Geometria

RENATI DES-CARTES GEOMETRIA.

EDITIO TERTIA,

Multis accessionibus exornata, & plus alterâ sui parte adaucta.

Primus inaccessum qui per tot sæcula verum
Eruit è tetris longæ caliginis umbris,
Mysta sagax, Natura, tuus, sic cernitur Orbi
Cartesius. Voluit sacros in imagine vultus
Jungere victuræ artificis pia dextera famæ,
Omnia ut aspicerent quem sæcula nulla tacebunt.

CONSTANTINI HVGENII F.LY

GEOMETRIA,

à

RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; poſtea autem
Vnà cum NOTIS

FLORIMONDI DE BEAVNE,

In Curia Bleſenſi Conſiliarii Regii, Gallicè conſcriptis in
Latinam linguam verſa, & Commentariis illuſtrata,

Operâ atque ſtudio

FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheſeos Profeſſoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis inſtructa, multisque egregiis acceſſionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina verſa exhibet.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

CATALOGUS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

SERE-

SERENISSIMÆ PRINCIPI.

ELISABETHÆ.

FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS,

Comitis Palatini, & Electoris Sacri Romani Imperii, Filiæ natu maximæ.

SERENISSIMA PRINCEPS,

CVm ea Celſitudinis tuæ ſit claritas, ut maximorum hominum monumenta, tanti nominis ſplendore illuſtrata, in lucem jam pridem prodierint; quid mirum, ſi & ego lucubrationes haſce Celſitudini tuæ conſecrandas eſſe duxerim? Nam, ut reliquas virtutes, quæ in Te eximiæ ſunt, taceam, tantâ cum prudentiâ ſingularis ingenii tui perſpicacia conjunćta eſt, ut, ſpretis illis artibus & ſcientiis, quæ inanis potiùs gloriæ, altercandique ſtudio, quàm veri inquiſitionis causâ addiſcuntur, eas ſolas amplexa fueris, quæ placidè philoſophantes, nihilque niſi evidens admittentes, continuâ ſimplicium rationum ſerie ad abſtruſiſſimarum rerum cognitionem perducunt. Vnde fieri non potuit, quin ad ſublimem illam ſapientiam, quam in Te ſuſpicimus ac veneramur, feliciſſimè tempore breviſſimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non eſt quòd hic commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatiſſimæque memoriæ Principum, qui ſanguinis vinculo tibi fuêre juncti, atque ex

harum

harum artium cultura immortalem ſibi gloriam reportarunt, eas non minùs colas, quàm hæreditatis jure in iiſdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetraſti, ut Artem Analyticam, ipſam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præſertim acumen requiritur, optimè cognoveris, eâque ratione, quantùm incomparabilis ingenii tui induſtria præſtare valeat, ſatis ſuperque oſtenderis. Quæ cum ita ſint, atque inſuper in me ipſo compertum habeam, quanto favore Matheſeos cultores proſequaris; jure meritiſſimo effecêre, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum teſtimonium extare vellem, atque hoc qualecunlecunque, ſive grati animi monumentum, ſive obſervantiæ in Celſitudinem tuam meæ pignus, offerrem. Quod, ut ſolito favore excipiat, ſubmiſsè rogo,

SERENISSIMÆ CELSITUDINIS TUÆ

Dabam Leydæ, XII Cal. Julii
Anni CIƆ IƆC XLIX.

Devotiſſimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

FRAN.

FRANCISCVS à SCHOOTEN

LECTORI

S.

Ovennium est, & quod excurrit, Benevole Lector, cùm Geometria hæc Nobilissimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, *quam vernaculâ linguâ anno 1637 inter Philosophiæ suæ specimina in lucem edidit, è Gallica à me in Latinam linguam versa commentariisque illustrata primùm prodiit. Interea autem temporis cum operam, quam hoc in negotio collocâram, Viris literatis & ingeniosis pluribus, quos stupenda Authoris nostri eruditio latère non potuit, haud ingratam fuisse comperêrim; non potui non, distractis exemplaribus, cùm novam editionem Typographus adornaret, quin honestæ ipsius petitioni locum darem, eaque flagitanti concederem, quæ ad Operis hujus commendationem illustrare vel addere valebam. Quid hìc autem nunc demum præstiterim, si candido Lectoris judicio relinquam, facilè ex utriusque editionis inter se collatione dignoscet. Cujus etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quòd regiam hìc ad pœnitiora universæ Matheseos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere sciebam, tum quòd hanc summi Viri Geometriam publici interesse, & è re eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipso cum aliis strenuis Methodi nostræ cultoribus, non sine voluptate indies experiebar. Verùm enimvero cum illius utilitas tanta sit ut, si eam vel paucis describerem, paginæ, quæ præfationi hìc inservient, deficerent, indicasse suffecerit, vix quicquam in universa Mathesi ita difficile aut arduum occurrere posse, quò non inoffenso pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometriæ hujus legibus non subjici solvique posit. Accedit, quòd nullis Problematum finibus aut numero coërceatur, sed fructum, qui vel à Veterum Analysi vel à Recentiorum Algèbra exspectandus erat, omnem in se contineat, nec quicquam hìc desiderari posse videatur; atque adeò frustra sit, quòd de aliâ sibi quis exoptandâ Methodo, ad Matheseos culturam perfectionemque in*

** *poste-*

posterum cogitet. Quippe hæc illa est, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modò in Mathematicis Scientiis summas difficultates adolescens adhuc superavit, aliisque in inveniendo palmam præripuit; sed tantam quoque ingenii promptitudinem facilitatemque sibi deinceps conciliavit, ut primus clavem, quâ mysteria Universi reseranda sunt, & cujus ope natura naturæ ac lux orbi magis magisque redditur, invenerit: adeò ut eorum, quæ lumine naturali cognosci queunt, nihil tam abditum, densisque immersum fuisse tenebris, putandum sit, quod ingenii sui felicitate eruere ipse desperasset. Versionem quod attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse studuerim, vix est, quòd censuram aliquorum metuam; præsertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari vel clariorem reddere, postea recognitam fuisse sciverint. Verùm cum hæc Geometria à paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter quæstionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non sine abstrusa attentione ac indefesso studio per se intelligi potuerit, periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cùm metam vel ipsi ignorarent, vel improbi negarent, arenam desererent. Conscius itaque ego illam non in eum finem ab Authore conscriptam esse, quasi ipsius Methodum ex ea unusquisque quàm facillimè haurire posset, sed tantùm ut eximia aliquot ejus specimina ederet: operæ pretium duxi in commune consulere, & difficiliora loca passim à me explicata uberioribus hinc inde exemplis altiùs illustrare. Scopum Authoris quod spectat, eum hoc loco exponere haudquaquam duxi necessarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiserim, veterumque circa Geometriæ Problemata opiniones ac decreta, scitu non injucunda, ibidem explicaverim, quò operis summam atque adeò commentariorum nostrorum usum breviter complecterer. Porrò ne quid deesse videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem sortiretur, additæ etiam sunt Notæ a Clarissimo atque Amplissimo Viro D. FLORIMONDO DE BEAVNE, *Consiliario Blesensi, in eandem olim Gallicè conscriptæ. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me translatæ, postquam huic Geometriæ primò ejus permissu essent annexæ, dein ab ipso recognitæ & emendatæ, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores sunt accessuræ. Præterea, quò unusquisque instructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, se ad ipsam Geometriam legendam accingere possit; haud omittendum duxi, quin*

simul

ſimul Introductionem noſtram, quam Vir Clariſſimus, mihique amiciſſimus, D. ERASMIUS BARTHOLINUS, *nunc Medicinæ & Matheſeos in Academia Hafnienſi Profeſſor Regius, in eum finem olim conſcripſit ac anno* 1651 *publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni huic adjungerem. Quo quidem negotio futurum ſpero, ut, quod propriis condimus horreis, ex aliena non opùs ſit meſſe emendicare, licèt Author antehac, tum ad ſuam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometriæ libris jam verſatum præſuppoſuerit, ne quæ inibi dicta ſunt & demonſtrata repetere cogeretur; tum etiam ad ſuam Methodum addiſcendam leviorem vulgaris Algebræ cognitionem requiſiverit. Nec enim video, quid impræſentiarum, poſt mediocrem in Arithmetica & Geometriæ elementis exercitationem, calculique, eâdem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere poſſit, quo minus inoffenſo pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuiſſet, hæc omnia ab Authore ipſo fuiſſe præſtita; quippe qui tantùm regulas ſuæ Methodi maximè neceſſarias hîc expoſuit; attamen quia animadvertit laborem atque induſtriam, quam Lector in inveſtigandis reliquis, demonſtrandisque iis, quæ tantùm intento digito indicavit, impenderet, præcipuum eſſe in hac Scientia, quo cujuſque ingenium excolatur: à ſemetipſo impetrare non potuit, ut ea fuſius pertractaret. Hinc cum ſucceſſu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam ſedulò verſare ejusque arcana penitiſſimè rimari cordi fuit, non pauci reperti ſint, qui, Authoris veſtigiis arctè inſiſtentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimùm facientia, invenerint, omnesque inter, præ copia inventorum eorumque dignitate, ſubtiliſſimus ac præſtantiſſimus* D. IOHANNES HVDDENIVS, *Amſtelodamenſis, amicus meus integerrimus, primas facilè obtineat: viſum fuit ea, quæ ab ipſo de Æquationum Reductione ac de Maximis & Minimis, maximam partem Belgicè conſcripta, inter alia per literas mihi ſunt communicata, poſtquam à me Latinè eſſent reddita, Geometriæ huic pariter ſubjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epiſtolam, quam acutiſſimus, mihique ut* HVDDENIO *noſtro conjunctiſſimus,* D. HENRICVS VAN HEVRAET, *Harlemenſis, Salmurio nuper ad me tranſmiſit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à ſe noviſſimè excogitatam, tranſmu-*

tandi complures curvas lineas in rectas, quod ipsum à nemine (quantum novi) in hunc usque diem ostensum est, quin imo à multis ut insolubile habitum: id mihi agendum putavi, ne eximium adeò inventum occultaretur, ut, impetrato ad id ejus consensu, illud hìc loci in lucem producerem. Eâdem ratione ductus, ne sparta, quam Vir Amplissimus, nunc piæ memoriæ, D. DE BEAVNE *in excolenda propagandaque hujus Geometriæ Methodo susceperat, præcipiti ejus fato interiret; ex officio atque publica Mathesin amantium utilitate fore existimavi, si Clarissimum Virum* D. ERASMIVM BARTHOLINVM *nostro rogatu adigerem, ut, quæ de Natura, Constitutione, ac Limitibus Æquationum* D. DE BEAVNE *vernaculâ suâ linguâ in lucem dare constituerat, cùm in manus ipsius incidissent, publico non invideret. Nec frustra in eo fui, nactus enim sum, ut, quæ ex ejus adversariis, non sine indefesso labore ac difficili fortunâ, ad umbilicum perduxerat, Latinè redderet, nobisque, quò unà cum his à me typis mandarentur, concederet. Cæterùm ad Artis Analyticæ præstantiam uberiùs exhibendam, & ad meum rei literariæ inserviendi studium comprobandum, non abs re fore judicavi, si Geometriam hanc non modò fœtu illo posthumo ac advenâ, sed alio etiam primogenito eoque indigenâ adaugere satagerem; nisi fortè hunc alium quoque posthumum ac advenam dixeris, eo nomine atque intuitu, quòd parens jam totus Reipublicæ vivat, nobisque & studiis nostris civiliter mortuus, & quasi peregrinus factus sit. Etenim cum aliquot abhinc mensibus occasio mihi data fuerit, ut in eum quem de Locorum Planorum & Solidorum per Artem Analyticam inventione tractatum Nobilissimus atque Amplissimus Vir* D. IOHANNES DE WITT, *Consiliarius & Pensionarius, sive minister primarius Hollandiæ VVest-Frisiaque, concinnaverat, opportunus inciderim: non potui non, cum Authoris permissu inspiciendi potestas mihi facta esset, quin sententiam, quid de illo videretur, rogatus, coram lubens exponerem. Hunc itaque quia admodum sublimem, tantoque Viro dignâ ingeniositate conscriptum, ac insuper ad penitiorem hujus Geometriæ intellectum haud parum facere posse deprehenderam, (quippe qui subtilissimam illam de Locis materiam, in secundo Geometriæ libro paulò succinctiùs pertractatam, de integro resumit, alioque pacto componit:) consultum*

tum

tum duxi, ut in publicum emolumentum editionis adornandæ au- thor essem. At verò facilè prævidebam, saltem suprema, quibus fungitur, Reïpublicæ munera, gravesque hominis curas, impedimento fore, quo minùs tam splendida proles, quæ jam ante decennium formata in conceptu huc usque delituerat, absque obstetricis auxilio, in lucem unquam produceretur. Quocirca cum eam mei juris facere non dedignatus fuerit, neque etiam copiam eorum, quæ de Elementis Curvarum Linearum jam pridem conscripsit, mihi facere recusaverit: rem ubique gratam me facturum credidi, si tam hunc quàm illum tractatum ab ulteriori oblivione vindicandi operam darem; præsertim cum id iis, qui Mathesin seriò excolunt, acceptum fore perspexerim, quòd curvarum primi generis ortum longè simpliciùs generaliusque ab ipso quàm à veteribus, absque ulla solidi consideratione, inspectum fuisse, reperturi sint. Quas itaque curvas eâ ratione pertractavit, ut non solùm inde dimanet ortus secundi generis curvarum (quas quidem omnes simili methodo in plano delineavit ac per species distinxit,) verùm etiam ulteriorum graduum curvæ sponte quasi ex eodem fonte fluant atque deriventur. Futurum sperans, ut si primitiæ hujus fœtus ad illas viam sternentes operâ meâ in lucem emitterentur, iisque extrema imponeretur manus, quilibet judicaturus sit, & Literatorum commodo, & hujus Viri otio in absolvendis, quæ de Super-solidis Locis adinvenit, omni nisu à me fuisse consultum ac prospectum. Denique ut Methodi hujus Geometriæ dignitas splendorque omni ex parte in aperto esset, & cuique etiam pateret ejusdem calculo demonstrationes quoque Geometricas inniti aut ex eo elici posse, quales à Veteribus introductæ adhuc apud Recentiores passim in usu sunt, atque longâ propositionum serie ac lemmatum permixtione afferri solent, continuæ schematum animadversioni obnoxiæ: placuit coronidis loco & in operis complementum subnectere tractatum, in quo artem, iisdem Veteribus in difficiliorum hujusmodi demonstrationum compositione usitatam, occasione diversarum quæstionum, exponerem. ut, scilicet, his similibusque exemplis viam præeundo, non tantùm ejusmodi demonstrationes alias ex calculo facilè depromi ostenderem; verùm etiam hoc pacto inventionis modum, quem in majorem admirationem suorum inventorum artificiosè suppresserant, indicarem, atque Matheseos studiosos ad hujus Methodi calculum ceu *demonſtrationum amuſsim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitatâ, ablegarem. Quibus quidem omnibus, ſi ſingulis ſatisfacere non licet, habeo ſaltem de quo abundè mihi gratuler, quòd noſtros in hoc ſtudiorum genere labores rerum æſtimatoribus haud diſplicuiſſe nec diſplicere ſciam. Vale. Scripſi Leidæ, anno reparatæ ſalutis* CIↃ IↃCLIX.

INDEX MATERIARVM,

IN HAC

GEOMETRIA

CONTENTARVM.

LIBER I.

De Problematis, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

LIBER II.

De natura linearum curvarum.

Quo-

LIBER III.

De constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

RENA-

RENATI DESCARTES GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

De Problematibus, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

OMnia Geometriæ Problemata facilè ad hujusmodi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionem, opùs tantùm sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere.

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas.

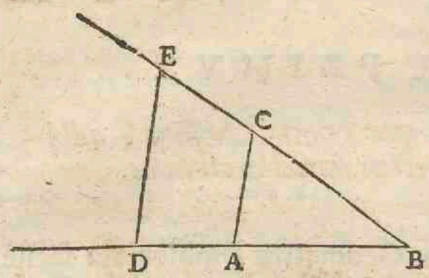
Et quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque solummodo operationibus constat, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Divisionis specie haberi potest:) Ita similiter in Geometria, quod spectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non est, A quàm ut vel ipsis addantur, vel ab iisdem subtrahantur aliæ; vel etiam si una sit, (quæ vocetur unitas, ut eò com- B, C modiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ, ut ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, D ut est altera ad unitatem, quod idem est, atque Multiplicatio; vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad E unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione; vel denique, ut inter unitatem & aliam quandam rectam inveniantur una, aut duæ, plu-

 resve

reſve mediæ proportionales, quod idem eſt, quod radicis Quadratæ, aut Cubicæ, &c. extractio. Neque enim hoſce Arithmetices terminos, ut faciliùs intelligi poſſim, in Geometriam introducere verebor.

Quomodo Geometrice fiat.

Multiplicatio,

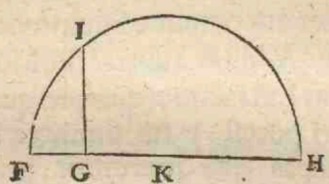


Sit, exempli gratiâ, A B unitas, oporteatque multiplicare B D per B C: jungo puncta A & C, ductâque D E parallelâ A C, erit B E productum hujus multiplicationis.

Diviſio,

Vel ſi dividenda ſit B E per B D, junctis punctis E & D, duco A C parallelam ipſi D E, eritque B C quotiens hujus Diviſionis.

Extractio radicis Quadratæ.



Vel denique ſi ex G H extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipſi in directum lineam rectam F G, quæ unitas eſt; diviſâque F H bifariam in puncto K, centro K intervallo F K ſeu K H deſcribo circulum. quo facto, erit G I, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur ſuper F H uſque ad I, radix quæſita.

Quo pacto notis uti liceat in Geometria.

Nihil hîc de radice Cubicâ, nec de aliis dico, quòd de iis in ſequentibus commodiùs ſim acturus.

At verò ſæpe non eſt opùs, haſce lineas ita in charta ducere, ſed ſufficit illas litteris quibuſdam deſignare, ſingulas ſingulis. Vt ad addendam lineam B D lineæ G H, voco unam a & alteram b, ſcriboque $a+b$; Et $a-b$, ad ſubtrahendam b ex a; Et ab, ad multiplitiplicandam unam per alteram; Et $\frac{a}{b}$, ad dividendam *a* per *b*; Et *aa*, seu a^2, ad multiplicandam *a* in se; Et a^3, ad eandem adhuc semel multiplicandam per *a*, atque ita in infinitum; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, ad extrahendam radicem Quadratam ex a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem Cubicam ex a^3-b^3+abb, & sic de cæteris.

Vbi notandum est, quòd per a^2 vel b^3, similesve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quòd omnes ejusdem lineæ partes, quando unitas in quæstione non est determinata, æque-multis semper dimensionibus exprimi debeant, ut hîc a^3 tot habet dimensiones, quot *abb*, aut b^3, ex quibus composita est linea, quam nominavi $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$; Sed hoc non est necesse, cùm unitas determinata existit, quoniam illa ubique subintelligi potest, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimensiones reperiuntur. Vt si radix Cubica sit extrahenda ex F
$aabb-b$, cogitandum est, quantitatem *aabb* semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem *b* bis per eandem esse multiplicatam.

Cæterùm ut quis facilè linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ

AB ∞ 1, hoc est, AB æqualis est 1, seu unitati.

GH ∞ *a*

BD ∞ *b*, &c.

G

Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius ne- *Quomodo ad Æquationes perveniendum* *ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt.* ceſſariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ ſunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas haſce cognitas & incognitas facto diſcrimine, evolvenda eſt Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à ſe invicem dependeant, donec inventâ fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim ſunt termini modi unius terminis modi alterius. Iam verò tot hujuſmodi Æquationes invenire oportebit, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ.

GG Vel ſi totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæſtione deſiderantur, omittatur, argumentum eſt, illam non penitùs eſſe determinatam. Tunc enim ad arbitrium aſſumi poſſunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non reſpondet aliqua Æquatio.

GGG Poſtea verò ſi plures adhuc ſuperſint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, ſive illam conſiderando ſeparatim, ſive ipſam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis

H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, ſive cubus, ſive quadrato-quadratum, ſive ſurde-ſolidum, ſive quadrato-cubus, &c. æqualis ſit ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione duarum, pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita ſit, reliquæ autem compoſitæ ex quibuſdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, ſive cubum, ſive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto deſigno.

$z \propto b$, aut

$z^2 \propto -az+b^2$, aut

$z^3 \propto +az^2+b^2z-c^3$, aut

$z^4 \propto +az^3+b^2z^2-c^3z+d^4$, &c.

Hoc

Hoc eſt, *z*, quam pro quantitate incognita ſumo, eſt æqualis ipſi *b*; aut quadratum à *z* æquale eſt quadrato ex *b*, minus producto ex *a* in *z*; aut cubus à *z* æqualis eſt producto ex *a* in quadratum ipſius *z*, plus quadrato ex *b* ducto in *z*, minus cubo ex *c*. & ſic de cæteris.

Poſſunt autem ſemper quantitates incognitæ ita ad unam ſolam reduci, atque tum Problema conſtrui per rectas lineas & circulos, aut per ſectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonniſi uno duobuſve gradibus magis ſit compoſita.

Sed nolo hîc prolixus eſſe, ut hoc magis particulatim explicem, eò quod vobis voluptatem præriperem diſcendi id ipſum veſtro marte, & utilitatem ingenium veſtrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem judicio, præcipua eſt, quam ex hac ſcientia percipere licet. Deinde etiam, quòd nihil hîc adeò difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra verſati ſunt, & obſervaturi porrò ſunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non poſſit.

Atque ideo ſufficiet, Vos monere, ſi quis in reducendis hiſce Æquationibus non omiſerit uti diviſionibus 1
omnibus quæ fieri poſſunt, ipſum quoque infallibiliter habiturum ſimpliciſſimos terminos, ad quos quæſtio reduci poſſit.

Iam verò ſi illa per Geometriam communem reſolvi poteſt, hoc eſt, utendo tantùm rectis lineis & circularibus, in plana aliqua ſuperficie deſcriptis, poſtquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquetur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione ejus radicis, multiplicatæ per quantitatem ali-

Quænam ſint Problemata Plana.

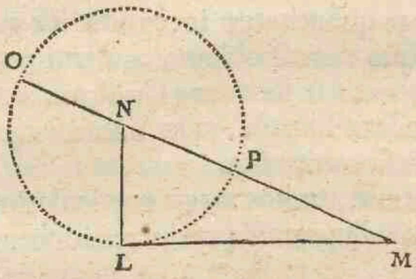
quam cognitam, & alterius cujuſdam quantitatis cognitæ.

Quomodo ipſa reſolvantur.

Tuncque radix illa, ſive incognita linea, facilè invenitur. Nam ſi, exempli gratiâ, habeatur

$$zz \infty az + bb,$$

facio triangulum rectangulum N L M, cujus unum latus L M ſit æquale b, radici videlicet quadratæ quantitatis cognitæ bb, alterum autem latus L N æquale $\frac{1}{2}a$, ſemiſſi nimirum reliquæ quantitatis cognitæ, quæ multiplicata eſt per z, quam ſuppono lineam eſſe incognitam. Deinde productâ M N, baſe ejuſdem



K trianguli, uſque ad O, ita ut N O ſit æqualis N L: erit tota O M æqualis z, lineæ quæſitæ. Quæ quidem ſic exprimitur

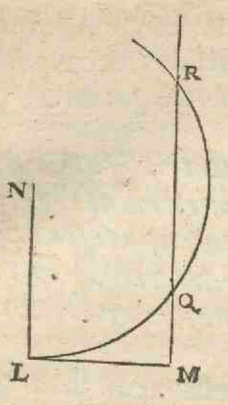
$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Quòd ſi verò habeatur $yy \infty -ay + bb$, atque y ſit quantitas, quam invenire oportet, facio rurſus idem triangulum N L M, & à baſe ejus M N aufero N P, æqualem N L, eritque reliqua P M, æqualis y, radici quæ-

L lem N L, eritque reliqua P M, æqualis y, radici quæ-

M ſitæ. Ita ut fiat $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nec aliter fit, ſi proponatur $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. P M enim eſſet x^2, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: atque ita de aliis.

Deni-



Denique si habeatur

$$zz \infty az - bb:$$

facio NL æqualem $\frac{1}{2}a$, & LM æqualem b, ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis casibus, sed duco MQR parallelam ipsi LN; centroque N descripto per L circulo, secante MQR in punctis Q & R, erit MQ vel MR æqualis lineæ quæsitæ z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur, nimirum $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel etiam $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Quòd si circulus centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat constructionem Problematis propositi esse impossibilem. N

Cæterum possunt hæ ipsæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; sed prædictos tantùm in medium afferre volui, velut admodum simplices, ut hâc ratione pateat, Problemata omnia Geometriæ communis construi posse, faciendo tantùm ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo à Veteribus fuisse animadversum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quòd ipsis non constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quòd solummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quæstio desumpta ex Pappo.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissimè liquet. Vbi postquam aliquamdiu in recensendis illis omnibus, quæ ab antecessoribus suis in Geo-

Geometria ſcripta ſunt, occupatus fuit, tandem de quæſtione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius penitùs reſolvere potuerat, his verbis:

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm Conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Paulò autem poſt explicat, quæſtionem illam eſſe hanc ſequentem.

At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit poſitione datum ſolidum locum, hoc eſt, unam ex tribus conicis ſectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit: ſimiliter punctum datam coni ſectionem poſitione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, ſed lineas tantùm dictas; quales autem ſint, vel quam habeant proprietatem, non conſtat: earum unam, neque primam, & quæ manifeſtiſſima videtur, compoſuerunt, oſtendentes utilem eſſe, propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto, ad poſitione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit

ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad ſolidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum poſitione datam lineam continget. Si autem ad ſex, & data ſit proportio ſolidi tribus lineis contenti ad ſolidum, quod tribus reliquis continetur; rurſus punctum continget poſitione datam lineam. Quòd ſi ad plures quàm ſex, non adhuc habent dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus.

Vbi velim ut ex occaſione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica uſitatis, ad operationes Geometricas ſignificandas, liberè uti noluerint, ſæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obſcuros incidiſſe, cujus rei non alia potuit cauſa eſſe, quàm quòd non ſatis accuratè perceperint, quænam ſit inter illas duas ſcientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

Acquieſcunt autem his, qui paulò ante talia interpretati ſunt, neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones hæc, & dicere, & demonſtrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, ſi ſint ſeptem; ſi verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget poſitione datas lineas. Et ſimiliter quotcunque ſint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas reſpondeant, nullum igitur poſuerunt, ita ut linea nota ſit &c.

Quæſtio itaque quam Euclides reſolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, ſed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujuſmodi.

Datis poſitione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, ſingulæ ad ſingulas datarum duci poſſint, quæ cum ipſis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, ſub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, ſi ſint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, ſi ſint quatuor; Aut ſi quinque ſint, ut parallelepipedum, quod ſub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod ſub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut ſi ſex ſint, ut parallelepipedum ſub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum ſub tribus reliquis comprehenſum; Aut ſi ſint ſeptem, ut hoc, quod producitur ex multiplicatione quatuor ductarum in ſe invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producitur; Aut ſi ſint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter ſe multiplicatis producitur, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæſtionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia ſemper infinita ſunt puncta, quæ ſatisfacere poſſunt iis, quæ hîc quæruntur, requiritur inſuper, ut cognoſcatur atque deſcribatur linea, in quâ illa omnia reperiantur.

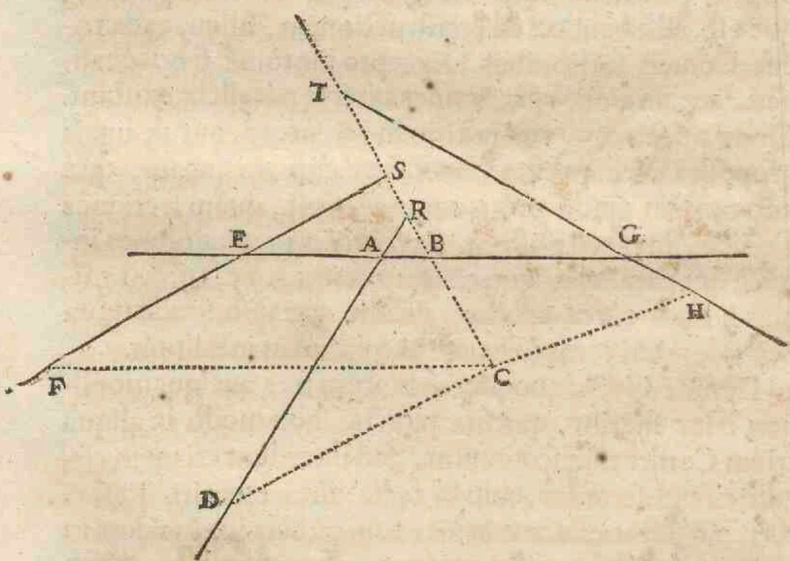
Dicit autem Pappus, ſi tantùm 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex ſectionibus Conicis exiſtere. Verùm non ſuſcipit ipſam determinare neque deſcribere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæſita puncta inveniri debent, quando quæſtio propoſita ta eſt in pluribus lineis. Tantùm addit, quòd Veteres unam ex illis ſibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem eſſe monſtrarunt, ſed quæ manifeſtiſſima videretur, nec tamen prima exiſteret. Quod occaſionem mihi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè longè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæſtio in tribus, quatuorve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæſita per ſimplicem ſemper Geometriam inveniri queant; hoc eſt, ut non niſi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum eſt, faciamus. Præterquam ſi quinque lineæ dantur, quæ omnes inter ſe parallelæ fuerint. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæſita puncta per Solidorum Geometriam inveniri poſſunt; hoc eſt, adhibendo, ad conſtructionem, aliquam ex tribus Conicis ſectionibus. Excepto tantùm, ſi novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter ſe parallelæ exiſtant. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 10, 11, 12, aut 13 lineis propoſita eſt, quæſita puncta per curvam lineam, quæ uno tantùm gradu magis compoſita eſt, quàm ſectiones Conicæ, inveniri poſſunt. Excepto in 13, quæ omnes inter ſe ſint parallelæ. quo caſu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu ſupra præcedentem compoſita eſt. Atque ita in infinitum.

Reſponſum ad Quæſtionem Pappi.

Deinde inveni quoque, ſi tantùm tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæſita puncta, non modò in aliqua trium Conicarum ſectionum, ſed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et ſi 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compoſitis, quàm ſectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, imaginari licet. Sed poſſunt rurſus illa etiam in ſectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter ſi 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non niſi uno gradu ſupra præcedentes poterit eſſe compoſita: quemadmodum etiam nullam earum imaginari licet, quæ ibidem utilis eſſe non poſſit. Atque ita porrò in infinitum.

Denique prima & poſt Conicas ſectiones ſimpliciſſima, ea eſt, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ interſectionem deſcribi poteſt, quemadmodum pòſt explicabitur. Adeò ut exiſtimem, me prorſus ſatisfeciſſe iis, quæ Pappus nobis commemorat hîc à Veteribus fuiſſe quæſita. quorum quidem demonſtrationem paucis ſubjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re ſcripſiſſe.



Sint AB, AD, EF, GH, &c. lineæ quotcunque poſitione datæ, oporteatque invenire punctum, ut C, à quo à quo si ducantur totidem aliæ ad positione datas, ut CB, CD, CF, & CH, in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ut hoc, quod producitur ex multiplicatione certarum quarundam harum linearum, sit æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. id enim quæstionem difficiliorem non reddit.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque ut ex harum omnium linearum confusione me expediam, considero unam ex datis, atque unam ex quæsitis, exempli gratiâ, AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum segmentum lineæ AB, quod intra puncta A & B continetur, vocari x. BC autem vocari y. aliasque lineas datas omnes productas esse, donec secent hasce duas, etiam productas, si opùs fuerit, & ipsis non sint parallelæ. quemadmodum hîc apparet illas secare, lineam quidem AB in punctis A, E, & G; BC verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli ARB dati sunt, data quoque erit ratio, quæ est inter ejus latera AB & BR, quam pono ut z ad b, ita ut, cum AB sit x, RB futura sit $\frac{bx}{z}$, CR autem $y + \frac{bx}{z}$: siquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam si R caderet inter C & B, CR esset $y - \frac{bx}{z}$; sin verò C caderet inter B & R, CR foret $-y + \frac{bx}{z}$. Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli DRC, unde & ratio, quæ est inter latera CR & CD, quam pono ut z ad c: ita ut, cum CR sit $y + \frac{bx}{z}$, CD futura sit $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Postea, quia lineæ AB, AD, & EF positione datæ sunt, data quoque erit distantia puncti A à puncto E: quæ si nominetur k, habebitur EB æqualis $k + x$; foret autem ipsa $k - x$,

Quomodo ponendi sint termini in hac Quæstione, ut ad Æquationem deveniatur.

 si punſi punctum B caderet inter E & A; at verò $-k+x$, ſi E caderet inter A & B. Rurſus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S: quam ſi ponam eſſe ut z ad d, B S fiet $\frac{dk+dx}{z}$, C S verò $\frac{zy+dk+dx}{z}$; quæ quidem foret $\frac{zy-dk-dx}{z}$, ſi punctum S caderet inter B & C; at verò $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, ſi C caderet inter B & S. Porrò dantur tres anguli trianguli F S C, & conſequenter ratio ipſius C S ad C F, quæ ſit ut z ad e, unde tota C F erit $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Eodem modo, data eſt A G, quam voco l, unde B G erit $l-x$, & quia in triangulo B G T ratio ipſius B G ad B T data eſt, quæ ſit ut z ad f, erit B T $\infty \frac{fl-fx}{z}$, & C T $\infty \frac{zy+fl-fx}{z}$. Rurſus, propter triangulum T C H, data eſt ratio ipſius C T ad C H: quam ſi ponamus ut z ad g, habebitur C H $\infty \frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Atque ita videre eſt, quòd, poſitione datis quotcunque lineis, ex puncto C ſemper totidem aliæ ad illas duci poſſint in datis angulis, (juxta quæſtionis tenorem;) quæ ſingulæ exprimantur ad ſummum per tres terminos; quorum quidem unus compoſitus ſit ex quantitate incognitâ y, multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ſecundus verò ex incognitâ quantitate x, etiam multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantùm, ſi datæ lineæ ſint omnes parallelæ, vel lineæ A B, (quo caſu terminus ex quantitate x compoſitus evaneſcet;) vel etiam lineæ C B, (quo caſu terminus ex quantitate y compoſitus evaneſcet;) quemadmodum id plus ſatis per ſe manifeſtum eſt, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem ſpectat ad ſigna

gna + & —, quibus hi termini conjunguntur, ipsa quidem variari possunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita hasce lineas in se invicem, quantitates x & y, quæ in producto reperiuntur, singulæ non plures dimensiones habere possint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inserviunt.) quæ ita sunt multiplicatæ. Adeò ut nunquam plures duabus habituræ sint dimensiones, ubi productum illud ex duarum tantùm linearum multiplicatione nascitur; nec plures tribus; cùm productum illud ex trium tantùm linearum multiplicatione genitum fuerit, & sic in infinitum.

Cæterùm quia ad determinandum punctum C una duntaxat conditio adimplenda est, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur sit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione: possumus ad libitum assumere alterutram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, si quæstio in quinque tantum lineis proposita fuerit, quantitatem x, quæ quidem expressioni primæ lineæ non inservit, posse semper non plures quàm duas dimensiones recipere. Ita ut, si pro y sumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantùm $xx \propto + \text{vel} - ax + \text{vel} - bb$. Et tum quidem quantitatem x invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum superiùs explicatum fuit. Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujusmodi est punctum C, quorum ope quæsita curva linea describetur.

Quo pacto cognoscatur, Problema hoc esse planum, quando illud in quinque tantùm lineis est propositum.

Fieri

Fieri etiam poteſt, quum quæſtio in ſex aut pluribus lineis proponitur, ſi inter datas fuerint, quæ ipſi A B vel B C parallelæ exiſtant, ut una duarum quantitatum, x, y, duas tantùm aut etiam unam in Æquatione dimenſiones habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri poſſit. Sed contra, ſi omnes ſint parallelæ, etiamſi quæſtio in quinque tantùm lineis propoſita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas x nuſquam in Æquatione reperitur, permiſſum non erit ampliùs pro illa, quæ y vocata fuit, quantitatem cognitam aſſumere, cum hæc ea ipſa futura ſit, quam quærere oportet. Et quandoquidem illa tres dimenſiones habebit, non poterit ipſa niſi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, niſi ad id aliqua ad minimum Conica ſectio adhibeatur, fieri nequit. Rurſus, licèt lineæ ad novem uſque datæ ſint, dummodo non ſint omnes parallelæ, ſemper fieri poteſt, ut Æquatio non altius quàm ad quadrato-quadratum aſcendat. quare ipſa per Conicas ſectiones reſolvi quoque ſemper poterit, eo modo, quem poſtea ſum explicaturus. Ac denique, licèt habeantur uſque ad 13 lineas, efficere ſemper poſſumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde reſolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu ſupra ſectiones Conicas eſt compoſita, quemadmodum etiam poſt explicabitur. Atque hoc primum eſt, quod hîc eram demonſtraturus; ſed antequam ad ſecundum progrediar, opùs eſt ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

GEOMETRIÆ

LIBER SECVNDVS.

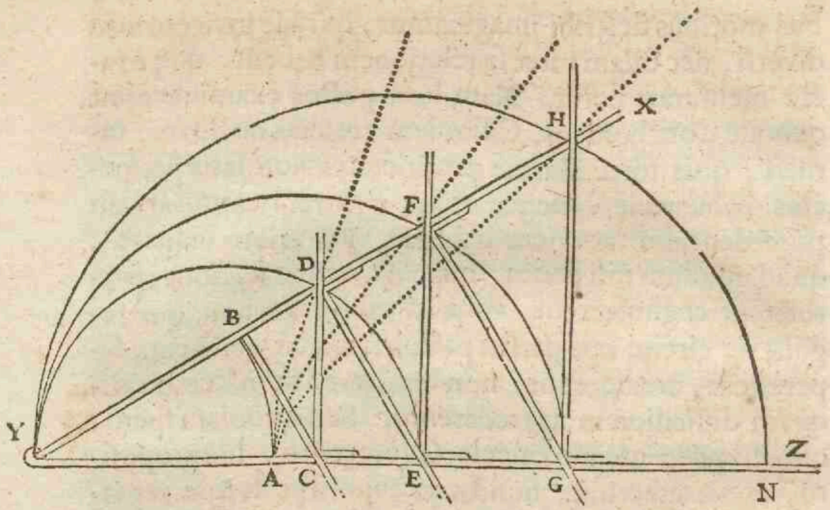
De natura linearum curvarum.

VEteres optimè consideràrunt, quòd Geometriæ Problematum alia sint Plana; alia Solida; alia denique Linearia; hoc est, quòd quædam eorum construi possint, ducendo tantùm rectas lineas & circulos; cum alia construi nequeant, nisi ad minimum adhibeatur Conica aliqua sectio; ac reliqua denique, quin ad constructionem eorum assumatur alia quædam linea magis composita. *Quænam sint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi possunt.*

Verùm satis mirari non possum, quòd non ulteriùs progressi lineas hasce magis compositas in certos distinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint. Etenim, si dicatur, ideo id fuisse factum, quòd instrumento quodam, ad illas in plano describendas, uti opùs sit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem rejiciendæ essent: cum absque circino & regula, quæ non minùs instrumenta dicenda sunt, in charta describi non possint. Neque etiam ideo, quòd instrumenta, quæ describendis illis inserviunt, utpote magis composita quàm regula & circinus, nequeant esse tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis convenientia, quæ à manu proficiscitur, desideratur, quàm ex Geometria, ubi solùm spectatur exacta ratiocinatio. quippe quæ proculdubio, tam hasce lineas quàm illas concernens, æquè perfecta esse potest. Neque tandem ea de caussa, quòd numerum postulatorum suorum augere noluerint; quodque contenti fuerint, modò liceret, data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum describere, transeuntem per datum punctum: cum ulteriùs, ut de Conicis sectionibus tractarent, supponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano secare. Vbi sanè ad describendum lineas omnes curvas, quas hîc introducere instituo, nihil aliud supponere est opùs: quàm ut duarum pluriumve linearum una per alteram moveri possit, ita ut illarum intersectiones alias designent; siquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem est, quòd sectiones Conicas non omnino in Geometriam suam receperint; neque etiam nomina, quæ usu approbata sunt, immutare volo; veruntamen evidens admodum est, ut mea fert opinio, quòd, si Geometricum censeamus illud, (ut fieri solet) quod omnino perfectum atque exactum est, & Mechanicum quod ejusmodi non existit; atque Geometriam consideremus ut scientiam, quæ generaliter mensuras omnium corporum cognoscere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maximè compositæ, quàm omnium simplicissimæ: siquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui se mutuò consequantur, quorumque posteriores à prioribus regantur, imaginari possumus. Hâc enim ratione exactam semper illarum mensuræ cognitionem habere licet. Verùm enimverò fieri potest, ut scrupulus, quem sibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm sectiones Conicæ compositis, injecerunt, fuerit, quòd primæ, quas consideratunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque similes; quæ reverâ non nisi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero sunt, quas hîc recipiendas autumo: quandoquidem illas duobus

bus motibus deſcribi imaginamur, qui à ſe invicem ſunt diverſi, nec ullam inter ſe relationem habent, quæ exactè menſurari poſſit. Nam licèt poſtea examinaverint quoque Conchoïdem, Ciſſoïdem, & alias quaſdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non ſatis perſpectas habuerunt, neque etiam majorem earum quàm præcedentium rationem habuêre. Vel etiam videntes, quòd nondum niſi pauca, quæ ad Conicas ſectiones pertinerent cognoſcerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici poſſunt, quæ ignorarent, ſupereſſent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggrederentur. Sed quoniam ſpero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, hîc propoſito, exercitati erunt, non facilè quid in poſterum reperturi ſint, in quo hæreant, quod ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non abs re fore, ſi illos ad alia inveſtiganda, ubi ipſis nunquam materia ſe exercendi defutura ſit, invitem.

Sunto lineæ A B, A D, A F, & ſimiles, quas ſuppono deſcriptas eſſe ope inſtrumenti X Y Z, quod compoſitum eſt ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cùm illa, quæ deſignatur per Y Z, ſuper lineam A N immota manet, angulus X Y Z aperiri claudique poſſit; &, illo omnino clauſo exiſtente, puncta B, C, D, E, F, G, H omnia in punctum A cadant; Sed prout aperitur, ut regula B C, quæ ipſi X Y in puncto B normaliter adfixa eſt, propellat versùs Z regulam C D, quæ ſuper Y Z incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rurſus, ut C D propellat D E, quæ ſimiliter ſuper Y X incedit, parallela manens ipſi B C; deinde ut D E propellat E F; E F verò ipſam F G; hæcque denuo ipſam G H. Atque ita in infinitum, concipiendo ſemper alias atque alias, quarum ſucceſſivè una



alteram eodem modo propellit, & quarum aliæ eosdem perpetuò angulos faciunt cum Y X, atque aliæ cum Y Z.

Iam verò dum sic aperitur angulus X Y Z, punctum B describit lineam A B, quæ circulus est; puncta autem D, F, H, ubi cæterarum regularum intersectiones fiunt, describunt alias curvas A D, A F, A H, quarum posteriores ordine magis compositæ sunt quàm prima, hæcque magis quam circulus. Verùm non video quid impedire possit, quò minùs accuratè atque distinctè hujus primæ descriptionem concipiamus quàm circuli, aut Conicarum saltem sectionum; neque etiam quid impedire queat, cur non secundam, tertiam, cæterasque omnes, quæ sic describi possunt, æquè bene concipiamus atque primam; nec per consequens cur non omnes recipiantur, ut Geometriæ contemplationibus inserviant.

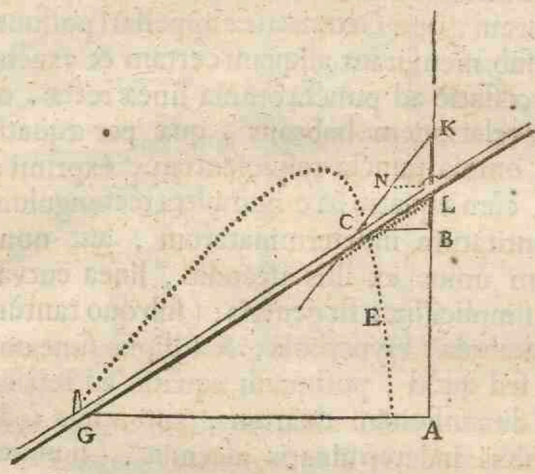
Ratio distinguendi eas in cer-

Possem huc adferre plures alios modos describendi atque concipiendi lineas curvas, quæ magis magisque gra-

gradatim in infinitum eſſent compoſitæ; verùm ut has omnes, quæ in rerum natura ſunt, ſimul comprehendam, eaſque in certa genera ordine diſtinguam: aptiùs quidquam afferre neſcio, quàm ut dicam, quòd puncta omnia illarum, quæ Geometricæ appellari poſſunt, hoc eſt, quæ ſub menſuram aliquam certam & exactam cadunt, neceſſariò ad puncta omnia lineæ rectæ, certam quandam relationem habeant, quæ per æquationem aliquam, omnia puncta reſpicientem, exprimi poſſit. Et quòd, cùm æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut non ultra quadratum unius ex illis aſcendit, linea curva tunc primi & ſimpliciſſimi ſit generis; (ſub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipſis ſunt comprehenſæ:) ſed quòd, poſtquam æquatio ad tertiam aut quartam dimenſionem duarum, aut unius è duabus quantitatibus indeterminatis aſcendit, (ſiquidem hîc duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc ſecundi ſit generis; & quòd, prout æquatio ad quintam aut ſextam dimenſionem aſcendit, illa tunc ſit tertii generis; & ſic in infinitum de aliis.

ta genera; Et cognoſcendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum.

Vt ſi ſcire cupiam cujus generis ſit linea EC, quam ſuppono deſcriptam eſſe per interſectionem regulæ GL & plani rectilinei CNKL; cujus latus KN indefinitè productum eſt versùs C; quodque, dum movetur ſupra planum deorſum in recta linea, (hoc eſt, ut diameter ejus KL perpetuò applicata reperiatur alicubi lineæ BA, utrinque indefinitè continuatæ,) facit, ut regula GL rotetur circa punctum G, quoniam ipſi continuò ſic admovetur, ut ſimul quoque ſemper tranſeat per punctum L: eligo rectam aliquam lineam, veluti AB, ut ad diverſa ejus puncta referam omnia puncta hujus curvæ lineæ CE: deinde eligo etiam punctum aliquod in AB, veluti A, ad ordiendum ab eo calculum. Dico autem, me utrumque eligere, quoniam li-



berum est, illa assumere, prout volumus. Nam licèt plurimi referat, quo pacto illa eligam, ut æquatio possit reddi brevior & facilior; tamen. quocunque tandem modo sumantur, fieri potest, ut linea ejusdem generis esse appareat. Quemadmodum facilè demonstrari potest.

Iam verò ad libitum sumens alquod punctum in curva, ut C, super quod suppono instrumentum, quod descriptioni ejus inservit, esse adplicatum, duco ex C lineam CB parallelam ipsi GA. Deinde quia CB & BA duæ sunt quantitates indeterminatæ & incognitæ, voco unam y, & alteram x. Porrò ut inveniam relationem unius ad alteram, considero etiam quantitates cognitas, quæ hujus curvæ lineæ descriptionem determinant, ut GA, quam voco a; KL, quam voco b; & NL pa-

NL parallelam ipsi GA, quam voco c. Tum dico, ut NL est ad LK, vel c ad b, ita CB, vel y, est ad BK, quæ ideo erit $\frac{by}{c}$; ac proinde BL $\frac{by}{c} - b$, & AL $x + \frac{by}{c} - b$. Denique ut CB est ad BL, vel y ad $\frac{by}{c} - b$, ita est GA, vel a, ad LA, vel $x + \frac{by}{c} - b$. adeò ut, si multiplicem secundam lineam per tertiam, producatur $\frac{aby}{c} - ab$, quod æquale erit $xy + \frac{by^2}{c} - by$, ei scilicet, quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, est hujusmodi, $y^2 \infty cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$. Ex qua cognoscitur, lineam EC esse primi generis, quemadmodum A illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola.

Quòd si in instrumento, quod ipsi describendæ inservit, loco rectæ lineæ CNK sumatur inventa hæc Hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet CNKL; intersectio hujus lineæ & regulæ GL, loco Hyperbolæ EC, aliam curvam describet, quæ secundi erit generis. Vt si CNK fuerit Circulus, cujus centrum L, describetur prima Conchoïdes Veterum; & si Parabola fuerit, cujus diameter KB, describetur curva linea, quam paulò ante dixi primam esse ac simplicissimam pro quæstione Pappi, cùm quinque tantùm lineæ positione datæ sunt. Sed si loco alicujus harum linearum primi generis sumatur quædam secundi, quæ terminet planum CNKL, describetur ejus ope alia tertii generis; aut si quædam tertii generis sumatur, describetur aliqua quarti, & sic in infinitum. Vt facilè ex calculo est cognoscere. Et sanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ descriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipsa ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, pote-

Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4; & Eutocium in commentariis in secund. librum Archimedis de sphæra & cylindro.

rit

rit ſemper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinentur.

Cæterùm lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adſcendat, ejuſdem generis eſſe pono cum illis, quæ ipſam tantùm ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adſcendit, ejuſdem generis cum illis, quæ ipſam tantùm ad Surdeſolidum perducunt. Et ſic de cæteris.

Cujus rei ratio eſt, quòd generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ aſcendunt ad Quadrato-quadratum; & ad Surdeſolidum omnes illas, quæ aſcendunt ad Quadrato-cubum, ita ut magis compoſitæ cenſeri non debeant.

Notandum autem eſt, quòd inter lineas cujuſque generis, licèt major pars æqualiter ſit compoſita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem ſervire poſſint, atque ad eadem Problemata conſtruenda; tamen quædam illarum ſint, quæ ſimpliciores exiſtant, quæque non tantam in ſua potentia extenſionem habeant. Vt, inter lineas primi generis, præter Ellipſin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter ſunt compoſitæ, etiam Circulus eſt comprehenſus, qui manifeſtò ſimplicior eſt. Et inter illas ſecundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ ſuam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamſi non tantam extenſionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejuſdem generis ſunt, tamen inter lineas primi generis poni non poſſunt.

Continuatio explicationis quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata.

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facilè erit progredi in demonſtratione reſponſi, quod paulò ante dedi ad quæſtionem Pappi. Primùm enim, cum ſupra oſtenderim, quòd, quando tantùm 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæſita puncta determinanda

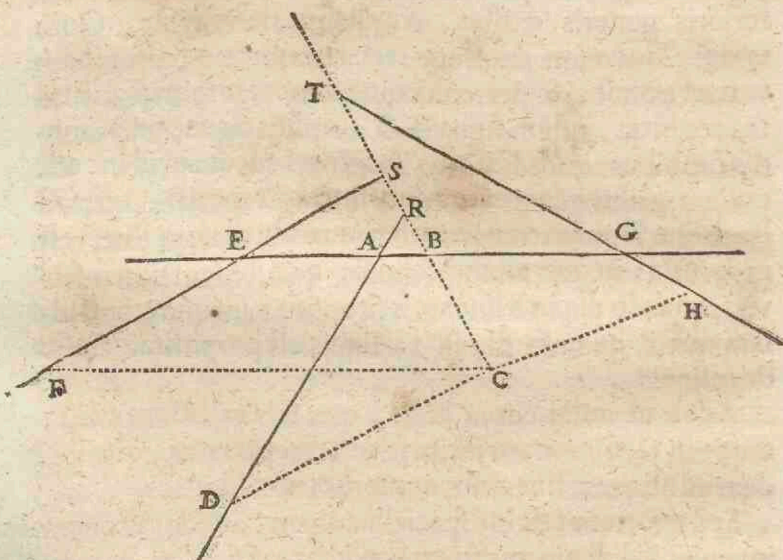
nanda inſervit, non ultra quadratum aſcendat: evidens eſt, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, neceſſariò aliquam eſſe primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cùm non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio hæc tum ad ſummum non ultra Quadrato-quadratum aſcendat, ac per conſequens quæſita linea non niſi ſecundi aut inferioris generis eſſe poſſit. Et quòd, cùm non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum aſcendat, ac per conſequens, quæſita linea ſolummodo tertii aut inferioris generis exiſtat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum poſitio omnifariam variari poteſt, & per conſequens mutare tam quantitates cognitas, quàm ſigna + & — ipſius æquationis, modis omnibus, quos ſibi quis imaginari queat: evidens eſt, nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, quando illa in 4 lineis eſt propoſita; neque ullam ſecundi, quæ ibidem non inſerviat, quando illa in 8 lineis eſt propoſita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis eſt propoſita. Et ſic de reliquis.

Adeò ut nulla curva linea, quæ ſub calculum cadit, atque in Geometriam recipi poteſt, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non ſit utilis.

Sed oportet ut de his ſpecialiùs agam, atque rationem inveniendi lineam quæſitam, cuilibet caſui inſervientem, exhibeam, quando tantùm 3 aut 4 lineæ datæ ſunt; atque eâdem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur. *Solutio hujus quæſtionis, cùm ipſa in 3 aut 4 tantùm lineis eſt propoſita.*

Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, & GH, GH, ſuperiùs datas, oporteatque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale eſt C, unde ſi ducantur quatuor lineæ CB, CD, CF, & CH, in datis angulis ad poſitione datas: ut CB multiplicata per CF tantundem producat ac CD multiplicata per CH. hoc eſt, poſitâ CB $\infty\, y$, CD $\infty\, \frac{czy + bcx}{zz}$, CF $\infty\, \frac{ezy + dek + dex}{zz}$, & CH $\infty\, \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$: æquatio erit

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}}{ez^3 - cgzz.}$$



B Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm cg. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —. Vnde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut minor quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo DAG, oporteret & illud ſupponere in angulo

BB

DAE,

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando ſigna + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce poſitionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito eſſe impoſſibilem. Sed ſupponamus illam hîc poſſibilem eſſe, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $2m$, & loco $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{2n}{z}$; ſicque habebimus $yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, cujus æquationis radix eſt

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$$

Rurſus autem abbreviandi causâ, pro $- \frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus o, & pro $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{p}{m}$. Cum enim quantitates hæ omnes datæ ſint, illas, ut placuerit, nominare poſſumus. Atque ita habebimus

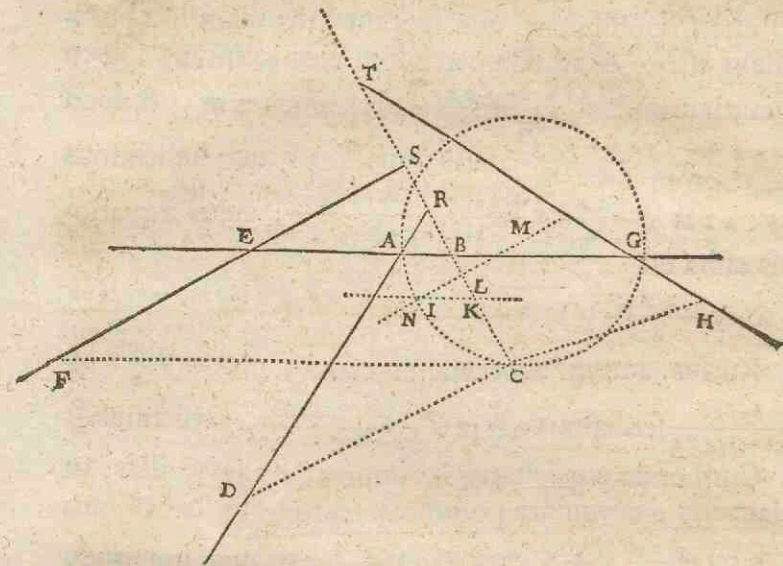
$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}.$$ quæ longitudo eſſe debet lineæ BC, relinquendo AB, ſeu x, indeterminatam.

Vbi patet, ſi quæſtio in tribus aut quatuor tantùm lineis eſt propoſita, ſemper ejuſmodi terminos inveniri poſſe; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque + & — diverſimodè mutari.

His peractis, duco KI parallelam & æqualem ipſi AB, ita ut ex BC ſegmentum auferat BK, æquale ipſi m: quandoquidem hîc habetur $+ m$; quod quidem aliàs addidiſſem ipſi BC, ducendo hanc lineam IK ad alteram partem, ſi illic fuiſſet $— m$; eamque nullo modo duxiſſem, ſi quantitas m prorſus defuiſſet. Deinde duco IL, ita ut linea IK ſit ad KL, ſicut z ad n. hoc

 eſt,

eſt, ut, cùm IK eſt x, KL ſit $\frac{nx}{z}$. Atque hâc ratione innoteſcit etiam ratio, quæ eſt inter KL & IL, quam pono eandem, quæ eſt inter n & a: ita ut, cùm KL eſt



$\frac{nx}{z}$, IL ſit $\frac{ax}{z}$: & facio ut punctum K cadat inter L & C; ſiquidem hîc habetur $-\frac{nx}{z}$; ubi aliàs L ſumpſiſſem inter K & C, ſi habuiſſem $+\frac{nx}{z}$. Neque omnino duxiſſem hanc lineam IL, ſi $\frac{nx}{z}$ defuiſſet.

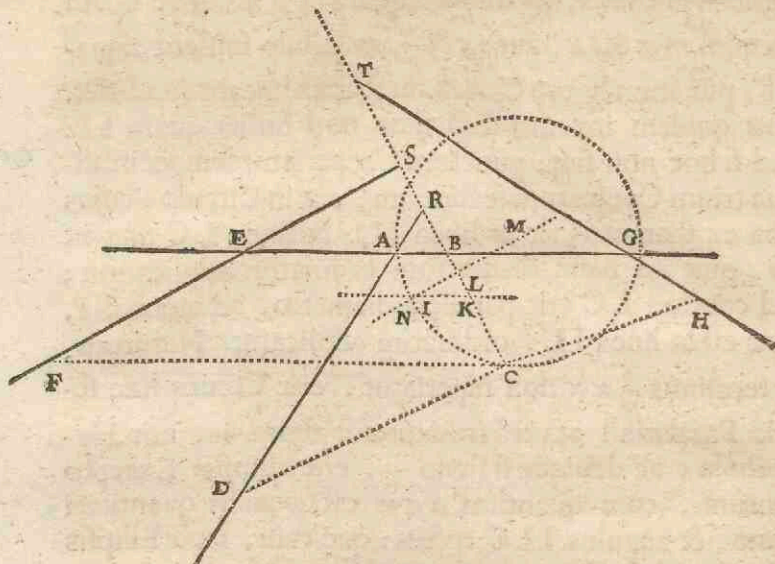
C Hinc nihil mihi ampliùs reſtare video pro linea LC præter hoſce terminos: LC ∞ $\sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Vnde cognoſco, quòd, ſi nulli fuiſſent, punctum C repertum fuiſſet in linea recta IL; & ſi tales extitiſſent, ut inde radix extrahi potuiſſet, hoc eſt, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$

ſigno

ſigno + notatis, oo fuiſſet æqualis $4pm$, ſive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuiſſent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidiſſet, quæ quidem inventu difficilior non fuiſſet quàm I L. Sed ſi hoc non fiat, punctum C reperietur ſemper in ali- CC
qua trium Conicarum ſectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris ſit in linea I L, & linea L C una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, L C erit parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea I L, ordinatim adplicatur. Nimirum, ſi terminus $\frac{p}{m}xx$ non reperiatur, erit Conica hæc ſectio Parabola; at verò ſi denotetur ſigno +, erit Hyperbola; ac denique ſi ſigno —, erit Ellipſis. Excepto tantùm, cùm quantitas aam eſt æqualis quantitati pzz, & angulus I L C rectus: quo caſu, loco Ellipſis Circulus obtinebitur.

Quòd ſi hæc ſectio Parabola exiſtit, latus rectum æquale erit $\frac{oz}{a}$, diameterque ſemper in linea I L. atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex eſt, oportebit I N æqualem ſumere $\frac{amm}{oz}$; ita ut punctum I cadat inter L & N, ſi termini fuerint $+mm+ox$; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, ſi illi fuerint $+mm-ox$; aut denique ut N cadat inter I & L, ſi habeatur $-mm+ox$. Sed nunquam illic haberi poteſt $-mm$, eo modo, quo termini hìc ſunt poſiti. Poſtremò verò punctum N erit idem quod punctum I, ſi quantitas mm nulla ſit. Quâ quidem ratione inde facile eſt CCC.
invenire hanc Parabolam per Problema 1^{mum} primi libri Conicorum Apollonii.

Quòd ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire pun-

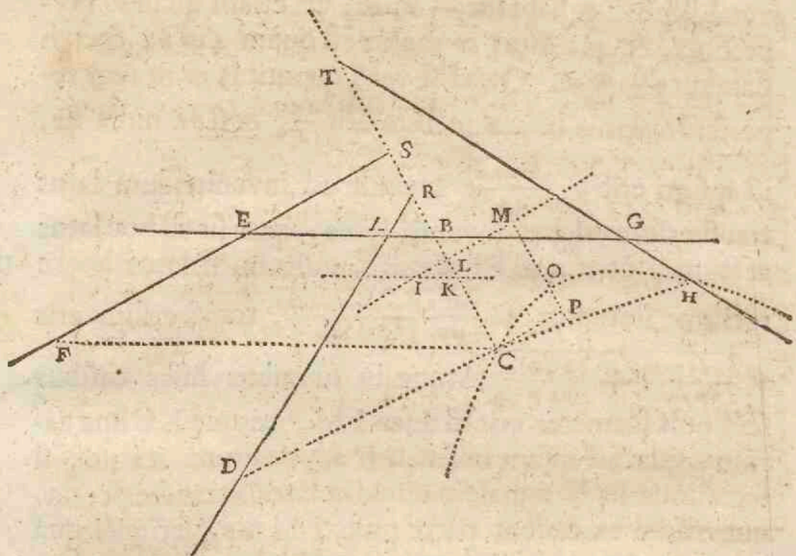


ctum M, quod illius centrum eſt, quòdque ſemper in linea recta I L cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro I M. Ita ut, ſi quantitas o nulla eſt, centrum hocce cadat ſemper in punctum I. Et ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur $+ox$; at ſi habeatur $-ox$, ſumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur $-ox$, centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur $+ox$, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſtea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæſita linea eſt Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæſita linea eſt Circulus,

aut

aut Ellipsis, & habetur $-mm$; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas oo major est quàm $4mp$, & cùm habetur $+mm$. Quòd si verò quantitas mm non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & si ox nulla sit, id ipsum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus transversum, debet inveniri linea, quæ sit ad hoc latus rectum, ut aam ad pzz, nimirum si latus hocce rectum statuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, transversum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hisce casibus sectionis diameter erit in linea I M, eritque L C una earum, quæ ad ipsam ordinatim adplicantur. Ita ut, si fecerimus M N æqualem dimidio lateris transversi, atque illam ex eadem parte puncti M sumpserimus quâ punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipsius diametri. Vnde porrò facile est dictam sectionem invenire, per 2^dum^ & 3^tium^ Problema 1^mi^ Libri Conicorum Apollonii. D

Sed si, sectione Hyperbolâ existente, habeatur $+mm$; & quidem quantitas oo nulla sit, aut minor quàm $4pm$; oportebit ex centro M lineam ducere M O P parallelam ipsi L C, nec non C P ipsi L M, atque M O æqualem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem m, si non reperiatur quantitas ox. Deinde considerare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter sit O P, & linea C P, quæ ad illam sit ordinatim adplicata, cujusque latus rectum sit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, transversum verò $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm ox nulla est: siquidem eo casu latus rectum fit E



ſit $\frac{2aamm}{pzz}$, & tranſverſum $2\,m$. Ita ut inde facile ſit illam invenire per 3^{tium} Problema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii.

