en montant de gauche à droite; &, comme la caſe ſuivante, où tomberoit le 6, ſe trouve déja remplie par 1, on place le 6 immédiatement au deſſous de 5: on va de-là en montant, ſuivant la regle générale, & on inſcrit les nombres 7 & 8 dans les caſes où on les voit; puis, en vertu de la premiere regle de tranſpoſition, 9 au bas de la derniere bande verticale; enſuite 10, en vertu de la deuxieme, à la caſe la plus à gauche de la deuxieme bande horizontale; enſuite 11 au deſſous, par la troiſieme regle: après quoi l'on continue à remplir la diagonale des nombres 11, 12, 13, 14, 15; &, comme il n'y a plus moyen de monter, & qu'on ſortiroit du quarré dans tous les ſens, on met le nombre ſuivant, 16, au deſſous de 15: continuant enfin, ſelon le même procédé, on remplit ſans nouvelle difficulté le reſtant des caſes du quarré, comme on le voit plus haut.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Voici encore les quarrés de 3 & de 7, remplis ſuivant cette méthode. Ces exemples pourront ſervir à exercer ceux de nos lecteurs à qui ce genre d'amuſement plaira. Voici maintenant quelques remarques générales ſur les propriétés du quarré arrangé ſuivant ce principe.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	45	3	12
22	31	40	49	2	11	20

1° Suivant cette diſpoſition, la plus réguliere de toutes, le nombre moyen de la progreſſion occupe le centre, comme 5 dans le quarré de neuf caſes, 13 dans celui de vingt-cinq, 25 dans celui de quarante-neuf ; mais cela n'eſt pas néceſſaire dans toutes les diſpoſitions magiques.

2° Dans chacune des diagonales, les nombres qui rempliſſent les caſes également éloignées du centre, forment le double de celle du centre; ainſi $30+20=47+3=28+22=24+26$, &c. font toujours le double du nombre central 25.

3° Il en eſt de même des caſes centralement oppoſées. J'appelle ainſi celles qui ſont ſemblablement ſituées à l'égard du centre, mais en ſens oppoſé, tant de côté que pour la hauteur: ainſi 31 & 19 ſont des caſes centralement oppoſées; il en eſt de même de 48 & 2, de 13 & 37, de 14 & 36, de 32 & 18. Or il arrive, ſuivant cette diſpoſition magique, que ces caſes ainſi oppoſées forment toujours le double du nombre central, ou 50, comme on le peut éprouver.

4° Il eſt aiſé de voir qu'il n'eſt pas néceſſaire que la progreſſion à arranger magiquement ſoit celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c : quelque progreſſion arithmétique que ce ſoit, 3, 6, 9, 12, &c. 4, 7, 10, 13, 16, &c. s'arrangera de la même maniere.

5° Il y a plus : il n'eſt pas néceſſaire que la progreſſion ſoit continue ; elle peut être diſcontinue, & voici la regle générale. Si les nombres de la progreſſion, rangés ſelon leur ordre naturel dans les caſes du quarré, préſentent dans tous les ſens, vertical, horizontal, une progreſſion arithmétique, ils ſont ſuſceptibles d'être rangés magiquement dans le même quarré, & par le même procédé. Soit priſe, par exemple, la ſuite de nombres 1, 2, 3, 4, 5; 7, 8, 9, 10, 11; 13, 14, 15, 16, 17; 19, 20, 21, 22, 23; 25, 26, 27, 28, 29 : comme, en les rangeant dans les caſes d'un quarré, elle préſente par-tout une progreſſion arithmétique, on peut la ranger magiquement ; & en effet, ſuivant la regle précédente, on formera avec elle le quarré magique ci-joint.

1	2	3	4	5
7	8	9	10	11
13	14	15	16	17
19	20	21	22	23
25	26	27	28	29

20	28	1	9	17
27	5	8	16	19
4	7	15	23	26
11	14	22	25	3
13	21	29	2	10

Pareillement, & par la même raiſon, la ſuite de nombres 1, 6, 11, 16, 21; 2, 7, 12, 17, 22; 3, 8, 13, 18, 23; 4, 9, 14, 19, 24; 5, 10, 15, 20, 25, ſe rangera, par le même procédé, magiquement, comme on le voit ci-à-côté; ce qui donne un quarré de 25 tout différent. On parlera ailleurs des variations du même quarré.

9	20	1	12	23
15	21	7	18	4
16	2	13	24	10
22	8	19	5	11
3	14	25	6	17

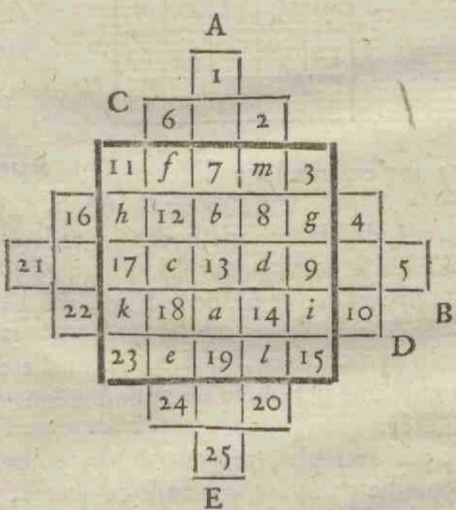
Il y a encore la regle de Moſcopule, auteur Grec moderne; & celle de M. Bachet de Méſiriac, qui, ne connoiſſant ni l'une ni l'autre, en a imaginé une. Nous croyons devoir auſſi les faire connoître.

Moſcopule place l'unité immédiatement au deſſous de la caſe centrale, puis inſcrit les nombres ſuivants, en deſcendant de gauche à droite; & quand un nombre ſort du quarré, il le tranſporte au plus haut de la bande verticale qui lui convient: de-là il continue en deſcendant obliquement de gauche à droite; & quand un nombre ſort à la droite, il le tranſporte dans la caſe la plus éloignée à gauche, d'où il continue ſuivant la premiere regle: s'il rencontre une caſe déja remplie, il porte ſon chiffre deux caſes au deſſous de celui derniérement inſcrit: arrivé au bout de la diagonale, il porte le nombre ſuivant le plus haut qu'il ſe peut dans la

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

même verticale. Enfin, quand un nombre qui devroit être porté deux cases plus bas que le dernier inscrit sort du quarré, il le porte tout au haut de la même bande. Cette description de sa méthode, jointe à l'exemple, suffit pour la bien entendre; mais elle est un peu plus compliquée que l'Indienne. Voici enfin la regle de Bachet.

Elevez sur chaque côté du quarré donné, des cases en échelons, comme on voit ci-dessous;



puis, commençant par la case la plus élevée, inscrivez tous les nombres de la progression en descendant diagonalement, comme on voit de 1 en 5, de 6 en 10, &c.

Cela fait, transposez dans la case *a*, la plus voisine & au dessous du centre, le nombre le plus élevé; transposez pareillement 25 en *b*, le plus près au dessus du centre; que 5 soit, par la même raiſon, tranſpoſé en *c* & 21 en *d*, puis 6 en *e* & 24 en *f*, 20 en *m* & 2 en *l*, &c : vous aurez enfin le quarré magique ci-après, dans lequel la ſomme de chaque bande, tant verticale, qu'horizontale & diagonale, fera 65.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Cette regle, quoique différente de celle de Moſcopule, donne abſolument le même réſultat.

Mais ces différentes méthodes le cedent à la ſuivante, qui a pour auteur M. Poignard, chanoine de Bruxelles, & M. de la Hire, qui l'a perfectionnée & amplifiée ; car les précédentes ſont tout-à-fait particulieres, au lieu que celle-ci va nous donner une multitude de combinaiſons preſque illimitée.

Soit, par exemple, un quarré de racine impaire, comme 5 : ayant conſtruit ce quarré, vous placerez dans le premier rang horizontal d'en haut les cinq premiers nombres de la progreſſion dans l'ordre que vous voudrez : prenons 1, 3, 5, 2, 4 ; choiſiſſez enſuite un nombre premier avec cette racine 5, & qui, diminué de

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

de l'unité, ne le mesure point non plus : nous supposerons 3 ; c'est pourquoi vous prendrez le troisieme chiffre de cette suite, d'où vous compterez, pour remplir la seconde bande horizontale, 5, 2, 4, 1, 3 ; puis vous recommencerez encore par le troisieme, après & y compris 5, c'est-à-dire par 4, ce qui donnera, pour la troisieme bande, 4, 1, 3, 5, 2 ; vous aurez en suivant le même procédé la suite des nombres 3, 5, 2, 4, 1, dont vous remplirez la quatrieme bande ; & ainsi en continuant & reprenant toujours du troisieme chiffre, y compris le précédent, jusqu'à ce que tout le quarré soit rempli comme l'on voit ici. Ce quarré sera un des composants du quarré cherché, & sera magique ; car la somme de chaque bande, soit horizontale, soit verticale, soit diagonale, est la même, puisque les cinq nombres de la progression sont dans chacune sans répétition.

Faites présentement un deuxieme quarré géométrique de 25 cases, dans la premiere bande duquel vous inscrirez les multiples de la racine 5, en commençant par zéro, sçavoir, 0, 5, 10, 15, 20, & dans l'ordre qu'il vous plaira, par exemple celui-ci; 5, 0, 15, 10, 20: vous finirez de remplir le quarré suivant le même principe que ci-dessus, en ayant néanmoins attention de ne pas prendre le même quantieme pour recommencer continuellement.

5	0	15	10	20
10	20	5	0	15
0	15	10	20	5
20	5	0	15	10
15	10	20	5	0

On a pris, par exemple, pour le premier quarré, le troisieme chiffre ; il faudra prendre ici le quatrieme, & l'on aura le quarré des multiples formé comme on le voit ici. C'est le second composant du quarré magique cherché, & il est lui-même magique, puisque la somme de chaque bande & de chaque diagonale est la même.

Maintenant, pour avoir le quarré magique cherché, il n'y a qu'à inscrire dans un troisieme quarré de 25 cellules, la somme des nombres qui se trouvent dans les cellules correspondantes des deux précédents, par exemple 5, +1 ou 6 dans la premiere à gauche & en haut du quarré cherché; 0+3 ou 3 dans la deuxieme, &c: vous aurez, par ce procédé, le quarré de 25 cases ci-joint, qui sera nécessairement magique.

6	3	20	12	24
15	22	9	1	18
4	16	13	25	7
23	10	2	19	11
17	14	21	8	5

On peut, par ce moyen, faire tomber tel nombre qu'on voudra dans telle case qu'on voudra, par exemple, 1 dans la case centrale: il n'y a qu'à remplir la bande du milieu par la suite des nombres, ensorte que 1 soit au milieu, comme l'on voit ici; & on continuera de remplir le quarré suivant le principe ci-dessus, en recommençant par la bande la plus haute, quand on aura rempli la plus basse.

2	1	3	4	5
3	4	5	2	1
5	2	1	3	4
1	3	4	5	2
4	5	2	1	3

Pour former le second quarré, on placera zéro au centre, comme on voit ci à côté, & on le remplira de la même maniere, & avec l'attention de ne pas prendre, pour recommencer les bandes, le même quantieme que pour le premier.

20	5	10	0	15
0	15	20	5	10
5	10	0	15	20
15	20	5	10	0
10	0	15	20	5

Enfin l'on additionnera, dans un troisieme quarré, les cases semblables, & l'on aura le quarré ci-joint, où 1 occupera nécessairement le centre.

22	6	13	4	20
3	19	25	7	11
10	12	1	18	24
16	23	9	15	2
24	5	17	21	8

Remarques.

I. Il est à propos de remarquer que, lorsque le nombre de la racine n'est pas premier, comme lorsqu'il est 9, 15, 21, &c. il est impossible de faire ensorte qu'il n'y ait aucun nombre répété, au moins dans l'une des diagonales; mais, dans ce cas, il faut s'arranger de maniere que le nombre répété dans cette diagonale soit le moyen de la progression, par exemple, 5 si la racine du quarré est 9, 8 si elle est 15; &, comme le quarré des multiples sera sujet au même accident, il faudra aussi faire ensorte, en le remplissant, que ce soit la diagonale opposée qui soit remplie du multiple moyen entre zéro & le plus grand, par exemple, 36 si la racine est 9, 105 si elle est 15.

II. On peut aussi faire la même chose dans les quarrés dont la racine eſt premiere. Nous formerons, par exemple, un quarré magique de ces deux quarrés,

1	2	5	4	3
2	5	4	3	1
5	4	3	1	2
4	3	1	2	5
3	1	2	5	4

10	0	5	15	20
20	10	0	5	15
15	20	10	0	5
5	15	20	10	0
0	5	15	20	10

dans le premier deſquels 3 eſt répété dans la diagonale de droite à gauche en deſcendant, & dans le ſecond deſquels 10 l'eſt dans la diagonale de gauche à droite en deſcendant. Cela n'empêche pas que le quarré provenant de leur addition ne ſoit magique.

11	2	10	19	23
22	15	4	8	16
20	24	13	1	7
9	18	21	12	5
3	6	17	25	14

§. II.

Des Quarrés magiques pairs

La conſtruction de ces quarrés n'eſt pas auſſi facile que celle des impairs ; ils ont même différents degrés de difficulté, ſuivant qu'ils ſont pairement ou impairement pairs : c'eſt pourquoi il faut en faire deux claſſes.

Les quarrés pairement pairs ſont ceux dont la racine partagée par la moitié eſt paire ; tels ſont les quarrés de 4, 8, 12, &c. Les impairement pairs ſont ceux dont la racine, partagée par la moitié, donne un nombre impair ; comme ceux de 6, 10, 14, &c.

Les anciens ne nous ont tranſmis aucune regle générale, mais ſeulement quelques exemples de quarrés pairs rangés magiquement, comme ceux de 16, de 36, de 64 caſes. Voici ce que les modernes qui s'y ſont exercés ont trouvé de mieux. Commençons par les quarrés pairement pairs.

On peut d'abord s'aſſurer facilement que l'on ne ſçauroit remplir magiquement le quarré de la racine 2 : le premier qu'on puiſſe ainſi ranger magiquement, eſt celui de 16 caſes. Il y a une regle générale & fort ſimple pour y parvenir.

Soit donc le quarré ABCD, qu'il faut remplir magiquement des 16 premiers nombres naturels : on remplira d'abord les diagonales ; &, pour cet effet, on commencera à compter les nombres naturels par ordre, 1, 2, 3, 4, &c. ſur les caſes de la premiere bande horizontale de gauche à droite ; puis on paſſera à la ſeconde bande, & lorſqu'on tombera ſur les caſes appartenantes aux diagonales, on y inſcrira les nombres comptés en tombant ſur elles : vous aurez d'abord par ce moyen la diſpoſition ci-contre.

A B

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

C D

Les diagonales ainſi remplies, afin de remplir les cafes qui ont refté vuides, il faut recommencer à compter les mêmes nombres, en partant de l'angle D, & de droite à gauche, fur les cafes de la bande inférieure CD, & enfuite fur celle qui la fuit en montant ; & quand vous rencontrerez des cafes vuides, vous les remplirez du nombre qui leur compete : vous aurez de cette maniere le quarré 16 rempli magiquement, comme on le voit ici, & la fomme de chaque bande & de chaque diagonale fera 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

R E M A R Q U E S.

I. Il en eft ici comme dans les quarrés impairs : toute progreffion de nombres qui, rangée par ordre dans le quarré géométrique, préfentera en tous les fens, horizontalement & verticalement, une progreffion arithmétique, fera fufceptible d'être rangée magiquement dans le même quarré.

II. Il y a plus ; il n'eft pas néceffaire que la proportion arithmétique dans le fens vertical foit continue ; elle peut être difcontinue : par exemple, foient les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, qui, rangés fuivant leur ordre naturel dans le quarré de 16 cafes, préfentent feulement dans le fens vertical les proportions arithmétiques 1, 5, 57, 61 ; 2, 6, 58, 62, &c. ils pourront être rangés magiquement dans le même quarré.

1	2	3	4
5	6	7	8
57	58	59	60
61	62	63	64

Et en effet le voici. La ſomme eſt par-tout 130.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

Nous venons enfin aux quarrés pairement pairs.

Regle pour les Quarrés pairement pairs.

Nous ſuppoſerons le quarré de 8 à remplir des 64 premiers nombres de la progreſſion naturelle.

Il faut d'abord écrire ces 64 nombres comme l'on voit dans les deux lignes inférieures des quatre périodes ci-deſſous.

I.	1	2	3	4	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8
	64	63	62	61	60	59	58	57
II.	4	1	2	3	3	2	1	4
	9	10	11	12	13	14	15	16
	56	55	54	53	52	51	50	49
III.	3	4	1	2	2	1	4	3
	17	18	19	20	21	22	23	24
	48	47	46	45	44	43	42	41
IV.	2	3	4	1	1	4	3	2
	25	26	27	28	29	30	31	32
	40	39	38	37	36	35	34	33

Ce qui fait 32 couples, dont chacun forme 65.

Après cela, formez cette progreſſion arithmétique, 1, 2, 3, &c. qui doit être continuée juſqu'au les cases qui ont resté vuides, il faut recommencer à compter les mêmes nombres, en partant de l'angle D, & de droite à gauche, sur les cases de la bande inférieure C D, & ensuite sur celle qui la suit en montant ; & quand vous rencontrerez des cases vuides, vous les remplirez du nombre qui leur compete : vous aurez de cette maniere le quarré 16 rempli magiquement, comme on le voit ici, & la somme de chaque bande & de chaque diagonale sera 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

REMARQUES.

I. Il en est ici comme dans les quarrés impairs : toute progression de nombres qui, rangée par ordre dans le quarré géométrique, présentera en tous les sens, horizontalement & verticalement, une progression arithmétique, sera susceptible d'être rangée magiquement dans le même quarré.

II. Il y a plus ; il n'est pas nécessaire que la proportion arithmétique dans le sens vertical soit continue ; elle peut être discontinue : par exemple, soient les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, qui, rangés suivant leur ordre naturel dans le quarré de 16 cases, présentent seulement dans le sens vertical les proportions arithmétiques 1, 5, 57, 61; 2, 6, 58, 62, &c. ils pourront être rangés magiquement dans le même quarré.

1	2	3	4
5	6	7	8
57	58	59	60
61	62	63	64

Si l'on a bien ſaiſi l'eſprit de cette méthode, on a dû voir que, par ſon moyen, la premiere & la derniere bandes ſont néceſſairement remplies des 16 nombres de la premiere période, & en telle ſorte que les caſes centralement oppoſées font toujours 65. Il en eſt de même des deuxieme & pénultieme bandes; elles ſont remplies des nombres de la deuxieme période, & de la même maniere. Il en eſt ainſi des troiſieme & ſixieme bandes; de la quatrieme & la cinquieme. Or il ſuit de-là que les diagonales doivent auſſi être juſtes.

Autre Regle pour les Quarrés pairement pairs.

Ayant donné, d'après M. de la Hire, pour les quarrés impairs, une regle très-générale, & propre à produire un grand nombre de variations, nous croyons devoir en faire autant pour les quarrés pairs, & d'autant plus qu'elle ſert également pour les quarrés magiques pairement pairs & pour les impairement pairs. La voici.

1	6	5	2	7	4	3	8
8	3	4	7	2	5	6	1
1	6	5	2	7	4	3	8
8	3	4	7	2	5	6	1
8	3	4	7	2	5	6	1
1	6	5	2	7	4	3	8
8	3	4	7	2	5	6	1
1	6	5	2	7	4	3	8

Soit le quarré de 8, par exemple, à remplir magiquement. Pour cet effet, il faut commencer par arranger dans la premiere bande horizontale d'un quarré de 8 de côté, les 8 premiers nombres de la progreſſion arithmétique; mais enſorte que ceux qui ſeront également éloignés du milieu faſſent la même ſomme, ſçavoir celle de la racine augmentée de l'unité, comme ici 9: la ſeconde bande ſera l'inverſe de la premiere, la troiſieme comme la premiere, la quatrieme comme la deuxieme; & ainſi de ſuite alternativement, juſqu'à la moitié du quarré: après quoi l'autre moitié ſe formera en renverſant ſimplement la premiere, comme l'on peut voir ici. Ce ſera le premier quarré primitif.

Il faut enſuite former le ſecond; ce qui ſe fera en le rempliſſant, ſuivant le même principe, des multiples de la racine, en commençant par zéro, ſçavoir, 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, & faiſant enſorte que les extrêmes faſſent toujours 56: mais au lieu d'arranger ces nombres dans le ſens horizontal, vous les arrangerez dans le ſens vertical, comme l'on voit dans l'exemple ci-deſſous.

48	8	48	8	8	48	8	48
16	40	16	40	40	16	40	16
32	24	32	24	24	32	24	32
0	56	0	56	56	0	56	0
56	0	56	0	0	56	0	56
24	32	24	32	32	24	32	24
40	16	40	16	16	40	16	40
8	48	8	48	48	8	48	8

Cela fait, ajoutez les cases semblables de vos deux quarrés, vous aurez votre quarré de 8 construit comme on le voit ici.

49	14	53	10	15	52	11	56
24	43	20	47	42	21	46	17
33	30	37	26	31	36	27	40
8	59	4	63	58	5	62	1
64	3	60	7	2	61	6	57
25	38	29	34	39	28	35	32
48	19	44	23	12	45	22	41
9	54	13	50	55	12	51	16

Nous nous bornons à cet exemple des quarrés pairement pairs, & nous allons donner, comme la plus simple, la méthode qui s'en déduit pour la construction des quarrés impairement pairs.

Méthode pour les Quarrés impaìrement pairs.

Nous allons prendre pour exemple le quarré de la racine 6. Nous commencerons à le remplir, suivant le procédé enseigné plus haut, des six premiers nombres de la progression arithmétique, 1, 2, 3, &c ; ce qui donnera le premier quarré primitif ci-joint.

5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2
5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2

On formera le second, en le rempliſſant, dans le ſens vertical & ſuivant le même principe, des multiples de la racine, en commençant par zéro, ſçavoir : 0, 6, 12, 18, 24, 30.

24	6	24	24	6	24
0	30	0	0	30	0
12	18	12	12	18	12
18	12	18	18	12	18
30	0	30	30	0	30
6	24	6	6	24	6

On ajoutera enſuite les caſes ſemblables des deux quarrés ; ce qui en donnera un troiſieme, qui n'aura plus beſoin que de quelques corrections pour être magique. Ce troiſieme quarré eſt celui ci-deſſous.

A

	29	12	27	28	7	26	
	2	31	4	3	36	5	
	17	24	15	16	19	14	
C	23	18	21	22	13	20	D
	32	1	34	33	6	35	
	11	30	9	10	25	8	

B

Pour rendre ce dernier quarré magique, il faut, en laiſſant les angles fixes, tranſpoſer les autres nombres de la bande horizontale ſupérieure, & de la premiere verticale à gauche. Cette tranſpoſition conſiſte à renverſer tout le reſtant de la bande, en écrivant 7, 28, 27, 12, au lieu de 12, 27, &c ; & dans la verticale, 32, 23, 17 & 2, de haut en bas, au lieu de 2, 17, &c.

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	25	10	27	30	8

Vous échangerez aussi les nombres des deux cases du milieu de la deuxieme horizontale d'en haut & de la plus basse, de la deuxieme verticale à gauche & de la derniere à droite: enfin vous échangerez les nombres des cases A & B, ainsi que ceux de C & D; vous aurez votre quarré corrigé, & disposé magiquement.

§. III.

Des Quarrés magiques par enceintes.

Voici une nouvelle difficulté que les arithméticiens modernes ont ajoutée à la question des quarrés magiques. Il s'agit non-seulement de ranger une progression de nombres magiquement dans un quarré, mais on demande encore que ce quarré, en le dépouillant tout à l'entour d'une bande, ou de deux, ou de trois, &c. reste magique; ou au contraire, ce qui est l'inverse, un quarré étant magique, il faut lui ajouter une enceinte d'une ou plusieurs bandes, telles qu'il soit encore disposé magiquement.

Soit, pour donner un exemple de cette construction, le quarré de la racine 6 à disposer magiquement, en le remplissant des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 36. Le premier quarré magique pair possible étant celui de 4 de côté, nous commencerons par le disposer magiquement, en le remplissant des termes moyens de la progression, au nombre de 16, en réservant les 10 premiers &

les 10 derniers pour l'enceinte. Nous prendrons donc pour le quarré intérieur, les nombres 11, 12, &c. juſqu'à 26 incluſivement, & nous leur donnerons une diſpoſition magique quelconque : il nous reſtera les nombres 1, 2, &c. juſqu'à 10, & 27 juſqu'à 36, pour l'enceinte.

Pour diſpoſer ces nombres dans l'enceinte, on peut d'abord placer aux quatre angles les nombres 1, 6, 31, 36, enſorte que diagonalement ils faſſent 37. Chaque bande devant faire 111, il faudra donc dans la premiere bande quatre nombres, tels qu'ils faſſent 104; &, comme leurs compléments à 37 doivent ſe trouver dans la plus baſſe, où il y a déja 67, il faudra qu'ils faſſent enſemble 44 : or il y a pluſieurs combinaiſons de ces nombres quatre à quatre, qui peuvent faire 104, & leurs compléments 44; mais il faut qu'en même temps quatre des reſtants puiſſent faire 79, pour remplir la premiere bande verticale, tandis que leurs compléments feront 69 pour compléter la derniere. Cette double condition limite la premiere combinaiſon à 35, 34, 30, 5, qu'on placera dans la premiere bande ſelon l'ordre qu'on voudra, pourvu qu'on mette au deſſous de chacun, dans la derniere bande, leurs compléments; & les quatre nombres qui doivent remplir la premiere bande verticale feront 33, 28, 10, 8, qu'on y pourra arranger comme l'on voudra, pourvu qu'on oppoſe à chacun ſon complé-

1	35	34	5	30	6
33	11	25	24	14	4
28	22	16	17	19	9
8	18	20	21	15	29
10	23	13	12	26	27
31	2	3	32	7	36

ment dans la case correspondante de l'autre côté.

Il n'y a pas une nécessité absolue de placer 1, 6, 31, 36, dans les quatre angles du quarré : supposons qu'on y eût dans le même ordre 2, 7, 30, 35, il faudroit alors que les quatre premiers nombres fissent 102 & leurs compléments 46, tandis que les quatre derniers feroient encore 79 & leurs compléments 69 : or on trouve que les quatre premiers nombres sont 36, 31, 27, 8, & les seconds 34, 32, 9, 4. Les premiers étant rangés comme on voudra dans les quatre cases vuides de la premiere bande, & leurs compléments au dessous, on rangera les seconds dans les cases de la premiere bande verticale, & leurs compléments chacun à l'extrémité de la même bande horizontale, & l'on aura le nouveau quarré à enceintes qu'on voit ici.

2	36	31	27	8	7
34	11	25	24	14	3
32	22	16	17	19	5
9	18	20	21	15	28
4	23	13	12	26	33
30	1	6	10	29	35

Si l'on vouloit former un quarré à enceinte de la racine 8, il faudroit réserver pour le quarré intérieur de 36 cases, les 36 nombres moyens de la progression, & l'on en formeroit, si l'on vouloit, un quarré à enceinte, à l'entour du quarré magique de 16 cases : ensuite, avec les 28 nombres restants, on formeroit l'enceinte du quarré de 36 cases, &c.

Ainsi l'on voit comment on pourroit former un quarré magique qui, dépouillé successivement de une, deux, trois enceintes, restât toujours magique.

§. IV.

D'une autre espece de Quarré magique à compartiments.

Il eſt queſtion ici d'un autre artifice dont la plupart des quarrés magiques ſont ſuſceptibles; c'eſt d'être non-ſeulement magiques dans leur totalité, mais encore d'être tels que, les diviſant dans les quarrés dans leſquels ils ſont réſolubles, ces parties du premier quarré ſoient elles-mêmes magiques. Le quarré de 8 de côté eſt, par exemple, formé de quatre quarrés, ayant 4 pour racine: on peut demander que non-ſeulement le quarré 64 ſoit diſpoſé magiquement, mais encore chacun de ceux de 16; & même que ces derniers, arrangés comme l'on voudra, compoſent toujours un quarré magique.

La choſe eſt facile, & même c'eſt le moyen le plus ſimple de tous, de conſtruire les quarrés pairement pairs, comme on va le voir.

Pour conſtruire de cette maniere le quarré 64, prenez les 8 premiers nombres de la progreſſion naturelle de 1 à 64, & les 8 derniers; arrangez-les magiquement dans un quarré de 16 caſes; faites-en autant des 8 termes qui ſuivent les 8 premiers, joints aux 8 qui précedent les 8 derniers; vous aurez un ſecond quarré magique: faites-en un ſemblable avec les 8 ſuivants, joints à leurs correſpondants, & enfin avec les 16 moyens; il en réſultera quatre quarrés de 16 caſes, tous égaux en ſommes, ſoit dans les bandes, ſoit dans les diagonales; car on trouve par-tout 130. Il eſt donc évident que, rangeant ces quarrés à côté l'un de l'autre dans l'ordre quelconque qu'on voudra, le quarré

quarré qui en résultera ſera magique, & la ſomme dans tous les ſens ſera 260.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	2	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

Pour arranger ainſi le quarré de 9, diviſez la progreſſion de 1 à 81 incluſivement, en neuf autres, comme 1, 10, 19, ... 73; 2, 11, 20, ... 74; 3, 12, 21, ... 75; &c. & arrangez magiquement chacune de ces progreſſions par ordre dans un quarré de 9 caſes: celui qui recevra la premiere ſera intitulé I, celui de la ſeconde II, &c. Or vous obſerverez que dans ces différents quarrés, les ſommes des bandes & celles des diagonales feront elles-mêmes en progreſſion arithmétique, ſçavoir: dans le quarré I elle ſera 111, dans le quarré II elle ſera 114; & ainſi de ſuite. Enfin rangez ces 9 quarrés magiquement, il eſt aiſé de voir que le total ſera encore magique: mais les quarrés partiaux ne pourront pas être tranſpoſés comme dans le précédent de 64.

Le quarré de 15 eſt réſoluble en 25 quarrés de 9 caſes. Si donc on arrange magiquement 25 quarrés de 9 caſes, en les rempliſſant des 25 progreſſions qu'on peut former ainſi, 1, 26, 51, ... 201 ; 2, 27, 52, ... 202; 3, 28, 53, ... 203; &c. ces quarrés auront ſucceſſivement & par ordre, pour les ſommes de leurs bandes & celles de leurs diagonales, 303, 306, 309, &c. juſqu'au dernier, qui aura 375 dans chacune de ſes bandes & de ſes diagonales. Ainſi, arrangeant magiquement ces 25 quarrés, en ſuppoſant le premier I, le deuxieme II, le troiſieme III, & le dernier XXV, on aura un quarré magique; &, autant qu'il y a de variations dont le quarré de 25 caſes eſt ſuſceptible, autant il y en aura que le quarré de 15 pourra recevoir étant magique à la fois, & les quarrés dont il eſt compoſé l'étant auſſi.

§. V.

Des variations des Quarrés magiques.

Le quarré de 3 de racine n'eſt ſuſceptible d'aucune variation : quelque méthode qu'on emploie, quelque arrangement qu'on donne aux nombres de la progreſſion depuis 1 juſqu'à 9, on voit toujours renaître le même quarré, ſi ce n'eſt qu'il eſt renverſé, ou tourné de gauche à droite; ce qui n'eſt pas une variation.

Mais il n'en eſt pas ainſi de celui de 4 de racine ou de 16 caſes; il eſt ſuſceptible au moins de 880 variations, que M. Frenicle a données dans ſon Traité des Quarrés magiques.

Le quarré de 5 eſt ſuſceptible au moins de 57600 combinaiſons différentes; car, ſuivant le procédé de M. de la Hire, les 5 premiers nombres peuvent être diſpoſés de 120 façons différentes dans la premiere bande du premier quarré primitif; & comme on peut enſuite les ranger dans les bandes inférieures, en recommençant par deux quantiemes différents, cela fait 240 variations au moins dans le premier quarré primitif, lesquelles, combinées avec les 240 du second, forment 57600 variations du quarré de 5. Mais il y en a sans doute encore bien plus ; car le quarré de 5 à enceinte ne se réduit pas à la méthode de M. de la Hire : or un seul quarré de 5 à enceinte, les angles restant fixes, ainsi que le quarré intérieur de 3, peut éprouver 36 variations. Ainsi, en changeant le quarré intérieur & les angles, combien d'autres variations doivent en naître ?

Un simple quarré de 6 à enceinte, une fois construit, peut être varié, les angles restant fixes, & le quarré intérieur étant composé des mêmes nombres, de 4055040 manieres ; car le quarré intérieur peut être varié & différemment transposé dans le centre de 7040 manieres : ensuite chacune des bandes horizontales, haute & basse, peut, les extrémités restant fixes, être variée de 24 manieres ; car il y a quatre paires de nombres susceptibles d'être changés de place, qui peuvent se combiner de 24 façons ; & il en est de même des quatre paires qui se trouvent dans les bandes verticales entre les angles. Ainsi le nombre des combinaisons est le produit de 7040 par 576, quarré de 24 ; ce qui donne 4055040 variations. Mais les angles peuvent varier, ainsi que les nombres qu'on prendra pour former le quarré intérieur ; d'où il suit que le nombre des variations totales du quarré de 6, sans cesser d'être à enceintes, est plusieurs millions de fois le nombre précédent.

Le quarré de 7 peut, par la seule méthode de M. de la Hire, être varié de 406425600 manieres.

Quelque nombreuſes que ſoient ces variations, elles ne doivent pas ſurprendre, car le nombre des diſpoſitions, magiques ou non magiques, de 49 nombres, par exemple, en forme un de 62 chiffres, dont le précédent n'eſt évidemment qu'une partie, pour ainſi dire, infiniment petite.

§. VI.

Des Quarrés magiques géométriques.

Nous avons dit, au commencement de ce chapitre, qu'on peut arranger dans les cellules d'un quarré des nombres en progreſſion géométrique, & de telle ſorte que le produit de ces nombres dans chaque bande, ſoit horizontale, ſoit verticale, ſoit diagonale, fût toujours le même.

Ce ſont préciſément les mêmes principes qu'il faut ſuivre pour cette conſtruction ; & il eſt aiſé de le démontrer par la propriété des logarithmes : ainſi nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous bornerons à un exemple : c'eſt celui des 9 premiers termes de la progreſſion géométrique double, 1, 2, 4, 8, &c. arrangés dans le quarré de 3 de côté. Le produit eſt évidemment le même dans tous les ſens, ſçavoir 4096.

128	1	32
4	16	64
8	256	2

CHAPITRE XIII.

De l'Arithmétique Politique.

DEPUIS que la politique s'est éclairée sur ce qui constitue la vraie force des Etats, on a fait beaucoup de recherches sur le nombre des hommes de chaque pays, pour reconnoître sa population. D'ailleurs, presque tous les gouvernements s'étant trouvé contraints à faire de forts emprunts, pour la plupart en rente viagere, on a été naturellement conduit à examiner suivant quelle progression s'éteignoit la race humaine, afin de proportionner les intérêts de ces emprunts à la probabilité de l'extinction de la rente. Ce sont ces calculs auxquels on a donné le nom d'*Arithmétique politique ;* & comme ils présentent plusieurs faits curieux, soit qu'on les considere du côté politique, soit qu'on les envisage du côté physique, nous avons cru devoir les insérer ici, pour amuser & instruire nos lecteurs.

§. I.

Du rapport des Mâles aux Femelles.

Beaucoup de gens sont dans la persuasion que le nombre des filles qui naissent excede le nombre des naissances de garçons : le contraire est démontré depuis bien long-temps. Il naît annuellement plus de garçons que de filles ; &, depuis 1631, qu'à une petite lacune près on a le nombre des naissances arrivées à Londres, avec distinction de ſexe, on n'a pas pu obſerver une ſeule fois que celui des filles égalât même celui des garcons. On trouve enfin, en prenant un terme moyen, par le calcul d'un grand nombre d'années, que le nombre des garçons naiſſants eſt à celui des filles, comme 18 à 17. Ce rapport eſt auſſi celui qui regne dans la généralité de la France; mais, quelle qu'en ſoit la raiſon, il ſemble être, à Paris, comme de 27 à 26.

Ce n'eſt pas ſeulement en Angleterre & en France qu'on obſerve cette eſpece de phénomene, mais c'eſt encore par-tout ailleurs. On peut s'en convaincre par la lecture des gazettes, qui nous communiquent au commencement de chaque année le nombre des naiſſances arrivées dans la plupart des capitales de l'Europe: on y verra le nombre des mâles naiſſants excéder toujours celui des filles; &, conſéquemment, on peut regarder cela comme une loi générale de la nature.

On doit même reconnoître ici une ſage vue de la Providence ou de la Divinité, qui a pourvu à la conſervation de la race humaine. Les hommes, par la vie active à laquelle la nature les a deſtinés, en leur donnant des forces & un courage dont elle a en général privé les femelles, ſont expoſés à beaucoup plus de dangers: les guerres, les longues navigations, les métiers dangereux ou nuiſibles à la ſanté, les débauches, moiſſonnent un nombre conſidérable d'hommes: d'où il réſulte que, ſi le nombre des garçons naiſſants n'excédoit pas celui des filles, la race des mâles diminueroit aſſez rapidement, & s'éteindroit bientôt.

§. II.

De la Mortalité du genre-humain ſelon les différents âges.

Il y a à cet égard une différence aſſez conſidérable, en apparence, entre les villes & les campagnes : mais cela vient de ce que les femmes des villes nourriſſent rarement ; & , conſéquemment, la plus grande partie des enfants étant nourris à la campagne, comme c'eſt dans les premieres années de la vie qu'eſt la plus grande mortalité, c'eſt là qu'elle ſe manifeſte le plus. Il faudroit donc pouvoir faire cette ſéparation, ou accoupler les lieux où l'on ne nourrit guere, avec ceux où l'on envoie les enfants à nourrir ; & c'eſt ce que M. Dupré de Saint-Maur a tâché de faire, en compulſant les regiſtres de trois paroiſſes de Paris & de douze de la campagne.

Suivant ces obſervations, ſur 23994 ſépultures, il s'en eſt trouvé 6454 d'enfants n'ayant pas encore un an ; & comme le nombre des naiſſances pendant le même temps balance aſſez bien le nombre des morts, il s'en enſuit que de 24000 enfants nés, il en arrive ſeulement

à la 2e année	17540,
3e	15162,
4e	14177,
5e	13477,
6e	12968,
7e	12562,
8e	12255,
9e	12015,

à la 10e année	11861,
15e	11405,
20e	10909,
25e	10259,
30e	9544,
35e	8770,
40e	7929,
45e	7008,
50e	6197,
55e	5375,
60e	4564,
65e	3450,
70e	2544,
75e	1507,
80e	807,
85e	291,
90e	103,
91e	71,
92e	63,
93e	47,
94e	40,
95e	33,
96e	23,
97e	18,
98e	16,
99e	8,
100e	6 ou 7.

Telle eſt donc la condition de l'eſpece humaine, que de 24000 enfants qui naiſſent, à peine une moitié atteint ſa neuvieme année; les deux tiers ſont au tombeau avant 40 ans ; il n'en reſte qu'un ſixieme après 62 ans, un dixieme après 70 ans, un centieme après 86 ans ; un millieme environ arrive à 96 ans, & ſix ou ſept à 100 ans.

Nous devons cependant obſerver qu'il y a à cet égard des différences entre les auteurs qui ont traité ces matieres, & nous devons en obſerver la cauſe. Suivant la table de M. de Parcieux, par exemple, la moitié des enfants nés ne périt pas avant 31 ans accomplis, tandis que, ſuivant celle de M. Dupré de Saint-Maur, elle eſt moiſſonnée avant le commencement de la neuvieme année. Cela vient de ce que la table de M. de Parcieux a été formée d'après des liſtes de rentiers, qui ſont toujours des ſujets choiſis. En effet, un pere ne s'aviſe pas de mettre en rente viagere ſur la tête d'un enfant mal conſtitué ou cacochyme. La loi de la mortalité eſt donc, dans ce cas, différente ; & ſi l'une eſt la loi générale & commune, l'autre eſt celle que les adminiſtrateurs qui créent des rentes viageres doivent conſulter avec attention, pour ne pas faire des emprunts trop onéreux.

§. III.

De la Vitalité de l'eſpece humaine ſelon les différents âges, ou de la Vie moyenne.

Un enfant vient de naître ; à quel âge peut-on parier au pair qu'il arrivera ? Ou bien, cet enfant eſt déja arrivé à un certain âge ; combien d'années eſt-il probable qu'il a encore à vivre ? Voilà deux queſtions dont la ſolution eſt non-ſeulement curieuſe, mais encore importante.

Nous accouplerons ici les deux tables, l'une de M. Dupré de Saint-Maur, l'autre de M. de Parcieux. Nous ferons ensuite quelques observations générales sur ce sujet.

	TEMPS A VIVRE.			
	M. D. de S. Maur.		M. de Parcieux.	
Age.	*Années.*	*Mois.*	*Années.*	*Mois.*
0	8			
1	33		41	9
2	38		42	8
3	40		43	6
4	41		44	2
5	41	6	44	5
6	42		44	3
7	42	3	44	
8	41	6	43	9
9	40	10	43	3
10	40	2	42	8
20	33	5	36	3
30	28		30	6
40	22	1	25	6
50	16	7	19	5
60	11	1	14	11
70	6	2	9	2
75	4	6	6	10
80	3	7	5	
85	3		3	4
90	2		2	2
95		5		6
96		4		5
97		3		4
98		2		3
99		1		2
100		$\frac{1}{2}$		1

Deux obſervations ſe préſentent à faire à la ſuite de cette double table. La premiere concerne la différence qu'il y a dans l'une & dans l'autre. On voit en effet celle de M. de Parcieux préſenter toujours, pour chaque âge, un temps plus conſidérable. Nous en avons dit plus haut la raiſon. Nous avons même ſupprimé de la table de M. de Parcieux la premiere année, comme préſentant une différence trop énorme ; ce qui vient, je penſe, de ce que 1° l'on ne s'aviſe de conſtituer une rente viagere ſur un enfant qui eſt dans ſa premiere année, qu'après s'être parfaitement aſſuré de la bonté de ſa conſtitution, & 2° que ce n'eſt pas au moment de la naiſſance d'un enfant, mais dans le courant, comme vers le milieu ou la fin de la premiere année, que l'on haſarde une pareille conſtitution ; car, les rentes viageres reſtant quelquefois pluſieurs mois & même juſqu'à une année à remplir, on a d'ordinaire le temps de ne faire le placement ſur une tête auſſi jeune, qu'après avoir eu la commodité de laiſſer écouler quelques mois, & s'être aſſuré de la conſtitution du ſujet. Ainſi je penſe que les 34 ans de vitalité, donnés par M. de Parcieux à un ſujet qui vient de naître, doivent être regardés comme ceux d'un enfant qui a 6 ou 9 mois & plus : or c'eſt dans les premiers mois de la premiere année que la vie d'un enfant eſt la plus frêle, & qu'il en meurt davantage.

La ſeconde obſervation eſt celle-ci, & elle eſt commune aux deux tables : c'eſt que la vitalité, qui eſt fort foible au moment de la naiſſance, va en augmentant paſſé ce terme, juſqu'à un autre où elle eſt la plus grande ; car il y a moins de 3 contre 1 à parier que l'enfant qui vient de naître atteindra la fin de sa premiere année (*a*) ; &, à parier au pair, il n'a que 8 ans à vivre : mais, le commencement de la seconde une fois atteint, il y a 6 contre 1 à parier qu'il arrivera à la troisieme ; & l'on peut parier au pair qu'il vivra 33 ans. Enfin l'on voit que, suivant la table de M. Dupré de Saint-Maur, c'est vers l'âge de 10 ans accomplis, & entre 10 & 15 ans, que la vie est plus assurée. A cette époque on peut parier au pair que le sujet vivra encore 43 ans ; & il y a 125 contre 1 à parier qu'il vivra encore un an, ou 25 contre 1 qu'il en vivra cinq. Passé ce terme, la probabilité de vivre encore un an diminue. Il n'y a, par exemple, à 20 ans, qu'un peu moins de 16 contre 1 à parier qu'on ne mourra pas dans les cinq années suivantes. Lorsqu'on a atteint sa soixantieme année, il n'y a plus que $3\frac{1}{5}$ à parier contre 1 qu'on atteindra le commencement de la soixante-cinquieme.

§. IV.

Du nombre d'hommes de chaque âge, sur une quantité donnée.

On peut déduire des observations précédentes,

(*a*) Suivant les principes qu'on a développés en traitant des probabilités, celle qu'il y a qu'un enfant qui vient de naître sera en vie au bout de l'année, est à celle qu'il sera mort, comme le nombre des enfants restants au bout de cette année à celui des enfants morts, c'est-à-dire comme 17540 à 6560 ; ce qui est un peu moins que le rapport de 3 à 1. Le calcul est semblable pour les autres cas. Prenez le nombre des sujets morts dans le courant de l'année, & divisez par ce nombre celui des sujets restants ; ce sera l'expression de ce qu'on peut parier contre 1, que le sujet qui a atteint cette année atteindra la suivante.

que ſur un million d'habitants d'un pays, il y en a

de 0 an à	1	38740,
1	5 accomplis	119460,
5	10	99230,
10	15	94530,
15	20	88675,
20	25	82380,
25	30	77650,
30	35	71665,
35	40	64205,
40	45	57230,
45	50	50605,
50	55	43940,
55	60	37110,
60	65	28690,
65	70	21305,
70	75	13195,
75	80	7065,
80	85	2880,
85	90	1025,
90	95	335,
95	100	82,
au deſſus de 100 ans		3 ou 4.

Ainſi, dans un pays peuplé d'un million d'habitants, il s'en trouve entre l'âge de 15 ans accomplis & de 60, environ 572500, dont un peu moins de la moitié ſont des hommes. C'eſt pourquoi cette quantité d'habitants pourroit fournir, à la rigueur, 250 mille hommes en état de porter les armes, en ayant même égard aux malades, perclus, &c. qu'on peut ſuppoſer ſur cette quantité d'hommes.

§. V.

Sur le rapport des naiſſances & des morts au nombre total des habitants d'un pays : Conſéquences de ces obſervations.

Comme il ſeroit bien difficile de faire l'énumération des habitants d'un pays, ſur-tout s'il falloit la réitérer autant de fois que des intérêts politiques peuvent exiger qu'on connoiſſe ſa population, on a tâché d'y ſuppléer, en déterminant le rapport des naiſſances ou des morts avec le nombre total des habitants de ce pays : car, comme dans tous les pays de l'Europe civiliſés on tient des regiſtres des naiſſances & des morts, on peut, en les compulſant, juger de la population, voir ſi elle augmente ou diminue, & examiner, dans le dernier cas, les cauſes qui produiſent cette diminution.

On déduit, par exemple, des tables de M. Halley, qui préſentent l'état de la population de Breſlaw vers l'année 1690, que ſur 34000 habitants il y arrivoit annuellement, calcul moyen, 1238 naiſſances ; ce qui donne le rapport des premiers aux ſecondes, de $27\frac{1}{2}$ à 1. Pour des villes telles que Breſlaw, où il n'y a pas un grand abord d'étrangers, on peut donc prendre pour regle, de multiplier les naiſſances par $27\frac{1}{2}$, & l'on aura le nombre des habitants.

Il a paru il y a quelques années, c'eſt-à-dire en 1766, un ouvrage très-intéreſſant en ce genre, intitulé *Recherches ſur la Population des Généralités d'Auvergne, de Lyon, de Rouen, & de quelques Provinces & Villes du Royaume, &c.* par M. Meſſance (*a*). Par des dénombrements faits

(*a*) Il eſt à propos d'obſerver que cet ouvrage doit tête par tête, des habitants de dix-sept petites villes, bourgs ou villages de la généralité d'Auvergne, comparés au nombre moyen des naissances dans les mêmes lieux, il montre que le nombre des naissances est à celui des habitants, comme 1 à 24 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{80}$: un semblable dénombrement de vingt-huit petites villes, bourgs ou villages de la généralité de Lyon, donne ce rapport de 1 à 23 $\frac{3}{4}$: enfin, par celui de cent cinq petites villes, bourgs & paroisses de la généralité de Rouen, il a trouvé que ce rapport étoit de 1 à 27 $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{20}$. Or, comme ces trois généralités comprennent un pays très-montagneux, comme l'Auvergne; un qui l'est médiocrement, comme la généralité de Lyon; un qui est presque tout plaines ou collines cultivées, comme la généralité de Rouen, on peut conclure que leur réunion représente assez bien l'état moyen du royaume: c'est pourquoi, fondant ensemble les rapports ci-dessus, ce qui donne celui de 1 à 25 $\frac{1}{2}$, ce sera, pour la totalité du royaume, (les grandes villes non comprises,) le rapport des naissances au nombre des habitants, ensorte que pour deux naissances on aura 51 habitants.

Mais comme, dans les villes un peu considérables, il y a plusieurs classes de citoyens qui passent leur vie dans le célibat, & qui ne contribuent que peu ou point à la population, il est évident que ce rapport entre les naissances & les habitants ef-

---

principalement son existence à M. de la Michodiere, successivement intendant d'Auvergne, de Lyon & de Rouen, actuellement prevôt des marchands de la ville de Paris. C'est ce magistrat qui a fait faire les dénombrements dont on parle, & a fourni par-là à M. Messance tous les éléments de son calcul.

fectifs doit y être plus considérable. M. Messance dit s'être assuré, par plusieurs comparaisons, que le rapport le plus approchant de la vérité, dans ce cas, est de 1 à 28, & que c'est celui qu'on doit prendre pour déduire, par le nombre des naissances, le nombre des habitants d'une ville du second ordre, comme Rouen, Lyon, &c ; ce qui quadre assez bien avec ce qu'a trouvé M. Halley pour la ville de Breslaw.

Enfin il est très-vraisemblable que, pour des villes du premier rang, ou des capitales d'Etats, comme Paris, Londres, Amsterdam, &c. où viennent fondre une foule d'étrangers attirés par les plaisirs ou par les affaires, où regne un luxe considérable qui multiplie les célibataires volontaires ; il est, dis-je, plus que vraisemblable qu'il faut hausser encore le rapport ci-dessus, & le porter au moins à 30 ou 31.

M. Kerseboom s'est efforcé d'établir, dans son livre intitulé *Essai de Calcul politique*, concernant la quantité des habitants des provinces de Hollande & de Westfriesland, &c. imprimé à La Haye en 1748, qu'il falloit multiplier par 35 le nombre des naissances en Hollande, pour avoir le nombre de ses habitants. Si cela est, on doit en conclure que les mariages sont moins féconds ou moins nombreux en Hollande qu'en France, ce qui pourroit bien être fondé sur des raisons physiques.

Si l'on applique ces calculs à la détermination de la population des grandes villes, on verra qu'on est, en général, dans l'erreur à leur égard ; car on dit vulgairement que Paris contient un million d'habitants : mais le nombre des naissances n'y excede pas, année commune, 19500 ; ce qui, multiplié par 30, donne 585000 habitants. Si on emploie pour multiplicateur le nombre 31, on aura 604500. C'eſt sûrement tout au plus ce qu'il y a d'habitants à Paris.

§. VI.

De quelques autres rapports entre les habitants d'un pays.

Nous allons préſenter ici, en abrégé, quelques autres conſidérations ſur la population. Le livre que nous avons cité dans le paragraphe précédent, nous ſervira encore ici de principal guide.

En confondant enſemble les trois généralités ci-deſſus, on a trouvé ;

1° Que le nombre des habitants d'un pays eſt à celui des familles, comme 1000 à $222\frac{1}{2}$; enſorte que 2000 habitants donnent communément 445 familles, & conſéquemment pour chacune, l'une portant l'autre, 4 têtes $\frac{1}{2}$; ou 9 perſonnes pour deux familles. A cet égard, celles de l'Auvergne ſont les plus nombreuſes, enſuite celles du Lyonnois ; & celles de la généralité de Rouen le ſont le moins. Par un calcul moyen, on trouve encore que, ſur vingt-cinq familles, il y en a une dans laquelle on compte ſix enfants, ou plus.

2° Le nombre des enfants mâles naiſſants excede, comme on l'a dit, celui des filles naiſſantes, & cet excès ſe ſoutient juſqu'à un certain âge : par exemple, le nombre des garçons de 14 ans & au deſſous, eſt auſſi plus grand que celui des filles du même âge, & dans le rapport de 30 à 29 ; toutefois le nombre total des femelles excede celui des mâles dans le rapport d'environ 18 à 19. On voit ici l'effet de la conſommation conſidérable d'hommes qu'occaſionnent la guerre, la navigation, les métiers de fatigue & la débauche.

3° On trouve qu'il se fait annuellement trois mariages sur 337 habitants, ensorte que 112 en produisent un.

4° Le rapport des hommes mariés ou veufs est au nombre des femmes mariées ou veuves, à très-peu près comme 125 à 140, & le nombre total de cette classe de la société est à la totalité des habitants, comme 265 à 631, ou 53 à 126.

5° Suivant MM. King & Kerseboom, le nombre des veufs est à celui des femmes veuves, à peu près comme 1 à 3; ensorte qu'il y a trois veuves pour un veuf. Cela se déduit au moins des dénombrements faits en Hollande & en Angleterre. Mais en est-il de même en France? C'est ce qu'il eût été à desirer que l'auteur cité ci-dessus eût recherché. Je crois, au reste, que ce rapport approche assez de la vérité; & l'on ne s'en étonnera pas, si l'on considere que la plupart des hommes se marient tard, en comparaison des filles.

6° En admettant le rapport ci-dessus entre les veufs & les veuves, il s'ensuivroit que, sur 631 habitants, il y a 118 mariages subsistants, 7 à 8 veufs, & 21 ou 22 veuves; le reste est composé d'enfants, de célibataires, de domestiques, de passagers.

7° On déduit encore de-là, que 1870 mariages subsistants donnent annuellement 357 enfants; car une ville de 10000 habitants contiendroit ce nombre de couples mariés, & donneroit 357 naissances annuelles. Ainsi cinq couples mariés, de tout âge, produisent annuellement une naissance.

8° Le nombre des domestiques est au total des habitants, à peu près comme 136 à 1535; ce qui eſt un peu plus que la onzieme partie, & moins que la dixieme.

Au reſte, le nombre des domeſtiques mâles eſt aſſez égal à celui des femelles, étant dans le rapport de 67 à 69; mais il eſt très-vraiſemblable que, dans les grandes villes, où regne beaucoup de luxe, la proportion doit être différente.

9° Le nombre des eccléſiaſtiques des deux ſexes, c'eſt-à-dire tant ſéculiers que réguliers, y comprenant auſſi les religieuſes, eſt à peu près, au nombre des habitants de ces trois généralités, dans le rapport de 1 à 112; ce qui eſt aſſez contraire à l'opinion commune, qui ſuppoſe ce rapport beaucoup plus fort.

10° En répartiſſant le terrain des trois généralités entre tous leurs habitants, on trouve que la lieue quarrée de 2400 toiſes en contiendroit 864: or la lieue quarrée de 2400 toiſes contient 6400 arpents de 18 pieds la perche: ainſi chaque homme, l'un portant l'autre, auroit 7 arpents $\frac{4}{10}$; & chaque famille, ou feu, étant compoſée, l'une portant l'autre, de 4 têtes $\frac{1}{2}$, il en reviendroit à chaque famille 33 arpents $\frac{1}{2}$. Mais il faut obſerver que la généralité de Rouen, conſidérée ſeule, eſt beaucoup plus peuplée; car on y trouve 1264 habitants par lieue quarrée; ce qui ne donne pour chaque tête que 5 arpents.

11° Les mêmes dénombrements ont fait reconnoître, depuis le commencement de ce ſiecle, un accroiſſement aſſez ſenſible dans la population. On trouve en effet, généralement, le nombre des naiſſances annuelles augmenté; & enfin, de la comparaiſon de celui qu'on obſerve actuellement avec celui qui avoit lieu au commencement du ſiecle, on eſt fondé à conclure que le nombre actuel des habitants eſt accru, depuis le commencement du ſiecle, dans le rapport de 1456 à 1350; ce qui fait moins d'un douzieme & plus d'un treizieme d'augmentation. On la doit ſans doute à une agriculture plus étendue, à un commerce plus actif, & à la ceſſation des guerres qui ont ſi long-temps déſolé l'intérieur de la France. La plaie faite au royaume par la révocation de l'Edit de Nantes, paroît fermée, & au-delà; mais, ſans cet événement, la France ſeroit probablement plus peuplée d'un ſixieme qu'elle ne l'étoit au commencement du ſiecle; car l'expatriation occaſionnée par cette révocation va probablement à un douzieme.

§. VII.

Quelques queſtions dépendantes des obſervations précédentes.

Voici maintenant quelques-unes des queſtions que les conſidérations ci-deſſus ſervent à réſoudre. On ne développera pas la ſolution de chacune; on ſe bornera à l'indiquer quelquefois, & on laiſſera en général au lecteur le plaiſir de s'exercer, d'après les principes expoſés ci-deſſus.

1. *L'âge d'un homme étant donné, par exemple 30 ans, quelle probabilité y a-t-il qu'il ſera en vie après un nombre d'années déterminé, par exemple 15?*

Cherchez dans la table du §. II. l'âge donné de la perſonne, ſçavoir 30 ans, & le nombre qui ſe trouve à côté, qui eſt 11405; prenez enſuite dans la même table le nombre qui ſe trouve à côté de 45, qui eſt 7008; faites enfin de ce dernier nombre le numérateur d'une fraction $\frac{7008}{11405}$, dont le premier ſera le dénominateur ; ce ſera le nombre qui exprimera la probabilité qu'il y a qu'une perſonne de 30 ans arrive à 45.

La démonſtration de cette regle ſe préſente d'elle-même à quiconque entend la théorie des probabilités.

2. *Un homme âgé de 20 ans emprunte 1000 livres, à condition de payer ſeulement capital & intérêts lorſqu'il aura 25 ans ; & dans le cas où il viendroit à mourir avant ce temps, la dette eſt perdue. Quelle ſomme doit-il s'engager à payer s'il atteint les 25 ans ?*

Il eſt évident que s'il y avoit aſſurance qu'il ne mourût pas avant 25 ans, la ſomme à rendre ſeroit le capital accru de ſes intérêts pendant 5 années : (nous ſuppoſons l'intérêt ſimple) ; ainſi ce ſeroient 1250 livres qu'il devroit s'engager à payer à ce terme. Mais cette ſomme doit être augmentée à raiſon du danger qu'il y a que le débiteur meure dans ces cinq ans, ou en raiſon inverſe de la probabilité qu'il y a qu'il ſoit en vie. Or cette probabilité eſt exprimée par la fraction $\frac{10259}{10909}$; c'eſt pourquoi il faut multiplier la ſomme ci-deſſus par cette fraction renverſée, ou par $\frac{10909}{10259}$; ce qui donne 1329 liv. 3 ſ. 1 denier, c'eſt-à-dire 79 liv. 3 ſ. 1 d. pour le riſque de perdre la dette, ce qui, je crois, ne ſeroit pas réputé uſuraire.

3. *Un Etat ou un particulier eſt dans le cas d'emprunter en rente viagere. Quel denier doit-il & peut-il donner pour les différents âges, l'intérêt légal étant, comme il eſt en France, à 5 pour 100 ?*

Le vulgaire, qui eſt accoutumé à voir faire des emprunts onéreux, ne doute nullement que le taux de 10 pour 100 ne ſoit dû bien avant l'âge de 50 ans, & qu'une pareille maniere d'emprunter ne ſoit avantageuſe pour la libération de l'Etat ; mais il eſt dans une énorme erreur : calcul fait d'après les données ci-deſſus, on ne peut allouer, ſuivant la table de M. de Parcieux, les 10 pour 100 avant l'âge de 56 ans ; & c'eſt celle qu'on doit ſuivre, attendu qu'on ne conſtitue guere de rentes viageres que ſur des ſujets de bonne ſanté. Suivant donc cette table, on ne peut donner à 20 ans que $6\frac{1}{5}$ pour 100 ; à 25 ans, $6\frac{1}{2}$; à 30 ans, $6\frac{4}{5}$; à 40 ans, $7\frac{2}{3}$; à 50 ans, $8\frac{4}{5}$; à 56 ans, 10 ; à 60 ans, $11\frac{1}{10}$; à 70 ans, $16\frac{2}{5}$; à 80 ans, $27\frac{2}{5}$; à 85 ans, $39\frac{1}{10}$.

C'eſt auſſi une erreur très-grande que de penſer qu'à cauſe du grand nombre de perſonnes qui placent des fonds dans ces emprunts viagers faits par un gouvernement, il eſt aſſez promptement libéré d'une partie de la rente, par la mort d'une partie des rentiers. La lenteur des accroiſſements des rentes en tontines montre aſſez la fauſſeté de cette idée : d'ailleurs, cette multitude de perſonnes eſt préciſément la cauſe pour laquelle l'extinction des rentiers ſe fait plus conformément à la loi de la probabilité expoſée ci-deſſus. Un heureux haſard peut libérer au bout de quelques années le débiteur d'une rente viagere qui vient d'être conſtituée ſur la tête d'un homme de 30 ans ; mais, ſi cette rente eſt répartie ſur 300 têtes différentes, d'environ cet âge, il eſt bien certain qu'il ne ſera pas libéré avant environ 65 ans, & qu'après 32 ou 33 il y aura encore la moitié des rentiers vivants. C'eſt ce que M. de Parcieux a fait voir clairement par le dépouillement des liſtes de tontines.

4. *L'intérêt légal étant à 5 pour 100, à quel denier peut-on conſtituer une rente ſur deux têtes*

dont les âges ſont donnés, & payable juſqu'à la mort du dernier vivant?

5. *Quel denier pourroit-on donner d'un capital conſtitué en rente ſur deux têtes d'âges donnés, & payable ſeulement tant que les deux rentiers ſeront en vie?*

6. *Paul jouit ſur les fonds publics d'une rente de 1000 liv. en viager; il a beſoin d'un capital, & offre de vendre ſa rente. Son âge eſt donné. On demande ce qu'on peut acheter cette rente?*

7. *Deux particuliers, Jean, âgé de 20 ans, & Pierre de 50, conviennent enſemble de ſe faire conſtituer ſur leurs têtes réunies, une rente de 1000 livres, à partager également entr'eux pendant leur vie, & qui reſtera toute entiere au dernier vivant. On demande ce que chacun doit contribuer pour ſa part dans le capital à fournir?*

8. *Que devroit y contribuer chacun, s'il étoit ſtipulé entr'eux que Pierre, le plus âgé, en jouira ſeul juſqu'à ſa mort?*

9. *On demande (l'intérêt légal étant à 5 pour 100) ce que vaut une rente viagere de 100 livres, conſtituée ſur trois têtes d'âges donnés, & payable juſqu'à l'extinction de la derniere?*

10. *On place ſur la tête d'un enfant de 3 ans, par exemple, un capital en rente viagere, ſous la condition de ne point toucher la rente, qui accroîtra le capital & ſera elle-même placée en rente viagere à la fin de chaque année, juſqu'à ce que cette rente égale le capital. A quel âge une pareille rente ſera-t-elle due, l'intérêt légal étant à 5 pour 100?*

Bien des gens ſont dans l'idée qu'on peut placer ſur la banque de Veniſe un capital à cette condition ; ſçavoir, qu'on ne retirera rien pendant dix ans, après quoi l'on recevra une rente égale au capital même. Mais il n'y a rien de ſi mal fondé, comme le montre M. de Parcieux dans ſon *Addition à l'Eſſai ſur les Probabilités de la durée de la Vie humaine*, publiée en 1760 ; car on y voit, par un calcul qui porte avec lui ſa démonſtration, qu'en plaçant, par exemple, une ſomme de 100 liv. ſur la tête d'un enfant de 3 ans, ce ne ſeroit qu'à 45 ou 46 ans qu'il pourroit commencer à jouir de 100 liv. de rente.

La table de M. de Parcieux préſente ſur ce ſujet des choſes aſſez curieuſes. Par exemple, dans la ſuppoſition ci-deſſus, ſi l'on n'arrêtoit l'accroiſſement de la rente qu'à 54 ans, on devroit jouir le reſte de ſes jours d'une rente de 205 livres ; ſi on ne l'arrêtoit qu'à 58 ans, on devroit avoir juſqu'à ſa mort 300 livres ; en l'arrêtant à 75 ans ſeulement, on devroit avoir enſuite 2900 livres par an ; enfin, ſi l'on continuoit à replacer les arrérages échus chaque année en rente viagere, juſqu'à la quatre-vingt-quatorzieme année, cette rente devroit être, pour le reſte de la vie, de 6134069 livres 19 ſous 2 deniers, ce qui eſt prodigieux.

Mais on peut & l'on doit s'étonner de ce que M. de Parcieux n'a commencé ſes calculs que par l'âge de 3 ans. Il eſt bien vrai que ce n'eſt guere à la naiſſance d'un enfant qu'on haſarde un capital pour lui créer une rente ; mais ſi l'établiſſement de Veniſe a eu lieu, il eſt évident que ce n'a pu être que dans la ſuppoſition que le placement eût été fait ſur la tête d'un enfant qui vient de naître, attendu la grande mortalité de la premiere année. Nous avons, par cette raiſon, examiné ce qui réſulteroit de cette ſuppoſition, & nous avons trouvé que, plaçant, ſous la condition énoncée ci-deſſus, une ſomme de 100 livres ſur la tête d'un enfant qui vient de naître, on devroit, d'après la table de vitalité de M. Dupré de Saint-Maur, lui conſtituer une rente viagere de 10 livres 15 ſous ; que cette ſomme, placée à 8 pour 100 à la fin de la premiere année, lui donneroit, en y ajoutant la premiere rente, à la fin de la deuxieme année, 11 livres 11 ſous 7 deniers. Ces 11 livres 11 ſous 7 deniers, placés à $6\frac{8}{10}$ pour 100, qui eſt le denier qu'on peut donner au commencement de la troiſieme année, feroient à la fin de la troiſieme, ou au commencement de la quatrieme, 12 livres 5 ſous 1 denier. En faiſant enfin un calcul ſemblable à celui de M. de Parcieux, on trouveroit que la rente ſe ſeroit accrue juſqu'à 100 livres vers l'âge de 36 ans ; ce qui eſt encore énormément éloigné de ce que l'on croit vulgairement.

Si l'on ſuppoſoit l'intérêt légal à 10 pour 100, tel qu'il étoit dans le ſeizieme ſiecle, on trouveroit que ce ſeroit ſeulement vers les 26 ans qu'on pourroit toucher une rente égale au capital mis ſur ſa tête au moment de la naiſſance.

Nous paſſons ſous ſilence nombre d'autres queſtions curieuſes ſur cette matiere. On peut conſulter l'ouvrage de M. de Moivre, intitulé *an Eſſay upon annuites on Lives*, ou *Eſſai ſur les Rentes viageres*, qui mériteroit d'être traduit en françois, & qui pourroit faire un ſupplément ou une ſuite à ſon livre intitulé *à Treatiſe of Chances*, dont il eſt ſurprenant que la langue françoiſe ne ſoit pas encore enrichie. On doit auſſi voir, ſur cette matiere, le traité de M. de Parcieux, intitulé *Eſſai ſur les Probabilités de la durée de la Vie humaine.* Les autres auteurs qui ont traité ces matieres mathématiquement, ſont, parmi les Anglois, MM. Halley, le chevalier Petty, le major Graunt, King, Davenant, Simpſon; & parmi les Hollandois, & avant tous, le célebre Jean de Witt, grand-penſionnaire de Hollande, M. Kerſeboom, M. Struyk, &c.

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PHYSIQUES.

SECONDE PARTIE,

CONTENANT *une suite de Problêmes & de Questions géométriques, les plus propres à amuser & exercer.*

PROBLÊME I.

A l'extrémité d'une ligne droite donnée, élever une perpendiculaire sans prolonger la ligne, & même, si l'on veut, sans changer d'ouverture de compas.

I. SOIT la ligne donnée AB, qu'il n'est pas permis de prolonger du côté A, & sur l'extrémité A de laquelle il est question d'élever une ligne perpendiculaire. Pl. 1, fig. 1.

De A vers B, prenez cinq parties égales, à volonté ; puis, du point A à l'ouverture de trois de ces parties, tracez un arc de cercle ; ensuite, de l'extrémité *b* de la quatrieme partie, tracez-en un autre avec une ouverture égale aux cinq parties : ces deux arcs se couperont nécessairement en un point tel que C ; duquel tirant une droite au point A, on aura CA perpendiculaire à AB.

Car le quarré de CA qui est 9, plus le quarré de A*b* qui est 16, sont ensemble égaux au quarré 25 de C*b* : le triangle CA*b* est donc rectangle en A.

On pourroit également prendre pour rayon de l'arc à tracer du point A, une ligne égale à cinq parties, pour la base A*b*, 12, & pour l'autre rayon *b*C, 13 ; car 5, 12, 13, forment un triangle rectangle. Enfin, tous les triangles rectangles en nombres, & il y en a une infinité, peuvent servir à la résolution du problême.

Pl. 1, fig. 2. II. Sur une partie quelconque AB de la ligne proposée, décrivez un triangle isoscele quelconque ACB, ensorte que les côtés AC, CB, soient égaux ; prolongez ensuite AC en D, ensorte que CD soit égale à CB : la ligne tirée de D en B sera perpendiculaire à AB ; ce dont la démonstration est si aisée, que nous la laissons chercher au lecteur qui ne l'appercevroit pas tout de suite.

PROBLÊME II.

Diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, sans tâtonnement.

Fig. 3. On propose, par exemple, de diviser la ligne AB en cinq parties égales. Faites-en la base d'un triangle équilatéral ABC ; puis, du point C sur le côté CB, prolongé s'il le faut, portez cinq parties éga-

les quelconques, que nous ſuppoſons ſe terminer en D : faites CE égale à CD ; enfin prenez, par exemple, DF égale à une de ces cinq parties de CD, & tirez CF, qui coupera AB en G : il eſt évident que BG ſera la cinquieme partie de AB.

Si D*f* étoit égale aux $\frac{3}{5}$ de CD, on auroit, en tirant C*f*, le point d'interſection *g* de C*f* avec AB, qui donneroit B*g* égale aux $\frac{3}{5}$ de AB.

PROBLÊME III.

Sans aucun inſtrument que quelques piquets & un bâton, exécuter ſur le terrain la plupart des opérations géométriques.

On ſçait que la plupart des opérations géométriques s'exécutent ſur le terrain au moyen du graphometre ; il ſemble même que cet inſtrument eſt d'une néceſſité indiſpenſable dans la géométrie pratique.

On peut néanmoins concevoir un géometre dans de telles circonſtances qu'il ſera abſolument dépourvu de tout inſtrument, & même privé du moyen de s'en procurer. Nous le ſuppoſons, par exemple, dans les forêts de l'Amérique, où il ne lui eſt poſſible de ſe procurer avec ſon couteau que quelques jalons, & un bâton pour lui ſervir de meſure : il ſe préſente diverſes opérations géométriques à faire, des grandeurs même inacceſſibles à meſurer : on demande comment il s'y prendra.

Nous ſuppoſons d'abord que l'on ſçait de quelle maniere on trace ſur le terrain une ligne droite, dont l'alignement eſt donné par deux points ; comment on la prolonge indéfiniment de côté & d'autre, &c. Cela étant, voici quelques-uns des problêmes de géométrie élémentaire, qu'il s'agit de résoudre sans employer d'autre ligne que la droite, & même en excluant l'usage du cordeau, avec lequel on pourroit tracer un arc de cercle.

1. *Par un point donné, mener une parallele à une ligne donnée.*

Pl. 1, fig. 4. Soit la ligne donnée AB, & C le point duquel doit être tracé la parallele; par ce point menez une ligne quelconque à un point B de AB, & partagez CB en deux également en D; à ce point placez un jalon; &, d'un point quelconque A de la ligne donnée, menez par le point D une ligne indéfinie ADE, sur laquelle on prendra DE égale à AD: la ligne tracée par les points C & E sera parallele à AB.

2. *A un point donné d'une ligne donnée, lui élever une perpendiculaire.*

Fig. 5. Prenez, sur la ligne donnée, les parties AC, CB égales; &, du point C, menez comme vous voudrez la ligne C*d*, sur laquelle vous prendrez la portion CD égale à CA; tirez la ligne DA*h*, sur laquelle faites AE égale à AC, & AF égale à AD: par les points EF tirez la ligne FEG, sur laquelle, si vous prenez EG égale à FE, vous aurez le point G, qui, avec le point A, déterminera la position de la perpendiculaire AG.

Car, dans le triangle CAD, les côtés AD, AC, étant respectivement égaux à AF & AE dans le triangle EAF, ces deux triangles sont égaux; &, dans le triangle DCA, les côtés CD, CA, étant égaux, on aura aussi dans l'autre les côtés EA, EF, égaux: donc l'angle EFA sera égal à EAF, & conséquemment à CAD. Mais, dans le triangle FGA, le côté FG est égal à AB, puisque FG est double de FE par la construction, & que FE ou AE est égal à AC qui est la moitié de AB : donc les triangles FAG, ADB, ſont égaux, puiſque les côtés FG, FA, ſont égaux aux côtés AB, AD, & que les angles compris ſont égaux : donc l'angle FAG ſera égal à ADB. Mais celui-ci eſt droit, parceque les lignes CB, CD, CA, étant égales, le point D eſt dans la circonférence d'un demi-cercle tracé ſur le diametre AB : donc l'angle FAG eſt droit, & GA eſt perpendiculaire ſur AB.

3. *D'un point donné A, mener ſur une ligne donnée une perpendiculaire.*

Prenez un point quelconque B dans la ligne indéfinie BC, & meſurez BA; faites enſuite BC égale à BA, & tirez AC, que vous meſurerez pareillement ; enfin faites cette proportion : comme BC eſt à la moitié de AC, ainſi AC eſt à une quatrieme proportionnelle, qui ſera CE : il n'y a qu'à prendre CE égale à cette quatrieme proportionnelle, & l'on aura le point E, duquel menant par A la ligne AE, elle ſera la perpendiculaire cherchée. Pl. 1, fig. 6.

4. *Meſurer une diſtance AB, acceſſible ſeulement par une de ſes extrémités, comme la largeur d'une riviere, d'un foſſé, &c.*

On commencera par planter un jalon en A; puis, ayant pris un point quelconque C, où l'on en plantera pareillement un, on en fixera un troiſieme en D, dans l'alignement des points B & C; on prolongera indéfiniment les lignes CA, DA, au-delà de A, & l'on fera les lignes AE, AF égales reſpectivement à AC, AD; enfin l'on plantera un jalon en G, de maniere qu'il ſoit à la fois en ligne droite avec A & B & avec F, E : on aura alors la diſtance AG égale à AB. Fig. 7.

Si l'on prévoyoit ne ſe pouvoir retirer aſſez dans l'alignement AB, l'on pourroit ne prendre sur AE, AF, que la moitié ou le tiers de AC, AD, par exemple A*e*, A*f*: alors, plantant en *g* un jalon qui fût à la fois dans les deux alignements BA & *ef*, on auroit A*g*, la moitié ou le tiers de AB.

5. Soit maintenant la distance AB inaccessible par ses deux extrémités. La solution du cas précé-
Pl. 1, dent donnera aisément celle de celui-ci; car, soit
fig. 8. planté un jalon en C, & ayant prolongé par une suite de jalons les alignements BC, AC, qu'on prenne, par le moyen ci-dessus, sur ces lignes, les parties CE, CF, respectivement égales à BC, CA, ou la moitié ou le tiers de ces mêmes lignes: il est facile de voir que la ligne qui joindra les points E, F, sera égale, ou bien la moitié ou le tiers de la ligne cherchée, & que, dans l'un & l'autre cas, elle lui sera parallele; ce qui résoud le problême de *tirer une parallele à une ligne inaccessible*.

Ces exemples suffisent pour montrer comment, avec un peu de connoissance de géométrie, on pourroit, sans l'aide d'aucun autre instrument que de ceux qu'on peut se procurer avec son couteau & au milieu d'un bois, exécuter une grande partie des opérations géométriques. On doit néanmoins convenir qu'on ne peut que par un cas très-extraordinaire se trouver dans des circonstances semblables; mais, quelqu'éloignée qu'elle soit, quand on est doué de l'esprit géométrique, on goûte une certaine satisfaction à voir comment on pourroit s'y prendre.

Une chose singuliere, c'est qu'il n'est peut-être pas possible de résoudre de cette maniere, c'est-à-dire sans employer un arc de cercle, le problême

très

très simple, & l'un des premiers de la géométrie élémentaire, sçavoir, de *tracer un triangle équilatéral*. Je l'ai du moins cherché en vain, m'étant amusé à voir jusqu'où l'on pourroit parvenir dans la géométrie, au moyen de simples lignes droites.

PROBLÊME IV.

Tracer un cercle ou un arc de cercle déterminé, sans en connoître le centre & sans compas.

CECI paroîtra d'abord, aux yeux de ceux à qui la géométrie est peu familiere, une sorte de paradoxe; mais la proposition où l'on démontre que, dans tout segment de cercle, les angles dont le sommet est appuyé sur la circonférence, & dont les côtés passent par les extrémités de la corde, sont égaux, cette proposition, dis-je, donne la solution du problême.

Soient donc les trois points du cercle ou de l'arc de cercle cherché, A, C, B; les lignes AC, CB, étant tirées, faites un angle égal à ACB, que vous couperez dans quelque matiere solide, & plantez en A & B deux arrêts ou pointes: alors, en faisant couler les côtés de l'angle déterminé entre ces arrêts, le sommet décrira la circonférence du cercle, ensorte que si cet angle C est garni d'une pointe ou d'un crayon, il tracera, en tournant entre les points A & B, l'arc cherché. Pl. 1, fig. 9.

Si l'on faisoit un autre angle pareil, qui fût le restant de l'angle ACB à deux droits, & qu'on le fit tourner en touchant toujours de ses côtés les points A, B, mais de maniere que son sommet fût du côté opposé à celui du point C, il décriroit l'autre segment de cercle, qui, avec l'arc ACB, complette le cercle entier.

Il pourroit arriver que l'on fût obligé de tracer par deux points donnés un arc de cercle déterminé, dont le centre eſt extrêmement éloigné, ou inacceſſible par des cauſes particulieres. Si l'on avoit, par exemple, à tracer ſur le terrain un cercle ou un arc de cercle dont le rayon fût de 2, 3 ou 4 cents toiſes, il eſt aiſé de voir qu'il
Pl. 1, ſeroit impraticable de le décrire au moyen d'un
fig. 10. cordeau: il faudroit alors opérer ainſi. Plantez des jalons en A & B, extrémités de la ligne que je ſuppoſe être la corde de l'arc cherché, dont on connoît l'amplitude ou l'angle qu'il ſoutend; cherchez enſuite, avec le graphometre ou la planchette, un point tel que *c*, d'où mirant en A & B, l'angle A*c*B ſoit égal à l'angle donné, & plantez-y un jalon; cherchez pareillement un autre point *d*, d'où mirant aux points A & B, on ait encore l'angle A*d*B égal au premier; que les points *e*, *f*, ſoient trouvés de la même maniere: il eſt évident que les points *c*, *d*, *e*, *f*, ſeront dans un arc de cercle capable de l'angle donné. Si vous cherchez enſuite de l'autre côté de AB, les points g, *h*, *i*, *k*, d'où mirant aux points A & B, l'angle AgB ou A*h*B ſoit le ſupplément du premier, les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, ſeront évidemment dans un cercle.

PROBLÊME V.

Trois points étant donnés, qui ne ſoient pas dans une même ligne droite, tracer un cercle qui paſſe par ces trois points.

Pl. 2, QUE ces trois points ſoient ceux qui ſont
fig. 12. marqués 1, 2, 3; de l'un d'eux, par exemple

2, comme centre, avec un rayon quelconque, soit décrit un cercle ; ensuite, d'un des deux autres points pris pour centre, par exemple 1, soient faites avec le même rayon deux intersections avec la circonférence du premier cercle, comme A & B, & soit tirée la ligne AB ; enfin, prenant le troisieme point 3 pour centre, soient faites avec le même rayon deux intersections avec la circonférence du premier cercle, lesquelles soient D, E, & soit menée DE: elle se coupera avec la premiere AB, dans un point C qui sera le centre du cercle cherché. Prenant donc ce point pour centre, & décrivant un cercle par l'un des points donnés, sa circonférence passera par les deux autres. Pl. 2, fig. 12.

Il est facile de voir que cette construction est au fond la même que la vulgaire, enseignée par Euclide & tous les auteurs élementaires; car il est évident que, par la construction qu'on vient de voir, on a les lignes 1A, 2A, 1B, 2B, égales entr'elles: conséquemment la ligne AB est perpendiculaire à celle qu'on doit concevoir joindre les points 1, 2, ou à la corde 1, 2, du cercle cherché: d'où il suit que le centre de ce cercle est dans la ligne AB: par la même raison ce centre est dans la ligne DE, & par conséquent il est dans leur intersection

Si les trois points donnés étoient dans une ligne droite, alors les lignes AB, DE, deviendroient paralleles ; & conséquemment il n'y auroit point d'intersection, ou elle seroit infiniment éloignée.

PROBLÊME VI.

Un Ingénieur, en levant une carte, a observé d'un certain point les trois angles sous lesquels il voit *les distances de trois autres objets dont il a déjà déterminé les positions : on demande la position de ce point, sans autre opération.*

LE problême, réduit à l'énoncé purement geométrique, se proposeroit ainsi : *Etant donné un triangle dont les côtés & les angles sont connus, déterminer le point duquel les trois lignes menées aux trois angles feront entr'elles des angles donnés.*

Il y a un assez grand nombre de cas dans ce problême; car, où les trois angles sous lesquels on apperçoit les distances des trois points donnés occupent toute l'étendue de l'horizon ou les quatre angles droits, ou bien seulement la moitié, ou moins de la moitié. Dans le premier cas, il est évident que le point cherché est situé au dedans du triangle donné; dans le second, il est situé sur un des côtés; & dans le troisieme, il est dehors. Mais, pour abréger, on se bornera au premier cas, indiqué par la Figure 11.

Pl. 2, fig. 11. Soit donc à déterminer entre les points A, B, C, dont les distances sont données, le point D, tel que l'angle ADB soit égal à 160 degrés, l'angle CDB égal à 130°, & CDA égal à 70°. Sur le côté AB, décrivez un arc de cercle capable d'un angle de 160°; & sur le côté BC, un autre capable d'un angle de 130°: leur intersection donnera le point cherché.

Car il est évident que ce point est sur la circonférence de l'arc décrit sur le côté BA, & capable de l'angle de 160°, puisque, de tous les points de cet arc & de nul autre, la distance AB est vue sous un angle de 120°. De même le point D doit se trouver sur l'arc décrit sur le côté AC, & capable de l'angle de 160° : conséquemment il faut qu'il ſoit ſur leur interſection, & nulle autre part.

REMARQUE.

ON peut, d'après cette conſtruction, établir une ſolution trigonométrique, pour déterminer en nombres la diſtance du point D aux points A, B, C; mais nous l'abandonnons à la ſagacité de notre lecteur.

PROBLÊME VII.

Deux lignes concourant en un point inacceſſible, ou qu'on ne peut même appercevoir, on propoſe de mener d'un point donné une ligne qui tende au même point.

SOIENT les lignes AO & BO, qui concourent en un point inconnu & inacceſſible O, & que le point E ſoit celui duquel il faut diriger au point O une ligne droite. Pl. 23, fig. 13.

Par le point E tirez la droite quelconque EC, qui coupe AO & BO dans les points D & C, & par un point F, pris à volonté, ſoit tirée ſa parallele FG; ſoit faite enſuite cette proportion: comme CD eſt à DE, ainſi FG à GH; enfin, par les points E, H, tirez la ligne indéfinie HE; ce ſera la ligne cherchée.

Ou bien, ſi c'eſt le point *e* qui eſt donné, ſoit fait, comme CD à C*e*, ainſi FG à FH, la ligne *eh* ſera celle qu'on demande.

La démonſtration en ſera facile pour tous ceux qui ſçavent que ſi dans un triangle on tire des paralleles à la baſe, toutes celles qui ſeront tirées du ſommet du triangle les diviſeront proportionnellement.

PROBLÊME VIII.

Même supposition faite que ci-dessus, on demande de retrancher des lignes BO, AO, deux portions égales.

Pl. 2, fig. 14. POUR cet effet, soit abaissée du point A sur BO la perpendiculaire AC, & sur le même point A soit élevée, perpendiculairement à AO, la ligne AD, rencontrant la ligne BO en D; divisez ensuite en deux également l'angle CAD par la ligne AE: cette ligne, en rencontrant BO en E, déterminera les lignes AO, EO, égales.

Il est facile de le démontrer, en faisant voir que, par cette construction l'angle OAE devient égal à OEA. En effet l'angle OAE est égal à l'angle OAC plus CAE, & l'angle OEA est égal à ODA ou OAC plus EAD ou EAC, son égal: donc l'angle OAE est égal à OEA, & le triangle OAE est isoscele: donc, &c.

PROBLÊME IX.

Même supposition encore que ci-dessus, diviser l'angle AOE en deux parties égales.

FAITES la même construction que dans le problême précédent; puis, à la ligne AE, tirez une parallele quelconque FG entre les deux lignes données; après cela divisez les lignes AE, FG, en deux également en H & I: la ligne HI divisera l'angle AOE en deux également; ce qui est trop facile à démontrer pour s'y arrêter.

Ces opérations sont, comme l'on voit, des opérations de géométrie pratique assez utiles dans certains cas; par exemple, s'il s'agiſſoit de percer des routes dans une forêt, ou bien ſi l'on vouloit qu'elles circulaſſent à l'entour d'un centre commun extrêmement éloigné, ou qu'elles aboutiſſent à ce centre.

PROBLÊME X.

Deux côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, & l'angle compris, trouver ſon aire.

MULTIPLIEZ un de ces côtés par la moitié de l'autre, & le produit par le ſinus de l'angle compris; ce nouveau produit ſera l'aire.

On démontre en effet aiſément que l'aire de tout triangle rectiligne eſt égale à la moitié du rectangle de deux de ſes côtés quelconques, multiplié par le ſinus de l'angle compris.

Car, ſoit le triangle ABC, dont l'angle A eſt aigu; qu'on conçoive le triangle AFC, dont l'angle FAC ſoit droit, & AF égale à AB: ſoit un quart de cercle décrit du centre A par F & B; & enfin la perpendiculaire BD ſur la baſe. Pl. 2, fig. 15.

Il eſt évident que les deux triangles FAC, BAC, ſont entr'eux comme AF à BD, c'eſt-à-dire dans la raiſon du ſinus total au ſinus de l'angle BAC, ou de l'unité au nombre qui exprime ce ſinus: donc, le triangle FAC étant égal au demi-rectangle de FA par AC, le ſecond ſera égal à ce demi-rectangle multiplié par le ſinus de l'angle BAC.

Cette propriété évite un circuit, qu'on eſt obligé de prendre pour trouver d'abord la grandeur de la perpendiculaire abaiſſée de l'extrémité d'un des côtés connus ſur l'autre, afin de multiplier enſuite ce dernier côté par cette perpendiculaire.

Soient, par exemple, les deux côtés AB, AC, respectivement de 24 & 63[t], & l'angle compris de 45°. Le produit de 63 par 12[t] est 756; le sinus de 45° est 0,70710: multipliez donc 756 par 0,70710 suivant la méthode des fractions décimales; le produit sera $534\frac{56}{100}$.

PROBLÊME XI.

Mesurer la surface d'un quadrilatere ou trapeze quelconque, sans la connoissance de ses côtés.

Pl. 2, fig. 16. LA solution de ce problême est une suite du précédent. Un trapeze ABCD étant donné, mesurez les diagonales AC, BD, ainsi que l'angle qu'elles font à leur intersection en E; multipliez-les ensemble, & la moitié du produit par le sinus de l'angle ci-dessus: ce produit sera l'aire; ce qui est incomparablement plus court, que si on le réduisoit en triangles pour mesurer chacun d'eux.

COROLLAIRES.

ON tire de-là un théorême assez curieux, & qui n'a, je crois, point encore été remarqué. C'est que, *Si deux quadrilateres ont des diagonales égales & faisant le même angle, quelle que soit d'ailleurs la maniere dont elles se coupent l'une l'autre, ils sont égaux entr'eux.*

Fig. 17, n° 1. Ainsi, le quadrilatere ABCD, *fig. 16*, est égal au parallélogramme *abcd*, *fig. 17*, n° 1, qui a les mêmes diagonales, & également inclinées l'une à l'autre.

Fig. 17, n° 2. 2° Ce même quadrilatere ABCD est égal au triangle BAC, *fig. 17* n° 2, formé par les deux lignes AC, AB, égales aux diagonales AC, DB, & inclinées dans le même angle.

3° Ce même quadrilatere est encore égal au triangle ABC, *fig. 17*, n° 3, si les lignes AC, DB, de ce triangle sont égales aux diagonales du quadrilatere, & également inclinées. Pl. 2, fig. 17, n° 3.

4° Enfin ce quadrilatere ABCD, *fig. 16*, est égal au quadrilatere *abcd*, *fig. 17*, n° 4, dont les diagonales même ne se coupent pas, si *ac*, *db*, sont égales à AC, DB; & l'angle *bec* égal à l'angle BEC. Fig. 17, n° 4.

PROBLÊME XII.

Deux cercles qui ne sont pas entiérement compris l'un dans l'autre, étant donnés, trouver le point d'où tirant une tangente à l'un, elle soit aussi tangente à l'autre.

PAR les deux centres A & B des deux cercles, menez la droite indéfinie ABI; puis, du centre A, un rayon quelconque AC, & par le centre B le rayon BD, parallele au premier & dans le même sens. Les points C & D étant joints par la ligne CD, elle rencontrera AB dans un point I qui sera le point cherché; c'est-à-dire que si du point I on tire une tangente IE à l'un des cercles, elle sera tangente à l'autre. Pl. 3, fig. 18, n° 1.

Le point I, *fig. 18*, n° 2, pourroit se trouver entre les deux cercles, lorsqu'ils ne se coupent point l'un l'autre. Pour le trouver, il n'y a qu'à tirer le rayon BD parallele à AC, en sens contraire à celui de la *fig. 18*, n° 1: l'intersection de AB avec BD donnera un point I, qui jouira de la même propriété. Fig. 18, n° 2.

REMARQUE.

NOUS ne pouvons nous empêcher d'obſerver ici que ſi l'on tire du point I, à travers les deux
Pl. 3, fig. 18, nº 1. cercles, une ſécante quelconque, comme IDH ou I*dh*, le rectangle de ID par IH, ou I*d* par I*h*, ſera toujours le même, ſçavoir, égal à celui des deux tangentes IE, IF. Pareillement le rectangle de IC par IG, ou I*g* par I*c*, ſera égal au rectangle des mêmes tangentes: ce qui eſt une extenſion très-remarquable de la propriété ſi connue du cercle, par laquelle le rectangle des deux ſegments ID, IG, eſt égal au quarré de la tangente IE.

PROBLÊME XIII.

Un pere de famille laiſſe en mourant, à deux enfants, un champ triangulaire, & ordonne qu'il leur ſera partagé également. Il y a un puits dans ce champ, qui ſert à l'arroſer; il faut conſéquemment que la ligne de diviſion paſſe par ſon centre, afin qu'il ſoit commun aux deux héritiers. On demande la maniere de mener par ce point la ligne qui partage ce champ en deux également.

Pl. 3, fig. 19. *SOLUTION.* SOIT le triangle propoſé CAB, & E le point donné. Tirez du point E les lignes ED, ER, paralleles à la baſe AC & au côté CB reſpectivement, juſqu'à leur rencontre en R & D; que la baſe CA ſoit diviſée en deux également en M; &, ayant du point D tiré la ligne DM, que BN lui ſoit menée parallélement, & la ligne CN diviſée également en I; ſur IR ſoit décrit le demi-cercle IKR, dans lequel appliquez RK=RC, & tirez IK, à laquelle vous ferez IF égale: ce point F & le point E détermineront la ligne FEG.

REMARQUE.

IL eſt évident qu'il faut que CI ſoit au moins double de CR ; car, autrement, CR ne pourroit être adaptée dans le demi-cercle décrit ſur RI : ce qui rendroit dans ce cas le problême impoſſible.

En nombres. Soit BA $=48$ toiſes, BC $=42$, CA $=30$, CD $=18$, & DE ou CR $=6$; conſéquemment CM ſera $=15$. Or CD : CM : : CB : CN, c'eſt-à-dire que $18:15::42:35$; d'où il ſuit que CN $=35$ & CI $=17\frac{1}{2}$: conſéquemment CR étant égale à 6, on aura IR $=11\frac{1}{2}$. Or le triangle IKR étant rectangle, on aura $IK=\sqrt{\overline{IR}^2-\overline{RK}^2}=\sqrt{132\frac{1}{4}-36}=\sqrt{96\frac{1}{4}}$, ou $9^t\,\frac{81}{100}$: ce qui donne CF de $27^t\,\frac{31}{100}$.

La démonſtration de cette conſtruction eſt trop prolixe pour trouver place ici : il y a même une multitude de cas qu'il ſeroit trop long de développer. En voici ſeulement un des plus ſimples ; ſçavoir, celui où le point E eſt ſur un des côtés.

La conſtruction eſt dans ce cas très-ſimple ; car, ayant diviſé AC en deux également en M, & tiré EM, puis ſa parallele BN, ſi le point N tombe au dedans du triangle, en tirant la ligne EN le problême ſera réſolu : mais ſi le point N tombe au dehors, il faudra tirer la ligne AE, & enſuite par le point N ſa parallele NO ; enfin par le point O la ligne OE : cette ligne réſoudra le problême. Pl. 3, fig. 20.

Car, à cauſe des paralleles EM, BN, le triangle MBE $=$ MNE ; donc, ajoutant à chacun le triangle CME, on aura les triangles CBM, CEN égaux. De plus, à cauſe des paralleles EA & NO, on a les triangles ANE, AOE égaux : conséquemment, ôtant de part & d'autre le triangle commun AGE, le triangle ANG=GOE : d'où il suit qu'ajoutant à l'espace CAGE ce triangle GOE, on aura l'espace CAOE=au triangle CEN, qu'on a déja vu être égal à la moitié de CBA.

Mais supposons que le même particulier eût trois enfants, & qu'il fallût leur diviser entr'eux également le même champ, en faisant partir toutes les lignes du point donné E, & en supposant déja une ligne de division EB.

Pl. 3, fig. 21. Soit pour cela divisée la base AC en trois également, & que les points de division soient D & G ; soit tirée la ligne ED & sa parallele BF, & du point E la ligne EF : si le point F n'est pas hors du triangle, le trapeze BEFAB sera un des tiers cherchés,

Mais si le point F tombe hors du triangle, on opérera comme on a vu plus haut, c'est-à-dire qu'on tirera à l'angle A la ligne EA, & du point F sa parallele FO, jusqu'au côté BA, que je suppose être rencontré en O : la ligne EO donnera le triangle BOE égal au tiers du triangle proposé.

On trouvera de la même maniere l'autre tiers du triangle proposé BEICB ; &, conséquemment, le restant de la figure en sera aussi le tiers ; & les trois lignes EO, EI, EB, partant du point E, diviseront le triangle proposé en trois parties égales.

On pourra, par la même méthode, le diviser en 4, 5, 6, &c. parties égales, par des lignes partant toutes d'un point donné : ce point pourroit même être pris au dehors du triangle.

PROBLÊME XIV.

Deux points étant donnés, & une ligne droite qui ne passe point entr'eux, trouver un cercle qui touche la ligne droite, & qui passe par les deux points donnés.

SOIT la ligne donnée AB, & les points donnés C & D. Joignez ces deux points, &, sur le milieu E de la ligne CD, élevez la perpendiculaire EF, qui rencontre en F la droite donnée, & abaissez la perpendiculaire EH sur cette même ligne; tirez FC, & décrivez du point E au rayon EH un cercle qui coupe FC prolongée en I; menez IE, & par le point C sa parallele CK: le point K sera le centre, & KC le rayon du cercle cherché. Pl. 3, fig. 22.

Car, si du point K on abaisse la perpendiculaire KL sur la ligne AB, elle sera égale à KC, qui l'est elle-même à KD. En effet, FE est à FK comme EH à KL, & comme EI à KC: donc EH est à KL comme EI à KC; &, conséquemment, EI étant égale à EH, KL le sera à KC: donc, &c.

Il est aisé de voir que si la ligne donnée passoit par un des points donnés, le centre du cercle cherché seroit dans l'intersection K de la perpendiculaire CK sur AB, & de la perpendiculaire EK sur la ligne CD, coupée en deux également en E. Fig. 23.

On pourroit résoudre, dans le premier cas, le problême d'une autre maniere; sçavoir, en prolongeant la ligne CD jusqu'à sa rencontre en M, avec AB; puis prenant une moyenne proportionnelle entre MC & MD, & lui faisant ML égale, Fig. 22.

enfin, par les points C, D, L, traçant un cercle, il résoudroit le problême. Mais cette solution seroit embarrassante lorsque le point M se trouveroit fort éloigné, au lieu que cela est indifférent dans la premiere.

PROBLÊME XV.

Deux lignes AB, CD, étant données, & un point E entre deux, tracer un cercle passant par ce point & touchant ces deux lignes.

Pl. 3, fig. 24. Si les deux lignes concourent ensemble, comme en F, tirez la ligne FH, qui partage en deux également l'angle BFD, ou, si elles sont paralleles, celle qui, comme FH, est également éloignée de fig. 25. l'une & de l'autre; ensuite tirez du point E la perpendiculaire EGI à FH; faites GI égale à GE: les points I & E seront tels que, traçant par ces deux points un cercle qui touche l'une des lignes données, il touchera aussi l'autre: ce qui réduit le problême au précédent.

THÉORÊME I.

Diverses démonstrations de la quarante-septieme du premier livre d'Euclide, par de simples transpositions de parties.

La beauté de cette proposition élémentaire, & la difficulté que trouvent souvent les commençants à en comprendre la démonstration, a engagé quelques géometres à en chercher de plus simples, parmi lesquelles il y en a de fort ingénieuses, & qui sont remarquables en ce que l'on voit, presque du premier coup d'œil, que le quarré de l'hypothénuſe eſt composé des mêmes parties que les quarrés des deux côtés, à cela près qu'elles ſont differémment arrangées. En voici quelques-unes.

1. Soit le triangle rectangle ABC, ſur les deux côtés duquel, AC, CB, ſoient conſtruits les quarrés CG, CD; ſur la baſe AB ſoient élevées les deux perpendiculaires AI, BH, la premiere terminée à la rencontre de GF prolongée, l'autre à celle de ED; & ſoit tirée la ligne IH. On démontre d'abord aiſément que AI & BH ſont égales à AB, enſorte que AIHB eſt le quarré de la baſe AB. Car il eſt aiſé de voir que le triangle BHD eſt égal & ſemblable au triangle BAC, ainſi que le triangle IGA au même triangle BAC; enſorte que BH & AI ſont chacunes égales à AB. Pl. 4, fig. 26.

On fait voir auſſi facilement, que le petit triangle KEH eſt égal à IFO; enfin, que le triangle IKL eſt égal à AOC.

Or les parties compoſantes des deux quarrés ſont le quadrilatere CBHK, le triangle BDH, le triangle KHE, le quadrilatere GAOF, & le triangle ACO, qu'on va voir être les mêmes que celles qui compoſent le quarré ABHI; car le quadrilatere CBHK eſt commun: le triangle BHD eſt égal à BCA, & peut être ſubſtitué & tranſpoſé à ſa place. Concevez pareillement le triangle ACO porté en IKL; il reſtera dans le quarré de l'hypothénuſe le vuide ILA, & nous aurons pour le remplir le quadrilatere FOAG, avec le triangle KEH: que ce triangle KEH ſoit porté en OFI, qui lui eſt égal, il completera le triangle IAG, qui eſt égal & ſemblable à IAL: d'où il ſuit que le quarré de l'hypothénuſe eſt compoſé des mêmes parties qui compoſent les deux quarrés des côtés.

enfin, par les points C, D, L, traçant un cercle, il résoudroit le problême. Mais cette solution seroit embarrassante lorsque le point M se trouveroit fort éloigné, au lieu que cela est indifférent dans la premiere.

PROBLÊME XV.

Deux lignes AB, CD, étant données, & un point E entre deux, tracer un cercle passant par ce point & touchant ces deux lignes.

Pl. 3, fig. 24. Si les deux lignes concourent ensemble, comme en F, tirez la ligne FH, qui partage en deux également l'angle BFD, ou, si elles sont paralleles, celle qui, comme FH, est également éloignée de
fig. 25. l'une & de l'autre ; ensuite tirez du point E la perpendiculaire EGI à FH ; faites GI égale à GE : les points I & E seront tels que, traçant par ces deux points un cercle qui touche l'une des lignes données, il touchera aussi l'autre : ce qui réduit le problême au précédent.

THÉORÊME I.

Diverses démonstrations de la quarante-septieme du premier livre d'Euclide, par de simples transpositions de parties.

La beauté de cette proposition élémentaire, & la difficulté que trouvent souvent les commençants à en comprendre la démonstration, a engagé quelques géometres à en chercher de plus simples, parmi lesquelles il y en a de fort ingénieuses, & qui sont remarquables en ce que l'on voit, presque du quarré moins les quatre triangles égaux ABH, BED, EGN, NFA, qui, pris ensemble, sont égaux aux deux rectangles ci-dessus, puisque chacun de ces triangles est la moitié d'un des rectangles. L'excès du quarré FD sur les deux quarrés des côtés du triangle rectangle ACB, est donc le même que sur le quarré de l'hypothénuse; donc ces quarrés & celui de l'hypothénuse sont égaux; car des quantités qu'une troisieme excede également, sont égales entr'elles.

Voici maintenant quelques propositions qui ne sont que des généralisations de la quarante-septieme d'Euclide, & d'où cette proposition fameuse se déduit comme un simple corollaire.

THÉORÊME II.