Demonſtratio ejuſdem ſolutionis.

Quorum quidem demonſtrationes perſpicuæ ſunt. Etenim, ſi componatur ſpatium aliquod ex quantitatibus, quas recto & tranſverſo lateri aſſignavi, atque etiam ſegmento diametri N L, vel O P, juxta ſenſum 11^{mi}, 12^{mi}, & 13^{tii} Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compoſitum eſt quadratum lineæ C P, vel C L, quæ huic diametro ordinatim eſt adplicata. Vt in hoc exemplo, auferendo I M, quæ eſt $\frac{aom}{2pz}$, ab N M, quæ eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, relinquitur I N; cui ſi addatur I L, quæ eſt $\frac{a}{z}x$, fit ſumma N L; quæ ideo erit

$\frac{a}{z}x$ —

$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$. Hæc autem multiplicata per $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, quæ est figuræ latus rectum, provenit $x\sqrt{oo+4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$, pro rectangulo. A quo auferendum est spatium, quod sit ad quadratum ex NL, ut latus rectum ad latus transversum. Hinc cum quadratum ex NL sit $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}$, oportebit id ipsum dividere per aam, & multiplicare per pzz, propterea quòd hi termini rationem, quæ est inter latus transversum & rectum, explicent, fietque $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo+4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + mm$. Hoc ergo si auferatur ex rectangulo præcedenti, invenietur $mm + ox - \frac{p}{m}xx$, pro quadrato lineæ CL: quæ proinde una est ex ordinatim adplicatis in Ellipsi, aut Circulo, ad segmentum diametri NL.

Iam verò si datas omnes quantitates numeris velimus explicare, ponendo, exempli gratiâ, EA ∞ 3, AG ∞ 5, AB ∞ BR, BS ∞ $\frac{1}{2}$ BE, GB ∞ BT, CD ∞ $\frac{1}{2}$ CR, CF ∞ 2 CS, CH ∞ $\frac{2}{3}$ CT; & quòd angulus ABR sit 60 graduum; ac denique quòd rectangulum sub duabus lineis CB & CF, sit æquale rectangulo sub duabus reliquis CD & CH; (quandoquidem hæc omnia data requiruntur, ut quæstio sit penitus determinata;) & quòd præterea AB sit ∞ x, & CB ∞ y: inveniemus per modum, supra explicatum, $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$, & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: Ita ut BK fieri debeat 1, & K L ſemiſſis ipſius K I vel A B. Cumque angulus I K L ſit 60 graduum, angulus I L K erit rectus. Quoniam autem I K ſeu A B vocata eſt x, K L erit $\frac{1}{2}x$, I L verò $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur z, erit 1; quæ autem a, erit $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quæ m, erit 1; quæ o, erit 4; & quæ appellabatur p, erit $\frac{3}{4}$: ita ut habeatur $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro I M, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pro N M. Et quia aam, quæ eſt $\frac{3}{4}$, hîc æquatur pzz, atque angulus I L C eſt rectus, linea curva N C invenitur eſſe circulus. Eodem modo reliqui caſus omnes facilè examinari poſſunt.

Quid intelligendum ſit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipſa inveniendi.

Cæterùm, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non aſcendunt, omnes in eo ſunt comprehenſæ, quod jam explicavi; non ſolum Veterum Problema in 3 & 4 lineis hîc penitus ad finem perductum eſt; ſed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compoſitionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum
F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejuſdem lineæ puncta pro eo accipi poſſunt, quod eſt quæſitum. Etenim lineâ illâ exiſtente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At ſi illa eſt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipſis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotieſcunque autem id evenit, poteſt perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam reſolvi, ſimilis exiſtit. Quòd ſi verò linea, quæ ſic quæſitum punctum determinat, uno gradu magis quàm ſectiones Conicæ ſit compoſita, ipſam eodem modo locum Surſolidum appellare licebit, atque ita
G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

lud reperitur, ſuperficies eſt, quæ ſimiliter aut plana, aut ſphærica, aut magis compoſita eſſe poteſt. Verùm ſummus ſcopus, quem ſibi in hac materia Veteres præfixêre, fuit, ut ad Solidorum Locorum compoſitionem pervenirent; Et veriſimile eſt, omne illud, quod Apollonius de Conicis ſectionibus ſcripſit, eò tantùm, ut illam indagaret, reſpexiſſe.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere ſumpſi, non poſſe alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſim complecti. Quod quidem id omne eſt, quod demonſtrare ſuſceperam.

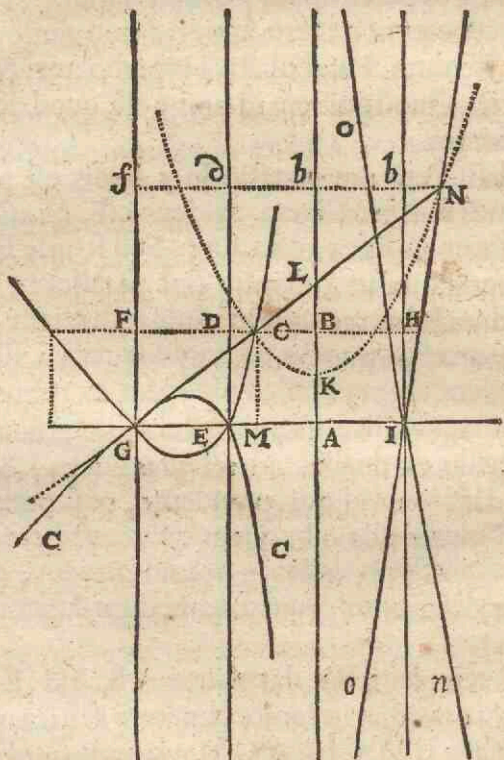
Quòd ſi Veterum quæſtio in 5 lineis eſt propoſita, quæ omnes ſunt parellelæ; evidens eſt, quæſitum punctum ſemper in linea recta fore. Sed ſi in 5 lineis propoſita fuerit, ita ut 4 illarum ſint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos ſecentur; tum etiam, ut lineæ omnes à quæſito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ ſunt, ſit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, poſt præcedentem ſimpliciſſimus caſus eſt, quem quis concipere poteſt:) punctum quæſitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ deſcribitur, quemadmodum ſuperiùs eſt explicatum.

Quænam ſit prima & ſimpliciſſima linearum curvarum, Veterum quæſtioni inſervientium, cùm ipſa quæſtio in 5 lineis eſt propoſita.

Sint, exempli gratià, datæ lineæ A B, I H, E D, G F, & G A; & oporteat invenire punctum C; ita ut, ducendo C B, C F, C D, C H, & C M ad angulos rectos ad poſitione datas, parallelepipedum ex tribus C F, C D, & C H compoſitum, ſit æquale parallelepipedo compoſito ex duabus reliquis C B, C M, & tertia data linea, quæ ſit A I.

Pono $CB \infty y$, $CM \infty x$, AI vel AE vel $GE \infty a$; ita ut, existente puncto C inter lineas A B & D E, habeam $CF \infty 2a - y$, $CD \infty a - y$, & $CH \infty y + a$; & multiplicando hasce tres in se invicem, habeam $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, æquale producto trium reliquarum, quod est axy.

Post hæc considero lineam curvam C E G, quam



imaginor descriptam esse per intersectionem Parabolæ C K N, interea dum movebatur in linea recta A B, atque secabatur à regula G L, rotata circa punctum G, semperque transeunte per punctum L, in plano Parabolæ.

bolæ. Et facio K L ∞ a, latusque principale, hoc eſt, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale a, G A verò ∞ $2a$, C B ſeu M A ∞ y, & C M ſeu A B ∞ x. Deinde propter ſimilitudinem triangulorum G M C & C B L, G M ſeu $2a - y$ eſt ad M C ſeu x, ut C B ſeu y ad B L, quæ ideo eſt $\frac{xy}{2a-y}$. Unde cum L K ſit a, B K erit $a - \frac{xy}{2a-y}$, ſeu $\frac{2aa - ay - xy}{2a-y}$. Denique, quoniam eadem B K, quæ diametri Parabolæ eſt ſegmentum, ſe habet ad B C, quæ ipſi ordinatim eſt adplicata, ut B C ſe habet ad latus rectum, quod eſt a: calculus monſtrat, quòd $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ æquabitur axy, & per conſequens, quòd punctum C erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea C E G aſſumi poteſt; vel etiam in ejus adjuncta c E G c, quæ eodem modo deſcribitur, præterquam quòd Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppoſitis N I o, n I O, quæ per interſectionem, quam linea G C facit in altero Parabolæ latere K N, deſcribuntur.

Iam verò etiamſi datæ parallelæ A B, I H, E D, & G F non æqualiter inter ſe diſtantes eſſent, nec G A ipſas ad rectos angulos ſecaret, neque etiam lineæ à puncto C ad eaſdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum C reperiretur ſemper in linea curva, quæ ejuſdem eſſet naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere poteſt, licèt nullæ ex datis lineis ſint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ ſunt, & quinta eaſdem ſecans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæſito puncto ductis, quarum una ſuper quintam cadat, & aliæ duæ ſuper duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo ſub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæſitum reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ. ſcilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicatæ ad diametrum æquales ſunt ordinatim adplicatis ad diametrum ſectionis Conicæ, cujuſque ſegmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicatas interjecta, eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipſa ad ſimilia diametri ſegmenta ſectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim ſunt adplicatæ. Neque aſſeverare auſim, hanc lineam non ſimpliciorem eſſe præcedenti; quam tamen pro prima ſumendam putavi: propterea quòd deſcriptio ejus ac calculus aliquo modo ſint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis caſibus inſerviunt, non immorabor iis per ſpecies diſtinguendis, neque enim omnia dicere ſuſcepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ tranſire debent, explicui, ſimul modum, quo deſcribendæ ſunt, me ſatis oſtendiſſe puto.

Quænam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur inveniendo plura earum puncta.

Ac proinde non è re fuerit, hîc conſiderare, magnum eſſe diſcrimen, inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad deſcribendam aliquam curvam lineam, atque illum, quo utimur in deſcriptione Spiralis & ſimilium. Quandoquidem hoc poſteriore modo, non indifferenter omnia quæſitæ lineæ puncta inveniuntur, ſed tantùm ea, quæ per menſuram aliquam ſimpliciorem determinari poſſunt, quàm eſt ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc eſt, nullum eorum, quæ ipſi ita propria ſunt, ut non niſi per illam inveniri poſſint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæſtioni propoſitæ inſerviunt, quod non inter illa, quæ modo ſupra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus deſcribendi lineam

curvam,

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendo, ad illas tantùm se extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum describi possunt, non erit is omnino à Geometria rejiciendus.

Quæ etiam illæ sint, quæ ope fili describuntur, & ibidem recipi possint.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus est modus, in quo filo seu chordâ complicatâ utimur, ad determinandam summam vel differentiam duarum pluriumve linearum rectarum, quæ à quolibet quæsitæ curvæ puncto duci possunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, sicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipsin & Hyperbolam. Nam licèt in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis similes videntur, hoc est, quæ modò rectæ, modò curvæ sunt, recipi possint; (cum ratio, quæ inter rectas & curvas existit, non cognita sit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognosci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum est, concludere possimus:) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis constructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoscitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

H

Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, sufficiat scire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum;

Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facilè quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt. Immo verò; potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem

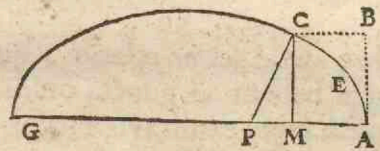
& modum ducendi lineas rectas, quæ ipſas ſecent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

nem ſpectat : ita ut non opùs ſit de his agere apertiùs. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuere poſſumus, ipſæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibuſdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed ſi lineæ rectæ duci poſſint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos menſurare volumus, ipſis occurrunt, ſecent ad angulos rectos, vel, quod hîc pro eodem haberi volo, quæ earum contingentes ſecent: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm ſi à duabus rectis lineis comprehenſi eſſent. Atque ideo confidam, me expoſuiſſe hîc omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, poſtquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibuſvis ipſarum punctis ſecent, oſtendero. Nec verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ ſcio, utiliſſimum & generaliſſimum eſſe; ſed etiam eorum, quæ in Geometria ſcire unquam deſideraverim.

I

K

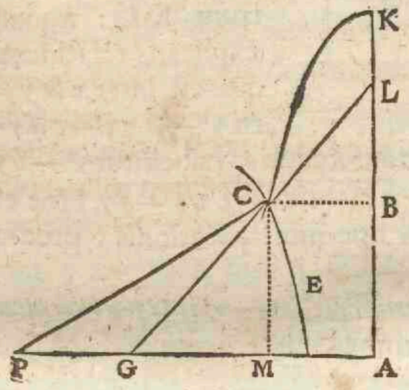
Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.



Sit CE linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipſa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæſitam eſſe CP, quam produco uſque ad punctum P, ut occurrat rectæ GA, quam ſuppono illam eſſe, ad cujus puncta referenda ſunt puncta omnia lineæ CE: ita ut faciendo MA ſeu CB $\infty\ y$, & CM ſeu BA $\infty\ x$, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ eſt inter x & y, explicet. Deinde facio PC $\infty\ s$, & PA $\infty\ v$, ſeu PM $\infty\ v-y$. Vnde propter triangulum

lum rectangulum PMC invenio ss, quod est quadratum basis, æquale $xx + vv - 2vy + yy$, quadratis duorum laterum, hoc est, invenio $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, aut $y \propto v - \sqrt{ss - xx}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ CE habent ad puncta rectæ GA) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y. Quod quidem facile est, si ubique pro x ponamus $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, & quadratum hujus summæ pro xx, & ejus cubum pro x^3, &ita porro; si fuerit x, quam tollere velimus; aut si fuerit y, ponendo ejus loco $v - \sqrt{ss - xx}$, & quadratum, cubumve, &c. hujus summæ, loco yy, aut y^3, &c. Ita ut inde semper restet æquatio, in qua non nisi una habeatur quantitas indeterminata x, vel y.



Quemadmodum si CE est Ellipsis, in qua MA sit segmentum diametri ad quam CM sit ordinatim adplicata, quodque pro latere recto habeat r; pro transverso autem q: fiet per 13^{tium} Theorema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii: $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$. Vnde tollendo xx, restabit $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{ryy}{q}$, vel

L Exemplum hujus Operationis in Ellipsi.

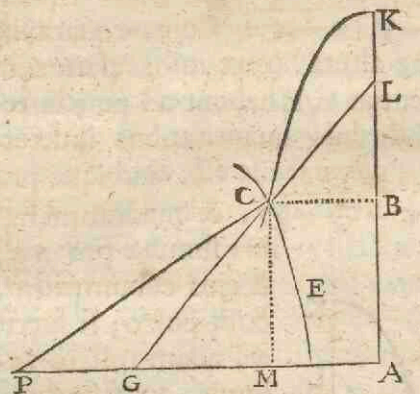
$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$$ æquale nihilo.

 Præ-

Præſtat enim hoc loco ita totam ſummam conſiderare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

M

Aliud Exemplum in Parabola ſecundi generis.



Eodem modo, ſi C E ſit curva linea, per motum Parabolæ deſcripta, ut ſuperiùs fuit explicatum, & pro G A ponatur b, pro K L, c; & d pro latere recto, pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ eſt inter x & y, erit $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$. E qua auferendo x, habebitur $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Hoc eſt, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

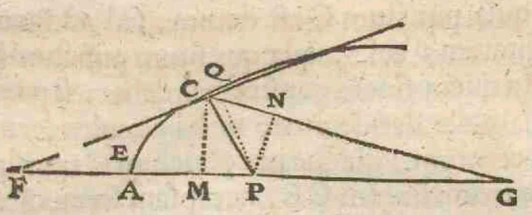
$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licèt puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ ſeſe eo, quo dixi, modo non haberent; ſed alio quolibet, quem ſibi quis imaginari poſſet: poterit tamen nihilominus ſemper æquatio ejuſmodi inveniri.

Tertium exemplum in Ovali, ſive Ellipſi ſecundi generis.

Quemadmodum ſi C E eſt linea, habens ejuſmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio G A ∞ b, A F ∞ c, ſumendoque punctum C ad libitum



bitum in curva, ſuppono, quantitatem, quâ C F ſuperat F A, eſſe ad illam, quâ G A ſuperat G C, ſicut d ad e: ita ut ſi prior illa quantitas indeterminata vocetur z, F C ſit $c + z$, G C verò $b - \frac{ez}{d}$. Deinde ponendo M A ∞ y, G M erit $b - y$, & F M $c + y$: & quandoquidem triangulum C M G rectangulum eſt, ſi auferam quadratum ex G M à quadrato ex G C, relinquetur quadratum ex C M, $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Non ſecus, ſi à quadrato ex F C auferam quadratum ex F M, relinquetur itidem quadratum ex C M in aliis terminis, videlicet $zz + 2cz - 2cy - yy$. Vnde cum hi termini præcedentibus ſint æquales, oſtendunt y ſeu M A fore $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Ac proinde, ſubſtituendo hanc ſummam loco y in quadrato ex C M, invenietur, illud exprimendum eſſe hiſce terminis $\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$.

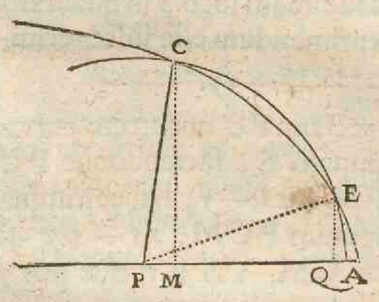
Porrò ſuppono, lineam rectam P C occurrere curvæ C E ad angulos rectos in puncto C, faciendoque P C ∞ s, & P A ∞ v, ut ante, P M erit $v - y$; habebiturque propter triangulum rectangulum P C M, $ss - vv + 2vy - yy$ pro quadrato ex C M. Vbi ſi rurſus pro y ſubſtituamus ſummam ipſi æqualem, exurget

$$zz\frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} \infty 0,$$

pro æquatione, quam quærebamus.

Poſtquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoſcendas quantitates x, y, vel z, quæ hîc datæ ſunt, quia punctum C eſt datum, ſed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæſitum punctum P determinant. In quem finem conſiderari debet: ſi punctum P tale eſt, quale deſideratur, quòd circulus, cujus id ipſum eſt centrum, quique per punctum C tranſit, tangat ibidem curvam lineam C E, nec ipſam ſecet. Sed quòd, ſi idem punctum P propiùs aut remotiùs ſumatur à puncto A, quàm oportet, circulus hic non ſolùm in puncto C, ſed etiam neceſſariò in alio quodam puncto curvam C E ſit ſecturus.

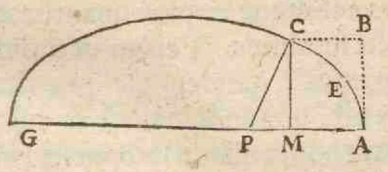
Deinde conſiderandum quoque eſt, quòd, quando hic circulus lineam curvam C E ſecat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia ſimilis quæritur, ſupponendo P A & P C eſſe cognitas, neceſſariò duas contineat radices, quæ ſunt inæquales. Nam ſi, exempli gratiâ, circulus hic ſecet curvam C E, in punctis C & E, ac ducatur E Q parallela ipſi C M: nomina quantitatum indeterminatarum x & y æquè bene convenient lineis E Q & Q A, atque ipſis C M & M A, exiſtente P E æquali P C, propter circulum. Adeò, ut quærendo lineas E Q & Q A, per P E & P A, (quæ tanquam cognitæ ſupponuntur) eandem habituri ſimus æquationem, quam ſi quærerentur C M & M A per P C & P A. Vnde liquidò conſtat, ipſius x, vel y, vel alterius ejuſmodi quantitatis, quam ſuppoſuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc eſt, æquationem duas admiſſuram radices, quæ ſunt inæquales; quarum quidem una futura eſt C M, & altera E Q, ſi



fueſuerit x, quam quærimus ; aut quarum una futura eſt MA, & altera QA, ſi fuerit y, quæ quæritur. Verum equidem eſt, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum ſit vera, & altera inverſa ſeu minor quàm nihil: ſed quò hæc puncta C & E ſibi invicem ſunt propiora, eò quoque differentia inter radices haſce erit minor, quæ denique omnino inter ſe æquales futuræ ſunt, ſi bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc eſt, ſi circulus, qui per C tranſit, curvam CE ibidem tangat, nec omnino ſecet.

Præterea conſiderandum eſt, quòd æquatio, in qua duæ ſunt radices æquales, neceſſariò eandem formam habeat, ac ſi in ſe ipſam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam ſupponimus, multata quantitate cognitâ ſibi æquali : & deinde hæc ultima ſumma, ſi non tot dimenſiones habet, quot præcedens, rurſus per aliam ſummam multiplicetur, totidem, quot alteri deſunt, dimenſiones habentem, ſic ut ſeparatim æquatio inter ſingulos unius atque ſingulos alterius terminos haberi poſſit.

Vt, exempli causâ, dico, primam æquationem ſupra inventam, nimirum: $yy \frac{+qry - qvy + qvv - qss}{q - r}$, eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur,



faciendo e æqualem y, atque multiplicando $y - e$ in ſe, unde exſurgit $yy - 2ey + ee$; ita ut ſeparatim ſingulos earum terminos inter ſe comparare poſſimus, ac dicere: quòd, poſtquam primus terminus, qui eſt yy, in utraque æquatione planè idem eſt,

eſt, ſecundus, qui in una eſt $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, ſit æqualis ſecundo alterius, qui eſt $-2ey$. Vnde quærendo quantitatem v, quæ quantitatem lineæ P A deſignat, invenietur $v \infty e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$. vel quia e æqualem ſuppoſuimus ipſi y, habebitur $v \infty y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Non ſecus inveniri quoque poſſet s per tertium terminum $ee \infty \frac{qvv - qss}{q - r}$; ſed quia quantitas v ſatis determinat punctum P, quod ſolum quærebamus, neceſſe non erit ulteriùs progredi.

Eâdem ratione ſecunda æquatio ſuperiùs inventa: nempe,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

eandem debet habere formam, quam ſumma, quæ producitur multiplicando $yy - 2ey + ee$ per $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, quæ eſt

$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4;$$

ita ut ex binis hiſce æquationibus alias ſex eliciam, quæ ad inveniendas ſex quantitates f, g, h, k, v, & s inſerviunt.

Vnde facilè eſt intelligere, quòd, cujuſcunque generis linea curva propoſita eſſe poſſit, tot ſemper hoc procedendi modo æquationes reſultent, quot quantitates incognitas ſupponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquationes haſce disjungamus, tandemque quantitatem v (quæ quidem ea ſola eſt, qua indigemus, & cujus occaſione cæteræ quæruntur) inveniamus: oportet primò per ſecundum terminum quærere f, primam quantitatum incognitarum ultimæ ſummæ, invenieturque $f \infty 2e - 2b$.

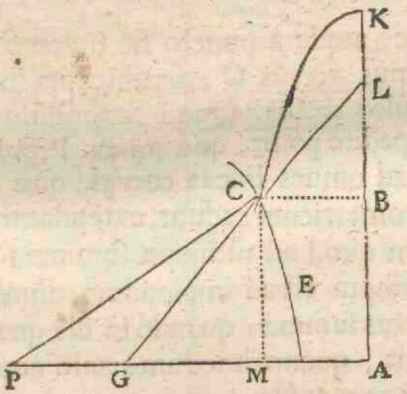
Dein-

Deinde per ultimum quærenda eſt k, ultima quantitatum incognitarum ejuſdem ſummæ, fitque $k^4 \infty \frac{bbccdd}{ee}$.

Porrò per tertium terminum quærenda eſt g, ſecunda quantitas, & fit $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Denique per penultimum invenienda eſt h, penultima quantitas, & fit $h^3 \infty \frac{2bccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Atque ita eodem ordine uſque ad ultimam progrediendum eſſet, ſi plures ejuſmodi quantitates in eadem ſumma haberentur: ſiquidem hoc eodem ſemper modo fieri poteſt.

Præterea per terminum, qui in hoc ipſo ordine ſequitur, atque hîc quartus eſt, oportet inveſtigare v, & fit



$$v \infty \frac{3e^3}{dd} - \frac{4bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

vel, ponendo y loco e, quæ ipſi eſt æqualis, habebitur

$$v \infty \frac{3y^3}{dd} - \frac{4byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3},$$

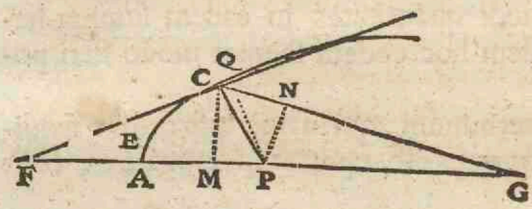
pro linea AP.

Simi-

Similiter quoque tertia æquatio, quæ eſt

$$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv}$$

, eandem formam habet, quam $zz - 2fz + ff$, ſupponendo f æqualem z: ita ut obtineatur rurſus æquatio inter $-2f$, vel $-2z$ & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$ Vnde cognoſcitur quantitatem v fore $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$.



Ideoque ſi componamus lineam A P ex hac ſumma, ipſi v æquali, cujus quantitates omnes ſunt cognitæ, atque à puncto ſic invento P rectam lineam ducamus versùs C, ſecabit ipſa ibidem curvam C E ad angulos rectos. Quod faciendum erat. Nec video quid impedire poſſit, quo minùs Problema hoc eodem modo ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum aliquem Geometricum cadunt, extendatur.

Et quidem quod ad ultimam ſummam attinet, quæ pro libitu ſumpta eſt ad implendum dimenſionum numerum alterius ſummæ, quando in illa quædam dimenſiones deſunt, quemadmodum paulò ante ſumpſimus $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, operæ pretium eſt ut advertamus, ſigna + & — talia ibi ſupponi poſſe, qualia quis voluerit, nec propterea lineam v, ſeu A P diverſam inveniri, ut facilè experienti conſtabit. Si enim demonſtrandis Theorematis omnibus, quorum hîc mentionem aliquam facio, immorarer, conſcribendus mihi eſſet liber multò major, quàm quidem mihi eſſet ani-

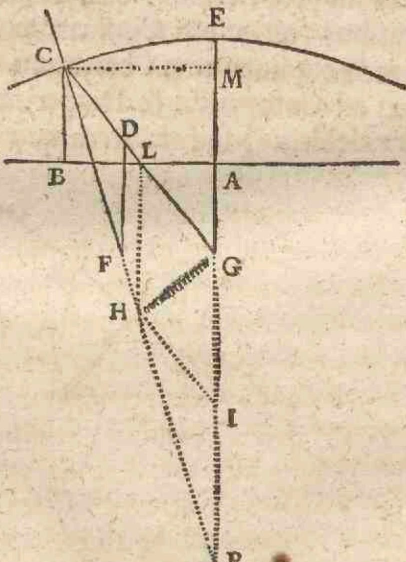
mus.

mus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una ſola naſcantur plures aliæ, (cujus hîc exempla vidiſtis,) infinitis aliis Problematis inſervire poſſit, neque una ex minimis, methodi, quâ utor, exiſtat.

Non adjungo conſtructiones, ſecundùm quas contingentes, ſive perpendiculares quæſitæ, poſt calculum, quem jam explicavi, ſunt ducendæ: quandoquidem illæ ſemper facilè inveniri poſſunt; etiamſi aliquâ ſæpe induſtriâ, ut breves atque ſimplices reddantur, opùs ſit.

Vt, exempli causâ, ſi C E eſt prima Conchoïdes Veterum, cujus G ſit Polus, & A B regula, cujus ope ducta N

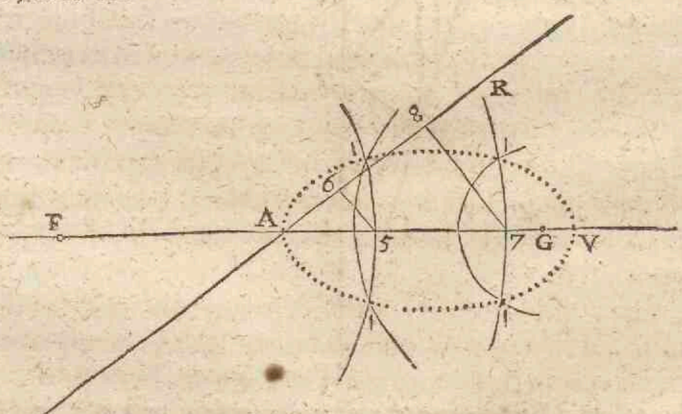
Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoïde.



eſt; adeò ut lineæ omnes rectæ, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E, & rectam A B continentur, (ut E A & C L) ſibi invicem ſint æquales: Velimuſque rectam lineam ducere C F, quæ ſecet hanc Conchoïdem in dato puncto C ad angulos rectos: Quærendo juxta methodum, à nobis expoſitam, in linea A B punctum, per quod dicta linea C F tranſire debet, incidemus in calculum, nullo præcedentium breviorem; & nihilominus conſtructio inde elicienda valde brevis eſt. Oportet enim duntaxat in linea recta C G ſumere C D æqualem C B, quæ perpendiculariter cadit in B A, & deinde ex puncto D ducere D F, parallelam G A, ac æqualem L G: quâ ratione habebitur punctum F, per quod quæſita linea C P eſt ducenda.

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium Opticæ inſervientium.

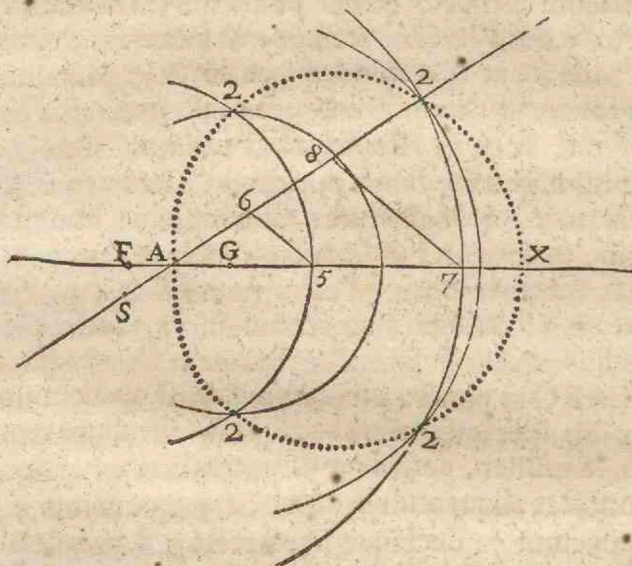
Cæterùm ut ſciatis, conſiderationem curvarum linearum, hîc propoſitarum, non carere uſu, & quòd illæ diverſas habeant proprietates, quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus ſectionum Conicarum, libet præterea hîc ſubjicere explicationem certarum quarundam Ovalium, quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utiliſſimas eſſe videbitis. Modus autem quo illas deſcribo, talis eſt.



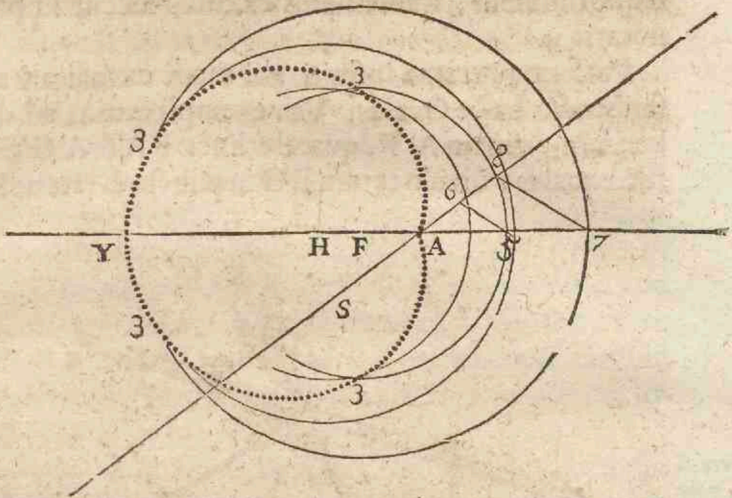
Primùm ductis rectis lineis F A & AR, ſeſe interſecanſecantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, ſumo ad arbitrium in una ex ipſis punctum F, hoc eſt, propiùs aut remotiùs ab A puncto, prout Ovales haſce majores aut minores deſcribere animus eſt; atque ex puncto F, ceu centro, deſcribo circulum, tranſeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, ſecantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor ſit quàm A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones menſurat, ſi eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque ſumo punctum G in linea F A, ex eadem parte, quâ punctum 5 eſt ſumptum, hoc eſt, faciendo, ut lineæ A F & G A eam inter ſe rationem habeant, quam volumus. Poſtea poſitâ R A æquali G A in linea A 6, deſcribo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis ſit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ F G in puncto 1 ſecantem; quod quidem unum eſt ex illis, per quæ prima quæſitarum Ovalium tranſire debet. Similiter, deſcribo rurſus circulum ex centro F, qui tranſeat aliquantulum ultra citrave punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallelâ ipſi 5, 6, ex centro G deſcribo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 tranſit, ſecantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum eſt ejuſdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo ſemper alias atque alias lineas ipſi 7, 8 parallelas, nec non alios alioſque circulos ex centris F & G.

Quod ad ſecundæ Ovalis deſcriptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco A R ſumere oporteat A S ipſi A G æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G deſcripti; ad ſecandum eum, qui ex centro F per

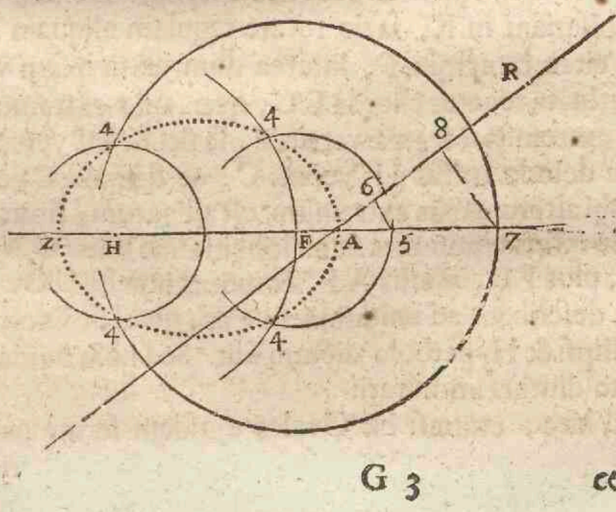
punctum 5 deſcriptus eſt, æqualis ſumendus ſit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, ſi illum, qui per punctum 7 tranſit, ſecare debeat. Atque ita de aliis. Quâ
o o quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 ſeſe interſecabunt, per quæ ſecunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porrò quod ſpectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G ſumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F eſt ſumptum. Vbi ampliùs obſervandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipſam A F, quæ quoque nulla eſſe poteſt, ita ut punctum F idem ſit, quod punctum A, in deſcriptione omnium harum Ovalium. Deinde poſtquam lineæ AR & AS ſic ipſi AH ſunt æquales factæ, ad deſcribendam tertiam Ovalem A 3 Y, deſcribo circulum ex centro H, cujus radius ſit æqualis lineæ S 6, circulum ex centro F, deſcriptum per punctum 5, ſecantem

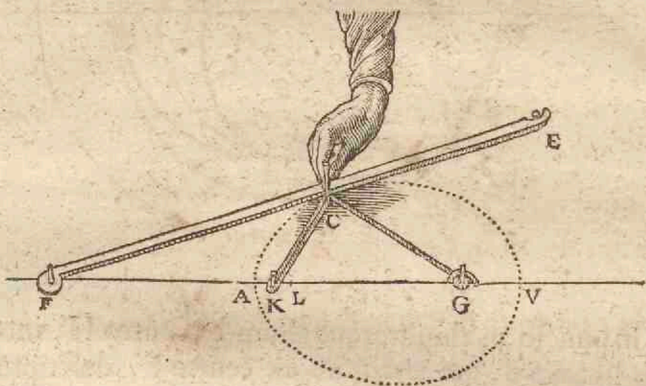


tem in puncto 3; similiterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, descriptum per punctum 7, secet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, describo circulos ex



centro H, quorum radii ſint æquales lineis R 6, & R 8, atque ſimilibus, qui reliquos circulos ſecent in punctis notatis 4.

Poſſent præterea infiniti alii modi excogitari ad deſcribendas haſce Ovales. Vt, exempli causâ, ad deſcribendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales: divido totam F G in puncto L; ita ut F L ſit



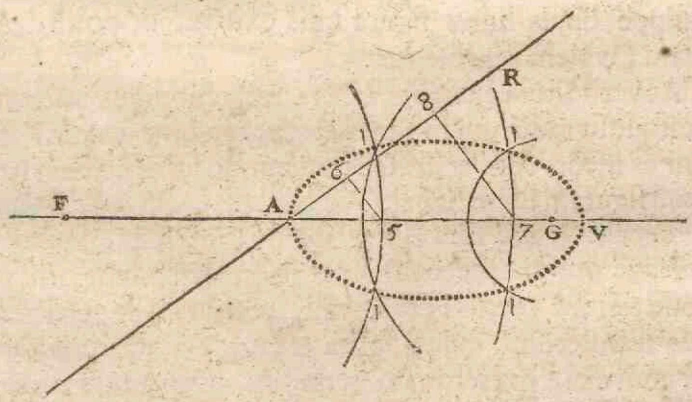
ad L G, ſicut A 5 ad A 6. hoc eſt, ut ipſæ inter ſe rationem ſervent, quæ refractiones metitur. Deinde ſectâ A L bifariam in K, facio rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipſam velut agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, ſe flectit à C versùs K, atque deinde rurſus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum eſt alligatum; ſic ut longitudo ipſius compoſita ſit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc deſcribat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipſi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

Ad hæc, etiamſi hæ Ovales ejuſdem fermè naturæ viden-

videntur, ipſæ nihilominus quatuor diverſorum ſunt generum, quorum unumquodque ſub ſe infinita alia genera continet, & unumquodque rurſus tot diverſas ſpecies, quot facit Ellipſium aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, ſimileſve, conſiſtit, diverſa eſt, genus quoque ſubalternum harum Ovalium fit diverſum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovales quoque cujuſque ſubalterni generis mutantur ſpecie. Prout autem A G vel A H major vel minor eſt, ipſæ magnitudine quoque differunt. Quòd ſi verò lineæ A 5 & A 6 æquales ſumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, deſcribentur tantùm lineæ rectæ; ſed loco ſecundi, omnes Hyperbolæ; & loco ultimi, omnes Ellipſes.

Proprietates harum Ovalium concernentes reflexiones & refractiones.

Vlteriùs in qualibet harum Ovalium conſiderandæ ſunt etiam duæ partes, quæ diverſas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ eſt versùs A, facit ut radii, qui in aëre exiſtentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versùs G punctum, poſtquam in convexam vitri ſuperficiem inciderunt, qualis hîc eſt 1 A 1. Et in quo vitro refractiones ſic fiunt, ut juxta ea,



quæ

quæ in Dioptricis dicta ſunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut ſimiles, quarum ope hæc Ovalis deſcripta eſt, obtinetur, menſurari poſſint.

Verùm pars illa, quæ eſt versùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes versùs F reflectantur, ſi in ſuperficiem concavam ſpeculi inciderint, cujus figu-
P ra ſit 1 V 1; & quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.

In ſecunda Ovali, pars 2 A 2 ſimiliter reflexionibus inſervit, quarum anguli inæquales ſupponuntur. Si enim illa ſuperficiem ſpeculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, ſic reflecterentur, perinde ac ſi poſt reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum eſt, quòd, ſi linea A G multò major ſit aſſumpta quàm A F, ſpeculum hoc in medio versùs A concavum ſit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis exiſtit, ut potiùs cor quàm Ovalem repræſentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre ſunt, ac tendunt versùs F, ſe omnes incurvent versùs G, tranſeundo ſuperficiem vitri, quod figuram illam habet.

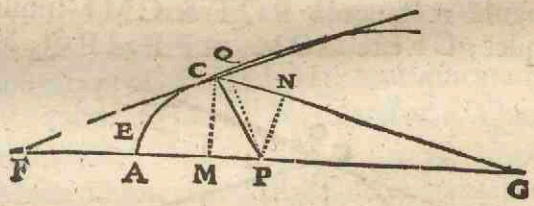
Tertia Ovalis tota refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre exiſtentes versùs F tendunt, in vitro ſe omnes versùs H recipiant, poſtquam ſuperficiem
PP ejus tranſiërunt, cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululùm concava

cava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis. Differentia autem, quæ est inter duas ejus partes, in eo consistit, quòd punctum F uni ex illis propius sit, quàm punctum H; quodque ab altera remotius quàm idem punctum H existat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inservit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in superficiem concavam alicujus speculi ejusdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujusque figura est A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G seu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipsibus & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata sunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum solummodo conversæ aut contrariæ sint, ex iis facilè deduci poterunt.



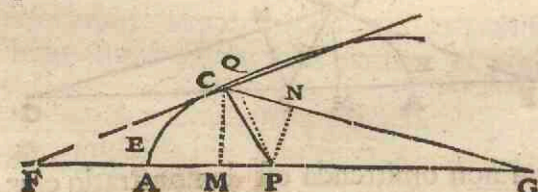
Verùm non omittenda est demonstratio ejus, quod dixi. In quem finem sumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium: deinde ducamus lineam rectam CP, quæ secet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile est, per Problema præcedens. Etenim, sumendo b pro AG, c pro AF, $c + z$ pro FC; supponendoque, quòd ratio, quæ est inter d & e, (quam hîc *Demonstratio harum proprietatum.*

sem-

ſemper pro ea ſumam, quæ propoſiti vitri refractiones metitur) illam quoque, quæ eſt inter lineas A 5, & A 6, ſimilesve, quibus in Ovalis hujus deſcriptione uſi ſumus, deſignet: ipſi GC attribuit $b - \frac{ez}{d}$, inveniturque lineam A P eſſe $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$. ut ſupra eſt oſtenſum.

Porrò ex puncto P deductâ ſuper rectam F C perpendiculari P Q, nec non P N perpendiculari ſuper G C, conſiderandúm eſt, num P Q ſit ad P N, ſicut *d* ad *e*, hoc eſt, ut lineæ, quæ vitri convexi A C refractiones metiuntur: hoc enim ſi fiat, radius, qui à puncto F venit ad punctum C, ita ſe ibidem incurvare debebit, intrando hocce vitrum, ut inde versùs G tendat. Quemadmodum ex iis, quæ in Dioptrica tradidi, manifeſtiſſimum eſt. Atque eapropter per calculum exploremus, num verum ſit, P Q eſſe ad P N. ſicut *d* ad *e*. Vt ſequitur.

Triangula rectangula P Q F & C M F ſimilia ſunt, unde liquet, C F eſſe ad C M, ut F P ad P Q; ac proin-



de F P multiplicatam per C M atque diviſam per C F, eſſe æqualem ipſi P Q. Eodem modo, triangula rectangula P N G & C M G ſimilia ſunt; unde ſequitur, G P multiplicatam per C M & diviſam per C G, eſſe æqualem ipſi P N. Deinde, quia multiplicationes vel diviſiones duarum quantitatum per eandem rationem,

nem, quæ inter ipsas est, non mutant: si F P multiplicata per C M, & divisa per C F, est ad G P, etiam multiplicatam per C M, & divisam per C G, sicut d ad e: dividendo utramque summam per C M, & deinde multiplicando utramque per C F, ac denuo per C G: relinquitur, F P multiplicatam per C G, in eadem ratione esse ad G P multiplicatam per C F, ut est d ad e. At verò per constructionem F P est $c\frac{+bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, sive F P ∞ $\frac{bcdd+ccdd+bddz+cddz}{bde+cdd+ddz-eez}$, & C G est $b-\frac{ez}{d}$

Vnde si multiplicemus F P per C G, proveniet

$$\frac{bbcdd+bccdd+bbddz+bcddz-bcdez-ccdez-bdezz-cdezz}{bde+cdd+ddz-eez}$$

Similiter G P est $b\frac{-bcdd+bcde-bddz-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, sive G P ∞ $\frac{bbde+bcde-beez-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, & C F est $c+z$.

Ideo si multiplicemus G P per C F, exurget

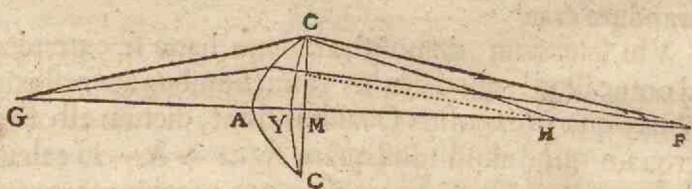
$$\frac{bbcde+bccde-bceez-cceez+bbdez+bcdez-beezz-ceezz}{bde+cdd+ddz-eez}$$

Et quia prima harum summarum divisa per d, eadem est quæ, secunda divisa per e: manifestum est, quòd F P multiplicata per C G sit ad G P, multiplicatam per C F, hoc est, quòd P Q sit ad P N, sicut d ad e. Quod demonstrandum erat.

Vbi sciendum, demonstrationem hanc se extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expositis Ovalibus fiunt, dictum est. Præterquam quòd aliud nihil quàm signa + & — in calculo sit mutandum. Quæ ideo unusquisque proprio marte examinare poterit, ita ut huic rei diutiùs immorari non sit opùs.

Sed oportet, ut nunc id præstem, quod in Dioptrica omisi, cùm ibi ostensum est, plurium diversarum figurarum vitra haberi posse, quæ singula faciunt, ut radii,

dii, ab eodem objecti puncto venientes, coëant rursus omnes in aliud punctum, postquam per illa transiêrunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa sunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter sunt convexa; cum hæc posteriora contra pro perspicillis sint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantùm illa, quæ ad praxin existimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere possit. Adeoque ne quid, quod ad ejus scientiæ Theoriam spectat, desiderari queat, explicanda hîc mihi superest vitrorum figura, quæ unam ex superficiebus suis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli sunt, colligantur rursus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præstant, & æqualiter ab utraque parte sunt convexa; aut in quibus convexitas unius superficiei datam habet rationem ad convexitatem alterius.



Quomodo vitrum fieri possit, cujus una superficies tam convexa aut

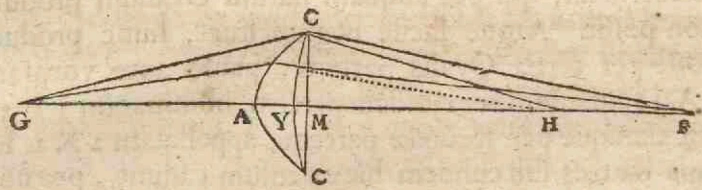
Ponamus igitur pro primo casu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipsi G A sunt paralleli, colligi debeant in puncto F, postquam vitrum transierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus superficiei interioris existente, extremitas

mitas ſit in puncto C; ita ut chorda CMC, & ſagitta YM, arcus CYC datæ ſint. Quæſtio eò recidit, ut primò conſiderandum ſit, cujuſnam ex Ovalibus jam explicatis ſuperficies vitri YC figuram requirat, ad faciendum, ut radii omnes, qui intra illud exiſtentes versùs idem punctum, ut H, quod nondum eſt cognitum, tendunt, egrediendo ſe versùs aliud punctum recipiant, ut F. Quippe nullus effectus eſt, rationem, quâ hi radii reflexione aut refractione detorquentur, concernens, qui per aliquam harum Ovalium produci non poſſit. Atque facilè cognoſcitur, hunc produci poſſe per tertiæ Ovalis partem, paulò ante vocatam 3 A 3; aut etiam per ejuſdem partem, nominatam 3 Y 3; aut denique per ſecundæ partem, appellatam 2 X 2. Et quia hæ tres ſub eundem hîc calculum cadunt, pro una pariter atque pro altera punctum Y ſumendum erit pro ipſarum vertice; C autem pro uno ex punctis, quæ in ipſarum ſunt circumferentia; & F pro uno ex focis; poſt quæ tantùm punctum H quærendum reſtat, quod alter focus eſſe debet. Illud autem invenitur, conſiderando, quòd differentia, quæ eſt inter lineas FY & FC, ſe habere debeat ad differentiam, quæ eſt inter lineas HY & HC, ſicut *d* eſt ad *e*, hoc eſt, ut major linearum, quæ vitri propoſiti refractiones metiuntur, ad minorem. Quemadmodum ex harum Ovalium deſcriptione perſpicere licet. Et quoniam lineæ FY & FC datæ ſunt, datur quoque ipſarum differentia, & per conſequens etiam illa, quæ eſt inter lineas HY & HC: quandoquidem ratio, quæ inter duas haſce differentias conſiſtit data eſt. Ampliùs, quia YM eſt data, datur quoque differentia, quæ eſt inter MH & HC; & tandem, quia CM eſt data, ſupereſt tantùm inveniendum MH, latus trianguli rectanguli CMH, cujus latus

concava ſit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rurſus in altero dato puncto.

tus C M datum eſt, quemadmodum etiam differentia, quæ eſt inter C H baſin, & M H latus quæſitum. Vnde illud facilè inveniri poteſt. Si enim ſumatur k pro exceſſu, quo C H excedit M H, & n pro longitudine lineæ C M, habebitur $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pro M H.

Poſtquam igitur ſic inventum eſt punctum H, ſi illud longiùs reperiatur diſſitum à puncto Y, quàm inde diſtat punctum F, linea C Y debet eſſe prima pars Ova-



lis tertii generis, quæ ante nominata fuit 3 A 3: ſed ſi H Y minor eſt quam F Y, aut in tantum H F ſuperat, ut differentia ipſarum, ratione totius F Y, major ſit, quàm eſt e, minor linearum, quæ refractiones metiuntur, comparata cum d majore, hoc eſt, ut faciendo H F ∞ c, & H Y ∞ $c + h$, dh ſit major quàm $2ce + eh$, & tunc C Y debet eſſe ſecunda pars ejuſdem tertiæ Ovalis, quæ paulò antè vocata fuit 3 Y 3; ſed erit ſecunda pars Ovalis ſecundi generis, quæ ſupra nominata fuit 2 X 2, ſi dh æqualis vel minor eſt quàm $2ce + eh$. Et denique ſi punctum H illud ipſum eſt, quod punctum F, quod quidem non contingit, niſi cùm F Y & F C ſunt æquales, tum dicta linea Y C erit Circulus.

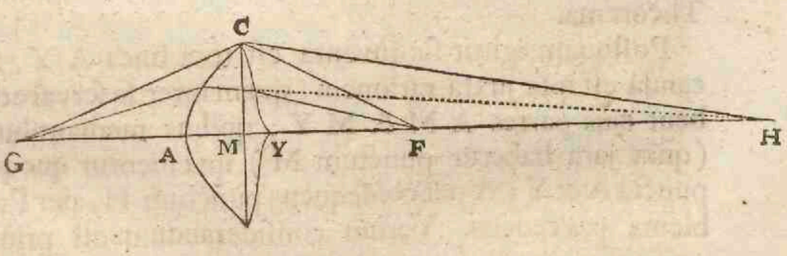
Poſt hæc quærenda eſt C A C altera hujus vitri ſuperficies, quæ debet eſſe Ellipſis, cujus focus H, ſi radii incidentes paralleli ſupponantur. Quo etiam caſu facile eſt illam invenire. Sed ſi ſupponantur à puncto G veni-

G venire, tum quidem superficies illa debet esse prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci sint G & H, quæque transeat per punctum C. unde porro invenitur punctum A, vertex ipsius Ovalis; considerando scilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliquâ, quæ sit ad illam, quâ H A superat H C, sicut d ad e. Etenim, sumptâ k pro differentia, quæ est inter C H & H M; si pro A M supponatur x, habebitur $x - k$, pro differentia, quæ est inter A H & C H. Deinde si sumatur g pro differentia, quæ est inter G C & G M, quæ datæ sunt, habebitur $g + x$ pro illa, quæ est inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima $g + x$ est ad alteram $x - k$, sicut d ad e, habebitur $ge + ex \propto dx - dk$, hoc est, $\frac{ge + dk}{d - e}$, pro linea x vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

Ponamus jam pro casu altero, quòd tantùm dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ est inter lineas A M & M Y, & quòd invenienda sit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coëant rursus in punctum F.

Hîc autem rursus duabus Ovalibus uti possumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera

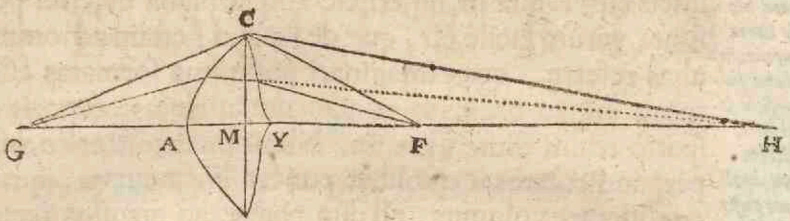
Quomodo aliud fieri possit, quod idem præstet, cujusque convexitas unius superficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius.



autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, supponendo primùm punctum H, quod utrique est com-

commune, esse cognitum, quæro A M per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum sumendo k pro differentia, quæ est inter C H & H M, & g pro eâ, quæ est inter G C & G M. Vnde cùm A C est prima pars Ovalis primi generis, invenio $\frac{ge + dk}{d - e}$ pro A M. Deinde quæro etiam M Y per tria puncta F, C, & H, ita ut C Y sit prima pars Ovalis tertii generis; sumendoque y pro M Y, & f pro differentia, quæ est inter C F & F M, habebo $f + y$ pro ea, quæ est inter C F & F T: hinc cum habeam k pro illa, quæ est inter C H & H M, habebo $k + y$ pro ea, quæ est inter C H & H Y, quam scio esse debere ad $f + y$, sicut e ad d, propter Ovalem tertii generis. unde invenio y seu M Y esse $\frac{fe - dk}{d - e}$; ita ut addendo simul quantitates inventas pro A M & M Y, habeam $\frac{ge + fe}{d - e}$ pro tota A Y. E quibus manifestum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H suppositum fuerit, dicta linea A Y semper composita sit ex quantitate aliqua, quæ sit ad differentiam, quâ G C & C F simul sumptæ superant G F, ut est e minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propositi inserviunt, ad $d - e$, differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem satis scitum est Theorema.

Postquam igitur sic inventa est tota linea A Y, secanda est ipsa juxta rationem, quam inter se servare debent ejus partes A M & M Y; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per consequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm considerandum est priùs, num linea A M sic inventa, sit major quàm $\frac{ge}{d - e}$, an minor, an verò ipsi æqualis. Nam si major fuerit, cognoscitur



ſcitur inde, quòd curva A C eſſe debeat prima pars Ovalis primi generis, & C Y prima tertiæ, quemadmodum hîc ſuppoſitæ fuêre: cum aliàs, ſi minor fuerit, id indicet, quòd C Y debeat eſſe prima pars Ovalis primi generis, & A C prima pars tertiæ. Et denique ſi A M æqualis fuerit ipſi $\frac{ge}{d-e}$, quòd duæ hæ curvæ A C & C Y debeant eſſe duæ Hyperbolæ.

Poſſent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios caſus, quibus quidem deducendis ſuperſedeo, quòd nullum eorum uſum in Dioptricis deprehenderim.

Poſſem quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri ſuperficiebus data eſt, modò illa ſit aut plana, aut à ſectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus ſuperficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes tranſmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius eſt, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior eſt, quoniam via illuc perveniendi jam aperta eſt. Verùm malo alios id quærere, ut, ſi inter inveſtigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò pluris inventionem rerum hîc demonſtratarum æſtiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus ſum tantùm de lineis *Quomodo id omne,* *quod hîc de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari possit ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva.*

lineis curvis quæ in superficie aliqua plana describi possunt; verùm facile est, quæ de iis dixi, etiam ad omnes alias referre, quas imaginari possumus formatas esse, motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum. Nimirum demittendo duas perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam considerare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos se invicem secantia, unam ad unum, & alteram ad alterum: quippe perpendicularium harum extremitates singulæ duas alias curvas lineas describunt, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia modo superiùs explicato determinari ac referri possunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano est communis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimensiones habentis, omnino sint determinata. Ita etiam si rectam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato puncto ad angulos rectos secet, opùs tantùm est duas alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum singulæ singulas curvas ibidem secent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à dato puncto ad utrumque planum sunt deductæ. Etenim postquam duo alia plana, unum super unam, & alterum super alteram, erecta sunt, quæ ad utrumque planum, in quibus lineæ illæ sunt, recta existant, erit horum duorum planorum communis intersectio linea recta quæsita. Atque ita arbitror me omnia tradidisse Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem sunt necessaria.

GEO-

GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

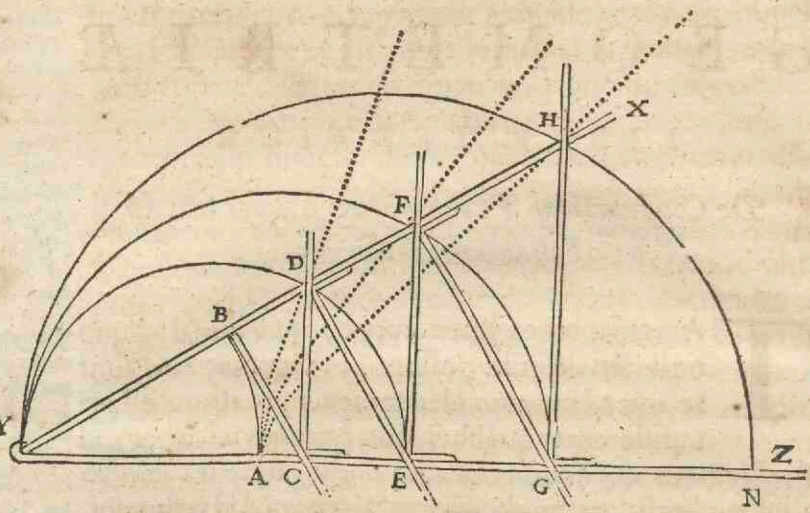
De Constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

Quaenam curvae lineae adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis.

Tametsi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sunt recipiendæ, non ideo tamen permissum est uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujusque constructionem; sed cura semper adhibenda est, ut simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, eligamus. Vbi quidem observandum est, per simplicissimas non solùm intelligendas esse illas, quæ omnium facillimè describi possunt; neque quæ propositi Problematis constructionem vel demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim, quæ simplicissimi sunt generis, quod ad quantitatem quæsitam determinandam inservire queat.

Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium.

Quemadmodum, exempli caussâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quàm si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum X Y Z (supra explicatum) describuntur. Etenim si inter Y A & Y E duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantùm circulum describere, cujus diameter sit Y E, qui curvam A D secet in puncto D, eritque Y D una ex quæsitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonstratio ex sola instrumenti hujus ad lineam Y D adplicatione perspicua est.



Nam ſicut Y A ſeu Y B, quæ ipſi eſt æqualis, ſe habet ad Y C; ſic Y C ſe habet ad Y D; & Y D ad Y E.

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter Y A & Y G; aut ad inveniendas 6 inter Y A & Y N, deſcribendus eſt tantùm circulus Y F G, qui ſecans curvam A F in puncto F determinat lineam rectam Y F, quæ una eſt ex quatuor quæſitis proportionalibus; aut circulus I H N, qui ſecans curvam A H in puncto H determinat ipſam Y H, quæ una eſt ex ſex quæſitis proportionalibus. Et ſic de cæteris.

Verùm quia linea curva A D ſecundi eſt generis, & duæ mediæ proportionales inveniri poſſunt per ſectiones Conicas, quæ ſunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compoſitorum atque A F & A H: peccatum eſſet in Geometria, ſi illæ hîc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum eſſet, ſi quis inutiliter in con-

conſtruendo Problemate aliquo per genus linearum ſimplicius, quàm natura ejus permittit, deſudaret.

De natura Æquationum.

Quocirca ut hîc adducere poſſim regulas quaſdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opùs eſt, ut in genere aliquid dicam de natura Æquationum; hoc eſt, de ſummis, quæ ex pluribus terminis ſunt compoſitæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis ſunt æquales, vel potiùs, qui omnes ſimul conſiderati nihilo ſunt æquales. Quippe ſæpe præſtat illos hâc ratione conſiderare.

Quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione.

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in qualibet Æquatione, tot diverſas radices ſeu diverſos valores habere poſſit, quot ipſa habet dimenſiones. Nam ſi, exempli gratiâ, x ſupponatur æqualis 2, ſeu $x - 2$ æqualis nihilo; & rurſus $x \infty 3$, ſeu $x - 3 \infty 0$; & multiplicetur $x - 2 \infty 0$ per $x - 3 \infty 0$: habebitur $xx - 5x + 6 \infty 0$, ſeu $xx \infty 5x - 6$. quæ Æquatio eſt, in qua quantitas x valet 2, & præterea etiam 3. Quòd ſi rurſus fiat $x \infty 4$, atque $x - 4 \infty 0$ multiplicetur per $xx - 5x + 6 \infty 0$, producetur $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$. quæ alia eſt Æquatio, in qua x habens tres dimenſiones, tres quoque habet valores, qui ſunt 2, 3, & 4.

A *Quænam ſint falſæ radices.*

Verùm ſæpe accidit, quòd quædam harum radicum ſint falſæ, ſeu minores quàm nihil: ut, ſi ſupponatur x deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, utputa 5, ita ut habeatur $x + 5 \infty 0$, quæ multiplicata per $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, faciat $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, pro Æquatione, in qua quatuor ſunt radices, nimirum tres veræ, quæ ſunt 2, 3, & 4, atque una falſa, quæ eſt 5.

B *Quomodo diminui poſſit dimenſionum numerus ali-*

Vnde liquidò conſtat, quòd Æquationis ſumma, quæ plures radices continet, dividi ſemper poſſit per binomium, quod compoſitum eſt ex quantitate inco-

cujus Æquationis, quando cognoscitur aliqua ex ejus radicibus.

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem ſit, aut plus valore alicujus ex falſis. cujus diviſionis ope dimenſiones ejus in tantum diminuuntur.

C *Quâ ratione indagari queat, num data quantitas ſit valor alicujus radicis.*

Et viciſſim ſi Æquationis ſumma dividi non poſſit per binomium, conſtans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio eſt, quantitatem hanc non eſſe valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, dividi quidem poteſt per $x - 2$, per $x - 3$, per $x - 4$, & per $x + 5$; ſed nullo modo per x + vel — quacunque alia quantitate. Id quod oſtendit, ipſam non poſſe admittere alias radices præter haſce quatuor 2, 3, 4, & 5.

D *Quot haberi poſſint veræ radices in qualibet Æquatione.*

Ex quibus etiam cognoſcitur, quot veræ & quot falſæ radices in unaquaque Æquatione haberi poſſint. Nimirum, tot in ea veras haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum + & —; & tot falſas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequuntur. Vt in ultima, quia poſt $+ x^4$ habetur $- 4x^3$, quæ eſt una variatio ſigni + in —, & poſt $- 4x^3$ habetur $- 19xx$, quæ ſunt duo ſigna ſimilia; & poſt $- 19xx$ habetur $+ 106x$; & poſt $+ 106x$ habetur $- 120$, quæ ſunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoſcitur quòd illa tres admittat veras radices, & unam falſam, propter duo ſigua — terminorum $4x^3$ & $19xx$, quæ ſe invicem ſequuntur.

E *Quomodo faciendum ſit, ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falſæ.*

Porrò facile eſt efficere, ut in una eademque Æquatione radices omnes, quæ falſæ erant, evadant veræ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ veræ erant, falſæ fiant. Nimirum mutando ſigna omnia + & —, quæ in 2^{do}, 4^{to}, 6^{to}, aliiſve locis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis 1^{mi}, 3^{tii}, 5^{ti}, ſimiliumque locorum,

rum, qui per impares numeros deſignantur, non mutatis.

Vt ſi loco

$$+x^4-4x^3-19xx+106x-120 \infty 0,$$

ſcribatur

$$+x^4+4x^3-19xx-106x-120 \infty 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm eſt vera radix, quæ eſt 5; & tres falſæ, quæ ſunt 2, 3, & 4.