Si, sur chacun des côtés d'un triangle ABC, on décrit un quarré; que d'un des angles, comme B, on abaisse une perpendiculaire BD, sur le côté opposé AC; qu'on tire ensuite les lignes BE, BF, de maniere que les angles AEB, CFB, soient égaux à l'angle B; enfin, que des points F & E on mene les paralleles EI, FL, au côté CG du quarré, on aura le quarré sur AB égal au rectangle AI, & le quarré sur BC égal au rectangle CL: par conséquent la somme des quarrés sur AB & BC sera égale au quarré de la base, moins le rectangle EL si l'angle B est obtus, & plus ce même rectangle si l'angle B est aigu. Pl. 4, fig. 28. 29.

DÉMONST. LE triangle AEB est semblable au triangle ABC, puisque l'angle A est commun, & que l'angle AEB est égal à l'angle ABC: conséquemment on a cette proportion entre les côtés homologues; AC : AB : : AB : AE; d'où il suit que le rectangle de AC×AE, ou de AE×AH qui est le même, puisque AH=AC, est égal au quarré de AE.

On prouve de même que le quarré de BC est égal au rectangle CL.

Mais il est aisé de voir que si l'angle B est obtus, la ligne BE tombe entre les points A & D, & la ligne BF entre C & D; que c'est le contraire s'il est aigu, & que ces deux lignes se confondent avec la perpendiculaire BD, lorsque l'angle B est droit.

Donc, dans le premier cas, il est évident que la somme des quarrés des côtés est moindre que le quarré de la base, sçavoir de la quantité du rectangle EL;

Que, dans le second, ils le surpassent de la quantité du rectangle EL;

Enfin que, dans le cas du triangle rectangle en B, le rectangle EL devenant nul, la somme des quarrés des côtés est égale à celui de la base: ce qui est une généralisation très-ingénieuse du fameux théorême de Pythagore.

THÉORÊME III.

Pl. 4, fig. 30. *Soit un triangle quelconque ABC, & sur le côté AC soit décrit le parallélogramme quelconque CE, & sur le côté AD le parallélogramme aussi quelconque BF; que les côtés DE, KF, soient prolongés jusqu'à leur concours en H, duquel point soit tirée la ligne HAL, & prise LM égale à HA; qu'on finisse enfin le parallélogramme CO, sur la base BC & dans l'angle CLM: ce parallélogramme sera égal aux deux CE, BF.*

PROLONGEZ NC & OB jusqu'à leur rencontre en R & P, avec les côtés KF & DE des parallélogrammes décrits ſur les côtés, & tirez PR.

Cela fait, puiſque CR & HA ſont paralleles & compriſes entre mêmes paralleles, ſçavoir CA & DH, elles ſont égales : conſéquemment CR eſt égale à LM : de même on prouvera que BP eſt égale à LM : donc CR & BP ſont égales, & la figure CRPB eſt un parallélogramme égal à BN.

Maintenant il eſt évident que le parallélogramme RL, ſur la baſe RC, eſt égal au parallélogramme RCAH, comme étant ſur même baſe & entre mêmes paralleles : de même le parallélogramme ACDE = ACRH, comme étant ſur même baſe entre mêmes paralleles : donc le parallélogramme ACDE = RCLG.

On prouvera de même que le parallélogramme BKFA = PGLB : conſéquemment les deux parallélogrammes CE, BF, ſont égaux enſemble à BPRC, ou ſon égal CNOB.

COROLLAIRE.

Il ſera aiſé à tout lecteur un peu géometre, de voir que cette propoſition aſſez ingénieuſe n'eſt qu'une généraliſation de la fameuſe propoſition ſur les quarrés des deux côtés du triangle rectangle, comparés au quarré de l'hypothénuſe. En effet, ſuppoſons le triangle BAC rectangle en A, & que les deux parallélogrammes CE, BF, ſoient deux quarrés ; on trouvera bien aiſément que le troiſieme parallélogramme BN ſera auſſi un quarré, ſçavoir, celui de l'hypothénuſe : donc, en vertu de la démonſtration précédente, ces deux premiers quarrés ſeront égaux au troiſieme.

THÉORÊME IV.

Dans tout parallélogramme, la somme des quarrés des quatre côtés est égale à celle des quarrés des diagonales.

Il n'y a aucune difficulté à le prouver pour les parallélogrammes rectangles ; c'est une suite évidente de la fameuse propriété du triangle rectangle.

Pl. 4, fig. 31. Soit donc le parallélogramme oblique ABCD, dont les diagonales sont AD, BC ; d'un angle A abaissez sur la diagonale CB la perpendiculaire AF, vous aurez par la 12ᵉ proposition du Livre II d'Euclide, le quarré de AB égal au quarré de AE, plus le quarré de BE, plus deux fois le rectangle de FE par EB : on a aussi le quarré de AC égal à la somme des quarrés de AE, EC, moins deux fois le rectangle de FE par EC, qui est égal à celui de FE par EB, à cause que EB est égale à EC : donc la somme des quarrés de AC, AB, est égale à deux fois le quarré de AE, plus celui de EB, plus celui de EC, ou deux fois le quarré de AE, plus deux fois celui de BE.

Mais les quarrés de BD, DC, sont égaux à ceux de AB, AC, à cause de l'égalité des lignes CD, BD à AB, AC respectivement : ainsi les 4 quarrés des quatre côtés seront égaux à quatre fois le quarré de BE, plus quatre fois celui de AE. Or quatre fois le quarré de BE forment le quarré de BC, & quatre fois le quarré de AE égalent celui de AD : donc, &c.

Nous allons terminer cette suite de théorêmes, analogues à celui de la fameuse proposition du triangle rectangle, par le théorême ci-après sur les quadrilateres quelconques.

THÉORÊME V.

Dans tout quadrilatere, quel qu'il soit, la somme des quarrés des côtés est égale à celle des diagonales, plus quatre fois le quarré de la ligne qui joint les milieux de ces diagonales.

SOIT le quadrilatere ABCD, dont les deux diagonales sont AC, BD; qu'on les suppose coupées en deux également en E & F, & qu'on tire la ligne EF: on fait voir que les quarrés des quatre côtés, pris ensemble, sont égaux aux deux quarrés des diagonales, plus quatre fois le quarré de EF. Pl. 4, fig. 32.

On se borne ici à l'énoncé de ce théorême, très-élégant & très-curieux, qu'on doit, je crois, au célebre M. Euler. On en trouve la démonstration dans les nouveaux Mémoires de Pétersbourg, T. V; mais elle seroit trop prolixe pour ce lieu-ci.

Remarquons seulement que quand le quadrilatere ABCD devient un parallélogramme, alors les deux diagonales se coupent en deux également; ce qui fait que les points E & F tombent l'un sur l'autre, & la ligne EF s'anéantit. Ainsi le théorême précédent n'est qu'un cas de celui-ci.

PROBLÊME XVI.

Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, en mesurer la surface, sans rechercher la perpendiculaire abaissée d'un des angles sur le côté opposé.

PRENEZ la demi-somme des trois côtés du triangle, & retranchez de cette demi-somme chacun des trois côtés: cela donnera trois restes, qui, étant multipliés ensemble, & le produit par cette demi-somme, formeront un nouveau produit, dont la racine quarrée sera l'aire cherchée.

Que les trois côtés soient, par exemple, 50, 120, 150 toises; la demi-somme est 160, la premiere différence est 110, la seconde 40, la troisieme 10; le produit de ces quatre nombres est 7040000, dont la racine quarrée est 2653, & près de $\frac{3}{10}$.

Il est aisé d'éprouver que, si l'on procédoit par les voies ordinaires, c'est-à-dire en cherchant la perpendiculaire tirée d'un angle sur le côté opposé, on auroit eu beaucoup plus de calculs à faire.

REMARQUE.

Cette méthode fournit un moyen facile de trouver le rayon du cercle inscrit dans un triangle dont les trois côtés sont donnés : il n'y a qu'à faire le produit des trois différences de chaque côté avec la demi-somme, puis diviser ce produit par cette demi-somme, & du quotient extraire la racine quarrée ; elle sera le rayon cherché.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le produit des différences est 44000 ; ce qui, divisé par 160, donne 275, dont la racine quarrée est 16 $\frac{58}{100}$: c'est le rayon du cercle inscrit dans le triangle proposé.

PROBLÊME XVII.

Lorsqu'on arpente un terrain incliné, doit-on mesurer sa surface réelle, ou seulement celle qu'elle occupe dans sa projection horizontale ?

IL y a de très-fortes raisons pour ne mesurer la surface d'un terrain que dans sa projection horizontale ; car l'objet de l'arpentage n'eſt autre que de déterminer la quantité des productions que peut donner un terrain, ou des conſtructions qu'on peut élever deſſus. Or il eſt évident que les arbres, les plantes, s'élevant toujours perpendiculairement à l'horizon, il n'en tiendra pas davantage ſur un plan incliné que ſur le plan horizontal qui lui répond perpendiculairement au deſſous. De même on n'élevera pas plus de bâtiments ſur un terrain incliné que ſur celui de ſa projection horizontale, parceque les murs d'un édifice ne peuvent s'élever que verticalement ; il y a ſeulement un peu plus de ſujétion à bâtir ſur un pareil terrain que ſur un terrain horizontal.

Une autre raiſon, c'eſt qu'en général les terrains inclinés ont, proportion gardée avec leurs voiſins horizontaux, moins de terre végétale, puiſque les pluies en entraînent toujours une partie, pour la dépoſer ſur les terrains qui ſont au deſſous ; & ils ſont conſéquemment hors d'état de nourrir une auſſi grande quantité de productions que les autres.

Ces deux raiſons ne permettent pas de ſe refuſer à reconnoître que, dans ces cas-là, on devroit meſurer ſeulement la ſurface horizontale, & non la ſurface réelle ou inclinée, à moins que ces conſidérations n'entrent enſuite dans l'eſtimation du prix ; ce dont je doute fort.

REMARQUE.

C'EST principalement dans les deſcriptions topographiques de pays montagneux qu'il faut avoir attention à réduire tout au plan horizontal ; car, ſuppoſons qu'on ait levé les détails d'un pays, & que dans le penchant d'une montagne un peu roide on ait pris les diſtances réelles, & non celles réduites à l'horizon entre les divers lieux qu'on a voulu placer ſur ſa carte, il ſera impoſſible, lorſqu'on voudra les placer ſur cette carte, de faire accorder ſes meſures. En effet, c'eſt comme ſi l'on vouloit rapporter ſur le plan ou la baſe d'une pyramide, les triangles que forment ſes côtés inclinés. Cela eſt impoſſible : &, ſi on commence par y coucher un des triangles de ſes faces, tous les autres ne peuvent être que fauſſement repréſentés.

Je ne ſçais ſi les ingénieurs géographes font d'ordinaire attention à cela. J'ai lieu de croire que non; car j'ai vu des livres de ce genre, où il ne paroît pas qu'on ſe doutât ſeulement de la néceſſité d'une pareille réduction. Elle n'a pourtant pas échappé à M. l'abbé de la Grive, qui donne la maniere de la faire, en employant la trigonométrie rectiligne; mais ſa méthode, qui ſe préſente au reſte du premier coup d'œil, exige la connoiſſance des côtés inclinés, & emploie pluſieurs analogies : c'eſt pourquoi M. Mauduit a donné, dans ſes *Leçons de Géométrie théorique & pratique, à l'uſage des Eleves de l'Académie d'Architecture*, un moyen beaucoup plus ſimple & plus ingénieux. En effet, au moyen de quelques conſidérations de trigonométrie ſphérique, il réduit tout le calcul à une ſeule analogie, & n'a beſoin que de la connoiſſance des angles de poſition & de ceux de hauteur. Nous invitons à recourir à ce livre, excellent à-la-fois pour la théorie & la pratique, & qui contient beaucoup plus qu'on ne trouve dans les livres ordinaires d'éléments.

PROBLÊME XVIII.

Avec cinq quarrés égaux, en former un ſeul.

DIVISEZ un côté de chacun des quatre quarrés, A, B, C, D, en deux également, & tirez, d'un des angles contigus au côté oppoſé, une ligne droite à ce point de diviſion; coupez enſuite ces quatre quarrés par cette ligne, ce qui les partagera chacun en un trapeze & un triangle, comme l'on voit dans la *fig. 123*, nº 1. Pl. 15, fig. 123, nº 1 & 2.

Arrangez enfin ces quatre trapezes & ces quatre triangles autour du quarré entier E, comme vous le voyez dans la *fig. 123*, nº 2; vous aurez un quarré évidemment égal aux cinq quarrés donnés.

REMARQUE.

AU moyen de la ſolution du problême ſuivant, on pourra former un ſeul & unique quarré de tant de quarrés que l'on voudra. Car, de tant de quarrés qu'on voudra, on peut former un quarré long; or on va enſeigner dans le problême qui ſuit, comment un quarré long quelconque peut être réſolu en pluſieurs parties qui ſoient ſuſceptibles d'être arrangées de maniere à former un quarré.

PROBLÊME XIX.

Un rectangle quelconque étant donné, le transformer, par une ſimple tranſpoſition de parties, en un quarré.

SOIT le rectangle ABCD donné. Pour le recouper en pluſieurs parties qui puiſſent s'arranger en un quarré parfait, cherchez d'abord la moyenne Fig. 124.

proportionnelle géométrique entre les côtés BA, AD de ce rectangle ; faites AE égale à cette moyenne proportionnelle, & tirez EF perpendiculaire à AE : cette ligne EF coupera AD en un point F, lequel tombera ou au-delà de D, à l'égard du point A, ou sur le point D même, ou entre D & A : ce qui forme trois cas, dont le dernier même se subdivise en deux ; mais l'un d'eux étant bien compris, ne laisse plus aucune difficulté pour les autres.

Pl. 15, fig. 124, nº 1 & 2. *Premier Cas.* Soit donc premiérement le point F au-delà de D, comme l'on voit dans la *fig.* 124, nº 1; la ligne EF coupera CD en un point L : faites AG égale à DL, & tirez GH perpendiculaire à AE; elle retranchera du triangle ABE le petit triangle AGH : coupez enfin le rectangle donné AC en quatre parties, suivant les lignes AE, EL & GH; il en résultera quatre parties, sçavoir, le trapeze AELD, le triangle ECL, le trapeze GBEH, & le petit triangle AGH, que nous nommerons respectivement *a*, *b*, *c*, *d* : arrangez enfin ces quatre morceaux comme vous voyez dans la *fig.* 124, nº 2, & vous aurez un quarré parfait.

La démonstration est facile à trouver, en considérant, dans la *fig.* 124, nº 1, le quarré fait sur AE, sçavoir; AEKI; mais, avant tout, il faut démontrer que si l'on tire AI parallele à EF, & par le point D la parallele KI à AE, le rectangle qui en résultera, AEKI, sera un quarré. Or c'est ce qui est très-facile ; car, prolongeant IK jusqu'à sa rencontre en P avec BC prolongée, on a évidemment le rectangle AEKI égal au parallélogramme ADPE, lequel est égal au rectangle ABCD, ou AB par AD; d'où il suit que AE par AI est égal à AB × AD : mais le quarré de AE est égal à AB par AD ; conſéquemment AE par AI eſt la même choſe que le quarré de AE.

Cela étant démontré, tirez LG parallele à AD, & LM parallele à AE ; puis, des points M & G, tirez à AD & AE les perpendiculaires MN & GH : il eſt évident que le triangle AMN eſt égal & ſemblable à ELC : de même le triangle AGH eſt égal & ſemblable à DLK : enfin le trapeze BEHG eſt égal & ſemblable à NDIM ; car BE eſt parallele & égale à DN, BG à MN, DI à EH, & MI à GH. Les quatre parties AELD, ECL, BEHG, AGH, qui compoſent le rectangle AC, ſont donc égales aux quatre, AELD, AMN, NDIM, DLK, qui compoſent le quarré AEKI, ou ſon égal, celui de la même figure, n° 2 : donc, &c.

Second Cas. Si le point F tomboit ſur le point D, la ſolution du problême ſeroit extrêmement facile ; car alors le triangle *d* deviendroit nul, puiſque DL ſeroit nulle ; ainſi le quarré égal au rectangle ſeroit compoſé du triangle AED rectangle & iſoſcele, & de deux autres triangles auſſi rectangles & iſoſceles, ABE, CDE, égaux entr'eux & à la moitié du premier : ce qui ne préſente aucune difficulté pour être arrangé en quarré. Ce cas en effet ne peut avoir lieu, que quand le côté AB eſt préciſément la moitié de AD : le rectangle AC eſt donc alors compoſé de deux quarrés égaux. Or on ſçait comment de deux quarrés égaux on en forme un ſeul.

Pl. 15, fig. 124, n° 3.

Troiſieme Cas. Suppoſons préſentement le point F tomber entre A & D, mais en telle ſorte que FD ſoit moindre que EB. Faites, dans ce cas, EG égale à FD, & tirez GH perpendiculaire à AE ; vous aurez le rectangle AC partagé en quatre parties, ſçavoir, le triangle AEF, le trapeze EFDC,

Fig. 125, n° 1.

le trapeze ABGH, & enfin le triangle EGH, que nous nommerons encore respectivement *a*, *b*, *c*, *d*.
Pl. 15, fig. 125, nº 2. Le rectangle étant découpé en ces quatre parties, on les arrangera comme on voit dans la *fig. 125*, nº 2, & l'on aura un quarré parfait : ce qui est encore facile à démontrer.

Si FD étoit précisément égale à EB, il est évident qu'au lieu du trapeze ABGH, on auroit un triangle AB*h*; ensorte que le quarré à composer seroit formé de trois triangles & d'un trapeze ECDF, comme on voit dans la *fig. 125*, nº 2.

Fig. 125, nº 3. Si FD excédoit EB, & étoit précisément égale à AF, alors il faudroit tirer DM parallele à EF; & le rectangle étant coupé selon les lignes AE, EF & MD, qui formeroient trois triangles & un parallélogramme ED, on les arrangeroit comme l'on voit dans la *fig. 125*, nº 3, pour en former le quarré AIKE.

Pl. 16, fig. 126. On peut supposer enfin que la hauteur AD du rectangle proposé, soit telle qu'ayant fait la construction générale enseignée au commencement de la solution, la ligne FD excede la ligne AF, ou en soit multiple tant de fois qu'on voudra, avec ou sans reste. Dans ce cas, pour résoudre le problême, prenez autant de fois que vous le pourrez, la ligne AF sur FD. Pour simplifier, nous supposerons ici que la premiere n'est contenue dans la seconde qu'une fois avec le reste LD. Tirez LM parallélement à EF; vous aurez le parallélogramme LMEF, que vous pourrez ranger en FANO : faites ensuite EG égale à DL, & tirez GH perpendiculaire à AE; coupez enfin le rectangle ABCD par les lignes AE, EF, ML, GH, dans ces cinq parties, sçavoir, le triangle AEF, le parallélogramme FLME, les trapezes LDCM, AHGB, & le triangle GHE, que nous désignerons respectivement par *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: ces cinq parties s'arrangeront en un quarré parfait, ainsi qu'on le voit dans le quarré AIKE, formé du triangle *a*, du parallélogramme *b*, des trapezes *c* & *d*, & du petit triangle *e*. Pl. 15, fig. 125, nº 3.

Il faudroit six parties, dont deux parallélogrammes, comme *b*, si AF étoit contenu deux fois en FD.

On pourra, *vice versâ*, & par une sorte de marche rétrograde, résoudre le problême suivant.

PROBLÊME XX.

Un quarré étant donné, le couper en 4, 5, 6, &c. parties dissemblables entr'elles, & qui puissent par leur arrangement former un rectangle.

Qu'il s'agisse d'abord de diviser ce quarré, par exemple (*fig. 125*, nº 1) AEKI, en quatre parties susceptibles d'un pareil arrangement. Pour cet effet, sur le côté EK de ce quarré, prenez EF plus grande que la moitié du côté EK, & tirez AF; faites AO égale à EF, & tirez OM parallele à AF; enfin, du point où OM rencontre IK, tirez MN perpendiculaire à AF: les quatre parties cherchées seront les triangles AEF, OMI, & les deux trapezes AOMN, MNFK, qui s'arrangeront, si on le veut, de maniere à former le rectangle ABCD; ce qui sera évident à quiconque aura compris la solution du problême précédent. Pl. 15, fig. 125, nº 1.

Si vous voulez cinq parties, prenez EF telle qu'elle soit contenue dans EK deux fois, avec un reste quelconque; que ces parties de la ligne EK soient EF, FO, & le reste OK; tirez AF; &, prenant AN, NP, égales chacune à EF, tirez NO, Pl. 16. fig. 126, PQ, paralleles à AF, dont la derniere rencontrera le côté KI en Q; de ce point menez la perpendiculaire QR sur NO: vous aurez deux triangles, un parallélogramme & deux trapezes, qui seront évidemment susceptibles de former un quarré long tel que ABCD, puisque ce sont les mêmes parties dans lesquelles on pourroit partager ce quarré long, pour en former, par leur transposition, le quarré AEKI: donc, &c.

PROBLÊME XXI.

Transposition de laquelle semble résulter que le tout peut être égal à la partie.

Pl. 16, fig. 127, nº 1. FORMEZ un parallélogramme rectangle dont les longs côtés soient de onze parties, & les petits de trois, & vous le diviserez en quarrés égaux par des paralleles tirées par chaque point de division, comme on voit dans la *fig. 127*, nº 1; ce qui donnera 33 quarrés égaux & semblables.

Menez ensuite, par les angles diagonalement opposés, la diagonale AB; enfin coupez ce parallélogramme selon les lignes EF, GH, & la diagonale BA: vous aurez quatre pieces, qui, assemblées comme dans la *fig. 127*, nº 1, donneront 33 quarrés.

Fig. 127, nº 2 & 3. Mais si vous les assemblez de sorte que la ligne AH joigne la ligne BF, & que les deux triangles BHG, EFA, forment un rectangle, vous aurez 34 quarrés au lieu de 33.

Voilà donc 33 égal à 34.

Mais non; l'illusion est aisée à découvrir; car il est facile de voir que tous les quarrés traversés par les lignes de réunion obliques AH, AB, sont moindres chacun de $\frac{1}{11}$ en hauteur que les autres.

Or il y en a 11 qui sont ainsi traversés ; par conséquent il n'est pas surprenant que l'on en trouve un de plus.

Cette supercherie, il faut en convenir, est assez puérile aux yeux d'un géometre ; mais encore est-elle plus adroite que celle de M. G*** ; car, en faisant avec lui les longs côtés du rectangle de dix parties, les quarrés traversés par les lignes de réunion se trouvent manquer en hauteur d'un cinquieme juste de leur largeur ; ce qui ne permet plus, même à l'œil le moins exercé, de les prendre pour des quarrés parfaits semblables aux autres : mais quand il ne leur manque qu'un onzieme dans une de leurs dimensions, il est difficile de s'en appercevoir.

Remarque.

C'EST, à ce que je crois, par une semblable subtilité qu'un certain M. Liger prétendoit démontrer que deux fois 144 ou 288 égaloient 289, quarré de 17 ; d'où il concluoit que le quarré de 17 étoit égal à deux fois le quarré de 12, & que 17 étoit la valeur précise de la diagonale du quarré ayant 12 de côté. On ne peut se persuader qu'il y ait des cerveaux susceptibles de pareilles absurdités.

PROBLÊME XXII.

Diviser une ligne en moyenne & extrême raison.

UNE ligne est divisée en moyenne & extrême raison, lorsque la ligne entiere est à un des segments de sa division, comme ce segment est au restant de la ligne. Un grand nombre de problêmes de géométrie se réduisent à cette division ; ce qui lui a fait donner par quelques géometres du seizieme siecle, le nom de *section divine*. Sans adopter une dénomination aussi emphatique, voici la solution du problême.

Pl. 4, fig. 33. Soit la ligne AB à diviser en moyenne & extrême raison. Faites BC perpendiculaire à son extrémité, & égale à la moitié de AB; tirez AC, & prenez CD égale à CB; faites ensuite AE égale au restant AD : la ligne AB sera divisée comme on le demande, & on aura ce rapport, AB à AE, comme AE à EB.

REMARQUES.

Pl. 6, fig. 34, nº 1. 1. *ab* étant divisée en moyenne & extrême raison, si on lui ajoute son grand segment, alors on a une ligne *bc* pareillement divisée en moyenne & extrême raison en *a*, ensorte que *bc* est à *ba* comme *ba* à *ac*.

Fig. 34, nº 2. 2. Si, *ba* étant divisé, comme on l'a dit, en *c*, on fait *cd* égale au petit segment *bc*, alors on aura *ca* divisée de la même maniere, c'est-à-dire que *ca* sera à *cd* comme *cd* à *da*.

PROBLÊME XXIII.

Sur une base donnée, décrire un triangle rectangle tel que les trois côtés soient en proportion continue.

Pl. 5, fig. 35. SUR la base AB soit décrit un demi-cercle; puis soit AB divisée en moyenne & extrême raison en C, & soit élevée la perpendiculaire CD, jusqu'à sa rencontre avec le cercle en D; qu'on tire enfin les lignes AD & DB: le triangle ABD sera celui qu'on cherche; & il y aura même rapport de AB à AD, que de AD à DB. Ce qui est aisé à démontrer.

PROBLÊME

PROBLÊME XXIV.

Deux hommes qui courent également bien, parient à qui arrivera le premier de A en B, après avoir été toucher le mur CD. On demande quelle route on doit tenir pour gagner le pari.

IL est aisé de voir qu'il faut pour cela trouver la position des lignes AE, EB, telles que leur somme soit moindre que celles de toutes autres, comme A*e*, *e*B. Or on démontre que cette somme est la moindre possible, lorsque l'angle AEC est égal à l'angle BED. Pl. 5, fig. 36.

Car concevez la perpendiculaire AC menée sur CD, & prolongée ensorte que CF soit égale à AC, & tirez EF, EB; les angles AEC, CEF, seront égaux. Mais AEC est égal à BED par la supposition: donc les angles CEF & BED le seront aussi: d'où il suit que CD étant une ligne droite, FEB en sera aussi une. Mais BEF est égale à BE, EA, prises ensemble, comme B*e* & *e*F le sont à B*e* & *e*A: le chemin BEA sera donc plus court que tout autre B*e*A, par la même raison que BF est plus courte que les lignes B*e*, *e*F.

Pour trouver donc le point E, il faudra tirer les perpendiculaires AC, BD, à la ligne CD; ensuite diviser CD en E, de sorte que CE soit à ED comme CA à DB.

PROBLÊME XXV.

Un point, un cercle & une ligne droite étant donnés de position, décrire un cercle passant par le point donné, & tangent au cercle & à la ligne droite.

PAR le centre du cercle donné soit tirée la perpendiculaire BE à la ligne donnée, & qu'elle Fig. 37.

coupe le cercle en B & F; soit encore tirée BA au point donné A; qu'on prenne ensuite BG, quatrieme proportionnelle à BA, BE, BF: par les points A & G, soit décrit un cercle qui touche la ligne CD: il touchera aussi le cercle donné.

Pl. 5, fig. 38. La construction sera la même, si le point A est au dedans du cercle; dans lequel cas il est évident que la ligne qui doit être touchée par le cercle cherché, doit aussi entrer dans le cercle donné: il y aura même, dans ce cas, deux cercles qui résoudront le problême, comme on le voit dans la figure 38.

PROBLÊME XXVI.

Deux cercles & une ligne droite étant donnés, tracer un cercle qui les touche tous.

Ce problême est évidemment susceptible de plusieurs cas, car le cercle tangent à la ligne droite peut renfermer les deux cercles, ou un seul, ou les laisser tous deux dehors; mais, pour abréger, nous nous bornerons au dernier cas, laissant les autres à la sagacité de nos lecteurs, qui n'auront pas beaucoup de peine à les résoudre, après avoir bien conçu la solution du dernier.

Fig. 39. Soient donc les deux cercles, dont les rayons sont CA, *ca*, donnés, ainsi que la ligne DE, de position. Prenez, dans le cas que nous traitons ici, sur le rayon CA, la portion AO égale à *ca*, & tracez du rayon CO un nouveau cercle; tirez aussi au-delà de DE une ligne *de* parallele à DE, & qui en soit éloignée d'une quantité égale à *ca*; tracez ensuite par le problême ci-dessus un cercle qui passe par *c*, & qui touche le cercle au rayon

CO & la ligne droite *de*; que le centre de ce cercle ſoit B; diminuez ſon rayon de la quantité AO ou *ca*: le cercle décrit avec ce nouveau rayon ſera évidemment tangent aux cercles donnés, ainſi qu'à la droite DE.

PROBLÊME XXVII.

De l'inſcription des polygones réguliers dans le cercle.

On lit dans pluſieurs livres de géométrie pratique, une méthode générale pour l'inſcription des polygones réguliers au cercle, que voici. Sur le diametre AB du cercle donné, décrivez un triangle équilatéral, & partagez ce même diametre en autant de parties égales que le polygone demandé doit avoir de côtés; enſuite, du ſommet E du triangle par l'extrémité *c* de la ſeconde diviſion, tirez la ligne E*c*, que vous prolongerez juſqu'à la circonférence du cercle en D: la corde AD ſera, diſent-ils, le côté cherché du polygone à inſcrire. Pl. 5, fig. 40.

On ne parle ici de cette prétendue méthode, que pour dire qu'elle eſt défectueuſe, & n'a jamais pu être l'ouvrage que d'un ignorant en géométrie; car il eſt aiſé de démontrer qu'elle eſt fauſſe, même lorſqu'on l'applique à la recherche des polygones les plus ſimples, de l'octogone, par exemple. En effet, on trouve aiſément, par le calcul trigonométrique, que l'angle DCA, qui devroit être de 45°, eſt de 48° 14'; d'où il ſuit que la corde AD n'eſt pas le côté de l'octogone inſcrit.

Il n'y a de polygones réguliers inſcriptibles géométriquement & ſans tâtonnement, au moyen de la regle & du compas, que le triangle, & les polygones qui en dérivent en doublant le nombre des côtés, comme l'exagone, le dodécagone, &c.

Le quarré, & les polygones qui en dérivent de la même maniere, comme l'octogone, le sédécagone, &c.

Le pentagone, & ceux qui en dérivent, comme le décagone, le 20-gone, &c.

Le pentédécagone & ses dérivés, comme le polygone de 30 côtés, &c.

Les autres, tels que l'eptagone, l'ennéagone, l'endécagone, &c. ne sçauroient être décrits par le moyen seul du compas & de la regle, sans tâtonnement; & tous ceux qui ont cherché à le faire y ont échoué, ou n'ont enfanté que des paralogismes ridicules.

Voici en peu de mots la maniere de décrire géométriquement dans le cercle les cinq polygones primitifs qu'on peut y inscrire avec la regle & le compas.

Pl. 5, fig. 41. Soit le cercle ABDE, partagé en quatre parties égales par les deux diametres perpendiculaires AB, DE; soit partagé le rayon CD en deux également en F, & soit tirée OG parallele à AB: la ligne EG sera le côté du triangle inscrit, ainsi que GO & OE.

La ligne EB sera, comme tout le monde sçait, le côté du quarré.

Si l'on fait EH égale au rayon, on sçait aussi que ce sera le côté de l'exagone.

Partagez en deux également au point I le rayon CA, & tirez EI; faites IK égale à IC, & la corde EL égale au restant EK: ce sera le côté du décagone; & en prenant l'arc LM égal à l'arc EL, on aura EM pour le côté du pentagone.

Divisez enfin en deux également en N l'arc OM, qui est la différence de l'arc du pentagone avec celui du triangle, & tirez la droite ON ; ce sera le côté du pentédécagone ou du polygone de 15 côtés.

REMARQUE.

L'EPTAGONE est susceptible d'une construction non-géométrique, mais approximée, qui est assez heureuse, & qui mérite par cette raison d'être connue : la voici. Pour inscrire dans un cercle donné un eptagone, décrivez d'abord un triangle équilatéral, ou du moins déterminez-en un côté : la moitié de ce côté sera à très-peu de chose près le côté de l'eptagone inscriptible. On trouve en effet, par le calcul, le côté du triangle, le rayon étant l'unité, égal à 0, 86602, dont la moitié est de 0, 43301, & le côté de l'eptagone est 0, 43387; ce qui ne differe de la moitié du côté du triangle que de moins qu'un 1000^{e}. Toutes les fois donc qu'un millieme du rayon du cercle donné sera une quantité insensible, la construction ci-dessus différera insensiblement de la vérité.

Il seroit à souhaiter qu'on trouvât, pour tous les autres polygones, des constructions aussi simples & aussi approchantes de la vérité. Cela n'est pas impossible.

PROBLÊME XXVIII.

Connoissant le côté d'un polygone d'un nombre de côtés donné, trouver le centre du cercle qui lui est circonscriptible.

CE problême est en quelque sorte l'inverse du précédent, & est facile à résoudre pour les mêmes polygones.

Nous passons sous silence le triangle, le quarré & l'exagone, parce que les premiers éléments de géométrie suffisent pour sçavoir comment trouver le centre d'un triangle équilatéral, d'un quarré, & que le côté de l'exagone est égal au rayon même du cercle qui lui est circonscriptible.

Pl. 5, fig. 42. Ainsi nous commencerons par le *pentagone*. Soit donc AB le côté du pentagone cherché. A l'extrémité de AB élevez la perpendiculaire AC, égale à $\frac{1}{2}$ AB; puis tirez BC, dont vous ôterez CE=AC; faites ensuite BF=BE; après cela, du centre A au rayon AF, décrivez un arc de cercle, &, du point B au rayon BA, un autre arc qui coupera le premier en G: la ligne BG sera la position du second côté du pentagone, & les deux perpendiculaires sur les milieux de ces côtés, donneront par leur intersection la position du centre *h*.

Pl. 6, fig. 43. *Pour l'octogone.* Soit AB, *fig.* 43, le côté donné. Décrivez sur cette ligne un demi-cercle, & élevez le rayon CG perpendiculaire & indéfiniment prolongé; tirez le côté du quarré BG, & faites CF égale à la moitié de BG; tirez la perpendiculaire FE au diametre; & par le point E, où elle coupera le demi-cercle, tirez AE, qui rencontrera CG prolongée en D: ce point D sera le centre du cercle cherché.

Pl. 5, fig. 42. *Pour le décagone.* AB étant le côté donné, cherchez, comme si vous aviez à construire un pentagone, la ligne BF, &, des points A & B avec le rayon AF, décrivez le triangle isoscele A*h*B: le point *h* sera le centre du décagone.

Pl. 6, fig. 44. *Pour le dodécagone & les polygones quelconques.* Soit la ligne AB donnée pour le côté du polygone. Avec un rayon quelconque CD décrivez un cercle, dans lequel vous décrirez le dodécagone ou le polygone demandé : supposons que DE en soit le côté ; prolongez DE en F, (si AB excede DE) ensorte que DF soit égale à AB ; tirez CE & sa parallele FG : le point où cette derniere rencontrera le diametre DH prolongé, sera évidemment le cercle, auquel le polygone cherché est inscriptible.

Quoique nous ayons donné des méthodes particulieres pour le pentagone, l'octogone & le décagone, il est suffisamment clair que ce dernier moyen leur est également applicable.

Terminons cet article des polygones par deux tables utiles ; l'une, qui donne les côtés des polygones, le rayon du cercle étant donné ; l'autre, qui présente la longueur du rayon, le côté même du polygone étant connu. Soit donc le rayon du cercle exprimé par 100000, le côté du triangle inscrit sera, à une unité près, de . . 173205,

celui du quarré	141421,
du pentagone	117557,
de l'exagone	100000,
de l'eptagone	86777,
de l'octogone	76536,
de l'ennéagone	68404,
du décagone	61803,
de l'endécagone	56347,
du dodécagone	51763,
du trédécagone	47844,
du 14-gone	44503,
du quindécagone	41582.

Au contraire, que le côté du polygone soit 100000, le rayon du cercle sera,

dans le cas du triangle	57735,
dans celui du quarré	70710,
du pentagone	85065,

dans le cas de l'exagone	. . . . . .	100000,
de l'eptagone	. . . . .	115237,
de l'octogone	. . . . .	130657,
de l'ennéagone	. . . .	146190,
du décagone	. . . . .	161804,
de l'endécagone	. . . .	177470,
du dodécagone	. . . .	193188,
du trédécagone	. . . .	209012,
du 14-gone	. . . . . .	224703,
du quindécagone	. . .	240488.

PROBLÊME XXIX.

Former les différents corps réguliers.

IL y a long-temps qu'on a démontré en géométrie, qu'il ne peut y avoir que cinq corps terminés par des figures régulieres, toutes égales entre elles, & formant ensemble des angles égaux. Ce sont;

Le tétraëdre, qui est formé par quatre triangles équilatéraux;

Le cube ou exaëdre, formé de six quarrés égaux;

L'octaëdre, formé de huit triangles équilatéraux égaux;

Le dodécaëdre, formé de douze pentagones égaux;

L'icosaëdre enfin, qui est formé de vingt triangles équilatéraux.

On peut se prendre de deux manieres pour former un de ces corps réguliers quelconques. La premiere est de former d'abord une sphere, & d'en retrancher les parties excédentes, ensorte que le restant forme le corps régulier cherché: l'autre, dont le procédé ressemble à celui qui est usité dans la *Coupe des Pierres*, consiste à tracer d'abord, sur un plan fait au hasard, une des faces du corps qu'on veut former; ensuite à adapter sous des angles déterminés les faces adjacentes.

Pour résoudre donc le problême dont il s'agit, nous résoudrons d'abord les questions suivantes.

1° Le diametre d'une sphere étant donné, trouver les côtés des faces de chacun des corps réguliers.

2° Trouver les diametres des petits cercles de cette sphere, où sont inscriptibles les faces de chacun de ces corps.

3° Déterminer l'ouverture de compas dont chacun de ces cercles peut être décrit sur la surface de la même sphere.

4° Déterminer les angles que font entr'elles les faces contiguës dans leur commune intersection.

1. *Une sphere étant donnée, trouver les côtés des faces de chacun des cinq corps réguliers.*

Soit ABC la moitié du grand cercle de la sphere donnée, & AC un de ses diametres. Divisez-le en trois parties égales, & que AI en soit les deux tiers; que IE soit perpendiculaire à ce diametre, & coupe le cercle en E: la ligne AE sera le côté d'une des faces du tétraëdre, & l'on aura pour celui du cube ou de l'exaëdre la ligne EC. Pl. 6, fig. 45.

Tirez ensuite par le centre F le rayon FB, perpendiculaire à AC, qui coupe le cercle en B, & menez la ligne AB; ce sera le côté de l'octaëdre inscrit dans la même sphere.

Le côté du dodécaëdre se trouvera, en partageant EC, celui de l'exaëdre, en moyenne &

extrême raiſon, & en prenant pour le côté du dodécaëdre le grand ſegment CK.

Enfin ſoit tirée à l'extrémité A du diametre la perpendiculaire AG, égale à AC, & menez du centre F la ligne FG, qui coupera le cercle en H; la ligne AH ſera le côté de l'icoſaëdre.

Le rayon de la ſphere étant 10000, on trouve, par le calcul, le côté du tétraëdre égal à 16329; celui de l'exaëdre ou du cube, égal à 11546; celui de l'octaëdre, 14142; du dodécaëdre, 7713 6; de l'icoſaëdre, 10514.

2. *Trouver le rayon du petit cercle de la ſphere, auquel la face du corps régulier propoſé eſt inſcriptible.*

On a déja enſeigné la maniere de trouver le rayon du cercle circonſcriptible au triangle, au quarré & au pentagone, qui ſont les ſeules faces des corps réguliers: ainſi le problême eſt réſolu par-là.

Pour les exprimer en nombres, on ſçait que le côté du triangle équilatéral étant 10000, le rayon du cercle circonſcriptible eſt 5773 ainſi le côté du tétraëdre étant 16329, il n'y aura qu'à faire comme 10000 eſt à 5773, ainſi 16329 à une quatrieme proportionnelle, qui ſera 9426.

On trouvera de même, que le rayon du petit cercle où eſt inſcriptible la face de l'octaëdre, eſt 8164.

Enfin un calcul ſemblable montrera que celui du cercle de la face de l'icoſaëdre eſt 6070.

Le rayon du cercle circonſcriptible autour du quarré dont le côté eſt 10000, eſt, comme l'on ſçait, 7071; ce qui donnera pour le rayon de la face de l'exaëdre, 8164.

Enfin, le côté d'un pentagone étant 10000, on a pour le rayon du cercle circonſcriptible, 8506 ; ce qui donne pour le rayon de la face du dodécaëdre, 6070.

3. *Trouver l'ouverture de compas dont doit être décrit ſur la ſphere le cercle capable de recevoir la face du corps régulier.*

Cela eſt encore facile ; car, EF étant le rayon du petit cercle de la ſphere capable de recevoir cette face, il eſt évident que FD eſt l'ouverture du compas propre à décrire ce cercle ſur la ſurface de la ſphere. Or FE eſt le ſinus de l'angle FCD, qui ſera conſéquemment donné, & FD eſt le double du ſinus de la moitié de ce premier angle ; ainſi l'on trouvera FD, en cherchant d'abord dans les tables l'angle FCD, le partageant par la moitié, cherchant le ſinus de cette moitié, & doublant ce ſinus. Pl. 6, fig. 46.

Ce procédé donnera la valeur de FD ; pour le cas du tétraëdre, 11742 ; pour ceux de l'exaëdre & de l'octaëdre, 9192 ; pour ceux du dodécaëdre & de l'icoſaëdre, 6408.

4. *Trouver l'angle formé par les faces des corps réguliers.*

Tracez un cercle auſſi grand que vous pourrez, & déterminez dans ce cercle le côté du corps régulier demandé ; abaiſſez enſuite du centre la perpendiculaire ſur ce côté : ce ſera le diametre d'un ſecond cercle que vous décrirez. Je ſuppoſe que ce diametre ſoit AB. Fig. 47.

Décrivez après cela, ſur le côté du corps régulier trouvé, le polygone convenable, ou du moins cherchez le centre du cercle circonſcriptible à ce polygone, &, de ce centre, abaiſſez ſur le côté trouvé une perpendiculaire ; faites, dans le ſecond cercle ci-deſſus, les lignes AD, AC, égales à cette perpendiculaire : vous aurez l'angle DAC égal à l'angle cherché.

On trouve au reſte, par le calcul, que cet angle eſt pour le tétraëdre, de 70° 32′; pour l'exaëdre, de 90 ; (ce qu'on ſçavoit déja, car les faces du cube ſont perpendiculaires les unes ſur les autres) pour l'octaëdre, de 109° 28′; pour le dodécaëdre, de 116° 34′; pour l'icoſaëdre, de 138° 12′.

Réuniſſons toutes ces dimenſions dans une table, où nous ſuppoſons le rayon de la ſphere de 10000 parties.

NOMS des Corps réguliers.	*Cotés des Faces.*	*Rayons des cercl. circonſ.*	*Distan. au Pôle.*	*Angles des Faces contig.*
Tétraëdre	16329	9426	11742	70° 32′
Exaëdre	11546	8164	9192	90°
Octaëdre	14142	8164	9192	109° 28′
Dodécaëdre	77336	6070	6408	116° 34′
Icoſaëdre	10514	6070	6408	138° 10′

Il eſt maintenant facile de tracer, de l'une ou de l'autre maniere, un corps régulier quelconque demandé.

Premiere Maniere. Qu'on ait, par exemple, une ſphere dont on veut former un dodécaëdre. Décrivez un cercle dont le diametre ſoit égal à celui de la ſphere, & déterminez-y le côté du dodécaëdre, ou le côté du pentagone qui eſt une de ſes faces ; le rayon du cercle circonſcrit à ce pentagone, & l'ouverture du compas propre à le décrire ſur la ſphere. Cela eſt facile, par les déterminations géométriques ci-deſſus.

Ou bien, ſuppoſant le rayon de la ſphere propoſée de 10000 parties, prenez, ſur une échelle, 6408 de ces parties, qui feront l'ouverture du compas avec lequel vous décrirez ſur la ſurface de la ſphere un cercle, ſur la circonférence duquel vous déterminerez les cinq angles du pentagone inſcriptible; de deux points voiſins, avec la même ouverture de compas que ci-deſſus, décrivez deux arcs, dont l'interſection ſera le pôle d'un nouveau cercle égal au premier; faites-en ainſi de deux en deux points; & vous aurez les cinq pôles des cinq faces qui s'appuient ſur la premiere. Vous déterminerez de même facilement les autres pôles, dont le dernier, ſi l'opération eſt exacte, doit être diamétralement oppoſé au premier. Enfin, de ces douze pôles, décrivez deux cercles égaux, qui ſe trouveront tous coupés en cinq parties égales; ils détermineront douze ſegments de la ſphere, qui, étant abattus, laiſſeront à découvert les douze faces du dodécaëdre cherché.

Seconde Maniere. Pour opérer de cette ſeconde maniere, il faut commencer à découvrir dans le bloc propoſé une face plane, ſur laquelle on décrira le polygone qui convient au corps régulier demandé; on abattra enſuite ſur chaque côté de ce polygone un nouveau plan, incliné ſuivant l'angle déterminé dans la table ci-deſſus, ou qui aura été tracé par le moyen de la conſtruction géométrique qu'on a auſſi donnée plus haut: on aura autant de faces planes, ſur leſquelles on décrira de nouveaux polygones, qui auront avec le premier un côté commun. Faiſant la même choſe ſur ces polygones, vous arriverez enfin au dernier, qui doit être parfaitement égal au premier, ſi l'on a opéré avec exactitude.

Obſervons néanmoins que la premiere méthode eſt celle qui conduira plus ſûrement à la parfaite exactitude.

5. *Former les mêmes corps avec du carton.*

Si l'on vouloit former ces corps avec du carton ou du papier fort, il faudroit s'y prendre de la maniere ſuivante, qui eſt la plus commode.

Tracez d'abord ſur le carton toutes les faces du corps demandé, ſçavoir, les quatre triangles pour
Pl. 6, fig. 48, 49, 50. le tétraëdre, comme dans la *fig. 48, pl. 6*; les ſix quarrés du cube, comme dans la *fig. 49;* les huit triangles équilatéraux de l'octaëdre, comme dans la *fig. 50;* les douze pentagones du dodécaëdre,
Pl. 7, fig. 51, 52. comme dans la *fig. 51, pl. 7;* les douze triangles équilatéraux enfin, comme dans la *fig. 52:* vous en découperez enſuite les bords; après quoi il ſera aiſé de plier les faces dans leurs côtés communs, de maniere qu'elles ſe réuniſſent toutes: enfin, en collant avec du papier fin les côtés qui ſe touchent ſans ſe tenir, vous aurez un corps régulier exécuté.

Les anciens géometres avoient entaſſé beaucoup de ſpéculations géométriques ſur ces corps: les derniers livres des *Eléments d'Euclide* n'ont preſque que cet objet. Un commentateur moderne d'Euclide (M. de Foix Candalle) a même encore enchéri ſur ces ſpéculations, en inſcrivant ces corps les uns dans les autres, & en les comparant ſous divers aſpects; mais tout cela n'eſt plus regardé aujourd'hui que comme de vaines recherches. Elles furent ſuggérées aux anciens, par la perſuaſion où ils étoient que ces corps avoient des propriétés myſtérieuſes, de la découverte deſquelles dépendoit l'explication des phénomenes les plus cachés de la nature. Ils comparoient avec ces corps les éléments, les orbes céleſtes, que ſçais-je encore? Mais depuis que la ſaine phyſique a pris le deſſus, l'énergie prétendue des nombres, & celle des corps réguliers dans la nature, ont été reléguées parmi les viſions creuſes de l'enfance de la philoſophie & du platoniſme. Nous paſſerons, par ces raiſons, ſous ſilence ces ſpéculations; & nous nous bornerons à un problême aſſez curieux ſur le cube ou l'exaëdre.

PROBLÊME XXX.

Percer un cube d'une ouverture, par laquelle peut paſſer un autre cube égal au premier.

Si l'on conçoit un cube élevé ſur un de ſes angles, de ſorte que la diagonale paſſant par cet angle ſoit perpendiculaire au plan qu'il touche, & que, de chacun des angles qui ſont en l'air, on conçoive une perpendiculaire abaiſſée ſur ce plan, la projection qui en réſultera ſera un exagone régulier, dont chaque côté & chaque rayon ſe trouvera ainſi. Pl. 7, fig. 53.

Sur une ligne verticale AB, *fig. 53*, égale à la diagonale du cube, ou dont le quarré ſoit triple de celui du cube, ſoit décrit un demi-cercle, dans lequel ſoit faite AC égale au côté du cube, & AD égale à la diagonale d'une de ſes faces; &, du point C, ſoit abaiſſée ſur l'horizontale tangente du cercle en B, la perpendiculaire CE, qui paſſera par le point D: vous aurez BE pour le côté & le rayon de l'exagone cherché *a b c d*, fig. 54.

Cela étant, qu'on décrive ſur cette projection

Pl. 7, fig. 54. exagonale, & autour du même centre, le quarré qui eſt la projection du cube propoſé mis ſur une de ſes baſes, enſorte que ſes côtés ſoient l'un parallele & l'autre perpendiculaire au diametre *ac*, on peut démontrer que ce quarré ſera contenu dans l'exagone, de maniere à ne toucher par ſes angles aucun des côtés : donc on peut percer dans le cube, & dans le ſens parallele à une de ſes diagonales, un trou quarré égal à une des baſes du cube, & cela ſans ſolution de continuité d'aucun côté ; & par conſéquent on pourra faire paſſer dans ce cube un autre cube égal, pourvu qu'il ſe meuve dans le ſens de la diagonale du premier.

PROBLÊME XXXI.

D'un trait de compas, & ſans en changer l'ouverture ni varier le centre, décrire une ovale.

CETTE eſpece de problême n'eſt qu'une ſurpriſe, car on ne ſpécifie point ſur quel genre de ſurface on doit tracer la courbe cherchée. Celui à qui l'on propoſe le problême ſonge à une ſurface plane, & le juge impoſſible, comme il l'eſt en effet ; tandis qu'il eſt queſtion d'une ſurface courbe, ſur laquelle il eſt aiſé à exécuter.

En effet, qu'on étende ſur une ſurface cylindrique une feuille de papier, & qu'appuyant ſur un point quelconque le compas, on trace ſur cette ſurface une eſpece de cercle ; qu'on déploie enſuite en plan cette feuille : il eſt évident qu'on aura une figure allongée, dont le plus court diametre ſera dans le ſens qui répondoit à celui de l'axe du cylindre.

Mais on ſe tromperoit, ſi l'on prenoit cette courbe

courbe pour la vraie ovale, si connue des géometres.

Voici la description de cette derniere.

PROBLÊME XXXII.

Décrire l'Ovale ou l'Ellipse géométrique.

L'OVALE géométrique est une courbe qui a deux axes inégaux, & qui a sur son grand axe deux points tellement placés, que si, de chaque point de la circonférence, on tire deux lignes à ces deux points, la somme de ces deux lignes est toujours la même.

Soit donc AB le grand axe de l'ellipse à décrire; DE, qui le coupe à angles droits & en deux parties égales, le petit axe, qui est aussi coupé en deux parties égales en C: du point D, comme centre, avec un rayon égal à CA, décrivez un arc de cercle qui coupe le grand axe en F & *f*: ces deux points sont ce qu'on nomme *les foyers*: plantez à chacun une pointe, ou, si vous opérez sur le terrain, un piquet bien droit; puis prenez un fil, ou, si c'est sur le terrain, un cordeau dont les deux bouts soient noués, & qui ait en longueur la ligne AB, plus la distance F*f*; passez ce fil ou ce cordeau à l'entour des piquets F, *f*, de maniere qu'ils soient dans l'intérieur de l'anneau, & tendez-le, comme vous voyez en FG*f*, avec un crayon ou une pointe que vous ferez tourner de B par D en A, & revenir par E en B, en appliquant toujours la pointe ou le crayon avec la même force: la courbe que décrira cette pointe sur le papier ou sur le terrain dans une révolution entiere, sera la courbe cherchée. Pl. 7, fig. 55.

On appelle cette ellipse *l'Ovale des Jardiniers*, parceque, lorſqu'ils ont à décrire une ellipſe, ils s'y prennent de cette maniere.

On voit par-là que l'ellipſe ou l'ovale géométrique eſt, pour ainſi dire, un cercle à deux centres; car, dans le cercle, l'allée du centre à un point quelconque de la circonférence, & le retour de ce point au centre, font toujours la même ſomme, ſçavoir, le diametre. Dans l'ellipſe où il y a deux centres, l'allée d'un d'eux à un point quelconque, & le retour de ce point à l'autre centre, font auſſi conſtamment la même ſomme ou ſon grand diametre.

Auſſi un cercle n'eſt-il encore qu'une ellipſe dont les deux foyers, en ſe rapprochant l'un de l'autre, ſe ſont enfin confondus.

Voici une autre maniere de décrire l'ellipſe, qui peut avoir quelquefois ſon application.

Pl. 7, fig. 56. Soit ABC une équerre, & BH, BI, les deux demi-axes de l'ellipſe à décrire. Ayez une regle, comme DE, égale à la ſomme de ces deux lignes; &, ayant pris EF égale à BH, ſoit fixée (par un méchaniſme qu'il eſt aiſé d'imaginer) au point F une pointe ou crayon propre à laiſſer une trace ſur le papier ou le terrain; faites enſuite tourner cette regle dans l'angle droit donné, de maniere que ſes deux extrémités s'appliquent toujours aux côtés de cet angle: la pointe fixée en F décrira dans ce mouvement une ellipſe véritable & géométrique.

Il eſt aiſé de voir que ſi la pointe ou le crayon eût été fixé au point G, qui coupe DE en deux également, la courbe décrite eût été un cercle.

REMARQUE.

Il y a une autre ovale fort employée par les architectes & les ingénieurs, lorſqu'ils ont à former des arcs ſurbaiſſés ou ſurhauſſés, qu'on appelle *anſes de panier*. Elle eſt composée de pluſieurs arcs de cercle de différents rayons, qui ſe touchent mutuellement, & qui repréſentent aſſez bien l'ellipſe géométrique : mais elle a un défaut, qui conſiſte en ce que, quelque bien que ſe touchent ces arcs de cercle, un œil un peu délicat apperçoit toujours à leur jonction un jarret, qui eſt l'effet du paſſage ſubit d'une courbure à une autre plus grande. C'eſt pour cela qu'un arc quelconque qui monte ſur ſon pied-droit ſans impoſte, paroît y faire un jarret, quoique l'arc, à ſa réunion avec le pied-droit, lui ſoit exactement tangent.

Cet inconvénient néanmoins eſt compenſé par la commodité de n'avoir beſoin, pour les vouſſoirs de l'arc, que de deux panneaux ſi le quart de l'ovale eſt formé de deux arcs, ou de trois s'il eſt formé de trois; au lieu que, s'il étoit formé en véritable ellipſe, il faudroit autant de panneaux que de vouſſoirs. Si cependant quelqu'un avoit le courage (& il n'en faudroit pas beaucoup) pour ſurmonter cette difficulté, nous ne doutons point que la véritable ellipſe n'eût plus de graces que cette ovale bâtarde.

PROBLÊME XXXIII.

Sur une baſe donnée, décrire une infinité de triangles, où la ſomme des deux côtés ſur la baſe ſoit toujours la même.

Ce n'eſt là qu'un corollaire du problême précédent. Car, ſur la baſe donnée, ſoit décrite une ellipſe dont les deux extrémités de cette baſe ſoient Pl. 7, fig. 55.

les foyers; tous les points de l'ellipſe feront les ſommets d'autant de triangles ſur la baſe donnée FGf, Fgf, & la ſomme de leurs côtés ſera la même: ils auront conſéquemment tous le même contour; & le plus grand ſera celui qui aura ſes deux côtés égaux, car c'eſt celui dont le ſommet eſt au point le plus élevé de l'ellipſe.

THÉORÊME VI.

De toutes les figures iſopérimetres ou de même contour, & ayant un nombre de côtés déterminé, la plus grande eſt celle qui a tous ſes côtés & ſes angles égaux.

Pl. 7, fig. 57. On commencera à démontrer ce théorême à l'égard des triangles. Soit donc d'abord ſur la baſe AB le triangle ACB, dont les côtés AC, CB, ſont inégaux. On a fait voir plus haut que ſi l'on conſtruit le triangle AFB, dont les côtés égaux AF, FB, le ſoient enſemble à AC, CB, ce triangle AFB ſera plus grand que ACB.

Par la même raiſon, ſi, ſur AF, comme baſe, on fait le triangle AbF, dont les côtés Ab, bF, égaux entr'eux, ſoient égaux enſemble à AB, BF, ce triangle AbF ſera plus grand que AFB. Pareillement, en ſuppoſant Fa, aB, égaux, & leur ſomme égale à FA, AB, ce dernier triangle Fab ſera encore plus grand que AFB, qui a le même contour, &c. Or il eſt aiſé de voir, par cette opération, que les trois côtés du triangle ſe rapprochent toujours de l'égalité; & qu'en la concevant continuée à l'infini, le triangle deviendroit enfin équilatéral, &, conſéquemment, que le triangle équilatéral ſera le plus grand de tous.

Par exemple, si les trois côtés du premier triangle étoient 12, 13, 5, les côtés du second seroient 12, 9, 9; du troisieme, 9, $10\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$; du quatrieme, $10\frac{1}{2}$, $9\frac{3}{4}$, $9\frac{3}{4}$; du cinquieme, $9\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{8}$ $10\frac{1}{8}$; du sixieme, $10\frac{1}{8}$, $9\frac{15}{16}$, $9\frac{15}{16}$; du septieme, $9\frac{15}{16}$, $10\frac{1}{32}$, $10\frac{1}{32}$; & ainsi de suite : par où l'on voit que la différence décroît toujours, de sorte qu'à la fin les trois côtés deviendront 10, 10, 10; & alors le triangle sera le plus grand de tous.

Qu'on prenne à présent un polygone rectiligne, tel que ABCDEF, dont tous les côtés sont inégaux ; tirez les lignes AC, CE, EA : par ce que l'on a montré plus haut, on verra que, si sur AC l'on fait le triangle isoscele A*b*C, tel que A*b*, *b*C, soient égaux ensemble à AB, BC, le polygone, quoique de même contour, deviendra plus grand de l'excès du triangle A*b*C sur ABC. En faisant la même chose tout à l'entour, le polygone augmentera continuellement en surface, tous ses côtés & ses angles approcheront de plus en plus de l'égalité ; conséquemment le plus grand de tous sera celui où tous les côtés & les angles seront égaux. Pl. 7, fig. 58.

Nous allons maintenant démontrer que, de deux polygones réguliers de même contour, le plus grand est celui qui a le plus de côtés. Pour cet effet, soit un polygone, par exemple le triangle équilatéral circonscrit au cercle, & que KFHI soit l'exagone circonscrit au même cercle ; il est évident que son contour sera moindre que celui du triangle, car les parties FE, GH, IK, sont communes, & le côté GF est moindre que FB plus BG, &c : l'exagone concentrique au premier, & d'égal contour avec le triangle, que je suppose MNO, sera donc extérieur à l'exagone KFH ; conséquemment la perpendiculaire K*l* sera plus grande que KL. Or Fig. 59.

le triangle ayant même contour que l'exagone MNO, leurs aires seront comme les perpendiculaires CL, Cl, abaissées du centre du cercle; conséquemment l'exagone isopérimetre avec le triangle sera le plus grand.

Ce qu'on vient de démontrer à l'égard du triangle & de l'exagone isopérimetres, est évidemment applicable à tout autre polygone dont l'un a un nombre de côtés double de l'autre; par conséquent plus un polygone d'un contour déterminé a de côtés, plus son aire est grande.

Remarques.

1. Ceci nous conduit à une conséquence célebre dans la géométrie: c'est que, *de toutes les figures de même contour, le cercle est absolument la plus grande.* Car le cercle n'est qu'un polygone d'un nombre infini de côtés, ou, pour s'exprimer plus géométriquement, il est le dernier des polygones qui résultent du doublement continuel de leurs côtés; conséquemment il est le plus grand de tous.

2. Remarquons encore ici que si, sur une base déterminée, & avec un contour aussi déterminé, sont décrites plusieurs figures, la plus grande sera encore celle dont le contour, la base exceptée, sera formé du plus grand nombre de côtés, & le plus approchant de la régularité: d'où il suit que si, avec une longueur déterminée, il est question de décrire sur une base donnée la plus grande figure, cette figure sera un segment de cercle, sçavoir, celui dont cette base est la corde, & dont l'arc est égal à la longueur donnée.

Toutes ces choses peuvent être démontrées par une considération méchanique. Car, supposons un vase dont les parois soient parfaitement flexibles, & qu'on y verse dedans une liqueur; il est certain qu'elles s'arrangeront de maniere à en contenir la plus grande quantité possible : d'un autre côté, on sçait que ce vase prendra la figure cylindrique, c'est-à-dire dont la base & les coupes paralleles à la base seront circulaires : d'où il suit que le cercle est, de toutes les figures d'égal contour, celle qui comprend la plus grande aire.

D'après les considérations ci-dessus, il est aisé de résoudre les questions suivantes.

I.

Caïus a un champ de 500 toises de contour, qui est quarré; Sempronius en a un de même contour, qui est un quarré long, & propose à Caïus un échange. Celui-ci doit-il l'accepter?

Il est aisé de répondre que non; & Caïus seroit d'autant plus lésé, que le champ de Sempronius auroit des côtés plus inégaux : ils pourroient même être tels que ce dernier champ ne fût que la moitié, le quart, le dixieme de celui de Caïus. Car, supposons que celui de Caïus eût 100 toises dans chacune de ses dimensions, & que celui de Sempronius fût un rectangle dont un des côtés eût 190 toises & l'autre 10, il seroit isopérimetre au premier; mais sa surface ne seroit que de 1900 toises quarrées, tandis que celle du premier seroit de 10000 toises. Si des deux dimensions du champ de Sempronius, l'une étoit de 195 toises & l'autre de 5, ce qui donneroit encore 400 toises de contour, sa surface ne seroit que de 950 toises; ce qui n'est pas même la dixieme de celle du champ de Caïus.

II.

Un particulier a emprunté un ſac de grain, de 4 pieds de haut & de ſix pieds de tour; l'emprunteur envoie au prêteur deux ſacs de même hauteur, & de 3 pieds de contour chacun. On demande s'il a rendu la même quantité de grain.

On répondra qu'il n'en rend que la moitié ; car deux cercles égaux qui ont même contour qu'un troiſieme, ne lui ſont pas égaux ; ils n'en ſont que la moitié, chacun d'eux n'en étant que le quart.

III.

Un maître-d'hôtel a acheté, pour une certaine ſomme, la quantité d'aſperges que pouvoit contenir un cordeau d'un pied ; le lendemain, voulant en avoir le double, il retourne au marché avec un lien double, & offre un prix double. Son offre eſt-elle raiſonnable ?

Non. Cet homme eſt dans l'erreur de penſer qu'avec un lien double, il ne renfermera que le double de ce qu'il a eu la veille : il en auroit le quadruple ; car un cercle d'un contour double, a un diametre double. Or un cercle d'un diametre double de celui d'un autre, eſt quadruple de cet autre.

Remarque.

Il nous reſte a obſerver ici que tout comme, parmi les figures d'égal contour, le cercle eſt la plus grande, de même, parmi les ſolides d'égale ſurface, la ſphere eſt celle qui contient le plus grand volume. Ainſi, ſi quelqu'un ſe propoſoit de faire un vaſe d'une capacité déterminée, en ménageant la matiere autant qu'il se pourroit, il faudroit qu'il fût sphérique. Mais voici un autre problême de ce genre.

PROBLÊME XXXIV.

Un particulier veut faire une cuvette d'argent, de forme cylindrique & ouverte en dessus, qui contienne un pied cube de liqueur; mais, desirant épargner autant qu'il se pourra la matiere, il s'adresse à un géometre pour avoir les dimensions de ce vase. On demande quelles sont ces dimensions.

En supposant que ce vase doive avoir, par exemple, une ligne d'épaisseur, il est évident que la quantité de matiere sera proportionnelle à la surface. Il s'agit donc de déterminer, entre tous les cylindres d'un pied cube de capacité, celui dont la surface, une des bases exceptée, sera la moindre.

Or nous trouvons que le diametre de la base doit être de 16 pouces 4 lignes, & la hauteur de 8 pouces 2 lignes $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire sensiblement dans le rapport de 2 à 1 entre le diametre & la hauteur.

Si l'on vouloit que le vase, en forme de tonneau, fût clos des deux côtés, la question se réduiroit à trouver le cylindre dont la surface, les deux bases comprises, fût plus grande que dans tout autre de même capacité : il faudroit alors que le diametre de la base fût de 13 pouces, & la hauteur de 12 pouces 5 lignes $\frac{3}{5}$.

PROBLÊME XXXV.

Les Alvéoles des Abeilles.

Les anciens admiroient les abeilles, à cause de la forme exagone de leurs alvéoles. Ils remarquoient que, de toutes les figures régulieres qui peuvent s'adapter ſans laiſſer aucun vuide, l'exagone eſt celle qui approche le plus du cercle, & qui, avec même capacité, a le moins de contour : d'où ils inféroient en cet inſecte une ſorte d'inſtinct qui lui avoit fait choiſir cette figure, comme celle qui, en contenant la même quantité de miel, exigeoit le moins de cire pour en former les parois. Car il paroît que les abeilles ne travaillent pas la cire pour elle-même, mais uniquement pour en former leurs alvéoles, qui doivent être leurs magaſins de miel, & les nids des petits vers deſtinés à devenir un jour abeilles.

Il s'en faut cependant bien que ce ſoit là la principale merveille du travail des abeilles ; ſi l'on peut appeller merveille, un travail qu'une organiſation particuliere détermine aveuglément. Car on pourroit d'abord remarquer qu'il n'eſt pas abſolument merveilleux que de petits animaux, tous doués de la même force, de la même activité, preſſants de dedans en dehors de petites loges arrangées les unes à côté des autres, du reſte égales & également flexibles, leur donnent, par une ſorte de néceſſité méchanique, la forme exagone. En effet, ſi l'on ſuppoſoit une multitude de cercles ou de petits cylindres infiniment flexibles & un peu extenſibles, à côté les uns des autres, & que des forces agiſſantes intérieurement, & toutes égales, tendîſſent à appliquer leurs parois, en rempliſſant les vuides qu'ils laiſſent entr'eux, la premiere forme qu'ils prendroient ſeroient l'exagone; après quoi, toutes ces forces reſtant en équilibre, rien ne tendroit à changer cette forme.

On pourroit cependant, pour réintégrer les abeilles dans la poſſeſſion où elles ſont d'être admirées à ce ſujet, remarquer que ce n'eſt pas ainſi qu'elles travaillent. On ne les voit pas commencer à faire des alvéoles circulaires, puis, à force de les pêtrir & de les étendre en travaillant enſemble, les transformer en exagones. Les alvéoles qui terminent un gâteau imparfait ſont également à pans, inclinés à peu de choſe près ſous l'angle que demande la forme exagone. Mais paſſons à l'autre ſingularité plus merveilleuſe du travail des abeilles.

Cette ſingularité conſiſte dans la maniere dont le fond de leurs alvéoles eſt formé. En effet, on ne doit pas s'imaginer qu'ils ſoient tout uniment terminés par un plan perpendiculaire à l'axe : il y avoit une maniere de les terminer qui employoit moins de cire, & qui en employoit le moins qu'il étoit poſſible, en laiſſant toujours à l'alvéole la même capacité ; &, le croiroit-on ? c'eſt celle que ces inſectes ont adoptée, & exécutent avec une aſſez grande préciſion.

Pour exécuter cette diſpoſition, il falloit, 1° que les deux rangs d'alvéoles qu'on ſçait former les gâteaux de miel, & qui ſont adoſſés les uns aux autres, ne fuſſent pas arrangés de maniere que leurs axes ſe répondiſſent, mais enſorte que l'axe de l'un s'alignât avec la jointure commune des trois poſtérieurs. Comme l'on voit, dans la *fig.* 60, l'exagone en ligne pleine répondre aux trois exagones en lignes ponctuées, qui repréſentent le plan des cellules poſtérieures, c'eſt ainſi que les cellules des abeilles ſont arrangées pour donner lieu à la diſpoſition de leurs fonds communs. Pl. 7, fig. 60.

2° Pour donner une idée de cette diſpoſition, qu'on ſe repréſente un priſme exagone, dont la baſe ſupérieure ſoit l'exagone ABCDEF, avec le triangle inſcrit AEC ; que l'axe GO ſoit prolongé Pl. 8, fig. 61.

en S, & que, par ce point S & le côté AC, on mene un plan qui abattra dans le prisme l'angle B, en formant une face rhomboïdale ASCT : tel est un des fonds de l'alvéole ; & deux autres plans, semblablement menés par S & les côtés AE, EC, forment les deux autres, ensorte que le fond est terminé en une pyramide triangulaire.

Pl. 8, fig. 61. Il est aisé de voir que, quel que soit le point S, comme la pyramide ACOS est toujours égale à ACBT, & ainsi des deux autres, la capacité de l'alvéole ne variera point, quelle que soit l'inclinaison du fond tournant sur AC. Mais il n'en est pas ainsi de la surface ; il y a une inclinaison telle que la surface totale du prisme & de ses fonds sera plus petite que dans toute autre inclinaison. Les géometres l'ont recherchée, & ont trouvé qu'il falloit pour cela que l'angle formé par ce fond avec l'axe, fût de 54° 44′ ; d'où résulte le petit angle du rhombe, ATC ou ASC, de 70° 32′, & l'autre, SAT ou SCT, de 109° 28′.

Or telle est précisément l'inclinaison des côtés du parallélogramme que forme chacun des trois plans inclinés des fonds des cellules des abeilles ; c'est ce qui résulte des dimensions prises sur une multitude de ces alvéoles. D'où l'on doit conclure que les abeilles forment les fonds de leurs cellules de la maniere la plus avantageuse pour qu'elles aient le moins de surface possible, d'une maniere enfin que la géométrie moderne seule eût pu déterminer. Qui peut avoir donné à des insectes aussi méprisables, non aux yeux du philosophe, qui ne méprise point les plus petits ouvrages de la Divinité, mais aux yeux du vulgaire ; qui peut, disons-nous, avoir donné à ces insectes l'instinct admirable qui les dirige dans un ouvrage aussi parfait, sinon le ſouverain Géometre, la Divinité, de qui Platon a dit, par un ſentiment qui ſe vérifie de plus en plus, à meſure qu'on pénetre plus avant dans les ouvrages de la nature, qu'il fait tout *numero, pondere & menſurâ?*

PROBLÊME XXXVI.

Quel eſt le plus grand polygone qu'on peut former avec des lignes données?

RÉPONSE. On démontre que le plus grand polygone qu'on puiſſe former avec des lignes données, eſt celui qui eſt tel qu'on puiſſe lui circonſcrire un cercle.

Mais on pourroit encore demander s'il y a quelqu'ordre, entre ſes côtés, qui puiſſe donner un plus grand polygone que tout autre arrangement. Nous répondons que non; & que, quel que ſoit cet arrangement, ſi le polygone eſt inſcriptible à un cercle, il ſera toujours le même; car il eſt aiſé de ſe démontrer que, quel que ſoit cet ordre, la grandeur du cercle ne variera point: le polygone ſera toujours composé des mêmes triangles ayant leurs ſommets à ſon centre; ils ne ſeront que differemment arrangés.

PROBLÊME XXXVII.

Quel eſt le plus grand triangle inſcriptible à un cercle, & quel eſt le moindre des circonſcriptibles?

RÉPONSE. C'est, dans l'un & dans l'autre cas, le triangle équilatéral.

Il en eſt de même des autres polygones. Le plus grand des quadrilateres inſcriptibles au cercle, eſt le quarré: cette figure eſt auſſi la moindre des circonſcriptibles.

Le pentagone régulier, inſcrit au cercle, eſt auſſi la plus grande de toutes les figures à cinq côtés qu'on peut lui inſcrire ; & la même figure circonſcrite eſt la moindre de tous les pentagones circonſcriptibles, &c.

PROBLÊME XXXVIII.

Pl. 8, fig. 61. *La ligne AB eſt la ſéparation de deux plaines, l'une AGB, qui eſt d'un ſable mouvant, où un cheval vigoureux peut ſeulement faire une lieue par heure ; l'autre eſt une belle pelouſe, où le même cheval peut faire, ſans ſe fatiguer davantage, cette lieue en une demi-heure : les deux lieux C & D ſont donnés de poſition, c'eſt-à-dire qu'on connoît tant les diſtances CA, DB, où ils ſont de la limite AB, que la poſition & la grandeur de AB : enfin un voyageur doit aller de D en C. On demande quelle route il tiendra pour y mettre le moins de temps poſſible.*

Il eſt peu de perſonnes qui, jugeant de cette queſtion par les lumieres ordinaires, ne penſâſſent que le chemin que doit tenir le voyageur en queſtion eſt la ligne droite. Elles ſe tromperoient néanmoins, & il eſt aiſé de le faire ſentir ; car, en tirant la ligne droite CED, on concevra facilement qu'il doit y avoir davantage à gagner, de faire dans la premiere plaine, où l'on marche plus difficilement, un chemin CF un peu moindre que CE, & d'en faire au contraire dans la ſeconde, où l'on peut aller le plus vîte, un tel que FD, plus long que DE, c'eſt-à-dire que celui qu'on auroit fait en allant directement de C en D ; enſorte qu'on emploie réellement moins de temps à aller de C en D par

CF, FD, que par CE, ED, quoique le chemin par ces dernieres ſoit plus court.

C'eſt effectivement ce que démontre le calcul: on trouve, par ſon moyen, que l'on ira de C en D dans le moins de temps poſſible, quand, ayant tiré par le point F la perpendiculaire HG à AB, les ſinus des angles CFG, DFH, ſeront entr'eux reſpectivement en rayon inverſe des viteſſes avec leſquelles le voyageur en queſtion peut aller dans les plaines CAB, ABD; c'eſt-à-dire, dans le cas préſent, comme 1 à 2. Ainſi il faudra, dans le cas particulier, que le ſinus de l'angle CFG, ſoit la moitié de celui de l'angle DFH.

PROBLÊME XXXIX.

Sur une baſe donnée, décrire une infinité de triangles, tels que la ſomme des quarrés des côtés ſoit conſtamment la même, & égale à un quarré donné.

Soit AB la baſe donnée, que vous diviſerez en deux également en C; puis, des points A & B, avec un rayon égal à la moitié de la diagonale du quarré donné, décrivez un triangle iſoſcele dont le ſommet ſoit F; tirez CF, & du point C avec le rayon CF décrivez un demi-cercle ſur AB prolongée s'il en eſt beſoin: tous les triangles ayant AB pour baſe, & leurs ſommets F, *f*, φ, dans la circonférence de ce demi-cercle, auront la ſomme des quarrés de leurs côtés égale au quarré donné.

Pl. 8, fig. 63, 64.

REMARQUE.

Tout le monde ſçait que, lorſque la ſomme des quarrés des côtés eſt égale à celui de la baſe, le triangle eſt rectangle, & a ſon ſommet dans la circonférence du demi-cercle décrit ſur cette baſe. Ici l'on voit que, ſi la ſomme des quarrés des côtés est plus grande ou moindre que le quarré de la base, les sommets des triangles, qui dans le premier cas sont acutangles, & dans le second obtusangles, sont aussi toujours dans un demi-cercle ayant le même centre, mais sur un diametre plus grand ou moindre que la base du triangle ; ce qui est une généralisation fort ingénieuse de la propriété si connue du triangle rectangle.

PROBLÊME XL.

Sur une base donnée, décrire une infinité de triangles, tels que le rapport des deux côtés sur cette base soit constamment le même.

Pl. 8, fig. 65. LA base donnée étant AB, divisez-la en D, de maniere que AD soit à DB dans le rapport donné. Supposons-le ici de 2 à 1. Faites ensuite comme la différence de AD & DB est à DB, ainsi AB à BE, laquelle BE se prendra dans le sens ABE, si AD excede DB ; partagez enfin DE en deux également en C, &, du centre C, décrivez avec le rayon CD ou CE, un demi-cercle sur le diametre DE : tous les triangles, comme AFB, A*f*B, AφB, &c. ayant la même base AB, & leurs sommets F, *f*, φ, dans la circonférence de ce demi-cercle, auront leurs côtés AF, FB ; A*f*, FB ; Aφ, φB, dans le même rapport, sçavoir, celui de AD à DB, ou AE à EB, qui est le même.

Mais on trouvera plus facilement le centre C par la construction suivante. Sur AD décrivez le triangle équilatéral AGD, & sur DB le triangle pareillement équilatéral DAB : par leurs sommets G, H, menez une ligne droite, qui, étant prolongée, coupera la prolongation de AB en un point C, qui sera ce centre cherché.

THÉORÊME VII.

Dans un cercle, si deux cordes AB, CD, se coupent à angles droits, la somme des quarrés de leurs segments CE, AE, ED, EB, sera toujours égale au quarré du diametre. Pl. 8, fig. 66.

LA démonstration de ce théorême, qui est assez curieux & élégant, est néanmoins fort facile; car il est aisé de voir, en tirant les lignes BD, AC, que leurs deux quarrés sont ensemble égaux aux quarrés des quatre segments dont il s'agit. De plus, en prenant l'arc FC égal à AD, on aura l'arc FD égal à AC, & conséquemment l'angle FDC égal à ACE, qui est lui-même égal à ABD : donc l'angle FDB sera droit, puisqu'il est égal à EDB & DBE, qui ensemble font un droit : par conséquent les quarrés de FD, DB, sont égaux au quarré de l'hypothénuse, qui est le diametre : donc, &c.

Il faut remarquer qu'il en seroit de même, si l'on supposoit le point de rencontre *e* des deux cordes hors du cercle : on auroit, dis-je, également, dans ce cas, les quatre quarrés de *ea*, *eb*, *ec*, *ed*, égaux ensemble au quarré du diametre ; ce que nous ne démontrons pas ici, pour laisser à nos lecteurs le plaisir de se le démontrer eux-mêmes.

REMARQUE.

LES cercles étant comme les quarrés de leurs diametres, il est évident que si, sur EA, EB, EC, ED, comme diametres, on décrit quatre cercles, ils seront égaux ensemble au cercle ACBD, &, de plus, ces quatre cercles seront proportionnels ; car on sçait que BE est à EC, comme ED à EA. Or, si quatre grandeurs sont en proportion, leurs quarrés le sont aussi. De plus, il est évident que, quelle que soit la position de ces deux cordes, leur somme sera toujours tout au plus égale à deux diametres, sçavoir, si elles passent toutes deux par le centre ; & au moins égale à un, sçavoir, si l'une passe par le centre, & l'autre presque à la distance d'un rayon. On pourra donc, au moyen du théorême ci-dessus, résoudre facilement le problême suivant.

PROBLÊME XLI.

Trouver quatre cercles proportionnels qui, pris ensemble, soient égaux à un cercle donné, & qui soient tels que la somme de leurs diametres soit égale à une ligne donnée.

Il est évident, par les raisons ci-dessus, qu'il faut que la ligne donnée soit moindre que deux fois le diametre du cercle donné, & plus grande que ce diametre; ou, ce qui est la même chose, que la moitié de cette ligne soit moindre que le diametre du cercle donné, & plus grande que son rayon.

Pl. 8, fig. 67. Cela posé, que la ligne donnée, ou la somme des diametres des cercles cherchés, soit *ab*, dont la moitié soit *ac*; que ABDE soit le cercle donné, dont AB, DE, sont deux diametres perpendiculaires l'un à l'autre ; prenez sur les rayons CA, CE, prolongés, les lignes CF, CG, égales à *ac*, & tirez FG, qui coupera nécessairement le quarré CH du rayon du cercle ; sur la partie IK de cette ligne comprise dans ce quarré, soit pris un point quelconque L, duquel soient menées les lignes LM*q*, LN*r*, l'une parallele, l'autre perpendiculaire au diametre AB ; par les points M & N d'intersection avec la circonférence du cercle, soient tirées MR, NQ, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à AB : les cordes NS, MT, feront les deux cordes cherchées.

Car il eſt clair que NQ & MR ſont égales à L*q* & L*r*, qui ſont enſemble égales à CG ou CF, ou à la moitié de *ab*: donc les cordes entieres ſont enſemble égales à *ab*: donc, par la précédente, elles réſolvent le problême; & les quatre cercles décrits ſur les diametres NO, OM, OS, OT, ſeront égaux au cercle ADBE.

REMARQUE.

LA ligne FG peut ſeulement toucher le cercle; dans lequel cas, tout autre point que le point de contact réſoudra également le problême.

Mais ſi FG coupoit le cercle, comme on le voit dans la *fig.* 68, il ne faudra prendre le point L que dans la partie de la ligne IK qui eſt hors du cercle, comme on le voit dans cette même figure. Pl. 8, fig. 68.

Cette ſolution vaut mieux que celle que donne M. Ozanam, qui eſt ſujette à un tâtonnement défectueux; car il ordonne de prendre ſur *ac* une portion moindre que le rayon, & de la porter comme de C en *q*, enſuite de tirer les lignes *q*M, MR, puis de porter le reſtant de *ac* de C en *r*: mais il faut que le point *r* tombe au-delà de R, ſans quoi les deux demi-cordes ne ſe couperont pas. Il y a enfin, ſuivant la grandeur de *ac* relativement au rayon, une certaine grandeur qu'il ne faut pas excéder, & que M. Ozanam ne détermine point; ce qui rend ſa ſolution vicieuſe. Fig. 67.

PROBLÊME XLII.

De la trisection & multisection de l'angle.

Ce problême est célebre par les efforts infructueux faits dans tous les temps pour le résoudre géométriquement, à l'aide de la regle & du compas, & par les paralogismes & fausses constructions données par de prétendus géometres. Mais il est aujourd'hui démontré que sa solution dépend d'une géométrie supérieure à la géométrie élémentaire, & qu'aucune construction où l'on n'emploiera que la regle & le compas, ou le cercle & la ligne droite, ne sçauroit le résoudre, si ce n'est dans un petit nombre de cas, comme ceux où l'arc qui mesure l'angle proposé est le cercle entier, ou sa moitié, ou son quart, ou sa cinquieme partie. Il n'y a plus, en conséquence, que des ignorants qui cherchent aujourd'hui la solution générale de ce problême par la géométrie ordinaire.

Mais quoique l'on ne puisse, par la regle & le compas seuls, résoudre ce problême sans tâtonnement, il y a néanmoins quelques constructions méchaniques ou de tâtonnement qui méritent d'être connues, à cause de leur simplicité : les voici.

Pl. 8, fig. 69. Soit l'angle ABC, qu'on propose de partager en trois parties égales. Du point A, abaissez sur l'autre côté de l'angle la perpendiculaire AC, &, par le même point A, tirez à BC la parallele AE indéfinie ; ensuite, du point B, menez à AE une ligne BE, telle que sa partie FE, interceptée entre les lignes AC & AE, soit égale à deux fois la ligne AB ; ce qui peut se faire par un tâtonnement fort simple, & très facile à exécuter : vous aurez l'angle FBC égal au tiers de ABC.

En effet, divisez FE en deux également en D, & tirez AD ; le triangle FAE étant rectangle, D sera le centre du cercle passant par les points F, A, E : conséquemment DA, DE, DF, seront égales entr'elles & à la ligne AB : donc le triangle ADE sera isoscele, & les angles DAE, DEA, seront égaux ; l'angle ADF extérieur, qui est égal aux deux interieurs DAE, DEA, sera donc double de chacun. Or, le triangle BAD étant isoscele, l'angle ABD est égal à ADB : donc l'angle AED, ou son égal FBC, est la moitié de l'angle ABD : conséquemment l'angle ABC est divisé par BE, de maniere que l'angle EBC en est le tiers.

Autre Maniere. Soit l'angle ACB, du sommet duquel on décrira un cercle ; on prolongera ensuite le rayon BC indéfiniment en E ; puis on tirera la ligne AE, de maniere que la partie DE, interceptée entre BE & la circonférence de ce cercle, soit égale au rayon BC ; par le centre C, tirez CH parallele à AE : l'angle BCH sera le tiers de l'angle donné BCA. Pl. 9. fig. 70.

Pour le démontrer, tirez le rayon CD ; cela fait, il est aisé de voir que l'angle HCA est égal (à cause des paralleles) à CAD ou CDA. Or ce dernier est égal aux angles DCE, DEC, ou double de l'un d'eux, puisque CD & DE sont égales par la construction : de plus l'angle HCB est égal à DCE ou DEC : conséquemment l'angle ACH est double de HCB, & ACB triple de HCB.

PROBLÊME XLIII.

La Duplication du Cube.

Il est aisé de doubler une surface rectiligne ou courbe quelconque, comme un cercle, un quarré, un triangle, &c; c'est-à-dire, étant donnée une de ces figures, il est aisé d'en construire une semblable qui en soit le double, ou un multiple quelconque, ou dans une raison donnée telle qu'on le voudra: il n'est question pour cela, que de trouver la moyenne proportionnelle géométrique entre un des côtés de la figure donnée, & la ligne qui est à ce côté dans la raison demandée: cette moyenne sera le côté homologue à celui de la figure donnée. Ainsi, pour décrire un cercle double d'un autre, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre le diametre du premier & le double de ce diametre; ce sera celui du cercle double, &c. Il en est de même de toute autre raison. Tout cela appartient à la géométrie la plus élémentaire.

Mais, construire une figure solide double, ou en raison donnée d'une autre semblable, est un problême bien plus difficile, & qui ne peut être résolu par le moyen du cercle & de la ligne droite, ou de la regle & du compas, à moins qu'on n'emploie un tâtonnement que la géométrie réprouve: c'est ce qui est aujourd'hui démontré; mais la démonstration n'est pas susceptible d'être sentie de tout le monde.

On fait une histoire assez comique sur l'origine de ce problême: on dit que la peste régnant à Athenes, & y faisant beaucoup de ravage, on envoya à Delphes consulter Apollon, qui promit de faire cesser le fléau, quand on lui auroit fait un autel double de celui qu'il avoit. Aussi-tôt des entrepreneurs furent envoyés pour doubler l'autel. Ils crurent n'avoir qu'à doubler toutes ses dimensions pour remplir la demande de l'oracle, & par-là le firent octuple; mais le dieu, plus géometre, ne le vouloit que double. La peste ne cessa point.

On envoya de nouveaux députés, qui reçurent pour réponse, que l'autel étoit plus que double. Il fallut alors recourir aux géometres, qui s'évertuerent à chercher la solution du problême. Il y a apparence que le dieu se contenta d'une approximation ou d'une solution méchanique. Les peuples d'Athenes auroient été à plaindre, s'il avoit été plus exigeant.

Il n'étoit rien moins que nécessaire d'immiscer une divinité dans cette affaire. Quoi de plus naturel aux géometres, que de chercher à doubler un solide, & le cube en particulier, après avoir trouvé la maniere de doubler le quarré & les autres surfaces quelconques? C'est là la marche de l'esprit humain dans la géométrie.

Les géometres apperçurent bientôt que, tout comme la duplication d'une surface quelconque se réduit à trouver une moyenne géométrique entre deux lignes, dont l'une est double de l'autre, de même la duplication du cube, ou d'un solide quelconque, se réduit à trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles continues entre ces mêmes lignes. On doit cette remarque à Hippocrate de Chio, qui, de marchand de vin ruiné par un naufrage, ou par les commis des aides d'Athenes, devint géometre. Depuis ce temps, tous les efforts des géometres se sont réduits à trouver deux moyennes proportionnelles géométriques, & continues entre deux lignes données; & ces deux problêmes, sçavoir, celui de la duplication du cube, ou, plus généralement, de la construction d'un cube en raison donnée avec un centre, & celui des deux moyennes proportionnelles continues, sont devenus synonymes.

Voici différentes manieres de résoudre ce problême, les unes qui exigent un tâtonnement, les autres qui emploient un inftrument autre que la regle & le compas.

Pl. 9, fig. 71. 1. Soient les deux lignes AB, AC, entre lefquelles il s'agit de trouver deux moyennes proportionnelles continues. Formez-en le rectangle BACD, & prolongez indéfiniment les côtés AB, AC; tirez les deux diagonales du rectangle qui fe coupent en E: vous aurez la folution du problême, fi, tirant par l'angle D la ligne FDG, terminée entre les côtés de l'angle droit FAG, les points G & F font également éloignés du point E. Car alors les lignes AB, CG, BF, AC, feront en proportion continue.

Ou bien, Tracez du centre E un arc de cercle tel que FIG, qui foit tel qu'en tirant FG, cette ligne paffe par l'angle D; vous aurez encore la folution du problême.

Ou bien encore, Circonfcrivez au rectangle BACD, un cercle; enfuite, par l'angle D, tirez la ligne FG, de forte que les fegments FD, GH, foient égaux: vous aurez encore les lignes CG, BF, moyennes proportionnelles continues entre AB, AC.

Fig. 72. 2. *Autre Solution.* Faites un angle droit avec les deux lignes AB, BC, données; & ayant indéfiniment prolongé BC & AB, du point B comme centre, décrivez le demi-cercle DEA; tirez auffi la ligne AC, &, fur fa prolongation, trouvez un point G, tel que, tirant la ligne DGHI, les fegments GH, HI, foient égaux entr'eux: la ligne BH fera la premiere des deux moyennes.

Fig. 73. 3. Soit CA la premiere des données; du point C décrivez un cercle avec le rayon CB, égal à

la moitié de CA ; prenez dans ce cercle la corde BD égale à la feconde des données, que vous prolongerez indéfiniment ; tirez la ligne ADE indéfinie ; enfin, du point C, tirez la ligne CEF, de maniere que la partie EF, interceptée dans l'angle EDF, foit égale à CB : alors la ligne DF fera la premiere des moyennes proportionnelles cherchées, & CE fera la feconde. Cette conftruction eft de Newton.

PROBLÊME XLIV.

Un angle qui n'eft point une portion exacte de la circonférence étant donné, trouver avec une grande exactitude, au moyen du compas feul, quelle eft fa valeur.

Soit décrit du fommet de cet angle, avec le plus grand rayon qu'il fe pourra, un cercle, fur lequel vous marquerez les points principaux de divifion, comme les demi, les tiers, les quarts, les cinquiemes, les fixiemes, les huitiemes, les douziemes, les quinziemes de la circonférence ; prenez enfuite avec le compas la corde de l'arc donné, & tranfportez-la le long de la circonférence, à commencer d'un point déterminé, en faifant un tour, deux tours, trois tours, &c. & comptant en même temps le nombre de fois que vous portez cette corde fur la circonférence, jufqu'à ce que vous ayiez tombé jufte fur un point de divifion, ce qui ne fçauroit manquer d'arriver après un certain nombre de révolutions, à moins que l'arc donné ne foit incommenfurable avec la circonférence ; alors examinez quel eft ce point de divifion, c'eft-à-dire, de combien & de quelles aliquotes de la circonférence il eſt éloigné du premier point ; vous ajouterez le nombre de degrés qu'il donne au produit de 360°, multiplié par le nombre des tours complets qu'on a faits avec le compas, & vous diviſerez la ſomme par le nombre de fois que le compas a été porté ſur la circonférence : le quotient ſera le nombre de degrés, minutes & ſecondes cherchés.

Suppoſons, par exemple, que le compas, ouvert à la grandeur de la corde de l'arc donné, ait été porté dix-ſept fois ſur la circonférence, & qu'il ſoit enfin tombé juſte, après quatre révolutions complettes, ſur la deuxieme diviſion du cercle en cinq parties égales. La cinquieme partie de la circonférence eſt 72°, & les deux cinquiemes 144° ; ajoutez donc 144 au produit de 360° par 4, qui eſt le nombre des révolutions complettes, & vous aurez 1584° ; diviſez ce nombre par 17, le quotient ſera 93° 10′ 35″, grandeur de l'arc cherché.

PROBLÊME XLV.

Une ligne droite étant donnée, trouver, par une opération facile & ſans échelle, ſon rapport avec une autre, à des 1000es, 10000es, 100000es près, &c.

QUE la premiere de ces lignes & la moindre ſoit nommée A, & la ſeconde B.

Ayant pris avec le compas la ligne A, tranſportez-la, autant de fois que cela eſt poſſible, ſur la ligne B : je ſuppoſe qu'elle y ſoit contenue trois fois avec un reſte.

Prenez ce reſte avec le compas, & tranſportez-le de même ſur la ligne B, autant que cela ſe peut :

je ſuppoſe qu'il y ſoit contenu ſept fois avec un reſte.

Prenez ce reſte, & faites la même opération: je ſuppoſe qu'il ſoit contenu 13 fois dans la ligne B, avec un reſte; enfin, que ce reſte ſoit contenu 24 fois exactement dans la ligne B.

Faites cette ſuite de fractions, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3.7}$, $\frac{1}{3.7.13}$, $\frac{1}{3.7.13.24}$, & réduiſez-les en fractions décimales, qui ſont, 0.333333, 0.047619, 0.003663, 0.000152. Je dis que la ligne donnée eſt, en fractions décimales, égale à la premiere de ces fractions, moins la ſeconde, plus la troiſieme, moins la quatrieme; ce qui donne 0.289225, ſans erreur d'une de ces parties entieres, c'eſt-à-dire d'une millionieme.

Il eſt aiſé de voir qu'aucune échelle ne ſçauroit donner un rapport auſſi approché, quelque fineſſe de diviſion qu'on lui ſupposât; & que, quand même on ſuppoſeroit une échelle ſemblable, il reſteroit l'incertitude de la diviſion ſur laquelle tomberoit l'extrémité de la ligne donnée: au lieu qu'une ligne transportée avec le compas le long d'une plus grande, ne ſçauroit jamais laiſſer aucune incertitude ſur le nombre de fois qu'elle y eſt compriſe, avec ou ſans reſte.

Si l'on avoit voulu ſommer les fractions ci-deſſus, ſous la forme ordinaire, on auroit trouvé que la ligne cherchée étoit égale à $\frac{1895}{6552}$ de la ſeconde.

PROBLÊME XLVI.

Faire paſſer un même corps par un trou quarré, rond & elliptique.

On ne donne ici ce prétendu problême, que parcequ'il ſe trouve dans toutes les *Récréations*

Mathématiques imprimées jusqu'à présent ; car rien au monde n'est si simple & plus facile à trouver, pour peu qu'on connoisse les corps les plus simples de la géométrie.

Ayez en effet un cylindre droit, & imaginez-le coupé par l'axe; cette section sera un quarré ou un rectangle : coupez-le par un plan perpendiculaire à l'axe; la section sera un cercle : enfin concevez-le coupé obliquement à cet axe; la section sera une ellipse. Conséquemment, si vous percez dans un carton, une planche, &c. trois trous égaux, l'un à ce rectangle, l'autre au cercle, le troisieme à l'ellipse, il est évident qu'on fera passer le cylindre par le premier de ces trous, en le mouvant dans le sens perpendiculaire à son axe; on le fera passer par le trou circulaire, en le présentant dans le sens de son axe; enfin il passera par le trou elliptique, en le faisant passer sous l'obliquité convenable; & il effleurera dans tous les cas les bords du trou, ensorte que si ce trou étoit plus petit, on ne sçauroit l'y faire passer.

On pourroit résoudre le problême au moyen d'autres corps; mais cela est si simple & même si puéril, qu'il seroit ridicule de s'étendre plus longtemps sur un pareil objet.

PROBLÊME XLVII.

Mesurer le cercle, ou trouver un espace rectiligne égal au cercle; ou, plus généralement, trouver une ligne droite égale à la circonférence du cercle, ou à un arc donné de cette circonférence.

Nous sommes bien éloignés de prétendre donner ici la solution exacte & parfaite de ce problême : il est plus que probable qu'il échappera à jamais aux efforts de l'eſprit humain ; mais il eſt convenu en géométrie que, lorſqu'un problême n'eſt pas réſoluble dans ſa perfection, c'eſt un mérite d'en approcher ; & il y en a d'autant plus, que l'on circonſcrit la quantité inconnue dans des limites plus voiſines. Or, à cet égard, les géometres déſeſpérant de trouver jamais la grandeur préciſe du cercle, ou de ſa circonférence, ou d'un arc quelconque, ont fait des choſes très-dignes de remarque ; car ils ont trouvé des moyens d'approcher de ſi près de la grandeur de cette figure, que, quand même un cercle auroit pour rayon la diſtance du ſoleil aux premieres étoiles fixes, on feroit ſûr de ne pas ſe tromper, ſur ſa circonférence, du diametre d'un cheveu. Il n'en faut aſſurément pas tant pour ſatisfaire aux beſoins les plus recherchés des arts ; cependant, il faut en convenir, l'eſprit géométrique goûteroit un plaiſir vif à connoître préciſément la grandeur du cercle, à la connoître, dis-je, avec cette préciſion avec laquelle on ſçait, par exemple, qu'un ſegment parabolique eſt les deux tiers du parallélogramme de même baſe & même hauteur.

Nous allons commencer à donner des approximations arithmétiques ; enſuite nous enſeignerons des conſtructions géométriques aſſez curieuſes & aſſez approchantes ; enfin nous donnerons un précis hiſtorique des recherches qui ont eu la quadrature du cercle pour objet.

§. I.

Etant donné le diametre d'un cercle, trouver en nombres approchés la circonférence, ou au contraire.

Si vous n'avez beſoin que d'une exactitude médiocre, servez-vous du rapport d'Archimede, qui a démontré que le diametre étoit à la circonférence à très-peu près comme 1 à $3\frac{1}{7}$, ou comme 7 à 22.

Faites donc cette proportion, comme 7 à 22, ainsi le diametre donné est à un quatrieme terme; ou bien triplez le diametre, & ajoutez-y un septieme: vous aurez à peu de chose près la circonférence.

On trouveroit ainsi la circonférence d'un cercle du diamette de 100 pieds, égale à 314 pieds 3 pouces 5 lignes & $\frac{1}{7}$: l'erreur seroit d'environ 1 pouce 6 lignes.

Voulez-vous approcher davantage de la vérité, servez-vous du rapport de Métius, sçavoir, de celui de 113 à 355; c'est à-dire, faites comme 113 à 355, ainsi le diametre donné à la circonférence cherchée.

Même supposition que ci-dessus, on trouveroit la circonférence de 314 pieds 1 pouce 10 lignes & $\frac{106}{113}$, dont la différence avec la véritable circonférence est moindre qu'une ligne.

Si l'on veut une exactitude encore plus grande, il n'y a qu'à se servir du rapport de 10000000000 à 31415926535: l'erreur, sur la circonférence d'un cercle grand comme l'équateur de la terre, seroit au plus d'une demi-ligne.

S'il s'agit de trouver le diametre, la circonférence étant donnée, il est clair qu'il faut prendre la proportion inverse; ainsi l'on fera cette proportion, comme 22 est à 7, ou comme 355 à 113, ou comme 314159 à 100000, ou comme 31415926535 à 10000000000, ainsi la circonférence donnée à un quatrieme terme, qui sera le diametre cherché.

§. II.

Le diametre étant donné, trouver la grandeur du cercle.

Archimede a démontré que le cercle étoit égal au rectangle de la moitié du rayon par la circonférence. Cherchez donc, par le paragraphe précédent, la grandeur de la circonférence; multipliez-la par la moitié du rayon ou le quart du diametre : le produit sera l'aire du cercle, d'autant plus exacte que vous aurez pris pour circonférence un nombre plus exact.

En employant le rapport d'Archimede, l'erreur, sur un cercle de 100 pieds de diametre, seroit d'environ 3 pieds quarrés $\frac{1}{8}$.

Celui de Métius ne donneroit qu'une erreur moindre que 25 pouces quarrés, ou environ un sixieme de pied quarré. Or ce cercle seroit d'environ 7854 pieds quarrés; l'erreur seroit donc, au plus, d'une 47124^{e} de l'aire totale.

Si l'on se servoit du rapport de 10000000000 à 31415926535, l'erreur seroit à peine d'un 50^{e} de ligne quarrée.

Mais on peut, sans rechercher la circonférence, trouver la grandeur du cercle : car, du rapport d'Archimede, il suit que le quarré du diametre est à l'aire du cercle comme 14 à 11; de celui de Métius, que ce quarré est au cercle comme 452 à 355; de celui de 100000 à 314159, que ce même quarré est au cercle comme 100000 à 78539, ou, plus exactement encore, comme 1000000 à 785398.

Ainsi l'on trouvera encore la grandeur du cercle, en faisant cette proportion, comme 14 à 11, ou comme 452 à 355, ou comme 1000000 à 785398, ainſi le quarré du diametre donné à une quatrieme proportionnelle, qui ſera la grandeur très-approchée du cercle, ſi l'on s'eſt ſervi du dernier rapport.

§. III.

Conſtructions géométriques fort approchées d'un quarré égal à un cercle, ou d'une ligne droite égale à la circonférence circulaire.

Quoique l'on vienne de voir le moyen de trouver numériquement le rapport approché d'un cercle avec le quarré de ſon diametre, il y a cependant quelques conſtructions géométriques aſſez ingénieuſes, & remarquables par leur ſimplicité, pour parvenir au même but : nous avons cru qu'elles ne pouvoient être mieux placées qu'ici.

Pl. 9, fig. 74. 1. Soit le cercle BADC, dont AC eſt un diametre, & AB un quart de cercle ; que AE, ED, DC, ſoient des cordes égales au rayon, & que du point B on tire aux points E, D, les lignes BE, BD, qui couperont le diametre en F & G : la ſomme des lignes BF, FG, ſera égale au quart de cercle, à une 5000e près.

Fig. 75. 2. Soit le cercle dont le diametre eſt AD, le centre C, & CB le rayon perpendiculaire à ce diametre. Soit priſe dans la prolongation de AD, la ligne DE égale au rayon ; ſoit enſuite tirée BE, à laquelle on fera, dans la prolongation de AE, la ligne EF égale ; enfin ajoutez à cette ligne ſa cinquieme partie FG : la ligne AG ſera, à moins d'une 17000e près, égale à la circonférence du cercle décrit du rayon CA.

Car, en ſuppoſant DA égale à 100000, on trouve cette ligne égale à 314153, avec moins d'une d'une unité d'erreur : or la circonférence répondante à ce diametre eſt, à moins d'une unité près, 314159 ; ainſi l'erreur eſt tout au plus de $\frac{6}{100000}$ du diametre, ou environ $\frac{1}{17000}$.