Quòd ſi verò non cognito radicum alicujus Æquationis valore, ipſas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantùm in locum incogniti termini ſubſtituere alium, qui eâdem hâc quantitate major ſit vel minor, eumque ubique primi loco ſubrogare. *Quomodo augeri vel diminui poſſint Æquationis radices, ipſis non cognitis.*

Vt ſi augere velimus 3^{nario} radicem hujus Æquationis $x^4+4x^3-19xx-106x-120 \infty 0$, ſumenda eſt y loco x, & cogitandum, quantitatem hanc y majorem eſſe quàm x, exceſſu 3, ita ut $y-3$ ipſi x ſit æqualis; loco autem xx ſcribendum eſt quadratum ex $y-3$, quod eſt $yy-6y+9$; & loco x^3 ſumendus eſt ejus cubus, qui eſt $y^3-9yy+27y-27$; & denique loco x^4 ponendum eſt ejus quadrato-quadratum, quod eſt $y^4-12y^3+54yy-108y+81$. Vnde ſi ſcribamus ſummam præcedentem, ſubſtituendo ubique y pro x, invenietur

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4-12y^3 & +54yy & -108y & + & 81 \\
+4y^3 & -36yy & +108y & - & 108 \\
 & -19yy & +114y & - & 171 \\
 & & -106y & + & 318 \\
 & & & - & 120 \\
\hline
\end{array}$$

$y^4-8y^3-1yy+8y * \infty 0$, vel $y^3-8yy-1y+8 \infty 0$: ubi vera radix, quæ erat 5, jam eſt 8, propter ternarium ipſi additum.

Sin

Sin verò contra ternario radicem ejusdem Æquationis diminuere velimus, facienda est $y + 3 \infty x$, & $yy + 6y + 9 \infty xx$. Atque ita porrò. Ita ut loco

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0.$$

scribatur

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\
 & - 19yy & - 114y & - 171 \\
 & & - 106y & - 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
y^4 + 16y^3 & + 71yy & - 4y & - 420 \infty 0.
\end{array}$$

Quòd, augendo veras radices, falsæ diminuantur, & contra.

Vbi notandum est, dum veræ radices alicujus Æquationis augentur, falsas eâdem quantitate diminui; & contra, dum veræ diminuuntur, falsas augeri: Et quidem tum has tum illas prorsus evanescere, si quantitate ipsis æquali diminuantur; si verò quantitate ipsas superante, tum ex veris falsas evadere, & ex falsis veras. Vt hîc, augendo ternario veram radicem, quæ erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falsis; ita ut illa, quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, fit cyphra seu 0; & quæ erat 2, facta sit vera, sitque 1 (cum $-2 + 3$ faciat $+1$.) Adeò ut in hac Æquatione $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$, non plures quàm tres sint radices, inter quas duæ veræ existunt, utpote 1 & 8; & una falsa, quæ etiam est 1: Et in hac altera $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0$, una tantùm vera, quæ est 2, (quia $+5 - 3$ facit $+2$;) & tres falsæ, quæ sunt 5, 6, & 7.

Quâ ratione secundus terminus Æquationis tolli possit.

Iam verò beneficio modi hujus mutandi valorem radicum, ipsis non cognitis, duo fieri possunt, quæ in sequentibus usum aliquem habebunt. Vnum est, quòd semper secundus terminus Æquationis, quam examinamus, tolli possit: Nimirum, diminuendo veras radices,

dices, quantitate cognitâ ſecundi termini diviſâ per numerum dimenſionum primi, ſi unus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno +, & alter ſigno —; aut augendo illas eâdem quantitate, ſi uterque eodem ſigno fuerit adfectus.

Vt ad tollendum ſecundum terminum ultimæ Æquationis

$$y^4+16y^3+71yy-4y-420 \propto 0,$$

diviſis 16 per 4, propter 4[or] dimenſiones termini y^4, proveniet rurſus 4: hinc facio $z-4 \propto y$, & ſcribo,

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 & -16z^3 & +96zz & -256z & +256 \\
 & +16z^3 & -192zz & +768z & -1024 \\
 & & +71zz & -568z & +1136 \\
 & & & -4z & +16 \\
 & & & & -420 \\
\hline
z^4 & * & -25zz & -60z & -36 \propto 0.
\end{array}$$

ubi vera radix, quæ erat 2, eſt 6, cum ipſa quaternario ſit aucta; & falſæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo ſunt 1, 2, & 3, cum illæ quaternario ſingulæ ſint diminutæ.

Eodem modo ſi tollere velimus ſecundum terminum Æquationis

$$x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx-2a^3x+a^4 \propto 0:$$

quoniam diviſis $2a$ per 4, quotiens fit $\frac{1}{2}a$, faciendum eſt $z+\frac{1}{2}a \propto x$, ac ſcribendum

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 & +2az^3 & +\frac{3}{2}aazz & +\frac{1}{2}a^3z & +\frac{1}{16}a^4 \\
 & -2az^3 & -3aazz & -\frac{3}{2}a^3z & -\frac{1}{4}a^4 \\
 & & +2aazz & +2a^3z & +\frac{1}{2}a^4 \\
 & & -cczz & -accz & -\frac{1}{4}aacc \\
 & & & -2a^3z & -a^4 \\
 & & & & +a^4 \\
\hline
z^4 & * & +\frac{1}{2}aazz & -a^3z & +\frac{5}{16}a^4 \propto 0: \\
 & & -cc & -acc & -\frac{1}{4}aacc
\end{array}$$

ubi poſtquam innotuit valor ipſius z, addendo ipſi $\frac{1}{2}a$, habebitur valor radicis x.

Quo pacto fiat ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falſæ.

Alterum, quod hîc poſtea uſum aliquem habebit, eſt, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falſis, radices omnes veræ ſemper fieri poſſint, ita ut non habeantur duo ſigna $+$, aut duo ſigna $-$, quæ ſe invicem ſequantur; & inſuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato ſemiſſis ſecundi major ſit. Nam licèt id fiat, etiamſi falſæ radices incognitæ ſint; tamen facile eſt de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam aſſumere, quæ ipſas in tantum vel plus ſuperet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H. Vt ſi habeatur

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0:$$

faciendo $y - 6n \infty x$, invenietur

$$y^6 \left.\begin{array}{r} -36n \\ +n \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{r} +540nn \\ -30nn \\ -6nn \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{r} -4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{r} +19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{r} -46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\right\} y \begin{array}{r} +46656n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^5 \\ -7776n^5 \\ -7776n^5 \\ -7776n^6. \end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4yy - 27216n^5y * \infty 0.$$

Vbi manifeſtum eſt, quòd $504nn$ (quantitas cognita tertii termini) major ſit quadrato à $\frac{35}{2}n$ (ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini.) Neque ullus alius eſt caſus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ ſunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hîc nullus reperitur, ſi id quidem non deſideretur, augendus eſt adhuc aliquantillo valor radicum, quod ſanè tam parum eſſe non poteſt, quin id ad effectum hunc ſit ſatis.

Quomodo faciendum ſit, ut loca omnia.

Eodem modo ſi augere velimus dimenſionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia terminominorum ejus ſint repleta (ut ſi loco $x^5 * * * * - b \infty 0$, deſideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas ſex dimenſiones habeat, & in qua nullus terminus deſit): oportet primùm pro $x^5 * * * * - b \infty 0$, ſcribere $x^6 * * * * - bx \infty 0$; deinde factâ $y - a \infty x$, habebitur

Æquationis ſint completa.

$$\begin{array}{l} y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a^5y + a^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - b\quad + ab \end{array} \infty 0.$$

Vbi liquet, quòd, quantula etiam ſuppoſita fuerit quantitas a, omnia tamen Æquationis loca non deſinant eſſe repleta.

Præterea poſſunt quoque radices alicujus Æquationis, etiamſi ſint incognitæ, multiplicari aut dividi per quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quomodo multiplicari vel dividi poſſint Æquationis radices, ipſis incognitis.

Quod fit, ſupponendo, quantitatem incognitam, multiplicatam, aut diviſam per quantitatem, quæ multiplicare aut dividere debet radices, eſſe æqualem alicui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam ſecundi termini per hanc ipſam, quæ multiplicare aut dividere debet radices; & per ipſius quadratum, quantitatem tertii; & per ipſius cubum, quantitatem quarti, atque ita porrò uſque ad ultimum. Id quod inſervire poteſt, ut ad integros & rationales numeros reducantur fracti, aut ſæpe etiam ſurdi, qui in Æquationum terminis reperiuntur.

Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros.

Vt ſi habeatur

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \tfrac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& ipſius loco alia deſideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur, oportet ſupponere $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam ſecundi termini, quæ quoque eſt $\sqrt{3}$; & per ipſius quadratum, quod eſt 3, quantitatem tertii, quæ eſt $\frac{26}{27}$; & per ipſius cubum, qui eſt $3\sqrt{3}$, quantitatem ultimi, videlicet $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, id quod facit $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$.

Deinde si hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ solis integris numeris exprimantur; supponendo $z \infty 3y$, & multiplicando 3 per
I 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$ per 27, fiet Æquatio
$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0$, Vbi, cum radices sint 2, 3, & 4, sequitur alterius radices esse $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & prioris Æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ.

Quæ operatio servire quoque potest ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Vt si habeatur $x^3 * - bbx + c^3 \infty 0$, & ipsius loco alia sit invenienda Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini, nimirum ea, quæ hîc est bb, sit $3aa$, non autem bb: supponendum est $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, deinde verò scribendum,

K $$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0.$$

Quòd radices, tam veræ quam falsæ, possint esse reales, vel imaginariæ.

Cæterùm radices tam veræ quàm falsæ non semper sunt reales, sed aliquando tantùm imaginariæ: hoc est, semper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum est quantitas, quæ illis, quas imaginamur, respondet. Quemadmodum, tametsi tres imaginari possimus in hac, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$; tamen una tantùm est realis; nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, sicut jam exposui; tamen non nisi imaginariæ fieri possunt.

Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema est planum.

Iam verò, postquam ad inveniendam constructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimensiones: Primùm si quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipsi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi sunt; At si surdos continent, tum quantùm fieri potest, similiter ad ad rationales sunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quàm per diversos alios modos, inventu satis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ absque fractione ultimum terminum dividere possunt, videndum est, num aliqua ex ipsis, juncta cum quantitate incognita per signum $+$ vel $-$, componere possit binomium, quod dividat totam summam; Id enim si contingat, Problema erit Planum, hoc est, construi poterit regulâ atque circino. Etenim L aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; aut Æquatio, per ipsum divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat.

Exempli gratiâ, si habeatur $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$; ultimus terminus, qui est 64, dividi potest absque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi possit per aliquod ex binomiis $yy - 1$ aut $yy + 1$, $yy - 2$ aut $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$, &c. invenitur dividi posse per $yy - 16$, hoc modo:

$$\begin{array}{ccccc}
+\,y^6 & -\,8y^4 & -\,124yy & -\,64 & \infty\, 0 \\
-\,1y^6 & \underline{-\,8y^4} & \underline{-\,4yy} & -\,16 & \\
0 & -\,16y^4 & -\,128yy & & \\
 & 16 & 16 & & \\
\hline
+ & y^4 + & 8yy + & 4 & \infty\, 0.
\end{array}$$

Incipio ab ultimo termino, & divido -64 per -16, quod facit $+4$, quæ repono in quotiente; deinde multiplico $+4$ per $+yy$, & fit $+4yy$, quare in summa dividenda repono $-4yy$. Quippe scribendum semper est signum $+$ vel $-$ planè contrarium illi, quod producitur per multiplicationem. Addendo autem $-124yy$ ad $-4yy$, invenio $-128yy$, quod rursus divido per

Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.

-16, & provenit $+8yy$, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipſum per yy, exſurgit $-8y^4$, addendum termino dividendo, qui etiam eſt $-8y^4$, quæ quidem ſimul conficiunt $-16y^4$, quod per -16 divido, & fit $+1y^4$ pro quotiente, & $-1y^6$ addendum ipſi $+1y^6$, id quod facit o, monſtratque diviſionem eſſe ad finem perductam. Quòd ſi verò quantitas aliqua ſuperfuiſſet, vel aliquis præcedentium terminorum abſque fractione dividi non potuiſſet, manifeſtum fuiſſet, diviſionem nullo modo fieri potuiſſe.

Similiter ſi habeatur $y^6 \begin{array}{l}+aa\\-2cc\end{array} y^4 \begin{array}{l}-a^4\\+c^4\end{array} yy \begin{array}{l}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{array} \infty\ 0.$ ultimus terminus abſque fractione dividi poteſt per a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & ſimiles. Sed duas ſufficit ex illis conſiderare, nempe aa, & $aa+cc$; aliæ enim, cum in quotiente plures paucioreſve dimenſiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini reperiuntur, impedirent, ut diviſio fieri poſſet. Vbi notandum, me ipſius y^6 dimenſiones tantùm pro tribus dimenſionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota ſumma. Examinando igitur binomium $yy-aa-cc$, invenitur, diviſionem per illud fieri poſſe, hoc modo:

$$+y^6 \begin{array}{l}+aa\\-2cc\end{array} y^4 \begin{array}{l}-a^4\\+c^4\end{array} yy \begin{array}{l}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\\\hline -aa-cc\end{array} \infty\ 0,$$

$$\begin{array}{lll} -y^6 & -2aa & -a^4 \\ - & +cc & -aacc \\ \hline 0 & -aa-cc & -aa-cc \end{array}$$

$$+y^4 \begin{array}{l}+2aa\\-cc\end{array} yy \begin{array}{l}+a^4\\+aacc\end{array} \infty\ 0.$$

Id quod monſtrat radicem quæſitam eſſe $aa+cc$. Quemadmodum facilè per multiplicationem probari poteſt.

At

N

Quænam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubicâ.

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema quod ab ea dependet, esse Solidum. Nec minus vitium est, constructionem ejus postea per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad constructionem illorum, in quibus non nisi circulis est opus, sectiones Conicas adhibere: siquidem quicquid ignorantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur.

Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cùm Problema est Planum. Et quænam illa sint, quæ Solida sunt dicenda.

Porrò si habeatur Æquatio, in quâ incognita quantitas quatuor habeat dimensiones: eodem modo, sublatis primùm surdis & fractis numeris; (si qui sunt) videndum est, num inveniri possit binomium, compositum ex incognita quantitate + vel — quantitate aliqua, quæ absque fractione ultimum terminum dividit, quod dividat totam summam. Hoc enim si inveniatur; vel quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; vel saltem post divisionem hanc relinquentur tantùm in Æquatione tres dimensiones, ita ut illa deinde rursus eodem modo sit examinanda. Quòd si verò tale binomium non inveniatur, oportebit augendo aut diminuendo valorem radicis, secundum summæ terminum tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipsam ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Id quod hoc modo fit:

Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam.

loco $+ x^4 * . pxx . qx . r \infty 0$,

scribendum est.

$$+ y^6 . 2py^4 \begin{matrix} +pp \\ .4r \end{matrix} yy - qq \infty 0.$$

Et quod ad signa + & — attinet, quæ omisi, si habeatur $+p$ in Æquatione præcedente, in hac ponendum est $+ 2p$; aut si habeatur $-p$, ponendum est $- 2p$. & contra, si habeatur ibi $+r$, ponendum hîc est $- 4r$; aut si habeatur ibi $-r$, ponendum hîc est $+ 4r$. & sive illic illìc fuerit $+q$, sive $-q$, semper tamen hîc ponendum est $-qq$, & $+pp$. saltem si x^4 & y^6 signis $+$ notatæ supponantur. quippe contrarium fieri deberet, si supponeretur ibi signum $-$.

Exempli causâ, si habeatur $+x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$, scribendum ejus loco est $y^6-8y^4-124yy-64 \infty 0$. Cum enim quantitas, quam nominavi p, sit -4, ponendum est $-8y^4$ pro $2py^4$. & cum illa, quam vocavi r, sit 35, ponendum est $\begin{smallmatrix}+16\\-140\end{smallmatrix}yy$, hoc est, $-124yy$, loco $\begin{smallmatrix}+pp\\-4r\end{smallmatrix}yy$. Et denique cum q sit 8, ponendum est -64, pro $-qq$.

Eodem modo pro $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$, scribendum est $+y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$. Nam 34 est duplum ipsius 17, & 313 est hujus quadratum junctum quadruplo ipsius 6, & 400 est quadratum ipsius 20.

Similiter quoque loco

$$+z^4 * \begin{array}{l}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{array} zz \begin{array}{l}-a^3\\-acc\end{array} z \begin{array}{l}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{array} \infty 0.$$

scribendum est

$$y^6 \begin{array}{l}+aa\\-2cc\end{array} y^4 \begin{array}{l}-a^4\\+c^4\end{array} yy \begin{array}{l}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{array} \infty 0.$$

quippe p est $+\frac{1}{2}aa-cc$, & pp est $\frac{1}{4}a^4-aacc+c^4$, & $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4+aacc$, ac tandem $-qq$ est $-a^6-2a^4cc-aac^4$.

Postquam igitur Æquatio sic ad tres dimensiones est reducta, quærendus est valor ipsius yy, methodo jam explicatâ. Quòd si verò ita inveniri nequeat, non opùs erit ulteriùs progredi. Infallibiliter enim inde sequitur, Problema esse Solidum. Sin autem inveniatur, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarum utrâque incognita quantitas duas tantùm dimensiones habeat, quarumque radices ab illius

lius radicibus non differant. Nimirum loco Æquationis

$$+ x^4 * . pxx . qx . r \propto 0,$$

scribendæ sunt hæ duæ aliæ

$$+ xx - yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0, \&$$

$$+ xx + yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0.$$

Et quod attinet ad signa $+$ & $-$, quæ omisi, si in Æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum erit in utraque harum duarum $+\tfrac{1}{2}p$; & $-\tfrac{1}{2}p$, si in priore habeatur $-p$. Ponendum verò est $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$; prout habetur $+q$ in prima. Et contra, si habetur ibi $-q$, ponendum est $-\frac{q}{2y}$ in illa, ubi habetur $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Vnde consequenter facile est omnes Æquationis propositæ radices cognoscere, atque hinc Problema, cujus solutionem continet, construere, adhibendo tantùm circulos, & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro $x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$ ponendo $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$ invenitur yy esse 16: hinc loco Æquationis $+ x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$ scribendæ sunt hæ duæ $+xx - 4x - 3 \propto 0$ & $+xx + 4x + 2 \propto 0$. Nam y est 4, $\tfrac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20; ita ut $+\tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ faciat -3, & $+\tfrac{1}{2}yy - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ faciat $+2$. E quibus binis Æquationibus si extrahantur radices, invenientur eædem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur x^4. Nimirum una vera, quæ est $\sqrt{7} + 2$, & tres falsæ, quæ sunt $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.

Similiter cùm habetur $x^4 * - 4xx - 8x + 35 \propto 0$:

 quo-

quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ rursus est 16, hinc scribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \quad \& \quad xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hìc enim $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ facit 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum Æquationum invenitur radix, sive vera, sive falsa, liquidò constat, quatuor radices Æquationis, ex qua deductæ sunt, imaginarias esse, & Problema, cujus gratiâ Æquatio inventa est, naturâ suâ esse Planum; sed nullâ ratione construi posse, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cùm habetur

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0:$$

quia pro yy invenitur $aa + cc$, scribendum est

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \ \&$$
$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Nam y est $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ est
$\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Vnde cognoscitur, valorem ipsius z esse
$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, vel
$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

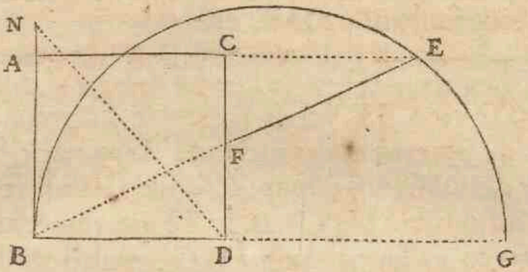
P Et quandoquidem supra feceramus $z + \frac{1}{2}a \infty x$, innotescit, quantitatem x, ad quam cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse

$$+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Verùm enimverò ut utilitas hujus regulæ meliùs cognosci possit, operæ pretium est, ut illam Problemati alicui resolvendo applicemus.

Exemplum ostendens usum ha-

Datis quadrato A D, & rectâ lineâ B N; oporteat producere latus A C usque ad E, ita ut E F, ducta ab E versùs



versùs B, ſit æqualis ipſi N B. Docet Pappus, quòd, *rum reductionum.*
poſtquam primùm latus B D productum eſt uſque in G,
ita ut D G æquetur D N, circuluſque deſcriptus eſt, cujus diameter B G, producendum deinde tantùm ſit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ ſanè conſtructio inveſtigatu iis, quos lateret, difficilis ſatis foret: Etenim quærendo illam per methodum hîc propoſitam, nunquam certè cogitarent aſſumendam eſſe D G pro quantitate incognita, ſed potiùs C F vel F D vel C E: cum hæ tales ſint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; ſed ad Æquationem quæ non ita facilè abſque regula, quam jam expoſui, explicari poſſet. Quippe ponendo a pro B D vel C D, c pro E F, & x pro D F, ſit C F $\infty\ a - x$; Et ut C F ſeu $a - x$ eſt ad F E ſeu c, ſic F D ſeu x eſt ad B F, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus eſt x, & alterum a, quadrata ipſorum, utpote $xx + aa$, æqualia ſunt quadrato baſis, quod eſt $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$. Vnde multiplicando totum per $xx - 2ax + aa$, invenietur Æquatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$, vel $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$.

 Vbi

V Vbi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus, quæ eſt longitudo lineæ D F, eſſe

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Quòd ſi verò BF vel B E poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rurſus ad Æquationem, in qua quatuor dimenſiones eſſent, ſed quæ faciliùs reduci poſ-
R ſet; & ad quam etiam ſatis facilè perveniretur. Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.

Poſſem præterea hîc diverſas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adſcendunt, verùm ſuperfluæ forent: quandoquidem conſtructionem eorum Problematum, quæ Plana ſunt, ſemper per haſce invenire licet.

Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.

Poſſem quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdeſolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs aſſurgunt; ſed malo omnes ſub una comprehendere, dicendo in genere: quòd, poſtquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimenſionibus conſtant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimenſionum, producuntur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri poſſit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipſis ſuccedere compererit, aſſeverandum ſit, illas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Ita ut, ſi incognita quantitas 3 vel 4 dimenſiones habeat, Problema, in cujus gratiam Æquatio quæritur, Solidum exiſtat; & ſi 5 vel

vel 6 dimensiones habeat, uno gradu magis sit compositum. Et sic de cæteris.

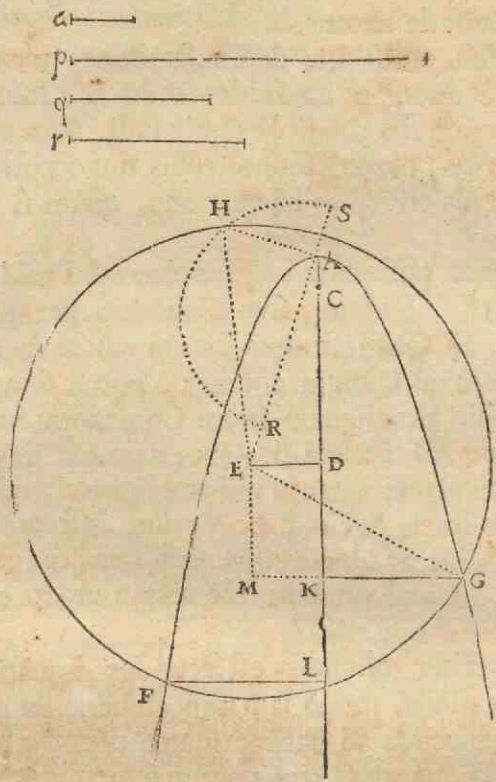
Cæterùm omisi hîc demonstrationes plurimorum, quæ dixi : quoniam ita faciles mihi visæ sunt, ut, si modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ suâ sponte vobis sint occursuræ. quin etiam utiliùs erit ipsas hâc ratione, quàm si legantur, addiscere.

Iam verò postquam compertum est Problema propositum esse Solidum ; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum adscendat ; sive non altiùs quàm ad Cubum assurgat : potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem sit ; aut etiam per ipsarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo nisi rectis lineis & circulis. Verùm suffecerit regulam generalem hîc adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo est simplicissima. S

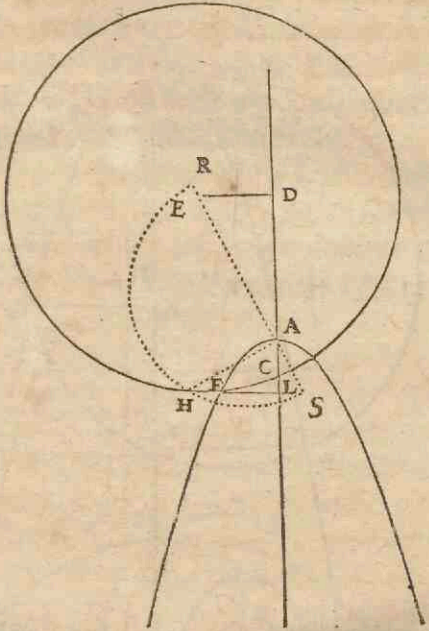
Modus generalis construendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimensionum.

Primò igitur tollendus est secundus Æquationis propositæ terminus, modò jam non abfuerit, atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam : $z^3 \infty * apz.\ aaq$, T si incognita quantitas tres tantùm dimensiones habeat ; aut ad hanc : $z^4 \infty *.\ apzz.\ aaqz.\ a^3r$, si quatuor obtineat dimensiones ; Seu sumendo a pro unitate, ad hanc : $z^3 \infty *.\ pz.\ q$; aut ad hanc $z^4 \infty *.\ pzz.\ qz.\ r$.

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, & axem ejus esse A C D K L, latusque rectum V a seu 1, cujus A C sit dimidium, & denique punctum C esse intra hanc Parabolam, cujus vertex sit A : Oportet facere C D $\infty \frac{1}{2}p$, eamque sumere in linea A C, continuata versùs C, si in Æquatione habeatur $+p$; sed versùs alteram partem, si habeatur $-p$. Porrò è puncto



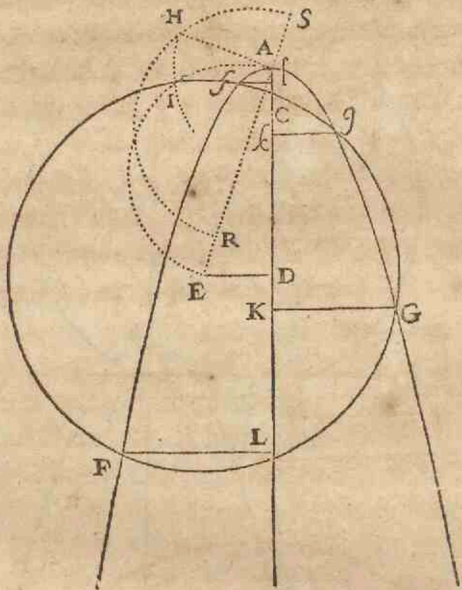
ℭto D, aut ex punℭto C, ſi non habeatur quantitas p, erigendo ad axem perpendicularem D E æqualem $\frac{1}{2}q$, oportet ex centro E circulum deſcribere F G, cujus ſemidiameter ſit A E, ſi Æquatio tantùm Cubica fuerit, hoc eſt, ſi non habeatur quantitas r. Aſt ſi habeatur r, & quidem ſigno + adfeℭta, oportet ulteriùs in hac linea A E, produℭta utrinque, ex una parte ſumere A R ∞ r, & ex altera parte A S æqualem lateri reℭto Para-



Parabolæ, quod eſt 1, deſcriptoque circulo cujus diameter RS, erigere AH perpendicularem ad AE, quæ occurrat huic circulo RHS in puncto H, quod illud ipſum eſt, per quod alter circulus FHG tranſire debet. Quòd ſi verò habeatur $-r$, oportet inſuper in alio circulo, cujus diameter eſt AE, inſcribere AI, æqualem inventæ AH: inventumque erit punctum I, per quod primus circulus quæſitus FIG tranſire debet.

Vbi ſciendum, quòd circulus hic FG ſecare vel tangere poſſit Parabolam in 1, 2, 3, aut 4 punctis, à quibus ſi ad axem demittantur perpendiculares, habebuntur

omnes



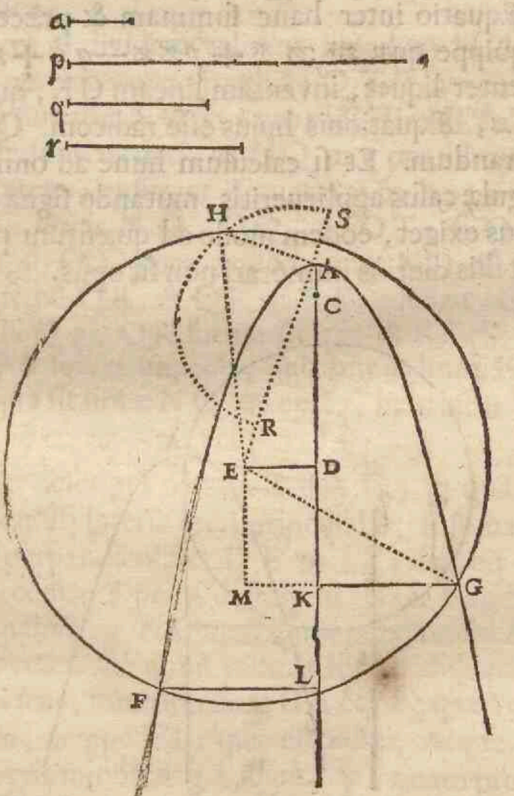
omnes Æquationis radices, tam veræ, quàm falſæ. Ni-
mirum ſi quantitas q ſit adfecta ſigno $+$, veræ radices
erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Pa-
rabolæ parte, qua eſt E circuli centrum, reperientur,
ut F L; & reliquæ, ut G K, erunt falſæ. Sed contra, ſi
hæc quantitas q notata fuerit ſigno $-$, veræ erunt illæ,
quæ ex altera ſunt parte; & falſæ, ſeu minores quàm ni-
hil, quæ ex parte illa, ubi eſt centrum circuli E. Et de-
nique ſi hic circulus non ſecat, nec tangit Parabolam in
aliquo puncto, indicio eſt, Æquationem nullam ad-
mittere radicem ſive veram, ſive falſam, ſed tantùm
V V imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis
exoptare queat, generaliſſima ſit & perfectiſſima.

Quorum quidem demonſtratio admodum facilis eſt.

Etenim

Etenim si linea GK, per constructionem hanc inventa, vocetur z, AK erit zz, propter Parabolam, in qua GK debet esse media proportionalis inter AK & latus rectum, quod est 1. Deinde, si ab AK auferam AC, quæ est $\frac{1}{2}$, ut & CD, quæ est $\frac{1}{2}p$, relinquetur DK seu EM $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, cujus quadratum est

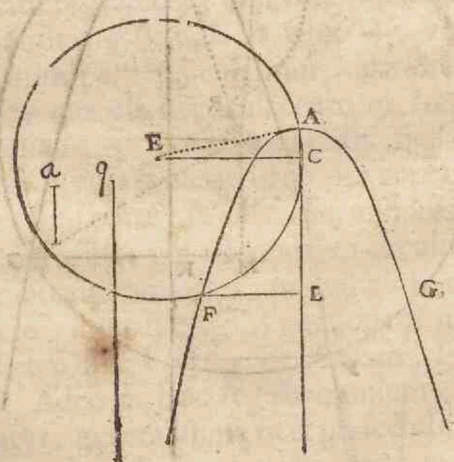
$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et quia DE seu KM est $\frac{1}{2}q$, tota GM fit $z + \frac{1}{2}q$, cujus quadratum est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, additisque hisce duobus quadratis, habebitur $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$.



 pro

pro quadrato lineæ G E, quippe quæ baſis eſt trianguli rectanguli E M G.

Sed quia hæc eadem linea G E eſt ſemidiameter circuli F G, poterit ipſa aliis adhuc terminis explicari. Nimirum ſi E D fuerit $\frac{1}{2}q$, & A D $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, E A erit $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$, propter angulum rectum A D E. Deinde cum A H ſit media proportionalis inter A S, quæ eſt 1, & A R, quæ eſt r, erit ipſa $\sqrt{r}$. Ac denique, propter angulum rectum E A H, quadratum ex H E ſeu E G eſt $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: adeò ut habeatur Æquatio inter hanc ſummam & præcedentem. Eadem quippe quæ $z^4 \propto * + pzz - qz + r$. Vnde conſequenter liquet, inventam lineam G K, quæ nominata fuit z, Æquationis hujus eſſe radicem. Quod erat demonſtrandum. Et ſi calculum hunc ad omnes alios hujus regulæ caſus applicueritis, mutando ſigna + & —, prout opus exiget, eodem modo ad quæſitum pervenietis; ita ut illis diutiùs immorari non ſit opùs.



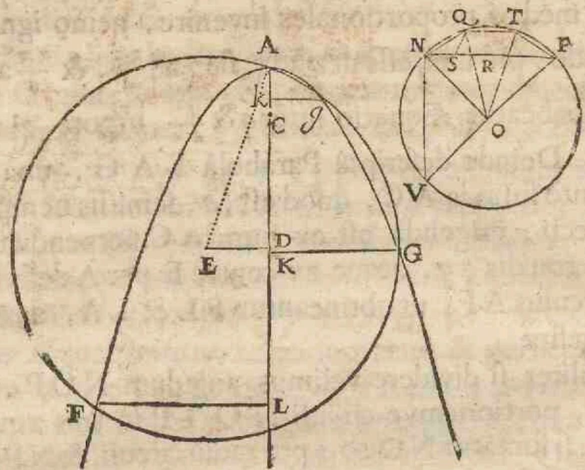
Si itaque juxta hanc regulam inter lineas a & q duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo z pro una, esse ut a ad z, sic z ad $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{z^3}{aa}$; ita ut habeatur Æquatio inter q & $\frac{z^3}{aa}$, utpote, $z^3 \propto * * aaq$. Deinde descriptâ Parabolâ F A G, unà cum segmento sui axis A C, quod est $\frac{1}{2}a$, semissis nempe lateris recti, erigenda est ex puncto C perpendicularis C E, æqualis $\frac{1}{2}q$, atque ex centro E per A describendus circulus A F, ut obtineantur F L & L A, duæ mediæ quæsitæ. *Inventio duarum mediarum proportionalium.*

Similiter si dividere velimus angulum N O P, sive arcum, portionemve circuli N Q T P in tres æquales partes; si sumatur N O $\propto$ 1 pro radio circuli, & N P $\propto q$ pro subtensa arcus dati, ac N Q $\propto z$ pro subtensa trientis hujus arcus, exsurget Æquatio $z^3 \propto * 3z - q$. Etenim ductis lineis N Q, O Q, & O T; si Q S parallela fiat ipsi T O, patet, quòd, sicut N O est ad N Q, sic N Q sit ad Q R, & Q R ad R S; adeò ut, cum N O sit 1, & N Q z, Q R futura sit zz, & R S z^3. Et quia tantùm R S seu z^3 impedit, quò minùs linea N P, quæ est q, tripla sit lineæ N Q, quæ est z, habebitur *Ratio dividendi angulum in tres partes æquales.*

$$q \propto 3z - z^3, \text{vel } z^3 \propto * 3z - q$$

Deinde descriptâ Parabolâ F A G, in qua C A sit æqualis semissi lateris recti principalis, si sumatur C D $\propto \frac{3}{2}$, & perpendicularis D E $\propto \frac{1}{2}q$: secabit circulus F A g G, centro E per A descriptus, hanc Parabolam in tribus punctis F, g, & G, non numerato puncto A, quod est ejus vertex. Id quod indicat in hac Æquatione tres haberi radices, nimirum duas G K & g k, quæ veræ sunt, & tertiam, nempe F L, quæ est falsa; Atque ex hisce duabus veris minorem g k illam esse, quam pro quæsita linea N Q sumere oportet. Altera enim G K, æqualis

 est



eſt ipſi N V, ſubtenſæ trientis arcus N V P, qui cum reli-
x quo arcu N Q P totum circulum complet. Falſa autem F L æqualis eſt duabus hiſce Q N & N V ſimul ſumptis, quemadmodum ex calculo facile eſt videre.

Quòd omnia Solida Problemata reduci poſſint ad haſce duas conſtructiones.

Superfluum foret ſi inſiſterem hîc aliis exemplis in medium afferendis, cum Problemata omnia, quæ non niſi Solida ſunt, eò reduci poſſint, ut hâc regulâ ad conſtructionem ipſorum non aliter indigeamus, quàm quatenus inſervit ad inveniendas duas medias proportionales, aut ad dividendum angulum in tres æquales partes. Quod cognoſcetis, conſiderando, ipſorum difficultates ſemper Æquationibus, quæ ultra Quadrato-quadratum non adſcendunt, comprehendi poſſe; Et omnes illas, quæ ad Quadrato-quadratum aſcendunt, reduci poſſe ad Quadratum, ope quarundam aliarum, quæ tantùm ad Cubum adſcendunt; Et tandem, harum ſecundum terminum tolli poſſe. Ita ut nulla earum ſit, quam ad aliquam ex hiſce tribus formis reducere non liceat.

$z^3 \infty$

$$z^3 \infty * -pz+q.$$
$$z^3 \infty * +pz+q.$$
$$z^3 \infty * +pz-q.$$

Si autem habeatur $z^3 \infty * -pz+q$, regula, cujus inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferreo, tribuit, nos docet, radicem esse Y

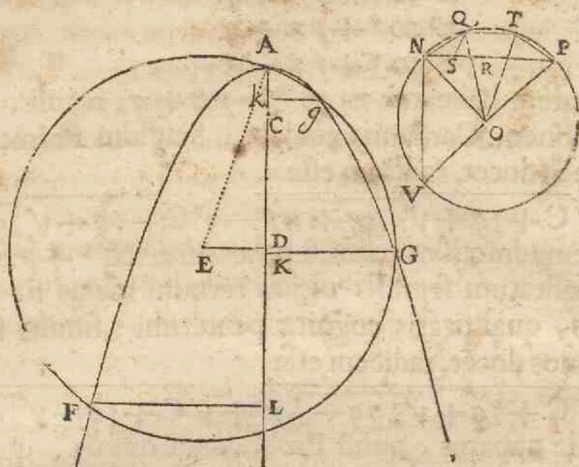
$$z \infty \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Quemadmodum etiam, si habeatur $z^3 \infty * +pz+q$, & Quadratum semissis ultimi termini majus sit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; similis fermè regula nos docet, radicem esse

$$z \infty \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Vnde apparet, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad Æquationem unius ex hisce duabus formis reducuntur, construi semper possint, ut Conicas sectiones adhibere non sit opùs, nisi ad extrahendas radices Cubicas ex quibusdam quantitatibus datis, hoc est, ad inveniendas duas medias proportionales inter hasce quantitates & unitatem.

Deinde si habeatur $z^3 \infty * +pz+q$, & Quadratum semissis ultimi termini non sit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; supponendo Circulum N Q P V, cujus semidiameter N O sit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, hoc est, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ p & unitatem; tum etiam supponendo lineam N P huic Circulo esse inscriptam, quæ sit $\frac{3q}{p}$, hoc est, quæ sit ad alteram quantitatem datam q, ut est unitas ad trientem ipsius p; dividendus tantùm est uterque arcus N Q P, N V P in tres æquales partes; eritque N Q, subtensa trientis unius arcus, unà cum N V, subtensâ trientis alterius, æqualis radici quæsitæ.



Denique si habeatur $z^3 \infty * + pz - q$, supponendo rursus Circulum N Q P V, cujus radius N O sit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in quo inscripta N P sit $\frac{3q}{p}$: erit N Q, subtendens trientem arcus N Q P, una ex radicibus quæsitis: & N V, subtendens trientem arcus N V P, radix altera. Saltem si Quadratum semissis ultimi termini non excedat Cubum è triente quantitatis cognitæ penultimi termini. Etenim si majus esset, non posset linea N P huic Circulo inscribi, quippe quæ diametro ejus major foret. Id quod ostenderet, duas veras radices hujus Æquationis non nisi imaginarias esse, nec ullam realem extare præter falsam, quæ juxta Cardani regulam foret

$$\sqrt{C.\ \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Modus exprimendi valorem radicum omnium

Cæterùm notandum est, modum hunc exprimendi valorem radicum per relationem, quam habent ad latera certorum Cuborum, quorum tantùm contentum cognoscitur, nequaquam magis intelligibilem, neque sim-

ſimpliciorem eſſe, quàm ſi exprimantur per relationem, quam habent ad ſubtenſas certorum arcuum, ſeu Circuli portionum, quarum triplum eſt datum. Ita ut Cubicarum Æquationum radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hîc propoſitum exprimi poſſint.

Æquationum Cubicarum: ac per conſequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.

Si enim, exempli cauſsâ, radicem cognoſcere arbitremur hujus Æquationis $z^3 \infty * + pz + q$: quia ipſam compoſitam eſſe ſcimus ex duabus lineis; quarum una eſt latus Cubi, cujus contentum eſt ſumma, quæ conflatur ex $\frac{1}{2} q$, & ex latere Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum eſt differentia, quæ eſt inter $\frac{1}{2} q$, & latus Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$, (quod illud omne eſt, quod ex Cardani regula addiſcimus); Dubitandum non eſt, quin æquè diſtinctè aut etiam diſtinctiùs radix hujus $z^3 \infty * + pz - q$ cognoſcatur, ſi ea conſideretur inſcripta Circulo, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, in quo pro ſubtenſa arcus intelligatur, cujus tripli ſubtenſa ſit $\frac{3q}{p}$. Quin etiam hi termini prioribus illis multò minùs ſunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, ſi peculiari aliquâ notâ ad exprimendas haſce ſubtenſas, quemadmodum fit notâ $\sqrt{}$ C. ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Poſſunt quoque per regulas hîc ſupra explicatas deinceps exprimi radices Æquationum omnium, quæ ad Quadrato-quadratum aſcendunt; ita ut neſciam, quid in hac materia deſiderari ampliùs poſſit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur ſimplicioribus, nec ut per conſtructionem aliquam, quæ unà & generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Verum

Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sunt sine aliis lineis, magis compositis.

Verum quidem est, me nondum dixisse, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri possit nec ne. At verò si consideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus Problematum reducatur, quod est, ut quæratur valor radicum alicujus Æquationis, satis judicabitur, non difficile esse ita enumerare vias omnes, quibus inveniri possunt: ut hoc sufficiat ad ostendendum, generalissimam & simplicissimam fuisse selectam. Et speciatim, quod spectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compositam quàm circularem construi non possint, vel inde evidens esse potest, quòd illa omnia ad duas constructiones reducantur; in quarum unâ duo simul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantùm dependeat à simplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod est ipsius centrum; inde fit, ut eo quoque non nisi ad unum solummodo punctum inter duas extremas determinandum uti possimus, utputa ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas Æquales partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ semper à duabus diversis rebus dependet, ad duo diversa puncta determinanda inservire potest.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida sunt composita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes divisionem, præsupponunt, ope alicujus Conicæ sectionis construi

ſtrui poſſit. Quare nihil melius hîc à me fieri poſſe confido, quàm ſi regulam generalem tradam conſtruendi illa ope lineæ curvæ, quæ deſcribitur per interſectionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum ſupra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inſervire queat, ſimpliciorem in rerum natura inveniri. Atque etiam vidiſtis, quomodo hæc linea immediatè ſectiones Conicas ſequatur in quæſtione tantopere à Veteribus quæſitâ, cujus ſolutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

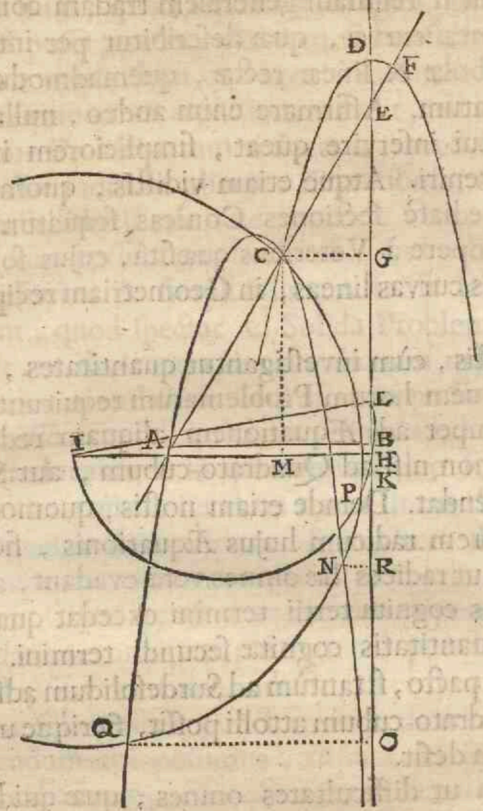
Iam noſtis, cùm inveſtigantur quantitates, quæ ad conſtructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione ſemper ad Æquationem aliquam reduci poſſint, quæ non niſi ad Quadrato-cubum, aut Surdeſolidum adſcendat. Deinde etiam noſtis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri ſemper poſſit, ut radices hæ omnes veræ evadant, ac ſimul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini. Et denique, quo pacto, ſi tantùm ad Surdeſolidum adſcendat, ipſa ad Quadrato-cubum attolli poſſit, fierique ut nullus terminorum deſit.

Modus generalis conſtruendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, ſex dimenſiones non excedentem.

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hîc occurrunt, per eandem regulam reſolvi queant, deſidero ut hæc omnia fiant, & hâc ratione reducantur ſemper ad Æquationem hujus formæ

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0.$$

in qua quantitas vocata q, major ſit quadrato à ſemiſſe ejus, quæ nominatur p.

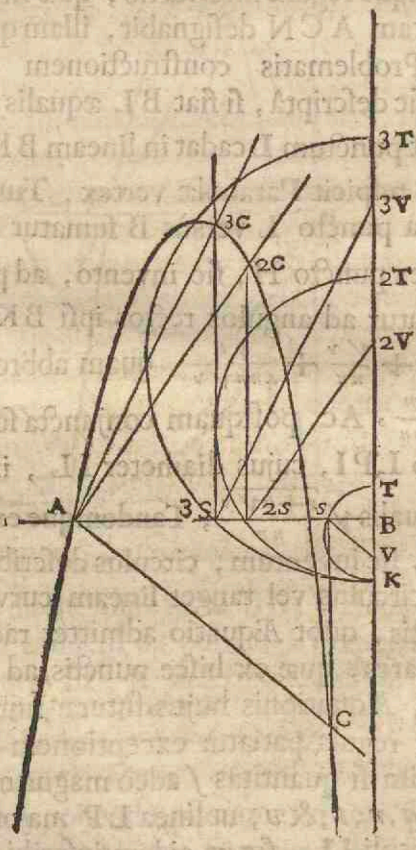


Poſt hæc ductâ lineâ rectâ BK, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari AB, cujus longitudo ſit $\frac{1}{2}p$; deſcribenda eſt in plano aliquo ſeparato Parabola, ut CDF, cujus latus rectum principale ſit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$. quod brevitatis causâ vocabo n. Tum ponendo planum, in quo Parabola exiſtit, ſupra planum in quo ſunt lineæ AB & BK, ita ut axis ejus DE omnino congruat cum linea recta BK; ſum-

ſumptoque ſegmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, adplicanda eſt longa regula ad punctum E, ita ut, poſtquam ad punctum A plani inferioris quoque eſt adplicata, ſemper maneat adjuncta hiſce duobus punctis, interea dum Parabola ſecundùm lineam B K, ad quam ejus axis eſt adplicatus, vel elevatur vel deprimitur. quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ interſectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam A C N deſignabit, illam quippe quâ ad propoſiti Problematis conſtructionem indigebimus. Etenim eâ ſic deſcriptâ, ſi fiat B L æqualis D E, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, ita ut punctum L cadat in lineam B K, versùs partem, quam reſpicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B ſumatur L H æqualis $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, Et ex puncto H, ſic invento, ad partem curvæ A C N ducatur ad angulos rectos ipſi B K, linea H I, æqualis $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, quam abbreviandi causâ nominabo $\frac{m}{nn}$, Ac, poſtquam conjuncta ſunt puncta L & I, circulo L P I, cujus diameter I L, inſcribatur linea L P, æqualis $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$, Tandemque ex centro I per punctum P, ſic inventum, circulus deſcribatur P C N: ſecabit hic circulus vel tanget lineam curvam A C N, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hiſce punctis ad lineam B K deducentur, Æquationis hujus futuræ ſint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim ſi quantitas s adeò magna eſſet reſpectu aliarum, p, q, r, t, & v, ut linea L P major inveniretur diametro circuli I L, ſic ut eidem inſcribi non poſſet, nulla itidem foret radix in Æquatione propoſita, quæ

 non

non esset imaginaria; nec etiam ulla foret radix, si circulus IP adeò parvus esset, ut curvam ACN in nullo Z prorsus puncto secaret. Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hîc sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantùm imaginarias.



Quòd si verò ratio hæc describendi lineam ACN per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile est plures alios modos in eundem finem excogitare. Vt, manentibus eisdem quantitatibus pro A B & B L, nec non eâdem pro B K, quæ pro latere recto principali Parabolæ supponebatur; describendus est tantùm semicirculus K S T, centro ejus ad libitum in linea B K assumpto, ita tamen ut lineam A B alicubi secet, ut in puncto S. Nam postquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K assumpta fuerit linea T V, æqualis B L, jungaturque S V, atque à puncto A junctæ S V parallela ducatur A C, quæ rectæ S C, ductæ per punctum S, ipsi B K parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ sibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæsita curva transire debet. Eodem modo inveniri possunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonstratio satis facilis est.

Si enim regula A E unà cum Parabola F D adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo constat eas ad punctum C in curva A C N mutuâ intersectione designandum esse adplicandas) & quidem C G vocetur y: erit G D $\frac{yy}{n}$, cum latus rectum, quod est n, sit ad C G sicut C G ad G D. Auferendo autem D E, quæ est $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$ à G D, relinquetur $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pro G E. Deinde quia A B est ad B E, ut C G ad G E: hinc cum A B sit $\frac{1}{2}p$, B E erit $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Eâdem ratione si punctum curvæ C supponatur inventum esse per intersectionem linearum rectarum, S C, parallelæ ipsi B K, & A C, parallelæ ipsi S V; S B, quæ æquatur ipsi C G, est y: & cum B K æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi n, B T erit $\frac{yy}{n}$. est enim ut K B ad B S, ita B S ad B T. Cumque T V eadem sit

 quæ

quæ B L, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, B V erit $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Sicut autem S B eſt ad B V, ſic AB eſt ad B E, quæ ideo eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$. ut ante. Vnde apparet, unam eandemque lineam eſſe, quæ utroque hoc modo deſcribitur.

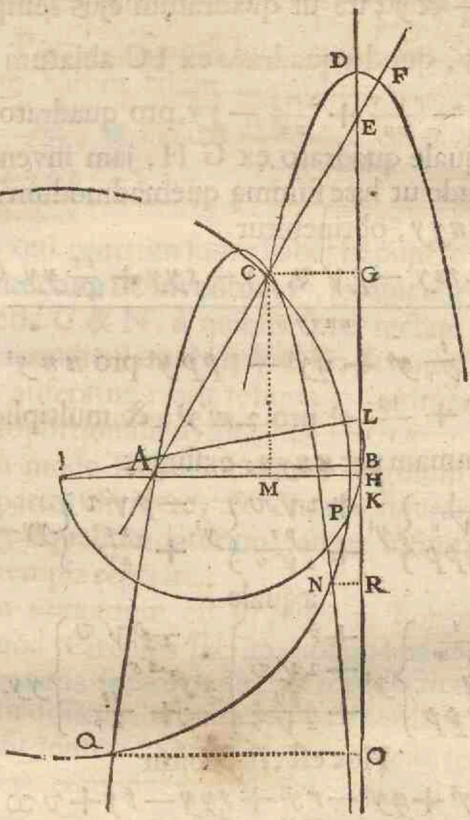
Porrò, quoniam B L & D E ſibi invicem æquales ſunt, æquales quoque inter ſe erunt D L & B E; ita ut, addendo L H, quæ eſt $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, ad D L, quæ eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, habeatur tota D H, nempe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$, è qua auferendo G D, quæ eſt $\frac{yy}{n}$, relinquetur G H, videlicet $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Id quod ordine ſcribo, hoc pacto, G H ∞ $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$,

Et ſit quadratum ex G H,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nnyy.}$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utputa versùs N, vel versùs Q, ſemper tamen invenietur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit ſuper B H, intercipitur, iiſdem hiſce terminis iiſdemque ſignis + & — exprimi poſſe.

Poſtea



Postea cum I H sit $\frac{m}{nn}$, & L H $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, I L erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$ (propter angulum rectum I H L) ; & cum L P sit $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, I P vel I C erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, (propter angulum rectum I P L). Dein ductâ C M perpendiculari ad I H, erit I M differentia, quæ est inter I H & H M vel C G, hoc est

eſt, inter $\frac{m}{nn}$ & y; ita ut quadratum ejus ſemper ſit $\frac{mm}{n^4}$ $- \frac{2my}{nn} + yy$, quod à quadrato ex I C ablatum relinquit $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pro quadrato ex C M, quod eſt æquale quadrato ex G H, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc ſumma quemadmodum altera diviſa ſit per $nnyy$, obtinebitur

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v},yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Cæterùm reſtituendo $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pro nny^4, & $ry^3 + 2\sqrt{v},y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$ pro $2my^3$, & multiplicando utramque ſummam per $nnyy$: exſurget

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v,$$

æquale

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy.$$

Hoc eſt, habebitur

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0.$$

Vnde apparet, lineas C G, N R, Q O, & ſimiles eſſe hujus Æquationis radices. Quod erat demonſtrandum.

Inventio quatuor mediarum proportionalium.

Hinc ſi invenire velimus 4^or medias proportionales inter lineas a & b; poſitâ x pro prima, prodibit Æquatio $x^5 * * * * - a^4 b \propto 0$, vel $x^6 * * * * - a^4 b x * \propto 0$. Factâque $y - a \propto x$, invenietur

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4 b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ +a^5 b \end{matrix} \propto 0$$

Vnde pro linea A B ſumendum eſt $3a$, & $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}} + 6aa}$ pro BK, vel latere recto Parabo-

læ,

læ, quod ſupra nominavi n, & $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pro D E, vel B L. Porrò deſcriptâ lineâ curvâ A C N ſecundùm menſuram harum trium linearum, facienda eſt L H $\infty \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & I H $\infty \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & L P $\infty \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$. Etenim circulus, qui centrum ſuum habet in puncto I, tranſiturus per punctum ſic inventum P, ſecabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus ſi ad rectam B K demittantur perpendiculares N R & C G, & minor N R à majore C G auferatur; erit reliqua x, prima ex quatuor mediis proportionalibus quæſitis.

Eodem modo facile eſt datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inſcribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verùm notandum eſt in plurimis horum exemplorum, quòd Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam ſecundi generis ſecare poſſit, ut interſectionis punctum cognitu ſit difficile, atque adeò hæc conſtructio ad Praxin non ſit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri poſſet, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed inſtitutum meum non eſt prolixum librum conſcribere, ſed potiùs multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me feciſſe, qui conſideraturi ſunt, quòd, reductis ad eandem conſtructionem Problematis omnibus ejuſdem generis, modum ſimul, quo ad infinitas alias diverſas reduci, atque ita omnia infinitis modis reſolvi poſſint, oſtenderim. Præterea etiam, quòd conſtructis iis omnibus, quæ Plana ſunt, interſectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida ſunt, interſectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis ſunt compoſita, interſectione ſimiliter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabola compoſitæ, eandem tantùm viam in conſtruendis reliquis omnibus, quæ magis magiſque in infinitum ſunt compoſita, ſequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progreſſionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non eſt difficile. Adeò ut ſperem à poſteris mihi gratias habitum iri, non ſolùm pro iis, quæ hîc explicui; ſed etiam pro iis, quæ conſultò omiſi, quò ipſis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

FINIS.

FLO-

FLORIMONDI DE BEAUNE
IN
GEOMETRIAM
RENATI DES CARTES
NOTÆ BREVES.

ALGEBRA ſpecioſa, hoc eſt, quæ exercetur per ſpecies rerum, quæ literis Alphabeti, aliiſve ſimilibus deſignantur, eſt Scientia, inveſtigandis, inveniendisque Theorematis & Problematis inſerviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportiones conſiderantur, concernens. Dicimus autem rationem inter ſe habere duas res, cùm homogeneæ ſeu ejuſdem naturæ exiſtentes, aut æquales ſunt, aut inæquales, & minor per ſui ipſius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque ſuperans. Adeò ut hæc Scientia non ſolùm Algebram numeroſam atque Veterum Analyſin Geometricam comprehendat; ſed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in ſua de Methodo diſſertatione.

Optimum verò eſt, ad ſtabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus aſſequendam, ut generaliter rationes haſce in lineis conſideremus: cum ſimpliciſſimæ ſint, & hoc ſibi vendicent, quòd rationes omnes, quæ inter quaſcunque alias res conſiderari poſſunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommenſurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quòd iis ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter ſe habentes, uti poſſimus. Etenim licèt linea nullam cum ſuperficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) poſſumus tamen rationem, quæ inter duas ſuperficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter ſe relationem aliquam habere statuimus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantùm cavendum est, ne permutata ratione utamur.

Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eædem sunt, quæ Arithmeticæ vulgaris, nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quòd illæ (sicut notavimus) circa incommensurabiles quantitates, non minùs quàm circa alias, versentur. Vt, cùm proponuntur duæ lineæ incommensurabiles, sive longitudine, sive longitudine & potentiâ, possunt ipsæ simul addi, una ab altera auferri, per se invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac si longitudine essent commensurabiles.

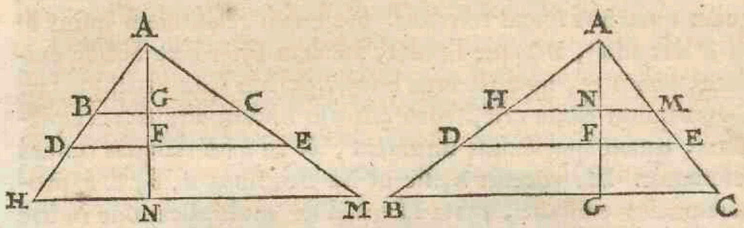
Neque verò docebimus, quo pacto hæ operationes per literas Alphabeticas, vel alias linearum aliarumve rerum species, quas designant, sint faciendæ: cum hoc ab aliis jam sit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis instituendæ sint, breviter exponit. Verùm observari volumus, quòd per hasce species, quas nominamus b, b^2, b^3, b^4, bd, b^2d, b^3d; primam videlicet b, numerum aut lineam simplicem; secundam b^2, quadratum ipsius b, seu b quadratum; tertiam b^3 seu b cubum; quartam b^4 seu b quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino simplices concipiantur; nisi quæstio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut, per hasce species alias res significemus, similem inter se relationem, quam lineæ ipsis designatæ, habentes. Attamen consentaneum est, nomina usitata retinere, quandoquidem lineæ, speciebus hisce designatæ, eandem inter se rationem, quam veræ superficies, & vera solida, quæ per ipsas denotantur, servant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter se relationem observant, quatenus sunt numeri simplices, qualem inter se obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræsentant.

Oportet itaque ostendere, spatia & corpora, speciebus hisce designata, eandem inter se rationem habere, quam lineæ simplices, quas per ipsas concipimus. Exempli gratiâ, b^2 eandem

ratio-

rationem habere ad bd, & ad d^2, quatenus ſpatia ſignificant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipſius b^3 ad $b^2 d$ & ad d^3, aliasque ſimiles, eandem inter hæc Solida exiſtere, quam ea, quæ eſt inter lineas, per has ſpecies deſignatas. Quod ipſum facile erit, ſi pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur a, ſic ut hæ tres lineæ a, b, & b^2 proportionales exiſtant, juxta id quod de multiplicatione in hac Geometria dictum eſt. Idem de lineis a, d, & d^2 eſt intelligendum. Sic etiam linea a eſt ad lineam b, ſicut linea d eſt ad lineam bd; aut, ut linea a eſt ad lineam d, ita linea b eſt ad eandem lineam bd. Quod cum ita ſit, linea b erit ad lineam b^2, ſicut linea d ad lineam bd; cum eadem utrobique ſit ratio, nimirum eadem, quæ lineæ a ad lineam b. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea b^2 ad lineam bd. Eodem modo linea b erit ad lineam bd, ut linea d ad lineam d^2; cum utraque ratio eadem ſit, quæ lineæ a ad lineam d. quemadmodum eſt oſtenſum. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea bd ad lineam d^2. Patet itaque, b eſſe ad d, ſicut b^2 ad bd; itemque b eſſe ad d, ſicut bd ad d^2, & conſequenter, rationem lineæ b^2 ad lineam d^2 eſſe duplicatam lineæ b ad lineam d; lineamque bd eſſe mediam proportionalem inter lineas b^2 & d^2. Id quod unuſquiſque novit ab Euclide eſſe oſtenſum, nimirum: rationem, quam habet b^2 ad d^2, quatenus deſignant ſuperficies ſeu quadrata, duplicatam eſſe rationis, quam habet latus b ad latus d: itemque bd rectangulum eſſe medium proportionale inter hæc ipſa quadrata. ac per conſequens, hæc ſpatia eandem inter ſe relationem habere, quam lineæ iiſdem ſpeciebus deſignatæ. Idem oſtendi poteſt de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonſtrationis. Vnde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas ſuperficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonſtrarunt, nos pro lineis, aliisve rebus, iiſdem ſpeciebus deſignatis, uſurpare poſſimus, prout eandem quam dicta ſpatia ſeu corpora inter ſe relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum A D E, cujus angulus D A E ſit rectus. Manifeſtum eſt ex elementis, quòd laterum quadrata ſimul ſumpta quadrato baſis



sint æqualia: hoc est, si ponamus $AD \infty b$, $AE \infty c$, & $DE \infty d$, quòd $b^2 + c^2$ æquetur d^2, quatenus designant vera quadrata. Quod quoque verum est, quatenus designant lineas, modò eandem inter se relationem obtineant, quam hæc ipsa quadrata; ut demonstratum est à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Assumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim est) quàm D E, quæ quidem sit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipsa autem esto B C, parallela existens ipsi D E, ducaturque perpendicularis A F, ipsam, si opùs est, producendo. Deinde fiat, ut B C ad D E, ita D E ad H M, fietque $HM \infty d^2$.

Iam verò, sicut hæ lineæ B C, D E, H M sunt continuè proportionales, ita quoque lineæ B C, A E, N M, nec non lineæ B C, D A, H N. Composita enim est ratio B C ad A E, ex ratione B C ad A C, & ex ratione A C ad A E. Est autem ratio A E ad N M composita ex iisdem rationibus, nimirum ex ratione A E ad F E, quæ eadem est rationi B C ad A C (propter similitudinem triangulorum rectangulorum A E F & B C A,) & ex ratione F E ad N M, hoc est, A E ad A M, quæ eadem est rationi A C ad A E (per constructionem.) Id quod eodem modo patet de B C, A D, H N. Erit igitur $NM \infty c^2$, & $HN \infty b^2$, quæ quidem simul sumptæ æquantur ipsi H M, hoc est, d^2. Quod erat demonstrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo $\frac{b}{d}$, aliisve similibus, exprimere possimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. denotare valeamus; hoc sanè compendio, quòd literis fractio exprimi possit, cujus numerator ad de-

nomi-

nominatorem non habeat rationem commenſurabilem; ſed quæ ſimilis ſit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejuſdem fractionis. Id quod non exiguæ eſt utilitatis, quemadmodum poſtea videbitur.