3. Le demi-cercle ABC étant propoſé ; aux extrémités A & C de ſon diametre ſoient élevées deux perpendiculaires ; l'une CE, égale à la tangente de 30° ; l'autre AG, égale à trois fois le rayon ; enfin, qu'on tire la ligne GE : elle ſera égale à la demi-circonférence du cercle, à une cent millieme près du diametre. Pl. 9, fig. 76.

Car on trouve, au moyen de cette conſtruction, le rayon étant ſuppoſé 100000, la ligne EG égale, à moins d'une unité près, à 314162 ; la demi-circonférence ſeroit, à moins d'une unité près, 314159 : l'erreur eſt d'environ $\frac{3}{100000}$ du rayon, ou moins d'une cent millieme de la circonférence.

4. Soit le cercle, dont le centre eſt A, avec ſes deux diametres perpendiculaires l'un à l'autre. Sur un rayon tel que AD, prenez AF égale à la moitié du côté EC du quarré inſcrit ; tirez BFI indéfinie ; menez FH au point H, qui coupe AC en moyenne & extrême raiſon, AH étant le moindre ſegment ; par le point C, ſoit menée CI parallele à FH : le quarré BLKI, conſtruit ſur BI, ſera à très-peu de choſe près égal au cercle dont BC eſt le diametre. Fig. 77.

Car on trouve, par le calcul, que BF & BH ſont égales à 69098 & 61237 reſpectivement, le rayon étant 100000 : donc BI ſe trouve de 88623, dont le quarré eſt 78540, le quarré du diametre étant 100000, tandis que le cercle eſt 78539.

5. Inſcrivez dans un cercle donné un quarré, &, à trois fois le diametre, ajoutez un cinquieme du côté du quarré : vous aurez encore une ligne

qui ne différera de la circonférence que d'une 17000^e environ.

§. IV.

Quelques manieres très-approchées de déterminer, ſoit numériquement, ſoit géométriquement, une ligne droite égale à un arc de cercle donné.

Pl. 9, fig. 78. 1. Soit l'arc BG, partie du demi-cercle, qui doit néanmoins ne guere excéder 30°. Pour en avoir la longueur approchée en une ligne droite, ſoit BH, perpendiculaire au diametre AB, & ſoit ce diametre prolongé en AD, de ſorte que AD ſoit égale au rayon : ſi l'on tire DG, elle retranchera de BH la ligne BE un peu moindre, mais très-approchante de la grandeur de l'arc BG.

Mais ſi l'on tiroit la ligne *dfGe*, enſorte que le ſegment *df*, intercepté entre le cercle & le diametre prolongé, fût égal au rayon, alors la droite B*e* ſeroit un peu plus grande que l'arc BG, mais extrêmement approchante, quand cet arc n'excédera guere 30°.

Ce théorême eſt dû à Snellius, mais M. Huygens eſt le premier qui l'ait démontré : nous en verrons plus loin un uſage fort commode pour la trigonométrie.

2. On démontre encore, d'après M. Huygens, que deux fois la corde de la moitié d'un arc, plus le tiers de la différence de cette ſomme avec la corde de l'arc entier, égalent à très-peu près l'arc lui-même, quand il n'excede pas 30°.

Car, ſuppoſons cet arc de 30°; la corde eſt de 25882 parties, dont le diametre eſt 100000; celle de la moitié de cet arc, ou de 15°, eſt de 13053, dont le double eſt 26106 : ôtez-en 25882, la différence eſt 224, dont le tiers eſt $74\frac{2}{3}$: ajoutez ce nombre à 26106, vous aurez $26180\frac{2}{3}$ pour l'arc de 30°. En effet, le duodécuple de cet arc doit donner la circonférence entiere. Or ce duodécuple est 314168, & la circonférence est 314159; la différence n'est donc que de neuf cent milliemes du rayon.

REMARQUE.

NOUS avons promis plus haut de donner une histoire abrégée des recherches sur la *Quadrature du Cercle* : nous acquittons ici notre promesse. Ce que nous allons dire est le précis d'un ouvrage fort curieux, imprimé chez Jombert en 1754.

Il est d'abord à propos de faire deux classes des hommes qui se sont occupés de ce problême. Les uns, habiles géometres, ne se sont pas fait illusion. Reconnoissant la difficulté ou l'impossibilité du problême, ils se sont bornés à trouver des moyens d'approximation de plus en plus exacts. Leurs recherches ont eu souvent l'avantage d'aboutir à des découvertes sur toutes les parties de la géométrie.

Les autres, sont ces bonnes-gens qui, quelquefois à peine initiés dans la géométrie, à peine sçachant à quoi tient le problême, font tous leurs efforts pour le résoudre, & entassent paralogismes sur paralogismes. Semblables au malheureux Ixion, condamné à rouler éternellement un fardeau, sans pouvoir l'amener à son terme, on les voit tourner & retourner le cercle de tous les côtés, sans en être plus avancés. Un géometre les a-t-il convaincus d'une erreur dans leur prétendue démonstration; on les voit revenir, peu de jours après, avec la même démonstration reprise en sous-œuvre, & aussi pitoyable. Bien souvent ils ne tardent pas à contester les vérités les plus élémentaires de la géométrie ; & d'ordinaire, reconnoissant la foiblesse de leurs connoissances dans ce genre, ils se regardent comme illuminés spécialement par le Ciel pour révéler aux hommes des vérités dont il a voulu refuser la découverte aux sçavants, pour l'accorder aux idiots. Tel est le tableau plaisant & tout-à-fait véritable de ce genre d'hommes. On sent aisément que, dans l'histoire abrégée que nous allons tracer de la quadrature du cercle, nous ne ferons pas aux grands géometres le tort de les accoler avec ces derniers. Les écarts singuliers de quelques-uns de ceux-ci nous fourniront, seulement à la fin, la matiere d'un morceau propre à amuser.

La géométrie naissoit à peine parmi les Grecs, que la quadrature ou la mesure du cercle y exerça les esprits. On dit qu'Anaxagore s'en occupa dans sa prison ; mais on ne sçait point avec quel succès. La question étoit déja célebre dès le temps d'Aristophane, & peut-être avoit déja fait tourner la tête à quelque géometre ; car, voulant ridiculiser le célebre Méton, il l'introduisit sur la scene, promettant de quarrer le cercle.

Le géometre Hippocrate de Chio s'en occupa certainement ; car ce ne peut être qu'en cherchant à quarrer le cercle qu'il trouva ses fameuses lunulles. On lui attribue même une certaine combinaison de lunulles, dont on prétend qu'il déduisoit la quadrature du cercle ; mais c'est, à mon avis, avec peu de fondement ; & cet homme, qui tint un rang distingué parmi les géometres de son temps, ne pouvoit être dupe d'un paralogisme d'écolier : son objet n'étoit que de montrer que, si l'on pouvoit égaler à un espace rectiligne la lunulle décrite sur le côté de l'exagone inscrit, on en tireroit la quadrature du cercle ; en quoi il avoit raiſon.

Il eſt très-probable qu'on n'a pas ignoré long-temps que le cercle eſt égal au rectangle de la demi-circonférence par le rayon. La géométrie, dès avant Platon, s'étoit déja enrichie de découvertes plus difficiles. C'eſt néanmoins dans les écrits d'Archimede qu'on trouve pour la premiere fois cette vérité. Mais cela ne ſuffiſoit pas ; il reſtoit à ſçavoir quel rapport régnoit entre la circonférence & le diametre ou le rayon. Cette recherche cauſa ſans doute quelques inſomnies à ce profond géometre. Ne pouvant y parvenir dans l'exactitude géométrique, il ſe retourna du côté de l'approximation ; & il trouva, en calculant la longueur d'un polygone inſcrit de 96 côtés, & celle du polygone circonſcrit ſemblable, que le diametre étant 1, la circonférence eſt plus grande que $3\frac{10}{71}$, & moindre que $3\frac{10}{70}$ ou $3\frac{1}{7}$. Car il fait voir que le polygone inſcrit eſt un peu plus grand que $3\frac{10}{71}$, & que le circonſcrit eſt un peu moindre que $3\frac{10}{70}$.

Depuis ce temps, quand on ne recherche pas une grande exactitude, on prend, pour le rapport du diametre à la circonférence, ce rapport de 1 à $3\frac{1}{7}$, ou de 7 à 22 ; c'eſt-à-dire, on triple le diametre, & l'on y ajoute un ſeptieme : il n'y a même plus que les plus groſſiers des ouvriers qui négligent cette ſeptieme.

On ſçait que quelques autres géometres de l'antiquité s'occuperent du même objet : tels furent Apollonius, & un certain Philon de Gadare ; mais les approximations plus exactes qu'ils donnerent ne nous ſont point parvenues.

Le premier des géometres modernes qui ait ajouté quelque choſe à ce que les anciens nous avoient transmis sur la mesure du cercle, est Pierre Métius, géometre des Pays-Bas, qui vivoit vers la fin du seizieme siecle. Occupé à réfuter la prétendue quadrature d'un certain *Simon à Quercu*, il trouva cette proportion très-remarquable, & singuliérement approchée entre le diametre & la circonférence, sçavoir, de 113 à 355. L'erreur est à peine d'un dix-millionieme de la circonférence.

Après lui, ou dans le même temps, Viete, célebre analyste & géometre François, exprima le rapport de la circonférence au rayon par celui de 10000000000 à 31415926535, & fit voir que ce dernier nombre étoit moindre qu'il ne falloit, & qu'augmentant d'une seule unité son dernier chiffre, il étoit trop grand. Vers le même temps encore, Adrianus Romanus, géometre des Pays-Bas, poussa cette approximation jusqu'à 16 chiffres. Mais ils furent laissés fort en arriere par Ludolph van Ceulen, aussi des Pays-Bas, qui poussa ce rapport approché jusqu'à 35 chiffres. Il fit voir que, le diametre étant l'unité suivie de 35 zéro, la circonférence est plus grande que 31415926535897932384626433832795028 8, & moindre que 3141592653589793238462643-832795028 9. Il se sçut si bon gré de ce travail, qui au fond exigeoit plus de patience que de sagacité, qu'il voulut, à l'exemple d'Archimede, que son tombeau en fût orné: ce qui a été exécuté; & l'on voit, dit-on, encore ce singulier monument dans une ville de Flandres.

Willebrord Snellius, autre compatriote de Métius, ajouta diverses choses intéressantes à cette matiere, dans son livre intitulé *Cyclometria*. Il trouva la maniere d'exprimer, par un rapport très-approché & par un calcul très-simple, la grandeur d'un arc quelconque ; & il s'en servit pour vérifier le calcul de van Ceulen, qu'il trouva exact. Il calcula aussi la suite des polygones, tant inscrits que circonscrits au cercle, en doublant toujours le nombre des côtés, depuis le décagone, jusqu'à celui de 5242880 côtés ; ensorte que, lorsqu'on propose un prétendu rapport exact du diametre à la circonférence, on peut, par cette table, le réfuter, & montrer quel est le polygone circonscrit au dessous duquel tombe la prétendue valeur de la circonférence, ou quel polygone circonscrit elle surpasse : ce qui, dans l'un & l'autre cas, sert également à montrer la fausseté de la prétendue rectification de la circonférence circulaire.

Le célebre Huygens, encore fort jeune, enrichit la théorie de la mesure du cercle de nombre, de nouveaux théorêmes. Il combattit aussi la prétendue quadrature du cercle, que le pere Grégoire de Saint-Vincent, Jésuite des Pays-Bas, avoit annoncée comme trouvée, & n'exigeant plus que quelques calculs qu'il avoit habilement négligé de faire. Grégoire de Saint-Vincent étoit d'ailleurs un grand géometre : il répondit à Huygens : celui-ci répliqua : quelques disciples de Grégoire entrerent dans la lice : Leotaud, autre géometre Jésuite, le combattit encore. Il a resté pour constant, quoi qu'en ait dit le pere Castel, que Grégoire s'étoit trompé, & que son gros ouvrage, rempli d'ailleurs de très-belles choses, aboutissoit à une erreur, ou à quelque chose d'inintelligible. Car, puisqu'il prétendoit avoir trouvé la quadrature du cercle, que ne faisoit-il le calcul qui la devoit exprimer numériquement ? Or c'est ce que, ni lui, ni quelques-uns de ses disciples qui mirent beaucoup d'aigreur dans cette querelle, ne firent jamais.

Jacques Grégori, géometre Ecossois, entreprît, en 1668, de démontrer l'absolue impossibilité de la quadrature du cercle. Il le fit par un raisonnement très-ingénieux, & qui mériteroit peut-être d'être plus approfondi. Quoi qu'il en soit, il n'eut pas l'approbation d'Huygens, & ce fut l'occasion d'une querelle assez vive entre ces deux géometres. Au reste, Grégori donnoit plusieurs pratiques ingénieuses pour approcher de plus en plus de la mesure du cercle, & même de celle de l'hyperbole.

La haute géométrie fournit un grand nombre de manieres différentes de trouver par approximation la grandeur du cercle, & la plupart beaucoup plus faciles que les précédentes. Mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans leur explication. Il nous suffira de dire que ces moyens ont permis de pousser l'approximation de Ludolph van Ceulen, jusqu'à 127 chiffres ou décimales. Sharp, géometre Anglois, la poussa d'abord jusqu'à 74 chiffres; ensuite M. Machin la prolongea jusqu'à cent; enfin M. de Lagny la continua jusqu'à 127. La voici. Le diametre étant l'unité suivie de 127 zéro, la circonférence est plus grande que 314159265358 9793238462643383279502884197169399375-1058209749445923078174062962089986280-3482534211706798214808651327230664709-38446, & moindre que le même nombre, en augmentant seulement le dernier chiffre de l'unité. Ainsi l'erreur est moindre qu'une portion du diametre qu'exprimeroit l'unité, divisée par l'unité suivie de 127 zéro. En supposant un cercle d'un diametre mille millions de fois plus grand que la distance de la terre au soleil, l'erreur, sur la circonférence, seroit mille millions de fois moindre que l'épaisseur d'un cheveu.

Il seroit même possible d'aller encore plus loin. M. Euler en a montré le moyen dans les Mémoires de Pétersbourg ; mais ce seroit, il faut l'avouer, une peine assez superflue.

Nous croyons ne pouvoir mieux terminer ce précis des recherches sur la quadrature du cercle, que par l'histoire assez amusante de quelques-uns de ceux qui ont ridiculement échoué dans la recherche de ce problême, ou qui ont donné dans des travers particuliers à cette occasion.

Le premier de ceux qui ont ainsi prétendu, parmi les modernes, avoir trouvé la quadrature du cercle, est le cardinal de Cusa. Une de ses méthodes, étoit de faire rouler un cercle ou un cylindre sur un plan, jusqu'à ce que le point qui l'avoit touché d'abord retournât s'y appliquer ; ensuite, par des raisonnements qui n'avoient rien de géométrique, il cherchoit à déterminer la longueur de la ligne ainsi parcourue. Il fut réfuté par Régiomontanus, en 1464 & 1465.

Après lui, c'est-à-dire vers le milieu du seizieme siecle, Oronce Finée, quoique professeur royal des mathématiques, s'illustra encore par ses paralogismes, non-seulement sur la quadrature du cercle, mais encore sur la trisection de l'angle & sur la duplication du cube ; mais il trouva dans Pierre Nonius, géometre Portugais, & J. Borel, son ancien disciple, des contradicteurs qui dévoilerent clairement ses faux raisonnements. Je n'ai jamais conçu la réputation de cet Oronce Finée, dont on a aussi une Gnomonique qui n'est qu'un tissu de paralogismes.

On est étonné de voir peu après le fameux Joseph Scaliger donner dans le même travers. Comme il eſtimoit peu les géometres, il voulut leur montrer la ſupériorité d'un ſçavant comme lui, en réſolvant, par maniere de délaſſement, ce qui les embarraſſoit depuis ſi long-temps : il chercha la quadrature du cercle, & crut bonnement l'avoir trouvée, en donnant pour meſure du cercle, une quantité qui ſe trouve ſeulement un peu moindre que le dodécagone inſcrit. Il ne fut pas difficile à Viete, Clavius & d'autres, de le réfuter ; ce qui le mit fort en colere, & attira, ſuivant l'uſage du ſiecle, au dernier ſur-tout, beaucoup d'épithetes honnêtes, & le confirma de plus en plus que les géometres n'avoient pas le ſens commun.

Je ſuis fâché de trouver ici Longomontanus, l'aſtronome Danois, qui prétendit prouver que le diametre eſt à la circonférence, préciſément comme 100000 à 314185. Peu de temps après, le fameux Hobbes crut auſſi avoir trouvé la quadrature du cercle; &, ayant été réfuté par Wallis, il entreprit de prouver que toute la géométrie tranſmiſe juſqu'alors, n'étoit qu'un tiſſu de paralogiſmes. C'eſt l'objet d'un ouvrage intitulé : *De ratiociniis & faſtu Geometrarum.*

L'agriculteur Olivier de Serres crut avoir trouvé, en peſant un cercle & un triangle égal au triangle équilatéral inſcrit, que le cercle en eſt préciſément le double. Le bon-homme ne voyoit pas que ce double eſt préciſément l'exagone inſcrit au même cercle.

Un M. Dethlef Cluver prétendoit, en 1695, quarrer le cercle : il réduiſoit le problême à cet autre incomparablement plus aiſé, qu'il énonçoit ainſi : *Invenire mundum Menti divinæ analogum.* Il déquarroit la parabole, & prouvoit qu'Archimede s'étoit trompé dans la meſure de cette figure.

Il ne tint pas à M. Leibnitz de le mettre aux prises avec M. Nieuwentyt, qui entassoit aussi alors beaucoup de mauvaises difficultés contre les nouveaux calculs ; mais cela ne réussit pas.

Quoique ces ridicules eussent dû, ce semble, en prévenir d'autres, on n'a pas laissé de voir, & l'on voit encore chaque jour, des hommes donner dans des travers équivalents. On a vu, par exemple, il y a une vingtaine d'années, un M. Liger, qui trouvoit la quadrature du cercle, en démontrant que la racine quarrée de 24 étoit la même que celle de 25 ; celle de 50, la même que celle de 49 : ce qu'il démontroit, suivant ses termes, non par des raisonnements géométriques qu'il abhorroit, mais par le *méchanisme en plein des figures*.

Le sieur T. de N., notaire à . . . . , a trouvé quelque chose de bien plus curieux : c'est qu'on ne doit pas mesurer les courbes en les comparant aux droites, mais les droites en les comparant aux courbes. Cela démontré, la quadrature du cercle n'est plus qu'un jeu d'enfant.

M. Clerget a fait une autre découverte non moins intéressante : c'est que le cercle est un polygone d'un nombre de côtés déterminé ; & de-là il déduisoit, ce qui est très-curieux, la grandeur du point où se touchent deux spheres inégales. Il démontroit aussi l'impossibilité du mouvement de la terre. On n'avoit pas entrevu avant lui la moindre affinité entre ces questions.

Que dirai-je des calculs compliqués de feu M. Basselin, professeur de l'université, qui trouva, avec presque autant de travail que Ludolph, un rapport du diametre à la circonférence, qui étoit même hors des limites d'Archimede ? Ce bonhomme, qui avoit trouvé si heureusement la quadrature du cercle, ignora, jufqu'à quelques jours avant fa mort, qu'Archimede eût quarré la parabole. Il fe propofoit bien auffi, s'il revenoit de fa maladie, d'examiner le procédé d'Archimede, bien convaincu qu'il étoit que le géometre Syracufain s'étoit trompé.

Mais fi ces hommes n'ont encouru que le ridicule, & un ridicule renfermé dans le cercle étroit d'un petit nombre de géometres, en voici un à qui l'ambition de quarrer le cercle coûta plus cher. C'étoit un fieur Mathulon, qui, de fabriquant d'étoffes à Lyon, prétendit fe faire géometre & méchanicien; mais il eut moins de fuccès qu'Hippocrate de Chio, qui, de marchand de vin à Athenes, devint un géometre illuftre. Le fieur Mathulon dépofa, il y a une quarantaine d'années, à Lyon, une fomme de 1000 écus, annonçant aux géometres & aux méchaniciens la découverte de la quadrature du cercle & du mouvement perpétuel, & confentant que cette fomme fût remife à celui qui lui démontreroit fon erreur. M. Nicole, de l'académie des fciences, lui prouva que fa géométrie étoit fort bornée; que fa prétendue quadrature n'étoit qu'un paralogifme; & il demanda que les 1000 écus lui fûffent adjugés. Le fieur Mathulon incidenta, & prétendit qu'il falloit auffi prouver la fauffeté de fon mouvement perpétuel; mais il perdit fon procès à la Sénéchauffée de Lyon, & M. Nicole céda les 1000 écus à l'hôpital général de cette ville, à qui ils furent remis.

Si le Châtelet de Paris eût été auffi févere, il en eût coûté bien davantage à un homme de condition, qu'on vit, il y a une vingtaine d'années, annoncer la quadrature du cercle, provoquer tout l'univers à dépofer les plus fortes fommes contre lui ; enfin consigner, par forme de défi, 10000 liv. pour être adjugées à celui qui lui démontreroit qu'il s'étoit trompé. On ne peut voir qu'en gémissant sur la foiblesse de l'esprit humain, cette grande découverte se réduire à partager un cercle en quatre parties égales par des diametres perpendiculaires, retourner ces quatre quarts de cercle leurs quatre angles en dehors, pour en faire un quarré, & prétendre que ce quarré étoit égal au cercle. Dans ses principes, il n'est pas nécessaire, pour que deux figures fussent égales, qu'elles se touchassent dans toute leur étendue : il suffit qu'elles se touchent où elles peuvent se toucher. Ainsi le quarré est non-seulement égal au cercle inscrit, mais encore à une figure renfermée dans le cercle, & dont les angles saillants s'appuient sur la circonférence : d'où résulte, suivant le sens de l'auteur, une explication palpable de la Trinité ; car il est évident que le quarré est le Pere, le cercle le Fils, & la troisieme figure est le S. Esprit. Dirai-je encore que l'auteur expliquoit avec la même sagacité le péché originel, la figure de la terre, la déclinaison de l'aiguille aimantée, les longitudes, &c ?

Il n'étoit pas difficile de montrer à tout autre qu'à l'auteur, qu'il n'y avoit pas le sens commun en tout cela. Aussi trois personnes, dont étoit une femme, se mirent sur les rangs pour avoir les 10000 liv. consignées. L'affaire fut plaidée au Châtelet ; mais ce tribunal jugea que la fortune d'un homme ne devoit pas souffrir des erreurs de son esprit, quand ils ne sont point nuisibles à la société. D'un autre côté, le Roi ordonna que les paris fussent regardés comme non avenus ; & chacun retira son argent. L'auteur extorqua à l'académie un jugement qui le renvoya aux premieres notions de la géométrie, & n'en resta pas moins persuadé que les siecles à venir rougiront pour le nôtre de l'injustice qui lui a été faite.

PROBLÊME XLVIII.

De la longueur de la circonférence elliptique.

NOUS venons de parler assez au long de la circonférence circulaire, dont la détermination précise en longueur donneroit la quadrature du cercle; mais nous ne connoissons aucun auteur qui ait dit quelque chose de satisfaisant & d'utile à la pratique sur la circonférence de l'ellipse. Il est cependant nécessaire dans bien des cas, & même dans la pratique de la géométrie, de connoître la longueur de cette courbe : il y a aussi, dans la haute géométrie, bien des problêmes dont la solution dépend de cette même connoissance. Nous croyons donc faire ici quelque chose d'utile, que de traiter de cet objet.

Il y a eu des auteurs de géometrie pratique, qui ont pensé que la circonférence d'une ellipse étoit moyenne arithmétique entre les circonférences des cercles décrits sur ses deux axes comme diametres : mais ils étoient dans l'erreur; & s'ils eussent été un peu plus doués de l'esprit géométrique, ils s'en seroient apperçu facilement; car il est bien aisé de se démontrer que cela est faux dans une ellipse très-allongée, comme celle dont le grand axe seroit 20, & le petit axe 2. En effet, la circonférence de cette ellipse seroit bien assurément plus grande que 40, tandis que la moyenne proportionnelle entre les circonférences des cercles décrits sur ces axes comme diametres, ne seroit guere que $34\frac{1}{2}$.

Au reste, la rectification de la circonférence elliptique est un problême qui est presque, à l'égard de la quadrature du cercle, ce que celle-ci est à l'égard d'un problême de géométrie ordinaire. M. Jean Bernouilli est le seul qui ait donné une méthode susceptible d'être réduite en pratique, pour mesurer la longueur de la ligne elliptique. Il enseigne en effet, dans un Mémoire excellent qu'on lit parmi ses ouvrages, il enseigne, dis-je, à déterminer des circonférences circulaires, qui sont des limites alternativement moindres & plus grandes que la circonférence d'une ellipse donnée. C'est d'après cette méthode que nous avons calculé la table qui suit. Nous y avons supposé une suite d'ellipses dont le demi-grand axe commun est de 10 parties, & dont le demi-petit axe devient successivement 1, 2, 3, &c. jusqu'à 10, derniere valeur qui donne un cercle; & nous avons trouvé que la longueur de ces circonférences d'ellipse étoient comme l'on voit ci-dessous.

Longueur commune du grand Axe . . . 20.		
Petit Axe.	*Long. de la circonférence elliptique.*	*Long. de la circonférence moyenne des cercles des gr. & pet. Axe.*
2	40.63245	34.5579
4	42.01968	37.6990
6	43.68526	40.8406
8	46.02506	43.9822
10	48.44215	47.1238
12	51.05407	50.2654
14	53.82377	53.4070
16	56.72739	56.5486
18	59.81022	59.6902
20	62.83185	62.83185

On voit par-là que la circonférence du cercle moyen entre ceux du grand & du petit axe, est toujours moindre que la ligne elliptique, & d'autant plus sensiblement, que l'ellipse differe davantage du cercle : l'erreur est d'un 7e dans la premiere des ellipses ci-dessus.

On pourra au reste, par le moyen de cette table, calculer toutes les longueurs d'ellipse moyennes entre les précédentes : il n'y aura qu'à prendre des parties proportionnelles.

Supposons, par exemple, que le grand axe d'une demi-ellipse fût de 20 pieds, & que la hauteur de sa montée ou son demi-petit axe fût de 7 pieds & demi ; il est évident que le petit axe entier seroit de 15 pieds. Cette ellipse tiendroit donc le milieu entre celle dont le demi-petit axe est les $\frac{14}{20}$ du grand, & celle dont le petit axe en est les $\frac{16}{20}$. Or, en partageant en deux la différence entre les longueurs de ces deux ellipses, on trouvera, sans erreur considérable, que la longueur de la circonférence de cette ellipse moyenne sera de 55.2755$\frac{8}{}$ parties, dont l'axe est 20 : par conséquent la moitié de l'ellipse proposée, de 20 pieds d'ouverture & de $7\frac{1}{2}$ de montée, aura 27 pieds 6 pouces 8 lignes, & l'erreur ira à peine à une ligne.

PROBLÊME XLIX.

Décrire géométriquement un cercle, dont la circonférence soit très-approchante de celle d'une ellipse donnée.

C'EST encore M. Jean Bernouilli qui a enseigné ce moyen simple & ingénieux de décrire un cercle isopérimetre à une ellipse donnée. Comme il peut servir de supplément à ce que nous venons de de dire ſur la rectification de l'ellipſe, nous allons lui donner place ici.

Soit donc une ellipſe dont les deux axes ſont donnés. Faites-en une ſeule ligne droite, comme AD, dans laquelle AB eſt égale au grand axe, & BD au petit; que cette ligne A D ſoit le diametre d'un demi-cercle AED, que vous diviſerez en 4, ou 8, ou 16, ou 32 parties, &c. comme vous voudrez, & ſelon que vous aſpirerez à une plus grande préciſion. Nous ſuppoſons ici ce nombre de parties égal à 16. Menez du point B à chaque point de diviſion, des lignes droites; prenez enſuite la ſeizieme partie de la ſomme de toutes ces lignes, BA, B1, B2, B3, &c. juſqu'à BD incluſivement; enfin, avec la ligne qui en proviendra comme rayon, décrivant un cercle, vous aurez une circonférence circulaire tellement approchante de celle de l'ellipſe donnée, qu'elle n'en différera pas d'une cent millieme partie dans les cas même les plus défavorables, comme ſi le rapport des axes de cette ellipſe étoit de 10 à 1. Pl. 16, fig. 130.

Il eſt aiſé de voir que, ſi l'on n'avoit diviſé le demi-cercle qu'en 8 parties, il ne faudroit prendre que la huitieme partie de la ſomme de toutes les lignes tirées aux points de diviſion, y compris les points B & A.

Si l'on exécutoit cette opération ſur un cercle d'un pied de rayon, on parviendroit à un degré de préciſion très approchant de la vérité; &, par le moyen d'une échelle géométrique ſubtilement diviſée, on trouveroit ſans calcul des approximations numériques très-ſatisfaiſantes.

PROBLÊME L.

Déterminer une ligne droite à très-peu près égale à un arc de ligne courbe quelconque.

Nous supposons que l'amplitude de l'arc donné est peu considérable, & tout au plus d'une vingtaine de degrés ; c'est-à-dire que, si l'on tire des tangentes aux extrémités de cet arc, & ensuite des perpendiculaires à ces tangentes, l'angle compris par ces perpendiculaires sera au plus d'une vingtaine de degrés.

Cela supposé, tirez la corde de cet arc ; prenez ensuite, soit au moyen du calcul, soit au moyen du compas, le tiers des tangentes comprises entre leur rencontre & les points de contact ; ajoutez-y les deux tiers de la corde : vous aurez une ligne droite si approchante de la grandeur de l'arc, que, dans le cas ci-dessus, elle n'en différera pas d'un dix-millieme. Mais si l'amplitude n'étoit que de 5° environ, l'erreur n'iroit pas à une millioneme, comme M. Lambert, de l'Académie de Berlin, le fait voir dans un ouvrage allemand très-intéressant, & qui mériteroit fort d'être traduit.

Si l'amplitude de l'arc donné étoit plus grande, par exemple, d'environ 50°, il n'y auroit qu'à diviser cet arc en trois parties à peu près égales, & mener des tangentes aux extrémités de l'arc & aux deux points de section ; ce qui donneroit une portion de polygone circonscrit à la courbe : enfin il faudroit mener les trois cordes des trois parties de l'arc : les deux tiers de ces trois cordes, ajoutés au tiers des tangentes formant le polygone circonscrit, donneront une ligne approchante à un cent-millieme près de la longueur de l'arc donné.

PROBLÊME LI.

Etant donné un cercle dans lequel est inscrit un quarré, trouver le diametre du cercle, où l'on puisse inscrire un octogone d'égal contour avec ce quarré.

SOIT AB le diametre du cercle donné, & AD le côté du quarré inscrit. Divisez AD en deux également en E, & élevez la perpendiculaire EF à AD, rencontrant le cercle donné en F; tirez AF: ce sera le diametre du cercle où l'octogone inscrit sera égal en contour au quarré donné. Pl. 10, fig. 79.

Car il est évident que le cercle décrit sur le diametre AF passera par le point E, puisque l'angle AEF est droit. Il est de plus évident que la ligne menée du centre I du second cercle au point E, sera parallele à DF. Or l'angle AFD est demi-droit, étant la moitié de l'angle DCA qui est droit, puisque la corde du quarré inscrit soutend un arc de 90°: conséquemment l'angle AIE est de 45°: d'où il suit que AE est le côté de l'octogone inscrit dans le cercle du diametre AF. Or il est évident que huit fois AE égalent quatre fois AD.

Remarque.

SI l'on partage de même AE en deux également en G; qu'on éleve au point G la perpendiculaire GH, jusqu'à la rencontre du second cercle; enfin qu'on mene AH; cette ligne AH sera le diametre d'un troisieme cercle; où, si l'on inscrit un polygone de 16 côtés, il sera isopérimetre au quarré ou à l'octogone ci-dessus.

D'où il suit que, si l'on continuoit cette opération à l'infini, on parviendroit à un cercle ou à un polygone d'une infinité de côtés, isopérimetre au quarré donné. Ainsi la circonférence de ce cercle seroit égale au contour de ce quarré, & l'on auroit la quadrature du cercle.

J'ai vu une tentative ingénieuse de la quadrature du cercle, au moyen de cette considération. L'auteur, qui étoit un professeur de l'Ecole Royale Militaire, nommé M. Janot, réduisoit le problême à une équation assez compliquée, mais exacte, dont la résolution devoit lui donner ce dernier diametre; mais, lorsqu'il en tenta sérieusement la résolution, il trouva les deux membres de son équation composés des mêmes termes; ce qui ne lui donnoit aucune solution.

PROBLÊME LII.

Les trois côtés d'un triangle rectangle étant donnés, trouver sans table trigonométrique la valeur de ses angles.

On suppose d'abord que le rapport de l'hypothénuse au plus petit côté est plus grand ou n'est guere moindre que de 2 à 1, afin que l'angle opposé à ce côté soit au plus d'environ 30°; car l'erreur sera d'autant moindre, que cet angle sera davantage au dessous de 30°.

Cela supposé, supposons, par exemple, l'hypothénuse du triangle égale à 13, le plus grand des côtés autour de l'angle droit 12, & le plus petit 5. Faites cette proportion, comme deux fois l'hypothénuſe, plus le grand côté ou 38, au petit côté ou 5, ainſi 3 fois l'unité ou 3, a une quatrieme proportionnelle $\frac{15}{38}$. Or $\frac{15}{38}$, réduits en fraction décimale, ſont 0.39473 : diviſez ce nombre par 0.1745 ; le quotient ſera le nombre des degrés & parties de degrés de l'angle oppoſé au petit côté : ce quotient eſt $22.\frac{621}{1000}$; ce qui fait 22° 37′ 15″. Or, en le cherchant au moyen des tables, on le le trouve de 22° 37′ 28″.

Si les côtés du triangle approchoient de l'égalité, par exemple, s'ils étoient 3, 4, 5, il faudroit imaginer une ligne CD dans le triangle, partageant également l'angle oppoſé au côté AB ou 3. Or on ſçait que, dans ce cas, le côté oppoſé AB, ſera partagé dans la même raiſon que les côtés adjacents ; par conſéquent on trouvera le ſegment BD en faiſant cette analogie. Pl. 10, fig. 80.

Comme la ſomme des deux autres côtés ou 9 eſt au troiſieme 3, ainſi CB ou 4 eſt à BD, qui ſera $\frac{12}{9}$: ajoutez enſuite les quarrés de $\frac{12}{9}$ & de 4, ou de CD & BD ; & tirant la racine quarrée de la ſomme qui eſt en fractions décimales 17777, on aura pour cette racine 4.21637, qui ſera la valeur de CD. En appliquant enfin la regle ci-deſſus au triangle BCD, on trouvera l'angle BCD de 18° 26′ 7″, & conſéquemment ſon double, ou l'angle ACB, de 36° 52′ 14″. Les tables trigonométriques l'euſſent donné de 36° 52′ 15″, enſorte que la différence n'eſt que d'une ſeconde.

PROBLÊME LIII.

Un arc de cercle étant donné en degrés, minutes & secondes, trouver, sans table trigonométrique, la grandeur du sinus qui lui répond.

La solution que nous allons donner de ce problême n'est pas tout-à-fait aussi simple & aussi courte que celle du précédent ; mais c'est, jusqu'à ce moment, ce que je connois de mieux, d'autant qu'elle est facile, & propre à s'imprimer dans la mémoire, au moyen d'une observation que nous ferons à la fin, & qui en découvrira la source & la démonstration.

Il y a dans ce problême trois cas qui exigent des procédés différents. L'arc donné peut excéder 60°, ou être au dessous ou tout au plus de 30°; enfin il peut être plus grand que 30°, & moindre que 60°.

1. Supposons d'abord que l'arc excede 60°, & que vous veuilliez avoir son sinus. Prenez son complément à 90°, puis réduisez cet arc en parties du rayon, que nous supposons 100000 ; ce qui est facile en multipliant les degrés qu'il contient par 1745 $\frac{4}{10}$, & les minutes par 29.09, & ajoutant les produits. Faites ensuite le quarré & la quatrieme puissance de cet arc ainsi réduit ; divisez le quarré par 2, & ôtez le quotient de l'unité ou du rayon ; divisez la quatrieme puissance par 24, & ajoutez le quotient au restant ci-dessus : le nombre en résultant, sera à très-peu près le sinus de l'arc donné.

Soit, par exemple, l'arc donné de 70° 30', son complément à 90°, sera 19° 30', qui, réduits en parties du rayon, comme nous l'avons dit ci-dessus, donneront 34025. Le quarré de ce nombre, en en retranchant les cinq derniers chiffres, qui sont inutiles, parce que nous n'avons besoin que des 100000es du rayon, est 11583, & sa moitié 5792, qu'il faut ôter de 100000: le restant est 94208. Faites encore le quarré de 11583, ce qui sera la quatrieme puissance de 34035, & retranchez-en cinq chiffres, comme inutiles par la même raison que ci-dessus: vous aurez 1341, que vous diviserez par 24. Le quotient est à bien peu près 56, que vous ajouterez à 94208: la somme 94264 donnera le sinus de 70° 30'. En effet, on le trouve précisément tel dans les tables des sinus.

2. Maintenant nous supposerons que l'arc donné est tout au plus de 30°. Faites le cube & la cinquieme puissance de cet arc réduit en parties du rayon; divisez le cube par 6, & la cinquieme puissance par 120; retranchez le premier quotient de l'arc, & au restant ajoutez le second: vous aurez, à une très-petite erreur près, la valeur du sinus.

Que l'arc donné soit, par exemple, de 30°. En le réduisant en 100000es du rayon, on trouvera pour sa valeur 52362, dont le cube, en retranchant les dix derniers chiffres, est 14354. La sixieme partie de ce nombre est 2392, qui, retranchée de l'arc 52362, laisse 49970. La cinquieme puissance du même nombre 52362, en retranchant les vingt derniers chiffres, est 3935, qui, divisée par 120, donne 32: ajoutez 32 au restant ci-dessus, vous aurez 50002 pour le sinus de 30°: & en effet il est, comme tout le monde sçait, de 50000; l'erreur n'est conséquemment que d'une couple d'unités dans le dernier chiffre.

3. Si l'arc est entre 30° & 60°, par exemple

de 45°, prenez la différence de cet arc avec 60; elle eſt 15°, que vous ajouterez à 60° : ce qui vous donnera 75°, dont vous chercherez le ſinus par la premiere regle.

Cherchez auſſi celui de 15° par la ſeconde, & ôtez-le de celui de 75 ; le reſtant ſera celui de 45 : car c'eſt un théorême élémentaire de la trigonométrie, que les ſinus de deux arcs également éloignés de 60°, ont pour différence le ſinus de l'arc, dont chacun de ces deux arcs differe de celui de 60°.

Si, au lieu du ſinus d'un arc, on a beſoin de celui de ſon complément, les mêmes regles ſerviront ; car le ſinus de complément de 20°, par exemple, eſt le ſinus droit de 70° ; &, au contraire, le ſinus de complément de 70° eſt le ſinus droit de 20° : d'où il eſt aiſé de voir que, pour trouver le ſinus de complément d'un arc, il n'y a qu'à chercher le ſinus droit du complément de l'arc.

Lorſqu'on a le ſinus droit & le ſinus de complément d'un arc, on a facilement la tangente en faiſant cette proportion ; comme le ſinus de complément eſt au ſinus droit, ainſi le ſinus total eſt à la tangente : il n'y a, conſéquemment, qu'à diviſer le ſinus droit, augmenté de tant de zéro qu'on voudra, par le ſinus de complément.

Remarque.

NOUS venons de donner ici un moyen de ſe paſſer des tables de ſinus, ſi néceſſaires dans la pratique de la trigonométrie, ou de ſe les former ſoi-même aſſez expéditivement, dans des circonſtances où l'on n'en auroit point, & où l'on ſe trouveroit éloigné de tout moyen de s'en procurer. Je me ſuis trouvé moi-même dans ce cas, ayant été de poſte à Oſwego en Canada, & ayant perdu mes effets, qui avoient été pillés par un parti d'Iroquois Anglois. Dans ce triſte ſéjour je cherchois à calmer mon ennui par l'étude & la géométrie : il ſe préſenta quelques opérations trigonométriques à faire. Comment m'y prendre ? Je me reſſouvins heureuſement du théorême de Snellius, qui ſert de baſe à la ſolution du problême précédent ; enfin, pour comble de bonheur, je me rappellai les deux expreſſions en ſuite infinie, qui donnent la valeur du ſinus & du co-ſinus (ou ſinus de complément), l'arc étant donné. La premiere eſt, comme l'on ſçait, a exprimant l'arc ; la premiere eſt, dis-je, $a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120} - \frac{a^7}{5040}$, &c ; & la ſeconde eſt $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \frac{a^6}{720}$ &c. Mais lorſque l'arc a eſt fort au deſſous de la valeur du rayon ou de l'unité, il eſt aiſé de voir que l'on peut ſe contenter des trois premiers termes de chacune ; car tous les termes qui ſuivent deviennent exceſſivement petits. La démonſtration des regles ci-deſſus eſt manifeſte d'après cela.

PROBLÊME LIV.

Un cercle étant donné & deux points, tracer un autre cercle paſſant par ces deux points, & qui touche le premier.

IL eſt évident qu'il faut que ces deux points ſoient tous deux au dedans, ou tous deux au dehors du cercle donné.

Soient donc les deux points donnés A & B, comme dans les deux *fig. 81 & 82.* Joignez-les Pl. 10, fig. 81, 82.

par une ligne droite AB. Par l'un de ces points, par exemple A, & le centre du cercle donné, tirez la droite AIH qui le coupe dans les deux points H, I; prenez ensuite AD quatrieme proportionnelle à AB, AH, AI; du point D tirez les deux tangentes DE, D*e*; enfin, du point A, menez par les deux points de contact les deux lignes EAF, *eAf*, qui couperont le cercle en F & *f*: le cercle tracé par les deux points A & B & par F, touchera le cercle donné en F; & si vous en tracez un par les points A, B, *f*, il touchera le même cercle donné en *f*.

PROBLÊME LV.

Deux cercles étant donnés & un point, en tracer un troisieme, passant par le point donné, & touchant les deux premiers.

Pl. 10, fig. 83. Que les deux cercles donnés aient pour centres les points A & C, & les rayons AB, CD. Sur la ligne qui joint les centres A, C, prolongée, cherchez le point F, qui est celui d'où la tangente à l'un des deux seroit tangente à l'autre, (par le Problême XII.) & joignez le point F avec le point E donné; faites ensuite FG quatrieme proportionnelle à FE, FB, FD; enfin, par le problême précédent, tracez par les points G & E un cercle qui touche l'un des deux cercles AB ou CD: ce troisieme cercle touchera également l'autre.

PROBLÊME LVI.

Trois cercles étant donnés, en tracer un quatrieme qui les touche tous.

Fig. 84. Il est facile de voir que ce problême est susceptible d'un grand nombre de cas & de solutions

différentes, car le cercle demandé peut renfermer les trois cercles donnés, ou deux ſeulement, ou un ſeul, ou enfin les laiſſer tous au dehors. Mais, afin d'abréger, nous nous bornerons à un de ces cas, celui où le cercle à décrire doit laiſſer en dehors les trois autres.

Soient donc les trois cercles donnés déſignés par A, B, C, & que leurs rayons ſoient A*a*, B*b*, C*c*; que A ſoit le plus grand, B le moyen, & C le plus petit. Sur le rayon A*a* prenez *a d* égale à C*c*, ou au rayon du plus petit cercle, & du centre A au rayon A*d* décrivez un nouveau cercle. Sur le rayon B*b* prenez *b e* égales à C*c*, & du centre B au rayon B*e* décrivez un autre cercle; enſuite, par la propoſition précédente, tracez par le centre de C un cercle qui touche les deux nouveaux cercles ci-deſſus; que ſon centre ſoit E, & ſon rayon EG; diminuez ce rayon du rayon C*c*, & du même centre E décrivez un nouveau cercle: il eſt évident qu'il touchera les trois premiers cercles donnés. Pl. 10, fig. 84.

Car puiſque le cercle décrit du centre A au rayon A*d* eſt en dedans du cercle propoſé A, de la quantité *a d* ou C*c*, il eſt évident que, ſi l'on diminue le rayon EG de cette même quantité, le cercle décrit de ce nouveau rayon touchera, au lieu du cercle intérieur au rayon A*d*, le cercle propoſé dont A*a* eſt le rayon.

Il eſt également facile de voir que ce même cercle décrit du rayon EG moins C*c*, touchera extérieurement le cercle au rayon B*b*. Enfin il touchera extérieurement le cercle au rayon C*c*: donc il les touchera extérieurement tous trois.

REMARQUE.

CE problême a eu de la célébrité parmi les anciens, & ne laiſſe pas d'avoir en effet un certain degré de difficulté. Il terminoit un traité d'Apollonius, intitulé *de Contactibus*, qui ne nous eſt pas parvenu, mais que M. Viete, célebre géometre de la fin du ſeizieme ſiecle, a rétabli, & que l'on trouve dans ſes Œuvres imprimées en latin, à Leyde en 1646, in-fol. Il l'a intitulé : *Apollonius Gallus, ſeu exſuſcitata Apollonii Pergæi de Tactionibus Geometria.*

M. Newton a donné une belle & tout-à-fait ingénieuſe ſolution de ce problême ; mais celle de Viete nous a paru préférable pour ce lieu ci, étant fondée ſur une géométrie plus élémentaire. Je crois pouvoir ajouter que ce petit morceau de géométrie de Viete eſt un des plus élégants morceaux de géométrie traitée à la maniere des anciens.

PROBLÊME LVII.

Quels ſont les corps dont les ſurfaces ont entr'elles même rapport que leurs ſolidités ?

CE problême fut propoſé en forme d'énigme, dans un Mercure de 1773.

Réponds-moi, d'Alembert, qui découvres les traces
Des plus ſublimes vérités ;
Quels ſont les corps dont les ſurfaces
Sont en même rapport que leurs ſolidités ?

Je ne vois pas que M. d'Alembert ait daigné répondre à cette interpellation ; car, pour peu qu'on ſoit géometre, on voit d'abord deux corps connus, la ſphere & le cylindre circonſcrit, qui réſolvent le problême. Archimede a démontré, il y a long-temps, que la ſphere eſt les deux tiers de ce cylindre, tant en ſolidité qu'en ſurface, pourvu que dans la ſurface du cylindre on comprenne les deux baſes; & c'eſt le mot de l'énigme, donné dans le Mercure ſuivant.

Mais on peut aller plus loin, & dire qu'il y a une infinité de corps qui, comparés entr'eux & à la ſphere, donnent auſſi la ſolution de ce problême; tels ſont tous les ſolides de circonvolution circonſcrits à une même ſphere, & même tous les ſolides à faces planes, réguliers ou irréguliers, qui ſont circonſcriptibles à la même ſphere: car la ſolidité de tous ces corps eſt le produit de leurs ſurfaces par le tiers du rayon de la ſphere inſcrite, tandis que la ſolidité de la ſphere eſt le produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon.

Ainſi le cône équilatéral eſt à la ſphere inſcrite, tant en ſurface qu'en ſolidité, comme 9 à 4.

La même choſe aura lieu entre la ſphere & le cône iſoſcele circonſcrit, ſi ce n'eſt qu'au lieu de 4 à 9, ce ſera un rapport différent, ſelon l'allongement ou l'applatiſſement du cône.

Si la ſphere & le cylindre circonſcrit jouiſſent de cette propriété, c'eſt que ce cylindre n'eſt lui-même que le corps produit par la circonvolution du quarré circonſcrit au grand cercle de la ſphere, ſur un axe perpendiculaire à deux des côtés paralleles.

Si ce quarré & le cercle inſcrit tournoient à l'entour de la diagonale du quarré, la ſurface & la ſolidité des corps ainſi engendrés, ſeroient entr'elles comme $\sqrt{2}$ eſt à 1.

Voici maintenant un problême analogue.

Quelles ſont les figures planes dont les ſurfaces & les contours ſont dans un même rapport?

La réponſe eſt facile; c'eſt le cercle, & tous les polygones, ſoit réguliers, ſoit irréguliers, qui lui ſont circonſcriptibles.

THÉORÊME VIII.

Le dodécagone inſcrit au cercle eſt les $\frac{3}{4}$ du quarré du diametre, ou égal au quarré du côté du triangle inſcrit.

Pl. 10, fig. 85. Ce théorême, qui eſt aſſez curieux, a été remarqué pour la premiere fois par Snellius, géometre Hollandois.

Soit AC le rayon d'un cercle où ſoit inſcrit le côté AB de l'exagone; que AD, DB, ſoient les côtés du dodécagone régulier: d'où il ſuit que, tirant le rayon DC, il coupera en deux également & perpendiculairement le côté AB. Or il eſt aiſé de voir que l'aire du dodécagone eſt égale à douze fois l'un des triangles ADC ou DCB. Mais le triangle ADC eſt égal au produit du rayon par la moitié de AF ou par le quart du rayon, c'eſt-à-dire égal à un quart du quarré du rayon: donc les douze feront égaux à trois fois le quarré du rayon, ou aux trois quarts du quarré du diametre.

D'un autre part, le côté du triangle équilatere inſcrit au cercle, le diametre étant l'unité, eſt égal à $\sqrt{\frac{3}{4}}$: conſéquemment ſon quarré eſt égal à $\frac{3}{4}$ du quarré du diametre, ou au dodécagone.

REMARQUE.

Il n'y a, parmi les polygones inſcrits, que le quarré & le dodécagone qui aient cette propriété d'avoir un rapport numérique avec le quarré du diametre, car le quarré inſcrit en eſt préciſément la moitié ; mais, parmi les polygones réguliers circonſcrits, il n'y a que le quarré lui-même.

On pourroit au reſte inſcrire dans un cercle donné, des polygones irréguliers, & même une infinité, qui ſeroient commenſurables avec le quarré du rayon.

Soient, par exemple, un cercle d'un diametre égal à 1, & que les quatre côtés du quadrilatere inſcrit ſoient $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$; ſa ſurface ſera rationnelle, & égale aux $\frac{3028}{8450}$ du quarré du diametre.

PROBLÊME LVIII.

Le diametre AB d'un demi-cercle ACB étant diviſé en deux parties quelconques AD, DB, ſur ces parties, comme diametres, ſoient décrits deux demi-cercles AED, DFB. On demande un cercle égal au reſtant du premier demi-cercle. Pl. 10, fig. 86.

ELEVEZ au point D la perpendiculaire DC à AB, juſqu'à la rencontre du demi-cercle ACB ; que DC ſoit le diametre d'un cercle : ce ſera celui que l'on cherche.

On en tire la démonſtration, de cette propoſition ſi connue du 2[e] Livre des Eléments d'Euclide, ſçavoir, que le quarré de AB eſt égal aux quarrés de AD & de DB, plus deux fois le rectangle de AD par DB ; rectangle auquel eſt égal, par la propriété du cercle, le quarré de DC. A ces quarrés ſubſtituez des demi-cercles qui ſont dans le même rapport, & la propoſition ſera démontrée.

PROBLÊME LIX.

Un quarré étant donné, en recouper les angles de maniere qu'il soit transformé en un octogone régulier.

Pl. 10, fig. 87. SOIT le quarré donné ABCD. Prenez sur les deux côtés DC, DA, qui se rencontrent en D, deux segments quelconques égaux, DI, DK, & tirez la diagonale IK; faites ensuite DL égale à deux fois DK, plus une fois la diagonale IK, & tirez LI; enfin, par le point C, menez CM parallele à LI: cette ligne recoupera sur le côté du quarré une quantité DM telle que, lui faisant DN égale, la ligne NM sera le côté de l'octogone cherché.

Prenant donc AE, AF, BG, BH, CN, CO, &c. égales à DM, & tirant EF, GH, ON, on aura l'octogone demandé.

PROBLÊME LX.

Pl. 11, fig. 88. *Un triangle ABC étant donné, lui inscrire un rectangle, tel que FH ou GI, égal à un quarré donné.*

FAITES d'abord sur la base BC le rectangle BD égal au quarré donné, & que E soit le point où AC est coupé par le côté de ce rectangle parallele à CB; sur AC décrivez un demi-cercle; &, ayant élevé la perpendiculaire EL jusqu'à la rencontre de sa circonférence, tirez CL: sur KC égale à la moitié de AC décrivez aussi un demi-cercle, dans lequel vous prendrez CM égale à CL; faites enfin KF égale à KM, ainsi que KG: vous aurez les points F & G, desquels menant les paralleles à la baſe juſqu'à la rencontre de AB, & de ces points de rencontre les perpendiculaires à la baſe, on aura les rectangles FH, GI, égaux entr'eux, ainſi qu'au rectangle DB qui étoit égal au quarré donné : donc, &c.

PROBLÊME LXI.

Dans un angle BAC, par un point donné D, tirer une ligne HI, telle que le triangle IHA ſoit égal à un quarré donné. Pl. 11, fig. 89.

PAR le point donné D, tirez la parallele LE à un des côtés AC de l'angle propoſé, & faites le rhombe LEGA égal au quarré donné; puis, ſur la ligne DE décrivez un demi-cercle, dans lequel vous ferez DF égale à DL, & vous tirerez EF; enfin prenez GH égale à EF, & par le point H tirez HDI : ce ſera la ligne cherchée.

PROBLÊME LXII.

De la Lunulle d'Hippocrate de Chio.

QUOIQUE la quadrature du cercle ſoit probablement impoſſible, on n'a pas laiſſé de trouver des portions de cercle qu'on démontre égales à des eſpaces rectilignes. Le plus ancien exemple de portion circulaire ainſi quarrable, eſt celui des lunulles d'Hippocrate de Chio : en voici la conſtruction.

Soit le triangle rectangle ABC, ſur l'hypothénuſe duquel ſoit décrit le demi-cercle ABC, qui paſſera par l'angle droit B; ſur les côtés AB, BC, ſoient auſſi décrits des demi-cercles : les eſpaces en forme de croiſſant, AEBHA, BDCGB, ſeront enſemble égaux au triangle ABC. Fig. 90.

Car il eſt aiſé de voir que le demi-cercle ſur la baſe AC eſt égal à la ſomme des demi-cercles AEB, BDC: donc, ſi l'on retranche de part & d'autre les ſegments AHB, BGC, il reſtera d'un côté le triangle ABC, & de l'autre les deux eſpaces en croiſſant AEBH, BDCG, & ces reſtants ſeront égaux : donc, &c.

Pl. 11, fig. 91. Si les côtés *ab*, *bc*, ſont égaux, comme dans la *fig. 91*, les deux lunulles ſeront évidemment égales, & le ſeront chacune à la moitié du triangle *abc*, c'eſt-à-dire au triangle *bfa* ou *bfc*.

Fig. 92. Ceci donne une conſtruction plus ſimple de la lunulle d'Hippocrate. Que ABC ſoit un demi-cercle ſur le diametre AC, & AFC le triangle iſoſcele rectangle. Sur cette baſe AC, du point F comme centre, ſoit décrit par A & C l'arc de cercle ADC: la lunulle ABCD ſera égale au triangle CAF.

En effet, puiſque le quarré de FC eſt double du quarré de EC, le cercle décrit du rayon FC ſera double du cercle décrit du rayon EC: conſéquemment un quart du premier, ou le quart de cercle FADC, ſera égal à la moitié du ſecond, ou au demi-cercle ABC. Otant donc le ſegment commun ADCA, les reſtants, ſçavoir, d'un côté le triangle AFC, & de l'autre la lunulle ABCDA, ſeront égaux.

Remarques.

C'EST ici le lieu de faire connoître diverſes remarques curieuſes, ajoutées par les géometres modernes à la découverte d'Hippocrate.

Fig. 93. 1. Si du centre F on mene une droite quelconque FE, qui retranche une portion de la lunulle

AEGA, cette portion ſera encore quarrable, & égale au triangle rectiligne AHE rectangle en H.

Car il eſt facile de démontrer que le ſegment AE ſera égal au demi-ſegment AGH.

2. Si du point E on abaiſſe ſur AC la perpendiculaire EI, & qu'on tire FI & FE, la même portion de lunulle AEGA ſera égale au triangle AFI.

Car on démontre aiſément que ce triangle AFI eſt égal au triangle AHE.

3. On peut donc diviſer la lunulle en raiſon donnée, par une ligne tirée du centre F: il n'y a qu'à partager le diametre AC de maniere que AI ſoit à CI dans cette raiſon, élever la perpendiculaire EI à AC, & mener la ligne FE: les deux ſegments de la lunulle AGE, GEC, ſeront dans la raiſon de AI à IC.

Toutes ces choſes ont été remarquées pour la premiere fois par un prélat géometre, M. Artus de Lionne, évêque de Gap, dans ſon livre intitulé *Curvilineorum amœnior Contemplatio*, in-4^{o}, 1654; & enſuite par divers autres géometres.

4. Si les deux cercles qui forment la lunulle d'Hippocrate ſont achevés, il en réſultera une autre lunulle qu'on pourroit appeller conjuguée, & où l'on pourra trouver des eſpaces mixtilignes abſolument quarrables.

Soit tirée en effet du point F un rayon quelconque FM, coupant les deux cercles en R & M; on aura l'eſpace mixtiligne RAMR égal au triangle rectiligne LAR: ce qui eſt aiſé à démontrer; car il eſt facile de faire voir que le ſegment AR du petit cercle, eſt égal au demi-ſegment LAM du grand. Pl. 11, fig. 93.

Et de-là il suit que si le diametre mO touche en F le petit cercle, l'espace triangulaire mixte ARFmA sera égal au triangle ASF rectangle en S, ou à la demi-lunulle AGCBA.

Pl. 11, fig. 94. 5. Voici enfin quelques portions absolument quarrables de la lunulle d'Hippocrate, que je ne crois pas qu'on ait encore remarquées.

Soit cette lunulle, & que AB soit tangente à l'arc intérieur. Tirez les lignes EA, eA, faisant avec AB des angles égaux; du point B tirez les cordes BE, Be, qui seront égales: vous aurez l'espace mixtiligne terminé par les deux arcs de cercle EBe, AGF, & par les droites Ae, FE, égal à la figure rectiligne eAEBe.

Cela seroit même encore vrai quand la figure ABCFA ne seroit pas absolument quarrable, c'est-à-dire que ABC ne seroit pas un demi-cercle, pourvu que les deux cercles fussent toujours dans le rapport de 2 à 1.

PROBLÊME LXIII.

Construire d'autres Lunulles absolument quarrables, que celle d'Hippocrate.

Fig. 92. LA lunulle d'Hippocrate est absolument quarrable, parceque les cordes AB, BC & AC, sont telles que le quarré de cette derniere est égal aux quarrés des deux premieres; ensorte que, décrivant sur la derniere un arc de cercle semblable à ceux soutendus par AB & BC, les deux segments AB, BC, sont égaux à ADC.

Cette maniere de considérer la lunulle d'Hippocrate, conduit à des vues plus générales. En effet, on peut concevoir dans un cercle tant de cordes égales qu'on voudra, quatre, par exemple, comme AB, BC, CD, DE, telles que, tirant la corde AE, son quarré soit quadruple de l'une d'elles; ou, plus généralement, le nombre de ces cordes étant n, le quarré de AE peut être à celui de l'une AB, comme n à 1. Ainsi, décrivant sur AE un arc semblable à ceux que soutendent ces cordes AB, &c. le segment AE sera égal aux segments AB, BC, &c. ensemble: donc, ôtant de la figure rectiligne ABCDE le segment AE, & lui ajoutant les segments AB, BC, &c. il en résultera une lunulle formée des arcs ACE & AE, qui sera égale au polygone rectiligne ABCDE. Pl. 11, fig. 95.

Il est donc question de résoudre ce problême de géométrie: *Dans un cercle donné, inscrire une suite de cordes égales, AB, BC, CD, &c. telle que le quarré de la corde AE, qui les soutend toutes, soit au quarré de l'une d'elles comme leur nombre à l'unité; triple s'il y en a trois, quadruple s'il y en a quatre*, &c. Mais nous nous bornerons aux cas constructibles par la géométrie élémentaire; ce qui nous donnera encore deux lunulles semblables à celle d'Hippocrate, l'une formée par des cercles dans le rapport de 1 à 3, & l'autre par deux cercles dans celui de 1 à 5, indépendamment de deux autres lunulles formées par des cercles dans le rapport de 2 à 3 & de 3 à 5.

Construction de la premiere Lunulle.

Soit AB le diametre du plus petit des cercles dont la lunulle doit être construite. Soit prolongée AB en D de la longueur du rayon, & décrit sur AD, comme diametre, le demi-cercle AED, qui coupe en E la perpendiculaire BE à AD; tirez Fig. 96.

DE, & faites-lui DF égale ; ſur AF décrivez encore un demi-cercle AHF, qui coupe en H le rayon CG perpendiculaire à AB ; menez AH, & faites dans le cercle donné la corde AI égale à AH, ainſi que les cordes IK & KL ; tirez enfin AL, & ſur cette corde, avec un rayon égal à DE, tracez un arc de cercle AL : vous aurez la lunulle AGBLA égale à la figure rectiligne AIKLA.

Conſtruction de la deuxieme Lunulle, où les cercles ſont comme 1 à 5.

Pl. 11, fig. 97. Prolongez le diametre du cercle donné, ſçavoir le plus petit de la quantité PD égale à un demi-rayon, & que DE indéfinie ſoit perpendiculaire à AD ; puis, du point S qui coupe le rayon AC en deux également, avec un rayon égal à 3 AC, ſoit tracé un arc de cercle coupant la perpendiculaire ci-deſſus en E ; faites EF égale à $\frac{1}{4}$ AC, & DH égale au rayon ; partagez HF en deux également en G, duquel point, comme centre, & avec un rayon égal à GH, ſoit décrit un arc de cercle coupant en I la droite AD ; ſoit faite enſuite DK égale à HI, & menée la perpendiculaire KR au diametre, qui coupe en L le demi-cercle décrit ſur AC ; enfin ſoit tirée AL, & que les cordes AM, MN, NO, OP, PQ, lui ſoient faites égales ; ſur la corde AQ ſoit, d'un rayon égal à DE, décrit un arc de cercle : la lunulle ANPQA ſera égale à la figure rectiligne AMNOPQA.

On peut donc former des lunulles abſolument quarrables, avec des cercles qui ſont entr'eux dans ces rapports, de 1 à 2, de 1 à 3, & de 1 à 5. Il n'y en a pas d'autres formées par des cercles en raiſon multiples ou ſous-multiples ſimples, qui ſoient constructibles uniquement par la regle & le compas : celles qu'on formeroit par des cercles en raison de 1 à 4, de 1 à 6, à 7, &c. exigent une géométrie plus relevée ; c'est un problême de la même nature & du même degré que celui de la trisection de l'angle ou des deux moyennes proportionnelles, & uniquement résoluble par les mêmes moyens. Mais il y en a encore deux constructibles au moyen de la géométrie simple, & formées par des cercles en raison de 2 à 3 & de 3 à 5. Nous nous bornons, pour abréger, à en indiquer la construction.

Pour la 1ere. Soit un cercle quelconque, dont le rayon soit supposé 1 ; inscrivez-y une corde AB égale à $\sqrt{\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}}$, cette corde étant portée encore deux fois en BC & CD, qu'on tire la corde qu'on décrive sur AB un arc semblable à l'arc ABC ; qu'on tire enfin les deux cordes égales AE, ED : la lunulle ABCDEA sera égale au polygone rectiligne ABCDEA. Pl. 12, fig. 98.

Pour la 2e. Dans un cercle dont le rayon est 1, inscrivez une corde égale à $\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}}}$, & portez-la cinq fois ; tirez la corde de l'arc quintuple, & décrivez sur elle un arc avec un rayon $=\sqrt{\frac{5}{3}}$; dans cet arc inscrivez les trois cordes de ses trois parties égales ; ce qui sera toujours possible par la géométrie ordinaire, parceque chacun de ces tiers est semblable à un cinquieme du premier arc qui est déja donné : vous aurez une lunulle égale à la figure rectiligne, formée par les cinq cordes du petit cercle & les trois du plus grand.

PROBLÊME LXIV.

Une lunulle étant donnée, y trouver des portions absolument quarrables, pourvu néanmoins que les cercles qui la forment soient entr'eux dans certains rapports de nombre à nombre.

Pl. 11, fig. 99, 100, 101. SOIT la lunulle ABCDA, formée de deux cercles dans un rapport quelconque de ceux ci-dessus, ABC étant portion du moindre cercle, & ADC du plus grand. Tirez la tangente AE à l'arc ADC; ensuite menez une ligne AF, telle que l'angle EAC soit à l'angle FAC dans le rapport du petit cercle au grand : alors il arrivera une de ces trois choses; ou AF sera tangente au cercle ABC, *fig. 99*, ou elle le coupera comme en F, *fig. 100*, ou comme en φ, *fig. 101*.

Fig. 99. Dans le premier cas, la lunulle sera absolument quarrable, & égale à la figure rectiligne KALC.

Fig. 100. Dans le second, cette lunulle, moins le segment circulaire A*f*, sera égale à la figure rectiligne A*f*KCLA, ou à l'espace AKCL, plus le triangle AK*f*.

Fig. 101. Dans le troisieme, la même lunulle, plus le segment circulaire Aφ, sera égale à l'espace rectiligne *a*φK*cla*, ou à l'espace *a*K*cl*, moins le triangle *a*Kφ.

Nous en supprimons la démonstration, tant pour abréger, que parcequ'elle est assez facile d'après les principes ci-dessus.

Fig. 99, 100. Il est donc aisé de voir que, si les cercles donnés sont dans certains rapports qui permettent de construire, avec la regle & le compas, l'angle FAC, qui soit à l'angle EAC dans le rapport réciproque de ces cercles, on pourra tirer la ligne FA, qui retranchera de la lunulle la portion ADCBfA égale à un eſpace rectiligne aſſignable. Or cela arrivera toutes les fois que le petit cercle ſera au grand dans le rapport de 1 à 2, ou à 3, ou à 4, ou à 5, &c. car alors l'angle FAC devra être, ou double, ou triple, ou quadruple, ou quintuple de ECA; ce qui n'a aucune difficulté. Il en ſeroit de même ſi le petit cercle étoit au grand dans le rapport de 2 à 3, ou 2 à 5, ou 2 à 7, &c. ou ſi l'arc ADC, étant ſuſceptible de triſection géométrique, comme il y en a pluſieurs, le grand cercle étoit au petit comme 3 à 4, ou 3 à 5, ou 3 à 7, &c.

Autre Maniere. Que AF ſoit tangente au cercle ABC en A, & AE tangente à l'arc ADC dans le même point. Tirez la ligne AG, enſorte que l'angle FAG ſoit à l'angle EAG comme le grand cercle est au petit, c'eſt-à-dire, que l'angle FAE ſoit à EAG comme le grand cercle moins le petit eſt à ce dernier; alors, ou la ligne AG tombera ſur AC, ou au deſſus comme en AG, ou en deſſous comme en Ag. Pl. 12, fig. 102.

Or, dans le premier cas, il eſt aiſé de démontrer que la lunulle eſt abſolument quarrable.

Dans le ſecond, on peut auſſi faire voir que la même lunulle, moins le triangle mixtiligne MGCM, eſt égale à un eſpace rectiligne aſſignable.

Dans le troiſieme enfin, on fera voir auſſi que la même lunulle, ſi on y ajoute le triangle mixtiligne Cmg, ſera égale à cet eſpace rectiligne.

Enfin, ſoit tirée dans chacune des figures précédentes, entre AC, AE, une ligne quelconque AN, formant avec la tangente AE un angle quelconque NAE; puis ſoit tirée dans l'angle FAE une autre ligne An, telle que l'angle nAE ſoit à EAN comme FAE à CAE. On peut encore démontrer Fig. 99, 100, 101, 102.

que la figure mixtiligne formée des deux arcs N*n*, AP, & des deux lignes AN, PN, sera égale à un espace rectiligne, espace qui se trouvera en partageant l'arc N*n* en autant de parties semblables à l'arc AP, que le petit cercle est contenu de fois dans le grand ; ce qui sera toujours susceptible d'exécution géométrique, si la raison d'un cercle à l'autre est comme de 1 à 2, ou à 3, ou à 4, &c. La supposant, par exemple, ici de 1 à 3, on aura les trois cordes égales *no*, *o*E, EN, & la portion de lunulle en question sera égale à la figure rectiligne A*no*ENA, puisque les trois segments sur *no*, *o*E, &c. sont égaux ensemble au segment AP.

REMARQUE.

NOUS nous sommes aussi proposé & nous avons résolu ce problême : *Une lunulle non quarrable, mais néanmoins formée par deux cercles qui sont dans le rapport de 1 à 2, étant donnée, la couper par une ligne parallele à sa base, qui en retranche une portion absolument quarrable.* Mais nous nous bornerons à le proposer à nos lecteurs.

PROBLÊME LXV.

De divers autres espaces circulaires absolument quarrables.

Pl. 12, fig. 103. 1. SOIENT deux cercles concentriques, au travers desquels soit tirée la ligne *b*B, tangente ou sécante au cercle intérieur. Que l'on tire CA, CB, faisant l'angle ACD ; qu'on fasse ensuite l'arc DF à l'arc DA, comme le quarré de CD à la différence des quarrés de CB & CD, & qu'on tire CE : on aura l'espace mixtiligne ABFE égal au triangle rectiligne ACB.

Il est évident que, pour que la position de CE ſoit déterminable au moyen de la géométrie ordinaire, il faut que la raiſon entre les arcs AD, DF, ſoit celle de certains nombres, comme de 1 à 1, 1 à 2, 1 à 3, &c. ou 2 à 1, 2 à 3, &c. Il faut, par conſéquent, que la différence des quarrés de rayons des deux cercles ſoit au quarré du moindre, comme 1 à 1, ou 2 à 1, ou 3 à 1, &c. Alors les ſecteurs de différents cercles étant en raiſon compoſée des quarrés de leurs rayons, & de leurs amplitudes, on aura le ſecteur BCE égal à ACF : donc, ôtant le ſecteur commun DCF, & ajoutant de part & d'autre l'eſpace ADB, on aura le triangle rectiligne ACB égal à l'eſpace AFEB.

2. Soit un ſecteur quelconque, comme ACBGA dont la corde eſt AB. Dans un cercle double, ou quadruple, ou octuple, prenez un ſecteur *acbga* dont l'angle ſoit la moitié, ou le quart, ou la huitieme partie de l'angle ACB, ce qui eſt toujours poſſible avec la regle & le compas; que ce ſecond ſecteur ſoit diſpoſé comme l'on voit dans la figure, c'eſt-à-dire de maniere que l'arc *a g b* porte ſur la corde AB : vous aurez l'eſpace A*agb* BGA égal à la figure rectiligne ECF*c*, moins les deux triangles A*a*, E*b*BF. Pl. 12, fig. 104.

Cela eſt preſque évident; car, par la conſtruction ci-deſſus, le ſecteur ACBG eſt égal à *acb* g : donc, ôtant ce qui leur eſt commun, il y aura égalité entre ce qui reſte d'un côté, ſçavoir, l'eſpece de lunulle AGB*bga*, plus les deux triangles A*a*E, B*b*F, & ce qui reſte de l'autre ou la figure rectiligne E*c*FC : donc cette eſpece de lunulle eſt égale à la figure rectiligne ci-deſſus, diminuée des deux triangles.

3. Si deux cercles égaux ſe coupent en A & B, Fig. 105.
& qu'on mene une ligne quelconque AC, coupant

l'arc intérieur en E & l'extérieur en C, il eſt évident que l'arc EB ſera égal à l'arc BC, conſéquemment le ſegment EB au ſegment BC : d'où il s'enſuit que le triangle formé des deux arcs EB, BC, & de EC, ſera égal au triangle rectiligne EBC ; enfin, que ſi AD eſt tangente en A à l'arc AEB, le mixtiligne AEBCDA ſera égal au triangle rectiligne ADB.

Pl. 12, fig. 106. 4. Si deux cercles égaux ſe touchent en C, & que par le point de contact on mene un troiſieme cercle égal aux premiers, l'eſpace courbe AFCEDBA ſera égal au quadrilatere rectiligne ABDC.

Car, menez la tangente CB aux deux cercles. On a fait voir plus haut que l'eſpace compris par les arcs CA, AB, & la droite CB, eſt égal au triangle rectiligne CAB. Il en eſt de même de l'eſpace mixtiligne CEDB, eu égard au triangle CDB : donc, &c.

5. M. Lambert a fait, dans les *Acta Helvetica*, T. III, la remarque ci-deſſus ; mais on peut encore trouver d'autres eſpaces de la même forme, égaux à des figures rectilignes, quoique bornés par des arcs de cercles dont deux ſeulement ſont égaux.

Soit ABCD le cercle duquel doit être retranché par deux autres arcs de cercles un eſpace abſolument quarrable de l'eſpece ci-deſſus. Prenez ſur une droite indéfinie les parties CE, EF, FH, égales chacune au côté du quarré inſcrit dans le cercle donné, & que la troiſieme FH ſoit diviſée en deux également en G ; ſur l'extrémité de CE ſoit élevée la perpendiculaire EI, laquelle ſoit coupée en I par le cercle décrit du centre G au rayon GC ; tirez CI, & que CK lui ſoit égale ; enfin ſoit ſur FG un demi-cercle coupant en L la perpendiculaire KL à FG ; qu'on tire la ligne HL, & qu'on lui faſſe, dans le cercle propoſé, les cordes AB, AD, égales. Si vous tracez avec un rayon égal à CE, les arcs paſſant par les points A & B, A & D, tournant leur convexité vers C, vous aurez l'eſpace borné par les arcs AB, AD & BCD, égal à l'eſpace rectiligne formé des cordes AB, AD, & des quatre cordes DM, MC, CN, NB, des quatre portions égales de l'arc BCD. Pl. 12, fig. 107.

Mais en voilà aſſez ſur cet objet. Nous nous bornerons à y ajouter une réflexion; c'eſt qu'on ne doit point regarder ces quadratures comme de véritables quadratures d'un eſpace curviligne. En effet, comme le remarque fort bien quelque part M. de Fontenelle, tout le merveilleux de ceci ne conſiſte que dans une eſpece de tour de paſſe-paſſe géométrique, au moyen duquel on ajoute adroitement d'un côté à un eſpace rectiligne, autant qu'on lui en ôte de l'autre. Ce n'eſt pas ainſi qu'Archimede a le premier quarré la parabole, & que les géometres modernes ont donné la quadrature de tant d'autres courbes. Toutes ces choſes néanmoins nous ont paru aſſez curieuſes, & ne pouvoir être mieux placées que dans un ouvrage de la nature de celui-ci.

PROBLÊME LXVI.

De la meſure de l'ellipſe ou ovale géométrique, & de ſes parties.

On démontre facilement que l'ellipſe, *fig. 109*, eſt au rectangle de ſes axes AB, DE, comme le cercle rectangle des ſiens, ou au quarré de ſon diametre AB, puiſque chaque axe eſt égal au diametre. Pl. 13, fig. 109.

Ainſi le cercle étant les $\frac{11}{14}$, à peu de choſe près, du quarré de ſon diametre, l'ellipſe eſt auſſi les $\frac{11}{14}$ du rectangle de ſes axes.

Il n'y a donc qu'à multiplier le rectangle des axes de l'ellipſe donnée par 11, & diviſer le produit par 14, le quotient donnera l'aire.

Ajoutons que chaque ſegment ou ſecteur d'ellipſe, eſt toujours en raiſon donnée avec un ſecteur ou ſegment de cercle facile à déterminer. Etant donné, par exemple, le ſecteur elliptique FCG, ou le ſegment FBG, ſur l'axe AB ſoit décrit un cercle du centre C; en prolongeant GF en D & E, on aura le ſecteur elliptique FCGB au ſecteur circulaire DCEB, comme FG à DE, ou comme le petit axe de l'ellipſe au grand : le ſegment elliptique BFG ſera auſſi au ſegment circulaire DBE, comme FG à DE, ou comme le petit axe de l'ellipſe au grand axe. Pl. 13, fig. 110.

Soit encore dans l'ellipſe un ſegment quelconque, comme nop. Soient abaiſſées de n & p deux perpendiculaires à l'axe, qui ſoient prolongées juſqu'au cercle en N & P, & qu'on tire NP; on aura le ſegment $n\,o\,p$ au ſegment circulaire NOP, dans la même raiſon du petit axe au grand axe.

De-là ſuit la ſolution du problême ſuivant.

PROBLÊME LXVII.

Diviſer un ſecteur d'ellipſe en deux également.

SOIT, par exemple, le ſecteur d'ellipſe DCB, à diviſer en deux également par une ligne, comme CG.

Fig. 111. Décrivez ſur le diametre AB un cercle, & ayant tiré DI perpendiculaire à AB, prolongez-la en E, & tirez EC; ce qui vous donnera le ſecteur

circulaire ECB; divisez en deux également l'arc EB en F, & tirez FH perpendiculaire à l'axe AB; tirez enfin du centre C au point G, où cette perpendiculaire coupe l'ellipse, la ligne GC: on aura le secteur elliptique BCG égal à GCD, comme le secteur circulaire BCF l'est à FCE.

Ce seroit la même chose si le secteur étoit égal au quart d'ellipse, ou plus grand; comme aussi si c'étoit un secteur compris entre deux demi-diametres quelconques de l'ellipse, comme DC, *d*C.

Alors, des points D & *d*, abaissez sur l'axe les perpendiculaires DI, *di*, qui, prolongées, coupent le demi-cercle AEB en E & *e*; divisez l'arc E*e* en deux également en *f*, & menez la perpendiculaire *fh* à AB, qui coupe l'ellipse en *g*: la ligne C*g* divisera le secteur DC*d* en deux également.

PROBLÊME LXVIII.

Un charpentier a une piece de bois triangulaire; &, voulant en tirer le meilleur parti possible, il cherche le moyen d'y couper la plus grande table quadrangulaire rectangle qu'il se puisse. Comment doit-il s'y prendre?

SOIT ABC le triangle donné. Divisez les deux côtés BA, BC, en deux également en F & G, & tirez FG; puis des points F, G, menez les perpendiculaires à sa base FH, GI: le rectangle FI sera le plus grand possible qu'on puisse inscrire dans le triangle, & en sera précisément la moitié. Pl. 13, fig. 112.

Si le triangle est rectangle en A, il y aura deux manieres de satisfaire à la question, & l'on pourra avoir les deux tables rectangles F*i* & FI, qui Fig. 113.

ſont chacune les plus grandes inſcriptibles dans le triangle donné, & toutes deux égales.

Pl. 13, fig. 114. Si le triangle a tous ſes angles aigus, ſuivant qu'on prendra pour baſe un des côtés, on aura une ſolution différente. Il y en aura conſéquemment trois, & chacune donnera une table plus ou moins allongée, & toujours de même étendue, ſans quoi la plus grande réſoudroit le problême à l'excluſion des autres, tels ſont les rectangles FI, GL, KM.

Mais notre charpentier ayant conſulté un géometre, celui-ci lui obſerve qu'il y aura encore un plus grand avantage à tailler dans ſa piece de bois une table ovale. *On demande en conſéquence comment il faudra s'y prendre pour y tracer la plus grande ovale poſſible.*

Fig. 115. Soit donc de nouveau le triangle ABC la planche de bois propoſée. Diviſez d'abord chaque côté en deux également en F, D, E; ces trois points ſeront les points de contact de l'ellipſe avec les côtés du triangle: tirez auſſi les lignes AE, CF, BD, qui ſe coupent en G; ce ſera le centre de l'ellipſe.

Faites enſuite GL égale à GE, & tirez par *G* la parallele GO à BC, & par le point D la parallele DQ à AE; prenez enfin GP moyenne géométrique entre GQ & GO: les lignes GL, GP, ſeront les demi-axes de l'ellipſe, ſi le triangle BAC eſt iſoſcele. Or on a vu plus haut comment on peut décrire une ellipſe dont les deux axes ſont donnés.

Mais ſi l'angle LGP eſt aigu ou obtus, on pourra encore décrire l'ellipſe par un mouvement continu, au moyen de l'inſtrument que nous avons décrit au Problême XXXII; car il importe peu que

que l'angle des deux diametres donnés ſoit droit ou non. Le moyen décrit réuſſit toujours également, avec cette ſeule différence que, lorſque cet angle n'eſt pas droit, les portions d'ellipſe décrites dans les angles de ſuite LGP, LGR, ne ſont pas égales & ſemblables.

On peut auſſi déterminer directement les deux axes : on en trouve la méthode dans les traités des ſections coniques ; mais la nature de cet ouvrage ne permet que d'effleurer la matiere, & de renvoyer tout au plus aux ſources.

PROBLÊME LXIX.

Les points B & C ſont les ajutoirs des deux baſſins d'un jardin, & A eſt le point qui donne entrée à une conduite qui doit ſe partager en deux pour mener l'eau en B & C. On demande où doit être le point de partage, pour que la ſomme des trois conduites AD, DB, DC, & conſéquemment la dépenſe en tuyaux, ſoit la moindre poſſible. Pl. 16, fig. 128.

Ce problême, qui appartient à l'art du fontainier, étant réduit en langage géométrique, ſe réduit à celui-ci : *Dans un triangle ABC, trouver le point duquel menant aux trois angles autant de lignes, la ſomme de ces lignes ſoit la moindre poſſible.* Or il eſt viſible qu'il peut y avoir un pareil point, & que, ſa poſition étant trouvée, la dépenſe en tuyaux ſera moindre qu'en établiſſant le point de partage à tout autre point quelconque.

Il ſeroit long de développer ici le raiſonnement au moyen duquel on réſoud ce problême, auquel il ſeroit difficile d'appliquer le calcul, ſans tomber dans une prolixité extrême. Il nous ſuffira de dire qu'on démontre que le point D cherché doit être tel que les angles ADC, BDC, CDA, ſoient égaux entr'eux, & conſéquemment chacun de 120°.

Pour conſtruire donc ce problême, décrivez ſur le côté AC, comme corde, un arc de cercle comme ADC, capable d'un angle de 120°, ou qui ſoit le tiers du cercle dont il ſera partie; faites la même choſe ſur un autre des côtés, comme BC: l'interſection de ces deux arcs de cercle déterminera le point D que l'on cherche : c'eſt à ce point que la conduite doit ſe partager, pour aller de-là en B & C.

Telle ſeroit du moins la ſolution du problême, ſi les trois tuyaux AD, DC, DB, devoient être tous les trois du même calibre. Mais un fontainier intelligent ſe gardera bien de faire ces trois tuyaux égaux : il ſentira que, pour la plus grande hauteur du jet, il convient que les tuyaux DB, DC, n'admettent pas enſemble une plus grande quantité d'eau que le tuyau AD; car autrement, l'eau ſeroit dans ces tuyaux comme ſtagnante après être ſortie du tuyau AD, & ne recevroit pas toute l'impreſſion dont elle a beſoin pour jaillir à ſa plus grande hauteur.

Voici donc encore la ſolution du problême, dans ce nouveau cas. Nous ſuppoſerons que le calibre du tuyau AD, ou ſa capacité, eſt préciſément double de celui de chacun des deux autres, c'eſt-à-dire que les diametres ſont dans le rapport de 10 à 7; car, par ce moyen, l'eau ſera toujours également preſſée dans le premier & dans les deux derniers. Nous ſuppoſons auſſi que les prix de la toiſe de chaque eſpece de ces tuyaux ſont dans le même rapport; car, dans cette ſorte de problême économique, c'eſt principalement le rapport des prix qu'il faut conſidérer.

Cela étant donc ainsi supposé, nous trouvons que le point de séparation des tuyaux de conduite doit être en un point *d*, tel que les angles C*d*A, B*d*A, soient égaux, & soient tels que, dans chacun, son sinus soit au sinus total comme 10 est à 14, ou, plus généralement, comme le prix de la toise du gros tuyau est au double de celui du plus étroit. D'après cela, il est facile, dans notre hypothese, de déterminer cet angle. On le trouvera de 132° 56′, ou 133°.

Si donc l'on décrit sur les côtés CA, BA, du triangle ABC, les deux arcs de cercle capables d'un angle de 133° chacun, leur point de section donnera le point *d*, où la principale conduite doit se partager pour mener l'eau en B & C, en faisant la moindre dépense possible en tuyaux.

Remarque.

On peut, en étendant le problême ci-dessus, supposer que la conduite principale doit porter l'eau à trois points donnés, B, C, E. Dans ce cas, on démontre que si les quatre tuyaux de conduite étoient égaux, le point de partage ne sçauroit être placé plus avantageusement, au moins pour diminuer la quantité de tuyaux, que dans l'intersection même des lignes AE, BC; mais ce ne seroit probablement pas la disposition la plus avantageuse pour que l'eau jaillît avec le plus de force. Pl. 16, fig. 129.

D'ailleurs, on peut faire ici la même observation que sur la premiere solution du problême précédent. Il conviendra, pour la force du jet, que le calibre du principal tuyau soit à peu près triple de celui de chacun des autres. Supposons de plus que le prix de la toiſe du premier ſoit à celui de la toiſe des autres, comme m à n; & enfin, pour ſimplifier le problême, dont la ſolution ſeroit autrement fort compliquée, nous ſuppoſerons que les lignes AE, BC, ſe coupent à angles droits: cela étant, je trouve que l'angle EFC doit être tel que ſon ſinus de complément ſoit $\frac{1}{2}n\sqrt{4nn-\overline{m-1}^2}$, le ſinus total étant l'unité; ou, ce qui revient au même, il faut que le ſinus de l'angle DCF ſoit égal à la quantité ci-deſſus.

Si donc on ſuppoſe, par exemple, m à n comme 5 à 3, on aura l'expreſſion ci-deſſus égale à 0.71496; ce qui eſt le ſinus d'un angle de 45° 38′. Faites donc l'angle DCF de 45 à 46°, & vous aurez, dans cette ſuppoſition, le point F où conduite principale doit ſe partager.

Si m étoit à n comme 2 à 1, l'expreſſion ci-deſſus deviendroit égale à 0.86600; ce qui eſt le ſinus de l'angle de 60°: c'eſt pourquoi il faudroit, dans ce cas, faire l'angle DCF de 60°, ou chacun des angles DFC, DFB, de 30°.

Il eſt évident qu'afin que le problême ſoit ſuſceptible de ſolution, il faut que m & n ſoient tels que l'expreſſion ci-deſſus ne ſoit ni imaginaire, ni plus grande que l'unité. Dans l'un & l'autre cas, il n'y auroit aucune ſolution; & cela indiqueroit tout au plus que la diviſion devroit ſe faire au point A même, ou le plus loin poſſible de la ligne BC. Il faut auſſi que cette expreſſion ne ſoit pas égale à zéro; ou ſi cela arrivoit, on devroit en conclure que la diviſion doit être priſe au point D.

PROBLÊME LXX.

Paradoxe géométrique des lignes qui s'approchent ſans ceſſe l'une de l'autre, ſans néanmoins pouvoir jamais ſe rencontrer & concourir enſemble.

Il n'eſt aucun commençant dans la géométrie, qui ne ſçache que ſi deux lignes droites dans un même plan s'approchent l'une de l'autre, elles concourront néceſſairement dans un point d'interſection commune. Nous diſons *dans un même plan*, car ſi elles étoient dans des plans différents, il eſt clair qu'elles pourroient s'approcher juſqu'à un certain terme ſans ſe couper, & que de-là elles s'écarteroient de plus en plus l'une de l'autre. Suppoſons en effet deux plans paralleles & verticaux, par exemple, & que dans l'un ſoit tracée une ligne horizontale, & dans l'autre une inclinée à l'horizon; il eſt évident qu'elles ne ſeroient pas paralleles, & néanmoins qu'elles ne ſçauroient jamais ſe couper l'une l'autre, leur moindre éloignement étant de néceſſité la diſtance de deux plans. Ainſi voilà deux lignes non paralleles, & cependant qui ne concourent point. Mais ce n'eſt pas dans ce ſens que nous l'entendons.

Il y a en effet, & dans le même plan, pluſieurs lignes qu'on démontre s'approcher ſans ceſſe l'une de l'autre, ſans néanmoins pouvoir jamais ſe rencontrer. Ce ne ſont pas à la vérité des lignes droites, mais une courbe combinée avec une ligne droite, ou deux lignes courbes enſemble. Rien n'eſt plus familier à ceux qui ſont verſés dans une géométrie un peu relevée: en voici quelques exemples.

Pl. 13, fig. 116, Sur une ligne droite AG indéfinie, prenez des parties égales AB, BC, CD, &c; & ſur les points B, C, D, &c. ſoient élevées des perpendiculaires B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. qui décroiſſent ſuivant une progreſſion dont aucun terme ne puiſſe devenir zéro, quoiqu'il puiſſe devenir auſſi petit qu'on voudra : que ces termes, par exemple, décroiſſent ſuivant cette progreſſion, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c; il eſt évident que la courbe, paſſant par le ſommet des lignes décroiſſantes ſuivant cette progreſſion, ne ſçauroit jamais rencontrer la ligne AG, quelque prolongée qu'elle ſoit, puiſque jamais ſa diſtance à cette ligne ne peut devenir zéro : elle s'en approchera néanmoins de plus en plus, & de maniere à en être plus près qu'aucune quantité, quelque petite que ce ſoit. Cette courbe eſt, dans ce cas-ci, celle ſi connue des géometres ſous le nom d'*hyperbole*, qui a la propriété d'être renfermée entre les branches des deux angles rectilignes oppoſés par le ſommet, vers leſquelles elle s'approche de plus en plus ſans jamais les atteindre.

Si la progreſſion ſuivant laquelle décroiſſent ces lignes B*b*, C*c*, D*d*, &c. étoit celle-ci, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c. la ligne paſſant par les points *b*, *c*, *d*, *e*, &c. s'approcheroit encore de plus en plus de la droite AG, ſans jamais la rencontrer, puiſque, quelqu'éloigné que ſoit un terme quelconque de cette progreſſion, il ne peut jamais être égal à zéro.

Fig. 117, *Autre Exemple*. Hors de la ligne AF indéfinie, ſoit pris un point P, duquel ſoit tirée PA perpendiculaire à AF, & tant d'autres lignes que l'on voudra, PB, PC, PD, &c. de plus en plus inclinées, ſur la prolongation deſquelles on prendra les lignes A*a*, B*b*, C*c*, &c. toujours égales; il eſt clair que la ligne paſſant par les points a, b, c, d, &c. ne ſçauroit jamais rencontrer la ligne AF : cependant elle s'en approchera de plus en plus, & de plus près qu'aucune quantité déterminée, puiſque Ff s'incline de plus en plus. Cette courbe eſt celle qui eſt connue des géometres ſous le nom de *Conchoïde*, & qu'inventa un géometre Grec nommé *Nicomede*, pour ſervir à la ſolution du problême des deux moyennes proportionnelles.

Nous n'en donnerons pas d'autre exemple, attendu qu'il y en a une infinité dans la géométrie un peu relevée.

PROBLÊME LXXI.

Il y avoit dans l'iſle de Délos un temple conſacré à la Géométrie. Il étoit élevé ſur une baſe circulaire, & ſurmonté d'un dôme hémiſphérique, percé de quatre fenêtres dans ſon contour & d'une ouverture circulaire au ſommet, tellement combinées, que le reſtant de la ſurface hémiſphérique de la voûte étoit égal à une figure rectiligne. Quant au tambour du temple, il étoit percé d'une porte qui elle-même étoit abſolument quarrable, ou égale à un eſpace rectiligne. On demande comment s'y étoit pris l'architecte géometre qui avoit élevé ce monument. Pl. 14, fig. 118.

TOUT le monde, du moins géometre, ſçait que la meſure de la ſurface d'un hémiſphere dépend de la meſure du cercle, cette ſurface étant égale à celle d'un cylindre de même baſe & même hauteur. L'artifice de cette conſtruction étoit donc 1° d'avoir retranché du dôme, par les ouvertures ci-deſſus décrites, des portions ſphériques telles que le restant fût égal à une figure purement rectiligne, & 2° d'avoir décrit sur le tambour ou mur circulaire du temple, une autre figure qui elle-même fût aussi quarrable. Or voici comment on a pu s'y prendre.

Pl. 14, fig. 119. Soit d'abord un quart de la voûte hémisphérique du temple, dont la base soit le quart de cercle ACB. Soit pris l'arc BD égal à un quart de l'arc AB, pour la largueur de l'arc doubleau qui doit séparer les fenêtres; tirez la corde du restant AD; Maintenant que SCE soit une coupe quelconque par l'axe SC du dôme, dont l'intersection avec AD soit F; faites CE, CF, CG, continuellement proportionnelles; prenez dans l'axe CS la ligne CH égale à EG, & tirez HI parallele à CE, qui coupera en I le quart de cercle SE: le point I sera un de ceux de la fenêtre cherchée. Ainsi la suite des points I déterminés de cette maniere, donnera le contour de cette fenêtre, dont la surface sera égale à deux fois le segment AED, tandis que la portion sphérique SAIDS sera égale à deux fois le triangle rectiligne CAD.

La surface entiere de ce quart de voûte sera donc égale à deux fois ce triangle, plus le secteur sphérique SDB, lequel est égal à deux fois le secteur circulaire CDB, ou au quart du secteur sphérique SAEB: donc, si de ce secteur on retranche le quart SLM par un plan parallele à la base, éloigné du sommet S d'un quart du rayon SC, le restant de ce quart d'hémisphere, c'est-à-dire la surface AIDBMLA, restera égale au double du triangle rectiligne CAD. Faisant enfin chaque autre quart de la voûte hémisphérique semblable à celui-ci, on aura toute la voûte, les ouvertures ôtées, égale à huit fois le triangle ACD.

Pour l'ouverture à faire dans le mur circulaire du temple, & qui doit être elle-même égale à un espace rectiligne, rien n'est plus facile, quoique cette ouverture soit partie d'une surface cylindrique. Pour cet effet, que ABDEF représente une moitié de cette surface. Prenez pour la largeur de la porte à former, la corde GH parallele au diametre AD; faites HK, GI, qui sont perpendiculaires à la base, de la grandeur convenable pour que cette porte ait la proportion qu'exigent le bon goût & le caractere de l'ouvrage; faites enfin passer par les points I & K, & par la ligne AD, un plan qui déterminera, par son intersection avec la surface cylindrique, la courbe ILK: vous aurez l'ouverture cylindrique un peu cintrée par le haut GBHKI, qui sera au rectangle de CB par GH, comme le sinus de l'angle LCB au sinus de l'angle demi-droit. Pl. 14, fig. 120.

Donc le problême du géometre Grec est résolu.

On pourroit varier ce problême de beaucoup de manieres; & pendant le triste séjour que j'ai fait, en 1758, dans un poste du Canada, je me suis amusé à varier la question de bien des manieres. Je l'ai résolue en faisant la totalité de la surface du temple absolument quarrable. Je ne perçois le dôme que d'un trou au sommet, comme celui du Panthéon, & je prenois les quatre fenêtres sur la surface cylindrique du temple, &c. Tout cela est, au reste, facile pour qui est un peu géometre.

Remarques.

1. Ce problême est, à peu de chose près, celui que Viviani proposa en 1692, sous le titre de *Ænigma Geometricum.* Il fut facilement résolu par les Léibnitz, les Bernoulli, les l'Hôpital. On en

peut voir l'histoire dans celle des *Mathématiques*, Tome II, Liv. I. La solution de Viviani lui-même est tout-à-fait ingénieuse & élégante; mais comme, suivant cette solution, la voûte ne seroit pas susceptible de construction, parcequ'elle porteroit sur quatre points, ce qui est absurde en architecture, nous avons fait quelques changements à l'énoncé, en ajoutant l'ouverture circulaire du sommet; au moyen de quoi notre voûte porteroit sur des parties ayant quelque solidité, chaque fenêtre étant séparée de sa voisine par un arc qui est un seizieme de la circonférence totale.

2. Le pere Guido-Grandi a remarqué que si l'on a un cône droit sur sa base circulaire; qu'on inscrive un polygone dans cette base, par exemple, un triangle ABC; que l'on éleve sur chaque côté de ce polygone un plan perpendiculaire à la base; la portion de la surface conique, retranchée du côté de l'axe, est égale à un espace rectiligne: car il est aisé de démontrer que cette surface est à celle du polygone rectiligne ABC qui lui répond perpendiculairement au dessous, comme la surface du cône au cercle de sa base, c'est-à-dire, comme le côté incliné du cône SD au rayon ED de cette base.

Pl. 14, fig. 121.

Les portions de cône retranchées par les plans ci-dessus vers la base, sont aussi visiblement dans le même rapport avec les segments de cercle sur lesquels ils appuient. Enfin, quelque figure qu'on décrive dans la base, si sur la circonférence de cette figure on conçoit élevée une surface cylindrique droite, elle retranchera de la surface conique une portion qui lui sera dans le même rapport.

Ce géometre Italien, qui étoit de l'ordre des Camaldules, s'est avisé de nommer cette portion conique absolument quarrable, *Velum Camaldulense.* Il eût pu se dispenser de lui donner cette dénomination de mauvais goût. C'est ainsi qu'un bon religieux Franciscain s'est avisé de faire un cadran solaire sur un corps assez ressemblant à une sandale, & d'en faire imprimer la description sous le titre de *Sandalion Gnomonicum.*

PROBLÊME LXXII.

Un polygone quelconque irrégulier ABCDEA étant donné, qu'on divise chacun de ses côtés en deux également, comme en a, b, c, d, e, *& qu'on joigne les points de division des côtés contigus : il en résultera un nouveau polygone* abcdea. *Qu'on fasse même opération sur ce polygone, puis sur celui qui en résultera, & ainsi à l'infini. On demande le point où se termineront ces divisions.* Pl. 14, fig. 122.

Ce problême, impossible peut-être à résoudre par des considérations purement géométriques, est susceptible d'une solution fort simple, tirée d'une autre considération. Nous la donnerons dans le volume suivant. Nos lecteurs pourront exercer leur sagacité sur cette question. Je me bornerai à ajouter qu'elle me fut proposée en 1750, par M. D., qui me dit la tenir de M. de Buffon.

TABLE

De la longueur du Pied, ou autre mesure longitudinale qui en tient lieu, chez les principales Nations & dans les principales Villes de l'Europe.

NOUS avons plus d'une fois éprouvé combien l'on est embarrassé, dans certaines recherches, à se procurer la connoissance des mesures des différents pays : c'est pourquoi, toutes les fois que nous en avons eu l'occasion, nous avons recueilli avec soin les rapports des mesures étrangeres, soit anciennes, soit modernes, avec les nôtres; & nous croyons que nos lecteurs verront ici avec plaisir une table de ces mesures, la plus ample qui se trouve aucune autre part. Nous les comparons toutes au pied de Paris, qui est de 12 pouces divisés chacun en 12 lignes, & chaque ligne divisée en 10 parties; ce qui donne, pour le pied de Paris, 1440 de ces parties. Nous en présentons une double comparaison, sçavoir, l'une en parties de cette espece, & l'autre en pieds, pouces, lignes, & dixiemes de lignes.

PIEDS ANCIENS ET MODERNES,
comparés au Pied-de-Roi de Paris, contenant 1440 parties.

PIEDS ANCIENS.

	Part.		Pied.	Pouc.	Lig.	P.s
L'ancien Pied Romain, de	1306	*ou*	0	10	10	6

	Part.	Pied.	Pouc.	Lig.	P.
Le Pied Grec & Ptolémaïque,	de 1364 ou	0	11	4	4
—— Grec Phylétérien,	1577	1	1	1	7
—— d'Archimede, ou Probabl. de Syracufe & Sicile,	986	0	8	2	6
—— Drufien,	1473	1	0	3	3
—— Macédonien,	1567	1	1	0	7
—— Egyptien,	1920	1	4	0	0
—— Hébraïque,	1637	1	1	7	7
—— Naturel, (*hom. veftig.*)	1100	0	9	2	0
—— Arabe,	1480	1	0	4	0
—— Babylonique,	1546	1	0	10	6
ou bien	1534	1	0	9	4

PIEDS MODERNES.

	Part.	Pied.	Pouc.	Lig.	P.
Le Pied de Paris,	de 1440 ou	1	0	0	0
—— Amfterdam,	1253	0	10	5	3
—— Ancône & Etat Ecclésf.	1732	1	2	5	2
—— Altorf,	1047	0	8	8	7
—— Anvers,	1270	0	10	7	0
—— Ausbourg,	1313	0	10	11	3
—— Avignon,	1200	0	10	0	0
—— Aquilée,	1524	1	0	8	4
—— Arles,	1200	0	10	0	0
—— Bafle,	1276	0	10	7	6
—— Barcelone,	1340	0	11	2	0
—— Bologne,	1682	1	2	0	2
—— Bourg (Breffe & Bugey),	1392	0	11	7	2
—— Berlin,	1340	0	11	2	0
—— Brême,	1290	0	10	9	0
—— Bergame,	1933	1	4	1	3

	Part.	Pied.	Pouc.	Lig.	P.
Le Pied de Besançon,	de 1372 *ou*	0	11	5	2
——— Brescia,	2108	1	5	6	8
——— Bruges,	1013	0	8	5	3
——— Bruxelles,	1219	0	10	1	9
——— Breslau,	1520	1	0	8	0
——— Chine, le Tribunal des Mathématiques,	1523	1	0	8	3
Le Pied Impérial,	1420	0	11	10	0
——— Cologne,	1220	0	12	2	0
——— Chambéry (& Savoie),	1496	1	0	5	6
——— Copenhague,	1418	0	11	9	8
——— Constantinople, {	2966	2	0	8	6
	1575	1	1	1	5
——— Cracovie,	1580	1	1	2	0
——— Dantzick,	1247	0	10	4	7
——— Dijon,	1392	0	11	7	2
——— Delft,	739	0	6	1	9
——— Danemarck,	1415	0	11	9	5
——— Dordrecht,	1042	0	8	8	2
——— Edimbourg,	1485	1	0	4	5
——— Ferrare,	1779	1	2	9	9
——— Florence,	1345	0	11	2	5
——— Francfort-sur-le-Mein,	1260	0	10	6	0
——— Franche-Comté,	1583	1	1	2	3
——— Genes, (le Palme)	1098	0	9	1	8
——— Geneve,	2592	1	9	7	2
——— Grenoble & Dauphiné,	1512	1	0	7	2
——— Hall en Saxe,	1320	0	11	0	0
——— Harlem,	1267	0	10	6	7
——— Hambourg,	1260	0	10	6	0
——— Heidelberg (Palat.),	1220	0	10	2	0
——— Inspruck,	1488	1	0	4	8

	Part.	Pied.	Pouc.	Lig.	P.
Le Pied de Leyde,	de 1382 *ou*	0	11	6	2
——— Leipsick,	1397	0	11	7	7
——— Liege,	1276	0	10	7	6
——— Lisbone,	1287	0	10	8	7
——— Livourne,	1340	0	11	2	0
——— Lombard *ou* de Luitprand, *ou* Aliprand,	1926	1	4	0	6
——— Londres,	$1351\frac{2}{3}$	0	11	5	1
——— Lubeck,	1260	0	10	6	0
——— Lucques,	2615	1	9	9	5
——— Lyon & Lyonnois, Forez & Beaujolois,	1512	1	0	7	2
——— Lorraine,	1292	0	10	9	2
——— Madrid,	1237	0	10	3	7
——— Malthe, (le Palme)	1237	0	01	0	7
——— Marseille,	1100	0	9	2	0
——— Malines,	1017	0	8	5	7
——— Mayence,	1335	0	11	1	5
——— Mastricht,	1238	0	10	3	8
——— Milan, *pied décimal*	1155	0	9	7	5
——— Milan, *pied aliprand*	1926	1	4	0	6
——— Modene,	2812	1	11	5	2
——— Monaco,	1042	0	8	8	2
——— Montpellier, (le Pan)	1050	0	8	9	0
——— Moscow,	1255	0	10	5	5
——— Mantoue, (la Brasse)	2055	1	5	1	5
——— Munich,	1280	0	10	8	0
——— Naples, (le Palme)	1164	0	9	8	4
——— Nuremberg, *Pd. de ville*	1346	0	11	2	6
——— Nuremberg, *Pd. de camp.*	1226	0	10	2	6
——— Padoue,	1899	1	3	9	9

——— des Pays-Bas, *voyez* Mastricht.