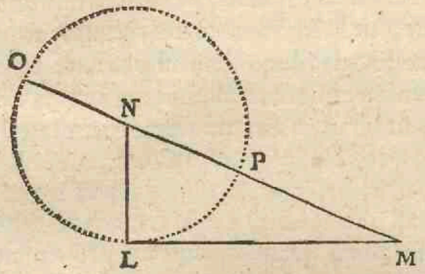
Iam autem explicandum eſt, cur æque-multæ dimenſiones ſingulis Æquationis terminis ſint tribuendæ. Quod ſanè per ſe liquet, quando ſub hiſce terminis ſuperficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas conſiſtat, ſpatiaque illa aut corpora eodem ſemper linearum atque dimenſionum numero deſignentur.

Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hoſce terminos non niſi lineæ deſignantur, ut Methodus eò univerſalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præſtare tenemur, cùm linea, quæ pro unitate ſumenda eſt, indeterminata exiſtit, ſeu, cùm requiritur, ut liberum ſit aſſumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod facilè concipi poteſt, quoniam ſumendo lineam aliquam, ut a, pro unitate, lineæ, verbi gratiâ, b^2 & d^2, denominationes haſce accipiunt, prout referuntur ad lineam a. At verò ſtatuendo aliam quandam lineam pro unitate quàm a, licèt b & d eædem maneant, nihilominus tamen b^2 & d^2 à præcedentibus erunt diverſæ. Ac proinde, ſi comparare velimus lineam b cum linea d^2: quoniam d^2 diverſa eſt, prout ad diverſas lineas refertur, quas pro unitate accipere poſſumus, ipsâ lineâ b eâdem ſemper manente; patet lineam b ad lineam d^2 non ſemper eandem rationem ſervare: ſed contra, diverſas ad illam ſortiri relationes, pro diverſis lineis, quæ pro unitate aſſumuntur. Et ſic de aliis. Aſt quæcunque tandem linea pro unitate ſumatur, linea tamen indeterminata, & quæ per b^2 concipitur, eandem ſemper habet rationem ad d^2, quam quadratum lineæ b ad quadratum lineæ d. Atque ita de aliis omnibus, ut ſupra eſt oſtenſum. Et quidem generalius eſt atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujuſque arbitrium, ut deinde pro ipſa talis linea aſſumi poſſit, qualis videbitur, quàm eandem ab initio operationis determinare, ſumendo pro ipſa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimùm conducat ad confuſionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi poſſent. Verùm cùm unitas determinata exiſtit, tum quidem non ampliùs ſingulis

Æqua-

Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur: cum unitas illas ubique ſupplere poſſit, ubi numero pauciores habentur, & ipſa has ſpecies multiplicans aut dividens eaſdem non mutet. Si verò ibidem non ſit expreſſa, poterit tum quidem ſubintelligi. Qua de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICVM EXTRACTIONE.



QVandoquidem linea L M primæ figuræ tangit circulum L O P, rectangulum O M P æquatur quadrato ex L M. Sunt autem bina rectangula M O P & O M P æqualia quadrato ex O M. Æquale igitur erit rectangulum M O P, unà cum quadrato ex L M, quadrato ex O M; hoc eſt, erit $z^2 \infty az + b^2$, ac per conſequens $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: cum O N æquetur $\frac{1}{2}a$, & quadratum ex N M tantundem valeat atque duo quadrata ex N L & L M, hoc eſt, $\frac{1}{4}a^2$ & b^2. Id quod primò erat demonſtrandum.

Deinde rectangulum O P M & quadratum ex P M æqualia ſimul ſunt rectangulo O M P. Eſt autem rectangulum O M P æquale quadrato ex L M. Quadratum itaque ex P M æquale eſt quadrato ex L M, minus rectangulo O P M: hoc eſt, erit $y^2 \infty -ay + bb$, ac proinde $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. quia, cùm N M æquatur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ut ſupra, ac ex ipſa aufertur N P ſeu $\frac{1}{2}a$, relinquitur M P ſeu y.

IN SECVNDAM FIGVRAM DE RADICVM EXTRACTIONE. PAG. 7.

REducemus hanc figuram ad ſequentem, in qua N D & H O ſunt parallelæ & æquales ipſi L M. Quibus poſitis, quoniam

LM

LM tangit circulum HRQL in puncto L, erit quadratum ex LM æquale rectangulo RMQ. Deinde, quia MD æqualis eſt DO, & QD ipſi DR, erit & MQ æqualis RO. Vnde additâ communi QR, fiet quoque MR æqualis QO. Ac proinde ſi à rectangulo OMR auferatur rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex QO ſeu MR. Hinc cum RM ſit $\infty\, z$, HL ſeu MO $\infty\, a$, & LM $\infty\, b$: erit $z^2 \infty\, az - bb$.

Similiter ſi à rectangulo OMQ auferatur rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex RO ſeu MQ. Ac proinde ſi QM ſumatur pro z, habebitur $z^2 \infty\, az - bb$.

Jam autem cum linea RQ diviſa ſit bifariam in D, ac ipſi in directum adjecta QM, erit rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, unà cum quadrato ex DQ ſeu RD, æquale quadrato ex DM, hoc eſt, ex ſemiſſe ipſius a; ac proinde quadratum ex DQ ſeu DR æquale quadrato ex DM, minus quadrato ex LM, hoc eſt, æquale $\frac{1}{4}aa - bb$. Vnde ſi addamus $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, hoc eſt, DQ ſeu DR ad DM vel $\frac{1}{2}a$, habebimus MR pro z; ſi verò illam ex eadem DM auferamus, obtinebimus quoque QM pro z. E quibus patet, primo caſu fieri MR, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ſecundo autem MQ, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ita ut hæc æquatio $z^2 \infty\, az - bb$ duas habeat radices, nimirum, MR & MQ, quæ, ſicut jam diximus, exprimuntur. Id quod ſecundò erat demonſtrandum.

Poſſunt quoque hæc omnia, quæ de radicibus dicta ſunt, per Algebram demonſtrari. Si enim in primo exemplo, ſicut fecimus, ponatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: auferendo utrinque $\frac{1}{2}a$, habebitur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \infty\, z - \frac{1}{2}a$. Ac proinde, ſi ſumantur horum quadrata, erit & $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Et ablato

P utrin-

utrinque $\frac{1}{4}a^2$, atque transferendo $-az$ in alteram æquationis partem: $z^2 \infty az + b^2$.

In secundo exemplo, cùm y æquatur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ac proinde $y + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc est, $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$, & per consequens $y^2 \infty -ay + bb$.

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ideoque $z - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc est, $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$; unde & $z^2 \infty az - bb$.

In ultimo exemplo, cum secundo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac idcirco $\frac{1}{2}a - z \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc est, $\frac{1}{4}aa - az + z^2$, $\infty \frac{1}{4}aa - bb$, & propterea $z^2 \infty az - bb$. Quæ quidem demonstrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORVM PLANORVM ET SOLIDORVM PAG. 26, & sequent.

QVicquid in primo libro restat, nec non in secundo usque ad Locorum Planorum & Solidorum compositionem reperitur, intellectu satis facile est; quare ad paginam 26 & sequentes progrediemur. Vbi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licèt pro arbitrio sumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri possit, ita ipsam ordinare oporteat: ut, si una, puta x, ad libitum sumatur, altera, quæ est y, denominationi terminorum ejus inserviat, sic, ut y^2 unam constituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo y sola sine x reperitur, quem sequatur y cum x, & postea x sine y, & tandem terminus, in quo neque x neque y reperiatur. Atque impossibile quidem est alios casus invenire, quando quantitates indeterminatæ y & x duas tantùm dimensiones habent: quanquam sæpissimè contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde observandum quoque est, si termini illi plures literas vel dimensiones contineant, modò quantitates indeterminatæ y & x duas dimensiones non excedant, facile esse, dividendo totam

æqua-

æquationem per literas ipsi yy adhærentes, efficere, ut yy sola unam partem æquationis constituat & reliquæ alteram partem, ad instar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum yy jungebantur. Vbi nemo existimare debet, fractionem pluribus dimensionibus constare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, postquam ex ipso numerus literarum denominatoris est subductus, quemadmodum in exemplo, eâdem hujus Geometriæ paginâ proposito, apparet.

Quod verò de dimensionibus jam diximus, eodem sensu intelligendum est, quo antea advertimus, utile esse, ut singulis æquationis terminis æquè multæ tribuantur literæ. Nam sicut b^2 significare potest lineam aliquam, sic etiam $\frac{b}{d}$, & $\frac{b}{d^2}$; quæ tamen sic usurpari non debent, nisi cùm linea quædam pro unitate est determinata: ob rationem supra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem ostendimus, quæ sequitur, cùm singulis æquationis terminis æquè multæ literæ vel dimensiones tribuuntur, etiamsi illis nil nisi lineæ aliævè res similes designentur.

Porrò notandum est, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodemve loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem sortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur y^2; & pro alio, in quibus reperitur y; & rursus pro alio omnes, in quibus y non reperitur. Atque ita ulteriùs, si radix plures dimensiones habuerit. Est autem hoc (ut diximus) generale; speciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo y reperitur, duos casus faciamus; in quorum uno y reperiatur sine x; & in altero, ubi cum x sit conjuncta: cum y & x duæ indeterminatæ quantitates sint & utravis æquationis radix esse possit. Neque difficile est ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis existentibus, facile est, tales assumere, quæ supponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod designatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi y reperitur sine x, solummodo ponatur $2my$, quippe quod supponitur æquale omnibus simul terminis ejusdem denominationis. Loco autem eorum

P 2 omnium,

omnium, ubi y & x ſimul reperiuntur, (ſiquidem hæc Geometriæ Methodus poſtulat, ut x retineatur, ac nihilominùs terminus quilibet plures quàm duas dimenſiones habere non debeat,) ponitur tantùm $\frac{2n}{z}xy$, ut ſic deſignentur fractiones omnes, quæ ſimilem habent radicis denominationem. Quòd verò loco my & $\frac{n}{z}xy$ ſumatur $2my$ & $\frac{2n}{z}xy$, id tantùm in eum finem fit, ut faciliùs ad æquationis radicem perveniatur: ad quam obtinendam requiritur, ut literarum m & n ſemiſſes accipiantur. Sicut ſuperiùs vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas ſolùm dimenſiones habet, ſumus loquuti.

Poſtquam igitur termini, in quibus y abſque x, atque etiam in quibus y & x ſimul reperiuntur, hoc modo ad ſimpliciores reducti ſunt, extrahitur radix ex Æquatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix eſt

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}},$$

Deinde ſumenda eſt m^2 pro omnibus terminis in vinculo, in quibus x non reperitur, cujus quantitas m eadem eſt in æquatione propoſita cum ea, quæ eſt extra vinculum; ſed aliàs poteſt eſſe diverſa, quo caſu loco m extra vinculum præſtat quodammodo aliam literam aſſumere. Poſt quæ præter terminos, in quibus x abſque y reperitur, nihil reducendum reſtat. Poſſunt autem hi duobus modis ſe habere: prout nimirum habebitur vel x^2, vel x ſimpliciter. Vnde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus x ſimpliciter reperitur, ſcribendum ſit $o\,x$. Quo loco notandum quoque venit, literam o quantitatem aliquam hîc deſignare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis eſt ac loco illorum omnium ſcribitur, quæ cum x junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram ſeu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hîc, ad confuſionem evitandam, præſtare videatur, pro o aliam quandam literam ſubſtituere. Sed hæc monuiſſe ſufficiat. Denique reducendæ ſunt etiam literæ, quæ cum x^2 junguntur, quæque nil præter fractionem deſignare poſſunt: cum x^2 duas habeat dimenſiones, hoc videlicet modo: $\frac{p}{m}x^2$. Vbi conſiderare oportet, quòd litera m fractionis $\frac{p}{m}$ eadem

quan-

quantitas existat, quæ in m^2 in vinculo. Quâ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantùm dimensiones ascendit, quæ, prout ex illa educta est, non reducatur ad hanc formulam: $y \propto m - \frac{n}{z} x + \sqrt{m^2 + o x - \frac{p}{m} x^2}$. Ita ut hæc ipsa quibuslibet Locis Planis & Solidis construendis inservire queat: cum omnes locos sive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri possunt, comprehendat; adeoque non nisi signorum $+$ & $-$ variationem, atque loca & terminos, qui in propositis æquationibus deprehendi nequeunt, considerare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes sunt animadversa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre possent, illustrare conabimur.

OBSERVATIO PRIMA.

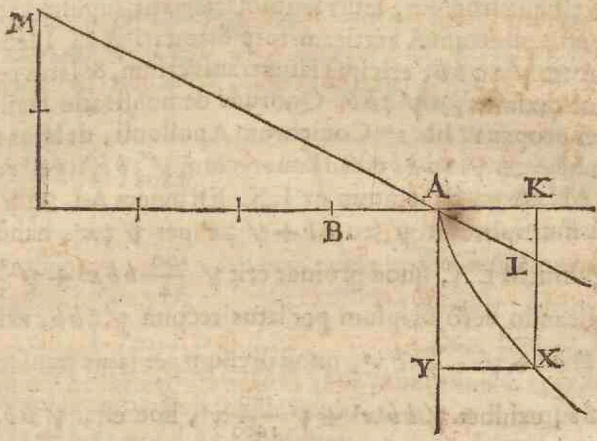
Postquam æquatio ad supradictam formulam est reducta, & illa, sive æquè multos, sive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis est affecta: ut exempli gratiâ, si loco $\frac{n}{z} x$ habeatur $\frac{3}{4} x$, potest operatio institui per hasce fractiones, supponendo, numeratorem 3 esse æqualem numeratori n, & denominatorem 4 æqualem denominatori z. Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales sunt, & ad literas superioris formulæ referuntur. Vnde cùm habetur fractio denotata hoc pacto $x \sqrt{\frac{3}{4}}$ loco $\frac{n}{z} x$; erit litera n æqualis $\sqrt{3}$, & z æqualis $\sqrt{4}$, atque ita de aliis. Est autem bene observandum, quod diximus: nimirum, si in æquatione reperiatur m^2, denominatorem m fractionis $\frac{p}{m} x^2$ tum esse æqualem ipsi m quantitatis m^2. id quod facile est, etiamsi alia fractio haberetur, modò supponamus, m esse ad p, sicut denominator hujus fractionis ad suum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd si autem id per numeros fieri non possit, operandum erit per literas, quod sæpe est commodissimum. Porrò observandum est, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & transverso inserviunt, non aliæ literæ usurpandæ sint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem terminorum non magis sint considerandæ, quàm si non haberentur. Cujus ratio est, quòd D. des Cartes, ut universaliter hæc tractaret, terminos hosce ejusmodi constitutionis effecerit, in qua loca omnia forent repleta. Adeóque literæ locorum, quæ in proposita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ sunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & transversis exprimendis inserviunt.

OBSERVATIO SECUNDA.

PAg. 27. casus, cùm in æquatione non habetur m, difficultatem afferre posset, quare ad illum intelligendum cogitandum est, quòd, quando in æquatione non habetur m, ducenda itidem non sit linea I K in figura ejusdem paginæ. Ac proinde, ut inveniatur L I, postquam habetur $\frac{n}{z}x$, non referenda est illa ad I K sed ad A B, eodem modo, quo D. des Cartes ipsam comparat ipsi I K. Quandoquidem facere oportet, ut A B sit ad B L, sicut z ad n, hoc est, ut A B existente x, B L sit $\frac{n}{z}x$, atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, si habeatur $-\frac{n}{z}x$; at ex altera parte versùs R, si reperiatur $+\frac{n}{z}x$. Quo facto, ducenda est linea A L, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ L I, hoc est, eodem munere fungetur, quo L I in exemplo D[ni] des Cartes. Et quidem cognita erit linea A L, cum lineæ A B, B L, angulusque A B L cognoscantur. Atque ita pro A L accipere possumus $\frac{a}{z}x$; eritque a nota.

Sed rem fortassis planiùs per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in exposita figura, recta linea A Y, curva autem A X, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam A Y normaliter ducatur X Y, sumptâque utcunque rectâ A B, hæc ipsa unà cum linea A Y sit ad lineam A Y, sicut linea A Y ad lineam X Y.

Esto A B $\infty\ b$, A Y $\infty\ y$, & A K æqualis ac parallela ipsi X Y $\infty\ x$. Hinc cum $b+y$ sit ad y, sicut y ad x, erit $yy \infty xy + xb$, & $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xb}$. Vnde ex iis, quæ habentur pag. 29. constat, lineam hanc esse Hyperbolam, eò quòd habetur $+\frac{1}{4}x^2$. Ad quam construendam, cum A K sit x, linea K L erit $\frac{1}{2}x$, quan-



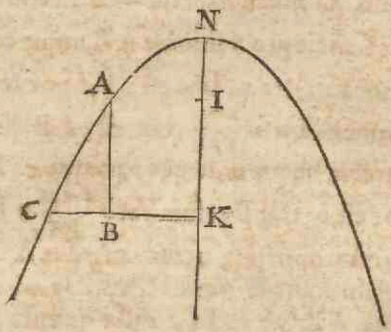
quandoquidem hæc fractio æqualis eſt ac ipſi $\frac{n}{z}x$ reſpondet. Porrò, quoniam rectus eſt angulus AKL, erit quadratum ex AL æquale quadratis ex AK & KL ſimul ſumptis. Hinc cum quadratum ex AK ſit x^2, & quadratum ex KL $\frac{1}{4}x^2$, AL erit $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ ſeu $x\sqrt{\frac{5}{4}}$; id quod æquale ſupponimus ipſi $\frac{a}{z}x$, at $\frac{1}{4}x^2$ ipſi $\frac{p}{m}x^2$: ita ut $\sqrt{5}$ ſit a, & $\sqrt{4}$ ſit z, & 1 ſit p, & 4 ſit m. Quibus poſitis, terminus $\frac{aom}{2pz}$, qui inveniendo centro inſervit, erit $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, cum am hoc eſt, $4\sqrt{5}$, valeat $\sqrt{80}$; & $2pz$, hoc eſt, $2\sqrt{4p}$, valeat $\sqrt{16}$; & o ſit æqualis ipſi b; & $b\sqrt{\frac{80}{16}}$ valeat $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, hoc eſt, $\sqrt{5bb}$. Quod quidem centrum ſumendum eſt à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola eſt, & habetur $+bx$, hoc eſt, $+ox$, juxta pag. 30. Latus rectum hîc eſt $\frac{oz}{a}$, hoc eſt, $b\sqrt{\frac{4}{5}}$ ſeu $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Vnde latus tranſverſum ſit $\frac{aom}{pz}$: quoniam oportet, ut pz^2 ſit ad a^2m, ſicut $\frac{oz}{a}$ ad latus tranſverſum, quod idcirco, (ut diximus,) erit $\frac{aom}{pz}$. id quod facit $b\sqrt{\frac{80}{4}}$, hoc eſt, $\sqrt{20bb}$. Ac

proinde

proinde cum diſtantia puncti A à centro ſit $\sqrt{5\,bb}$, quæ ſemiſſis eſt lateris tranſverſi (quoniam, cùm duorum quadratorum unum alterius eſt quadruplum, latus tantùm lateris fit duplum); manifeſtum eſt, punctum A verticem fore diametri A L. Ideoque ſi fiat $MA \propto \sqrt{20\,bb}$, erit ipſa latus tranſverſum, & latus rectum erit, (ut diximus,) $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Quorum demonſtratio facilis eſt. Nam per prop. 21. lib. 1^{mi} Conicorum Apollonii, ut latus tranſverſum $MA \propto \sqrt{20\,bb}$ eſt ad latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, ita eſt rectangulum M L A ad quadratum ex L X. Eſt autem $AL \propto \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Hinc ſi multiplicetur $\sqrt{20\,bb} + \sqrt{\frac{4}{5}x^2}$ per $\sqrt{\frac{4}{5}x^2}$, habebitur rectangulum M L A, quod proinde erit $\sqrt{\frac{100}{4}bbx^2} + \sqrt{\frac{25}{16}x^4}$. Multiplicando verò id ipſum per latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, exſurgit $\sqrt{\frac{400}{20}b^4x^2} + \sqrt{\frac{100}{80}bbx^4}$, quod diviſum per latus tranſverſum $\sqrt{20\,bb}$, exhibet $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}x^4}$, hoc eſt, $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}x^4}$, ſeu $bx + \frac{1}{4}x^2$, pro quadrato ex L X, unde ipſa L X fit $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$. Jam ſi ad lineam L X addatur linea $LK \propto \frac{1}{2}x$, obtinebitur linea X K, hoc eſt, $y \propto \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$, ac per conſequens $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \propto y - \frac{1}{2}x$. Vnde ductâ utrâque æqualitatis parte in ſe, fiet $bx + \frac{1}{4}x^2 \propto yy - xy + \frac{1}{4}x^2$, ſeu $yy \propto bx + xy$. Hinc ut $b + y$ ſe habet ad y, ita y ſe habebit ad x. Quod erat demonſtrandum.

Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum caſum in quo non reperiatur $\frac{n}{z}x$ in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc $yy \propto -2dy + bx$, cujus radix eſt $y \propto -d + \sqrt{d^2 + bx}$, quam conſtruere oporteat. Supponatur in figura ſequente $AB \propto x$, & angulus A B C ad libitum, B C autem, indefinitè continuata versùs B, $\propto y$; fiatque $BK \propto d$, quæ hîc idem præſtat quod m in ſuperiori formula, quoniam habetur $-d$. Ductâ autem N K indefinitè parallelâ ipſi A B, ſumatur K I æqualis A B, prout oſtenſum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantùm $\sqrt{d^2 + bx}$, & pagina ſequens docet lineam quæſitam eſſe Parabolam, quoniam non habetur x^2. Præterea puncto N exiſtente vertice, linea I N eſſe debet $\frac{am^2}{oz}$ hoc eſt, $\frac{d^2}{b}$, in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit $\frac{oz}{a}$;

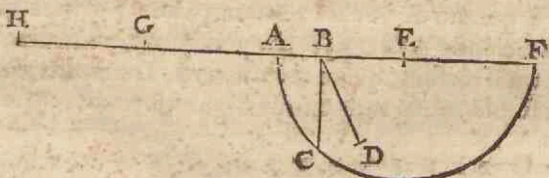
idem



idem hîc existens quod b, & sit K C ordinatim adplicata ad diametrum. Quorum demonstratio nec difficilis. Nam, secundùm 11 prop. 1mi Libri Conicorum Apollonii, rectangulum comprehensum sub latere recto b & linea N K ∞ $\frac{d^2}{b} + x$, utpote, $dd + bx$, est æquale quadrato lineæ K C. Est verò linea K C æqualis ipsis B C $\infty\ y$, & B K $\infty\ d$, simul sumptis. Erit itaque linea K C $\infty\ y + d$, & quadratum ejus $\infty\ yy + 2\,dy + dd$. Ac proinde $yy + 2\,dy + dd \infty\ dd + bx$, & per consequens $yy \infty - 2\,dy + bx$. Quod demonstrare oportebat.

OBSERVATIO TERTIA.

Paginâ 29, circa medium, dictum est, lineam quæsitam esse Circulum, cùm $aam \infty\ pz^2$, & cùm angulus est rectus. Verùm hoc intelligendum etiam est, cùm angulus est rectus, nec omnino habetur aam, nec pz^2: aut cùm in æquatione literæ unius termini æquales sunt literis termini alterius. Ad pleniorem autem horum intellectum sequentia construamus exempla.



Habeatur æquatio $yy \infty\ bx - x^2$, cujus radix est $y \infty \sqrt{bx - x^2}$, & supponatur in apposita figura linea H A $\infty\ b$, linea A B $\infty\ x$, &

 linea

linea B C vel B D ∞ y. Manifeſtum autem eſt, lineam conſtruendam eſſe Ellipſin aut Circulum, quoniam habetur $-x^2$. Non reperitur autem m, aut $\frac{n}{z}x$. Et ſufficit pro x ſumere A B, atque centrum ab A versùs B, cùm habeatur $+ox$, hoc eſt, in hoc exemplo, $+bx$. Ita ut pro illo ſumendum ſit $\frac{aom}{2pz}$, hoc eſt, b diviſum per 2, ſeu $\frac{1}{2}b$, cum non habeatur a, neque m, neque p, neque z. Latus autem rectum ſit $\frac{oz}{a}$, hoc eſt, b; tranſverſum verò $\frac{aom}{pz}$, hoc eſt, b; & tum conſiderare tantùm oportet, utrum angulus A B C an verò A B D ſit rectus. Nam cum hîc non habeatur aam, nec pz^2, exiſtente angulo (puta A B C) recto, linea quæſita erit Circulus; at verò obliquo exiſtente (ut A B D) erit linea quæſita Ellipſis. Quapropter ſi utroque caſu faciamus A E ∞ $\frac{1}{2}b$, erit punctum E centrum, & A F ∞ b latus tranſverſum; latus autem rectum ∞ b, atque B C vel B D ∞ y ordinatim adplicata ad diametrum A F. Quorum demonſtratio facilis eſt. Etenim quoniam utroque caſu juxta 21^{mam} prop^{nem} 1^{mi} libri Conicorum Apollonii latus tranſverſum b eſt ad latus rectum b, ſicut rectangulum F B A ad quadratum ex B C vel B D: erit rectangulum F B A æquale quadrato ex B C vel B D. Hinc cum F B ſit ∞ $b-x$, & A B ∞ x, erit dictum rectangulum, hoc eſt, $bx-x^2$, æquale quadrato ex B C vel B D, hoc eſt, erit $yy \infty bx-x^2$. Quod erat demonſtrandum.

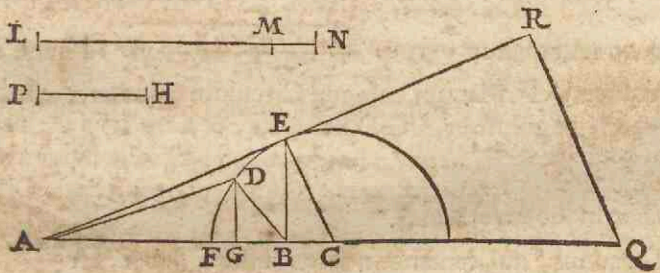
Quòd ſi æquatio haberetur $yy \infty bb+x^2$, quæſita linea eſſet Hyperbole: & ſi vel B C, vel B D ſumatur pro y, hoc eſt, ſive angulus ſit rectus, ſive obliquus; erit conſtructio præcedenti omnino ſimilis; niſi quòd centrum & latus tranſverſum ſit ſumendum à puncto A versùs alteram partem, nempe versùs H. Atque ita faciendo A G ∞ $\frac{1}{2}b$, fiet punctum G centrum, eritque tam latus tranſverſum, quàm rectum ∞ b. Demonſtratio præcedenti erit ſimilis, obſervatis tantùm ſignis $+$ & $-$.

OBSERVATIO QVARTA.

ANimadvertendum præterea eſt, ſi in æquatione non habeatur fractio ipſi x^2 adhærens, & nihilominus tamen adſit m^2, hoc eſt, habeatur, verbi gratiâ, $\sqrt{m^2+ox-x^2}$ loco $\frac{p}{m}x^2$: quòd

quòd tum quidem fractio, (ut supra notavimus) si alia quàm $\frac{p}{m}$ fuerit, transmutanda sit in fractionem ubi habeatur $\frac{p}{m}$. supponendo scilicet m esse ad p, sicut denominator alterius fractionis ad ejusdem numeratorem: quoniam in hac Methodo requiritur, ut m ipsius m^2 sit denominator fractionis ipsi x^2 adhærentis. Vbi quidem, in casu, quo haberi ponimus m^2, non autem fractionem, quæ ipsi x^2 adhæreat, supponere oportet $p \propto m$, ita ut habeamus $\frac{p}{m}x^2$ non aliûs valoris quàm x^2. Quod cognoscendis centris, lateribusque rectis atque transversis inservire poterit.

Ad pleniorem verò intellectum, detur in sequente figurâ linea AB, & puncta in ea A & B; oporteatque invenire punctum,



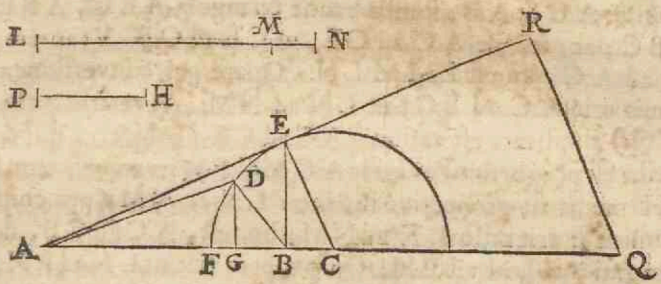
ut D, à quo si ducantur lineæ AD, DB, ut ipsæ datam inter se obtineant rationem, hoc est, ut AD sit ad DB, sicut linea PH ad lineam MN; quarum quidem PH sit major quàm MN.

Demittatur à puncto D super AB perpendicularis DG, & supponatur AB $\propto b$, AG $\propto x$, GD $\propto y$, MN $\propto f$. Quoniam igitur rectus est angulus AGD, erit quadratum ex AD æquale quadratis ex AG, GD, simul sumptis, hoc est, $\propto x^2 + yy$. Eodem modo, cum GB sit $b - x$, erit quadratum ex DB æquale quadratis ex BG, GD, hoc est, $\propto yy + bb - 2bx + x^2$. Iam verò, cum AD sit ad DB, sicut PH ad MN, erit quoque quadratum ex AD ad quadratum ex DB, sicut quadratum ex PH ad quadratum ex MN. Porrò fiat, ut PH ad MN, sic LN ad PH, eritque L N ad M N, ut quadratum à P H ad quadratum ab M N. Hinc si L N vocetur c; erit c ad f, sicut quadratum à P H ad quadratum ab M N, hoc est, ut quadratum ex A D $\infty\ x^2 + yy$ ad quadratum ex D B $\infty\ yy + bb - 2bx + x^2$. Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc est, $fx^2 + fyy \infty\ cyy + cbb - 2cbx + cx^2$, & per consequens, $cyy - fyy \infty - cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2$, ac denuo $yy \infty \frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c - f}$, & tandem $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c - f}}$.

Ad abbreviandum autem hunc terminum $\frac{-cx^2 + fx^2}{c - f}$; licèt consideremus, quòd $f - c$ & $c - f$ exprimant semper unam eandemque differentiam, quippe quæ est inter c & f, etiamsi c major sit quàm f (dum in operatione supponimus $h \infty\ c - f$); semper tamen habebimus $\frac{-cx^2 + fx^2}{c - f} \infty \frac{-hx^2}{h}$, hoc est x^2 simpliciter; adeò ut relinquatur $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx}{c - f} - x^2}$. Id quod nos docet, locum esse Planum, eumque Circulum existere: cum habeatur $-x^2$, angulusque A G D sit rectus, & $aam \infty\ pz^2$; neque enim hîc habetur a, neque z; atque m ipsi p æqualis supponitur; cum nulla ipsi x^2 fractio adhæreat. Quibus ita constitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, est $\frac{aom}{2pz}$, ex quo nobis præter $\frac{o}{2}$ nihil inservit: cum m ipsi p sit æqualis; hoc est, pro eo tantùm habebimus $\frac{cb}{c - f}$. Ac idcirco, postquam linea L M æquatur $c - f$, si fiat ut linea L M $\infty\ c - f$ ad lineam L N $\infty\ c$, ita linea A B $\infty\ b$ ad lineam A C, erit linea A C $\infty \frac{cb}{c - f}$, & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A versùs B, quoniam habetur $+ \frac{2cbx}{c - f}$, respondens ipsi ox. Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & transversum sibi invicem sunt æqualia, alterutro tantùm erit opus. Formula autem lateris recti hîc est $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$. Vnde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inservit, non aliud erit quàm $\sqrt{oo - 4m^2}$, hoc est, quòd,

quòd, auferendo quadratum $\frac{4cb^2}{c-f}$ à quadrato ex $\frac{2cb}{c-f}$, relinquatur quadratum lateris recti. Est autem paulò ante inventa linea



A C ∞ $\frac{cb}{c-f}$; ideoque ejus dupla A Q ∞ $\frac{2cb}{c-f}$. Hinc invenire adhuc oportet $\frac{4cb^2}{c-f}$, quod repræsentatur per $4m^2$. Invenitur autem; ponendo esse, ut $c-f$ ad c, ita bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. at ut $c-f$ est ad c, sic A B ∞ b est ad A C. Quapropter erit ut b ad lineam A C, sic bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. Quoniam autem ratio duorum quadratorum ad invicem duplicata est rationis, quam inter se habent ipsorum latera: hinc, si ponamus lineam A E mediam proportionalem inter b & lineam A C; erit b ad lineam A E, sicut b ad $\sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. & per consequens linea A E ∞ $\sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. Vnde si A R fiat dupla ipsius A E, erit ea æqualis $\sqrt{\frac{4cb^2}{c-f}}$. Adeòque si constituamus triangulum A R Q, cujus latus A Q sit æquale $\frac{2cb}{c-f}$ (ut dictum est), cujusque angulus A R Q sit rectus; erit latus R Q ∞ $\sqrt{o^2 - 4m^2}$: quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ $\frac{2cb}{c-f}$, minus quadrato $\frac{4cb^2}{c-f}$. Atque ita R Q fit & latus rectum & diameter Circuli. Et si ex centro C ducatur linea C E parallela ipsi

R Q, erit ipsa æqualis radio Circuli, utpote æqualis semissi lineæ R Q.

Et hæc quidem quantum ad constructionem juxta hanc Methodum, quæ, postquam jam est inventa, brevior reddi potest. Nam cum angulus A E C sit rectus, & A E media proportionalis inter A C & A B, similia erunt triangula A E C, A B E, & E B C; ac proinde A C ad C E, ut C E ad C B. Vt autem A B est ad A C, ita est L M ad L N. Quare per conversionem rationis erit A C ad B C, ut L N ad N M. At verò ut ratio A C ad C B duplicata est rationis A C ad C E (propterea quòd C E media est proportionalis inter A C & C B), ita etiam, cum linea P H media sit proportionalis inter L N & N M (per constructionem): erit ratio L N ad N M, hoc est, A C ad C B, duplicata rationis L N ad P H. Quapropter erit ut L N ad P H, seu P H ad M N, ita A C ad C E; quæ quidem Circuli radius est. Demonstratio hujus constructionis ad imitationem præcedentium inveniri potest, quam hîc omittimus: cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica sit ostensa.

OBSERVATIO QVINTA.

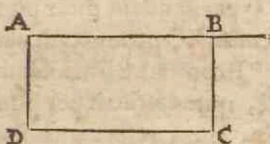
PAg. 21 hujus Geometriæ dictum est: quòd, postquam hæc æquatio non ascendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva semper sit primi & simplicissimi generis, sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ. Quod ita intelligendum est, duas quantitates indeterminatas x & y, cùm separatim in Æquationis terminis reperiuntur, non ultra sua quadrata ascendere debere; sed in terminis, ubi simul reperiuntur, singulas non nisi unam dimensionem habere debere, ita ut simul tantùm rectangulum aliquod duasve dimensiones efficiant.

Similiter, si in Æquatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur y^3, vel x^3; aut y^4, vel x^4; aut denique $x\,y^2$, vel $x^2\,y$, vel $x^2\,yy$: linea curva esset secundi generis. Et sic de cæteris. In quibus omnibus solùm indeterminatarum quantitatum ratio habenda est, non autem quantitatum cognitarum, quibuscum junguntur.

Quòd

Quòd ſi quantitates indeterminatæ ſingulæ ſeparatim ad duas dimenſiones non aſcendant, neque etiam ſimul, hòc eſt, ſi nullus terminorum ad yy, aut ad xy aſſurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cùm locus eſt ad rectam lineam, Geometria hæc non minùs ipſum componere docet, quàm cùm locus eſt ad curvam lineam, quæ ſit primi generis, & cùm in æquatione habetur yy: ſicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi quæſtione, ex qua ſuperior formula deducta fuit, cernere licet. Quòd ſi verò habeatur x^2 in æquatione, non autem yy, immutanda tantùm erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur y, quæ dicta fuit x, & x, quæ dicta fuit y: in hunc modum. Eſto in ſequenti figura A B ∞ x, & B C ∞ y, atque æquatio inventa $x^2 \infty by$, quam ad dictam formulam reducere oportet.



Ducta igitur A D parallelâ ipſi B C, & D C parallelâ ipſi A B, mutatiſque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando A D, cui æqualis eſt B C, x, & D C, quæ æqualis eſt A B, y; quæſita æquatio erit $yy \infty bx$. cujus radix eſt $y \infty \sqrt{bx}$. Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum C fore in Parabola.

At verò ſi in æquatione non habeatur x^2, nec yy, ſed xy; qui quidem caſus, quoniam nec in æquatione quæſtionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam afferre poſſet, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad ſummum plures quàm quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi x reperitur ſine y; alterum, ubi y reperitur ſine x; tertium, ubi reperitur xy; ac quartum denique, ubi neque x neque y reperitur. Adeò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationum ac conſtructionum, quæ ſequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quonam pacto locus ſemper ad Hyperbolam exiſtat, lineæque indeterminatæ ſint Aſymptoti, aut ipſis parallelæ.

Detur enim poſitione linea B H, punctum autem in ea datum ſit A: deinde aſſumptâ lineâ A X pro x, ductâque lineâ X Y, quam pro y ſumemus, facientem cum A X talem angulum, qualem

lem libuerit, eâque indefinitè productâ : ducantur lineæ D K, L P, Q T parallelæ ipsi B H; ita ut D K cadat infra B H; L P autem supra B H, inter puncta X & Y; Q T verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ Q D, R A E, S F, T K parallelæ ipsi X Y seu Z G; ita ut linea Q D transeat per lineam X A, productam versùs A; & S F per eandem inter puncta A & X; nec non linea T K per eandem A X, productam versùs X. Quibus ita constitutis, si per 4tam Propnem 2di libri Conicorum Apollonii describatur Hyperbola, quæ transeat per punctum Y, cujusque Asymptoti sint lineæ, quas refert quælibet constructio; manifestum est, per 12 Propnem ejusdem libri rectangula omnia, quæ ad easdem lineas similiter sumuntur, sibi invicem esse æqualia. Ideoque demonstrandum solùm restat, Asymptotos, atque rectangulum uniuscujusque æquationis, ritè esse constructa.

Esto igitur secundùm ultimam æquationem Hyperbola constructa, transiens per punctum Y, cujusque Asymptoti sint D Q, & D G; & rectangulum, contentum sub lineis D G, G Y, sit æquale rectangulo dato $df + bc$. Hinc si juxta constructionem fecerimus lineas A X ∞ x, X Y ∞ y, A B ∞ c, B D vel X G ∞ b: manifestum est, B X vel D G fore $x + c$; G Y autem $y + b$; atque multiplicando unam per alteram proditurum $bc + bx + cy + xy$, pro rectangulo linearum D G, G Y. quod aliunde quoque æquatur $df + bc$. Ac proinde, si utrinque commune auferatur rectangulum bc, relinquetur $xy + cy + bx$ ∞ df. quæ est æquatio proposita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & constructionum demonstratio ostendetur.

Æqua-

Æquatio 1ma.
$xy \infty df$.
Constructio.
Rectangulum AXY ∞df.
Asymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
$xy + cy \infty bx$.
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞bc.

Æquat. 3.
$xy + bx \infty cy$.
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY ∞bc.

Æquat. 4.
$xy - cy \infty bx$.
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN, NO.
Rectang. NOY ∞bc.

Æquat. 5.
$xy + cy \infty df$.
Constr.
AB ∞c.
Asympt. QB, BX.
Rectang. BXY ∞df.

Æquat. 6.
$xy + bx \infty df$.
Constr.
AE ∞b.
Asympt. RE, EG.
Rectang. EGY ∞df.

Æquat. 7.
$xy - cy \infty df$.
Constr.
AC ∞c.
Asympt. SC, CX.
Rectang. CXY ∞df.

Æquat. 8.
$xy - bx \infty df$.
Constr.
AM ∞b.
Asympt. RM, MO.
Rectang. MOY ∞df.

Æquat. 9.
$xy + df \infty cy$.
Constr.
AH ∞c.
Asympt. AH, HT.
Rectang. HXY ∞df.

Æquat. 10.
$xy + df \infty bx$.
Constr.
AR ∞b.
Asympt. AR, RZ.
Rectang. RZY ∞df.

Æquat. 11.
$xy + cy - bx - df \infty 0$.
Constr. quando df excedit bc.
AB ∞c, BL ∞b.
Asympt. QL, LO.
Rectang. LOY $\infty df - bc$.
Constr. cùm bc excedit df.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty bc - df$.

Æquat. 12.
$xy + bx - cy - df \infty 0$.
Constr. quando rectang. df majus est rectangulo bc.
AC ∞c, CF ∞b.
Asympt. SF, FG.
Rectang. FGY $\infty df - bc$.
Constr. quando bc rectang. excedit rectang. df.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty bc - df$.

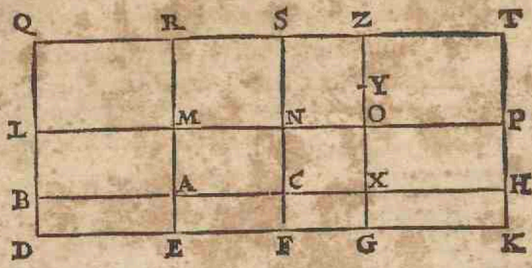
Æquat. 13.
$xy - cy - bx - df \infty 0$.
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN, NO.
Rectang. NOY $\infty df + bc$.

Æquat. 14.
$xy + cy - bx + df \infty 0$.
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty df + bc$.

Æquat. 15.
$xy + bx - cy + df \infty 0$.
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty df + bc$.

Æquat. 16.
$xy - cy - bx + df \infty 0$.
Constr. quando df superat bc.
AH ∞c, HP ∞b.
Asympt. MP, PT.
Rectang. POY $\infty df - bc$.
Constr. cùm bc superat df.
AH ∞c, HT ∞b.
Asympt. HT, TQ.
Rectang. TZY $\infty bc - df$.

Æquat. 17ma *& ultima.*
$xy + cy + bx - df \infty 0$.
Constr.
AB ∞c, BD ∞b.
Asympt. QD, DG.
Rectang. DGY $\infty df + bc$.



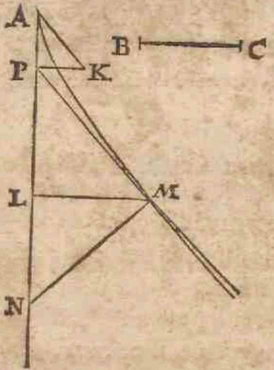
Præterea evidens eſt, in 11^{ma}, 12^{ma}, & 16^{ta} æquatione exiſtente rectangulo df æquali bc, ſi hoc ipſum in locum df ſubſtituatur, undecimam quidem tunc fore diviſibilem per $x + c$, duodecimam per $y + b$, & decimam ſextam per $c - x$; Vtramque autem 11^{mam} & 16^{tam} poſſe reduci ad $y \infty b$; aſt 12^{mam} ad $x \infty c$. Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur $y \infty b$, & X Y ipſi b ſit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipſi A X parallela, ut habeatur quæſita; Aut quando habetur $x \infty c$, & X A ipſi c ſit æqualis, erit parallela A R linea recta quæſita.

Cæterùm potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, tranſmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (ſicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere poſſunt, ordine diſpoſuimus); tum etiam conſtructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere ſub iis, quæ omnes habent completos: ſed quoniam multò prolixiori indiguiſſemus ſermone, & res ipſa minùs fuiſſet dilucida, ratione oſtenſâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQVENTES, DE MODO INVENIENDI CONTINGENTES LINEARVM CVRVARVM.

NOtandum hîc eſt, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expoſitum, conſiſtere in invenienda æquatione, in quâ linea y vocata ſumi poteſt pro duabus quantitatibus diverſis, cùm linea quæ vocatur v ad tangentem non refertur,

fertur, at verò cùm ad ipsam refertur, quòd tunc duæ illæ quantitates diversæ intelligantur æquales seu in unam cöalescere. Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$ aliave ex hac compositâ. Ejus rei proponamus sequens exemplum.



Esto linea recta A N, curva autem A M, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam A N ducatur perpendicularis M L, recta B C, ad arbitrium sumpta, unà cum A L, sit ad A L, sicut linea A L ad L M. Oportet rectam lineam invenire P M, tangentem hanc curvam A M in puncto M. Supponatur linea N M perpendicularis ad tangentem P M in puncto M, & B C $\infty\, b$, A L $\infty\, y$, & L M $\infty\, x$. Hinc cum $b + y$ sit ad y ut y ad x, fiet æquatio talis: $bx + yx \infty yy$, ac proinde $x \infty \frac{y^2}{b+y}$. Iam verò pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam A M tangi à circulo cujus radius M N, satiùs est imaginari, quòd ipsa tangatur à recta linea M P: quandoquidem hoc modo superfluam multiplicationem evitamus. Quocirca statuendo A P $\infty\, v$, & P K $\infty\, s$ esse parallelam ipsi L M, atque ab A K, quæ parallela est ipsi P M, secari in K; erit ut v ad s, sic $y - v$ ad L M seu $\frac{ys - vs}{v}$. Quæ quidem cum supra inventa sit $\infty \frac{y^2}{b+y}$, habebitur $\frac{yy}{b+y} \infty \frac{ys - vs}{v}$, vel $yy \infty \frac{bs - vs}{v - s}$ in $y - \frac{bvs}{v - s}$, comparandum cum $yy \infty 2ey - e^2$. Vnde primò invenimus $\frac{bs - vs}{v - s} \infty 2e$, vel $s \infty \frac{2ev}{b - v + 2e}$. Deinde $\frac{bvs}{v - s} \infty e^2$, vel $s \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$, ac per consequens $\frac{2ev}{b - v + 2e} \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$. Hoc est, A P $\infty\, v \infty \frac{be}{2b + e}$ seu $\frac{by}{2b + y}$, & P L $\infty\, y - v \infty \frac{by + y^2}{2b + y}$. Cæterùm quoniam L M media eſt proportionalis inter P L & L N, erit L N $\propto \frac{2by^3+y^4}{b^3+3b^2y+3by^2+y^3}$. Quod erat faciendum. Vel etiam ſic, imaginando curvam A M tangi à circulo, cujus radius eſt M N. Omnino ut in hujus Geometriæ Methodo ſupponitur factum.

Igitur quoniam habemus $\frac{y^2}{y+b} \propto x$, ac proinde $x^2 \propto \frac{y^4}{y^2+2by+b^2}$, ſupponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, A N $\propto v$, & M N $\propto s$, & erit quadratum ex L M, hoc eſt, x^2, $\propto ss-vv+2vy-yy$, ac idcirco $\frac{y^4}{y^2+2by+b^2} \propto ss-vv+2vy-yy$. Vnde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, diviſâque totâ ſummâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{lllll} y^4+by^3 & +\frac{1}{2}vvyy & +bvvy & +\frac{1}{2}bbvv & \propto 0. \\ \quad -v & +\frac{1}{2}bb & -bbv & -\frac{1}{2}bbss & \\ & -2bv & -bss & & \\ & -\frac{1}{2}ss & & & \end{array}$$

Iam verò multiplicando $yy-2ey+ee \propto 0$ per $yy+fy+gg$, ut alteri reddatur ſimilis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{lllll} y^4+fy^3 & +ggyy & -2eggy & +eegg & \propto 0. \\ \quad -2e & -2ef & +eef & & \\ & +ee & & & \end{array}$$

Quæ ſi comparetur cum præcedente, quantitates ſecundi termini præbebunt $f \propto b+2e-v$; ultimi $gg \propto \frac{b^2v^2-b^2s^2}{2e^2}$; & tertii $\frac{b^2v^2-b^2s^2}{2e^2}-2be-3ee+2ev \propto \frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}bb-2bv-\frac{1}{2}ss$. Ac proinde ſi multiplicemus totum per $2ee$, producetur $+bbvv-bbss-4be^3-6e^4+4ve^3 \propto vvee+bbee-4bvee-ssee$, ſive $bbvv-4be^3-6e^4+4ve^3-vvee-bbee+4bvee \propto bbss-eess$, & per conſequens

$$\frac{\begin{array}{llll} -6e^4 & +4ve^3 & -vvee & +bbvv \\ & -4b & +4bv & \\ & & -bb & \end{array}}{bb-ee} \propto ss.$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2+b^2s^2}{e}+bee-vee+2e^3 \propto +bvv-bbv-bss.$$

Vnde multiplicando totum per e, fiet

$-bbvv+bbss+be^3-ve^3+2e^4 \propto +bvve-bbve-bess$,

ac

ac per consequens

$$\frac{\begin{array}{l}-2e^4+ve^3+bvve+bbvv\\ \quad\;\; -b \quad\; -bbv\end{array}}{bb+be} \propto ss.$$

Quocirca habebimus

$$\frac{\begin{array}{l}6e^4+4ve^3-vvee+bbvv\\ \;\; -4b\;\;+4bv\\ \qquad\quad\;\; -bb\end{array}}{bb-ee} \propto \frac{\begin{array}{l}-2e^4+ve^3+bvve+bbvv.\\ \qquad\;\; -b \quad\; -bbv\end{array}}{bb+be}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$\begin{array}{l}2e^6+7be^5+8bbe^4+4b^3e^3-4b^3vee-b^4ve \propto 0.\\ \;\;-v \quad\; -4bv \quad -6bb \;\;+b^4\end{array}$$

Quam æquationem si dividamus per $ee+be$, orietur

$$\begin{array}{l}2e^4+5be^3+3bbee-3bbve-b^3v \propto 0:\\ \;\;-v \quad -3bv \;\;\; +b^3\end{array}$$

ac per consequens

$$2e^4+5be^3+3bbee+b^3e \propto b^3v+3bbev+3beev+e^3v.$$

ac demum $\frac{2e^4+5be^3+3b^2e^2+b^3e}{b^3+3b^2e+3bee+e^3} \propto v.$

Vbi si in locum e substituatur y, atque ex hac summa deinde auferatur linea A L $\propto y$, relinquetur L N $\propto \frac{2by^3+y^4}{b^3+3bby+3byy+y^3}$, ut supra. Vbi notandum, lineam hanc curvam non aliam esse quàm Hyperbolam, supra à nobis constructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

DEmonstranda hîc est operatio, quam hæc Geometria nos docet, cùm radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio $x^3-cx^2+ddx-b^3 \propto 0$, cujus radicem incognitam x per lineam b multiplicare oporteat. Supponatur $y \propto xb$, & fiet $\frac{y}{b} \propto x$, ideoque $\frac{y^2}{b^2} \propto x^2$, nec non $\frac{y^3}{b^3} \propto x^3$. Proinde si substituamus in æquatione præcedente $\frac{y}{b}$ loco x, & $\frac{y^2}{b^2}$ loco x^2, itemque $\frac{y^3}{b^3}$ loco x^3, erit sequens æquatio $\frac{y^3}{b^3}-$

$\frac{cy^2}{h^2} + \frac{d^2 y}{h} - b^3 \infty$ o, æqualis præcedenti. Vnde multiplicando totum per h^3, producetur $y^3 - chyy + ddhhy - b^3h^3 \infty$ o. Evidens autem eſt, idem productum inveniri, ſi in æquatione propoſita ponamus y, & quadratum ejus yy, cubumque y^3, loco x, x^2, x^3: atque deinde ſecundum terminum multiplicemus per h, tertium per h^2, & quartum per h^3. omnino ut hæc Geometria docet. Vbi, poſtquam ſubſtituimus $\frac{y}{h}$, $\frac{y^2}{h^2}$, & $\frac{y^3}{h^3}$ loco x, x^2, & x^3, ad multiplicandum totum per h^3, ſufficit auferre denominatorem, qui ab h denominatur, atque tantùm reliquum ſecundi termini multiplicare per h, reliquum tertii per hh, & reliquum quarti per h^3: quandoquidem à terminis, ſecundo & tertio, auferendo denominatores hh & h, ipſi eatenus ſunt multiplicati. Adeò ut ſufficiat multiplicare reliquum ſecundi termini per h, & reliquum tertii per hh, at ipſum quartum per h^3, cum hic denominatorem ab h denominatum, per quem ſic auferendo fuiſſet multiplicatus, non admittat. non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonſtratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix x plures dimenſiones, quàm in æquatione propoſita, admittit.

Notandum autem eſt, cùm termini æquationis hujus ſic productæ non ſinguli æquè multas literas ſeu dimenſiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum ſumpſimus, & cujus ratione ſuppoſuimus $\frac{y}{h} \infty x$, toties in terminis, qui pauciores dimenſiones ſeu literas habent, ſubintelligendam eſſe, quoties fuerit opùs. Adeò ut ejuſdem lineæ beneficio termini abbreviari poſſint, ſic ut ſinguli non niſi tres literas ſeu dimenſiones admittant, ac præterea ut illius ope, poſtquam radix una y fuerit cognita, mediante æquatione $\frac{y}{h} \infty x$, cognoſcatur quoque radix altera x.

Ad hæc ſupponere quoque poſſumus $yy \infty xh$, ita ut habeamus $\frac{y^2}{h} \infty x$, & $\frac{y^4}{h^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^6}{h^3} \infty x^3$; quibus, ut ſupra, ſubrogatis, habebimus $\frac{y^6}{h^3} - \frac{cy^4}{h^2} + \frac{d^2y^2}{h} - b^3 \infty$ o. Ac proinde multiplicando totum per h^3, fiet $y^6 - chy^4 + ddhhyy - b^3b^3 \infty$ o. Vnde perſpicuum fit, quòd ſubſtituendo, juxta præſcriptum hujus Geometriæ, yy pro x, quadratum ejus y^4 pro x^2,

& ipſius

& ipsius cubum y^6 pro x^3, atque multiplicando secundum terminum per b, tertium per bb, & quartum per b^3, eandem consecuturi simus æquationem. ut ex demonstratione superiori facile est colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas seu dimensiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem spectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem est multiplicanda; ipsa eidem demonstrationi innititur.

Esto eadem, quæ supra, æquatio: $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty\, 0$; & oporteat radicem incognitam x multiplicare per 3. Supponatur $y \infty\, 3x$, eritque $\frac{y}{3} \infty\, x$, & $\frac{y^2}{9} \infty\, x^2$, nec non $\frac{y^3}{27} \infty\, x^3$. Quibus, ut supra, substitutis, fiet $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{d^2 y}{3} - b^3 \infty\, 0$. Ac proinde multiplicato toto per 27, exsurget $y^3 - 3cyy + 9ddy - 27b^3 \infty\, 0$. Quæ æquatio etiam invenitur, si in æquatione proposita substituamus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, loco x, quadrati x^2, & x^3 cubi; atque deinde secundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præscripto hujus Geometriæ. Quâ quidem operatione termini omnes, ob rationes supra allatas, æquè multas dimensiones acquirent.

Idem intelligendum est de exemplo in hac Geometria proposito, $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27}\sqrt{3} \infty\, 0$. Etenim supposito $y \infty\, x\sqrt{3}$, erit $\frac{y}{\sqrt{3}} \infty\, x$, & $\frac{y^2}{3} \infty\, x^2$, nec non $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} \infty\, x^3$. Vnde si in æquatione proposita substituamus $\frac{y}{\sqrt{3}}$, quadratum ejus $\frac{y^2}{3}$, & ipsius cubum $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3; invenietur $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{y\sqrt{3}}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty\, 0$. Atque adeò si totum multiplicemus per $3\sqrt{3}$, habebitur $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty\, 0$. Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum supra fuit ostensum.

Non secus fiet demonstratio, si de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty\, 0$, sitque x dividenda per b.

Sup-

Supponatur $y \propto \frac{x}{h}$, eritque $y\,h \propto x$, & $y^2 h^2 \propto x^2$, nec non $y^3 h^3 \propto x^3$. Quæ ſi in æquatione propoſita ſubſtituantur, fiet $y^3 h^3 - c h^2 y^2 + d^2 h y - b^3 \propto 0$. Ac proinde ſi totum dividatur per h^3, orietur $y^3 - \frac{cy^2}{h} + \frac{d^2}{h^2} y - \frac{b^3}{h^3} \propto 0$.

Manifeſtum autem eſt, idem nos obtenturos, ſi in æquatione propoſita ſubrogemus y, quadratum ejus yy, & ipſius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3, atque ſic deinde ſecundum terminum dividamus per h, tertium per hh, & quartum per h^3: quoniam in ſuperiori operatione, ubi hh in ſecundo termino, & h in tertio reperitur, perſpicuum eſt, quòd, ad dividendum omnes terminos per h^3, auferendo toties h, quoties in ipſis reperitur, opùs tantùm ſit dividere reliquum ſecundi termini per h, reliquum tertii per hh, ipſum autem quartum terminum per h^3, quippe qui quantitatem h non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus ſic productæ termini ſinguli non æquè multas habent literas ſeu dimenſiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimenſiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam ſubintelligere, quoties erit opùs, quæ lineam pro unitate ad libitum ſumptam deſignet, & cujus ratione ſuppoſuimus $y \propto \frac{x}{h}$. vel potiùs beneficio hujus lineæ, quam pro unitate aſſumpſimus, & linearum cognitarum, efficere, ut ſinguli æquationis termini tres literas ſeu dimenſiones habeant. Id quod facile eſt. Etenim cognitâ, v. g. lineâ $\frac{c}{h}$, pro unitate acceptâ, poſſumus ad eandem denotandam loco $\frac{c}{h}$ ſumere p. atque ita de cæteris. Adeò ut, cognita radice y, ejuſdem unitatis ope cognoſcatur quoque x, per æquationem hanc $y \propto \frac{x}{h}$ vel $y\,h \propto x$.

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi oſtendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ ſupra, $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \propto 0$, & oporteat radicem incognitam x dividere per 3. Suppoſitâ igitur $y \propto \frac{x}{3}$, fiet $3y \propto x$, & $9yy \propto x^2$, nec non $27y^3 \propto x^3$. Quæ ſi ſubſtituantur in æquatione propoſita, habebitur $27y^3 - 9cyy + 3ddy - b^3 \propto 0$. Ac proinde dividendo

totum

totum per 27, orietur $y^3 - \frac{1}{3}cyy + \frac{1}{9}ddy - \frac{1}{27}b^3 \infty 0$. Quæ æquatio quoque invenietur, si procedamus juxta hujus Geometriæ Methodum: subrogando nimirum y in æquatione proposita, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3: & dividendo deinde secundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipsius cubum 27. Eadem demonstratio locum obtinet, si in æquatione radix incognita plures dimensiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & sequentes.

PRoponatur $x^4 * + px^2 + qx - r \infty 0$, & supponatur juxta præscriptum hujus Geometriæ $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, eritque $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$, ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc est, $x^4 + yyxx + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyx^2$, & consequenter $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. Ex qua æquatione si tollatur prima $x^4 * + pxx + qx - r \infty 0$, relinquetur $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Vnde multiplicando totum per $4yy$, exsurget $y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + p^2 \\ + 4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Eâdem ratione demonstratio fiet secundùm omnes variationes signorum $+$ & $-$, atque observationes in hac Geometria expositas. In cujus rei exemplum duorum adhuc sequentium casuum demonstrationem subjiciemus.

Sit æquatio proposita $x^4 * - px^2 + qx - r \infty 0$. Si ergo juxta hanc Geometriam supposuerimus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, habebimus $x^2 + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$. Vnde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 - px^2 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$. Et per consequens $x^4 + \frac{1}{4}y^4 - pxx - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. E qua si auferatur prima $x^4 * - pxx + qx - r \infty 0$.

relinquetur $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \propto o$. Quare ſi totum multiplicemus per $4yy$, inveniemus $y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix}+p^2\\+4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto o$. Quod demonſtrare oportebat.

Iam verò ſi ponamus $x^4 * + px^2 - qx + r \propto o$, ſupponendo ſecundùm hanc Geometriam $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto o$; erit $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \propto \frac{q}{2y} + yx$. Vnde quadratum prioris partis æquale erit quadrato poſterioris, hoc eſt, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \propto yyx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$. Ac per conſequens, $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4y^2} \propto o$. E qua ſi tollatur prima $x^4 * + px^2 - qx + r \propto o$, remanebit $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy} \propto o$. Atque ideo ſi totum multiplicetur per $4yy$, invenietur $y^6 + 2py^4 \begin{smallmatrix}+p^2\\-4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto o$. Quod erat demonſtrandum.

Non ſecus demonſtrabuntur omnes reliqui caſus ſecundùm utramlibet harum ſuppoſitionum: nimirum, $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \propto o$, aut $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \propto o$, obſervando tantùm ſigna $+$ & $-$, quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4or habet dimenſiones, ad formam, in hac Geometria propoſitam, reduci poſſunt: nimirum, $+y^6.\ 2py^4 \begin{smallmatrix}+p^2\\.\,4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto o$. ſigna $+$ & $-$ quæ præcipit, obſervando, ſicut demonſtravimus. Quo fit, ut, ſi diviſionis beneficio æquationem propoſitam ad eam formam reducere poſſimus, ita ut poſt diviſionem radix ejus y plures quàm duas dimenſiones non admittat, ipſa per Geometriam communem, juxta præſcripta paginæ 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri poſſit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \propto o$, & $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \propto o$, (obſervando ſigna $+$ & $-$, ponenda locis, ubi ſunt omiſſa) invenietur quoque radix x, cujus loco in altera æquatione pro radice ſuppoſueramus y. At verò ſi æquatio ſupra

supra inventa, denominata à radice y, sic dividi nequeat, tunc considerare illam poterimus, velut tres duntaxat dimensiones habentem, supponendo scilicet $z \infty yy$, ipsamque substituendo in æquatione; adeò ut habeamus $z^3 - 2pz^2 \begin{smallmatrix} +pp \\ .4r \end{smallmatrix} z - qq \infty 0$. Quæ, observatis iisdem signis + & —, quæ in altera æquatione reperiuntur, & sublato secundo termino, per id, quod pag. 73 dictum est, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus z per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & sequentes. Quæ certe eadem futura est quæ yy, quâ cognitâ innotescet & y. Cujus ope atque duarum superiorum æquationem tandem invenietur x.

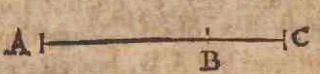
Verùm enimverò observandum est, in omnibus præcedentibus operationibus utendum esse eâdem lineâ, quæ pro unitate est accepta, si illam determinamus, & usurpamus ad æquationem propositam reducendam ad superioris formam, nempe: $x^4 * px^2 . qx . r \infty 0$. observando signa + & —.

Verum equidem est, quòd, postquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice y sit denominata, nimirum ad æquationem $y^6 . 2py^4 \begin{smallmatrix} +p^2 \\ .4r \end{smallmatrix} yy - qq \infty 0$, quæque dividi seu reduci non possit, ita ut radix ejus y plures quàm duas dimensiones habeat, non teneamur ulteriùs progredi: (siquidem illo casu Problema non Planum, sed Solidum existit, juxta pag. 80) atque tunc contenti esse possimus æquatione primâ $x^4 * px^2 . qx . r \infty 0$ (cum per illam invenire possimus radicem x mediante Geometriâ Solidorum, secundùm paginam 85 & sequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti possumus, saltem ut ostendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non ascendit, reducuntur, semper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

QVandoquidem ex eo, quod in hac Geometria ostensum atque supra adnotatum est, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non aſcendunt, reduci poſſe ad aliquam formam earum, quæ hâc paginâ proponuntur: exhibenda tantùm reſtat demonſtratio radicum, quæ ex ipſis, ſecundùm Cardani regulas, quas ſuper hac re in medium affert Capite ſecundo libri ejus, quem de Arte Magna ſeu Regulis Algebraïcis inſcripſit, educuntur. Cum hoc ipſum difficultatem fortè non exiguam parere poſſet iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Specioſæ Algebræ, & mutuæ inter Arithmeticam & Geometriam relationis atque convenientiæ ignaris, non facilè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonſtrabimus primùm ſequens

LEMMA.



SEctâ utcunque lineâ A C in B, oſtendendum eſt: Cubum lineæ A B, unà cum cubo lineæ B C, & triplo producto linearum A C, B C, A B, ſimul æquari cubo lineæ A C.