	Part.	Pied.	Pouc.	Lig.	P.
Le Pied de Parme,	de 2526 *ou*	1	9	0	6
——— Pavie, (*Id.*)	2080	1	5	4	0
——— Prague,	1336	0	11	1	6
——— Palerme,	1010	0	8	5	0
——— Provence, *voyez* Marseille.					
—— du Rhin *ou* Rhinlandique,	1382	0	11	6	2
——— Riga,	1260	0	10	6	0
——— Rome, (le Palme)	990	0	8	3	0
——— Rouen, comme Paris,	1440	1	0	0	0
——— Savoie, *voyez* Chambéry.					
——— Séville, (Andalousie)	1340	0	11	2	0
——— Stétin en Poméranie,	1654	1	1	9	4
——— Stockholm,	1450	1	0	1	0
——— Strasbourg, *Pd. de ville*	1292	0	10	9	2
——— Strasbourg, *Pd. de camp.*	1309	0	10	10	9
——— Sienne, (*pied comm.*)	1674	1	1	11	4
——— Tolede,	1237	0	10	3	7
——— Turin, (Piémont)	2265	1	6	10	5
——— Trente,	1622	1	1	6	2
——— Valladolid,	1227	0	10	2	7
——— Varsovie,	1580	1	1	2	0
——— Venise,	1537	1	0	9	7
——— Vérone,	1510	1	0	7	0
——— Vienne en Autriche,	1400	0	11	8	0
——— Vienne en Dauphiné,	1430	0	11	11	0
——— Vicence,	1535	1	0	9	5
——— Wesel,	1042	0	8	8	2
——— Ulm,	1117	0	9	3	7
——— Urbino,	1570	1	1	1	0
——— Utrecht,	1001	0	8	4	1
——— Zurich,	1323	0	11	0	3

TABLE

De quelques autres Mesures tant anciennes que modernes, & de leurs rapports.

LA coudée étoit ordinairement un pied & demi. Les Hébreux néanmoins en avoient trois, sçavoir ; la coudée ordinaire, qui étoit d'un pied & demi hébreu, ou de $2455 \frac{133}{778}$ parties, dont le pied de Paris est 1440.

La coudée sacrée ou moderne étoit d'un pied babylonique & trois quarts, ou de 2705 ou 2684 parties du pied de Paris.

La grande coudée géométrique étoit de 9 pieds hébreux, ou de 6 petites coudées.

L'orgye des Grecs étoit de .	6 pieds grecs.
L'arura, de	50
Le pléthron, de	100
Le dypléthron, de . . .	200

Ces dernieres mesures étoient celles des terres.

Mesures de Paris.

L'exapeda des Latins étoit de .	6 pieds rom.
La decempeda, de	10

La toise de Paris est de . .	6 pieds de roi.
La perche royale & forestiere, de	22
La perche moyenne, de . .	20
La perche moindre, & selon la coutume de Paris, de . . .	18

L'arpent est de 100 perches quarrées.

Mesures de Londres.

La verge angloise (yard) est de . 3 pieds angl.
La toise (fathom), de . . . 6
La perche (poole), de . . 16 $\frac{1}{2}$.
L'acre contient 160 perches quarrées, ou 41600 pieds anglois.

Mesures de contenance de Paris.

Le muid de liqueur (mesure de Paris) est de 8 pieds cubes, ou 13824 pouces cubes.

Six pouces cubes font un poinçon, ou, par corruption, un poisson.

Deux poissons ou 12 pouces cubes, le demi-setier.

Quatre poissons, ou deux demi-setiers, ou 24 pouces cubes, font la chopine.

Deux chopines ou 48 pouces cubes, la pinte.

Deux cents quatre-vingt-huit pintes font le setier.

Trente-six setiers font le muid.

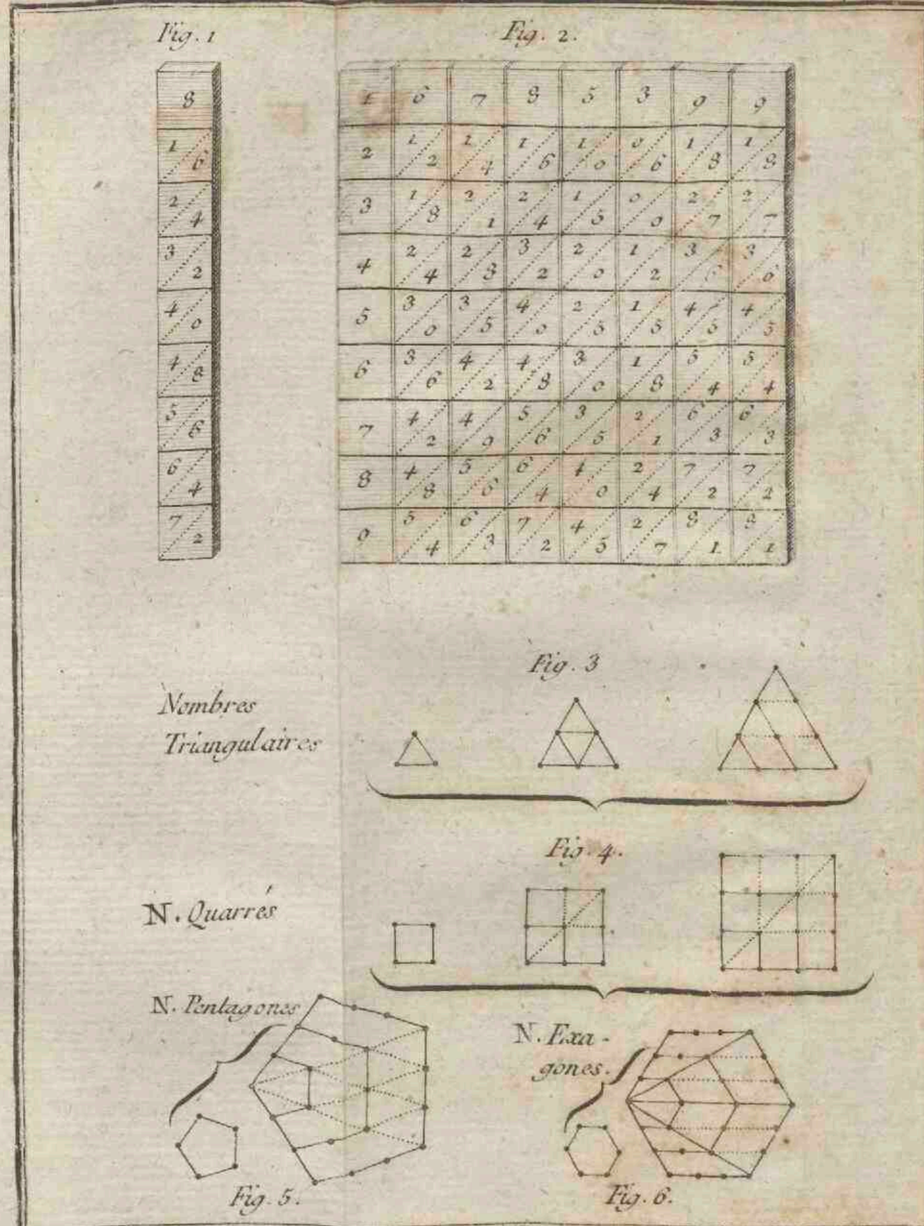
Mesures de contenance de Londres.

La quarte de Londres contient 57 $\frac{3}{4}$ pouces cubiques de Londres, ou 47 $\frac{68}{100}$ pouces cubiques de Paris.

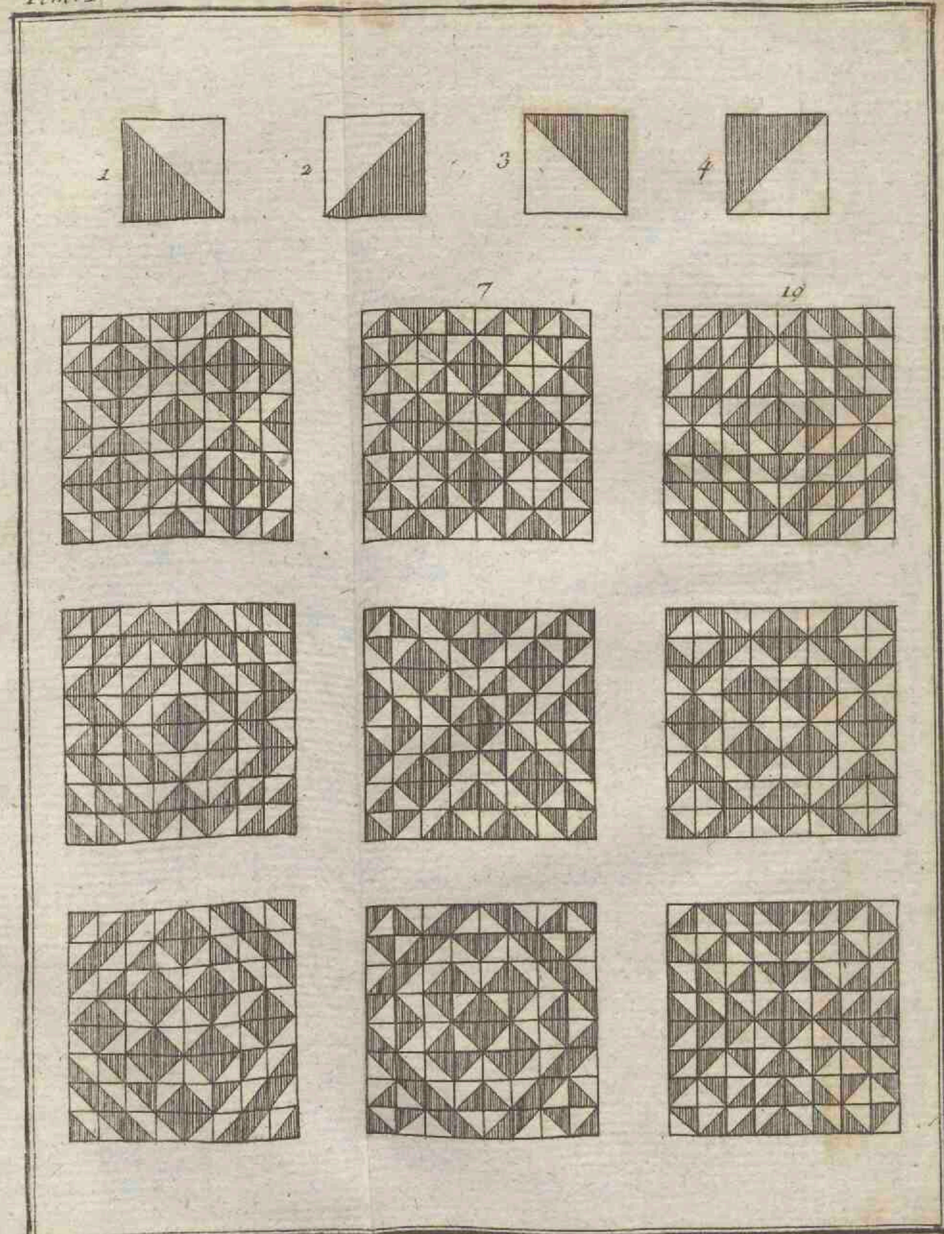
Le galon contient 4 quartes, ou 231 pouces cubes anglois, ou 190 $\frac{72}{100}$ pouces cubes de Paris.

La quarte contient deux pintes.

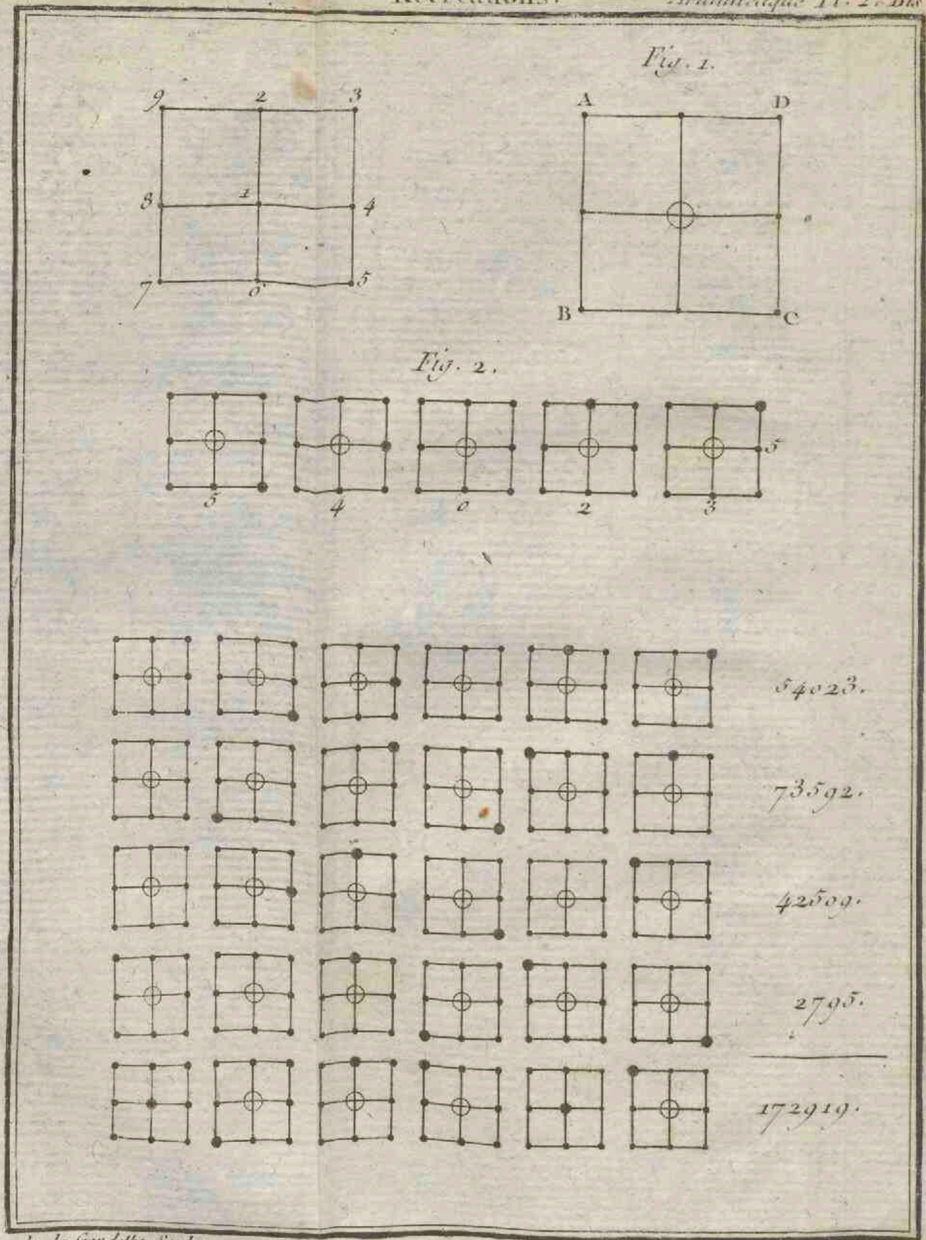
Ainsi la quarte de Londres est tant soit peu moindre que la pinte de Paris, & la pinte de Londres un peu moindre que la chopine de Paris.



De la Gardette Sculp.



De la Gardette Sculp.



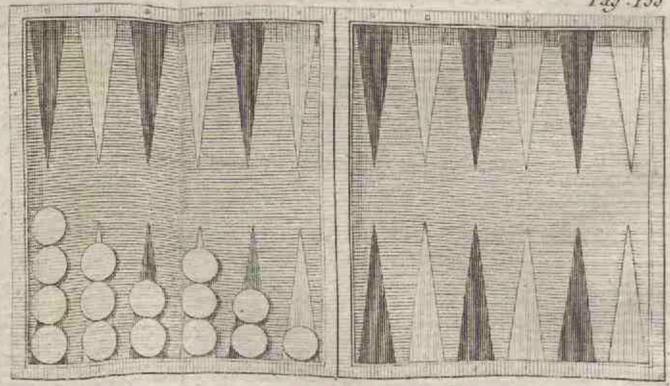
de la Gardette Sculp.

Triangle Arithmetique de M.r Pascal, Voyez Page 88.

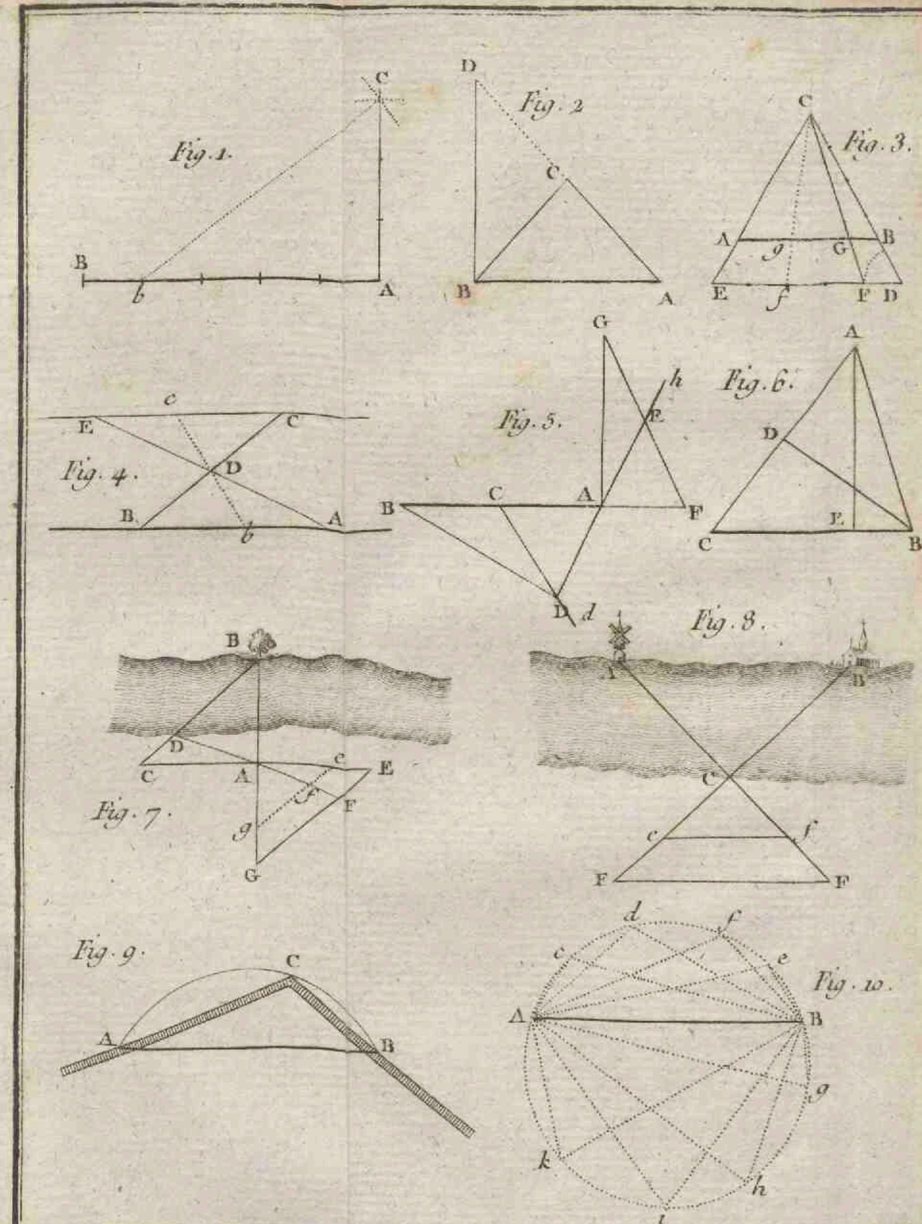
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N. Naturels		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N. Triangul.			1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
N. Pyram. 1.eres				1	4	10	20	35	56	84	120	165
N. Pyram. 2.des					1	5	15	35	70	126	210	330
N. Pyramid. 3.es						1	6	21	56	126	252	462
							1	7	28	84	210	462
								1	8	36	120	330
									1	9	45	165
										1	10	55
											1	11
												1

Probleme IX.

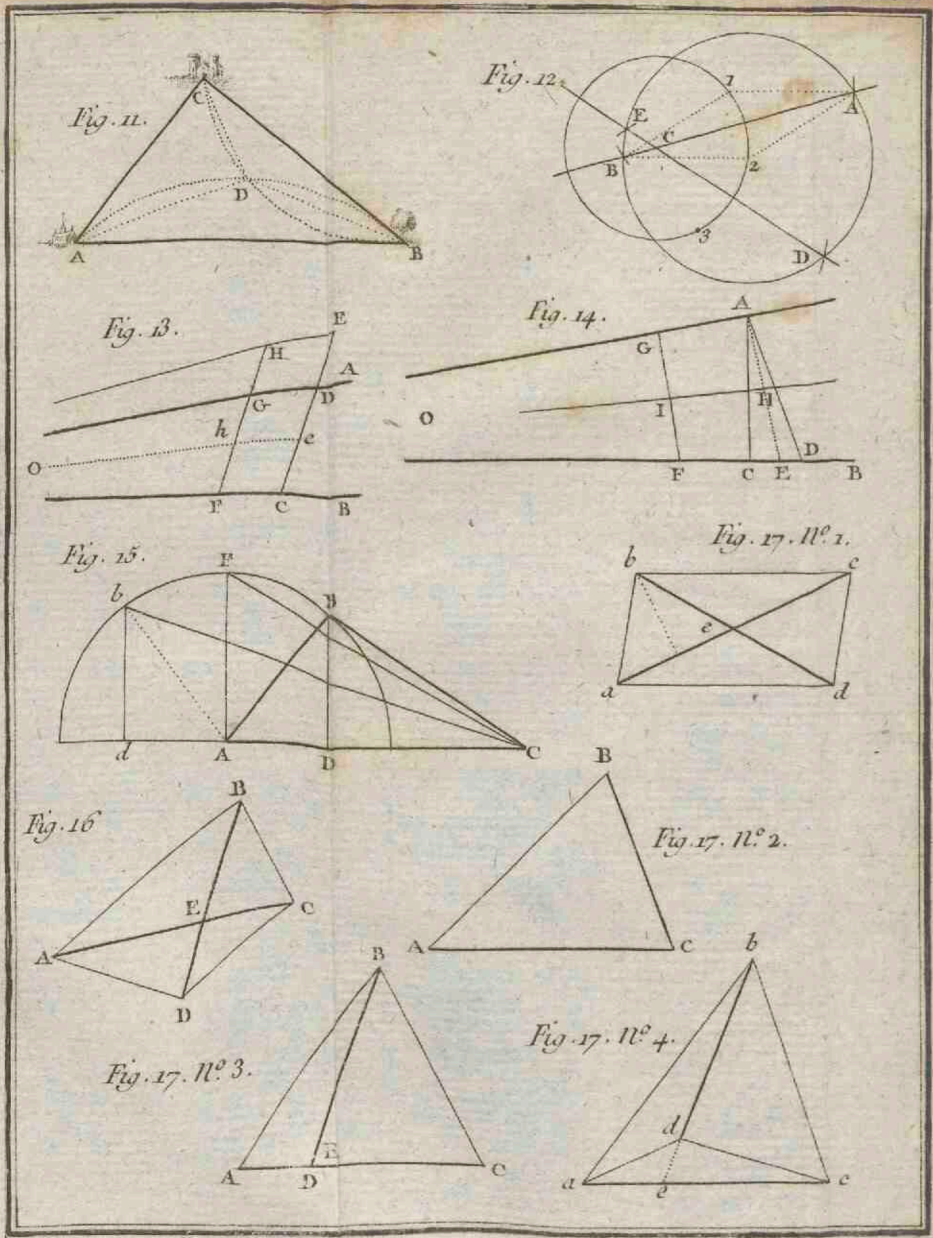
Pag. 130



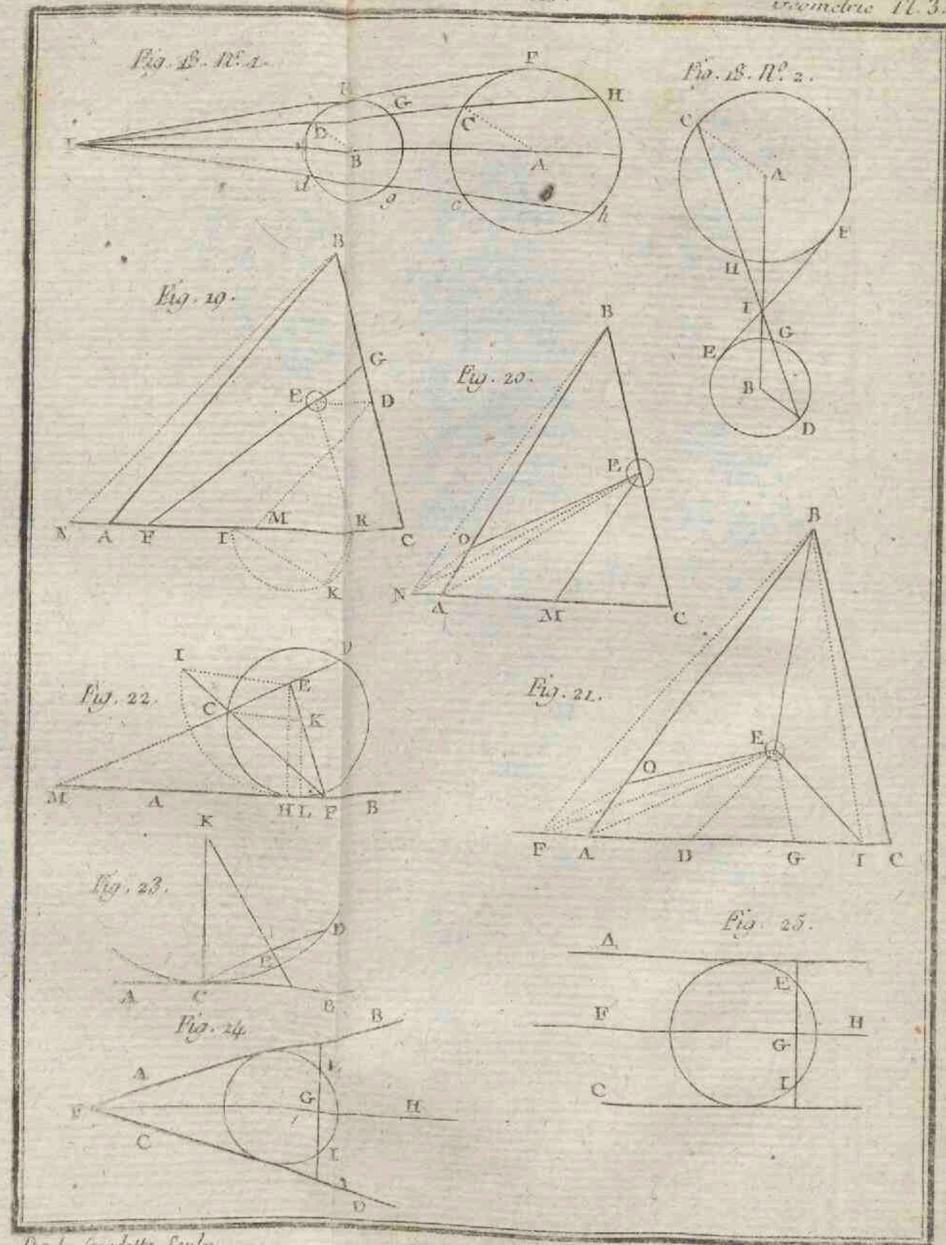
de la Gardette Sculp.



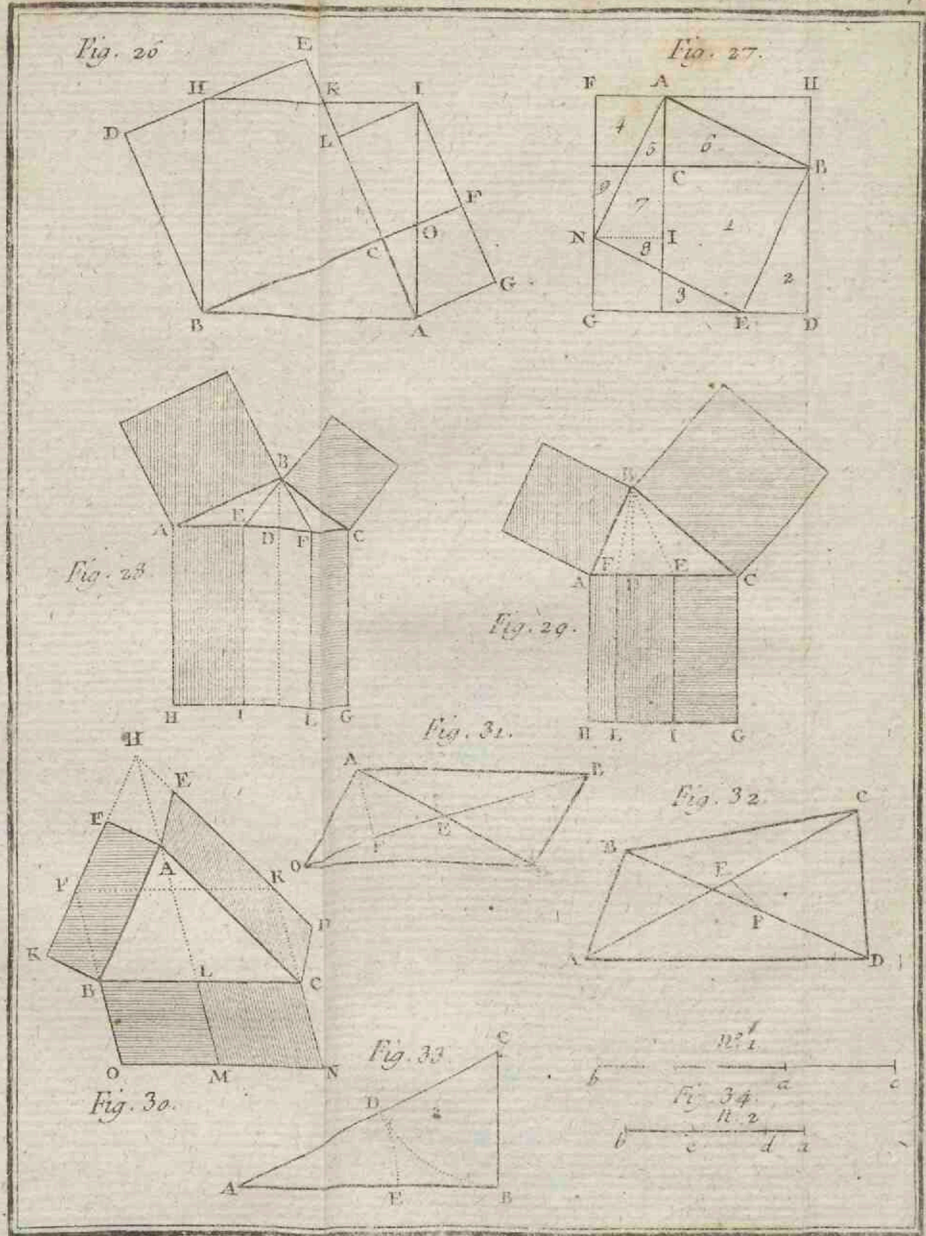
de la Gardette Sculp.



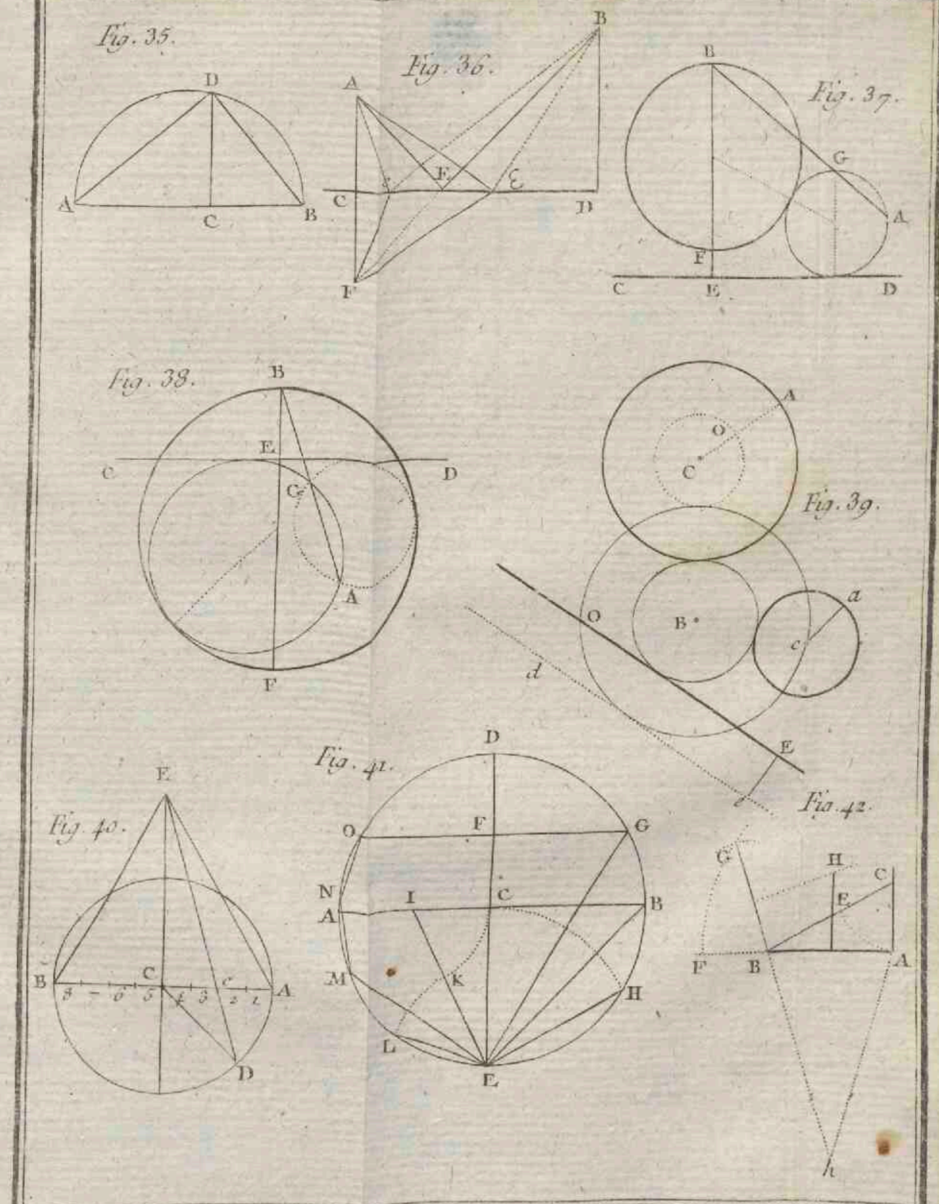
De la Gardette Sculp.



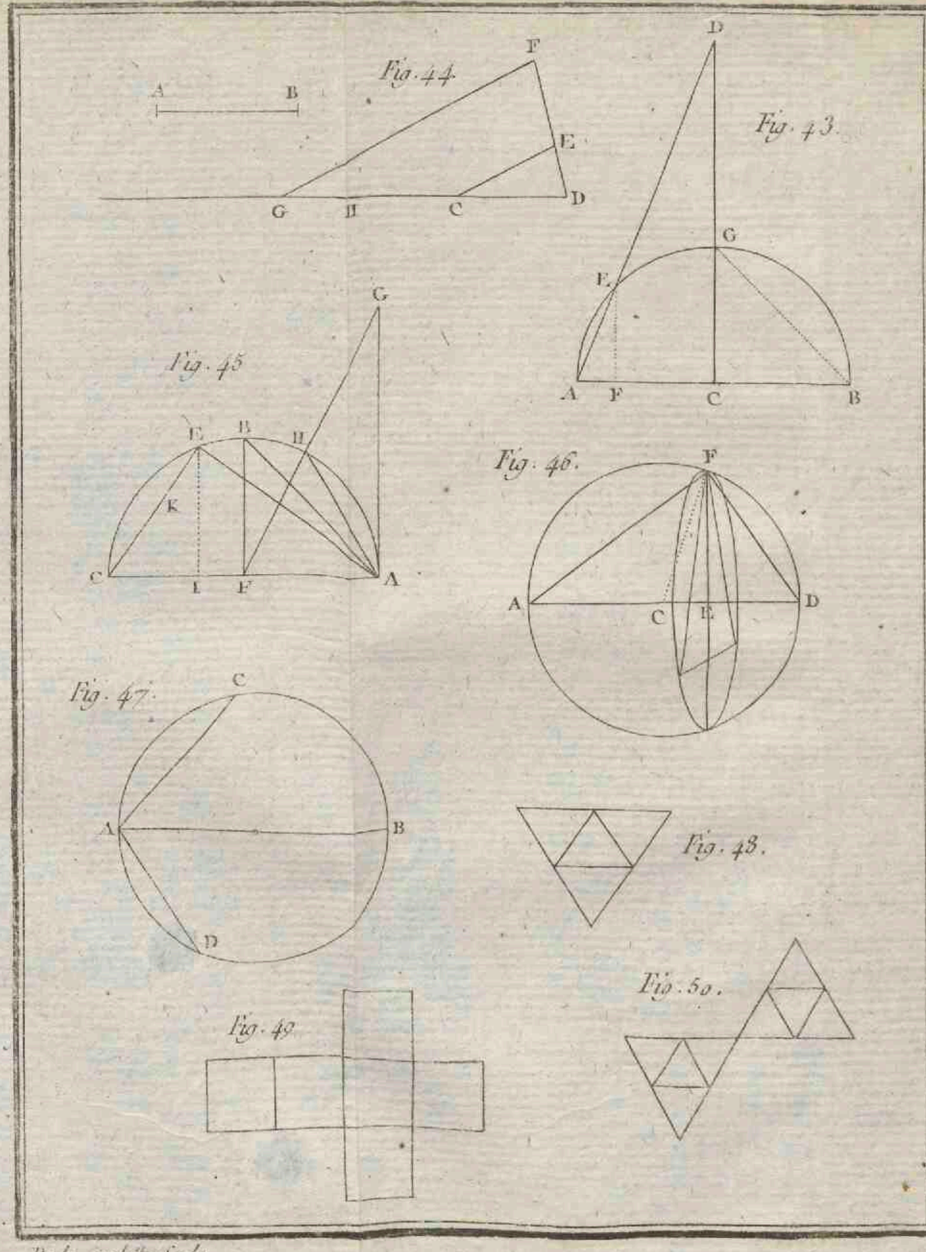
De la Gardette Sculp.



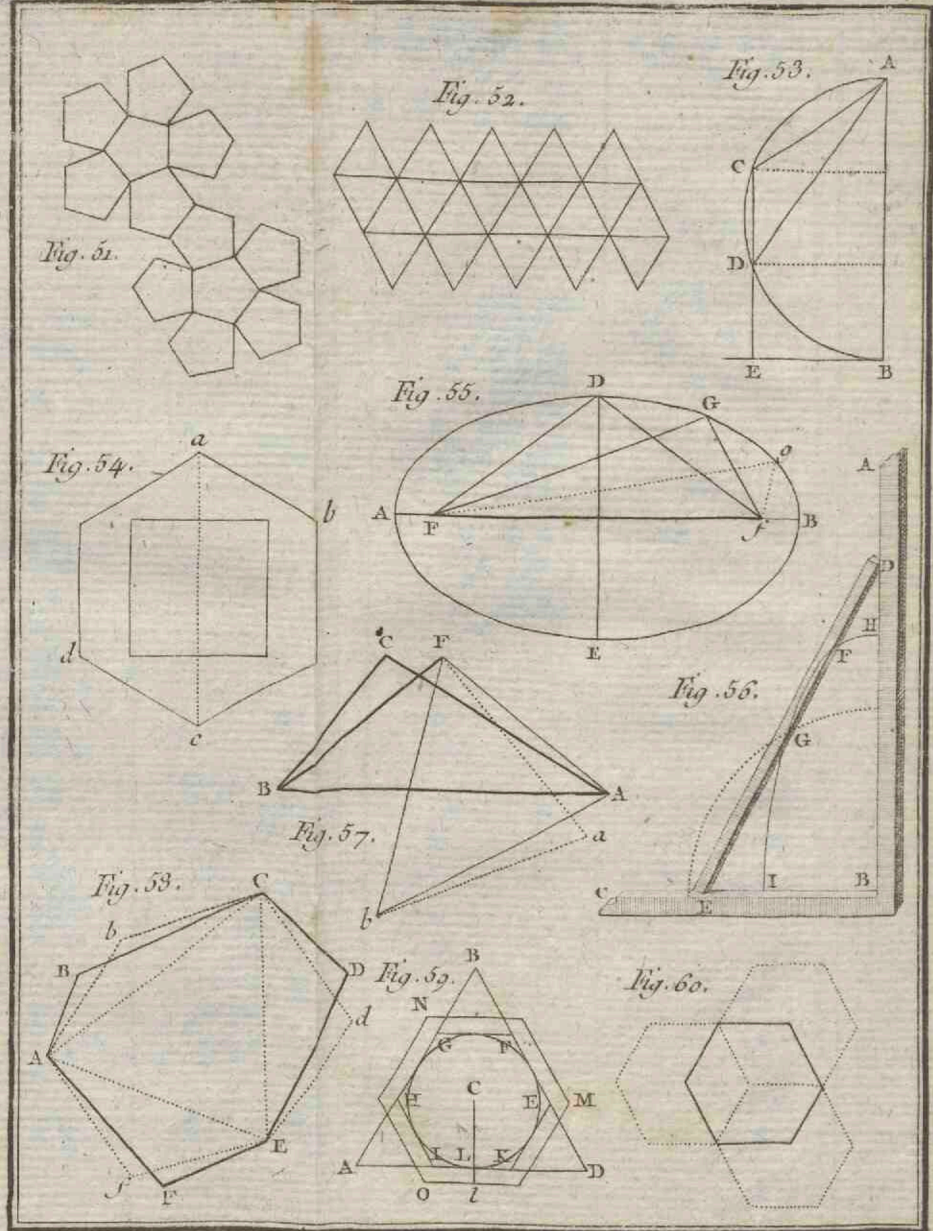
De la Gardette Sculp.



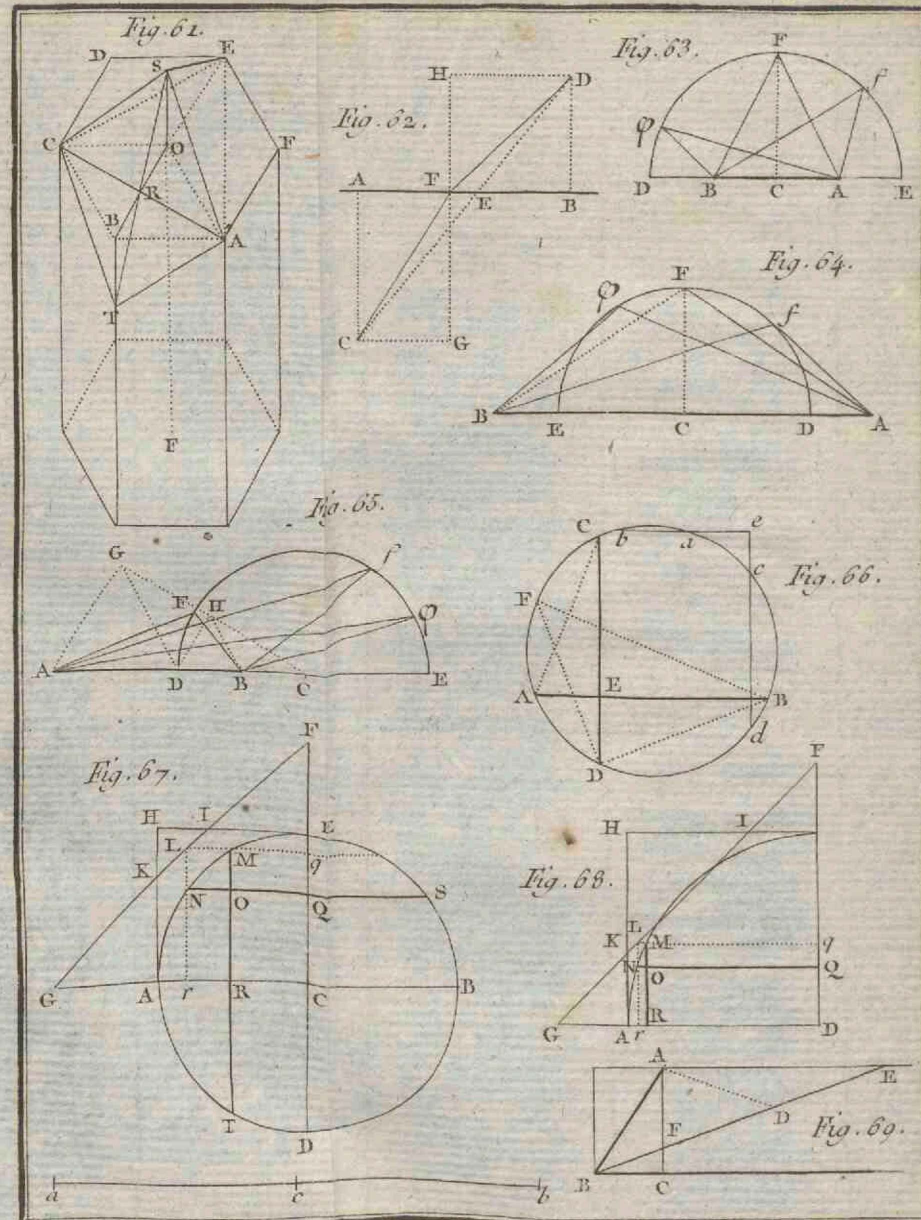
De la Gardette Sculp.



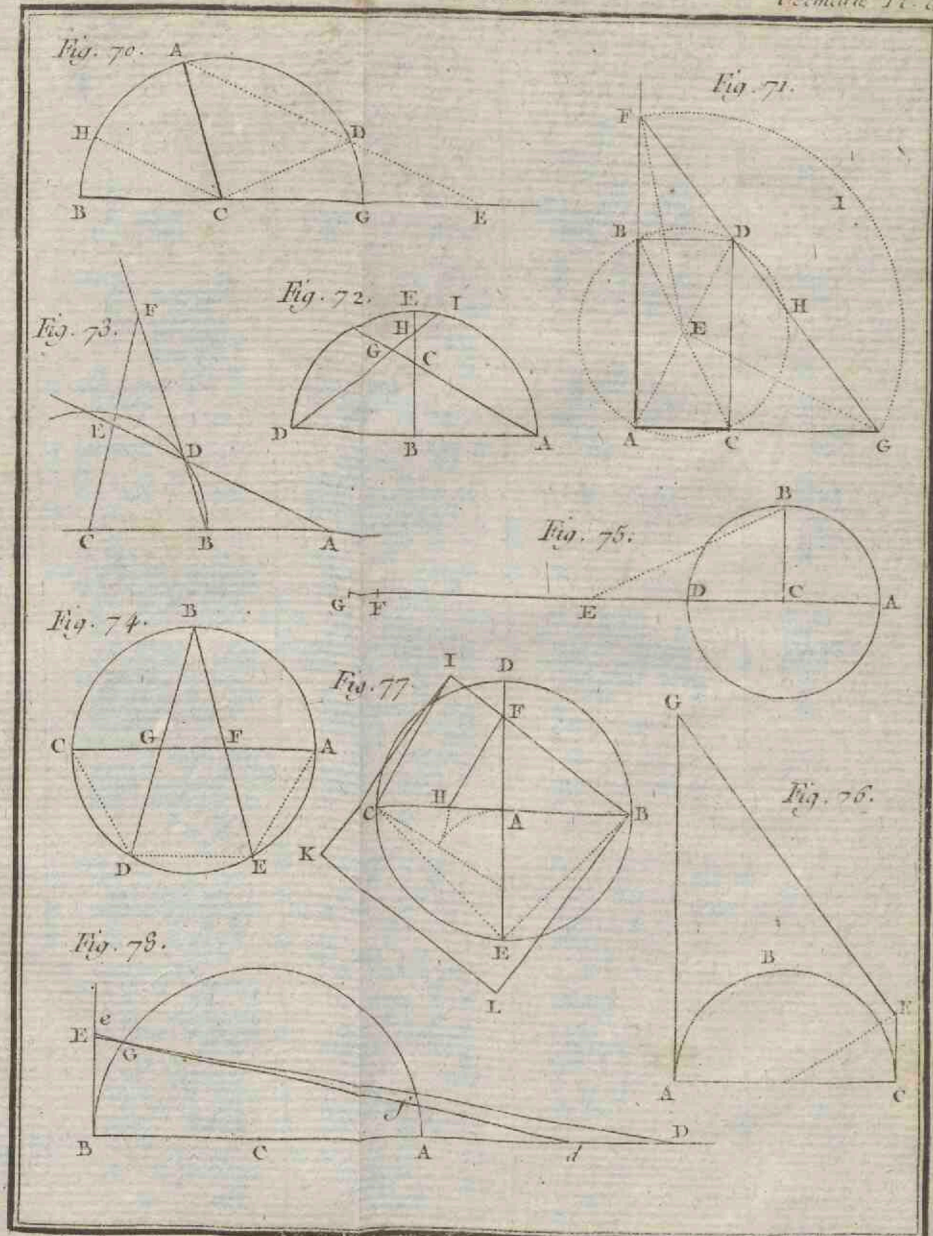
De la Gardette Sculp.



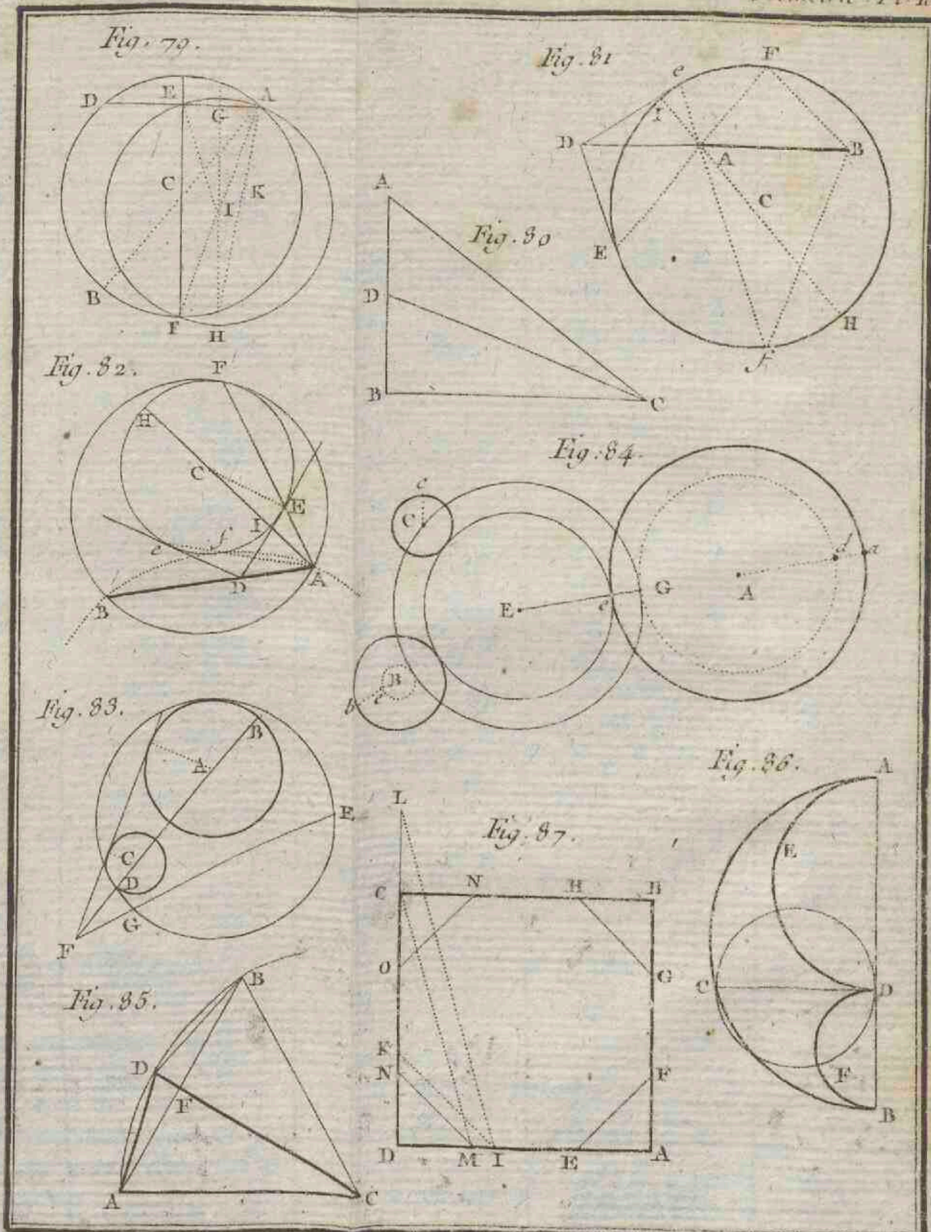
De la Gardette Sculp.



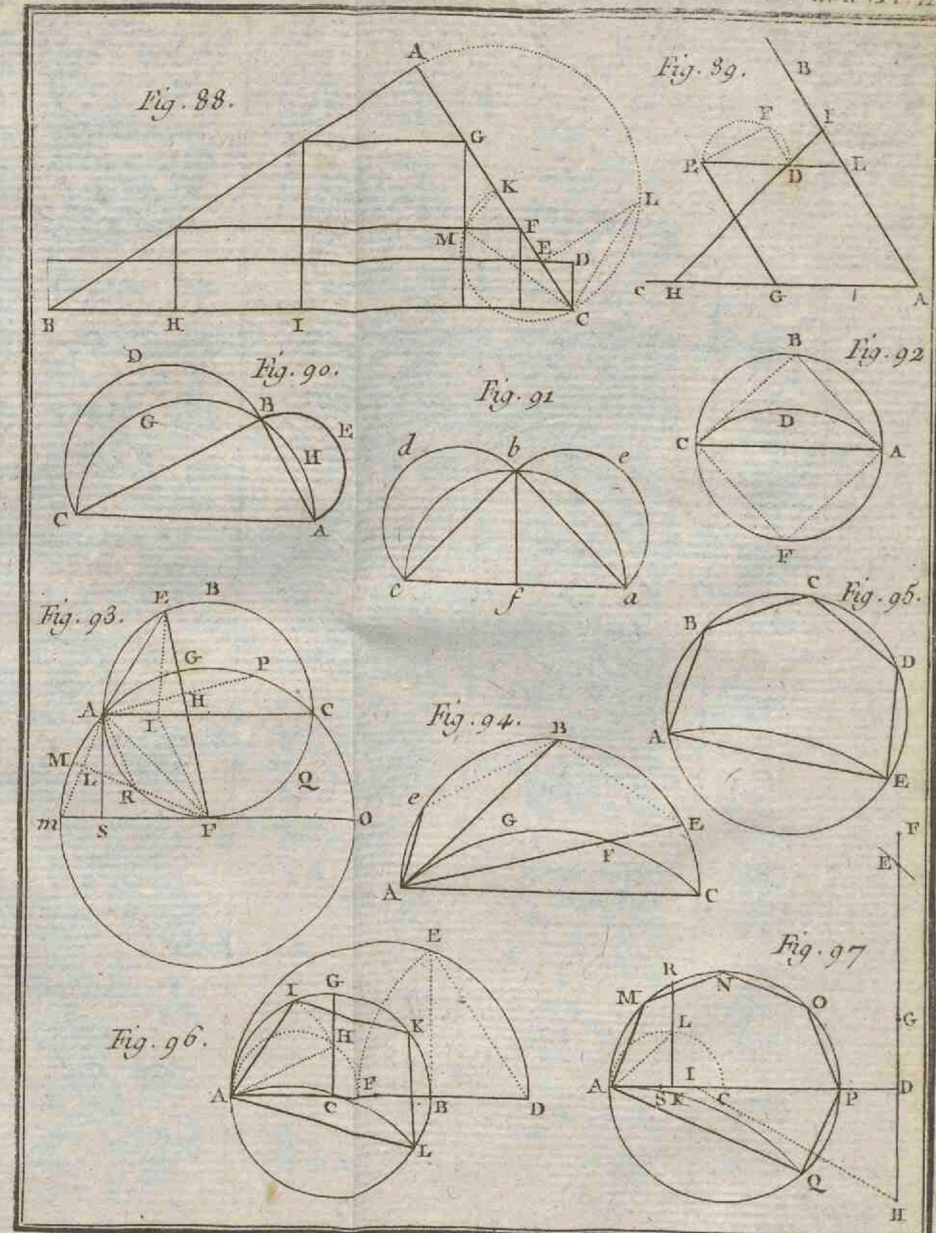
De la Gardette Sculp.



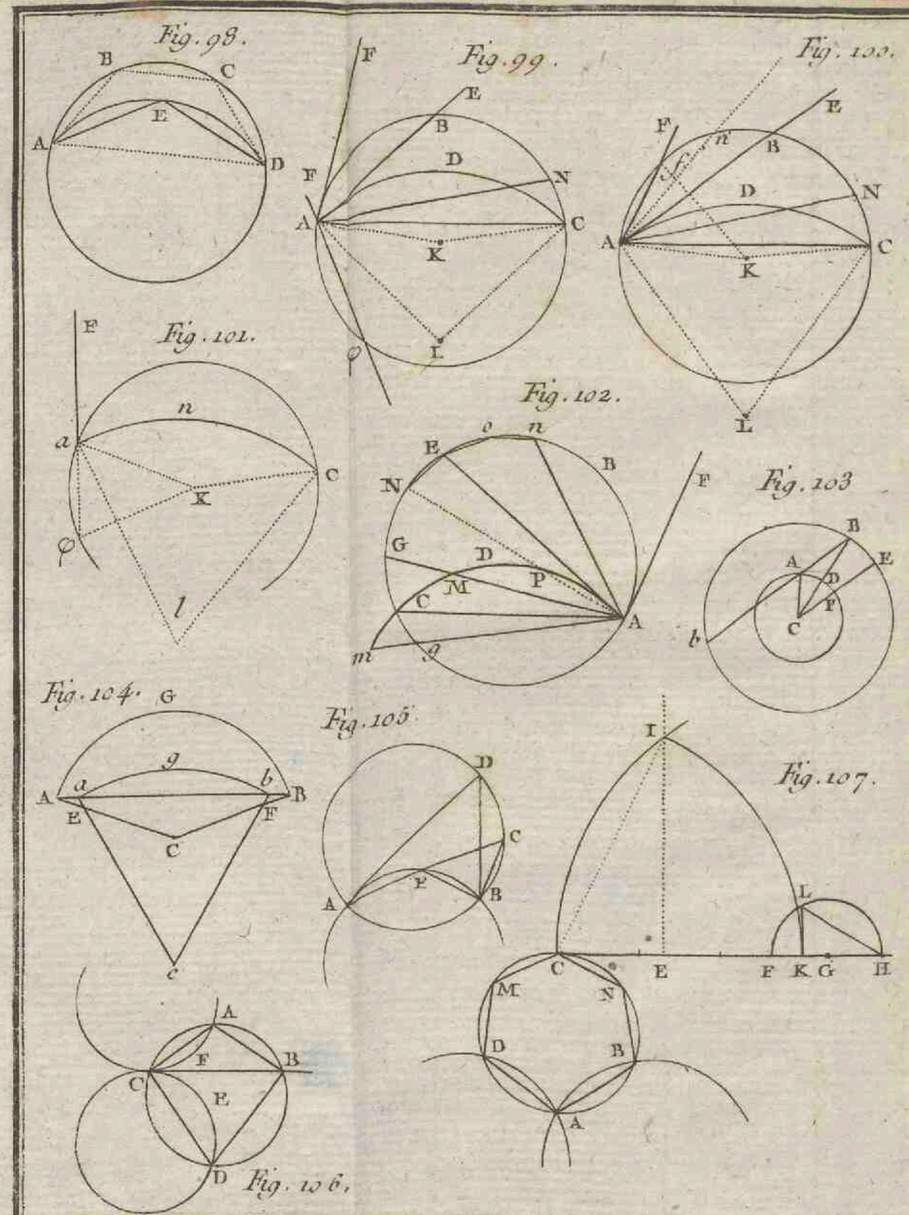
De la Gardette Sculp.



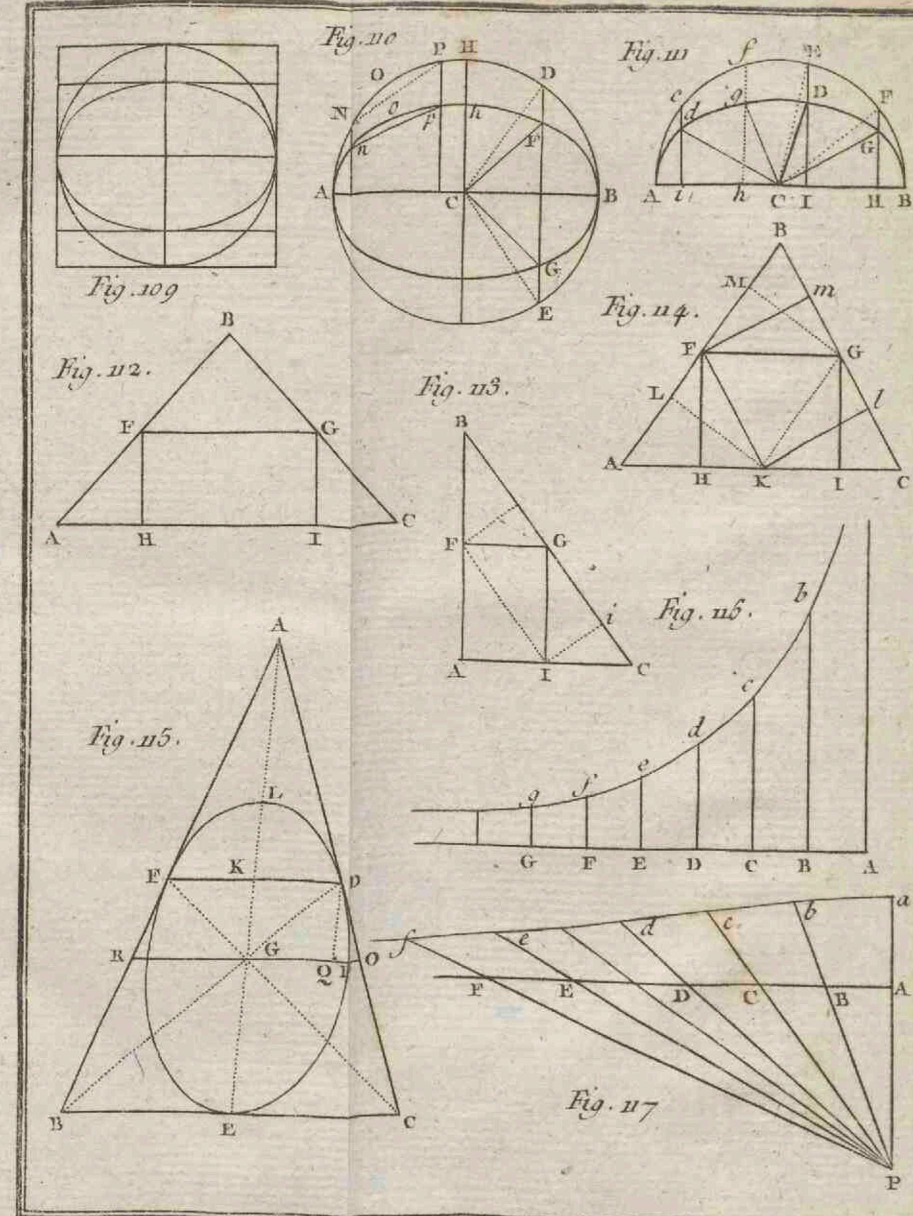
De la Gardette Sculp.



De la Gardette Sculp.

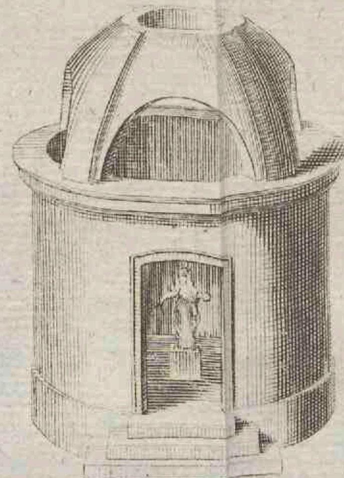


De la Gardette Sculp.



De la Gardette Sculp.

Fig. 118.



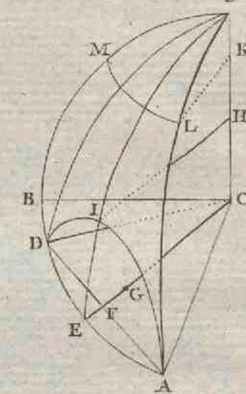
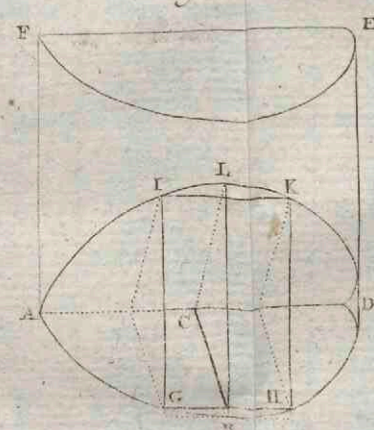


Fig. 119.

Fig. 120.



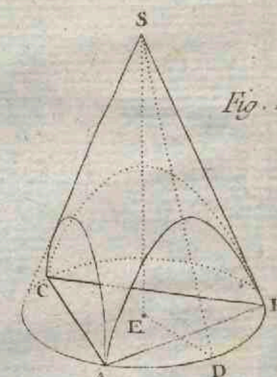


Fig. 121.

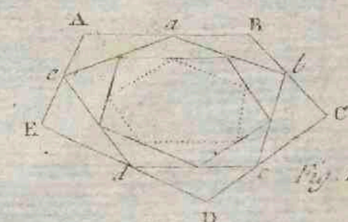
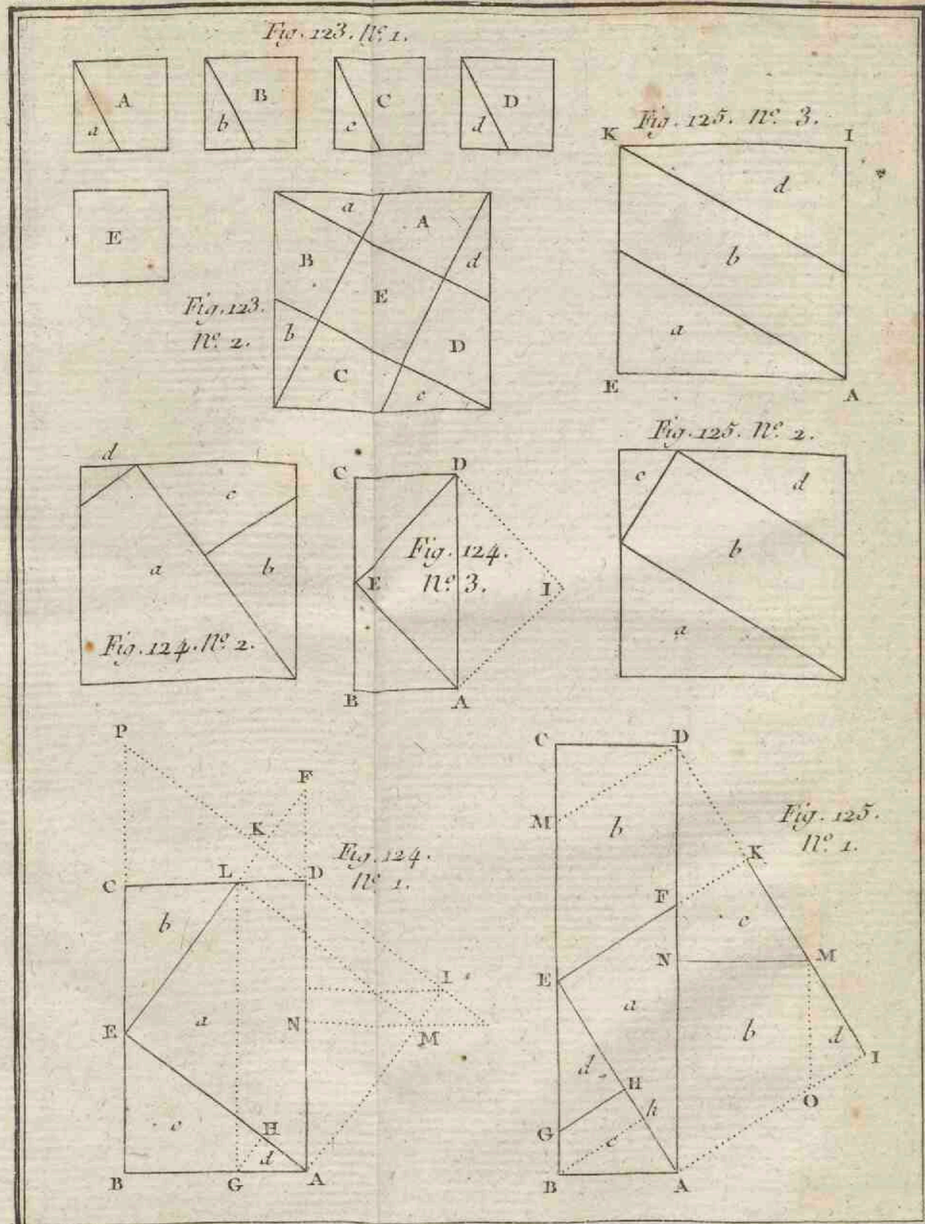


Fig. 122.

De la Gardette Sculp.



de la Gardette Sculp.

Fig. 127. N°. 1.

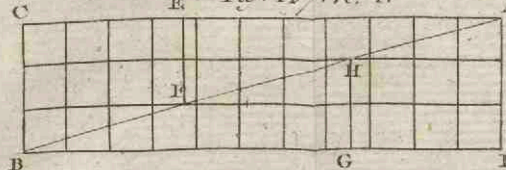
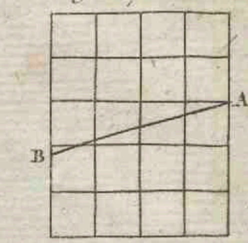


Fig. 127. N°. 2.



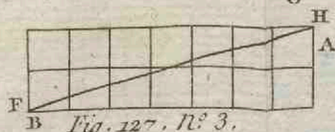


Fig. 127. N°. 3.

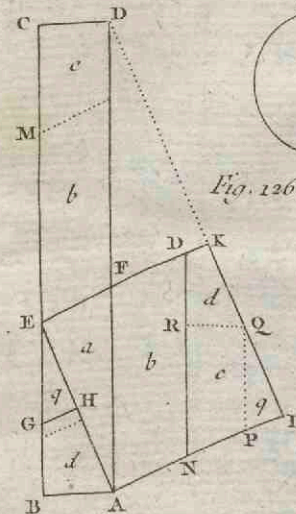


Fig. 126.

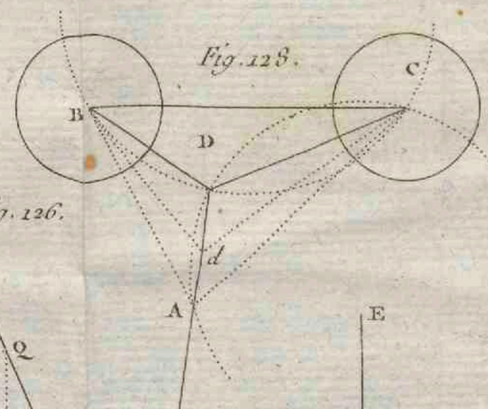


Fig. 128.

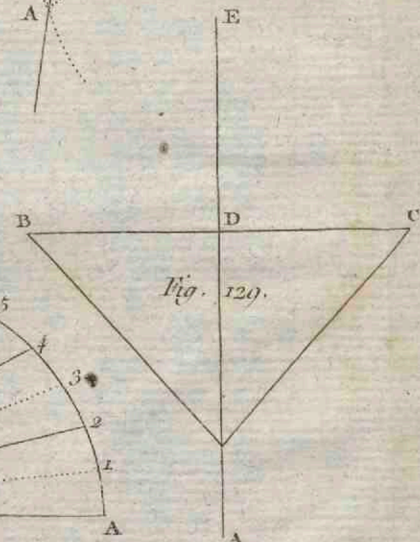


Fig. 129.

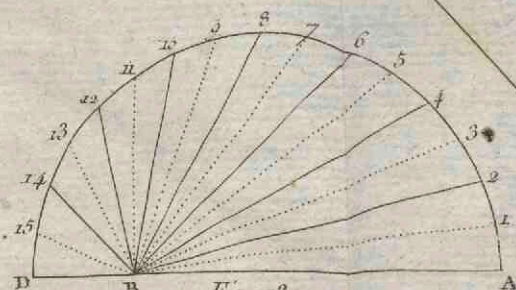


Fig. 130.

de la Gardette Sculp

SUPPLÉMENT
ET
ADDITIONS
A quelques endroits du premier Volume des Récréations Mathématiques.

PAGE 149, *ligne 25*, on dit: *Il est clair que toutes ces opérations ne reviennent au fonds qu'à, &c.* C'est ce qu'on croit devoir démontrer, pour la satisfaction & l'instruction du lecteur.

Que les quatre nombres à deviner soient, par exemple, x, y, z, u, Selon le procédé indiqué, il faut doubler x, ce qui donnera $2x$; de-là ôter 1, on aura donc $2x-1$; multiplier par 5, il viendra $10x-5$. On prescrit d'ajouter ensuite le second nombre y, cela donnera $10x-5+y$; puis d'ajouter 5, ainsi l'on aura $10x+y$, qu'il faut doubler, & on aura $20x+2y$; d'où ôtant 1, il restera $20x+2y-1$. Ce reste étant multiplié par 5, le produit sera $100x+10y-5$. A ce produit ajoutons le troisieme nombre z & le nombre 5, la somme sera $100x+10y+z$; laquelle étant doublée, & de ce double ôtant l'unité, il viendra $200x+20y+2z-1$; & cela multiplié par 5, produira $1000x+100y+10z-5$. Ajoutons 5 & le dernier nombre u, la somme sera $1000x+100y+10z+u$. Donc si x, y, z, u, représentent des nombres au dessous de 10, comme 5, 2, 4, 1, la somme sera $5000+200+40+1$, ou 5241. Si ces nombres étoient 9, 6, 5, 4, cette somme seroit, par la même raison, 9654. Ce qui démontre le procédé indiqué dans la page 149.

Le second procédé pour le même objet (*Page 150*) ne se démontre pas moins facilement; car, que les nombres à deviner moindres que 10, soient encore x, y, z, (nous nous bornons à trois, pour abréger) il faut ajouter 1 au double du premier nombre, ce qui donnera $2x+1$; le multiplier par 5, on aura $10x+5$; y ajouter le second nombre, cela donnera $10x+5+y$; doubler cette somme & y ajouter 1, on aura $20x+10+2y+1$; multiplier par 5, le produit sera $200x+50+10y+5$; ajouter le troisieme nombre z, on aura donc enfin $100x+50+10y+5+z$, ou $100x+10y+z+55$: donc si x, y, z sont, par exemple, 5, 6, 7, cette expression sera $567+55$ ou 612. Si donc de cette derniere somme on ôte 55, il viendra 567, qui désigne par l'ordre de ses chiffres les trois nombres à deviner.

PAGE 150, Problême VI. On croit devoir aussi donner la démonstration de la regle enseignée pour résoudre ce problême: la voici.

Puisqu'il y a dans un jeu de cartes complet 13 cartes de chaque couleur, dont la valeur est 1, 2, 3, &c. jusqu'à 13, la somme de tous les points de chaque couleur est sept fois 13; ce qui est un multiple de 13: conséquemment le quadruple est aussi un multiple de 13: donc, si on compte les points de toutes les cartes en rejetant toujours 13, on doit à la fin trouver zéro. Il est donc évident que si on ôte une carte dont les points soient moindres que 13, la différence de ces points à 13 sera ce qui manquera pour compléter ce nombre: donc ſi, à la fin, au lieu d'arriver à 13, on n'arrive qu'à 10, par exemple, il eſt clair que la carte manquante eſt un trois: & ſi, ayant ôté une carte, on arrive à 13, il eſt également évident que cette carte manquante eſt une de celles qui valent 13 ou un roi.

Si l'on avoit pris deux cartes, on pourroit dire auſſi combien leurs points font enſemble; ce ſeroit, ou ce qui manque pour arriver à 13, ou ce *deficit* augmenté de 13: & pour ſçavoir lequel des deux, il ſuffiroit de compter tacitement combien de fois on a complété 13; car, dans la totalité des cartes, on devroit le trouver 28 fois: ſi donc on ne l'avoit que 27 fois plus un reſte, par exemple 7, les deux cartes tirées feroient enſemble 6: ſi on n'avoit compté 13 que 26 fois avec le même reſte 7, on en concluroit que les deux cartes formeroient enſemble 13 plus 6, ou 19.

La démonſtration de la regle enſeignée pour le cas où l'on ſe ſerviroit d'un jeu de piquet, en faiſant valoir l'as 1, le valet 2, la dame 3, le roi 4, & les autres cartes le nombre de leurs points, n'eſt pas beaucoup plus difficile; car, dans chaque couleur, il y aura 44 points, & dans la totalité 176; ce qui eſt un multiple de 11, ainſi que 44. On pourroit donc toujours compter juſqu'à 11, rejeter 11, & le *deficit* pour atteindre 11 feroit la valeur de la carte ſouſtraite.

Mais ce même nombre 176 ſeroit un multiple de 10 ou de 20, ſi on lui ajoutoit 4. D'où ſuit encore la démonſtration de la maniere qu'on enſeigne.

PAGE 366. Addition à l'Hiſtoire de la Quadrature du Cercle.

Depuis que j'ai écrit cet article, il m'eſt parvenu dans ma province pluſieurs annonces de la quadrature du cercle. Telles ſont celles d'un bon curé de Normandie, qui eût mieux fait de s'attacher à inſtruire ſes paroiſſiens; celle de M. de la Frainaye, valet-de-chambre de S. A. S. Monſeigneur le Duc d'Orléans; & diverſes autres qui ne méritent pas la peine de la diſcuſſion, parcequ'il n'y a pas même veſtige de raiſonnement géométrique. Nous nous bornons à parler encore d'un écrit ſur ce ſujet, par M. le Rohberger de Vauſenville, qui eſt intitulé, *Conſultation ſur la Quadrature du Cercle*, in-8°, 15 pp.

M. le R. de V. demande aux géometres ſi, trouvant le moyen de déterminer dans un ſecteur de cercle ſon centre de gravité en *parties communes du rayon & de la circonférence du même cercle*, on aura trouvé la quadrature du cercle. Nous n'entendons pas trop ce qu'il veut dire par *parties communes du rayon & de la circonférence :* peut-être entend-il par-là des parties du rayon dans leſquelles il eſt d'uſage d'exprimer la circonférence, comme lorſqu'on dit que le rayon étant 100, la circonférence eſt 314.

Dans ce cas, nous pouvons lui répondre au nom de tous les géometres, qu'il auroit ſans doute trouvé la quadrature du cercle. Nous ne craignons point non plus de lui dire que, de quelque maniere qu'il détermine ſur l'axe d'un ſecteur, ou d'un ſegment, ou d'un arc de cercle, ſon centre de gravité, pourvu que dans cette détermination cet arc lui-même n'y entre pas comme donné, il aura résolu ce fameux problême. Car qui ne sçait que le centre de gravité de la demi-circonférence, par exemple, est à une distance du centre qui est troisieme proportionnelle au quart de cercle & au rayon? Mais c'est à cette détermination du centre de gravité du secteur ou de l'arc de cercle que M. de V. nous permettra de l'attendre.

Il n'étoit au surplus pas nécessaire de provoquer pour cela, soit nommément & en particulier, soit en général, tous les géometres de l'Europe, même ceux de la Turquie & de l'Afrique, où sûrement on ne sçait pas ce que c'est que le centre de gravité : encore moins étoit-il nécessaire de les prévenir que, faute par eux de le contredire, il les tiendra pour vaincus, & sa quadrature avouée pour bonne. Cette bravade n'excitera sûrement ni les Eulers, ni les d'Alemberts, ni les Bernoullis, &c. &c. à attaquer sa quadrature. Ou M. de Vausenville aura raison, & ces Messieurs donneront les mains à sa découverte, la célébreront même, j'ose lui en répondre ; ou sa prétendue quadrature sera un paralogisme, dans lequel cas on ne s'en occupera pas davantage que de celle de l'illuminé Henry Sullamar, vrai échappé de Bedlam (*a*), qui l'a trouvée dans le nombre 666 du front de la bête de l'Apocalypse, ou de celle du bon curé Normand dont on a parlé plus haut, ou de tant d'autres aussi dignes du profond oubli où elles tombent aussi-tôt.

En effet, que M. de V. nous cite quelque exemple de vérité géométrique rejetée par les contemporains de son inventeur, traitée par eux

(*a*) Hôpital des fous à Londres.

de paralogiſme, & depuis élevée au rang de découverte géométrique. Que riſque-t-il donc de publier ſa découverte? Si elle eſt juſte, l'éclat d'une vérité géométrique eſt tel qu'il eſt impoſſible de la méconnoître; ſi elle ne l'eſt pas, en vain feroit-il ſommer, par un exploit en forme, chacun des géometres de l'Europe en ſon domicile; en vain les feroit-il même condamner par défaut au Châtelet de Paris, il n'en ſera pas plus avancé. Les géometres riront de tout leur cœur; & il en ſera de ſa quadrature, comme de celles de tant de malheureux aſpirants à l'honneur de quarrer le cercle, qui ſont dans l'imbécille perſuaſion qu'il y a une ligue entre tous les géometres, depuis la Néva juſqu'au Guadalquivir, pour étouffer leur découverte dès ſa naiſſance.

J'ai connu, dans un voyage que je fis à Paris il y a quelque temps, un de ces hommes, jadis négociant à Cadix, qui étoit dans la ferme perſuaſion que s'il avoit 20000 livres à donner à la femme d'un ſecrétaire d'une académie, il feroit déclarer bonne une prétendue quadrature qu'il a trouvée il y a quelques années, & où il n'y a pas le ſens commun.

O tribus Anticyris (a) *caput inſanabile!*

(a) Iſles de la mer Egée, qui fourniſſoient l'ellébore employé par les médecins Grecs pour la folie.

RECUEIL

De divers Problêmes, tant arithmétiques que géométriques, dont on propose la solution aux Lecteurs Géometres.

ON ne sçauroit trop tôt, en géométrie, exercer ses forces dans la résolution des problêmes que présente cette science ; car c'est par cet exercice que se développe & se fortifie la faculté inventrice. C'est pour cette raison que nous avons cru devoir terminer cette partie des *Récréations Mathématiques*, par un choix de problêmes propres à exercer & amuser les jeunes mathématiciens. On en trouvera même de différents degrés de difficulté, pour se conformer aux différents degrés de force de ceux qui liront cet ouvrage. On y a inséré aussi quelques théorêmes curieux, dont la démonstration qu'il s'agit de trouver pourra exercer leur sagacité.

Nous ferons au reste ici une remarque ; c'est que la plupart de ces problêmes n'étant rien moins que difficiles lorsqu'on y emploiera les ressources du calcul algébrique, on propose de trouver leurs solutions par la géométrie pure. Car il est suffisamment connu que l'analyse algébrique donne le plus souvent des solutions compliquées ; tandis que celles qui découlent de l'analyse purement géométrique, sont incomparablement plus simples & plus élégantes. On en a sur-tout des exemples dans les premiers qu'on va voir, ainsi que dans divers autres.

PROBLÊMES ET THÉORÊMES *Arithmétiques & Géométriques.*

PROBLÊME PREMIER. Dans un triangle rectiligne on connoît la base, la somme ou la différence des deux autres côtés, & l'aire. On demande de déterminer ce triangle.

PROB. II. Etant donnés la base d'un triangle, le rapport des deux autres côtés, & l'aire, déterminer ce triangle.

PROB. III. Connoissant dans un triangle les mêmes choses, si ce n'est qu'au lieu du rapport des deux autres côtés, c'est l'angle qu'ils comprennent qui est connu; il s'agit de trouver ce triangle.

PROB. IV. Trois lignes étant données de position sur un plan, en tirer une entr'elles qui en soit coupée en deux parties qui soient en raison donnée.

PROB. V. Quatre lignes étant données de position sur un plan, en tirer une entr'elles qui en soit coupée en trois parties dont la raison est donnée.

PROB. VI. Au jeu de Piquet, quelle probabilité y a-t-il qu'on aura carte blanche?

PROB. VII. Au même jeu, Pierre est le premier en carte; il n'a pas d'as. Quelle probabilité y a-t-il qu'il en prendra dans le talon, un, ou deux, ou trois, ou quatre?

PROB. VIII. Au jeu de Brelan à trois, quelle probabilité y a-t-il qu'il y aura un brelan entre les mains d'un des joueurs, & quelle probabilité y a-t-il que ce brelan sera quatrieme ?

PROB. IX. Un subdélégué d'intendance doit faire tirer à la milice ; il veut favoriser un des tireurs. Y a-t-il une place dans laquelle on coure moins de risque que dans une autre ?

PROB. X. Un homme a dans la main une certaine quantité de pieces de monnoie, par exemple 12. Combien y a-t-il à parier contre un qu'en les jetant toutes à la fois, (ou séparément), il y aura autant de *croix* que de *piles ?*

PROB. XI. Quatre lignes étant données, & étant telles que trois quelconques soient plus grandes que la quatrieme, en construire un quadrilatere inscriptible au cercle, ou qui lui soit circonscriptible.

THÉORÊME PREMIER. Si des trois angles d'un triangle rectiligne quelconque, on mene trois perpendiculaires sur les côtés opposés, elles se couperont au même point.

THÉOR. II. Si de ces angles on mene des lignes qui les coupent en deux également, ou qui coupent en deux également les côtés opposés, ces trois lignes se rencontreront encore dans le même point.

PROB. XII. Un trapeze étant donné, le couper en deux également ou en raison donnée, par une ligne passant par un point donné, soit sur un des côtés, soit au dedans, soit au dehors.

PROB. XIII. Dans un cercle donné, inscrire un triangle isoscele d'une grandeur donnée.

Nota. *Il est évident qu'il faut que ce triangle soit moindre que le triangle équilatéral inscrit* *dans le cercle donné, car ce triangle est le plus grand de tous les inscriptibles.*

PROB. XIV. A un cercle donné, circonscrire un triangle isoscele de grandeur donnée.

Nota. *Il faut que ce triangle soit plus grand que l'équilatéral circonscrit, puisque ce dernier est le plus petit de tous les circonscriptibles.*

PROB. XV. Dans un triangle isoscele, décrire trois cercles dont chacun touche deux côtés, & qui se touchent tous trois.

PROB. XVI. Exécuter la même chose dans un triangle scalene.

PROB. XVII. Quelle est la valeur de cette expression analytique, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, &c. à l'infini?

Nota. *Je répons qu'elle est 2. Il est question de le démontrer. De même la valeur de* $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$, &c. *à l'infini, est 3; & ainsi de tout autre nombre.*

PROB. XVIII. On a une pyramide à quatre faces triangulaires; les côtés de ces quatre triangles sont donnés. On demande les angles que font les faces de cette pyramide, la perpendiculaire abaissée d'un angle quelconque sur la base, & la solidité de la pyramide.

PROB. XIX. Couper un trapeze donné en quatre parties égales, par deux lignes qui se coupent elles-mêmes à angles droits.

PROB. XX. Un particulier a un emplacement quadrangulaire & irrégulier; il veut en recouper, pour en faire un partèrre, un quarré long qui soit le plus grand possible, & dont les angles ſoient appuyés ſur les côtés du quadrilatere. Comment faut-il qu'il s'y prenne ?

PROB. XXI. On connoît dans un triangle l'aire & la ſomme des trois côtés ; déterminer le triangle.

PLOB. XXII. Au jeu de Reverſis, l'un des joueurs a le quinola quatrieme. Quelle probabilité y a-t-il que quelqu'un des joueurs aura quatre cœurs au moins, enſorte que le quinola coure riſque d'être forcé.

PROB. XXIII. A un cercle donné, circonſcrire un triangle de contour donné, pourvu que ce contour ſoit plus grand que celui du triangle équilatéral circonſcrit.

PROB. XXIV. Dans un triangle non équilatéral, trouver un point duquel les trois perpendiculaires tirées ſur les trois côtés, ſoient enſemble égales à une ligne donnée.

Nota. *On a exclu le triangle équilatéral, parceque l'on peut facilement ſe démontrer que, de quelque point de l'intérieur qu'on abaiſſe des perpendiculaires ſur les côtés d'un pareil triangle, leur ſomme ſera toujours la même.*

Il en eſt de même de tout polygone régulier & même irrégulier, pourvu que les côtés en ſoient égaux.

PROB. XXV. Dans un cercle donné, inſcrire un triangle iſoſcele, ou lui en circonſcrire un d'un contour donné.

Nota. *Ce problême n'étant pas toujours poſſible, comme il eſt aiſé de voir ; il eſt auſſi queſtion de trouver ſes limitations.*

PROB. XXVI. Dans un cercle donné, inſcrire ou lui circonſcrire un triangle quelconque de contour déterminé.

PROB. XXVII. Dans un quadrilatere donné, inſcrire une ellipſe, c'eſt-à-dire y décrire une ellipſe qui en touche les quatre côtés.

PROB. XXVIII. Un jouaillier a une table d'agate précieuſe, en forme de trapeze irrégulier; il deſire en tirer la plus grande table ovale poſſible, pour en former le deſſus d'une boite. Comment doit-il s'y prendre?

Nota. *Il eſt clair que le probléme, énoncé géométriquement, eſt celui-ci:* Dans un quadrilatere donné, inſcrire la plus grande de toutes les ellipſes qui lui ſont inſcriptibles; *probléme qui n'eſt certainement point facile. Ceux de nos lecteurs qui le tenteront, doivent être prévenus qu'il exige une grande connoiſſance de l'analyſe.*

On pourroit auſſi propoſer celui-ci: Autour d'un quadrilatere donné, circonſcrire une ellipſe qui ſoit la moindre de toutes les circonſcriptibles.

PROB. XXIX. Un point & une ligne droite étant donnés, on demande quelle eſt la trace ou la ligne ſur laquelle ſe trouvent les centres de tous les cercles qui, paſſant par le point donné, touchent la ligne donnée.

PROB. XXX. On demande la même choſe, c'eſt-à-dire la trace de tous les cercles tangents à un cercle & à une ligne droite donnée.

Nota. *Cette ligne droite peut être extérieure au cercle donné, ou le toucher, ou le couper.*

PROB. XXXI. Deux cercles quelconques étant donnés, quelle eſt la trace ou la ligne ſur laquelle ſe trouvent les centres de tous les cercles qui touchent les deux cercles donnés, ſoit que le cercle tangent les comprenne tous deux au dedans de lui, ſoit qu'il les touche l'un en dehors, l'autre en dedans?

PROB. XXXII. La baſe d'un triangle eſt donnée; on connoît auſſi la ſomme des deux autres côtés, ainſi que la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe. On demande de déterminer le triangle.

PROB. XXXIII. On connoît dans un triangle les trois lignes tirées des angles au milieu des côtés oppoſés; trouver ce triangle.

PROB. XXXIV. Dans un triangle, la baſe eſt connue; on y connoît auſſi la ſomme & la différence des quarrés des côtés: il s'agit de déterminer ce triangle.

Nota. *Ce problême eſt ſuſceptible d'une conſtruction fort ſimple & fort élégante; car le ſommet de ce triangle eſt dans la circonférence d'un certain cercle, & il eſt auſſi dans une certaine ligne droite.*

PROB. XXXV. On demande la même choſe, c'eſt-à-dire le triangle dont on connoît les trois lignes tirées des angles à la baſe, & qui partagent ces angles en deux également.

PROB. XXXVI. Un nombre quelconque de points étant donné, tirer à travers une ligne droite, telle que, abaiſſant de chacun de ces points ſur elle une perpendiculaire, la ſomme des perpendiculaires d'un côté ſoit égale à celle de l'autre.

PROB. XXXVII. Même ſuppoſition faite, on demande que la ſomme des quarrés de ces perpendiculaires tirées d'un côté, ſoit égale à la ſomme des quarrés des autres; ou même que la ſomme de ces perpendiculaires élevées à une puiſſance quelconque n, ſoit égale de part & d'autre.

PROB. XXXVIII. Dans un trapeze quelconque, on connoît les quatre côtés & l'aire; déterminer le trapeze.

PROB. XXXIX. Un angle étant donné, trouver un point duquel abaiſſant ſur ſes côtés deux perpendiculaires, le quadrilatere qu'elles formeront avec les côtés de l'angle, ſoit égal à un quarré donné.

PROB. XL. Comme il y a une infinité de points qui ſatisfont à ce problême, trouver leur trace ou la courbe qu'ils forment.

PROB. XLI. Trouver quatre nombres qui ſoient en progreſſion arithmétique, & auxquels ajoutant quatre autres nombres donnés, comme 2, 4, 7, 15, les ſommes ſoient en progreſſion géométrique.

PROB. XLII. Deux courriers partent en même temps, l'un A de Paris pour Orléans, dont la diſtance eſt 60 milles, l'autre B d'Orléans pour Paris, & ils marchent tellement que A arrive à Orléans quatre heures après avoir rencontré B, & B arrive à Paris ſix heures après avoir rencontré A. On demande combien chacun faiſoit de milles par heures.

PROB. XLIII. Une certaine ſomme ayant été placée à intérêt, elle monte au bout d'un an à

1100 liv.

1100 liv., & au bout de dix-huit mois à 1120 l. On demande quelle étoit la somme & quel étoit l'intérêt.

PROB. XLIV. Deux lettres de change, la premiere de 1200 liv., payable dans six mois, & la seconde de 2000 liv., payable dans neuf, ont été escomptées ensemble & au même intérêt, pour une somme de 120 liv. On demande quel est cet intérêt.

PROB. XLV. Comment pourroit-on faire 120 liv. en 120 pieces de trois especes seulement, sçavoir, des pieces de 12 sous, de 24 sous, & des écus de 3 liv. ou de 60 sous?

PROB. XLVI. Un angle étant donné, & un point au dedans, mener par ce point une ligne droite coupant les deux côtés de l'angle, ensorte que le rectangle de leurs segments jusqu'au sommet soit égal à un quarré donné.

Nota. *Ce quarré donné ne doit pas être moindre qu'un certain quarré; ce qui donne lieu au problême suivant.*

PROB. XLVII. Même supposition faite que dans le précédent, on demande la position de la ligne passant par le point donné, lorsque le rectangle des côtés de l'angle, retranchés vers le sommet, sera le plus petit possible.

PROB. XLVIII. Trois lignes étant données de position, trouver un point duquel les trois perpendiculaires à ces lignes, soient dans un rapport donné.

Nota. *Nous nous bornons à dire que ce problême est susceptible d'une solution très-simple & très-élégante, sans calcul.*

PROB. XLIX. Deux cercles étant donnés, lesquels ſont entr'eux dans un rapport de nombre à nombre, de 1 à 2, par exemple, & qui ſe coupent l'un l'autre, mais de telle ſorte qu'ils ne font pas une lunulle quarrable, tirer à travers ces cercles une ligne parallele à celle qui joint les points d'interſection, enſorte que la partie de la lunulle retranchée ſupérieurement, ſoit égale à un eſpace rectiligne.

PROB. L. Même ſuppoſition faite que la précédente, couper les deux arcs de cercle par un troiſieme, qui ſoit tel que le triangle concavo-convexe, formé par ces trois arcs de cercle, ſoit égal à un eſpace rectiligne.

Nota. *J'avoue ne ſçavoir ſi cela eſt poſſible. Je n'ai pas eu le temps de tenter ce problême, que j'abandonne à qui voudra en rechercher la ſolution.*

PROB. LI. Trois perſonnes ont enſemble 100 liv. dans leur bourſe; l'on ſçait de plus que neuf fois ce qu'a la premiere, plus quinze fois ce qu'a la ſeconde, plus vingt fois ce qu'a la troiſieme, formeroient une ſomme de 1500 liv. On demande quelle eſt la ſomme qu'a chacune.

Nota. *Il eſt à propos d'obſerver que ce problême, ainſi que le quarante-ſixieme, eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions; &, pour le réſoudre complettement, il faut déterminer toutes ces ſolutions, & montrer qu'il ne peut y en avoir davantage. Car il ne ſeroit pas bien difficile en tâtonnant, d'en rencontrer quelqu'une.*

PROB. LII. On a acheté 120 pieces de gibier pour 20 liv.; il y a des lievres qui ont coûté 2 liv., des faiſans qui ont coûté 3 liv. & des cailles qui ont coûté 10 sous. Quel est le nombre des lievres, des faisans & des cailles?

Nota. *Même observation sur ce problême que sur le précédent.*

PROB. LIII. Trois négociants ont fait société, & sont convenus de mettre 10000 liv. chacun dans une entreprise; il y en a deux qui ont satisfait à cette condition; le troisieme n'a fourni que 5000 liv. L'entreprise ayant manqué, ils ont non-seulement perdu leurs fonds, mais encore 50 pour 100 en sus. On demande ce qu'ils doivent contribuer chacun pour faire face à cette créance.

PROB. LIV. Dans un triangle rectiligne, on connoît la base, le rectangle des deux autres côtés, & l'angle compris. Il s'agit de déterminer & construire ce triangle.

PROB. LV. Un arc de cercle étant donné, le diviser en deux parties dont les sinus soient en raison donnée.

PROB. LVI. Dans un jeu de 32 cartes, quelqu'un prend ou reçoit au hasard 4 cartes. Quelle probabilité y a-t-il, ou que peut-on parier contre un, que dans ces quatre cartes il y en aura une de chaque couleur?

PROB. LVII. De combien de manieres peut-on payer 24 livres, en demi-louis, écus de 6 liv. & écus de 3 livres?

Nota. *Ce problême est incomparablement plus facile que celui que nous avons résolu & où l'on demandoit de combien de façons on peut payer un écu en monnoies inférieures. En voici un peu plus compliqué que le précédent.*

PROB. LVIII. De combien de manieres peut-on payer 24 livres, en demi-louis, écus de 6 liv., écus de 3 liv., pieces de 24, de 12 & de 6 sous?

PROB. LIX. Trouver un nombre tel qu'en lui ajoutant 12 & 25 successivement, les sommes soient nombres quarrés.

PROB. LX. Trouver trois nombres dont les quarrés soient en progression arithmétique.

PROB. LXI. Etant donné un nombre quelconque de points, en trouver un autre tel que, menant à chacun des autres une ligne droite, la somme de ces lignes soit égale à une ligne donnée.

PROB. LXII. Même supposition que ci-dessus étant faite, il faut que ce soit la somme des quarrés des lignes tirées du point cherché aux points donnés, qui soit égale à un quarré donné.

Il est assez singulier que ce dernier problême soit susceptible d'une construction bien plus facile que le précédent. Nous remarquons en effet, uniquement pour piquer la curiosité du lecteur géometre, que (dans le dernier) le point cherché & tous ceux qui résolvent la question, (car il y en a une infinité), sont situés dans la circonférence d'un certain cercle; &, ce qui est très-remarquable, c'est que le centre de ce cercle est le centre de gravité des points donnés, en les supposant chacun chargé d'un même poids.

Remarquons encore que, si l'on demandoit que le quarré d'une des lignes tirées, plus le double de la seconde, plus le triple de la troisieme, &c. fissent la même somme, il faudroit concevoir le premier point chargé d'un poids simple, le second d'un poids double, le troisieme d'un poids triple, &c. & leur centre de gravité seroit encore le centre du cercle cherché.

La solution de ce problême ne fut pas inconnue aux anciens géometres. C'étoit un de ceux des *Loca plana* d'Appollonius; ce qui est propre à donner de leur analyse une idée plus avantageuse qu'on ne l'a ordinairement.

Fin du Tome Premier.

TABLE
DES MATIERES
DU PREMIER VOLUME.

PREMIERE PARTIE.
ARITHMÉTIQUE.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

Fin de la Table du Premier Volume.