Sit A B $\infty\ a$, B C $\infty\ b$, eritque A C $\infty\ a + b$. Productum linearum A C, B C, A B, erit $baa + bba$, cujus triplum $3\,baa + 3\,bba$. Huic ſi addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3 + 3\,baa + 3\,bba + b^3$. Et manifeſtum eſt, ſummam hanc æqualem eſſe cubo lineæ A C.

Demonſtrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco

$z \infty \sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Hinc in figura adjecta ſupponendo binomium

$\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ A C, & reſiduum

$\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ B C, erit eorum

differentia $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$,

$-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æqualis lineæ A B. Iam vero ſtatuendo A B $\infty\ z$, erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum $+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, & cubum $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, (auferendo hunc ab illo) æqualis q. Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ B C. Atqui cubus lineæ A B, & triplum productum linearum A C, B C, A B simul, æquantur eidem differentiæ q, (siquidem cum cubo lineæ B C componunt cubum lineæ A C). Erit itaque z^3, cubus videlicet lineæ A B, unà cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æqualis q.

Vt autem habeatur hoc productum, multiplicandum est binomium $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquatur lineæ A C, per residuum $\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquale est lineæ B C. Hinc cum $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ in se multiplicatum faciat $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, ac $+\frac{1}{2}q$ in $-\frac{1}{2}q$ faciat $-\frac{1}{4}qq$; quæ producta simul addita faciunt $\frac{1}{27}p^3$ (siquidem $+\frac{1}{4}qq$ & $-\frac{1}{4}qq$ addendo evanescunt): & porrò producta, quæ fiunt ex $+\frac{1}{2}q$ & $-\frac{1}{2}q$ in $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, se mutuò destruant: Erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$ seu $\frac{1}{3}p$, radix scilicet cubica ex $\frac{1}{27}p^3$. quandoquidem quæstio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Vnde triplum productum erit p, quod si multiplicetur per A B, hoc est, per z, fiet pz, æquale triplo producto linearum A C, B C, A B. Et per consequens $z^3+pz \infty q$, vel $z^3 \infty -pz+q$. Quod erat demonstrandum.

Sit jam secundo loco

$$z \infty \sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

& supponatur prima radix cubica (quæ binomium est) in figura præcedente æqualis lineæ A B; secunda autem (quæ residuum est) æqualis lineæ B C; eritque summa cuborum utriusque lineæ æqualis q. Porrò supponendo lineam A C ∞ z, auferendoque ex ejusdem cubo z^3, triplum productum linearum A B, B C, & z, relinquentur cubi linearum A B & B C, qui quidem simul sumpti ipsi q sunt æquales. Est autem productum ex A B, B C, hoc est, quod fit ex binomio in residuum, $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$, seu $\frac{1}{3}p$. Nam cum multiplicando $+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ per $-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ (unâ radice existente signo $+$ adfectâ, alterâ verò signo $-$) producatur utriusvis quadratum affectum signo $-$, nimirum $-\frac{1}{4}qq$ $+\frac{1}{27}p^3$, & utramque radicem per $+\frac{1}{2}q$ multiplicando, producta evanescant; restat tantum $+\frac{1}{2}q$ in se multiplicandum. Quare cum productum illud sit $+\frac{1}{4}qq$, & alterum productum inventum sit $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$; erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$

 seu

ſeu $\frac{1}{3}p$, ſicut diximus; ac proinde ejus triplum p. Quod ſi rurſus multiplicetur per z, producetur pz, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C: & per conſequens $z^3 - pz \infty q$, hoc eſt, $z^3 \infty * + pz + q$. Quod erat demonſtrandum.

Adduxi autem demonſtrationem extractionis harum radicum, quòd contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi ſint viſæ. Verùm quantùm ad praxin, cùm Geometricè æquationum hoc loco propoſitarum radices ſunt extrahendæ; ejus ſanè methodus, quæ generalis atque facilis eſt, quàm optimè in hac Geometria demonſtrata cernitur. Si verò Arithmeticè illas extrahere lubuerit, multò id faciliùs fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numeroſa Poteſtatum Reſolutione traditam, quàm per haſce regulas Cardani.

F I N I S.

FRANCISCI à SCHOOTEN

IN

GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

COMMENTARII.

ARGVMENTVM PRIMI LIBRI.

PRimo libro Autor viam quodammodo aperit ad ſuam Methodum, quâ in reſolvendis & conſtruendis Geometriæ Problematis utitur, quamque tribus hiſce libris eſt complexus. Quæ eſt, ut certarum notarum ſive characterum beneficio, quibus tum datæ tum quæſitæ lineæ deſignantur, difficultates omnes, quæ in iiſdem Problematis enodandæ veniunt, ad ejuſmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum conſtructionem non niſi rectarum quarundam linearum longitudinem quærere ſit opus. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quæ circa lineas haſce, ut cognitæ fiant, ſunt inſtituendæ, ad 4 vel 5 diverſas, quemadmodum in Arithmetica, revocari poſſe: quæ ſunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum Extractio. Quæ quâ ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Vbi porrò obſervandum venit, quòd, poſtquam hi Arithmetices termini in Geometriam ſunt introducti, ad operationes haſce in lineis æquè inſtituendas atque in numeris, conſentaneum ſit rectam lineam, quæ unitatis vicem gerat, aſſumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum eſt, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatis, oſtendit, quo pacto notis atque literis in Geometria ſit utendum ad prædictas lineas breviter deſignandas, earumque operationes facilè indicandas: ut hâc ratione diverſæ earum relationes conſpicuæ ſint, atque difficultas omnis, verborum involucris exuta, quàm ſimpliciſſimè ob oculos poni poſſit. Et quia hæc Methodus in reſolvendis Geometriæ Problematis requirit, ut difficultates omnes, quæ in illis evolvendæ occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quæratur tantummodo valor quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis ſint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propoſitum perducatur ad æquationem, ſupponendo illud ipſum ut jam factum. Ac deinde, cum Æquatio certum ſit medium quo Problema ſolvitur, refert totidem æquationes inveniendas eſſe, quot in eo ſuppoſitæ fuerint incognitæ lineæ. Cum autem hæc Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipſaque non tantùm ad Problemata, in quibus de inveniendis quibuſdam rectis lineis, aut etiam planis, ſolidiſve quæſtio eſt (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non niſi rectæ *quædam lineæ inveniendæ sint) adplicari possit; sed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter sese comparatio facienda est; atque ad Problemata in quibus quædam puncta aut lineæ datæ sunt, & alia puncta inveniri debent, se extendat (siquidem in his à quæsitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad positione datas rectæ lineæ duci possunt, quæ quæsitorum punctorum loca determinant; in illis autem quæ dictorum angulorum vices gerant, sicut post exemplis planum fiet): facilè constat, illam non modò Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram comprehendere; sed etiam ad id omne, ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi posse, atque adeò tam generalem esse, ut nullum non suæ artis per universam Mathesin specimen edat.*

Iam verò postquam Problema aliquod ad æquationem est perductum, ipsaque æquatio ad simplicissimos terminos reducta, si quidem id ipsum per Geometriam communem construi potest, hoc est, ut ad constructionem ejus non nisi rectis lineis atque circulis utamur, prout in superficie aliqua plana describuntur, docet, qualis tunc debeat esse æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi possit. Atque ita breviter, quidquid ad planorum Problematum constructionem spectat, absolvit.

Vt autem tum præceptionum harum usui locus sit, tum verò ejusdem Methodi facilitas in resolvendo ac construendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam sibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut scientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, summâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre visum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illustranda esse duximus, fere sunt sequentia.

COM-

COMMENTARII
IN
LIBRVM PRIMVM.

ET *radicum extractio, quæ pro Divisionis quadam specie haberi potest.*] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Est enim in Divisione, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu divisorem. Adeò ut radicis extractio divisionis species sit censenda, in qua divisor quotienti est æqualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem est media proportionalis. A

Vel etiam si una sit, quæ vocetur unitas.] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum. B

Vt eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum transmutandum in quadratum: si pro unitate sumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipsum & reliquum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata est extrahenda. Adeò ut manifestum sit, Problema propositum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem, nihil aliud esse, quàm si unâ lineâ assumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata. C

Vt ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est atque multiplicatio.] In multiplicatione enim est: ut productum ad multipli- D candum, ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, sic multiplicandus ad unitatem.

E *Vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione.*] Est namque in Divisione, ut supra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad divendum, sic unitas ad divisorem.

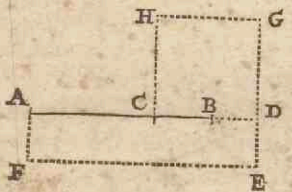
F *Ut si radix cubica sit extrahenda ex $aabb - b$, cogitandum est, quantitatem $aabb$ semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hîc subintelligitur, esse c. Unde si quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimensione, semel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimensionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc est, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas sit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

G *Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessariæ videbuntur, tam iis quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim sunt termini modi unius, terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PRO-

PROBLEMA 1mum.

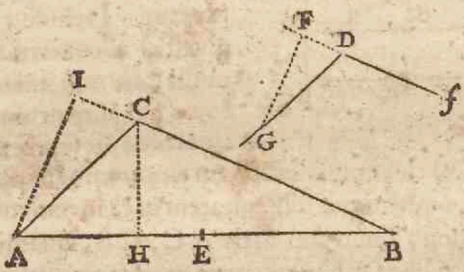
DAtam rectam lineam A B, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub A D, D B comprehenſum, æquetur quadrato rectæ C D.



Conſidero rem velut jam factam, hoc eſt, ſuppono rectangulum A D E F æquari quadrato C D G H, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæſtio Geometrica eò reduci poſſit, ut non niſi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis ſit quærenda, & nemo non videat, ad ejus conſtructionem tantummodo quærendam eſſe lineam B D, omnemque difficultatem in ea invenienda eſſe ſitam; nomina impono lineis tam datis A C, C B, quàm quæſitæ B D. Proinde, pro linea A C pono quantitatem cognitam a; pro C B, b; at pro B D quantitatem incognitam x, fietque A D $a+b+x$, C D autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum A D E F, duco A D, hoc eſt, $a+b+x$ in D E ſeu D B, hoc eſt, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum C D G H, multiplico C D, hoc eſt, $b+x$ in ſe, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, ſic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum tranſlato bx ad alteram partem ſub contrario ſigno, erit æquatio $ax-bx \propto bb$. Cujus utrâque parte diviſâ per $a-b$, provenit $x \propto \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæſitam B D inveniri per diviſionem quadrati lineæ C B per exceſſum, quo linea A C ſuperat ipſam C B, vel etiam per hunc exceſſum, tanquam primam, & lineam C B, tanquam ſecundam, inveniendo tertiam proportionalem B D.

PROBLEMA 2$^{dum.}$

DAtâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere AC, CB, continentes angulum ACB, æqualem dato D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut 4 d ad a.

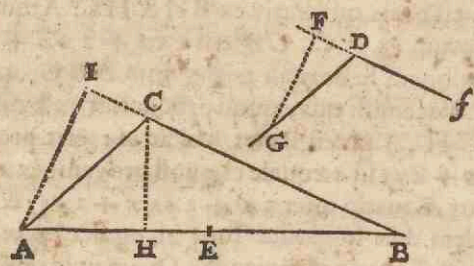


Factum sit quod quæritur, & ex puncto C demittatur super rectam AB perpendicularis CH. Quoniam igitur data sunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum situm determinandum nihil simpliciùs haberi potest, quàm si noscantur tres lineæ AH, HC, & HB: facilè constat, quæstionem propositam eò reduci, ut inveniendæ tantùm sint duæ lineæ AH, HC, seu BH, HC; atque adeò duas supponendas esse lineas incognitas. Quia verò, sectâ lineâ AB bifariam in E, datum est punctum E, atque ideo ipsa AE vel EB, quam voco a, atque operatio aliquantò brevior evadit, si loco dictarum AH, HC, seu BH, HC, quæramus duas lineas HE, HC: Idcirco pro HE pono quantitatem incognitam x, & pro HC quantitatem incognitam y. Unde pro AH invenitur $a - x$, & pro HB $a + x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto discrimine, directè percurrenda est Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis sit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex AC erit $aa - 2ax + xx + yy$:

quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum A H & H C. Eodem modo quadratum lineæ C B erit $aa + 2ax + xx + yy$: quia æquale est binis quadratis ex B H & H C. Atque adeò summa quadratorum ex A C, C B erit $2aa + 2xx + 2yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum A B C, quod est ay, (utpote æquale semissi ejus, quod producitur ex basi A B & perpendiculo C H,) quam habet $4d$ ad a: erit productum ex $2aa + 2xx + 2yy$ in a æquale ei, quod provenit ex ay in $4d$, hoc est, habebitur Æquatio inter $2a^3 + 2axx + 2ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ suppositæ sunt incognitæ lineæ x & y, alia adhuc superest Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, considerandus insuper est angulus D, cui æqualis supponitur angulus A C B; qui si obtusus fuerit, produco lineam B C, donec ex puncto A in ipsam cadat perpendicularis A I, omnino ut factum est circa angulum D. Tum, quoniam datus est angulus D, dantur quoque rectæ D F & F G. Ac proinde si pro D F ponatur b, & pro F G c, gerent ipsæ vicem dati anguli D, fientque triangula A C I & G D F similia. Eâdem ratione similia erunt triangula H C B & A B I. Unde erit ut C B ad A B, sic C H ad A I, & B H ad B I. Quare si pro quadrato ex C B $\infty\ aa + 2ax + xx + yy$ brevitatis causâ scribatur ee, h. e., pro C B $\infty \sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$ ponatur e; fiatque ut e ad $2a$, sic C H seu y ad A I: erit A I $\infty\ \frac{2ay}{e}$. Similiter ut e ad $2a$, sic B H, seu $a + x$, ad B I: erit B I $\infty\ \frac{2aa + 2ax}{e}$. Tum subductâ B C seu e ex B I seu $\frac{2aa + 2ax}{e}$, relinquitur C I $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$. Jam cum C I sit ad A I, hoc est, $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, seu $2aa + 2ax - ee$ ad $2ay$, sicut D F ad F G, hoc est, b ad c: erit $2aac + 2acx - cee$, productum sub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit sub mediis. Quæ altera est Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis sint omissæ. Et quicunque omnia penitiùs inspexerit, se suo marte propositæ quæstionis solutionem ex illis huc usque perducere potuisse judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros seu terminos Analyticos est traducta, ita ut, quæ supersunt, cuilibet obvia esse possint, etiamsi de lineis, punctis, angulisque ampliùs

non

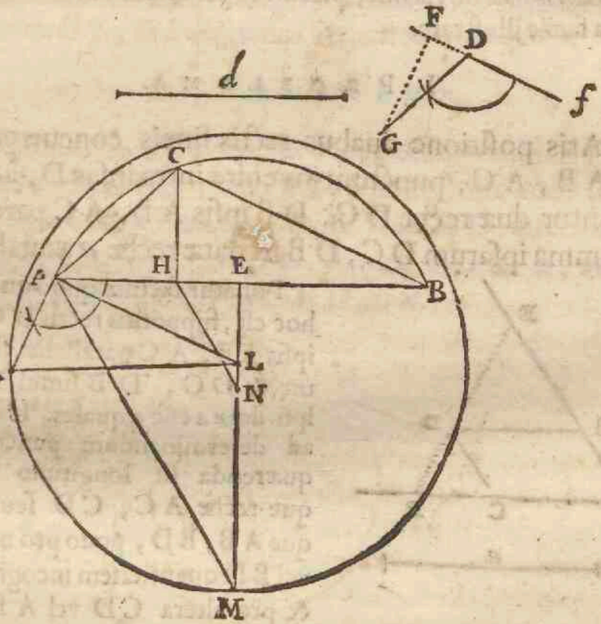


non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut sequitur. Quocirca cum primùm $2a^3 + 2axx + 2ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars per $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem translatis, inter xx & $2dy - yy - aa$. Deinde cum $2aac + 2acx - cee$ æquetur $2aby$, restituto valore quantitatis assumptæ ee, ipsoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \infty 2aby$. In qua si fiat porrò terminorum transpositio, ut cxx unam teneat Æquationis partem sub signo $+$ & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \infty aa - yy - \frac{2ab}{c}y$, seu $xx \infty aa - yy - 2fy$, (scribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum est quolibet nomine datas quantitates insignire).

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ sunt reliquæ quantitates inter se, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - 2fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \infty 2aa - 2fy$, seu, $dy \infty aa - fy$: & translato $2fy$ ad alteram partem, factâque utrobique divisione per $d + f$, fiet $y \infty \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non est difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \infty 2dy - yy - aa$,

pro

pro y ſubſtituatur ſumma jam inventa $\frac{a^2}{d+f}$, & pro yy ejuſdem ſummæ quadratum, nempe $\frac{a^4}{d^2+2df+f^2}$, invenietur $xx \infty \frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}$ & $x \infty \sqrt{\frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}}$. Vbi liquet, dd non debere eſſe minorem quàm $ff+aa$, cum aliàs Problema futurum eſſet impoſſibile. Cujus quidem conſtructio talis eſt.

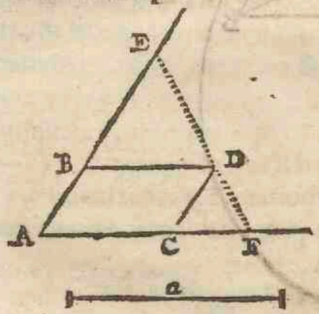


Facto angulo KAB æquali dato D, erigatur ex A ipſi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EL in L, centroque L intervallo rectæ d circulus deſcribatur, ſecans KA, EL in K & M. Deinde aſſumptâ EN æquali KA, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipſi AB occurrat in H. Poſtea deſcripto ex L intervallo LA circuli ſegmento ACB, ducatur ex H ipſi AB perpendicularis HC, occurrens circumferentiæ in C, ac jungantur A C, C B. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia sint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illustrare.

I PROBLEMA.

DAtis positione duabus rectis lineis concurrentibus A B, A C, punctum invenire intra ipsas D, à quo si ducantur duæ rectæ D C, D B ipsis A B, A C parallelæ, ut summa ipsarum D C, D B sit datæ rectæ a æqualis.



Ponatur factum quod quæritur, hoc est, suppositis rectis D C, D B ipsis A B, A C parallelis, statuantur & D C, D B simul sumptæ ipsi datæ a esse æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda sit longitudo utriusque rectæ A C, C D seu utriusque A B, B D, pono pro una A C vel B D quantitatem incognitam x, & pro altera C D vel A B quantitatem incognitam y. Quibus ita positis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantùm duæ rectæ B D, D C, hoc est, x & y: eritque summa $x + y$ æqualis a, hoc est, erit $y \propto a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro x inveniendam nulla superest materia, cum conditiones in quæstione præstandæ jam omnes sint impletæ: argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Quocirca cum in ipsâ una desit conditio, ut prorsus determinata existat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita x, cui nulla respondet Æquatio, assumere lineam aliquam cognitam ipsâ a minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipsi x

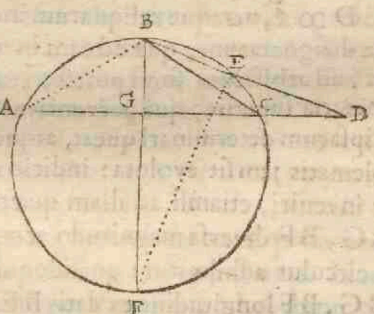
diver-

diversos tribuerimus valores. Vbi notandum, quòd, postquam assumptæ fuerint rectæ A E, A F ipsi datæ *a* æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quodlibet in ea pro libitu sumptum quæsito satisfacere: cum, propter similia triangula A E F, & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F assumpto) haud aliter atque A E, A F semper sint æquales, ac proinde B D, D C simul eædem quæ A C, C F simul, hoc est, eadem quæ A F vel *a*.

Haud dissimilis erit quæstio, si punctum D inveniendum sit, ita ut ipsarum D C, D B differentia sit datæ rectæ *a* æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ super diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde secante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam secet in E, dantur B E ∞ *a*, & B C ∞ *b*: oporteatque invenire E D ∞ *x*.



Quoniam ad quæstionem hanc solvendam, supponendo eam, ut jam factam, necessariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono *y*, & pro B F pono *z*: eritque G F ∞ *z — y*. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, considero lineam G D ipsi B F esse perpendicularem, hoc est, triangulum B G C esse rectangulum. Unde fit, ut, si quadratum ex B G ∞ *yy* auferam è quadrato ex B C ∞ *bb*, reliquum *bb — yy* sit æquale quadrato ex G C. Quod idem & alio modo inveniri potest, considerando

 per-

perpendicularem G D ſecare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35 Tertii Elementorum rectangulum ſub B G, G F eſt æquale rectangulo ſub A G, G C, hoc eſt, quadrato ex G C: fit ut ſi multiplicavero G F $\infty\ z - y$ per B G $\infty\ y$ productum $zy - yy$ ſit denuo quadrato ex G C æquale. Habetur ergo Æquatio inter $bb - yy$ & $zy - yy$, hoc eſt, addendo utrobique yy, inter bb & zy. Porrò cum in hac quæſtione tres ſuppoſitæ ſint incognitæ lineæ x, y, & z, ſupereſt ut duas adhuc alias Æquationes inveniamus. Hinc, ductâ F E, quoniam, onſiderando lineam B D ſecare circumferentiam in E, ſimilia ſunt triangula B G D & B E F, erit ut B G ad B D, hoc eſt, y ad $a + x$; ita B E ad B F, hoc eſt, a ad z. Ac proinde, cum productum ſub extremis ſit æquale producto ſub mediis, erit $zy \infty\ aa + ax$. Quæ altera eſt Æquatio. In qua ſi in locum zy ſubrogetur ejus valor ante inventus bb, habebitur $bb \infty\ aa + ax$, hoc eſt, transferendo aa in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per a, erit $x \infty\ \frac{bb - aa}{a}$. Quæ quantitas eſt lineæ E D, quam inveſtigare intendebamus. Cæterùm, quia inventâ hâc lineâ E D $\infty\ x$, utraque reliquarum incognitarum B G & B F, per y & z deſignatarum, quæ ad eam inveniendam neceſſariæ videbantur, ad arbitrium ſumi poteſt, cum in Problemate nulla ampliùs materia ſuperſit, quâ perveniatur ad Æquationes, quibus utraque ipſarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam ſit evoluta: indicio eſt, rectam E D eandem ſemper inveniri, etiamſi ad illam quærendam pro utraque linearum B G, B F diverſa magnitudo accipiatur, hoc eſt, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, ſi de linearum B G, B F longitudine ex datis B E, B C inveſtigandâ quæritur, haud determinatum exiſtit, ſed tantùm ipſius E D.

Qui plura in loci hujus illuſtrationem exempla deſideret, videat quæ ad literam G ſecundi libri à nobis ſunt allata.

GGG *Poſtea verò ſi plures adhuc ſuperſint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, ſive illam conſiderando ſeparatim, ſive ipſam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.*] Sic, quoniam, reducto Problemate aliquo, in quo ad ipſum conſtruendum tres ſupponen-

dæ

dæ ſunt incognitæ lineæ x, y, & z, ad duas Æquationes $xx \propto \begin{array}{l}+2cx\\+2z\end{array} \begin{array}{l}+bb,\\-cc\\-yy\\-2cz\end{array}$ & $yy \propto aa + 2zx - xx$, pro incognita linea z, cui nulla reſpondet Æquatio, ad arbitrium ſumi poteſt linea cognita d: potero in locum duarum præcedentium Æquationum ſcribere $xx \propto \begin{array}{l}+2cx\\+2d\end{array} \begin{array}{l}+bb,\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$ & $yy \propto aa + 2dx - xx$. Hinc cum duæ ſuperſint lineæ inveniendæ x & y, ordine quoque utenda erit unaquâque Æquationum reliquarum $xx \propto \begin{array}{l}+2cx\\+2d\end{array} \begin{array}{l}+bb,\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$ & $yy \propto aa + 2dx - xx$, ſive eas conſiderando ſeparatim, ſive unam cum altera comparando, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis. Quocirca conſiderando ſeparatim Æquationem $yy \propto aa + 2dx - xx$, cum, quantitatibus $+aa$ & $-xx$ ad alteram partem ſub contrario ſigno tranſlatis, fiat $2dx \propto yy + xx - aa$: hinc ſi in altera Æquatione $xx \propto \begin{array}{l}+2cx\\+2d\end{array} \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$ pro $2dx$ ſubſtituatur $yy + xx - aa$, habebo Æquationem $xx \propto +2cx$, $+yy + xx - aa$, $+bb - cc - yy - 2cd$. Hoc eſt, demptis æqualibus, ordinatâque æqualitate, habebitur $2cx \propto aa + cc - bb + 2cd$. Et fit, divisâ utrâque æqualitatis parte per $2c$, $x \propto \frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$. Oſtendens quâ ratione linea incognita x ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium ſumendâ d ſit invenienda. Inventâ autem lineâ x, ut habeatur y, oportet tantùm in Æquatione ſuperiori $yy \propto aa + 2dx - xx$ in locum x ſubrogare valorem inventum $\frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$, & in locum xx hujus valorem, & fit $yy \propto \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}$. Vnde, de, extractâ radice, invenitur

$y \infty \sqrt{\frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}}$. Exhibens quo pacto linea incognita y ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium ſumenda d, obtineri poſſit.

Cæterùm quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam d, quæ hîc modò major modò minor ad arbitrium ſumi poteſt, lineæ quoque x & y inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum exiſtit, ſed infinitas recipit ſolutiones: lubet & alterum Problema, quod omnino determinatum eſt, atque in cujus ſolutione, ad unumquemque ex quæſitis numeris inveſtigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

PROBLEMA.

INvenire duos numeros, quorum ſumma multiplicata per ſummam ſuorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Suppoſito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæſito $x + y$, & pro minori $x - y$: eritque ſumma quæſitorum numerorum $\infty\ 2x$, & eorundem differentia $\infty\ 2y$.

Jam quia $x + y$ & $x - y$ in ſe ducti faciunt $xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$, quorum ſumma eſt $2xx + 2yy$ & differentia $4xy$: reſtat ut $2xx + 2yy$ multiplicata per $2x$, & $4xy$ per $2y$, producta $4x^3 + 4xyy$ & $8xyy$ ſint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus $4x^3 + 4xyy \infty 715$ & $8xyy \infty 99$, ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus x & y, comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primùm utramque partem prioris per 2, & fit $8x^3 + 8xyy \infty 1430$, ac deinde ex ea ſubtrahendo poſteriorem $8xyy \infty 99$, & relinquitur $8x^3 \infty 1331$. In quâ, ſi utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur $2x \infty 11$, & fit $x \infty 5\frac{1}{2}$.

Poſtea ad inveniendum y dividatur Æquatio poſterior $8xyy \infty 99$ per jam inventam $2x \infty 11$, & orietur Æquatio $4yy \infty 9$.

In

In qua si utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur $2y \infty 3$, & fit $y \infty 1\frac{1}{2}$.

Cæterùm invento utroque numero incognito x & y, quoniam pro majori quæsitorum posueramus $x+y$ & pro minori $x-y$: erit major $\infty 7$, & minor $\infty 4$. Et solutum erit Problema. H

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surdesolidum, sive quadrato-cubus &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo

$$z \infty b, \text{ aut}$$
$$zz \infty -az + bb, \text{ aut}$$
$$z^3 \infty +azz + bbz - c^3, \text{ aut}$$
$$z^4 \infty +az^3 + bbzz - c^3z + d^4, \text{ \&c.}]$$

Hoc est, z, quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis quantitati cognitæ b. Aut quadratum lineæ z est æquale ei, quod provenit subtrahendo az ex bb: quarum quidem bb cognita est; sed az composita ex z media proportionali inter unitatem & quadratum zz, ut supra explicavimus, & ex quantitate cognita a. Aut cubus lineæ z æqualis est ei, quod provenit ex additione & subtractione trium quantitatum azz, bbz, & c^3; quarum quidem c^3 cognita est; at bbz composita ex z, prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum z^3, & ex quantitate cognita bb; ac denique azz, composita ex zz, secunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita a. Atque sic de cæteris.

Vbi notandum est, per quantitates cognitas, intelligendas esse eas, quæ in quæstione vel datæ sunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditas & notas, sic præparatæ sunt, ut pro cognitis sive datis sint habendæ, atque quæsitis sive incognitis æquiparandæ.

Sic cùm ponitur $z \infty b$, indicatur lineam incognitam, quæ per

per z designatur, æqualem esse alicui ex cognitis, quæ designatur per b. Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerunque aliqua operatione seu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Vt, si fuerit $z \propto \frac{cd}{e}$. Assumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum c, d, quæ in se invicem ductæ numeratorem constituunt, dividenda est reliqua per denominatorem, sive quantitatem e (quemadmodum superiùs est ostensum); eritque quotiens divisionis æqualis quantitati incognitæ z.

Eodem modo si habeatur $z \propto \frac{cc+cd}{e-f}$, erit ut $e-f$ ad $c+d$, ita c ad z; sive ut $e-f$ ad c, ita $c+d$ ad z.

Et si sit $z \propto \frac{cc-dd}{e+f}$, erit $e+f$ ad $c+d$, sicut $c-d$ ad z; vel $e+f$ ad $c-d$, sicut $c+d$ ad z.

Nec non si habeatur $z \propto \frac{cd+ef}{g}$, & fiat, ut c ad e, sic f ad quartam, quæ vocetur h: poterit pro ef scribi ch, atque adeò loco $\frac{cd+ef}{g}$ substitui $\frac{cd+ch}{g}$. Vbi deinde si fiat ut g ad c, sic $d+h$ ad quartam: sive permutando (quod eodem recidit) ut g ad $d+h$, sic c ad quartam, quam vocare lubet b: erit $z \propto b$. Id quod & aliis modis præstari potest.

Non secus si sit $z \propto \frac{cdef}{ade-agh}$, & statuatur esse ut a ad c, sic e ad quartam, quæ sit i; erit $ai \propto ce$, ita ut pro $\frac{cdef}{ade-agh}$ scribi possit $\frac{adif}{ade-agh}$ seu $\frac{dif}{de-gh}$. Rursus si ponamus esse ut d ad g, sic h ad quartam, quæ sit k: erit $dk \propto gh$, ita ut in locum $\frac{dif}{de-gh}$ subrogari possit $\frac{dif}{de-dk}$ seu $\frac{if}{e-k}$. Vbi denuo si fiat, ut $e-k$ ad i, ita f ad quartam, quam vocabo b; fiet ut supra $z \propto b$. Quod idem variis modis fieri potest.

Denique sit $z \propto \frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$. Supponendo esse ut a ad d, ita d ad quartam, quæ nominetur e: erit $ae \propto dd$: poteritque pro $\frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$ substitui $\frac{aace-aacc}{aed+acd}$ seu $\frac{ace-acc}{ed+cd}$. Rursus statuendo esse ut $e+c$ ad $e-c$, sic c ad quartam quæ appelletur f, fiet

fiet $\frac{ee - cc}{e + c} \infty f$: licebitque pro $\frac{ace - acc}{cd + cd}$ reponere $\frac{af}{d}$. Vbi demum si fiat ut d ad f, ita a ad quartam, quæ vocetur b, fiet rursus, ut supra, $z \infty b$. Quod similiter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus constat, quantitatem incognitam z, post hujusmodi operationes atque cognitarum linearum requisitas præparationes, eò reduci posse, ut sub una semper specie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas esse æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, absque additione vel subductione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitas. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantùm aliquam radicem, inveniri potest. Vt cùm zz æquatur aq. Suppositâ lineâ a pro unitate, erit radix quadrata extracta ex linea q, ut superiùs est ostensum, (nimirum inveniendo inter lineas a & q mediam proportionalem,) æqualis quæsitæ lineæ z, quæ hoc modo denotatur: $z \infty \sqrt{aq}$. Vbi apparet, quæstionem per hanc extractionem, dum planum aq transmutatur in quadratum bb, cujus latus est b, eò esse reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo si z^3 æquetur aaq, & quæratur z. Assumptâ rursus a pro unitate, erit extracta ex q radix cubica, hoc est, inventarum inter a primam & q quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro ostenditur) prior, radici quæsitæ z æqualis. Designabitur autem hoc pacto: $z \infty \sqrt{C.\, aaq}$. Vbi similiter constat, quòd, dum hâc operatione solidum aliquod, utpote aaq, resolvitur in cubum b^3, & utrobique deinde extrahitur radix cubica, z rursus fiat ipsi b æqualis.

Nec aliter evenit cum $z^4 \infty aaqq$. Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata seu bi-quadrata, hoc est, postquam radix semel extracta, dat $zz \infty aq$, eadem adhuc semel repetita radicis extractio, dabit $z \infty \sqrt{aq}$, sive, supponendo aq in quadratum bb esse conversum, $z \infty b$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

Porrò advertendum est, si quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, sub alia specie, quàm hîc expositum fuit, oblatæ fuerint (ut si ex $aa + bb$, aut ex $\frac{aadd - aaff - a^4}{dd + 2df + ff}$ &c. extrahenda sit radix quadrata): quòd tunc facile sit, non solùm per ea, quæ jam tradita sunt, sed & aliis modis quantitates datas in alias transmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ sint, ac si ex quantitate aq extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliisque in infinitum, est intelligendum.

I *Atque ideo sufficiet vos monere, si quis in reducendis hisce æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus, quæ fieri possunt, &c.*] Vbi notandum, inter quatuor operationum species, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæstionis difficiliores, quippe quos tantùm signis + vel — conjungunt aut disjungunt; quæ quidem signa diversa genera non constituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea est, quâ termini involvuntur vel intricantur, & dimensiones augentur; quæ contra Divisione extricantur & minuuntur. Idem de radicum extractione intellige, quæ, ut supra dictum fuit, divisionis tantùm species est habenda. Adeò ut ad inveniendos terminos simplicissimos ad quos quæstio aliqua reduci queat, maximopere observandum sit, ut in reducendis Æquationibus, omnes divisiones atque extractiones, quæ fieri possunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans suggerere potest demonstratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

K *Erit tota O M æqualis z, lineæ quæsitæ. Quæ quidem sic exprimitur: $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.*] Sciendum hîc est, æquationem propositam $zz \propto az + bb$, juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69, aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falsa appellatur, quæque hîc per lineam P M designatur, atque hoc modo exprimitur $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quemadmodum facilè demonstrari potest. Si enim, positâ $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ auferatur utrinque $\frac{1}{2}a$, & inde utraque pars $z - \frac{1}{2}a$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ in se ducatur quadratè, fiet $zz - az + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Vbi si demum utrinque dematur $\frac{1}{4}aa$, & $-az$ in alteram partem transferatur, fiet $zz \propto az + bb$.

Erit-

Eritque reliqua PM æqualis y, radici quæsitæ: Ita ut L
fiat $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.] Verùm æquatio $yy \infty -ay + bb$ admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam OM designata ita exprimitur, $y \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Cujus demonstratio ad exemplar præcedentis fieri potest.

Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \infty -axx + bb$, *PM* M
enim esset xx, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.] Quoniam enim $x^4 \infty -axx + bb$, transferendo $-axx$ in alteram æquationis partem, erit $x^4 + axx \infty bb$. & additâ utrique parti $+\frac{1}{4}aa$, proveniet $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Iam verò extractâ utrobique radice, invenietur $xx + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ac proinde transponendo $+\frac{1}{2}a$, ut xx unam constituat æquationis partem, erit $xx \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde extractâ rursus utrinque radice, fiet $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Eodem modo si habeatur $z^4 \infty az^2 + bb$, erit $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Nam cum $z^4 \infty az^2 + bb$, erit per transpositionem $z^4 - az^2 \infty bb$. Addatur jam utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Vnde, extractâ utrobique radice, prodibit $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & per consequens

$$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

Similiter si sit $z^4 \infty az^2 - bb$, erit $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$, nec non $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Cum enim z^4 æquetur $az^2 - bb$, & per transpositionem $z^4 - az^2 \infty -bb$; addatur utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bb$. Quare extractâ utrobique radice, emerget $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}}$. Porrò, quoniam radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa$ est quoque $\frac{1}{2}a - z^2$, hinc & $\frac{1}{2}a - z^2 \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens

$$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}.$$

Cæterùm ut Geometricè inveniantur harum æquationum radices, sciendum est, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimensiones, toties illic, ubi numero pauciores habentur, subintelligenda sit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione $x^4 \propto -axx + bb$. Quia in termino axx tres duntaxat dimensiones reperiuntur, & in termino bb tantùm duæ, cogitandum est, terminum axx, ut dimensiones fiant æquales, semel per unitatem esse multiplicatum, terminum autem bb bis. Adeò ut, si pro unitate accipiamus c, æquatio sit $x^4 \propto -caxx + ccbb$. Verùm expedit unitatem illam tantisper dissimulare, & æquationem hanc $xx \propto -ax + bb$ usurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum est, invenerimus, nimirum lineam PM, quæ exprimitur hoc pacto: $x \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Ita ut deinde tantùm opùs sit ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ extrahere radicem quadratam seu inter inventam lineam PM & unitatem c invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Atque ita in aliis.

Vnde liquidò constat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc simul manifestum sit, quo pacto, postquam sic linea aliqua pro unitate assumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc est, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio construi possunt, per ea tantùm, quæ ab Authore per 4 figuràs 1^{mi} libri exposita sunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7 monuit.

N *Quod si circulus, centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat, constructionem Problematis propositi esse impossibilem.*] Quod itidem ex Æquatione cognosci potest. Nam cum Æquatio sit certum medium, quo Problema aliquod resolvitur, sanè, si resolvendo incidimus in æquationem impossibilem, argumentum est, Problema quoque esse impossibile. Arguitur autem impossibilitas illa ex contradictione, quam

quam involvit, cùm nempe in ea statuitur minor quantitas æquari alicui majori, vel cùm jubemur ad eam resolvendam aliquid præstare, quod fieri nullo modo potest, ut, quantitatem aliquam majorem à minore subducere. Quemadmodum in æquatione $zz \infty az - bb$. quoniam ad inveniendam radicem z, bb ex $\frac{1}{4}aa$ subtrahi debet; oportet ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, sive ut b non sit majus quàm $\frac{1}{2}a$. Aliàs enim radix ejus sic explicari non posset, & æquatio impossibilis foret. Quod & ex ejusdem constitutione licet agnoscere, si in ea duæ sint radices veræ. Si enim ponamus $z \infty c$, seu $z - c \infty 0$, itemque $z \infty d$, seu $z - d \infty 0$, atque deinde multiplicemus $z - c \infty 0$ per $z - d \infty 0$, exsurget æquatio
$z^2 \begin{smallmatrix}-c\\-d\end{smallmatrix} z + cd \infty 0$, seu $zz \infty \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z - cd$. In qua si $+c+d$ interpretemur per $+a$, & $-cd$ per $-bb$, habebimus æquationem propositam $zz \infty az - bb$. Adeò ut constet æquationem hanc duas veras radices admittere, seu quæ majores sunt quàm 0, quarum quidem summa est a, & productum ex earum multiplicatione bb.

Sed ut duas semper veras radices recipiat, requiritur, ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, seu, b non majus quàm $\frac{1}{2}a$: quoniam maximum productum quod fit ex partibus ipsius a, est, cùm a in duas partes æquales dividitur. Vbi notandum, quòd ubi $bb \infty \frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a$ esse z, quæ quæritur, atque æquationem eo casu unam tantùm sortiri radicem, aut duas quidem, sed æquales. At verò bb existente majore quàm $\frac{1}{4}aa$, æquationem esse impossibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod similiter de æquatione
$zz \infty -az - bb$ est intelligendum, quæ de duabus falsis radicibus est explicabilis. Vt patet ex ejus constitutione. Etenim ponendo $z \infty -c$ seu $z + c \infty 0$, nec non $z \infty -d$ seu $z + d \infty 0$, & multiplicando $z + c \infty 0$ per $z + d \infty 0$: proveniet Æquatio

$$zz \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z + cd \infty 0, \text{ seu } zz \infty \begin{smallmatrix}-c\\-d\end{smallmatrix} z - cd.$$

In qua si interpretemur $-c-d$ per $-a$, & $-cd$ per $-bb$, emerget æquatio proposita $zz \infty -az - bb$. Cujus porrò radices Geometricè inveniuntur perinde atque Æquationis præcedentis quæ denique sic exprimuntur $z \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Cæterùm quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam videlicet $zz \propto az + bb$, & secundam $yy \propto -ay + bb$, eæ nulli determinationi sunt obnoxiæ, & semper per duas radices explicari possunt, unam veram & alteram falsam. Vt si ponatur $z \propto c$, seu $z - c \propto 0$, & $z \propto -d$, seu $z + d \propto 0$, & multiplicetur $z - c \propto 0$ per $z + d \propto 0$; fiet $z^2 \begin{matrix}-c\\+d\end{matrix} z - cd \propto 0$, seu $z^2 \propto \begin{matrix}+c\\-d\end{matrix} z + cd$. In qua æquatione si statuamus c majorem esse quàm d, ita ut excessus sit penes c cum signo $+$, atque $+c - d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $+bb$, habebimus eandem æquationem, quam priùs, nimirum $z^2 \propto az + bb$. Adeò ut perspicuum sit ipsam de duabus inæqualibus radicibus esse explicabilem, majore vera & minore falsa. At verò si ponamus c minorem quàm d, ita ut excessus sit penes d cum signo $-$, atque $+c - d$ interpretemur per $-a$, & $+cd$ per $+bb$; prodibit æquatio secundæ formæ: nimirum, $z^2 \propto -az + bb$, quippe quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor est vera, major autem falsa. Denique si d constituatur ipsi c æqualis, destruent se invicem $+c$ & $-d$, & evanescet secundus terminus az, & erit Æquatio $z^2 \propto * + bb$, cujus duæ radices, vera $+b$ & falsa $-b$, sunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè resolvendas, earumque radices juxta regulas hîc traditas commodè explicandas, requiri, ut ultimus terminus designetur per bb, aut ad eam formam, sicut superiùs est ostensum, reducatur.

AR-

ARGVMENTVM
SECVNDI LIBRI.

SEcundus liber agit de lineis curvis, earumque naturam explicat, docendo, quænam illæ sint, quas in Geometriam recipere oportet, quæque Geometricæ appellandæ sunt, itemque quo pacto possint cognosci. Modus autem eas cognoscendi in eo consistit, quòd describi possint per motum aliquem continuum, vel per plures ejusmodi motus, quorum posteriores regantur à prioribus. Verùm enimverò licèt allato modo descriptæ curvæ omnes in Geometriam sint recipiendæ, atque pro Geometricis agnoscendæ; tamen ad comprehendendas omnes, quæ sunt in natura, & ipsas ordine distinguendas in certa genera, prout gradatim magis magisque in infinitum sunt compositæ, aptiùs quidquam afferri nequit, quam ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas esse appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta certam habent relationem, quæ exprimi potest per aliquam æquationem, se indifferenter ad omnia utriusque lineæ puncta extendentem. Et quidem, quòd, cùm æquatio illa ultra rectangulum sub duabus quantitatibus indeterminatis, (quæ ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipsis non ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis (in quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ.) At verò cùm ipsa ad tres quatuorve dimensiones ascendit, quòd illa tunc sit secundi generis. Cùm verò ad 5 aut 6 dimensiones adscendit, quòd illa tunc sit tertii generis. Atque ita porrò in infinitum.

Vbi porrò facilè est intelligere, quænam sint, quæ ex Geometria sint rejiciendæ, & inter Mechanicas ponendæ: Quandoquidem curvæ illæ omnes, quæ inter prædictas non comprehenduntur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujusmodi sunt illæ omnes, quæ per motus continuos describi nequeunt, & ubi posteriores à prioribus non dependent, sed per duos motus describi concipiuntur, qui sunt à se invicem distincti, nullamque relationem habentes, quæ possit exactè mensurari, sive quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta relationem non habent, quæ per aliquam æquationem omnibus communem exprimi possit.

Postquam autem ostendimus, quo pacto lineæ curvæ ab Auctore distinguantur, tam in illas, quas in Geometriam censet introducendas, quam in illas, quas pari jure ab ea censet arcendas: ac denique quâ ratio-

ne illæ in certa genera sint distinguendæ; operæ pretium videtur ut deinceps ea, quæ Antiqui circa ipsas contemplati fuêre, expendamus. Quæ quidem ex iis, quæ afferuntur à Pappo ad propositionem 4^{tam} libri tertii, ut & ad prop^{nem} 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum, haud difficulter colligi possunt. Vbi, postquam explicavit, Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuisse constituta, quorum alia dicuntur Plana, alia Solida, alia denique Linearia; nimirum prout quædam ex ipsis solvi possunt, describendo tantùm rectas lineas & circulorum circumferentias; & alia, quæ construi nequeunt, quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica sectio; & reliqua denique quin in constructionem assumatur alia demum curva linea: Tandem de duarum mediarum inventione loquitur, quas inquit Geometricæ rationi innixos invenire non potuisse. Quorum quidam, asserentes, Problema solidum esse, resolutionem per Conicas sectiones, sive solidos locos, fecêrunt; alii autem per alias curvas, sive locos lineares; ac alii denique constructionem eius instrumentis tantùm perfecerunt. Nullum autem eorum fuisse, qui resolutionem per locos planos, sive rectas lineas & circulares, absolverit.

Vbi apparet, quòd tantummodo constructiones illas Geometricas appellaverint, quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur; quodque constructiones in genere non aliter respexerint, quàm quatenus ipsarum perfectio à manuum dexteritate & instrumentorum perfectione proficisceretur. Vnde cum ad planorum Problematum constructiones non nisi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas esse viderent, quæ omnium facillimè atque expeditissimè regulæ & circini beneficio (utpote per instrumenta omnino simplicia) in plano describuntur, & sectiones Conicas reliquasque curvas lineas, varium & difficilem ortum habentes, in plano designare difficile existimarent, ideoque descriptionem earum minus certam statuerent; factum inde quoque, ut solam Planorum constructionem, Geometricam pronuntiarent: adeoque non nisi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item, pro Geometricis agnoscerent. Quod quare ita distinxerint, non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atque Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses ex Cono secari posse ab Apollonio scio ostensum. Qui porrò postquam plurimas proprietates tribus hisce sectionibus pariter atque Circulo convenire ostendit, & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonstrationes, cum non solum illâ tempestate, verùm etiam sequentibus sæculis, magnus Geometra sit appellatus, non apparet quam ob causam prædictæ lineæ non æquè ac rectæ & circulares pro

Geo-

Geometricis fuerint habitæ. Adeò ut non solùm Veteribus illis, sed etiam Vietæ ejusque asseclis assentiri nequeam, dum Geometriæ defectum hîc suspicantes, neque Hyperbolas, neque Parabolas κατ᾽ ἐπιστημονικὸν λόγον *in Geometricis describi asseverant, ac proinde Menæchmi inventionem duarum mediarum per Parabolæ & Hyperbolæ, sive etiam per binarum Parabolarum intersectionem, veluti non Geometricam respuunt. Quam sanè (meo judicio) non minùs Geometricam censere oportet, quam illam, quæ ab Euclide affertur in Problema* 1^mum^ *Libri* 1^mi^ *Elementorum: siquidem punctum, in quo hæ sectiones sibi mutuò occurrunt, non minùs scientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli se invicem intersecant, ad describendum triangulum æquilaterum.*

Cæterùm si afferatur, ideo hasce lineas Geometricas non fuisse dictas, eò quòd instrumentis describi viderent; Annon ob eandem rationem linea recta & circularis non Geometricæ fuissent dicendæ, cum ad illas in plano describendas regulâ atque circino sit opus? Adeò ut si τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν *Vieta vocaverit constructionem illam quatenus ipsa regulæ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificiosam atque scientificam appellare licebit constructionem illam, quæ non nisi instrumentis perfici potest, quæ majorem industriam atque artificium in sui compositionem requirunt, cujusque demonstratio simul ex penitiori Geometriæ penu est depromenda? Quocirca cum recta & circularis non Geometricæ non dicantur, neque etiam constructiones per ipsas factæ; ratum igitur esto, quòd neque Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudque primum (ut supra dictum fuit) apud Auctorem nostrum constituunt; neque etiam omnes superiorum generum curvæ, constructionesque quæ per ipsas fiunt, aliæ quàm Geometricæ sint habendæ, prout demonstratio illas tales esse comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta sufficiant. Restat ut porrò ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.*

Explicatâ linearum curvarum naturâ resumit quæstionem Pappi ab Antiquis quæsitam, quam primo libro explicuit, atque resolvere incepit; talem deinde ipsam declarans, ut postquam in aliis atque aliis lineis proposita est, illa quoque alias atque alias curvas lineas, solutionem præbentes, quæque diversi generis sint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Adeò ut nulla curva linea sit sub calculum cadens, quæque in Geometriam juxta ejus definitionem recipi possit *quod sanè observatione dignum,) quæ non etiam simul pro certo aliquo linearum numero utilis existat.*

Ubi præterea notandum est, quòd eam sic resolvere doceat, ut simul omne illud, quod ad locorum planorum atque solidorum compositionem spectat, exponat, sicque paucis complectatur, non solùm quæstionis propositæ solutionem in tribus quatuorve lineis, sed etiam solidorum locorum compositionem, tantopere à Veteribus quæsitam. Nullos enim ex istis locis omisit, præter omnium simplicissimos, quos facilitatis causâ neglexit.

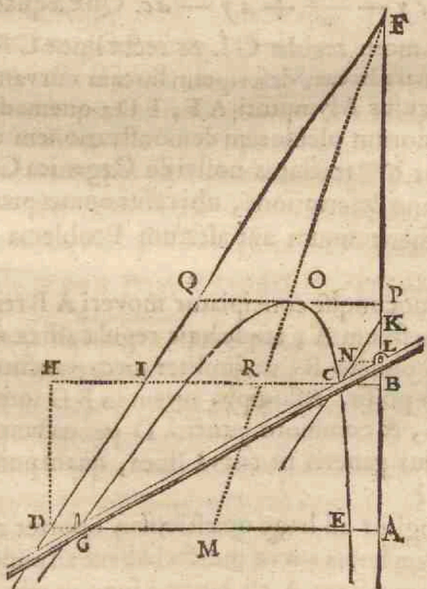
Post hæc autem, quæstione in 5 lineis propositâ, docet quænam prima & simplicissima sit linearum omnium, quæ ibidem inservire possint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quòd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, sufficiat scire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, sicut etiam quo pacto inveniri possint lineæ rectæ, quæ ipsas secent in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem subtilissimâ ac mirabili prosequitur methodo, meoque judicio digna, ut inter ingeniosissima hominum inventa celebretur. Postea verò ne quid desit, quod ad usum curvarum linearum ibidem propositarum spectare videretur, ostendit ipsas diversas habere proprietates, quæ nequaquam sectionum Conicarum proprietatibus cedunt, describitque quædam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per specula & vitra, apprimè conducibilia: adeoque in Catoptrica atque Dioptrica usum insignem habentia. Denique ostendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam possint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum describi possunt. Atque ita, quæcunque ad curvarum linearum cognitionem necessaria sunt, breviter absolvit. Quantùm autem ad Geometriam promovendam, ejusque arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoscendas hic liber faciat, vel ea ipsa quæ in illo pertractantur, ac modò recensuimus, testari possunt; tum etiam, quia in eo via ad surdesolida, altioraque loca, hactenus incognita, investiganda sternitur, atque in eo infinitæ speculationis campus aperitur.

COMMENTARII

IN

LIBRVM SECVNDVM.

QVEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola.*] Si enim producatur A G ad D, ut D G æqualis sit E A seu N L, & per D agatur recta D F ipsi C K parallela, occurrens rectæ A B in F: erit D F una ex Asymptotis, & A F altera. Quod facilè demonstrari potest. Supponamus namque lineam G O C E Hyperbolam esse, cujus Asymptoti D F, F A, & utraque D G, E A æqualis sit ipsi N L; nec non D F ipsi C K parallela, ut dixi-



 mus;

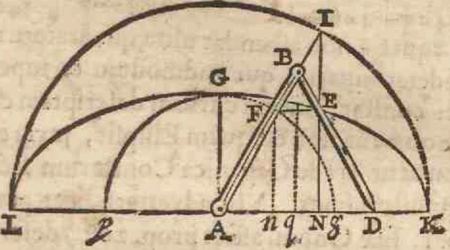
mus; hoc eſt, angulus DFA æqualis ſit angulo CKB. Producatur autem BC, ut ſecet DF in I; & per D agatur recta DH parallela ipſi AF, occurrens cum BC in H. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula DHI & KLN triangulo FAD, erunt & ipſa inter ſe ſimilia. Vnde erit ut KL ad LN, hoc eſt, ut b ad c, ita DH ſeu AB, hoc eſt, x, ad HI, quæ ideo erit $\frac{cx}{b}$. Deinde ſubductâ HI ex HB ſeu DA, hoc eſt, $\frac{cx}{b}$ ex $a+c$, relinquetur IB, $a+c-\frac{cx}{b}$. E qua ſi auferatur BC ſeu y, remanebit IC, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Quia verò in Hyperbola rectangulum ICB æquatur rectangulo DEA, per 10 prop. 2[di] libri Conicorum Apollonii; ideo ſi multiplicetur IC per CB, hoc eſt, $a+c-\frac{cx}{b}-y$ per y, fiet rectangulum ICB, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$, æquale rectangulo DEA ſeu ac, hoc eſt, ei quod fit ex ductu ipſius DE ſeu GA in EA. Quare ordinatâ æquatione, factaque tranſpoſitione, ut yy unam obtineat æquationis partem, invenietur $yy \propto cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$. Quæ æquatio eadem eſt, quæ ſupra ex motu regulæ GL & rectæ lineæ CK fuit inventa. Adeò ut affirmare liceat, deſcriptam lineam curvam CE Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti AF, FD; quemadmodum ſuppoſuimus. Quorum pleniorem demonſtrationem qui deſiderat, conſulat caput 6[tum] tractatus noſtri de Organica Conicarum Sectionum in plano deſcriptione, ubi caſus omnes proſecuti ſumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema ſimile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri AB regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula BD, in puncto B, ut ſimiliter circa punctum B in eodem plano moveri poſſit. Aſſumpto autem in BD inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam AD; Quæritur cujus generis ſit curva linea, quam punctum E motu illo deſcribit?

Quoniam igitur ad hanc quæſtionem oportet cognoſcere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ AD, in qua punctum A eſt datum: ſuppono ex puncto E, ad

quod



quod instrumentum huic curvæ describendæ inserviens est adplicatum, demissam esse super A D perpendicularem E N. Et quidem cum E N, N A duæ sint quantitates indeterminatæ ac incognitæ; voco unam x, & alteram y. Deinde, ut relationem unius ad alteram investigem, considero etiam quantitates cognitas A B vel B D, & D E, quæ hujus curvæ descriptionem determinant; illamque appello a; hanc verò b. Tum quia triangulum N E D est rectangulum, à quadrato ex D E, hoc est bb, aufero quadratum ex N E, hoc est, xx, & relinquitur quadratum ex N D, seu $bb - xx$, cujus radix $\sqrt{bb - xx}$ est ipsa linea N D. Porrò demissâ ex B super A D perpendiculari B q; secabitur recta A D ab ipsa bifariam in q, propter æqualitatem regularum A B & B D, fientque triangula B q D & E N D similia. Vnde erit ut D E ad D N, hoc est, b ad $\sqrt{bb - xx}$; ita D B, hoc est, a, ad D q, seu $\frac{a}{b}\sqrt{bb - xx}$. & fit A D ∞ $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$. Cæterùm cum A N sit $\infty\, y$, & N D $\infty \sqrt{bb - xx}$, erit tota A D $\infty\, y + \sqrt{bb - xx}$. Adeò ut habeatur æquatio inter A D bis inventam, hoc est, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$ & $y + \sqrt{bb - xx}$, vel, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx} - \sqrt{bb - xx}$ seu $\frac{2a - b}{b}\sqrt{bb - xx}$ & y. Et multiplicatâ utrâque æqualitatis parte in se, ut signa radicalia evanescant, & æquatio ab asymmetria liberetur, fit $4aa - 4ab + bb - \frac{4aaxx}{bb} + \frac{4axx}{b} - xx \infty\, yy$. Quæ æquatio si per transpositionem ac divisionem

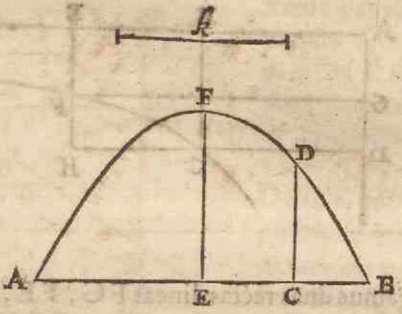
 ordi-

ordinetur, ita ut xx unam teneat æquationis partem (si sit x quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam), invenietur $xx \infty \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, vel $xx \infty bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$. Vnde cum æquatio non ascendat ultra quadratum unius ex quantitatibus indeterminatis, quemadmodum & superiùs in Hyperbola evenit: constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quæ alia non est quàm Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite tractatus nostri de Organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus. Vbi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. 1. suæ Gnom. affert prop. 26ta) describendi Ellipsin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi potest, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris est, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus usum habet insignem. Nam si productâ A B ad I, ut B I sit æqualis B E, centro A intervallo A I circulus describatur, secans A D, hinc inde productam, in L & K: erit L K axis transversus Ellipsis. Rectus autem invenitur, si ex eodem centro, intervallo D E, circulus describatur p G F g, secans A I in F. Erit enim A G semissis axis recti. Et si à puncto F ipsi A D ducatur F E parallela, secans I N in E: erit punctum E unum ex punctis, per quod Ellipsis transire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifestum: Est enim A I $2a - b$, & A N y; estque ut A I seu $2a - b$ ad A N seu y, ita A F seu b ad A n, quæ ideo est $\frac{by}{2a - b}$. Cujus quadratum $\frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$ si auferatur à quadrato ex A F seu bb, remanebit quadratum ex n F $\infty bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, utpote æquale xx quadrato lineæ N E. Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæstione sequenti, quæ ultima est propositio lib. 4^{ti} collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

Quæritur cujus generis sit curva linea A F D B, cujus hæc est proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut D, perpendiculari D C, in rectam A B, positione & magnitudine datam, id quod sub perpendiculari D C & alia quadam data linea k continetur, æquale sit rectangulo, quod sub segmentis A C, C B comprehenditur.

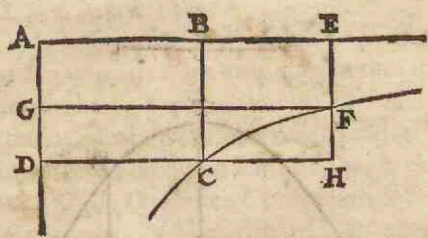
Sectâ



Sectâ A B bifariam in E, pono A E vel E B $\propto a$, E C $\propto y$, C D $\propto x$: eritque A C $\propto a + y$, & C B $\propto a - y$. Cum igitur ejusmodi sit relatio punctorum curvæ A D B ad puncta rectæ A B, ut rectangulum sub C D & k æquetur rectangulo sub A C, C B: erit $aa - yy \propto kx$. Quæ æquatio ad omnia utriusque lineæ puncta referri potest, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ existunt, quæ ad omnes lineas E C, C D applicari possunt. Exceptis punctis F & E, quo casu quantitas y nulla est, & E F æquatur $\frac{aa}{k}$. quod & de duobus præcedentibus Problematis est intelligendum. Cæterùm cum in æquatione inventa $aa - yy \propto kx$ una quantitatum incognitarum y adscendat ad quadratum, indicio est, lineam curvam esse primi generis. Quam aliam non esse, quàm Parabolam, demonstravit Pappus loco citato.

Non aliter concludes, æquatione existente $xy \propto ab$, vel $xy \propto by - ax$, lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, esse primi generis: cum tantùm ascendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Est autem curva illa linea Hyperbola. Quod facilè intelligetur, si in prima æquatione, ubi $xy \propto ab$, concipiamus ab constituere rectangulum aliquod parallelogrammum A B C D, cujus unum latus A B sit a, & alterum B C sit b; atque per punctum C circa Asymptotos D A, A B Hyperbolen describamus C F; ac denique à quovis in-

ea-

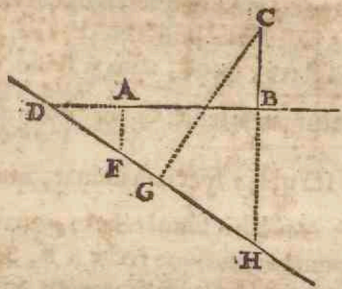


ea puncto F agamus duas rectas lineas F G, F E, ipsis A B, B C parallelas: Erit enim parallelogrammum A E F G parallelogrammo A B C D æquale, per 12 prop. 2^{di} libri Conicorum Apollonii. Adeò ut A E & E F ſumi poſſint pro duabus quantitatibus indeterminatis y & x, quæ in ſe invicem ductæ efficiant $xy \propto ab$. quòd exigebat propoſita æquatio.

Eodem modo, ſi æquatio fuerit $xy \propto by - ax$, & producantur rectæ D C, E F, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum D H F G parallelogrammo C H E B æquale. Ac proinde ſi D C ponatur $\propto a$, & C B $\propto b$, (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ y & x ad binas lineas C H & H F referantur, atque D H ſeu $a + y$ ducatur in H F ſeu x: erit rectangulum D F ſeu $xy + ax$ æquale rectangulo C E ſeu by, utpote quod invenitur multiplicando C B ſeu b per C H ſeu y. Adeoque ſi utrinque auferatur ax, relinquetur $xy \propto by - ax$. Quæ eſt æquatio poſterior.

E quibus manifeſtum fit, quòd, licèt plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis ſumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, ſemper tamen linea ejuſdem generis appareat, quocunque tandem modo ſumantur.

Omitto alios æquationum modos ſeu formulas, eandem curvam deſignantes, quandoquidem complures ſunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantùm ex varia harum curvarum ad diverſas rectas lineas relatione. Nam, ut oſtendatur quænam differentia obtineri poſſit, cùm curva linea ad diverſas rectas lineas refertur: Sunto duæ rectæ lineæ poſitione datæ A B, D F, ſibi mutuò occurrentes in D; punctum autem



tem in curva ſit C. Et in A B quidem puncto A exiſtente dato, & in ipſam à puncto C demiſsâ perpendiculari C B, ad referendum punctum C ad aliquod punctum ipſius A B: voco A B, x; & B C, y. Deinde, quoniam, propter poſitione datas A B, D F, datum eſt punctum interſectionis D, data quoque erit recta D A, nec non A F, quæ ipſi A B eſt perpendicularis, ſecans D H in F. Denique, demiſsâ ex puncto C ſuper D H perpendiculari C G, producatur C B, donec occurrat rectæ D F in puncto H. Quibus poſitis, ut inveniantur rectæ D G, G C, oſtendentes relationem, quam habet punctum C ad punctum G; ponatur D A $\infty\ a$, A F $\infty\ b$. Hinc, cum A B ſit $\infty\ x$, erit D B $\infty\ a + x$. Iam verò quia propter ſimilitudinem triangulorum D A F, D B H, D A eſt ad A F, hoc eſt, a ad b, ſicut D B, hoc eſt, $a + x$, ad B H, erit B H $\infty\ \frac{ab + bx}{a}$. Cui ſi addatur C B $\infty\ y$, fiet tota C H $\infty\ y + b + \frac{bx}{a}$. Porrò quoniam rectangulum eſt triangulum D A F, erit quadratum ex D F æquale quadratis ex D A & A F; ideoque D F $\infty\ \sqrt{aa + bb}$. Hinc cum D A ſit ad D F, hoc eſt, a ad $\sqrt{aa + bb}$, ſicut D B, hoc eſt, $a + x$, ad D H; erit ipſa $\infty\ \frac{a + x}{a} \sqrt{aa + bb}$ ſeu $\sqrt{aa + bb} + \frac{x}{a} \sqrt{aa + bb}$. ſimiliter, ob ſimilitudinem triangulorum F A D, H G C, cum ſit ut D F ad F A, hoc eſt, $\sqrt{aa + bb}$, ad b, ita C H, hoc eſt, $y + b + \frac{bx}{a}$ ad H G; erit H G $\infty\ \frac{aby + abb + bbx}{a\sqrt{aa + bb}}$. Quæ ſi ſubtrahatur ex D H $\infty\ \sqrt{aa + bb} + \frac{x}{a} \sqrt{aa + bb}$, relinquetur D G $\infty\ \frac{a^3 + aax - aby}{a\sqrt{aa + bb}}$ ſeu $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$. Denique quoniam D F eſt ad D A, hoc eſt, $\sqrt{aa + bb}$ ad a, ſicut C H, hoc eſt,

$y + b + \frac{bx}{a}$ ad C G; erit C G $\infty\ \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$. E quibus perſpicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ A B, tum ad puncta rectæ D F, obtineri poteſt, in eo tantùm conſiſtere, quòd, cùm A B indeterminata relinquitur, C B exprimatur per y; ſed C G per $\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$, & D G per $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$. Ita ut ſi y ſpeciem induat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; conſtabit ſimul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriuſque rectæ A B, D F. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum poſitione oſtendi poſſet, niſi breviores eſſe vellemus.

B *Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm cg. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —.*] Exiſtente enim ez minore quàm cg, & multiplicando utrobique per z^2, foret ez^3 minor quàm cgz^2. Quo caſu omnes quoque numeratoris termini, qui ſigno + adficiuntur, minores erunt illis, qui ſigno — adficiuntur; adeò ut tantùm mutanda ſint omnia ſigna. Æquationem autem hoc facto illæſam manere, ita oſtenditur. Eſto $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$ (ſufficit enim id per facile aliquod exemplum oſtendere), ſuppoſitaque d minori quàm e, mutentur omnia ſigna + & —: fietque $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$.

Quoniam enim ex hypotheſi $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$, erit, multiplicando utrinque per $d - e$, $dy - ey \infty fe - dk$. Vnde factâ tranſpoſitione, ut totum æquetur nihilo, erit $dy - ey - fe + dk \infty 0$. Transferantur rurſus $+ dy - ey$ in alteram æquationis partem, & fiet $- fe + dk \infty - dy + ey$. Quæ æquatio à præcedenti non differt, niſi quòd termini omnes contrariis ſignis ſint adfecti. Quare ſi utraque æqualitatis pars dividatur per $- d + e$, prodibit $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$. ut erat propoſitum.

Vnde colligere licet: Si quantitates quædam ſignis + & — junctæ æquentur aliis quibuſdam quantitatibus etiam ſignis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis ſignis affectæ inter ſe æquales.

Vnde

Vnde si in hac æquatione quantitas y nulla sit, aut minor quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo D A G, oporteret & illud supponere in angulo D A E, aut E A R, aut R A G, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiretur, indicio esset, quæstionem casu proposito esse impossibilem.] Sciendum hic ab Autore obiter notari, ad plenam compositionem loci, in quem cadit quæsitum punctum C, opùs esse ut investigemus id ipsum in omnibus 4^or^ angulis D A G, D A E, E A R, & R A G, quærendo nempe ad hoc 4^or^ æquationes diversas. Id quod notat facile esse, unà æquatione jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mutare oportet signa + & —, pro diversa habitudine quantitatum inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra angulum D A E, aut E A R, aut R A G quæratur eâdem ratione, quâ illud hîc invenire docuit, cùm intra angulum D A G cadere supponitur. Manifestum enim est, quòd, si in 4^or^ hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiatur, quæstio proposita futura sit impossibilis. Quod ipsum hîc in genere de puncto C intelligi debet, etiamsi quæstio alias conditiones præsupponat: cum illa vix alioquin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) istius momenti visa sit, ut in constructione hujus loci totus esset, nisi quatenus hîc unà simul compositionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, sicut ipsius verba indicant p. 12 & 34. Quippe aliàs in hac positione datarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum sub C B, C F ponitur æquale rectangulo sub C D, C H, ut punctum C non tantùm ubivis cadat in Circulum, qui transit per puncta A, G, & duas intersectiones linearum F E, G H, & ipsarum D A, F E; verùm etiam in utramque duarum oppositarum Hyperbolarum, quarum una transit per A & G puncta, & altera per duas reliquas intersectiones dictas. Quemadmodum etiam, si duæ ex datis lineis sunt parallelæ, fieri potest, ut punctum C ubilibet cadat in duas oppositas Hyperbolas & insuper in Parabolam vel in duas alias oppositas Hyperbolas; aut etiam in duas oppositas Hyperbolas & in rectam lineam, ubi videlicet bina sunt parallelarum paria sese intersecantia. atque ita de aliis. Idem observare licet

BB

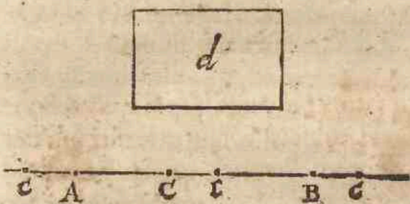
Vide fig. pag. 12.

in Apollonii Locis Planis, à me reſtitutis, in quorum nonnullis, ad plenam loci compoſitionem, quæſitum punctum præter lineas jam expreſſas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate inveſtigari & conſtrui poſſunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantùm angulis ſuppoſitum fuerit, quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His ſimilia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non niſi certus eſt punctorum numerus. Cujuſmodi eſt ſequens

PROBLEMA.

IN recta interminata aſſignatis duobus punctis A, B, in eadem aliud aſſignare punctum C, ut rectangulum ACB, quod ſit ſub rectis AC, CB, ad aſſignata puncta A, B abſciſſis, dato ſpatio *d* æquale ſit, quod tamen minus ſit quartâ parte quadrati ex AB. quæ ſit ∞ *a*.



Quoniam hîc juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum eſt reſpectu puncti A, ut & reſpectu puncti B, hoc eſt, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad ſiniſtram utriuſque cadat, hinc ſi concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, ſi ei ſoli acquieſcere velimus. Quocirca & illud ipſum extra A & B ab utraque parte ſupponendum eſt, ſi velimus ut ſolutio Problematis omnibus numeris ſit abſoluta.

Vnde ſupponendo C primùm cadere extra AB ad ſiniſtram ipſius A, erit, aſſumptâ x pro A c, $xx + ax \infty d$; ac deinde ſupponendo C cadere inter A & B, erit $ax - xx \infty d$; & denique ſupponendo c cadere extra AB ad dextram ipſius B, erit $xx - ax \infty d$. Hoc eſt in numeris, ſi a ſit ∞ 20, $d \infty 96$, habebitur $x \infty 4$, $x \infty -24$; $x \infty 12$; $x \infty 8$; $x \infty 24$, & $x \infty -4$. Quæ quidem omnes ſunt radices, quæ ad propoſitum Problema pertinent: Quarum prima & ultima deſignant longitudinem lineæ A c ∞x, qualis

qualis ipsa sumenda est ab A versùs sinistram, & quatuor reliquæ, qualis ipsa sumi debet ab A versùs dextram, cadente puncto C inter A & B, vel ultra B; adeò ut in toto sint 4or diversa puncta, quæ quæsito satisfaciant.

Cæterùm si velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ hasce omnes radices simul includat, oportet tantùm, ubicunque accepto puncto C, factâque A c $\propto x$, multiplicare $xx + 20x - 96 \propto 0$ per $20x - xx - 96 \propto 0$, & id quod fit rursus per $xx - 20x - 96 \propto 0$, & invenietur $-x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840x^3 + 47616xx + 184320x - 884736 \propto 0$ seu $x^6 - 20x^5 - 496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 884736 \propto 0$.

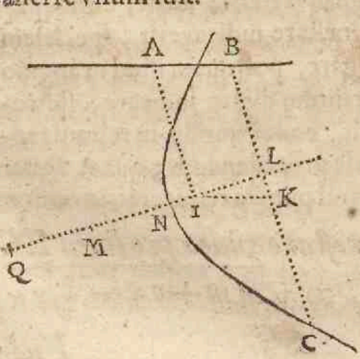
Id quod etiam universaliùs fieri potest multiplicando C B $\propto \pm 20 \pm x$ per A C $\propto x$, obtinebitur enim $\pm 20x \pm xx \propto 96$. Quæ æquatio præter radices superiores etiam continet $x \propto -8$, & $x \propto -12$, quippe quæ eliciuntur ex æquatione $-xx - 20x \propto 96$.

Vbi demum notandum, ex æquatione inventa $\pm 20x \pm xx \propto 96$ facile quoque esse aliam vulgari modo affectam invenire, quæ omnes easdem radices cum illa comprehendat, utpote multiplicando utramque partem in se quadratè, & fit $400xx \pm 40x^3 + x^4 \propto 9216$. Vnde servatâ $\pm 40x^3$ ab una parte, & deinde utrâque rursus quadratâ, invenitur æquatio $x^8 - 800x^6 + 141568x^4 - 7372800xx + 84934656 \propto 0$, cujus radices eædem sunt quæ præcedentis æquationis $\pm 20x \pm xx \propto 96$, quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujusmodi æquationibus ad solutionem quæstionis ex Pappo allatæ non fuerit usus, vel ea videtur, quòd alias tum vulgares, tum etiam à quolibet faciliùs perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæstio per se satis difficilis existit, præstare judicaverit, specialem æquationem pro C puncto investigare, postquam illud in angulo D A G supponitur, ulteriùsque tantùm digito indicare, si Problemati penitus satisfaciendum sit, eodem modo in reliquis angulis D A E, E A R, & R A G esse procedendum; quàm æquationem universalem, quæ omnia simul puncta respiceret, invenire.

Hinc nihil mihi ampliùs restare video pro linea L C præter hosce terminos: L C $\propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

Vnde cognoscitur, quòd si nulli fuissent, futurum fuisse ut punctum C reperiretur in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo + notatis, oo fuisset æqualis $4pm$, sive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm I L.] Hæc verba tres conditiones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit. Nam cum facienda sit L C $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{pxx}{m}}$, reperietur illud punctum in linea recta I L, si termini, quibus ipsa exprimitur, nulli sint. Et si tales fuerint, ut radix ex iis extrahi possit, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo + notatis, oo sit æqualis $4pm$, hoc est, ut L C sit $\sqrt{mm + \frac{pxx}{m}\ 8\ x\sqrt{4pm}}$ seu $m\ 8\ x\sqrt{\frac{p}{m}}$: punctum C similiter in recta linea reperietur. Idem continget, si termini mm & ox, aut ox & $\frac{pxx}{m}$ fuerint nulli, dummodo reliquus $\frac{pxx}{m}$, aut mm semper signo + adfectus sit.

CC *Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus, &c.*] Quò ista, quæ hîc deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifestiora fiant, sequentia in medium afferre visum fuit.



Primus casus, cùm Sectio est Parabola, in quâ linea L C una ex iis existit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ semper in lineam I L cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L sumendus est respectu puncti I, linea L C existente $\infty \sqrt{mm + ox}$. Ad quem inveniendum, si, ut & latus re-

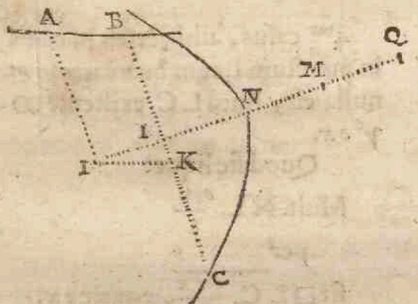
ctum

ctum r, pono pro NI f, eritque NL $\propto f + \frac{ax}{z}$,

deinde ita procedo:

$$\text{Mult. NL.}\; f + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per}\quad r$$
$$\text{fit}\;\square\,\text{LC.}\; fr + \frac{arx}{z}\text{, æquale } mm + ox.$$

$$\frac{ar}{z} \propto o \qquad\qquad fr \propto mm\text{, dele } r$$
$$ar \propto oz \qquad\qquad \frac{foz}{a} \propto mm$$
$$r \propto \frac{oz}{a} \qquad\qquad foz \propto amm$$
$$f \propto \frac{amm}{oz}$$



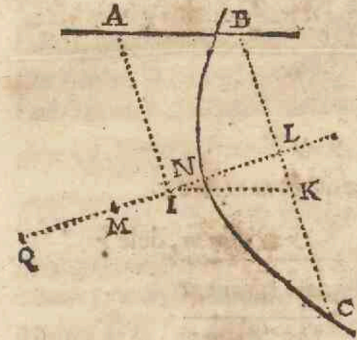
2^{dus} casus, ubi vertex N in linea IL ex eadem parte puncti L sumendus est respectu puncti I, lineâ LC existente $\propto \sqrt{mm - ox}$.

Quod sic liquet

$$\text{Mult. LN.}\; f - \frac{ax}{z}$$
$$\text{per}\quad r$$
$$\text{fit}\;\square\,\text{LC.}\; fr - \frac{arx}{z}\text{ æquale } mm - ox.$$

Et fit, ut ante, $r \propto \frac{oz}{a}$, & $f \propto \frac{amm}{oz}$.

3^{tius} ca-



3.[tius] casus, ubi vertex N in linea I L sumi debet inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm + ox}$.

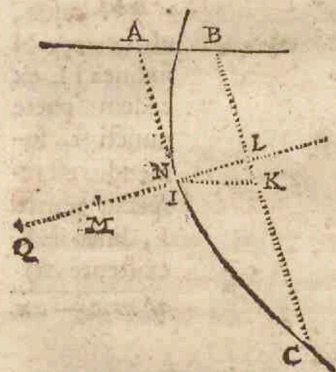
Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z} - f$

per $\underline{\qquad\qquad r}$

fit □ L C. $\frac{arx}{z} - fr$, æquale $-mm + ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.



4[tus] casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

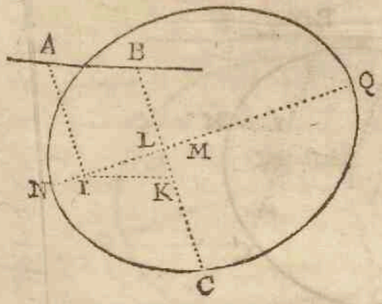
per $\underline{\qquad\qquad r}$

fit □ L C. $\frac{arx}{z}$, æquale ox.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$.

E quibus colligitur, cum in omnibus hisce Parabolæ casibus sive diversis ejus positionibus latus rectum sit $\infty \frac{oz}{a}$, atque in iis nullibi reperiatur quantitas in xx ducta, nec præter easdem ulla alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur, quæsitum punctum C cadere in Parabolam, cujus latus rectum est $\frac{oz}{a}$, quæque pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, positiones jam explicatas admittat.

Pri-



Primus casus, cùm linea est Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

Ad quod inveniendum, ut & diametrum N Q, pono pro N M vel M Q c, & pro I M d; eritque N L $\infty\ c - d + \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty\ c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

$$\begin{array}{lllll} \text{Mult. NL.} & c - d + \frac{ax}{z} & & & \\ \text{per LQ.} & c + d - \frac{ax}{z} & & & \\ \hline & cc - cd + \frac{acx}{z} & & & \\ & \quad + cd - dd + \frac{adx}{z} & & & \\ & \quad\quad - \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz} & & & \\ \hline \end{array}$$

fit ▭ N L Q seu □ L C. $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm + ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c majorem esse quàm d.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m} \qquad \frac{2ad}{z} \infty o$$

$$aam \infty pzz \qquad 2ad \infty oz$$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$. Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc - dd \infty mm$, dele dd

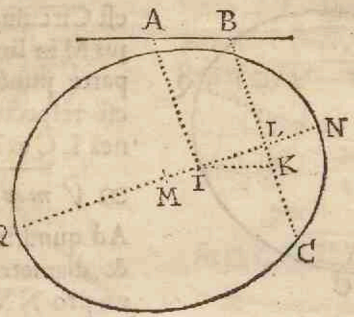
$cc \infty \frac{oozz}{4aa} + mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

2dus



2^{dus} casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet:

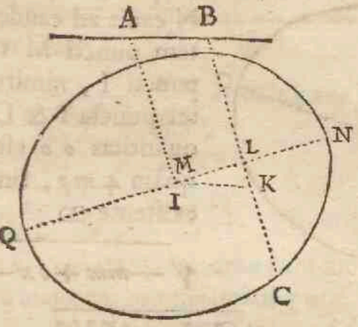
$$\text{Mult. QL.} \ c + d + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.} \ c - d - \frac{ax}{z}$$
$$cc + cd + \frac{acx}{z}$$
$$-cd - dd - \frac{adx}{z}$$
$$-\frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

fit $\square$ Q L N seu $\square$ L C. $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$ æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, $aam \infty pzz$, $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, &

$$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}.$$



3^{tius} caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas $o\,x$ nulla eſt, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $2c \infty 2m$ vel $\frac{2pzz}{aa}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod ſic liquet

Mult. Q L. $c + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - \frac{ax}{z}$

$$cc + \frac{acx}{z}$$

$$- \frac{acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

& fit ▭QLN ſeu□L C. $cc - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d eſſe ∞ o.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$$

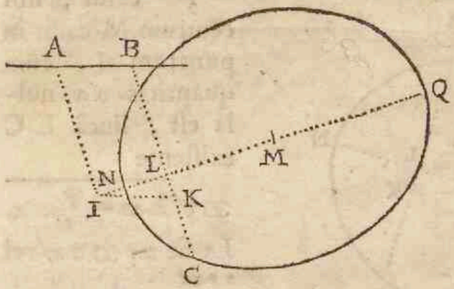
$$aam \infty pzz$$

$$m \infty \frac{pzz}{aa}, \text{ \& } mm \infty \frac{ppz^4}{a^4} \infty cc$$

$$\frac{4ppz^4}{a^4} \infty 4cc$$

$$2c \infty r \infty \frac{2pzz}{aa} \text{ vel } 2m.$$

Nota hîc in tribus allatis caſibus, in quibus c major intelligitur quàm d, verticem N cadere ad alteram partem puncti M reſpectu puncti I, hoc eſt, quando habetur $+ mm$.



4^{tus} casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm quantitas oo est major quàm $4\,mp$, lineâ L C existente ∞ $\overline{\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}}$.

Et fit $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$

Quod sic liquet

$$
\begin{array}{rl}
\text{Mult. NL.} & c-d+\frac{ax}{z} \\
\text{per LQ.} & c+d-\frac{ax}{z} \\
\hline
 & cc-cd+\frac{acx}{z} \\
 & \quad +cd-dd+\frac{adx}{z} \\
 & \quad\quad -\frac{acx}{z}+\frac{adx}{z}-\frac{aaxx}{zz} \\
\hline
\end{array}
$$

fit $\square$ NLQ seu $\square$ LC. $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, æquale

$$-mm+ox-\frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c minorem quàm d.

$$
\begin{array}{l}
\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m} \\
\hline
aam \infty pzz
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{2ad}{z} \infty o \\
\hline
2ad \infty oz \\
\hline
\end{array}
$$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$.

Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc-$

$cc - dd \infty - mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa} - mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.

5^{tus} caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C exiſtente ∞ $\sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \frac{oz}{a}$.

Quod ſic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

per L Q. $2c - \frac{ax}{z}$

fit ▭ N L Q ſeu □ L C. $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d eſſe æquales.

$\frac{2ac}{z} \infty o$ $\qquad$ $\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

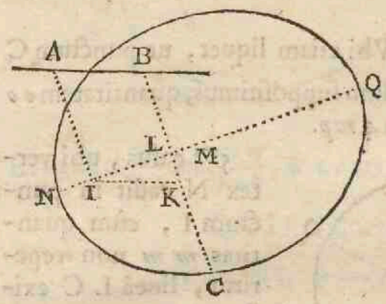
$2ac \infty oz$ $\qquad$ $aam \infty pzz$

$2c \infty r \infty \frac{oz}{a}$

Hinc cùm in omnibus hiſce Circuli caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno — adfecta reperiatur, ut & quantitas $aam \infty pzz$; nec præter poſitiones haſce ul-

 la alia

la alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — fuerit adfectus, & quantitas $aam \infty pzz$, angulo I L C existente recto, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Circulum, quemadmodum est ostensum.



Primus casus, cùm linea est Ellipsis, & centrum ejus M in linea I L sumendum est ex eadem parte puncti L respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, sicut & latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque $NL \infty c - d + \frac{ax}{z}$, & $LQ \infty c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

lat. transv. lat. rect. $\square$ NLQ

$$2c \text{———} r \text{———} cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}, \text{ ad}$$

$\square$ LC

$$\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c majorem esse quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \infty o$$

$$adr \infty coz$$

$$\frac{adr}{oz} \infty c, \& \frac{aaddrr}{oozz} \infty cc \qquad \frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam

$$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$$

$$aom \infty 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \infty d$$

ccr —

$$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty mm$$

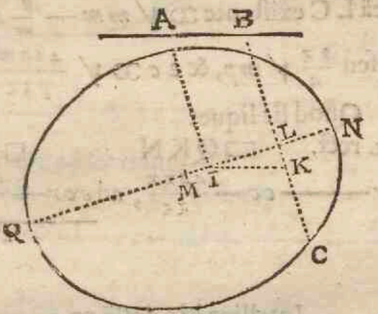
$ccr - ddr \infty 2cmm$, dele c & cc

$$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty \frac{2admmr}{oz}$$

$$aadrr \infty doozz + 2ammoz$$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{\ }$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



2[dus] casus, ubi centrum M in linea IL ex altera parte est sumendum puncti L respectu puncti I, lineâ LC existente $\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. □QLN

$2c$ —— r —— $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$,

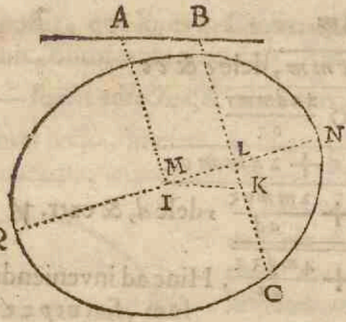
□LC

ad $\dfrac{ccr - ddr - \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



3^{tius} casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ seu $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. □QKN □LC

$$2c \text{———} r \text{———} cc - \frac{aaxx}{zz}, \text{ ad } \frac{ccr - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc d esse $\infty\, o$

$$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$

$$aamr \infty 2cpzz.$$

Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$$c \infty \frac{aamr}{2pzz}$$

$$\frac{cr}{2} \infty mm$$

$$cr \infty 2mm, \text{ dele } c$$

$$\frac{aamrr}{2pzz} \infty 2mm$$

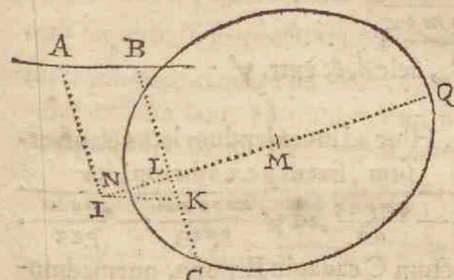
$$aarr \infty 4mpzz$$

$$rr \infty \frac{4mpzz}{aa}$$

$r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi

Ubi notandum, in allatis tribus casibus, sicut in Circulo, propter c ipsâ d majorem, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+mm$.



4^tus casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm oo est major quàm $4mp$. lineâ L C existente $\propto \sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}, \ \& \ 2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}-\frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. $\square$ NLQ

$$2c \text{ ——— } r \text{ ——— } cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}, \text{ ad}$$

$\square$ LC

$$\frac{ccr-ddr+\frac{2adrx}{z}-\frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } -mm+ox-\frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c minorem quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \propto o$$

$$adr \propto coz$$

$$\frac{adr}{oz} \propto c, \ \& \ \frac{aaddrr}{oozz} \propto cc \qquad \frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \propto 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$,

$aamr \propto \frac{2adpzr}{o}$ ita pzz ad aam.

$$aom \propto 2dpz$$

$$d \propto \frac{aom}{2pz}$$

$$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty - mm$$

$ccr - ddr \infty - 2cmm$, dele c & cc

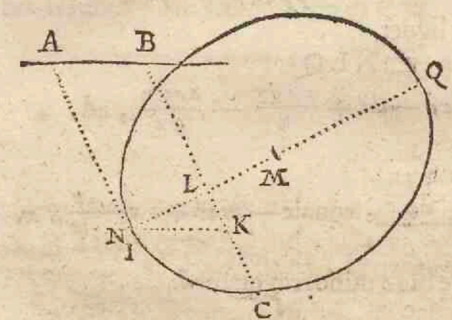
$$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty - \frac{2admmr}{oz}$$

$$aadrr \infty doozz - 2ammoz$$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Ellipsin, quemadmodum hîc supposuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$.



5[tus] casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. $\square$ NLQ $\square$ LC

$2c$ —— r —— $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{\frac{2acrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d æquales.

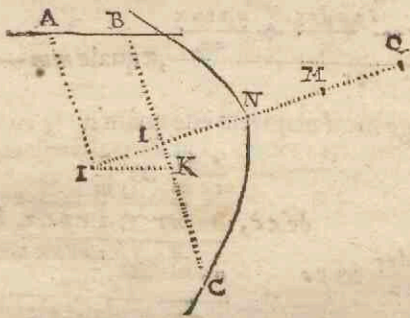
$\frac{ar}{z} \infty o$ $\qquad \frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$ar \infty oz$ $\qquad aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$r \infty \frac{oz}{a}$ $\qquad$ Vnde ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\frac{oz}{a}$, ad $\frac{aom}{pz}$.

Quo-

Quocirca cum in omnibus hisce Ellipseos casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, & ratio recti lateris ad transversum sit, ut pzz ad aam; nec præter allatas positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}\,xx$ signo — denotatus fuerit, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Ellipsin, cujus rectum latus ad transversum sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, cujusmodi jam est ostensum, existat.



Primus casus, cùm sectio est Hyperbola, in quâ linea L C est una ex iis, quæ ad diametrum, quæ est in linea I L, ordinatim adplicantur, & ubi centrum M in linea I M ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}\,xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo & Ellipsi, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque N L $\infty\ d - c - \frac{ax}{z}$, & L Q ∞ $d + c - \frac{ax}{z}$.

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. NL. $d - c - \frac{ax}{z}$

per LQ. $d + c - \frac{ax}{z}$

$$dd - cd - \frac{adx}{z}$$
$$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$$
$$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— $\square$ NLQ. $dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad $\square$ LC. $\frac{ddr - ccr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d majorem esse quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty mm$

$ddr - ccr \infty 2cmm$, dele c & cc

$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty \frac{2admmr}{oz}$

$doozz - aadrr \infty 2ammoz$

$doozz - 2ammoz \infty aadrr$

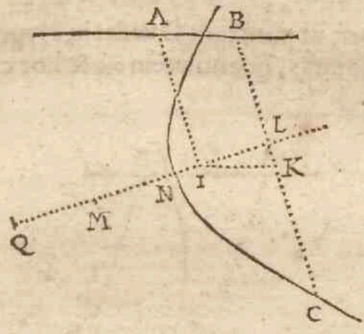
$\frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Vbi

Vbi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppoſuimus, quantitatem $o\,o$ hoc caſu majorem requiri quàm $4\,mp$.



2[dus] caſus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm $o\,o$ eſt major quàm $4\,mp$, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

$$\begin{array}{rl} \text{Mult. QL.} & c + d + \frac{ax}{z} \\ \text{per LN.} & -c + d + \frac{ax}{z} \\ \hline & -cc - cd - \frac{acx}{z} \\ & \quad + cd + dd + \frac{adx}{z} \\ & \quad\quad + \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz} \\ \hline \end{array}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{ —— } r \text{ —— } \square \text{QLN}.\ dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad } \square \text{LC}.\ \frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{æquale}$$

$$mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

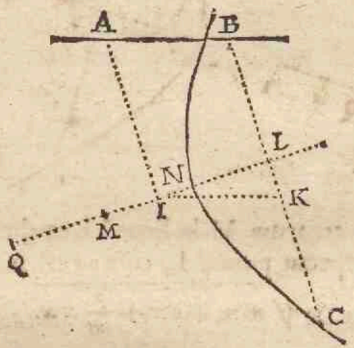
 Simi-

Similiter hîc d majorem intellige quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \;\&\; 2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo & hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



3[tius] caſus, ubi vertex N ſumendus eſt inter puncta I & L, lineâ L C exiſtente $\propto \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \propto \frac{aom}{2pz}$, $r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod ſic liquet

$$\begin{array}{lr} \text{Mult. QL.} & c + d + \frac{ax}{z} \\ \text{per LN.} & -c + d + \frac{ax}{z} \\ \hline & -cc - cd - \frac{acx}{z} \\ & +cd + dd + \frac{adx}{z} \\ & +\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz} \\ \hline \end{array}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{ — } r \text{ — } \square\,\text{QLN}.\; dd - cc + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

$$\text{ad } \square\,\text{LC}.\; \frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale}$$

$$-mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

In-

Intellige hîc d minorem esse quàm c.

$$\frac{adr}{cz} \infty o$$

$$adr \infty coz$$

$$\frac{adr}{oz} \infty c, \& \frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$$

$$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$$

$$aom \infty 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \infty d$$

$$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty - mm$$

$ddr - ccr \infty - 2cmm$, dele, c & cc

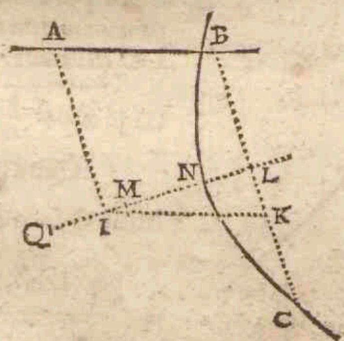
$$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty - \frac{2admmr}{oz}$$

$$doozz + 2ammoz \infty aadrr$$

dele d, & extr. $\sqrt{}$. $\frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum fiat ut pzz ad aam, ita

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}.$$



4^{tus} casus, ubi centrum M & vertex N sumi debent inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \quad c - d + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.} \quad -c - d + \frac{ax}{z}.$$
$$-cc + cd - \frac{acx}{z}$$
$$-cd + dd - \frac{adx}{z}$$
$$+\frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

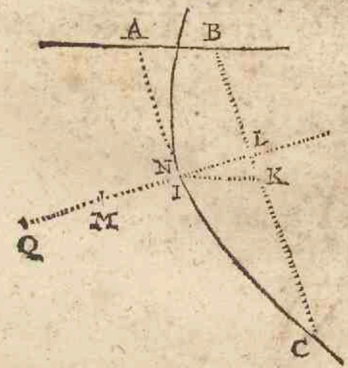
$$2c \text{———} r \text{———} \square \text{QLN.} -cc + dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad} \square \text{LC.} \frac{-ccr + ddr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{æquale}$$
$$-mm - ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc similiter d minorem quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{a}}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



5tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC existente

$$\propto \sqrt{ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \quad 2c + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.} \quad \frac{ax}{z}$$

lat. transv. lat. rect.

$$2c \text{———} r \text{———} \square \text{QLN.} \frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

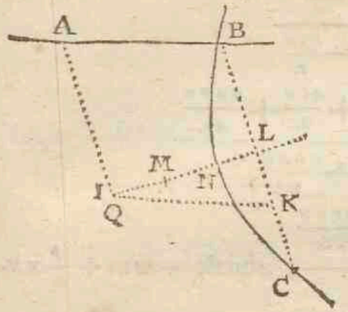
$$\text{ad} \square \text{LC.} \frac{\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

Intellige hîc c & d esse æquales.

Et fit, ut ante in Ellipsi, r ad $2c$, ut pzz ad aam,

$$d \infty c \infty \frac{aom}{2pz},\ r \infty \frac{oz}{a},\ \&\ 2c \infty \frac{aom}{pz}$$



6^{tus} casus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente

$$\infty \sqrt{-ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

Mult. Q L. $\frac{ax}{z}$

per L N. $-2c + \frac{ax}{z}$

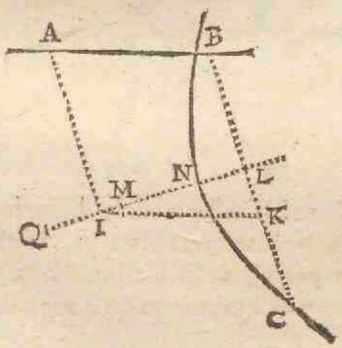
lat. transv. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ Q L N. $-\frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\dfrac{-\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c & d esse æquales.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$,



7^{mus} casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Cc

Quod

Quod sic liquet

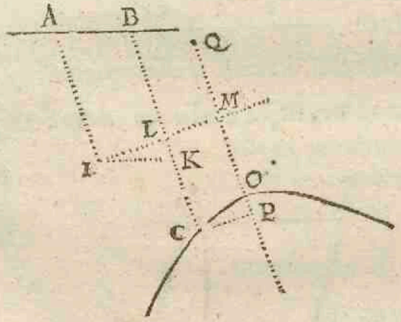
$$\text{Mult. QL.}\quad c + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.}\ -c + \frac{ax}{z}$$
$$-cc - \frac{acx}{z}$$
$$+\frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{ --- } r \text{ --- } \square \text{QLN.} -cc + \frac{aaxx}{zz},$$
$$\text{ad } \square \text{LC.}\ \frac{-ccr + \frac{aarxx}{zz}}{2c},\ \text{æquale} -mm + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hìc d esse ∞ o.

Unde, ut ante in Ellipsi, invenitur, r esse ad $2c$, sicut pzz ad aam, & $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, at verò $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.



8^{vus} casus, ubi linea L C est parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea I L, ordinatim adplicatur, & ubi centrum M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum R pertinens ad diametrum O P, & latus transversum O Q, pono, ut ante, pro I M d, & pro O M vel M Q e.

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. L M vel C P. $d - \frac{ax}{z}$

per C P. $d - \frac{ax}{z}$

$$dd - \frac{adx}{z}$$

$$- \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2e$ —— □ C P. $dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad ▭ Q P O. $\frac{2dde - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

$$\frac{4ade}{Rz} \propto o$$
$$4ade \propto oRz$$
$$e \propto \frac{oRz}{4ad}$$

$$\frac{2aae}{Rzz} \propto \frac{p}{m}$$

dele e, $2aaem \propto pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$$\frac{aomRz}{2d} \propto pRzz$$
$$aom \propto 2dpz$$
$$\frac{aom}{2pz} \propto d$$

$$\frac{2dde + eeR}{R} \propto mm$$

$2dde + eeR \propto mmR$, dele e

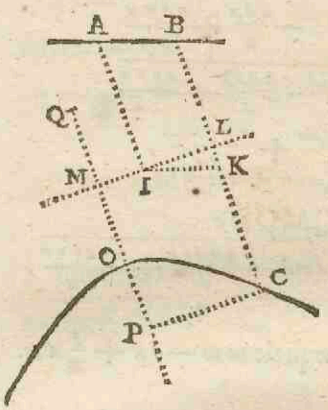
$$\frac{dozR}{2a} + eeR \propto mmR$$
$$\frac{oom}{4p} + ee \propto mm$$
$$ee \propto mm - \frac{oom}{4p}$$

$e \propto \sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$, & $2e \propto \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$.

Hinc

Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, ad $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in primo casu.



9[nus] casus, ubi centrum M in linea I L sumendum est ex altera parte puncti L respectu puncti I, cùm oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente

$$\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

Mult. ML vel P C. $d + \frac{ax}{z}$

per P C. $d + \frac{ax}{z}$

$$dd + \frac{adx}{z}$$
$$+ \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2e$ —— $\square$ P C. $dd + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

$\square$ Q P O

ad $\dfrac{2dde + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. $\square$ M O. ee

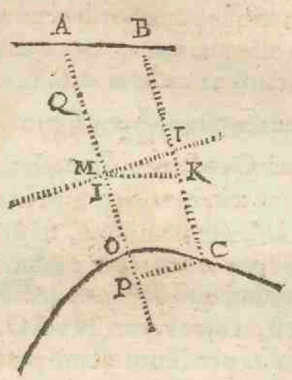
fit $\square$ M P vel L C. $\dfrac{2dde + eeR + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

Et fit, ut ante, $2e$ ad R, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, & $R \infty \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem $o\,o$ & hoc casu minorem requiri quàm $4\,mp$, contra quàm in 2^do^ casu.



10^mus^ casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas $o\,o$ nulla est, lineâ L existente $\infty \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $2\,e \infty 2\,m$, & $R \infty \frac{2\,aamm}{pzz}$, & ratio $2\,e$ ad R, ut pzz ad aam.

Quod sic liquet

Mult. M L vel P C. $\frac{ax}{z}$

per P C. $\frac{ax}{z}$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2\,e$ —— □ P C. $\frac{aaxx}{zz}$, ad ▭ Q P O. $\frac{2\,aaexx}{Rzz}$

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $ee + \frac{2\,aaexx}{Rzz}$,

æquale $mm + \frac{p}{m}xx$.

$ee \infty mm$

$e \infty m$, & $2\,e \infty 2\,m$

$\frac{2\,aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2\,aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2\,e$ ad R, ita pzz ad aam.

$2\,aamm \infty pRzz$

$\frac{2\,aam}{pzz} \infty R$

Hinc

Hinc cum in omnibus hisce Hyperbolæ casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo $+$ adfecta reperiatur, & in prioribus septem latus rectum ad transversum sit, ut pzz ad aam, at in tribus posterioribus ut aam ad pzz; nec præter has positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo $+$ denotatus fuerit, punctum quæsitum C cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad transversum sive etiam transversum ad rectum, pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, qualis jam ostensa fuit, existat.

Ubi denique notandum, quòd, sicut punctum C in Hyperbolam cadere ostensum est, cujus vertex N vel O, id ipsum similiter in Hyperbola opposita pro libitu assumi possit, cujus vertex est Q, non autem indifferenter in 4or ejusmodi sectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, simul.

CCC *Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema* I. *primi libri Conicorum Apollonii.*] Quò illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis scripserunt, non sunt ad manus, hac in parte satisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, exciderant, simili occasione ipse investiganda proposui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo se oblectare cupientibus, ut proprio marte propositiones invenire addiscant, inservire potest, prout iis, hisce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & investigandas instigentur, præïvero; ne ad universalem Matheseos complexionem plura librorum volumina evolvere & propositiones in iis singulas excutere (quod plerisque summus est scopus) opus habeant; quin potiùs quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant, novasque alias innumeras, quibus scientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

Verùm enimvero ut non solùm pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio ostensa citavit, juxta Geometriæ suæ methodum inveniri possint; sed etiam illa, quæ ex ipso p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod sciam, ea sunt, quæ ab eo ad Geometriam suam ex Apollonio præsupponuntur): non abs

re

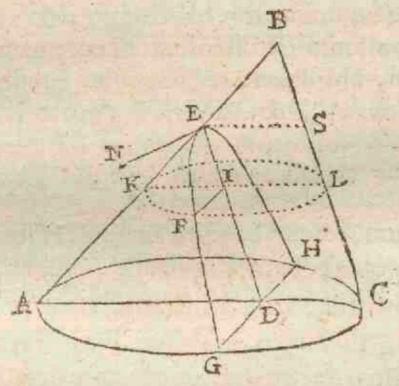
re fuerit illa præſenti commentario ſimul comprehendere atque ad Autoris mentem ſic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARUM SECTIONUM PROPRIETATIBUS.

Suppoſitiones.

1. Rectam lineam B A vel B C, quæ à vertice coni B ducitur ad baſis A C circumferentiam, eſſe in ſuperficie conica.

2. Sectionem K F L, baſi coni A C parallelam, eſſe circulum.



De *PARABOLA*, quæ eſt ſectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E D; communis ſectio trianguli per axem A B C & plani ſecantis G F E H, quæ & ſectionis diameter dici conſuevit, parallela eſt uni laterum A B, B C ejuſdem trianguli, ut hîc ipſi B C; lineâ G H, quæ Baſis Sectionis G F E H vocatur, ipſam A C, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Eſto

Esto $AB \propto a$

$BC \propto b$ Fiat propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ ABC & KEI

$AC \propto c$

$EB \propto d$ ut BC ad CA, ita EI ad IK

$EI \propto x$ $\quad b$ —— c —— x / $\frac{cx}{b}$

$FI \propto y$ Rursus fiat propter similitudinem

$\triangle^{\text{rum}}$ ABC & EBS

ut AB ad AC, ita EB ad ES seu IL

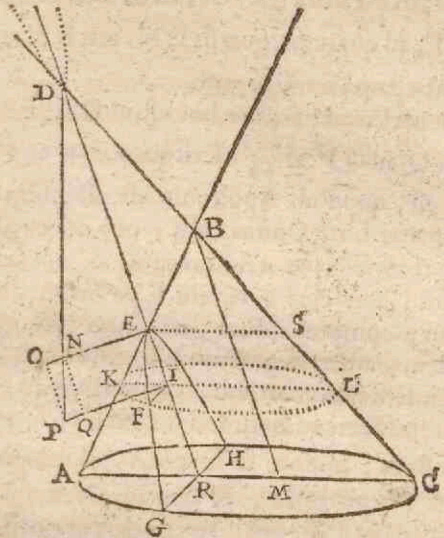
a —— c —— d / $\frac{cd}{a}$

Mult. —— $\square$ FI

fit ▭ KIL. $\frac{ccd}{ab}x \propto yy$.

Hinc si fiat, ut ab ad cc, hoc est, ut ▭ ABC ad $\square$ AC, ita d, hoc est, EB, ad quartam, quæ sit EN: erit $EN \propto \frac{ccd}{ab}$. Quæ si brevitatis causâ nominetur r, habebitur $rx \propto yy$. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate 11$^{\text{mo}}$ primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodlibet, sub rectâ EN seu r sic inventâ, & diametri segmento EI, quod inter verticem ejus E & ordinatim adplicatam FI intercipitur, comprehensum, esse æquale quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI.

Ubi notandum, lineam hanc inventam EN seu r, ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ED ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porrò lineam breviùs obtinere licet, quàm hîc cum Apollonio ostendimus. Etenim lineâ ES existente $\propto \frac{cd}{a}$, cum BC sit ad CA, hoc est, b ad c, sicut ES, hoc est, $\frac{cd}{a}$ ad $EN \propto \frac{ccd}{ab}$: inveniri poterit EN, quærendo tantùm ipsis BC, CA, & ES quartam proportionalem. Quemadmodum ex ostensis est manifestum.



De *HYPERBOLA*, quæ est ſectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E R, communis ſectio trianguli per axem A B C & plani ſecantis G F E H, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum A B, B C ejuſdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hîc in D; lineâ G H, quæ baſis ſectionis G F E H vocatur, ipſam A C, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Sit A M $\infty\ a$

M B $\infty\ b$ Fiat propter ſimilitudinem Δ^{rum} C B M & L D I

M C $\infty\ c$

D E $\infty\ q$ ut B M ad M C, ita D I ad I L

E I $\infty\ x$, eritque D I $\infty\ q + x$ $\quad b$ —— c —— $q + x$ / $\frac{cq + cx}{b}$

F I $\infty\ y$.

Rurſus fiat propter ſimilitudinem

Δ^{rum} M B A & I E K

ut B M ad M A, ita E I ad I K

b —— a —— x / $\frac{ax}{b}$ Mult.

fit $\square$ L I K. $\overline{\frac{acqx + acxx}{bb}}$ $\square$ F I $\infty\ yy$.

Hinc si fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □ BM ad ▭ AMC, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit EN $\infty \frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

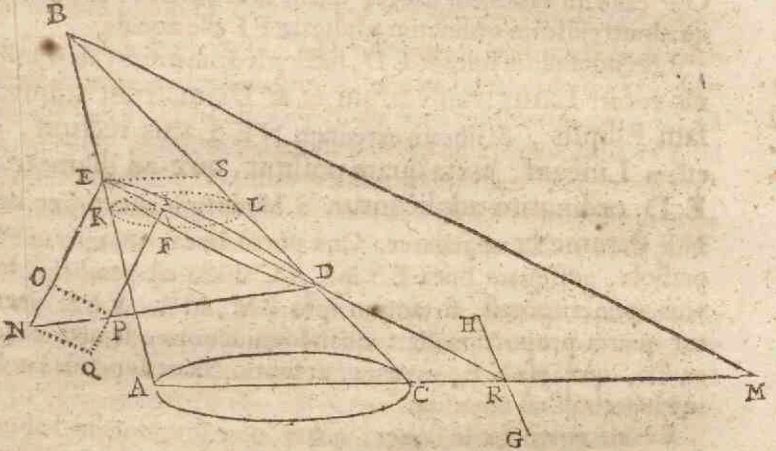
Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, EI seu NQ ad QP $\infty \frac{acx}{bb}$. Eritque rx + QP in $x \infty yy$. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ EN seu r sic inventâ, & diametri segmento EI seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehensum, unà cum rectangulo NQP, quod sub eodem diametri segmento EI vel NQ, & lineâ QP, ad quam NQ eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI esse æquale.

Ubi notandum, lineam DE ab Apollonio vocari Latus transversum Hyperbolæ, & lineam inventam EN Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ER ordinatim adplicantur. à Mydorgio verò hæc ipsa Parameter appellatur. Quæ porrò linea faciliùs obtineri potest, hoc modo; Ductâ scilicet ES ipsi AC parallelâ, ac deinde ipsis BM, MA, & SE quærendo quartam proportionalem EN. Etenim cum BM sit ad MC, hoc est, b ad c, sicut DE, hoc est, q, ad ES: erit ES $\infty \frac{cq}{b}$. Unde cum præterea BM ad MA sit, hoc est, b ad a, sicut ES, hoc est, $\frac{cq}{b}$, ad quartam $\frac{acq}{bb}$, quæ hîc eadem est, quæ linea EN superiori modo inventa: manifestum est id, quod proponitur.

De *ELLIPSI*, quæ est sectio Coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH convenit cum utroque latere AB, BC ejusdem trianguli in E & D; lineâ GH, quæ basis sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, eandemve productam, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto $AM \infty a$
$MB \infty b$
$MC \infty c$
$ED \infty q$
$EI \infty x$, eritque $ID \infty q - x$
$FI \infty y$.



Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BCM & DLI
ut BM ad MC, ita DI ad IL

$$b \text{ --- } c \text{ --- } q - x \,/\, \frac{cq - cx}{b}$$

Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ ABM & KEI
ut BM ad MA, ita EI ad IK Mult.

$$b \text{ --- } a \text{ --- } x \,/\, \frac{ax}{b}$$

$\square FI$

fit $\square KIL$. $\frac{acqx - acxx}{bb} \infty yy$

Hinc si ut in Hyperbola fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut $\square BM$ ad $\square AMC$, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit $EN \infty \frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, IE seu PO, ad $ON \infty \frac{acx}{bb}$. Eritque rx -- NO in $x \infty yy$.

 Quod

Quod ipſum eſt, quod ab Apollonio eſt oſtenſum Theoremate decimotertio primi libri Conicorum, Ubi docet, rectangulum quodvis, ſub rectâ N E ſeu r ſic inventâ, & diametri ſegmento E I ſeu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam F I interjicitur, comprehenſum, minus rectangulo N O P, quod ſub eodem diametri ſegmento E I vel O P, & lineâ N O, ad quam O P eandem rationem habet, quam D E ad E N, continetur, quadrato ejuſdem ordinatim adplicatæ F I eſſe æquale.

Ubi notandum lineam E D, ſectionis diametrum, ab Apollonio vocari Latus tranſverſum ut & Diametrum tranſverſam Ellipſis, & lineam inventam N E Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea N E Parameter appellatur. Quæ porrò linea, ut ante in Hyperbola, poſtquam linea E S ipſi A C ducta eſt parallela, breviùs obtineri poteſt, ſi tantùm ipſis B M, M A, & S E quæratur quarta proportionalis: quandoquidem hæc ſemper eadem exiſtit, quæ ipſa N E, inventa, ut ſupra. Sicut ſuperiùs à nobis in Hyperbola eſt oſtenſum.

Ex his porrò facilè liquet, quam inter ſe rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium ſectionum. Etenim ſi in Parabolâ linea E D vocetur z, & ordinatim adplicata G D vocetur v, erit, ut ſupra, $\frac{ccdz}{ab} \infty vv$: ac proinde yy ad vv, hoc eſt, □ F I ad □ G D, ut $\frac{ccdx}{ab}$ ad $\frac{ccdz}{ab}$, ſeu x ad z, hoc eſt, E I ad E D. Hoc eſt, in Parabola quadrata ordinatim adplicatarum F I, G D inter ſe ſunt, ſicut lineæ E I, E D, quæ ab ipſis ex diametro E D ad verticem E abſcinduntur. Quod ipſum eſt, quod docet Apollonius Prop^{ne} 20ma libri 1^{mi} Conicorum.

Vide figuram 1.

Eodem modo in Hyperbola & Ellipſi acceptâ pro E I aliâ magnitudine quàm ante, ut puta z, erit in Hyperbola $vv \infty \frac{acqz + aczz}{bb}$, & in Ellipſi $vv \infty \frac{acqz - aczz}{bb}$. Unde yy ad vv in Hyperbola fit, ut $\frac{acqx + acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz + aczz}{bb}$, hoc eſt, ut $qx + xx$ ad $qz + zz$; at in Ellipſi, ut $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ad

Vide fig. 2. & 3.

acqz—

$\frac{acqz - aczz}{bb}$, hoc eſt, ut $qx - xx$ ad $qz - zz$. Hoc eſt, in Hyperbola & Ellipſi quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe ſunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipſas & vertices tranſverſi lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola □ F I $\infty \frac{acqx + acxx}{bb}$ eſt ad ▭ E I D $\infty\, qx + xx$, ut ac ad bb; ſimiliterque in Ellipſi □ F I $\infty \frac{acqx - acxx}{bb}$ ad ▭ E I D $\infty\, qx - xx$, ut ac ad bb, hoc eſt, ut N E ad E D: patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum F I eſſe ad rectangula E I D, quæ ſub rectis E I, I D, inter F I & vertices tranſverſi lateris E, D interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus N E ad tranſverſum E D. Omnino ut habet Prop[tio] 21[ma] libri 1[mi] Conicorum Apollonii. Eadem eſt ratio in Circulo, qui non niſi certa Ellipſis ſpecies cenſenda eſt, quippe in qua rectum latus & tranſverſum ſunt æqualia.

Oſtenſis igitur quo pacto Cono dato, eoque ſecto, ita ut ſectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipſis exiſtat, ſectionis ſive figuræ hujus latera inveniri queant: reſtat ut è contra oſtendamus, quâ viâ Conus inveniri poſſit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera ſint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum A B C, in eoque ſectionem G F E H, quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum ſit $\infty \frac{oz}{a}$, facio $\frac{ccd}{ab} \infty \frac{oz}{a}$ ſeu $\frac{boz}{ab}$, & fit rejecto ab, communi denominatore, $ccd \infty boz$. Hoc eſt, diviſo utrobique per cc, erit $d \infty \frac{boz}{cc}$. Hinc aſſumpto triangulo quolibet A B C, cujus latera ſint, A B $\infty\, a$, B C $\infty\, b$, & A C $\infty\, c$, ſi in ipſo ſumatur E B $\infty \frac{boz}{cc}$, atque ex E ducatur E D ipſi B C parallela: erit A C diameter circuli ſive baſis Coni, & A B C triangulum per axem. Ac proinde ſi per D in plano baſis hujus Coni ipſi A C ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, D E ſectio inſtituatur, faciens in ſuperficie Conica curvam lineam G F E H: erit hæc ipſa Parabola, cujus latus rectum N E ſit datæ $\frac{oz}{a}$ æqualis, quemadmodum requirebatur. Quòd ſi verò ipſa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ F I, quæ ſemper ipſi G H parallelæ intelli-

Vide fig. 1

gantur, in dato angulo ad diametrum E D adplicentur, opùs tantùm erit angulum G D E sive E D H dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum A G C H moveri circa A C, tanquam axem, eritque Problemati ex omni parte satisfactum.

Vide 2. & 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum A B C, & in eo sectionem G F E H, quæ sit vel Hyperbola vel Ellipsis, cujus latus rectum sit $\propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transversum $\propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$: facio $\frac{acq}{bb} \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $q \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Hoc est, assumptis horum quadratis, erit $\frac{aaccqq}{b^4} \propto \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$, & $qq \propto \frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}$. Adeoque si in termino $\frac{aaccqq}{b^4}$ pro qq hic numerus substituatur, habebitur $\frac{a^4ccoomm + 4a^4ccm^3p}{b^4ppzz} \propto \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. Hoc est, multiplicato per crucem, erit $a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p \propto b^4ooppz^4 + 4\,b^4mp^3z^4$: & fit, si utrinque per $ooppz^4 + 4mp^3z^4$ dividatur, $\frac{a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p}{ooppz^4 + 4mp^3z^4}$ seu $\frac{a^6ccmm}{ppz^4} \propto b^4$. Unde, extrahendo utrobique radicem biquadratam, invenitur $\sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}} \propto b$. Hinc assumptis ad libitum duabus lineis A M & M C, iisque in directum seu in unam lineam positis, quarum major A M sit $\propto a$, & minor M C $\propto c$, duco ex M in angulo quocunque rectam M B $\propto \sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}}$, jungoque B A & B C; ita ut habeatur triangulum per axem A B C, cujus basis A C diametrum circuli referat, qui Coni basis existit, & punctum B verticem ipsius Coni. Deinde productâ B C, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum A B D pro utrâque figurâ aptanda erit recta E D $\propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; ita ut ipsa parallela sit lineæ B M, (quod facile est,) continuataque occurrat rectæ A M in R. Quibus sic positis, si per R in plano basis hujus Coni ipsi A M ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, R E sectio instituatur, faciens in superficie conica curvam lineam F E: erit hæc ipsa Hyperbola vel Ellipsis quæsita, hoc est, cujus rectum latus est $\propto \sqrt{\frac{oozz}{a} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transver-

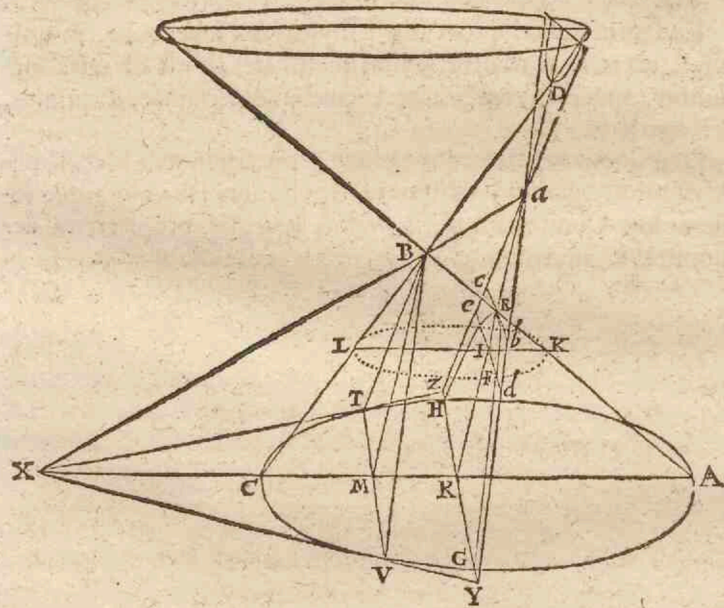
sum

ſum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Quòd ſi verò inſuper tales exhibendæ ſint, ut rectæ F I, quæ ſemper ipſi G H parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum E R adplicentur, oportet tantùm (ut ante in Parabola) angulum G R E ſive E R H dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum baſis hujus Coni eſſe mobile circa A M, tanquam axem: eruntque ſic conditiones quæſtionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, ſecundo, & tertio Problematis primi libri Conicorum Apollonii ſatisfactum putem. Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus fit manifeſta.

Eodem modo reliquos caſus Ellipſeos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & tranſverſa alias quantitates ab his diverſas ſortiuntur, qualeſque eas in antecedentibus determinare docuimus, perſequi licet.

Denique ut appareat, quâ ratione Propoſitiones de Hyperbolæ Aſymptotis agentes, de quibus Apollonius ſecundo atque ſequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonſtravit, inventæ fuerint, ſequentia protuliſſe juvabit.

Sit $AM \propto a$
$MB \propto b$
$MC \propto c$
$DE \propto q$
$EI \propto x$
$FI \propto y$
$ER \propto z$, eritque $DR \propto q + z$.
$GR \propto v$
$aE \propto f$
$XM \propto t$, eritque $XC \propto t - c$.



Mult. $XA.\ t + a$
per $XC.\ t - c$

$$\overline{\quad -tc - ac}$$

Ad $\square XM.\ tt$ $\qquad tt + ta$

add. $\square CMA$ seu $\square MV.\ ac$

$\square CXA.$

per 47. 1mi Elem. $\square XV.\ tt + ac \propto tt + ta - tc - ac.$ *per 36. 3tii Elem.*

$$2ac \propto ta - tc$$

$$XM.\ \frac{2ac}{a-c} \propto t$$

Fiat

Fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ BMA & ERA
ut BM ad MA, ita ER ad RA

b —— a —— z / $\frac{az}{b}$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$
BMC & DRC
ut BM ad MC, ita DR ad RC

b —— c —— $q+z$ / $\frac{cq+cz}{b}$

add.

$$\text{CA. } \frac{az+cz+cq}{b} \infty a+c$$

$$az+cz+cq \infty ab+cb$$

$$az+cz \infty ab+cb-cq$$

$$z \infty \frac{ab+cb-cq}{a+c}.$$

Ad RC. $\frac{cq+cz}{b}$

adde XC. $t-c$

Fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ XMB & XRa.

XM MB Ra

t —— b —— XR. $\frac{cq+cz+bt-bc}{b}$ / ad $s+z$

Eritque, per 16. 6$^{\text{ti}}$ Elem. $ts+tz \infty cq+cz+bt-bc$

$$ts+tz-bt \infty cq+cz-bc$$

$$t \infty \frac{cq+cz-bc}{s+z-b} \infty \frac{2ac}{a-c}$$

$$aq+az-ab-cq-cz+cb \infty 2as+2az-2ab$$

$$ab+cb+aq-cq-2as \infty az+cz$$

$$\frac{ab+cb-cq}{a+c} \infty \frac{ab+cb+aq-cq-2as}{a+c} \infty z$$

$$ab+cb-cq \infty ab+cb+aq-cq-2as$$

$$2as \infty aq.$$

fit aE ∞ $s \infty \frac{1}{2}q$. Id quod oſtendit, rectas, quæ oppoſitarum ſectionum Aſymptoti dicuntur, in medio tranſverſi lateris DE ſe invicem decuſſare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli TBV, cui planum harum ſectionum æquidiſtat, eſſe æquales.

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B M V & *a* R Y

$$
\begin{array}{cc}
\square BM \; \square MV \\
bb \text{ —— } ac
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\square aE \\
\frac{1}{4}qq \\
\square aI \\
\frac{1}{4}qq + qx + xx \\
\\
\square aR \\
\frac{1}{4}qq + qz + zz
\end{array}
\right\}
\text{ad}
\left\{
\begin{array}{l}
\square Eb \\
\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}. \\
\square Id \\
\frac{1}{4}\frac{acqq + acqx + acxx}{bb}.
\end{array}
\right.
$$

A quo subducto $\square^{to}$ I F ante invento, ∞ $\frac{acqx + acxx}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem., $\square$ *e* F *d* ∞ $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.

$\square$ R Y

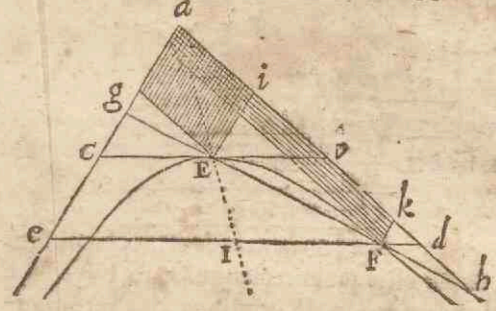
$\frac{1}{4}\frac{acqq + acqz + aczz}{bb}$. A quo subducto $\square^{to}$ R G, ante invento, ∞ $\frac{acqz + aczz}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem, $\square$ Z G Y ∞ $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.

Jam cùm $\square$ E *b*, $\square$ *e* F *d*, & $\square$ Z G Y singula sint inventa ∞ $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$, constat ipsa inter se esse æqualia. Eadem est ratio de quibuscunque aliis hujusmodi rectangulis, in infinitum assumptis. Quod ipsum est, quod docet Prop^{tio} 10. 2^{di} libri Conicorum Apollonii.

Porrò, quoniam $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$ est $\frac{1}{4}^{ta}$ pars rectanguli sub latere transverso D E ∞ *q* & latere recto N E, ante invento, ∞ $\frac{acq}{bb}$, manifesta hinc etiam est Prop^{tio} 1^{ma} ejusdem libri.

Præ-

Præterea ſupponatur cE vel $Eb \propto e$



$eF \propto f$, eritque

$Fd \propto \frac{ee}{f}$

$gE \propto g$

$EF \propto h$

$Fh \propto i$, eritque

$Eh \propto h+i$

$Ei \propto k$

$ai \propto l$

$Fk \propto m$

& $ak \propto n$, eritque

$ik \propto n-l$.

Tum fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ cgE & egF

ut gE ad Ec, ita gF ad Fe

g —— e —— $g+h$ / f

Eritque per 15. 6^{ti} Elem. $gf \propto eg+eh$

$gf-ge \propto eh$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ Fdh & Ebh.

ut Fh ad Fd, ita Eh ad Eb

i —— $\frac{ee}{f}$ —— $h+i$ / e

Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $i \propto \frac{eh+ei}{f}$

$fi \propto eh+ei$

Et fit $gf-ge \propto fi-ei \propto eh$

Id eſt, dividendo utrinque per $f-e$, erit $g \propto i$. Hoc eſt, gE eſt æqualis Fh. Eadem eſt ratio de recta EF, quomodocunque per duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Aſymptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propoſitione ſecundi libri Conicorum Apollonii.

Ad hæc fiat propter parallelas Ei & Fk

ut gE ad EF, ita ai ad ik

g —— h —— l / $n-l$

Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $gn-gl \propto hl$

Hoc eſt, in locum g ſubſtituto i, habebitur $in-il \propto hl$, & fit $h \propto \frac{in-il}{l}$.

 Deni-

Denique fiat propter similitudinem $\triangle^{\text{lorum}}$ E ih & F kh
ut E i ad E h, ita F k ad F h

$$k \text{———} h + i \text{———} m \,/\, i$$

Eritque per 16. 6$^{\text{ti}}$ Elem. $ki \infty hm + im$

$$\text{vel } ki - mi \infty hm$$

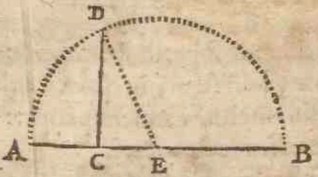
$$\text{\& fit } h \infty \frac{ki - mi}{m} \infty \frac{in - il}{l}$$

$$kl - ml \infty mn - ml$$

& $kl \infty mn$. Hoc est, rectangulum sub E i & ia est æquale rectangulo sub F k & ka. Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangulis, sub similibus lineis comprehensis, manifestum est; prout nimirum ad hoc præter puncta E & F alia quævis in Hyperbola assumpta fuerint. Quibus haud dissimilia sunt ea, quæ Apollonius demonstravit Prop$^{\text{ne}}$ 12$^{\text{ma}}$ libri 2$^{\text{di}}$ Conicorum.

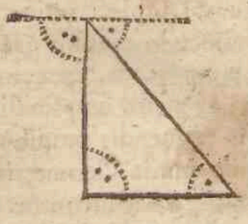
Unde demum facile est inferre, cum puncta hæc ulteriùs atque ulteriùs semper in Hyperbola assumi possint, ac inde uno latere horum rectangulorum continuè accrescente latus alterum ipsorum perpetuò decrescat; quòd idcirco Asymptoti ab, ac, & Hyperbola E F in infinitum productæ ad se ipsas propiùs accedant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato intervallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Prop$^{\text{bus}}$ 1$^{\text{ma}}$ & 14$^{\text{ta}}$ ejusdem libri sunt ostensa.

Cæterùm quoniam D$^{\text{nus}}$ des Cartes universim iis tantùm propositionibus usus fuisse videtur, quæ non nisi proprietates declarant, quæ cum subjecto suo omnimodè reciprocantur, & à Logicis proprietates 4$^{\text{ti}}$ modi appellari solent: visum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognosci possunt, qualem eum eruditissimus atque ingeniosissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Amstelodamensis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere.



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum eſſe æqualia rectangulis ſub ſegmentis diametri, cum circulo ſit reciproca nec ne: ſupponatur recta A B, & in eam perpendicularis C D, hanc habens proprietatem, ut quadratum ſuper ipſâ ſit æquale rectangulo ſub ſegmentis A C, C B. Quæritur qualis ſit linea A D B.

Ad quod inveſtigandum, ſectâ A B bifariam in E, ponatur A E vel E B ꝏ a, C E ꝏ x, & C D ꝏ y: eritque A C ꝏ $a - x$, & C B ꝏ $a + x$. Jam cum A C multiplicatâ per C B proveniat $aa - xx$, pro rectangulo A C B; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex C D: erit $aa - xx$ ꝏ yy. Deinde, quoniam, lineâ C D perpendiculari exiſtente ſuper A B, quadratum ex E D, per 47 Primi Elementorum Euclidis, eſt æquale duobus quadratis ex E C & C D: erit quadratum ex E D ꝏ $xx + yy$. Ac proinde ſi in hac ſumma pro yy ſubrogetur $aa - xx$, habebitur quadratum ex E D ꝏ aa, hoc eſt, E D ꝏ a. Id quod oſtendit, rectis A E, E D, & E B ſingulis ipſi a æqualibus exiſtentibus, lineam A D B eſſe circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo eſſe reciprocam. Quod ipſum & hoc modo cognoſci poteſt. Advertendo ſcilicet, utrum proprietas propoſita ſine neceſſariâ ſubjecti incluſione demonſtrari poſſit nec ne. Si enim ea abſque neceſſaria ſubjecti incluſione demonſtrari nequeat, proprietas erit reciproca; ſin ſecus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo ſit reciproca, nimirum: tres angulos ſimul ſumptos æquales eſſe duobus rectis: advertendum tantummodo eſt, utrum demonſtratio illius triangulum rectangulum præſupponat nec ne; ac proinde cum ipſa abſque ulla diſcretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum

 eſt

eſt eandem non niſi pro communi trianguli rectanguli proprietate eſſe habendam.

Ita etiam conſiderando demonſtrationem ſupradictæ proprietatis circuli, quoniam ipſa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura conſiſtit, omnino expoſcit, convincitur eandem proprietatem ſoli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, ſi quis naturam demonſtrationis perpendat, quâ oſtenditur, quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe eſſe, ſicut rectangula ſub ſegmentis diametri: comperietur, eandem demonſtrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non niſi communem proprietatem circuli exiſtere: quandoquidem & Ellipſi, cujus Circulus non niſi ſpeciem refert, omnino convenit.

Sed & uſum horum perpendere, cum in univerſa Matheſi haud exigui ſit momenti, non inutile fuerit ſequentia, quibus eundem quadantenus indicaſſe exiſtimamus, in medium afferre.

Primò itaque, poſtquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi ſumus totam ſubjecti naturam hâc ratione in ea eſſe incluſam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diverſam obtinendam, non licere ut ad id alia ejuſdem ſubjecti proprietas adhibeatur, niſi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum ſit involutum: quandoquidem ſic circulum committi manifeſtum eſt.

2do, Theoremata omnia, quæ neceſſitatem ſubjecti inferunt ex proprietate jam oſtenſâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48. primi libri Elementorum) quæque ut plurimùm indirectè per deductionem ad abſurdum demonſtrari ſolent, poſſunt directè demonſtrari, dummodo oſtendatur, proprietatem illam cum ſubjecto ſuo eſſe reciprocam.

3tio, Si quis ad ſolvenda Problemata naturam ſubjecti retinere velit, commodiſſimè id præſtare poterit, retinendo tantùm proprietatem aliquam, cum eodem ſubjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat aut etiam ſimpliciſſima exiſtat: cum minimè neceſſum ſit, ut is retinendis omnibus illius Theorematis aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujuſmodi proprietate deducuntur.

4to, Hinc etiam perſpicuum eſt, quàm parùm neceſſe ſit, libros, qui Theorematibus referti ſint, conſcribere, quæ aut uſum nullum

lum habent, aut difficulter retineri possunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris sive simplicioris proprietatis reciprocæ è natura subjecti sui nullo negotio eruuntur.

Nimirum si latus hocce rectum statuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, *transversum erit* $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$.] Qui termini hoc etiam pacto scribi possunt $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. quemadmodum postea in demonstratione pag. 33 à Domino des Cartes sunt assumpti. Similiter, si habeatur, ut paulò superiùs, $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$: poterit ejus loco scribi $\frac{z}{a}\sqrt{oo-4mp}$. Eodem modo cùm habetur $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$ (ut paulò post pagin. 31): possumus ejus loco scribere $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm-\frac{4oom}{p}}$, tollendo scilicet ex signo radicali quicquid est rationale. Haud secus fit, cùm pro $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ scribitur $\frac{a}{b}\sqrt{3}$. Quæ scribendi ratio non ineptè quoque ad radicum commensurabilium species sive operationes adhiberi potest. Ut, ad addendum $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{75}$: quoniam $3\sqrt{3}$ idem est quod $\sqrt{27}$, & $5\sqrt{3}$ idem quod $\sqrt{75}$, hinc summa earum erit $8\sqrt{3}$, & differentia $2\sqrt{3}$, productum verò multiplicationis 15, 3 seu 45; & quotiens ex divisione majoris per minorem $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic ad multiplicandum $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ per $3\sqrt{3}$, divido $27\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, seu, quod idem est, 27 per 3, & fit productum $\frac{8}{9}$. Similiter ad dividendum fractiones $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$ per $\sqrt{3}$, multiplico earum denominatores per $\sqrt{3}$, & fiunt quotientes $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ seu $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, perinde enim est sive hoc sive illo modo scribantur. Idem de sequentibus formulis, quas hîc subjungere visum fuit, intellige. Ut si habeatur $\sqrt{ac}$, ejus loco scribere possumus $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, vel $c\sqrt{\frac{a}{c}}$. Et si habeatur $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$ scribi ejus loco potest $b\sqrt{\frac{a}{c}}$; adeò ut, si habeatur $\frac{acc+a^3}{2\sqrt{aa+cc}}$, ejus loco substitui possit $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Ita pro $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$ ponere licet $\sqrt{ac}$, nec

D

Vide pag. 75. lin. penult. & ult.

Vide pag. 76. lin. 7.

Vide pag. 82. lin. 18.

non.

non pro $2b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$ reponere $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$. Similiter pro $d + \frac{bb-bd}{b+d}$ ſcribi poteſt $\frac{dd+bb}{b+d}$. Sic etiam loco $d + \frac{bb}{b+d}$ ſcribi poteſt $b + \frac{dd}{b+d}$: cum ſub eodem denominatore reducti faciant $\frac{bb+bd+dd}{b+d}$. Et denique pro $\frac{c}{\sqrt{c}} - \frac{a}{\sqrt{a}}$ ſcribere poſſumus $\frac{c-a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ vel $\sqrt{c} - \sqrt{a}$. Et ſic de aliis, ut paſſim in hiſce commentariis eſt videre.

E *Sed ſi ſectione Hyperbolâ exiſtente &c.*] Notandum hîc, applicatam eſſe Hyperbolam ei linearum poſitioni, cui poſtea Circulum quadrare ab Authore oſtenditur. Quod tam perſpicuitatis quàm brevitatis ſtudio factum; quandoquidem ea, cùm literæ A, B, C, D, &c. in iiſdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem ſcripſit, ſic faciliùs intelligi poſſunt, quàm ſi nunc in uno, nunc in alio eſſent quærendæ.

Etenim cùm requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione C B per C F, æquale ſit ei, quod fit ex ductu C D in C H, oportet lineam illam curvam tranſire per quatuor interſectionum puncta datarum linearum: nimirum, per interſectionem A, linearum D A, A B (quoniam eo caſu lineæ B C & C D nullæ ſunt, ac proinde ſingulæ, in ſingulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per interſectionem G linearum A B, G H, (quo caſu lineæ C H & C B nullæ ſunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipſarum F E, G H (quo caſu C F & C H nullæ ſunt), & ipſarum D A, E F (quo caſu C D & C F nullæ ſunt), quæ in hac figura non ſunt expreſſæ, ſed in Circulo obſervatæ apparent. Unde, cum D^{nus} des Cartes, brevitati ſtudens, referre voluerit caſus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, poſtquam hujus exempli locum Circulum eſſe oſtendit, nec in quæſtione quicquam mutavit, eidem linearum poſitioni non Hyperbola ſicut Circulus reſponderit. Nec etiam hinc ullus ſequitur error, quandoquidem tota quæſtio nondum determinata exiſtit, ſed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri poteſt, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum poſitioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non tranſeat per ullas datarum linearum interſectio-ſectiones. Ut, exempli causâ, ſi rectangulum ex F C in C D debeat eſſe majus, quàm rectangulum ex C B in C H, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid ſimile: ſequitur eam ſic applicari poſſe, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. ſuis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola afferre voluit, faciliùs intelligantur, quàm ſi figura mutata fuiſſet.

Ejuſdem brevitatis ſtudio nulla etiam hîc mentio fit oppoſitarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò poſt pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter ſe oppoſitas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè ſemper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda ſuſcepit, nihil omiſit. Atque idcirco hîc maluit eam linearum poſitionem exhibere, cui conveniret Circulus, quàm cui competeret Ellipſis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata.] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas ſupponere oportet lineas incognitas, & materia tantùm pro una æquatione ſuppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ ſupponendæ ſunt incognitæ lineæ A B & B C; quarum una oſtendat, ad quod punctum lineæ A B duci debeat recta B C in dato angulo; & altera, ubinam illud ipſum in eadem recta ſit ſumendum. Ubi porrò, poſtquam conditiones omnes ſunt adimpletæ, inventa eſt æquatio

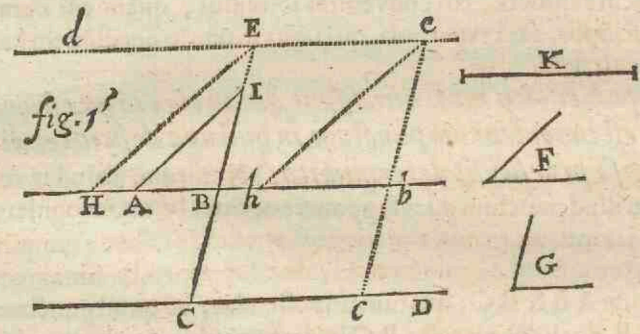
$$yy \propto \frac{\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\,y\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\,y\begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz},$$

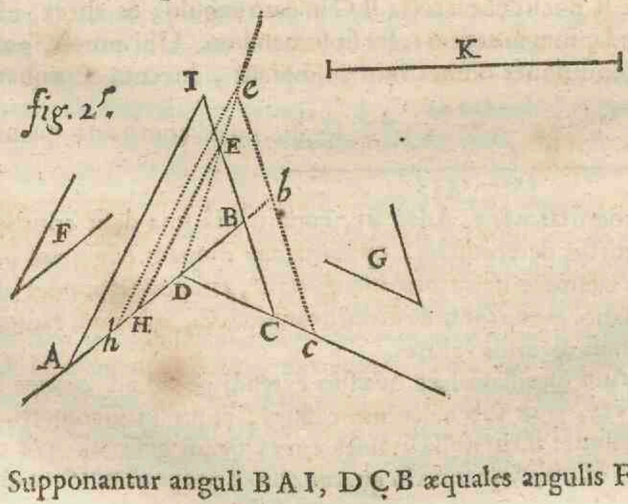
duas continens quantitates incognitas x & y. Adeò ut, cum in ipsâ una deſit conditio ut ſit prorſus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio aſſumere liceat pro incognita x, cui non reſpondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipſi radici x tribuerimus diverſos valores.

Cæterùm quoniam hæc quæſtio extendi poteſt ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi poſſunt: ita ut nulla ſit linea curva primi generis, quæ ad illam non ſit utilis, quando in quatuor lineis proponitur: nec ulla ſecundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis eſt propoſita, atque ita porrò: placuit hîc quoque ſubjungere caſum, quando in duabus tantùm lineis eſt propoſita, qui quidem omnium ſimpliciſſimus exiſtit.

Locus ad duas lineas.

Datis poſitione duabus rectis lineis AB, CD, inter ſe parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipſas invenire, ut E, à quo ſi in datis angulis F & G ad poſitione datas AB, CD, duæ ducantur rectæ lineæ EH, EC, ipſæ datam inter ſe habeant rationem *r* ad *ſ*.





Supponantur anguli BAI, DCB æquales angulis F, G; & con-

concurrant rectæ A I, C B, (ubicunque hosce æquales angulos ad positione datas constituentes) in punctum I. Deinde ratio, quam H E ad E C servare debet, detur ut A I ad K, vel si non ita detur, ad hanc formam reducatur.

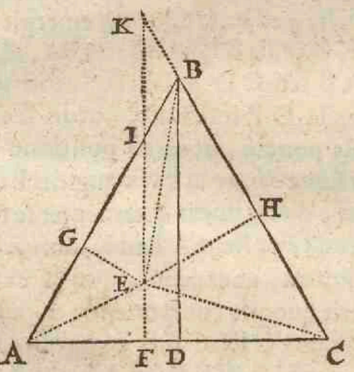
Resolutio. Puta factum esse, quod quæritur, ponaturque B C ∞ q, A I ∞ r, K ∞ s, B I ∞ t, & B E ∞ x. Unde, cum propter triangulorum B I A, B E H similitudinem, B I sit ad I A, hoc est, t ad r, sicut B E seu x ad E H, erit E H ∞ $\frac{rx}{t}$. Deinde quoniam A I est ad K, hoc est, r ad s, sicut H E ad E C, sive $\frac{rx}{t}$ ad $q + x$: erit productum sub extremis $rq + rx$, æquale producto sub mediis $\frac{rsx}{t}$. Ac proinde si utrinque dividatur per r, atque multiplicetur per t, æquatio erit $sx - tx \infty tq$. Hoc est, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut $s - t$ ad t, ita q ad x. Unde talis emergit *Constructio*. Fiat, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I; ita B C ad B E. Tum per E ducatur E d ipsi A B seu C D parallela (ut in prima fig.); aut ex D per E agatur recta D E indefinitè (ut in secunda fig.): Dico si ex quolibet ejus puncto, ut e, ad positione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ eh, ec in datis angulis F & G, hoc est, ipsis A I, I C parallelæ, dictas lineas datam inter se rationem servaturas, hoc est, he fore ad ec, sicut A I ad K, seu r ad s.

Demonstratio. Quoniam enim est, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I, ita B C ad B E: erit quoque componendo K ad B I, sicut C E ad E B. Unde cum ratio C E ad E B composita sit ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B seu A I ad I B: erit quoque ratio K ad B I ex eisdem rationibus composita. Eodem modo, quoniam item ratio K ad B I componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio composita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B, eadem cum ratione, quæ componitur ex K ad A I, & ex A I ad I B. Quare si communis auferatur ratio A I ad I B, erit quoque reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, seu s ad r. Quod erat faciendum. Eadem est ratio ubicunque tandem in recta d E punctum e assumatur. Unde manifestum fit, punctum quæsitum e rectam lineam contingere D E, positione datam, ac proinde in loco plano esse. Omitto reliquos hujus quæstionis casus, cum à quovis ad horum imitationem facilè construi possint.

G *At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut Sphærica, aut magis composita esse potest.*] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis sequentibus illustrare conabimur.

Locus ad Superficiem.

Dato triangulo æquilatero A B C, à cujus vertice B ad basin A C demissa sit perpendicularis B D: oporteat intra ipsum invenire punctum, ut E, à quo si ad opposita latera deducantur perpendiculares E F, E G, & E H, ipsæ simul sumptæ æquentur perpendiculari B D.



Factum jam sit, & productâ F E, usque dum secet latus A B in I, B C verò productum in K; ponatur A D seu D C $\infty\ a$, D B $\infty\ b$, A F $\infty\ x$, & F E $\infty\ y$. Hinc cum similia sint triangula A D B, & A F I, erit sicut A D ad D B, hoc est, a ad b, ita A F seu x ad F I; quæ ideo erit $\frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E $\infty\ y$, relinquetur E I $\infty\ \frac{bx}{a} - y$. Similiter, quoniam similia sunt triangula C D B & C F K, erit C D ad D B, hoc est, a ad b, ut C F seu $2a - x$ ad F K; quæ ideo erit $2b - \frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E $\infty\ y$, restabit E K $\infty\ 2b - \frac{bx}{a} - y$. Eodem modo cum, propter similitudinem triangulorum A D B, E G I, A B sit ad A D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, sicut I E seu $\frac{bx}{a} - y$ ad E G; erit E G $\infty\ \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Non secus, cum similia sint triangula E K H & D B C, erit ut B C ad C D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, ita E K seu $2b - \frac{bx}{a} - y$ ad E H; quæ ideo

erit

erit $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Adeoque si addantur perpendiculares inventæ E F, E G, & E H, erit earum summa b, æqualis b, perpendiculo trianguli A B C.

Ubi patet, quòd, postquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæstio proposita non sit Problema, sed Theorema; seu quòd conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæstionis datis sit comprehensa, neque unquam sine hac conditione esse possit: Atque adeò, duas in ea conditiones desiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro x inveniendam, quâ innotescat, ad quod punctum lineæ A C duci debet perpendicularis E F; atque alteram, ad æquationem pro y inveniendam, quâ cognoscatur, ubinam illud ipsum in hac perpendiculari sit sumendum: quibus mediantibus quæstio penitus determinata reddatur. Quare, postquam conditiones in quæstione præstandæ exsecutæ sunt, & neutri linearum incognitarum A F, F E æquatio respondet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæsitum punctum E ubique intra triangulum A B C assumi. Cujus demonstratio facilis est.

Vide ea, quæ habentur pag. 4.

Ducantur enim rectæ A E, E B, & E C, ut constituantur tria triangula A E C, A E B, & B E C.

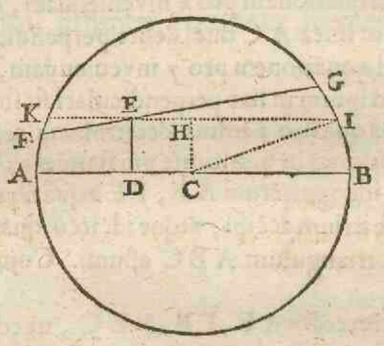
Quoniam igitur horum triangulorum bases sunt æquales, ac quælibet ex ipsis æqualis basi trianguli A B C; habebunt ipsa ad triangulum A B C eandem rationem, quam perpendicula F E, E G, & E H. Quare cum triangula A E C, A E B, & B E C simul sumpta ipsi triangulo A B C sint æqualia: erunt quoque perpendiculares E F, E G, & E H simul sumptæ ipsi perpendiculari B D æquales. Quod erat demonstrandum.

Porrò notandum est, quòd, quemadmodum punctum E, intra triangulum A B C assumptum, exhibet semper eandem summam perpendicularium E F, E G & E H, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari B D, ita contra, si sumatur extra triangulum A B C, atque ab eo ad singula ejus latera, si opus est, producta perpendiculares demittantur, obtineatur semper eadem perpendicularium differentia, quæ rursus perpendiculari B D sit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus subtensum angulo, intra quem punctum sumptum

erit,

erit, auferre ex ſumma duarum reliquarum. Quæ ſimili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus ſit demonſtratio.

Alterum exemplum, quod hîc afferendum duxi, deſumpſi ex inventis Nobiliſſimi & præclari Juvenis D. Chriſtiani Hugenii, quibus ſibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non niſi magna quæque ab eo expectanda eſſe affirmare non veriti fuerint.



Dato Circulo A G B, dataque poſitione diametro A B: invenire extra ipſam punctum E, à quo ſi ad A B demittatur perpendicularis E D, & per idem punctum agatur recta quædam linea F G utrinque à circumferentiâ terminatâ, ut rectangulum F E G, ſub ſegmentis ejus F E, E G comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ E D, æquetur rectangulo A D B, ſub ſegmentis diametri A D, D B.

Ductâ per E rectâ K I parallelâ ipſi A B, deducatur ex centro C in eam perpendicularis C H, jungaturque C I. Poſitâ igitur A C vel C B ∞ a, C D ∞ x, & D E ∞ y: erit H I ∞ $\sqrt{aa - yy}$, E I ∞ $\sqrt{aa - yy} + x$, & E K ∞ $\sqrt{aa - yy} - x$. Unde ſi multiplicavero E K ∞ $\sqrt{aa - yy} - x$ per E I ∞ $\sqrt{aa - yy} + x$, fiet rectan-

rectangulum K E I ſeu F E G ∞ $aa - yy - xx$. Cui ſi addatur quadratum ex E D ∞ yy, erit ſumma $aa - xx \infty aa - xx$, rectangulo A D B, utpote æqualis ei, quod ſit ex $a - x$ in $a + x$. *35 Tertii Elem.*

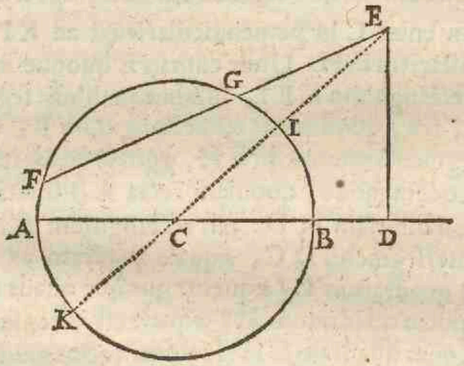
Quia igitur hîc utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri poteſt æquatio, quâ innoteſcat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad arbitrium ſumi poſſe, atque Problema propoſitum eſſe Theorema. Defectus itaque duarum in hac quæſtione conditionum, ad determinandum punctum E, oſtendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere poſſe, & locum ejus eſſe ad ſuperficiem Circuli. Id quod facilè demonſtrari poteſt.

Quoniam enim C H perpendicularis eſt ad K I, ſecabit rectam K I bifariam in H. Unde cum in E quoque inæqualiter ſit ſecta, erit rectangulum K E I, ſub inæqualibus ſegmentis comprehenſum, ſeu, quod idem eſt rectangulum F E G, unà cum quadrato ſegmenti intermedii E H, æquale quadrato dimidiæ lineæ H I. Eodem modo, quoniam recta A B bifariam diviſa eſt in C, & non bifariam in D: erit rectangulum A D B unà cum quadrato interſegmenti D C, æquale quadrato ex C B ſeu C I. Quare cum quadratum C I æquetur quoque quadratis C H, H I, quorum quidem quadratum H I æquale eſt oſtenſum rectangulo F E G, unà cum quadrato E H: ſequitur rectangulum A D B unà cum quadrato D C ſeu E H æquari rectangulo F E G unà cum duobus quadratis C H, E H. Ac proinde, dempto communi quadrato E H, remanebit rectangulum A D B æquale rectangulo F E G, unà cum quadrato C H ſeu E D. Quod erat demonſtrandum. Non ſecus demonſtrabitur, omne aliud punctum, intra Circulum extra diametrum A B aſſumptum, præſtare id quod quæritur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, ſumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur perpendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum ſub ſegmentis hujus rectæ comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ, æquale rectangulo ſub ſegmentis diametri. Idem ferè contingit ſi extra Circulum acceptum fuerit punctum. *3 Tertii Elem.* *5 Secundi Elem.* *35 Tertii Elem.*

Etenim,

Etenim,

Aſſumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum A B, ipſamve productam, ſi opùs eſt, deductâ perpendiculari E D, tum verò rectâ E F, Circulum utcunque in F & G ſecante: erit rectangulum A D B, unà cum quadrato rectæ D E, æquale rectangulo F E G. Quod ſimiliter ut ſupra experiri licet, atque demonſtrare.



Porrò ſicut in allatis exemplis loca quæſitorum punctorum fuerunt ad ſuperficies planas, eaſque terminatas, vel in infinitum extenſas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ ſunt ad ſuperficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extenſas.

Si enim, exempli cauſsâ, in figura pag. 123 manente rectâ A B, & in ea punctis A & B, circumvolvatur ſemicirculus F D E, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, deſcribetur ſuperficies Sphærica, in qua ſi quodlibet punctum accipiatur, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur D A, D B; habebunt ipſæ datam inter ſe rationem, hoc eſt, eandem, quam P H ad M N. Ita ut punctum D ſit ad ſuperficiem curvam terminatam, utpote ad ſuperficiem Sphæricam, converſione ſemicirculi F D E deſcriptam. Eâdem ratione, ſi à duobus datis punctis duæ inflectantur

rectæ

rectæ lineæ in data differentia : punctum ad inflexionem erit ad superficiem Hyperbolicam, positione datam. Etenim si in plano quocunque, quod per data puncta transit, describatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta existant, & axis transversus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; describetur superficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua si ad libitum sumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ lineæ, servabunt illæ inter se differentiam datam.

Atque sic progrediendo curvæ superficies ostendi possunt, in infinitum magis magisque compositæ, quæ quæsitorum punctorum determinationi inserviunt. Verùm cum sufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuisse, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, solidis, aliisve magis compositis discernantur: ulteriori explicationi supersedebimus.

Cæterùm, ne quid, quod ad hanc materiam spectare possit, desideretur, sed Geometria omnibus numeris sit absoluta, paucis subjiciam, quomodo cognosci possit, quando locus alicujus puncti est ad solidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod sciam) hactenus sit deprehensum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem; locus, in quo illud reperitur, Solidum est: & vel planis constans superficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compositâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel sunt terminata, vel indefinitè extensa.

Ut, si intra Tetraëdrum, inveniendum sit punctum, ita ut summa perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus constat, demissarum, æquetur perpendiculo Tetraëdri : cadet illud quovis loco intra Tetraëdrum, ita ut nullum intra ipsum punctum assumi possit, quod quæsito non satisfaciat. Quod eodem modo indagatur & demonstratur, atque superiùs in triangulo æquilatero est ostensum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices seu incognitæ quantitates (quarum una inservit determinandæ longitudini perpendicularis, *Locus ad Solidum.*

quæ à quæſito puncto cadit ſupra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eædem occurrunt quantitates: indicio eſt, incognitas quantitates ad libitum ſumi poſſe, atque Problema propoſitum eſſe Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdrum aſſumatur punctum, cum omnia quæſito ſatisfaciant.

Non diſſimili ratione demonſtrare poſſumus: Si extra Tetraëdrum ſumatur punctum, à quo ad ſingula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, ſi quæſtio fuerit de inveniendo puncto, à quo demiſſæ perpendiculares ſimul collectæ, æquentur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum ſit in ſolido terminato, utpote ubique intra Tetraëdrum; ſi verò poſtuletur, ut differentia ipſarum eidem perpendiculo ſit æqualis, reperietur punctum illud in ſolido indefinitè extenſo, atque ſumi poterit extra Tetraëdrum, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planiſque ſuperficiebus contentis, dici & demonſtrari poſſe, perſpicuum eſt.

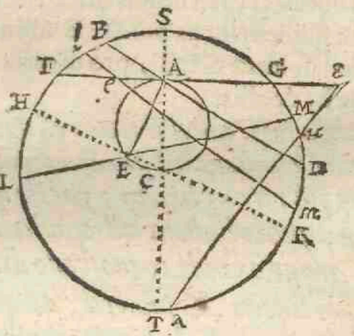
Alterum exemplum, quod hîc adducemus, ex Hugeniano Problemate deduci poteſt, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatero deduximus, & eſt hujuſmodi: Si Sphæra plano per centrum ſecetur, ſumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per ſubjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphæræ ſuperficie terminata: erit rectangulum, ſub ſegmentis hujus rectæ comprehenſum, æquale rectangulo ſub ſegmentis rectæ, utcunque per aſſumptum punctum ad Sphæræ ſuperficiem ductæ, unà cum demiſſæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit ſi punctum ſumatur extra Sphæram.

His adde ſequens Problema, quod occaſione iſtius Hugeniani ſibi ante tres annos è veſtigio inquirendum propoſuit Vir Celeberberrimus atque undequaque Doctissimus D. Johannes Wallisius, S.T.D, & in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor SAVILIANUS. Estque hujusmodi:

In circulo, cujus centrum C, assignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D: inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, si per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum distantiæ A E æquetur vel differentiæ vel summæ rectangulorum L E M, B A D.

$$\text{Puta } \square AE \propto \begin{cases} \sqsubset\!\sqsupset LEM - \sqsubset\!\sqsupset BAD. \\ \sqsubset\!\sqsupset BAD - \sqsubset\!\sqsupset LEM. \\ \sqsubset\!\sqsupset BAD + \sqsubset\!\sqsupset LEM. \end{cases}$$

Diametro A C describatur circellus, quem contingat recta infinita F A G. Dico, singula puncta in peripheria circelli præstare



primum quæsitum: quæ verò in recta F G intra circulum, secundum: quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam $1^{mò}$, si sit E in peripheria circelli, (ductis diametris S A C T, H E C K,) erit * $\sqsubset\!\sqsupset$ B A D $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ S A T $\propto$ $\square^{to}$ Radii (— $\square$ A C $\propto$) — $\square$ E C — $\square$ A E *. Et $\sqsubset\!\sqsupset$ L E M $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ H E K $\propto$ $\square^{to}$ Radii — $\square$ E C. Ergo $\sqsubset\!\sqsupset$ L E M — $\square$ A E $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ B A D, vel $\sqsubset\!\sqsupset$ L E M — $\sqsubset\!\sqsupset$ B A D $\propto$ $\square$ A E. *per 35 Tertii Elem. *per 5 Secundi Elem.

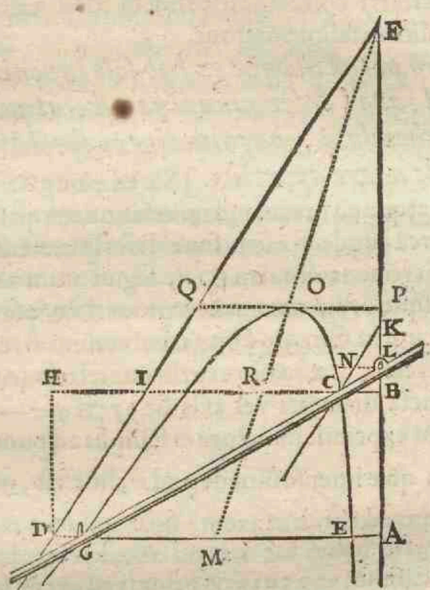
$2^{dò}$. Si in recta F G intra circulum sumatur E vel *e*: erit $\sqsubset\!\sqsupset$ B A D $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ F A G $\propto$ $\square$ F A $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ F *e* G + $\square$ A *e*. Et $\sqsubset\!\sqsupset$ *lem* $\propto$ $\sqsubset\!\sqsupset$ F *e* G. Ergo $\sqsubset\!\sqsupset$ B A D — $\sqsubset\!\sqsupset$ *lem* $\propto$ $\square$ A *e*.

3tio. Si in F C continuatâ sumatur *e* vel ε extra circulum, erit
* per 36 Tertii Elem. * ▭ λεμ ∞ ▭ FεG ∞ □ Aε (— □ F A ∞) — ▭ B A D *. Ergo ▭ B A D + ▭ λεμ ∞ □ Aε. Quod erat faciendum. Idem, mutatis paucis, procederet pariter, etiamsi punctum A extra circulum assignaretur.
* per 6 Secundi Elem.

Quoniam igitur assumpto puncto A ceu dato, puncta invenienda E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli, aut in rectam F G intra circulum, aut denique in eandem extra circulum continuatam: patet, si in locum horum circulorum accipiantur duæ sphæræ, quòd similiter hæc puncta E ubique pro lubitu sumi possint in superficie convexa sphæræ A E C, aut in superficie plana circuli, cujus diameter F G, aut denique in eodem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenso, prout scilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia vel summa quadrato distantiæ horum sumendorum punctorum E à puncto A requiritur æqualis. Quòd si verò idem punctum A non unum locum obtineat, sed ubivis intra circulum S L T assignetur, quòd tunc quidem locus puncti E ubique in solido intra vel extra superficiem sphæræ S L T, pro diversa quæsiti ratione, sit futurus. Atque ita de aliis.

H *Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem, quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt.*] Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ C E, per motum regulæ G L & plani rectilinei C N K L descriptæ, (quam superiùs Hyperbolam esse ostendimus) ad puncta lineæ rectæ A B exprimatur per æquationem $yy ∞ cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$; prout nimirum in ea assumitur punctum A, tanquam certum ac determinatum, à quo calculus incipiat: facile quoque est invenire relationem, quam habent ad puncta ejusdem A B, quando in ea, loco pun-

puncti A, assumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus initium sumat. Etenim si fiat, ut N L ad L K, hoc est, ut c ad b, ita D A seu $a + c$ ad A F, erit ipsa $\infty \frac{ab}{c} + b$. E qua si dematur A B



∞x, relinquetur B F $\infty \frac{ab}{c} + b - x$. Hinc si in æquatione inventa $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ loco x substituamus $\frac{ab}{c} + b - x$: inveniemus æquationem $yy \infty \frac{cx}{b}y - ac$, quâ ostenditur relatio, quam habent puncta Hyperbolæ C E ad puncta rectæ B A, respectu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti sit simplicior, arguit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ B A specialiorem seu simpliciorem habere relationem, quando in A B punctum F pro certo & determinato assumitur, quàm cum in ea accipitur punctum A.

Cæterùm relationem, quam Hyperbolæ puncta servant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognosces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta alicujus curvæ ad puncta rectæ

 posi-

positione datæ, datus est modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujusvis rectæ positione datæ. Adeoque tot inventis æquationibus diversis, ad quot diversas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: constabunt totidem modi eam describendi, ex quibus faciliores seligi poterunt.

I *Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem spectat: ita ut non opùs sit de his agere apertiùs.*] Sic ad comparandam Ellipsin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter se habent, prout circa eundem axem sunt descriptæ: Esto axis $\infty\, q$, latus rectum pertinens ad axem $\infty\, r$, segmentum axis inter verticem & utriusque ordinatam interceptum $\infty\, x$, ipsa verò adplicata $\infty\, y$. Hinc cum in Circulo latus transversum sive diameter æquale sit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis sit $yy \infty\, qx - xx$; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipsis ad puncta axis sit $yy \infty\, rx - \frac{rxx}{q}$: quæ inter se sunt ut q ad r, hoc est, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata est rationis, quam habet hic axis ad axem secundum, sequitur Circulum ad Ellipsin esse, ut axis primus ad axem secundum. Id quod demonstratum est ab Archimede prop^ne 5^ta libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2^do tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione.

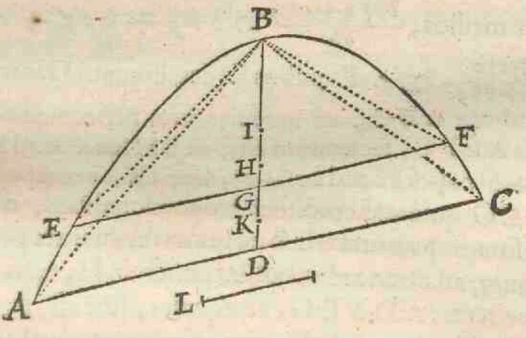
Porrò extendi potest hoc ipsum ad cognoscendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

Etenim, cum ostensum sit, quadrata ordinatim adplicatarum utriusque curvæ esse inter se, sicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad se invicem sint ut Circuli, qui ab ipsis tanquam radiis conversione semicirculi & semi-ellipsis fiunt & utramque figuram describunt: patet Sphæram ad Sphæroïdes esse, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejusdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede ostensum.

Adeò ut non modò ex hoc solo inveniri propemodum possit omne

omne id, quod determinari poteſt, atque ad magnitudinem ſpacii, quod hæ curvæ comprehendunt, ſpectat, quemadmodum Auctor innuit; ſed etiam, quod ſpectat ad magnitudinem ſolidi, à ſuperficie aliqua curva comprehenſi, atque ab hujuſmodi linea generati. Sic ut ex his omnibus conſtet, Authorem id præcipuè operam dediſſe, ut, neglectis particularibus, & præſuppoſitis iis, quæ ab aliis vel inventa vel demonſtrata eſſent, ea tantùm traderet, quæ difficilia, utilia, & maximè generalia eſſent, omniaque paucis comprehenderet; quæ verò faciliora & levioris momenti, non niſi obiter tantùm perſtringeret. Quod ſanè raro ab Auctoribus hodie obſervatum cernimus, cum plerique id ſtudeant, ut eorum opera in ampliſſima volumina excreſcant.

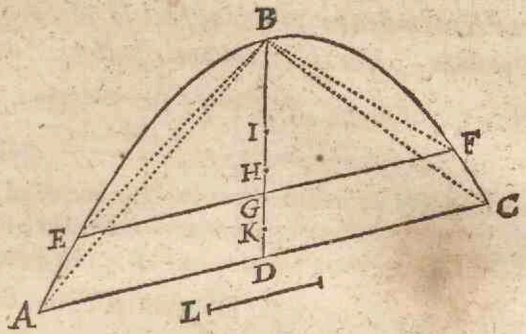
Cæterùm cum ex hac ſpacii aut ſolidi magnitudine deinceps facile ſit invenire ejuſdem centrum gravitatis, non abs re fuerit ſi hîc ſimiliter modum, quo id inveſtigari poſſit, uno atque altero exemplo exponam.



Igitur ad inveniendum, exempli cauſsâ, gravitatis centrum Parabolæ A B C ac ejus portionis A E F C, abſciſſæ videlicet per rectam E F ipſi A C parallelam: ſuppono centrum totius A B C eſſe H, Parabolæ autem E B F centrum eſſe I, & centrum portionis A E F C eſſe K. Deinde factâ B D ∞ a, A D vel D C ∞ b, E G vel G F ∞ c, B H ∞ x, & H K ∞ y, jungo A B, B C, E B, & B F. Quibus poſitis, quæro rationem, quæ eſt inter triangulum A B C & triangulum E B F. Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum ex A D ſeu bb ſit ad quadratum ex E G ſeu cc, ſicut D B ſeu a ad G B:

GB: erit GB $\infty \frac{acc}{bb}$. Ac proinde cum AD multiplicata per DB producat ab, at EG multiplicata per GB producat $\frac{ac^3}{bb}$, erit ratio trianguli ABC ad triangulum EBF quæ ab ad $\frac{ac^3}{bb}$ seu b^3 ad c^3. Hæc autem cum eadem sit rationi, quam inter se habent Parabolæ ABC & EBF (siquidem Parabola quælibet trianguli sibi inscripti maximi est sesquitertia): sequitur rationem portionis AEFC ad Parabolam EBF eandem fore quam $b^3 - c^3$ ad c^3. Porrò cum eadem sit situs ratio centri I in Parabola EBF, quæ centri H in Parabola ABC: erit DB seu a ad BH seu x, sicut GB seu $\frac{acc}{bb}$ ad BI $\frac{ccx}{bb}$. Quâ subductâ ex BH seu x, relinquitur IH $\infty \frac{bbx - ccx}{bb}$. Denique cum IH ad HK, hoc est, $\frac{bbx - ccx}{bb}$, ad y, eandem habere debeat rationem, quam portio AEFC ad Parabolam EBF seu $b^3 - c^3$ ad c^3, fiet, abbreviando primum & tertium terminum per $b - c$, ac deinde multiplicando extremos tum medios, $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \infty bby + bcy + ccy$, vel $\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + bbcc} \infty y$. E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ ABC, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum esse, ut BH seu x sit ad HK seu y, sicut $b^4 + b^3c + bbcc$ ad $bc^3 + c^4$; hoc est, inventis in ratione AD ad EG quinque continuè proportionalibus, erit BH ad HK, ut summa priorum trium ad summam duarum posteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipsum punctum H, opùs tantùm est concipere rectas AD & EG esse æquales, hoc est, $b \infty c$, ita ut EGF coïncidat cum ADC, quo casu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque DH seu y æqualis fiet $\frac{2}{3}x$, hoc est, duabus tertiis ipsius HB. Quod ipsum monstrat, sectâ diametro BD in 5 æquales partes, pro linea BH seu x tunc earundem sumendas esse tres. Id quod aliter quoque à nobis est ostensum in Exercitationibus nostris Mathematicis libr. 5. sectione 19.

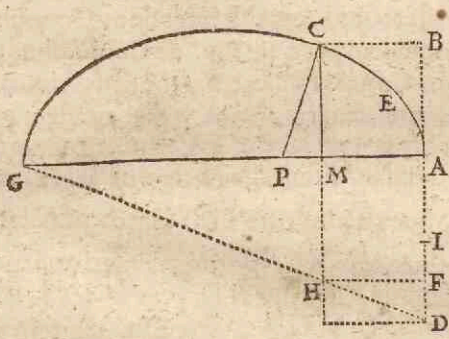
Eodem modo si in Conoïde Parabolico ABC & ejusdem portione AEFC centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iisdem quæ supra positis, quærere rationem, quæ est inter Conum ABC & Conum EBF: invenieturque ut b^4 ad c^4. Hæc enim



enim cum eadem quoque sit rationi, quæ est inter duos Conoïdes A B C & E B F (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroïdibus Archimedis Conoïs quilibet Parabolicus sesquialter esse probatur Coni, qui eandem habet basin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem A E F C ad Conoïdem E B F fore, ut $b^4 - c^4$ ad c^4. E quibus porrò, ut supra, invenitur $y \infty \frac{c^4 x}{b^4 + bbcc}$, hoc est, invento H, centro gravitatis Conoïdis A B C, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis A E F C, faciendum esse ut B H sit ad H K, sicut $b^4 + bbcc$ ad c^4, seu, quod idem est, ad D B & G B quærendam esse tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut B H sit ad H K, sicut summa ipsarum D B, G B ad tertiam L. Ubi tandem, si ad ipsum punctum H habendum statuamus, ut ante, $b \infty c$, invenietur $y \infty \frac{1}{2} x$. Quod ipsum docet diametrum B D in 3 æquales partes esse dividendam, atque pro B H earundem sumendas esse duas. Atque ita de aliis.

Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C, &c.] K
Quæ hâc lineâ & sequentibus usque ad paginæ sequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur usque ad pag. 44, quibus in specie agit de natura quarundam curvarum, quas, postquam ad æquationes reduxit, deinde hasce æquationes cum alia comparat, nempe $yy - 2ey + ee \infty 0$ aut $zz - 2fz + ff \infty 0$, aliave quæ ex hac vel illa sit composita, ut inveniatur tandem quantitas incognita v.

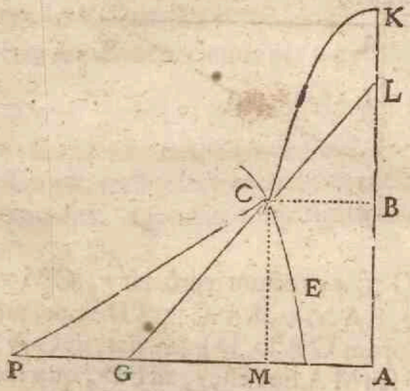
Quemadmodum si C E est Ellipsis, in qua M A sit segmentũ diametri, ad quam C M sit ordinatim adplicata, quodq; L *pro latere recto habeat r, pro transverso autem q: fiet per* 13^{tium} *Theorema* 1^{mi} *libri Conicorum Apollonii:* $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$. *unde tollendo* xx, *restabit* $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{ryy}{q}$, *vel* $yy\ \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ *æquale nihilo.*] Etenim A D latere existente recto $\propto r$, eoque ad A G perpendiculari: erit, propter triangulorum G A D, D H F similitudinem, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita H F seu M A, hoc est, y, ad F D, quæ ideo est $\frac{ry}{q}$. Quam si per H F multiplicemus, fiet rectangulum H F D $\propto \frac{ryy}{q}$. Deinde quoniam per 13^{tiam} Prop. 1^{mi} libri Conicorum Apollonii rectangulum M A D, minus rectangulo H F D, æquatur quadrato ex C M; & quidem rectangulum M A D sit ry: erit rectangulum M F $\propto ry - \frac{ryy}{q}$. Atque idcirco æquatio talis; $ry - \frac{ryy}{q} \propto xx$; hoc est, $ry - \frac{ryy}{q} \propto ss - vv + 2vy - yy$: quippe quod similiter ipsi xx est æquale. Hæc autem æquatio ut ad superiorem reducatur, oportebit utrobique per q multiplicare, ut fractio evanescat: fietque $qry - ryy \propto qss - qvv + 2qvy - qyy$. Denique factâ transpositione, ut quantitates in yy ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ autem alteram, dividatur utrinque per $q - r$, habebiturque $yy \propto \frac{qss - qvv + 2qvy - qry}{q - r}$ sive $yy\ \frac{-qss + qvv - 2qvy + qry}{q - r} \propto 0$.



Cætera, quæ huc spectant, inveniuntur inter lin. 21. pag. 45. & lin. 9. p. 46: quæ, cum satis sint clara, explicatione non egent.

M *Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, &c.*] Cum enim, propter similitudinem triangulorum

rum GMC, CBL, GM sit ad MC, hoc est, $b - y$ ad x, ut CB, hoc est, y, ad BL; erit BL $\frac{xy}{b-y}$. Cui si addatur KL $\propto c$, fiet KB $\propto \frac{cb - cy + xy}{b-y}$. Jam verò, quia, per 11 Prop^nem^ libri 1^mi^ Conicorum Apollonii, in Parabola CK rectangulum sub diametri segmento KB & latere ejus recto d æquatur quadrato ipsius CB, quæ ad eandem diametrum ordinatim est applicata: hinc si multiplicetur $\frac{cb - cy + xy}{b-y}$ per d, erit æquatio talis:



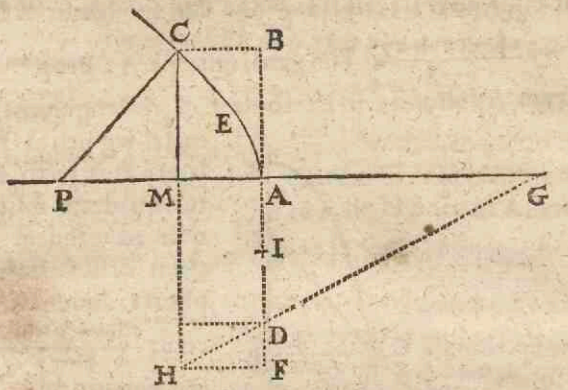
$$yy \propto \frac{dcb - dcy + dxy}{b-y}.$$

Unde multiplicando utrinque per $b - y$, fiet $dcb - dcy + dxy \propto byy - y^3$. Factaque transpositione, ut dxy unam teneat æquationis partem, erit $dxy \propto dcy - dcb + byy - y^3$. In qua si pro x ponatur summa ipsi æqualis, habebitur $dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, seu $\sqrt{ddssyy - ddvvyy + 2ddvy^3 - ddy^4} \propto dcy - dcb + byy - y^3$. Ut autem æquatio ab asymmetria liberetur, quadretur utraque pars, fiatque transpositio ut quantitates omnes ab una parte habeantur, invenieturque

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} +bb \\ +dd \\ -2dc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +ddcc \\ +ddvv \\ -2dcbb \\ -ddss \end{matrix}\right\} yy - 2ddccby + ddccbb \propto 0.$$

Reliqua huc spectantia invenientur à lin. 9. pag. 46. usque ad lineam ultimam paginæ sequentis, quæ explicatione non indigent.

Quoniam autem inventio harum linearum non solùm elegans ac subtilis, verùm etiam per se jucunda atque utilis existit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe est, si ostendero quo pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoïde sint inveniendæ.



Inventio dictarum linearum in Hyperbola.

Sit latus transversum A G $\infty\, q$, rectum verò $\infty\, r$, C M vel A B $\infty\, x$, M A vel B C $\infty\, y$, P A $\infty\, v$, & P C $\infty\, s$. Deinde, propter similitudinem triangulorum G A D, D F H, fiat, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita H F seu M A, hoc est, y, ad F D, quæ ideo erit $\frac{ry}{q}$. Hæc si multiplicetur per H F $\infty\, y$, prodibit rectangulum H F D $\infty\, \frac{ryy}{q}$. Cui porrò si addatur rectangulum D M, $\infty\, ry$, fiet rectangulum M A F $\infty\, \frac{ryy}{q} + ry$. Jam verò, quia, per 12^{mam} Prop$^{\text{nem}}$ 1^{mi} libri Conicorum Apollonii, rectangulum M A F æquale est quadrato ex M C seu xx, erit æquatio $\frac{ryy}{q} + ry \,\infty\, xx$, vel $\frac{ryy}{q} + ry \,\infty\, ss - vv + 2vy - yy$, subrogando nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Unde multiplicatâ utrâque parte per q, fiet $ryy + qry \,\infty\, qss - qvv + 2qvy - qyy$; transpositisque qyy & qry in contrarias partes, $qyy + ryy \,\infty\, -qry + 2qvy - qvv + qss$; ac denique utrâque parte divisâ per $q + r$,

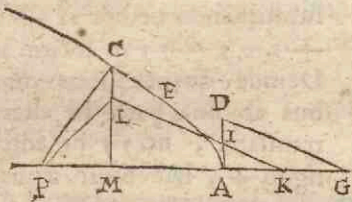
$$yy \,\infty\, \frac{-qry + 2qvy - qvv + qss}{q + r}, \text{ vel}$$

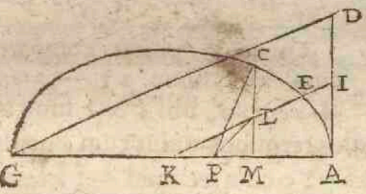
$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q + r} \,\infty\, 0,$$ collocando nimirum quantitates omnes ad unam partem.

Dein-

Deinde, ad inveniendam quantitatem quæsitam v, comparetur æquatio inventa cum æquatione ejusdem formæ $yy - 2ey + ee \propto 0$, ubi y æquatur e. Quare cum utriusque primus terminus planè sit idem, comparetur secundus cum secundo, nempe, $\frac{+qry - 2qvy}{q+r}$ cum $-2ey$, vel, quod idem est, $\frac{+qr - 2qv}{q+r}$ cum $-2e$: ac idcirco multiplicetur utrinque per $q+r$, & fiet $+qr - 2qv \propto -2qe - 2re$. Postea translato $2re$ ad alteram partem dividatur utrinque per $2q$, fietque $\frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q} \propto v$, vel $v \propto y + \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, quandoquidem e ipsi y supposita est æqualis.

E quibus patet, ad inveniendam rectam P C, latus rectum A D secandum esse bifariam in I, & rectam P M ipsi I F sumendam esse æqualem. Quod in Ellipsi quoque est observandum.





His adde sequentem constructionem, quam Vir insignis ac Geometra præstantissimus D. Auzotius utrique huic sectioni pariter convenientem invenit, ejusque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis est.

Existente A D, ut ante, latere recto, & A G latere transverso, ad inveniendam P C, ductis C M, A D ordinatim ad A G, junctâque G D, agatur per centrum sectionis K eidem parallela K I, secans C M in L. Dein assumptâ P M æquali M L, jungatur P C, eritque secans quæsita.

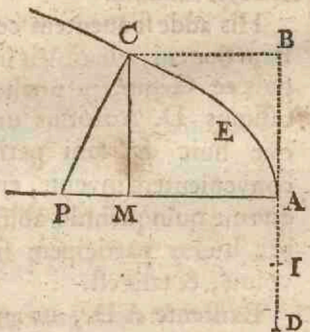
Quod ita patet.

Est enim propter similitudinem triangulorum G A D, K M L, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita K M, hoc est, $\frac{1}{2}q \sim y$ ad M L $\frac{1}{2}r \sim \frac{ry}{q}$. Unde cùm A P inventa sit $\propto y \sim \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, adeoque P M $\propto \frac{1}{2}r \sim \frac{ry}{q}$, liquet P M & M L esse æquales. Quemadmodum fuerunt assumptæ.

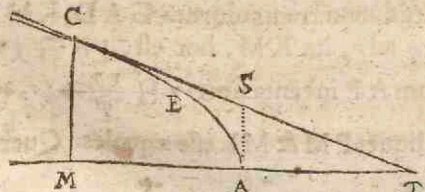
 Ubi

Ubi porrò animadvertere licet, si ex puncto P ceu dato recta P C sit ducenda, quæ utramque sectionem vel earum contingentes ad rectos angulos secet, sive ut circulus, qui ex P ejus intervallo describitur, utramque curvam tangat, opus tantùm esse ducere P L, ita ut angulus A P L sit semissis anguli A M C: si enim per L, ubi hæc recta ipsi K I L occurrit, ducatur M L C ordinatim ad A G, hoc est, ipsi A D parallela, erit juncta P C secans quæsita, sive circulus ex P intervallo P C descriptus utramque curvam in C continget, ut requirebatur.

In Parabola. Sit latus rectum A D $\propto r$, C M vel A B $\propto x$, M A vel B C $\propto y$, P A $\propto v$, & P C $\propto s$. Quoniam igitur per 11^{mam} Prop^{nem} 1^{mi} libri Conicorum Apollonii rectangulum sub segmento diametri M A & latere recto A D æquatur quadrato ordinatim applicatæ C M: erit $ry \propto xx$, vel $ry \propto ss - vv + 2vy - yy$, substituendo nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Deinde quantitatibus omnibus ab una parte in alteram translatis, ut yy sit adfecta signo $+$, habebitur æquatio $yy \begin{smallmatrix}+r\\-2v\end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix}+vv\\-ss\end{smallmatrix} \propto 0$.



Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \propto 0$, ubi y & e sunt æquales, conferendo nempe singulos terminos unius cum singulis alterius: nimirum, secundum $+r - 2v$ cum secundo $-2e$, invenietur $v \propto e + \frac{1}{2}r$, vel $v \propto y + \frac{1}{2}r$. E quibus manifestum fit, ad ducendam rectam P C, opus tantùm esse, dividere latus rectum A D bifariam in puncto I, atque deinde assumere P M ipsi A I seu I D æqualem.



Quòd si verò ipsa tangens C T sit investiganda, poterimus, ut ante, supponendo latus rectum $\propto r$, C M $\propto x$, & M A $\propto y$, quærere A T $\propto v$, & A S $\propto f$, hoc pacto:

Fiat

Fiat propter similitudinem triangulorum A S T & M C T, ut A T ad A S, hoc est, v ad s, sic M T, hoc est, $y + v$, ad M C. Quæ ideo erit $\frac{sy + sv}{v}$. Unde cum & M C sit $\infty\ x$, erit $\frac{sy + sv}{v} \infty\ x$. Hoc est, ductâ utrâque parte in se quadratè, habebitur $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty\ xx$. Quoniam autem, multiplicatâ M A per latus rectum, rectangulum ry, quod inde fit, similiter ipsi xx, hoc est, quadrato ex M C est æquale: erit pariter $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty\ ry$. Unde ordinatâ æquatione, terminisque omnibus ad unam partem transpositis, fit $yy \begin{matrix} + 2v \\ - \frac{vvr}{ss} \end{matrix} y + vv \infty\ 0$. Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty\ 0$, conferendo singulos terminos unius cum singulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur $vv \infty\ ee$, hoc est, $v \infty\ e$. Ac proinde si in locum e substituatur y: fiet $v \infty\ y$. Id quod ostendit, ad ducendam rectam C T ad datum punctum C, opùs tantummodo esse assumere A T æqualem A M, atque connectere puncta C & T.

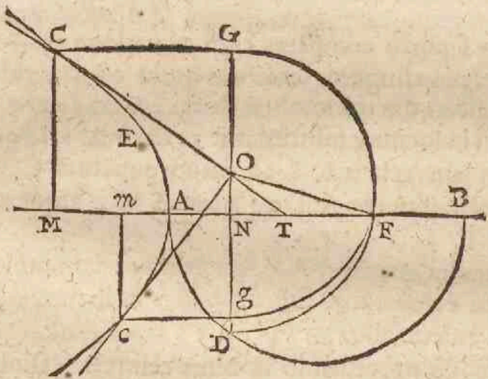
Quòd si autem quæratur A S, poterimus secundum terminum cum secundo comparare, subrogando y in locum v, ut & y in locum e: invenieturque $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{ry}$.

Eodem modò procedendo in binis reliquis sectionibus, invenietur in Ellipsi $v \infty\ \frac{qy}{q - 2y}$ & $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q - y}}$; at in Hyperbola $v \infty\ \frac{qy}{q + 2y}$, & $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q + y}}$.

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta T C sit ducenda: oportet duntaxat, assumptâ quantitate v ceu datâ, quærere y, reliquis manentibus invariatis. Ac proinde, cum in Parabola v & y æquentur, opùs tantùm erit accipere M A æqualem A T, &, ductâ M C ordinatim adplicatâ ad M A, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæsita.

Quoniam vero in Ellipsi v æquatur $\frac{qy}{q - 2y}$, multiplicando utrinque per $q - 2y$, fiet $qv - 2vy \infty\ qy$, seu $qy + 2vy \infty\ qv$. Adeoque si dividatur utrobique per $q + 2v$, invenietur M A $\infty\ y \infty\ \frac{qv}{q + 2v}$.

Pari ratione si quæratur M A in Hyperbola erit ipsa $\propto \frac{qv}{q-2v}$. Ubi liquet, ad ducendam ex puncto T rectam T C, quæ tangat Hyperbolam A E C, quantitatem v sive lineam A T minorem semper debere dari quàm $\frac{1}{2}q$, hoc est, minorem semisse lateris transversi, cum aliàs propter Asymptotos Problema hoc impossibile sit futurum. Quæ determinatio, cum in Parabola & Ellipsi nullum locum habeat, ostendit, quòd in duabus hisce sectionibus ejusmodi Asymptotæ non sint suspiciendæ; sed in iis ex omni puncto, ubi libet in producta M A assumpto, rectas duci posse, quæ easdem sectiones contingant.



Ad hæc, si ex puncto O, extra axem vel diametrum dato, rectam lineam ducere velimus, ut O C, quæ Parabolam C E contingat: ponatur, ut supra, latus rectum $\propto r$, M A $\propto y$, M C $\propto x$, A N $\propto a$, & N O $\propto b$, eritque ex jam inventis M T $\propto 2y$ & N T $\propto y-a$.

Deinde cum propter similitudinem triangulorum M C T & N O T, M C ad M T, hoc est, x ad $2y$, sicut N O ad N T, hoc est, b ad $y-a$: erit $xy-ax$, productum sub extremis, æquale $2by$, producto sub mediis. Quoniam verò ex natura Parabolæ, ry, ut supra, æquatur xx, hoc est, dividendo utrinque per r, y est æqualis $\frac{xx}{r}$: hinc si in æquatione inventa $xy-ax \propto 2by$ in locum y substituamus $\frac{xx}{r}$, habebi-

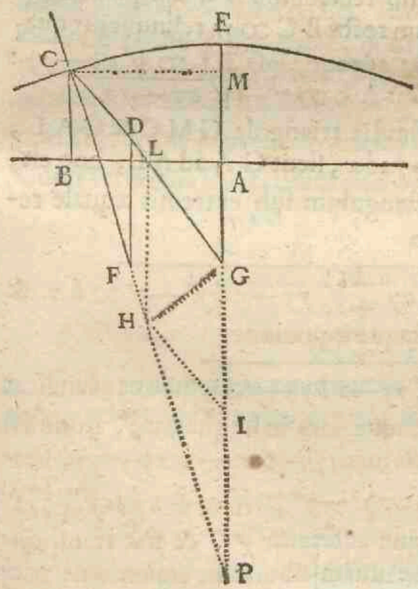
mus

mus $\frac{x^3}{r} - ax \propto \frac{2bxx}{r}$. Hoc est, dividendo ubique per x, & multiplicando per r, invenietur $xx - ar \propto 2bx$, seu $xx \propto 2bx + ar$. Quæ est æquatio primi casus quadratarum pag. 6 & 7, admittens unam veram radicem, quæ est $b + \sqrt{bb + ar}$, & unam falsam, seu minorem quàm nihil, quæ est $b - \sqrt{bb + ar}$. Sicut ibidem annotavimus. Cujus utriusque usus porrò hîc eleganter elucet.

Nam si ad ducendam O C, assumptâ N B æquali r, hoc est, $\propto$ lateri recto Parabolæ, super totâ A B describatur semicirculus, secans O N productam in D: erit N D $\propto \sqrt{ar}$. Quâ positâ ab N ad F, si jungatur O F, erit ipsa $\propto \sqrt{bb + ar}$. Ac proinde si centro O intervallo O F circulus describatur, secans N O hinc inde productam in punctis G, g, designabit N G verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$, & N g valorem falsum $b - \sqrt{bb + ar}$. Vnde ducendo ex punctis G, g rectas G C, $g c$, ipsi A M parallelas, donec Parabolæ occurrant: obtinebuntur duo simul puncta C, c in quibus rectæ ex O ducendæ eandem contingent.

Simili modo in reliquis sectionibus est procedendum.

Esto C E prima Conchoïdes Veterum, cujus Polus G; N *In Conchoide.*



norma verò vel regula, cujus ope ducta est, sit A B; ita ut rectæ omnes, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E & rectam A B continentur, (ut A E, L C) sint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut C P), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos secet in dato puncto C.] Notandum hîc, quòd, si per præcedentem methodum quæratur pun-

ctum

ctum in recta A B, per quod quæſita linea C P tranſire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licèt conſtructio ſit valde brevis. *Oportet enim tantùm in recta C G ſumere C D, æqualem C B, quæ perpendicularis eſt ad A B; & deinde ex puncto D rectam ducere D F, parallelam ipſi A G, atque æqualem G L: habebiturque hâc ratione punctum F, per quod quæſita linea C P erit ducenda.*] Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò eſt brevior, ſi in recta A G quæratur punctum P, per quod linea quæſita C P tranſire debet, quàm ſi quæratur in recta A B, atque etiam conſtructio allata ex illo faciliùs poteſt oſtendi: viſum fuit breviorem hîc ſubjungere, atque conſtructionem ex eo patefacere.

Eſto ergo G A $\infty\ b$, A E vel L C $\infty\ c$, C M vel A B $\infty\ x$, M A vel B C $\infty\ y$, A P $\infty\ v$, & P C $\infty\ s$; eritque tota P M $\infty\ v+y$. Cujus quadratum $vv+2vy+yy$ ſi ſubtrahatur à quadrato rectæ P C $\infty\ ss$, relinquetur quadratum rectæ C M $\infty\ ss-vv-2vy-yy$. Vnde cum C M ſit $\infty\ x$, & quadratum ejus $\infty\ xx$: erit $xx\ \infty\ ss-vv-2vy-yy$.

Eodem modo, ſi in triangulo rectangulo B C L à quadrato ex L C $\infty\ cc$ auferatur quadratum rectæ B C $\infty\ yy$, relinquetur quadratum rectæ B L $\infty\ cc-yy$: adeoque ipſa B L $\infty\ \sqrt{cc-yy}$: quâ ab A B $\infty\ x$ ſublatâ, reſtabit A L $\infty\ x-\sqrt{cc-yy}$.

Iam verò, cum, propter ſimilia triangula G M C & G A L, G M ſit ad M C, hoc eſt, $b+y$ ad x, ſicut G A ad A L, hoc eſt, b ad $x-\sqrt{cc-yy}$: erit rectangulum ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis, nimirum

$bx+xy-\sqrt{bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4}\ \infty\ bx$. & deletis utrobique bx, ordinataque æquatione:

$xy\ \infty\ \sqrt{bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4}$. Deinde ut evaneſcat ſignum radicale, ducatur utraque pars in ſe quadratè, atque ad tollendum xx ſubſtituatur ejus loco $ss-vv-2vy-yy$, fietque æquatio $ssyy-vvyy-2vy^3-y^4\ \infty\ bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4$. Vbi ſi utrinque auferatur y^4, & fiat tranſpoſitio ut quantitates in y^3 ductæ unam obtineant æquationis partem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per $2v - 2b$, orietur æquatio talis:

$$\frac{y^3 \infty \begin{array}{l} +bb \\ -cc \\ +ff \\ -vv \end{array} yy - 2bccy - bbcc}{2v - 2b.}$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, erit:

$$\frac{y^3 \begin{array}{l} -bb \\ +cc \\ -ff \\ +vv \end{array} yy + 2bccy + bbcc \infty 0.}{2v - 2b}$$

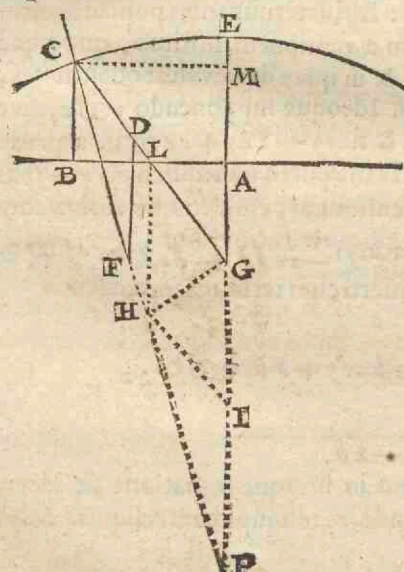
Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, postquam in ipsa quantitas y est data, quandoquidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates v & f, determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquè multas habeat dimensiones, & in qua y duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideoque supponendo $y \infty e$, sive $y - e \infty 0$: duco $y - e$ in se, & fit $yy - 2ey + ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y + f$, ut ascendat ad aliam trium dimensionum, ejusdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio $y^3 \begin{array}{l} +f \\ -2e \end{array} yy \begin{array}{l} -2ef \\ +ee \end{array} y + eef \infty 0$. Cujus terminos separatim confero cum terminis præcedentis

$$\frac{y^3 \begin{array}{l} -bb \\ +cc \\ -ff \\ +vv \end{array} yy + 2bccy + bbcc \infty 0.}{2v - 2b}$$

Vnde cum primus terminus in utraque æquatione sit idem, comparo secundum cum secundo, ac reliquos cum reliquis. Adeò ut, si statuamus $\frac{bbcc}{2v - 2b} \infty eef$, & utrinque dividamus per ee, oriatur $f \infty \frac{bbcc}{2vee - 2bee}$. Pari ratione, si $\frac{+2bccy}{2v - 2b} \infty \begin{array}{l} -2ef \\ +ee \end{array} y$, seu $\frac{bcc}{v - b} \infty -2ef + ee$, in locum f subrogetur valor ejus inventus

$\frac{bbcc}{2vee-2bee}$: habebitur $\frac{bcc}{v-b} \infty \frac{-bbcc}{2ve-2be}+ee$, hoc est, sub eodem denominatore $\frac{-bcce}{ve-be} \infty \frac{+bbcc+be^3-e^3v}{ve-be}$. Et omisso denominatore, adhibitaque decenti transpositione, ut quantitas e^3v unam constituat æquationis partem, reliquæ verò alteram; dividatur utrinque per e^3, invenieturque $v \infty b+\frac{bcc}{ee}+\frac{bbcc}{e^3}$. Sive, substituendo y in locum quantitatis suppositæ e, $v \infty b+\frac{bcc}{yy}+\frac{bbcc}{y^3}$.

Eodem modo si reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s. Quia verò quantitas inventa v satis determinat punctum P, quod modò in recta A G quærebatur; & tantùm ab invento puncto P rectam lineam P C ducere oportet, ut quæstioni satisfiat: ulteriori operationi incumbere supervacaneum fuerit.



Vt verò ad demonstrationem supra dictæ constructionis accedamus, producatur inventa linea C F donec secet A G productam in P, atque per L agatur recta L H parallela A G, occurrens ipsi P C in H: unde ductâ H I ipsi C G parallelâ, quæ secet A P in I; Dico A P seu v æqualem esse inventæ quantitati $b+\frac{bcc}{yy}+\frac{bbcc}{y^3}$.

Cum enim, propter similitudinem triangulorum B C L, A G L, B C sit ad C L, hoc est, y ad c, sicut A G, hoc est, b, ad G L: erit G L $\infty \frac{bc}{y}$. Deinde, quia, propter similia triangula C D F & C L H, C D ∞y est ad D F seu G L $\infty \frac{bc}{y}$, sicut C L ∞c ad L H: erit

erit L H $\infty \frac{bcc}{yy}$. Denique, cum, ob similia triangula C D F, H I P, C D sit ad D F seu G L, hoc est, y ad $\frac{bc}{y}$, sicut H I seu G L, hoc est, $\frac{bc}{y}$, ad I P: erit I P $\infty \frac{bbcc}{y}$. Quare si ducatur recta G C, in eaque assumatur C D æqualis C B, ac deinde ex puncto D recta agatur D F æqualis G L, & parallela A G: manifestum est, rectam, quæ puncta F, C, connectit, esse lineam quæsitam, quippe quæ Conchoïdem secat ad angulos rectos. Quandoquidem, si producatur ad P, G I fit $\infty \frac{bcc}{yy}$, I P $\infty \frac{bbcc}{y^3}$, atque adeò tota A P $\infty b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$. Quod erat faciendum.

Porrò, ut constructio adhuc brevior evadat, operæ pretium est considerare, rectam ab H ad G ductam ipsi G C esse perpendicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum, deinde sic verum deprehendi:

Quoniam enim L H ipsi A G est parallela, erit angulus H L G æqualis angulo L G A. Deinde, quoniam G A ∞b multiplicata per L H $\infty \frac{bcc}{yy}$ facit $\frac{bbcc}{yy}$, quadratum ipsius G L, quæ est $\frac{bc}{y}$: erit A G ad G L, sicut G L ad L H. Vnde cum in triangulis A G L, L G H latera circa æquales angulos ad G & L sint proportionalia, erunt itidem anguli G A L & L G H æquales. Est autem G A L rectus. Quare & L G H rectus erit.

Hinc talis emergit constructio:

Ductâ C G, secante A B in L, agatur ex L ipsi A G parallela L H, donec occurrat perpendiculari G H in H: eritque recta H C, quæ ex H per C ducitur, secans quæsita.

Non dissimili ratione invenire licet constructionem exempli pag. 47.

Verùm enimverò quoniam lineæ C P alio quoque modo investigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Consiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui Mathematici exemplis aliquot illustravit, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, si hoc loco viam, quâ lineæ C P ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti calculo exposuero.

Esto, ut supra, G A $\infty\ b$, A E vel L C $\infty\ c$, A M $\infty\ y$, & P A $\infty\ v$: eritque G M $\infty\ b+y$, & P M $\infty\ v+y$. Deinde quæro quadratum ex P C, supponendo illud esse minimum quadratorum omnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pacto:

$$\overset{AM}{y} \text{———} \overset{LC}{c} \text{———} \overset{GM}{b+y}, \text{ ad } \overset{GC}{\frac{bc+cy}{y}}$$

$$\frac{bc+cy}{y}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square\, GC.\ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \\ \square\, GM.\ bb+2by+yy \end{cases}$$

$$\square\, MC.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by - yy$$

$$\text{add. } \square\, PM.\ vv+2vy+yy$$

$$\text{fit } \square\, PC.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by + vv + 2vy.$$

Hoc autem ut sit minimum, positâ jam A M $\infty\ y+e$, quæratur rursus, ut ante, quadratum ex P C, quò obtineatur æquatio inter id ipsum bis inventum, quâ innotescat quæsita quantitas v, supponendo e esse ∞ o.

$$\overset{AM}{y+e} \text{———} \overset{LC}{c} \text{———} \overset{GM}{b+y+e}, \text{ ad } \overset{GC}{\frac{bc+cy+ce}{y+e}}$$

$$\frac{bc+cy+ce}{y+e}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square\, GC.\ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} \\ \square\, GM.\ bb+2by+yy+2be+2ey+ee \end{cases}$$

$$\square\, CM.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - yy - 2be - 2ey - ee.$$

$$\text{add. } \square\, PM.\ vv+2vy+yy+2ve+2ey+ee$$

$$\square\, PC.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - 2be + vv + 2vy + 2ve.$$

Hinc

Hinc dempto utrobique $-bb-2by+vv+2vy$, remanebit

$$\frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \infty \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee}-2be+2ve,\text{ seu}$$

$$\frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee-2beyy-4beey-2be^3+2evyy+4eevy+2e^3v}{yy+2ey+ee}$$

Hoc eſt, multiplicato per crucem, erit $bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bbccey+4bcceyy+2ccey^3+bbccee+2bcceey+cceeyy \infty bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bcceyy+2ccey^3+cceey-2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Ac proinde ſublatis utrinque æqualibus, reſtabit $2bbccey+2bcceyy+bbccee+2bcceey \infty -2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Diviſo jam ubique per e, reſerventur quantitates in v ductæ ad unam partem, fietque, tranſlatis reliquis, $2vy^4+4evy^3+2eevyy \infty 2bbccy+2bccyy+bbcce+2bccey+2by^4+4bey^3+2beeyy$. Vnde neglectis iis, quæ in e aut ee ductæ ſunt, obtinebitur $2vy^4 \infty 2bbccy+2bccyy+2by^4$. Et fit, dividendo utrinque per $2y^4$, $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Vbi ſciendum, calculum multò abbreviari poſſe, ſi in ſecunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 aſcenditur, continuè omittantur.

Atq; hæc quidem via eſt, quam & Hugenium ſecutum fuiſſe confido, prout tangentes curvarum linearum ſe aliter quàm Fermatius ope hujus ipſius Methodi quæſiviſſe mihi aſſeveravit. Quam viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex P C, cum ſubtiliſſimo ac ſæpiùs laudato noſtro Huddenio ſecundam hanc operationem omnino inſuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipſius y dimenſiones multiplicare, invertendo porrò ſigna $+$ & $-$ quantitatum, per y & yy diviſarum. Perinde, ut hîc videre eſt.

$$\square\,\text{P C.}\ \frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-bb-2by+vv+2vy \infty ss.$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Mult. per} & 2 & 1 & & 1 & 1 \\ \hline & -\frac{2bbcc}{yy} & -\frac{2bcc}{y} & & -2by & +2vy \infty 0 \end{array}$$

$$2vy \infty \frac{2bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+2by$$

Et fit $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Atque ita de aliis.

Cæte-

Cæterùm quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium sive secantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum solutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeò multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his sit æquiparandus. quippe is non tantùm Maximi aut Minimi determinationem, cùm quæstio non nisi unum tale agnoscit, exhibere valet; sed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium simplicissimâ elicere novit.

Ad hæc si superiori modo ipsam tangentem Conchoïdis C T investigare lubeat, ponatur, ut ante, G A ∞ b, A E vel L C ∞ c, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, E T ∞ v, & E S ∞ s: eritque M E ∞ $c - y$, & M T ∞ $c - y + v$. Tum fiat, propter similitudinem triangulorum S T E & C T M, ut T E ad E S, hoc est, v ad s, ita T M, hoc est, $c - y + v$, ad M C. $\frac{cs - sy + sv}{v} \infty x$. Hinc cum & supra inventum sit $xy \infty \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}$, id est, dividendo utrinque per y,

$x \infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$: erit $\frac{cs - sy + sv}{v}$

$\infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$. Vnde quadratis singulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$y^4 \infty \frac{\begin{array}{lll} +2cssy^3 & +ccvvyy & +2bccvvy + bbccvv \\ +2vss & -bbvv & \\ -2bvv & -ccss & \\ & -2cvss & \\ & -vvss & \end{array}}{ss + vv.}$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, habebitur

$$\frac{\begin{array}{llll} y^4 & -2cssy^3 & -ccvvyy & -2bccvvy - bbccvv \\ & -2vss & +bbvv & \\ & +2bvv & +ccss & \\ & & +2cvss & \\ & & +vvss & \end{array}}{ss + vv} \infty 0.$$

Deinde, ad inveniendas quantitates v & s, positâ $y \infty e$, seu $y - e \infty 0$,

$\infty\, 0$, multiplico $y - e \infty 0$ per $y - e \infty 0$, & fit $yy - 2ey + ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Quam porrò, ut ad æquè-multas cum præcedente dimensiones ascendat ac ejusdem cum illa sit formæ, multiplico per $yy - fy - gg$, & provenit

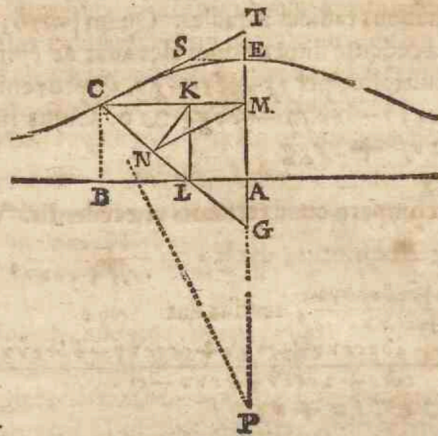
$$\begin{array}{lllll} y^4 - 2ey^3 & + eeyy & - eefy & - eegg & \infty\, 0. \\ - f & + 2ef & + 2egg & & \\ & - gg & & & \end{array}$$

Cujus itaque terminos separatim comparo cum terminis præcedentis. Vltimus terminus, qui hîc est quintus, dat $gg \infty \frac{bbccvv}{eess + eevv}$, quartus dat $f \infty \frac{2bbccvv + 2bccevv}{e^3 ss + e^3 vv}$, tertius dat $ss \infty \frac{3bbccvv + 4bccevv + e^4 vv + cceevv - bbeevv}{ccee + 2ceev + eevv - e^4}$, & secundus dat $vv \infty \frac{e^3 ssv + ce^3 ss - e^4 ss}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce.}$ Quocirca, ut obtineatur v, si ipsius ss valor jam inventus multiplicetur per $\frac{e^3 v + ce_3 - e^4}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce}$, abbreviando priùs, ad facilitatem operationis, numeratorem prioris & denominatorem posterioris fractionis per $e + b$, ac deinde denominatorem prioris & numeratorem posterioris fractionis per $eev + cee - e^3$, exurget $e^4 - be^3 + ccee + 3bcce \infty e^4 + e^3 v + ce^3 + bcce + bccv + bc^3$. Fietque, ordinatâ æqualitate, $v \infty \frac{-bc^3 + 2bcce + ccee - be^3 - ce^3}{bcc + e^3}$. Seu, quia y est $\infty\, e$, erit $v \infty \frac{-bc^3 + 2bccy + ccyy - by^3 - cy^3}{bcc + e^3}$.

Denique, inventâ quantitate v, facile est invenire quantitatem s. Si enim in superiori æquatione $\frac{cs - sy + sv}{v} \infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$ in locum v subrogetur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$$s \infty \frac{-bcc + bcy + cyy + byy}{y^4 + by^3 + cy^3 + bcyy} \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}.$$

Quod ad constructionem hujus attinet, quoniam ipsa, quam inveni, haud inconcinna mihi est visa, placuit eam hîc paucis subnectere.



Ductâ ex C super G E perpendiculari C M, agatur G C, secans A B in L; & ex L ducatur L K parallela G E, occurrens ipsi C M in K. Deinde ex K demissâ K N perpendiculari ad C G, jungatur N M: eritque C T huic parallela tangens quæsita.

Quibus explicatis facile etiam est hîc ostendere, quonam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à se invicem distinguit, investigari queat. De quo egit Nobilissimus D. Hugenius ultimo Problematum Illustrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione

$$\frac{\begin{array}{lllll} y^4 & -2cssy^3 & -ccvvyy & -2bccvvy & -bbccvv \propto 0, \\ & -2vss & +bbvv & & \\ & +2bvv & +ccss & & \\ & & +2cvss & & \\ & & +vvss & & \end{array}}{vv+ss}$$

quoniam ex puncto T, utcunque in producta G E accepto, nulla recta duci potest, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, seu postquam est producta, hanc ipsam in alio puncto non secat, exceptâ tantùm rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admit-

tat

tat radicis valores, qui omnes inter ſe ſint æquales. Quod ipſum ut fiat, confero æquationem ſuperiorem cum æquatione $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 \propto 0$, in qua y tres habet valores æquales, qui ſinguli ſunt $\propto e$. Hanc autem, ut ad æquè multas dimenſiones aſcendat, & ejuſdem cum præcedenti ſit formæ, multiplico per $y+f$, & prodit æquatio

$$y^4 \begin{smallmatrix} -3e \\ +f \end{smallmatrix} y^3 \begin{smallmatrix} +3ee \\ -3ef \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -e^3 \\ +3eef \end{smallmatrix} y - e^3 f \propto 0.$$

Cujus termini ſi cum alterius terminis comparentur, invenientur inde $f \propto \frac{bbccvv}{e^3 ff + e^3 vv}$, $ff \propto \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{2bccvv}{e^3} - vv$, $v \propto \frac{bbcc + 2bcce + ccee}{3bcc - 3bee} - b - c$, & $e^3 \propto -3bee * + 2bcc$, ſeu, quia y eſt $\propto e$, $y^3 \propto -3byy * + 2bcc$.

Quoniam autem hæc æquatio Cubica eſt, neque ad Quadratam reduci poteſt, ſupereſt ut valorem radicis y per ſectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores conſtrui etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ ſunt ſuperiorum generum, non ingratum fore judicavi, ſi hîc ulteriùs exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis C E Problema propoſitum ſolvi poſſit, ſic ut ad conſtructionem ejus non niſi regula atque circino utamur, haud ſecus ac ſi Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditiſſimo ac præſtantiſſimo Viro-Iuvene D. Henrico van Heuraet, Harlemo-Batavo, inventum fuit, mihique ab eo communicatum.

Eſto, ut ante, G A $\propto b$, A E vel L C $\propto c$, B C vel A M $\propto y$, & A T $\propto z$. Vnde ut ſupra pro A P invenietur $\frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$.

$$\text{add. AM.} \quad y$$

$$\text{PM.} \quad \frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$$

$$\text{MT.} \quad z - y$$

$$\square\,\text{PMT.} \quad \frac{-y^5 \begin{smallmatrix} +z \\ -b \end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix} +bccz \\ -bbcc \end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}.$$

$$\text{Eſt autem } \square\,\text{CM.} \quad \frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix} -bb \\ +cc \end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}.$$

Erit itaque $\dfrac{-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}$

$$\infty \frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$$

$$-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty -y^5 - 2by^4 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} y^3 + 2bccyy + bbccy$$

$$\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}+bz\\+bb\\-cc\end{smallmatrix} y^3 - 3bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-2bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty 0$$

div. per $y+b$. fit $\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^3 - ccyy - 2bccy + bccz \infty 0$. Hæc æquatio duas habet veras radices, quippe quæ ad duas tangentes, ex eodem puncto ad utramque portionem ductas, pertinent; quæ si æquales fuerint, tanget T C utramque portionem in eodem puncto.

$$\begin{array}{l} y - e \\ y - e \\ \hline yy - 2ey + ee \infty 0 \\ y + g \\ \hline y^3 - 2eyy + eey + eeg \infty 0 \\ \quad + g \quad\;\; - 2eg \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} \dfrac{-cc}{z+b} \infty -2e + g \\ \hline g \infty 2e - \dfrac{cc}{z+b} \end{array}$$

dele g.

$$\begin{array}{l} \dfrac{bccz}{z+b} \infty eeg \\ \hline \dfrac{bccz}{z+b} \infty 2e^3 - \dfrac{ccee}{z+b} \\ \hline bccz \infty 2ze^3 + 2be^3 - ccee \\ \hline 2ze^3 + 2be^3 - ccee - bccz \infty 0 \end{array}$$

Mult. per 3. $6ze^3 + 6be^3 - 3ccee - 3bccz \infty 0$

subtr. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

div. per cc. $\dfrac{ccee + 4bcce - 3bccz \infty 0}{ee + 4be - 3bz \infty 0}$

dele g.

$$\begin{array}{l} \dfrac{-2bcc}{z+b} \infty ee - 2eg \\ \hline -\dfrac{2bcc}{z+b} \infty ee - 4ee + \dfrac{2cce}{z+b} \\ \hline -2bcc \infty -3zee - 3bee + 2cce \\ \hline 3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0 \end{array}$$

Mult. per $2e$. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

Mult. per $3z + 3b$.

$$\begin{array}{l} 3zee + 3bee + 12bze + 12bbe - 9bzz - 9bbz \infty 0 \\ \text{subtr. } 3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0 \\ \hline 12bze + 12bbe + 2cce - 9bzz - 9bbz + 2bcc \infty 0 \\ \hline 12bze + 12bbe + 2cce \infty 9bzz + 9bbz - 2bcc \\ \hline e \infty \dfrac{9bzz + 9bbz - 2bcc}{2cc + 12bz + 12bb}. \end{array}$$

Igi-

Igitur si in æquatione $ee + 4be - 3bz \propto 0$ in locum e substituatur hic valor inventus, habebitur:

$$\begin{matrix} 81bbz^4 + 162b^3z^3 - 108bbcczz - 204b^3ccz - 12bbc^4 \\ + 81b^4 \quad - 12bc^4 \quad - 96b^4cc \end{matrix} \propto 0$$

div. per $3b$.

$$\begin{matrix} 27bz^4 + 54bbz^3 - 36bcczz - 68bbccz - 4bc^4 \\ + 27b^3 \quad - 4c^4 \quad - 32b^3cc \end{matrix} \propto 0$$

div. per $z+b$.

$$\begin{matrix} 27bz^3 + 27bbzz - 36bccz - 32bbcc \\ - 4c^4 \end{matrix} \propto 0$$

div. per $27b$.

Et fit $z^3 + bzz - \frac{4}{3}ccz - \dfrac{32bbcc - 4c^4}{27b} \propto 0$.

Iam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoïdis solvatur, ponatur $GA \propto b$, $AE \propto c$, $AT \propto x$, $TC \propto y$ — Tum fiat, ut sequitur.

& $AM \propto z$, eritque $MT \propto x - z$.

subtr. $\begin{cases} \square\, CT. \; yy \\ \square\, MT. \; xx - 2xz + zz \\ \square\, CM. \; yy - xx + 2xz - zz \propto \end{cases}$ $\square$ CM. Ex natura Conchoïdis. $\dfrac{-z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc}{zz}$

$$yyzz - xxzz + 2xz^3 - z^4 \propto -z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc$$

$$\begin{matrix} +2x \\ +2b \end{matrix} z^3 \begin{matrix} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{matrix} zz - 2bccz - bbcc \propto 0$$

div. per $2x + 2b$.

Et fit $z^3 \dfrac{\begin{matrix} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{matrix}}{2x + 2b} zz - 2bccz - bbcc \propto 0$

Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis sint comparandi, & quidem ad inveniendas quantitates x & y tres essent æquationes quærendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus sit ad quartum, sicut tertius hujus est ad quartum. In quem finem secundum illius terminum multiplico per $\frac{9bb}{16bb+2cc}$, & tertium per $\frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$. Omnino ut hîc videre est.

$$z^3 + bzz - \tfrac{4}{3}ccz - \&c. \propto 0$$

$$\frac{9bb}{16bb+2cc} \qquad \frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$$

$$z^3 + \frac{9b^3}{16bb+2cc}zz - \frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}z - \&c. \propto 0.$$

$$\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4} \propto \frac{bcc}{x+b}$$

$$\frac{27b^3}{64b^4+16bbcc+c^4} \propto \frac{1}{x+b}$$

$$27b^3x+27b^4 \propto 64b^4+16bbcc+c^4$$

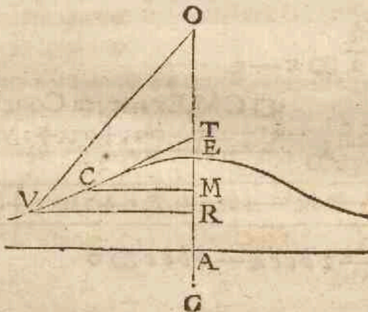
$$x \propto \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3} - b.$$

$$\frac{9b^3}{16bb+2cc} \propto \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b}$$

$$\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc} \propto yy-xx+bb-cc$$

$$yy \propto \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb$$

$$y \propto \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}.$$



Igitur sumendo in axe lineam AO $\propto \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3} - b$, eamque vocando x, si ex puncto O intervallo OV $\propto \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}$ arcus Circuli describatur, atque ex sectionis puncto V ducatur ad AO perpendicularis VR: erit AT, quæ se habet ad AR, ut $16bb+2cc$ ad $9bb$, inventæ æquationis radix. Vnde facile est invenire lineam AM. Ostensum enim est $yy+4by-3bz \propto 0$.

Denique cum inventio supponendi duas ejusdem formæ æquationes, ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, non tantùm ad inveniendas tangentes aut secantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expositum, adhiberi possit; sed ipsa generalis sit atque infinitis aliis Problematis resolvendis, ut Author asserit, inservire queat: haud inutile fuerit hîc ulteriùs quoque exponere, quo pacto illam ad Maximi aut Minimi determinationem applicari posse deprehendi, proponendo in eum finem sequentia Problemata.

Datam

Datam rectam lineam A C secare in puncto B, ut parallelepipedum, quod fit sub quadrato unius partis A B & altera parte B C, sit omnium parallelepipedorum, sic factorum, maximum.

Esto A C $\propto a$, & A B $\propto x$: eritque B C $\propto a - x$. Deinde maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum statui potest æquale, esto b^3. Quibus sic positis, si quadratum ex A B $\propto xx$ multiplicetur per B C $\propto a - x$, proveniet $axx - x^3 \propto b^3$, seu $x^3 - axx * + b^3 \propto 0$. Iam factâ $x \propto e$, seu $x - e \propto 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \propto 0$. Quam porrò, ut ejusdem sit formæ cum præcedente, multiplico per $x + f$, & exurgit

$$\begin{array}{llll} x^3 & -\,2e\,xx & +\,ee\,x & +\,eef \propto 0. \\ & +\,f & -\,2ef & \end{array}$$

Ex quarum mutua inter se collatione eliciuntur hæ tres æquationes $-2e + f \propto -a$, $+ee - 2ef \propto 0$, & $eef \propto b^3$: quæ resolutæ dant $f \propto \frac{1}{2}e$, e seu $x \propto \frac{2}{3}a$, & $b^3 \propto \frac{4}{27}a^3$. Quod ipsum docet, ad secandam lineam A C, qualis requiritur, eandem in B ita esse dividendam, ut A B ipsius A C contineat duas tertias partes; & maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum adæquari potest, esse $\frac{4}{27}a^3$.

Dividere p planum in tria plana proportionalia, ita ut solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel duorum posteriorum in latus primum, sit omnium maximum.

Assumptis ad hoc x pro latere primo, & y pro latere secundo, fient inde proportionalia plana

$$\begin{array}{ll} xx. & 1^{\text{mum}} \\ xy. & 2^{\text{dum}} \\ yy. & 3^{\text{tium.}} \end{array}$$

Et manifestum est, $xxy + xyy$, quod fit ex $xx + xy$, summâ duorum priorum planorum, in latus secundum y, esse æquale ei, quod fit ex $xy + yy$, summâ duorum posteriorum planorum, in latus primum x. Superest ut $xxy + xyy$ sit omnium ejusmodi solidolidorum maximum. Quoniam autem $xx + xy + yy$ est ∞p

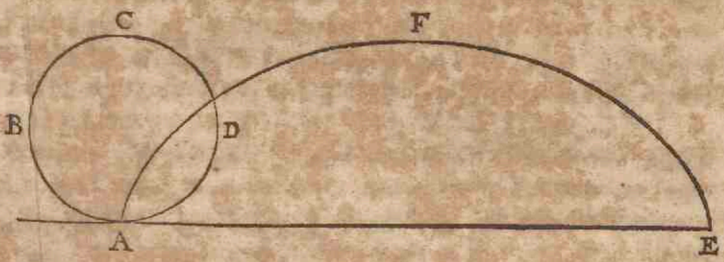
vel $yy \infty p - xx - xy$

mult. per x $\quad x$

vel etiam $xyy \infty px - x^3 - xxy$:

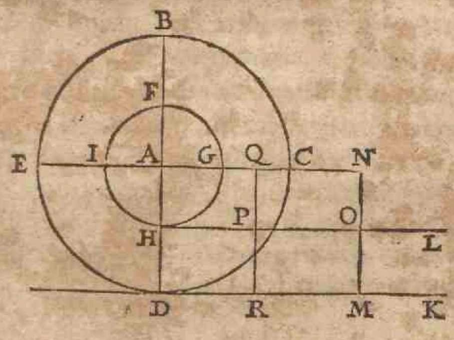
Hinc si pro xyy dicti solidi $xxy + xyy$ substituatur $px - x^3 - xxy$, habebitur $px - x^3$. Quocirca ut $px - x^3$ fiat maximum solidum, quod esse possit, intelligatur ipsum æquale solido q: eritque $x^3 * - px + q \infty 0$. Deinde factâ $x \infty e$ seu $x - e \infty 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam rursus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per $x + 2e$, & exsurgit $x^3 * - 3eex + 2e^3 \infty 0$. Ex quibus binis æquationibus, si singuli termini unius cum singulis terminis alterius comparentur, elicio $x \infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & $q \infty \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Eodem modo invenitur $y \infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Quod ipsum monstrat, ad dividendum p planum in tria plana proportionalia, maximum solidum, quod ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel ex ductu duorum posteriorum in latus primum gignitur, esse illud, quod obtinetur dividendo p planum in tria plana æqualia. Et sic de aliis.

Cæterùm, cum allatis exemplis satis superque sit ostensum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri possint, secantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Mersenno per literas ostendit in curva, quæ Cycloïdes sive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clarissimus Euangelista Toricellius, scribit à Galilæo Galilæi, prædecessore suo, primùm fuisse consideratam; cujusque ulteriori speculationi ipsum postea, ut & Virum Celeberrimum D. de Roberval, Mathematum in Academia Parisiensi Professorem Regium, se addixisse novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota sive circulo assumpti, super rectam aliquam lineam circumvoluti.



Vt si super recta linea A E circumvolvatur rota sive circulus A B C D, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E: describet punctum A hoc motu lineam curvam A F E, quæ Trochoïdes sive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam sive circulum assumpto, excepto tantùm ejus centro.

Iam ut in genere ostendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci possint, quæ hasce curvas secent in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Aristotele hîc explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum constituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas absolvant.



Sunt ergo duo circuli inæquales, major quidem B C D E; minor autem F G H I, idem habentes centrum A: sintque diametri majoris B D, E C; minoris verò F H & I G, sese ad angulos re-

 ctos

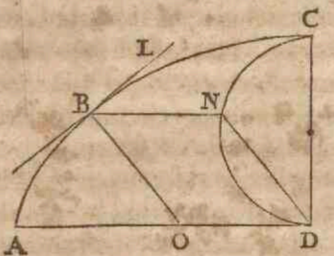
ctos secantes in A. ita ut quadrans circuli majoris sit C D; minoris verò G H. Iam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, simul circumvoluti, æquales lineas absolvant; concipiatur primùm majorem B C D E dextrorsum moveri super recta D K, & minorem F G H I ad motum illius describere lineam rectam ipsi D K parallelam, quæ sit H L. Vnde manifestum, cùm punctum C pervenerit ad M, existente arcu D C æquali rectæ D M, semidiametrum quoque A C tunc fore perpendicularem super D K in M; ita ut coïncidat cum M N, hoc est, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris sit in recta A C: sequitur ipsum quoque post hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut semidiameter A G circuli minoris transferatur in N O. Adeò ut, N O æquali existente & parallelâ ipsi A H, ipsa quoque H O sit æqualis futura ipsi A N seu D M, & singulæ rectæ D M, H O separatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis est intelligendum.

Non secus ostendetur, si moveatur circulus minor F G H I super rectam H L, secum deferens circulum majorem B C D E, sibi affixum in centro A, lineas rectas æquales absolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante H G super rectam H L, ab H versus L; ita ut rectam lineam H P sibi æqualem percurrat: ducatur per P recta Q P R, secans rectam H L ad angulos rectos in P; sed A N & D K in Q & R. Quo facto, perspicuum est, cùm punctum G est in P, punctum quoque A esse in Q, rectamque A G super rectam Q P. Atque ideo, cum punctum C circuli majoris existat in linea A G producta, patet, illud post hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R, rectamque D R æqualem fore rectæ A Q seu H P, & singulas eodem temporis spatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi possit, ut rectam absolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus sit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de supra dicta linea A F E notandum, eam duobus motibus describi, inter se distinctis; recto nempe, quo circulus A B C D defertur ab A ad E; & circulari, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoïdem describit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipsi A E æqualem & parallelam.

Qui-

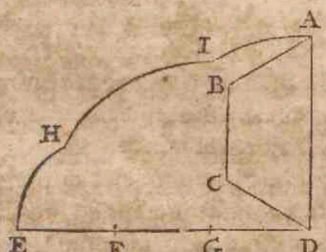
Quibus ſic explicatis, ut ad propoſitum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus: ſciendum eſt, lineam rectam, tranſeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota baſin, dum punctum in Trochoïde datum deſcribitur, contingit, ſecare ſemper tangentem quæſitam ad angulos rectos.



Vt ſi invenienda ſit linea recta, tangens in B curvam ſive Trochoïdem A B C, deſcriptam ſuper baſin A D per punctum aliquod circumferentiæ rotæ D N C, ſuper baſin A D circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere B N, parallelam baſi A D; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota baſin tangit) rectam N D; tumque eidem parallelam B O; ac denique huic perpendicularem B L: Quæ erit tangens quæſita.

Cujus rei brevem atque ſimplicem demonſtrationem affert. ut ſequitur.

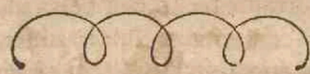
Si ſuper rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum deſcribitur, compoſita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad ſingula earum puncta normaliter ſecant lineas rectas, quæ ab ipſis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem deſcribendo, baſin contingit, ducuntur.

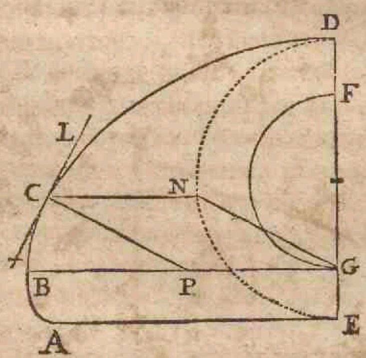


Exempli gratiâ, ſi faciamus ut volvatur Hexagonum A B C D ſuper rectam E F G D, deſcribet punctum ejus A, lineam curvam E H I A, compoſitam ex arcu E H, qui deſcribitur, dum Hexagonum hoc contingit baſin in puncto F (quod ejuſdem arcus eſt centrum; & ex arcu H I (cujus centrum eſt punctum G); ut

& ex arcu I A (cujus centrum est punctum D): per quæ centra transeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accidat polygono centies millenorum millium, palàm est, idem convenire quoque Circulo.

Verba Authoris. Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ, elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hîc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo supersedebo. Notandum solummodo est, cùm basis hujus Trochoïdis æqualis est circumferentiæ rotæ, quam super eandem basin ad ejus descriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non absimilem figuram, referre: hoc est, quòd tangens utriusque ejus extremi puncti ad basin sit perpendicularis. Sed cùm minor est, quod tunc utraque extremitas introrsum sit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræsentent figuram



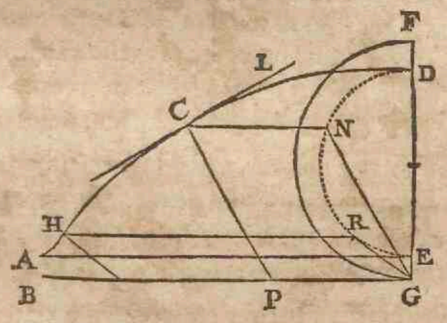


Ad cujus Trochoïdis tangentes inveniendas, atque sciendum ubi se involvere incipiat: imaginandum est, punctum D, à quo describitur, esse extra rotam. Deinde, duæ supponendæ sunt bases; una A E, supra quam Trochoïdes A B C D per punctum D est descripta; & altera B G, super quam rota F G secum deferens circulum D E sibi affixum circa ejus centrum est circumvoluta, cujusque semicircumferentia dimidiæ basi A E est æqualis. Vbi sciendum, tangentes inveniri per circulum D E & punctum G, ubi rota F G basin B G contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto C, opùs tantùm sit ducere C N parallelam basi A E, occurrentem cir-

circulo D E in puncto N; tum verò junctæ N G parallelam C P: quæ ipsi tangenti quæsitæ erit perpendicularis. Ita ut perspicuum sit, punctum B, ubi hæc secunda basis B G Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipsa se introrsum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad basin A E perpendicularis existit.

Denique si basis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per assumptum punctum, quod eam designat, circa rotæ centrum describitur: binæ extremitates extrorsum erunt inflexæ; ita ut complures ejusmodi linearum revolutiones hanc exhibeant figuram.

Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniantur, atque sciatur ubi se inflectere incipiat, imaginandum est, punctum, quod ipsam designat, esse intra rotam: adeoque secundam basin esse B G, supra quam rota F G, cujus circumferentia huic basi est æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum D, Trochoïdem designans, super primam basin A E describit circulum D E, circa rotæ centrum. Iam ut inveniatur linea, quæ ipsam in puncto C, utcunque in Trochoïde assumpto, tangat: ducatur C N parallela basi, occurrens circulo



D N E in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota F G basin suam contingit, ductâ rectâ N G, agatur ipsi parallela C P: eritque recta C L, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quæsita. Porrò ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio A H desinit esse concava, & H C D convexa, opùs tantùm est à puncto G rectam ducere G R, quæ tangat circulum D R E in puncto R; tum ab R rectam R H, parallelam basi, & occurrentem Trochoïdi in puncto H. Quod erit quæsitum.

Vbi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc A H C D tangat in puncto H: quandoquidem illud ipsum duas ejus portiones, quarum una est concava, & altera convexa, distinguit.

Deinde observandum, quòd ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem descriptarum, hîc allata sunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum describuntur.

Denique, quòd lineæ hæ sint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quòd tangentes earum non inveniantur per regulas ibi expositas, cum ad ipsas non referantur.

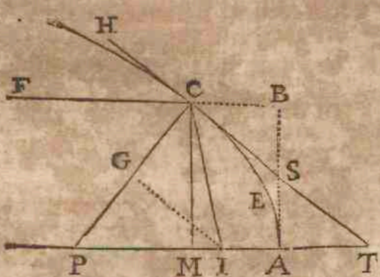
OO *Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.*] Notavit hîc Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cùm nempe F A ad A G eandem rationem habet, quam 5 A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse. Quod se apertiùs in tractatu de Dioptricis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus.

P *Et quod ex tali materia constet, ut vim horum radiorum, secundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futurum, ut etiam reflexionum anguli, non secus ac refractionum, inæquales existant, atque eodem modo mensurari possint.*] Hæc refer ad caput 2^{dum} Dioptricæ, ubi demonstratum est, reflexionis angulum angulo incidentiæ esse æqualem: quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminuitur. Sicut per refractionem vis radii, transeundo ex uno corpore pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea angulos

gulos

gulos facit inæquales. Adeò ut hinc ſequatur: ſi ſpeculum haberi poſſit, ex tali conſtans materia, ut vim radiorum, quos reflecteret, augeret aut diminueret (omnino ut oſtendit, vitrum vim radiorum, quos in ſe recipit, augere, eorumque refractionis cauſam eſſe): eſſent reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales: & poſſet eorum ratio menſurari per rationem, quæ eſt inter lineas A 5 & A 6, ſupponendo illam eandem eſſe, quæ eſt inter vim alicujus radii antequam in ſpeculum incideret, & inter vim, quam immediatè poſt obtineret, cum eſſet reflexus.

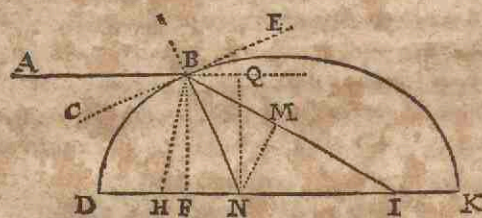
Cæterùm quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem diverſimode detorquendos Sectiones Conicæ ſingularem habent uſum, atque ſpecula & vitra ad ipſarum figuram expolita miros effectus præbent: haud inopportunum fore duxi, ſi, tum ad penitiorem intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum ab Authore ſunt oſtenſa, tum ad uſum eorum, quæ de inveniendis tangentibus aut ſecantibus expoſita ſunt, deinceps hîc adjungerem, quo pacto in axe puncta inveſtigari poſſint, in quibus radii Solis, poſtquam in ſuperficiem concavam ſpeculi Parabolici inciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra tranſierunt, reflectuntur aut colliguntur.



Vt ſi fuerit ſpeculum, habens figuram Parabolæ AEC, cujus axis ſit MA, & vertex A: ad inveſtigandum punctum I, ad quod radius Solis FC, qui ipſi MA eſt parallelus, reflectatur, poſtquam in idem ſpeculum incidit in C, ſuppono, ut ante, latus rectum ∞ r, MA ∞ y, & IA ∞ z. Quibus poſitis cum ex ſuperioribus PM ſit ∞ $\frac{1}{2}r$, & AT ſit ∞ AM ſeu y: erit PT ∞ $\frac{1}{2}r + 2y$, & PI ∞ $\frac{1}{2}r + y - z$. Quoniam autem propter æquales angulos incidentiæ & reflexionis FCH & ICT, ut & rectam PC ipſi tangenti HT perpendicularem, anguli quoque FCP & PCI ſunt æquales; atque horum quidem angulus FCP angulo CPI ſit æqualis: erunt pariter anguli PCI & CPI æquales; lineaque IG, ipſi PC perpendicularis, rectam PC bifariam

riam in G fecabit. Quibus fic exiftentibus, cum & hinc P I ipfi I T fit æqualis, erit $r + 2y - 2z \infty \frac{1}{2}r + 2y$. Vnde, dempto utrinque $2y$, & reliquis per 2 divifis, invenitur $z \infty \frac{1}{4}r$. Quod ipfum, cum de quovis radio ipfi axi parallelo fimiliter intelligendum fit, nos docet, radios Solis, axi parallelos, ubi in fuperficiem concavam fpeculi Parabolici inciderunt, omnes ad idem axis punctum I reflecti, diftans à vertice quartâ parte lateris recti.

Vnde porrò fit manifeftum, cum lucente Sole, beneficio hujus fpeculi, prout ipfi directè eft obverfum, aliquid in I accendatur, quam ob rationem idem fpeculum uftorium dictum fuerit, punctumque I Foci nomine appellari confueverit.



Deinde fi fuerit vitrum, habens formam Ellipfis D B K, cujus maxima diameter fit D K: ad inveftigandum quo modo radius A B, qui in aëre exiftens ipfi D K eft parallelus, tendere debeat, poftquam intravit ejus fuperficiem convexam, & in quo vitro refractiones fic fieri intelliguntur, ut, juxta ea, quæ in Dioptricis tradita funt, illæ omnes menfurari poffint per rationem, quæ eft inter lineas d & e, facio D H vel I K $\infty\, a$, H I $\infty\, z$, & D F $\infty\, y$, eritque H F $\infty\, y - a$ vel $a - y$, & F I $\infty\, a + z - y$ vel $y - a - z$. Quibus pofitis, fi Ellipfis D B K defcripta effe intelligatur ope fili H B I, haud fecus ac illud Capite 8vo Dioptrices ab Authore aut etiam à nobis in Organica Conicarum Sectionum defcriptione expofitum fuit, erit, factâ B I $\infty\, x$, B H $\infty\, 2a + z - x$. Vnde jam facile eft invenire quantitatem y, affumptis fcilicet quantitatibus x & z, ut cognitis. Etenim fi à quadrato B H. $4aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx$ tollatur quadratum H F. $yy - 2ay + aa$, reftabit $3aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx + 2ay - yy$, pro quadrato B F. Similiter, fi à quadrato B I. xx auferatur quadratum F I. $aa + 2az + zz - 2ay - 2zy + yy$, relinquetur etiam

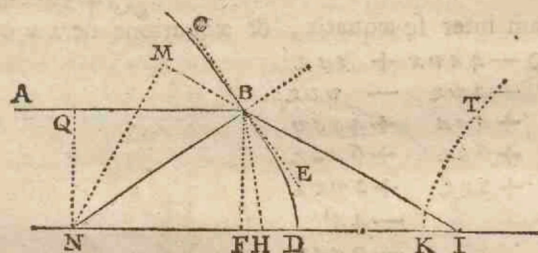
$xx -$

$xx - aa - 2az - zz + 2ay + 2zy - yy$, pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \infty \frac{2aa + 3az + zz - 2ax - zx}{z}$. Esto jam DN ∞ v, & NB ∞ s, eritque FN ∞ $v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Si enim à quadrato BN. ss abstulero quadratum FN. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato BF. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium habebitur $y \infty \frac{ss - vv - xx + aa + 2az + zz}{2a + 2z - 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \infty \frac{\begin{array}{ll} -4avx & +ssz \\ -2vz & -vvz \\ +4aa & +4aav \\ +6az & +6avz \\ +2zz & +2vzz \\ & -4a^3 \\ & -9aaz \\ & -6azz \\ & -z^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut inveniantur quantitates v & s, positâ $x \infty f$, multiplicetur $x - f \infty 0$ per $x - f \infty 0$, & fit $xx - 2fx + ff \infty 0$, seu $xx \infty 2fx - ff$, æquatio ejusdem formæ cum præcedente. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, emergit v, hoc est, DN ∞ $\frac{2aa + 3az + zz - zx}{2a + z}$. Quæ à DI seu $a + z$ ablata relinquit NI ∞ $\frac{zx}{2a + z}$. Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter se rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK mensurant; & quidem FB ad NM sit, ut BI ad IN: superest ut d sit ad e, sicut x ad $\frac{zx}{2a + z}$. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $\frac{dzx}{2a + z} \infty ex$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu $z \infty \frac{2ae}{d - e}$. Cui si addantur DH & IK, hoc est, $2a$, habebitur

$DK \infty \frac{2ad}{d-e}$. Et patet DK ad HI esse, ut $2ad$ ad $2ae$, hoc est, ut d ad e. Quod ipsum, cum de quovis radio AB ipsi DK parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, ope vitri Elliptici DBK, in quo DK ad HI eandem habet rationem, quam d ad e, hoc est, eandem quam inter se servant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre existentes diametro DK sunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, postquam superficiem ejus convexam DBK transierunt, colligantur simul in puncto I.



Denique si fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ DB, cujus axis sit DK: ad investigandum, quo pacto radius AB, qui in vitro existens ipsi DK est parallelus, se inflectere debeat, postquam superficiem ejus convexam DB erit egressus, supponendo ejusdem vitri refractionem esse eam, quæ est inter lineas d & e, facio HD vel KI $\infty\, a$, HI $\infty\, z$, & DF $\infty\, y$: eritque FH $\infty\, y-a$ vel $a-y$, & FI $\infty\, z+y-a$. Quibus positis, si Hyperbola DB descripta intelligatur beneficio fili, quemadmodum Capite 8^vo Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4^to Exercitationum nostrarum Mathematicarum, erit, factâ BI $\infty\, x$, BH $\infty\, x-z+2a$. Unde jam facile est invenire quantitatem y, supponendo quippe quantitates x & z esse cognitæ. Si enim à quadrato BH. $xx-2zx+zz+4ax-4az+4aa$ subducatur quadratum FH. $yy-2ay+aa$, restabit $xx-2zx+zz-yy+2ay+3aa+4ax-4az$, pro quadrato FB. Similiter, si à quadrato BI. xx auferatur quadratum FI. $zz+2zy+yy-2az-2ay+aa$, relinquetur quoque $xx-zz-2zy-yy+2az+2ay-aa$, pro quadrato FB. Hinc, cum habeatur æquatio inter

inter quadratum F B dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \infty \frac{zx - zz - 2aa + 3az - 2ax}{z}$. Esto jam D N $\infty\, v$ & N B $\infty\, s$, eritque N F $\infty\, v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Etenim si à quadrato N B. ss detraxero quadratum N F. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato F B. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium, habebitur $y \infty \frac{-ss + vv + xx - aa + 2az - zz}{-2a + 2z + 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \infty \frac{\begin{array}{ll} +2zzx & +ssz \\ -6az & -vvz \\ +4aa & -2vzz \\ +2vz & -4aav \\ -4av & +6avz \\ & -z^3 \\ & -9aaz \\ & +6azz \\ & +4a^3 \end{array}}{z.}$$

Porrò ut innotescant quantitates v & s, positâ $x \infty f$, multiplico $x - f \infty 0$ per $x - f \infty 0$, & fit $xx - 2fx + ff \infty 0$, seu $xx \infty 2fx - ff$, æquatio similis præcedenti. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, invenitur v, hoc est, D N $\infty \frac{zx - zz + 3az - 2aa}{z - 2a}$. Cui si addatur D I. $z - a$, habebitur N I $\infty \frac{zx}{z - 2a}$. Denique cum linea N M ad N Q vel F B eam habeat rationem, quam inter se habent lineæ refractionem vitri D B mensurantes; & quidem N M ad N Q vel F B sit, ut N I ad I B: relinquitur, ut d sit ad e, sicut $\frac{zx}{z - 2a}$ ad x. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $dx \infty \frac{ezx}{z - 2a}$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur H I seu $z \infty \frac{2ad}{d - e}$. E qua ablatis H D & K I seu $2a$, erit reliqua D K $\infty \frac{2ae}{d - e}$. Et manifestum est H I ad D K esse, ut $2ad$ ad $2ae$ vel ut d ad e. Id quod, dum de quolibet radio A B ipsi D K parallelo perinde est intelligendum, nobis monstrat, beneficio vitri Hyperbolici D B, in quo H I ad D K eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ est ejusdem vitri mensura refractionis, radios, qui in vitro D B existentes axi D K sunt paralleli, egrediendo superficiem ejus convexam D B ita flexum iri, ut egressi omnes coëant in punctum I.

PP *Cujus figura est A 3 Y 3, quæ undique est convexa; præterquam versùs A, ubi paululum concava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis.*] Vbi etiam sciendum, ex positione punctorum H & F, quemadmodum Nobilissimus Hugenius notavit, contingere posse, ut versùs A convexa existat.

AR-

ARGVMENTVM
TERTII LIBRI.

Postquam primo libro exposita sunt ea, quæ viam aperiunt ad Autoris Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriæ Problematis utitur, ibidemque simul ostensa est ratio construendi Problemata Plana, hoc est, quæ reduci possunt ad æquationes Quadratas, quæque rectarum linearum atque circuli circumferentiarum ope solvi possunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearium constructiones, hoc est, quæ ad æquationes Cubicas altiorumve graduum ascendunt, & ad quorum constructiones, sectionibus Conicis, aliisque curvis lineis magis compositis uti necessarium est. Vbi observandum est, quòd, cum peccatum sit non leve apud Geometras, Problema Planum construere per Conica aut Linearia, hoc est, ipsum per improprium solvere genus, ita quoque sit cavendum ne in constructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quæ magis sit composita, quàm ipsius natura admittit.

Quocirca, postquam secundo libro ostensum est, quo pacto curvæ lineæ, mediantibus æquationibus, quæ exhibent relationem, quam ipsarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, distingui possint in certa genera, atque exinde cognosci, quænam illarum magis sint compositæ; superest ut explicemus, quomodo sciri possit, utrum Problema aliquod sit vel Planum, vel Solidum, vel denique Lineare. Arguitur autem Problema Planum esse, cùm æquatio, ad quam perducitur, postquam ad simplicissimos terminos est reducta, atque ampliùs reduci nequit, Plana existit, hoc est, ut incognita quantitas ad quadratum adscendat, duasve habeat dimensiones, illaque per rectas lineas & circulorum circumferentias inveniri possit, quemadmodum primo libro fuit ostensum. At verò Solidum esse, quando æquatio, quæ ex eo deducitur, postquam ad simplicissimos terminos reducta est, talis existit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc est, ad 3 aut 4 dimensiones adscendat, ipsaque non nisi Conicam aliquam sectionem in constructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare denique, ubi æquatio illa, postquam non ampliùs reducibilis est, plùs quàm Solida existit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimensiones assurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimensiones, atque ita porrò in infinitum; ipsaque non nisi per curvam secundi, aut tertii, aut superioris denique generis, inveniri potest.

Ex quibus perspicuum est, quòd, etiamsi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primâ, quæ fortè occurrat, ad constructionem cujusque Problematis uti liceat; sed eligendam esse semper simplicissimam, per quam possibile sit illud ipsum resolvere. Atque pro simplicissimis non habendas esse illas, quæ facillimè omnium describi possunt, sive quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim illas, quæ simplicissimi sunt generis, & ad quæsitam lineam determinandam inservire queunt. Ita ut, si peccatum sit in Geometria (quemadmodum supra diximus) Problema aliquod propositum construere per genus Linearum curvarum, magis compositum, quam natura ejus permittit; contra quoque pro vitio habendum sit, si quis inutiliter desudet ad illud ipsum, per genus aliquod linearum simplicius, quam natura ejus admittit, construendum.

Quapropter ut utrumque vitium evitari, ac unumquodque Problema ex proprio suo linearum genere solvi posit, postquam tam Problematis quam ipsius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere est ostensum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere posse diversas radices sive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipsa habet dimensiones; eärumque interdum quasdam esse, quæ falsæ existunt vel nihilo sunt minores; interdum etiam, quæ planè imaginariæ; sicut etiam quâ ratione ipsæ æquationes producantur ex suis radicibus in se invicem ductis, ita ut per illas rursus sint divisibiles. Quas divisiones subinde utiles ostendit ad explorandum utrum certæ quædam quantitates sint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipsas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimensiones reducendam. Deinde, postquam ostendit quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque æquatione haberi possint, sicut etiam quo pacto falsæ reddantur veræ, & veræ falsæ, docet, quo pacto quælibet æquatio transmutari posit in aliam, ita ut radices ejus sint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quàm radices prioris; & quidem quoties id fit, ut quædam ex illis sint veræ, quædam verò falsæ, quòd tum augendo veras, falsæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, secundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ transmutationis tolli posit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones sub latere, in Cubicis sub quadrato, in Quadrato-quadratis sub cubo, &c. evanescant. Post hæc, quando quædam ex radicibus veræ sunt, quædam verò falsæ, (id quod ex signorum serie manifestum fit) declarat, facile esse ejusdem transmutationis beneficio efficere, ut

radi-

radices omnes evadant veræ. Porrò, quemadmodum æquationes Cubicæ atque Quadrato-quadratæ omnes per eandem curvam lineam solvi possunt, utpote per aliquam trium Coni sectionum; & rursus Surdesolidæ atque Quadrato-cubicæ omnes per aliam curvam, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ, atque sic ulteriùs; sic ut binæ priores juxta eandem regulam construi queant, sicut etiam binæ posteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus æquationibus ob multitudinem terminorum & variationem signorum + & — plurimæ inde (ut diximus) nascantur formulæ, regulaque illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto æquationes illas attollere liceat, hoc est, Surdesolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque simul efficere, ut, si quæ terminorum loca in illis desint, ipsa repleta existant, ut tandem, si quædam ex radicibus falsæ, quædam autem veræ sint, ipsæ æquationes transmutari poßint in alias, ubi radices omnes sint veræ, ipsæque secundùm eandem constructionis regulam inveniri poßint. Præterea, quoniam æquationes frequenter fractionibus & surdis numeris involutæ occurrunt, aut ipsæ etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minùs expeditè resolvantur feliciterque explicentur, aut ut non nisi operosiorem in resolvendo industriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque surdos numeros, sicut etiam ad transmutandos vastos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi poßint per quantitatem aliquam cognitam sive numerum. Id quod inservire insuper potest ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in æquatione æqualem cuidam alteri datæ. Caterùm ne quid desit, quod ad intelligendas radices alicujus æquationis requiratur, ostendit ipsas interdum sive veras sive falsas solummodo imaginarias esse. Ita ut, licèt semper in qualibet æquatione tot talesque, quales supra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quæ aliquibus ex ipsis respondeat.

Postquam igitur ea, quæ ad æquationum recognitionem atque emendationem pertinent, exposita sunt, & quidem ex æquationum cognitione (ut supra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout æquatio est vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdesolida aut Quadrato-cubica, vel plurium denique dimensionum, Problema, quod ad ipsam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c; illudque exinde construi queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicas, vel per lineam curvam uno vel pluribus gradibus magis compositam: Hinc, priusquàm ad æquationum resolutionem accedit, ac Problema propositum ex proprio suo

Li-

Linearum genere ſolvit, tradit, quo pacto poſt tranſmutationes requiſitas, quando Problema eſt Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum adſcendit, ipſa dividi atque reduci poſſit ad Quadratum, ita ut deinde regulæ ac circini beneficio, ſicut primo libro monſtratum fuit, reſolvi queat; ac denique quid in genere obſervandum ſit circa reliquas ſuperiores æquationes. Ita ut poſt inſtitutas illas diviſiones, quando æquatio ad tres quatuorve dimenſiones aſſurgit ipſaque ampliùs dividi nequit, aſſerere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum exiſtere, nec inde minus vitium reputandum eſſe, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quàm adhibere Conicas ſectiones in conſtructionem eorum, quæ per regulam & circinum ſolvi poſſunt.

Quibus explicatis, accingit ſe deinceps ad Solidorum Problematum conſtructionem, poſtquam reducta ſunt ad æquationem trium aut quatuor dimenſionum, & in æquatione ſecundus terminus eſt ſublatus. Eâque ita præparatâ, docet, unicâ regulâ ope Parabolæ facilè ac expeditè poſſe conſtrui. In quo ſanè eximium atque ſummi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quòd ſciam) ante vel excogitatum vel oſtenſum. Cæterùm ut hujus regulæ facilitas ac uſus in Solidorum Problematum conſtructionibus eniteat, ipſam deinde, in ſolvendis nobiliſſimis binis illis, ac celebratis, necnon antiquitùs uſque adeò agitatis Problematis; altero ſcilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ breviùs expeditiuſque, quàm ab aliquo hactenus oſtenſum eſt, ſolius Circuli & Parabolæ ope, ſcientificè atque Geometricâ ratione reſolvit. Vbi tandem declarat (quod animadverſione dignum) in Problematibus Solidis omnibus, poſtquam ad æquationem trium quatuorve dimenſionum reducta ſunt, non ſecus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quàm quatenus ipſa adhibenda eſt ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad ſecandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non ſinit, ut terminis ſimplicioribus, quàm per certa quædam Cuborum latera, quorum contentum cognoſcitur, aut per ſubtenſas quorundam arcuum, quorum triplum datum eſt, exprimantur; neque etiam per conſtructionem aliquam, quæ ſimul generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Finitâ verò Solidorum Problematum conſtructione, aggreditur demum Surdeſolidorum conſtructionem, hoc eſt, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimenſionum reducuntur, & ad quarum conſtructionem curva linea adhibenda eſt, quæ uno gradu magis eſt compoſita quàm ſectiones Conicæ.

Quam

Quam ut breviter ac unius regulæ beneficio resolvere doceat, observari vult ea, quæ supra monuimus, nimirum ut æquationes quinque dimensionum attollantur ad sex dimensiones, ipsæque demum, si opus est, transmutentur in alias, quarum radices omnes sint veræ. Qualem autem & quantum in hisce Problematis construendis Geometram se prodiderit Auctor, sanè si id ipsum ex superioribus perspicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac sola artificiosissima atque planè stupenda eorum constructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latêre ipsum non potest. E quibus tandem colligere licet, quòd, postquam omnia Geometriæ Problemata ad unum quasi Problema revocata fuerint, quod est, ut quæratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices, reductisque ad eandem constructionem, quæ ejusdem generis existunt, tradita simul sit via eadem resolvendi. Adeò ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò æquationem 5 aut 6 dimensionum non excedat, reperiri queat, quòd hujus Geometriæ Methodo solvi seu construi non possit.

COMMENTARII
IN
LIBRVM TERTIVM.

VERùm *sæpè accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, puta* 5.] Hoc est, quòd x æquetur -5, vel $x + 5$ sit æquale 0. Quod non ineptè explicatur per eum, qui plus debet quàm est solvendo; vel, cùm id, quod reliquatur, designamus per —. Quò referenda est jucunda atque ingeniosa quæstio, à laudatissimæ memoriæ, Mauritio, Principe Auriaco, atque Confœderati Belgii gubernatore, olim excogitata, quam Amplissimus & Prudentissimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius, A

Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utilissimis, & publicâ luce dignissimis, quæ inter adversaria parentis possidet, pro sua liberalitate mihi communicavit.

A & B, societatem ineuntes, lucrati sunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc est, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex summa debeatur? Respondetur, solvendos esse à B ipsi A, 8 aureos, quamvis lucrum hîc esse sit manifestum.

Aliud exemplum de damno.

Personæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc est, habent — 12 aur. Cùm igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifestum fit, ipsi A ex natura quæstionis deberi — 20 aureos, & ipsi B + 8 aur., hoc est, B habebit 8 aureos; etiamsi jacturam factam esse constet.

Quamvis autem non sit usitatum, ut qui aliquid habet in bonis societatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen casus occurrere possunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amstelodami habitantes habent quisque institorem suum Venetiis, & quia institoribus istis non satis fidunt, sciuntque inter ipsos esse inimicitias, mandant illis per literas, ut sibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos suos pertinentis, quam penes se habebunt eo tempore, quo literas istas accipient; atque si unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia solvatur, & cum residuo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, nisi cum alterius consensu. Ipsi autem mercatores qui certò non sciunt, quid Venetiis eo tempore sint habituri, quo literæ istæ eò pervenient, talem inter se societatem ineunt, ut quisque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, sit accepturus. Quibus positis, si contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia persolutis, tria tantùm aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus si lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod est quadruplum pecuniæ: sequitur ex vi societatis illum qui habuit 5 millia debere 20 millia lucrari,

& alium

& alium 8 millia amittere. Contra verò ſi damnum ſit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempè ſuæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quòd à priori ſumpſerit 2 millia, quæ ſi emendis mercibus impenſa fuiſſent, damnum 8 millium ei attuliſſent.

Porrò radices hæ falſæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc eſt, ut, quæ deſignantur per —, retrocedant, ſicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum poſt videbitur.

Inſervit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falſis cognitis, æquationes facilè diviſionis ope ad pauciores dimenſiones reducuntur, ex iiſque veræ eruuntur. Cujus rei exemplum in ſequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quòd, poſtquam tam falſæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæſtionis cognitionem atque ſolutionem perducamur, & caſus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi conſtabat. Cujus rei exemplum ſequentia itidem ſuppeditabunt.

Vnde liquidò conſtat, quòd Æquationis ſumma, quæ plures radices continet, dividi ſemper poſſit per binomium, quod compoſitum eſt ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem ſit, aut plus valore alicujus ex falſis.] Hoc enim ex Æquationis, quæ plures radices admittit, conſtitutione manifeſtum eſt: cum æquatio quævis producatur ex ſuis radicibus, in ſe invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Vnde fit, ut rurſus per illas dividi poſſit, cum id, quod multiplicatione componitur, rurſus diviſione reſolvatur. B

Sic ſi ponatur $x \infty a$, hoc eſt, $x - a \infty 0$, & rurſus $x \infty b$, hoc eſt, $x - b \infty 0$, & denique $x \infty c$, hoc eſt, $x - c \infty 0$, atque multiplicemus $x - a \infty 0$ per $x - b \infty 0$, & rurſus productum per $x - c \infty 0$: exurget Æquatio
$$\begin{array}{llll} x^3 & - a xx & + ab x & - abc \infty 0. \\ & - b & + bc & \\ & - c & + ac & \end{array}$$

Quæ dividi poteſt per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, & per $x - c \infty 0$; ſed non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rurſus multiplicetur per $x + d \infty 0$, (ſupponendo x deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote d, hoc est, x æquari $-d$) producetur Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - a\,x^3 & + ab\,xx & - abc\,x & - abcd \propto 0. \\ \quad\; - b & + bc & + abd & \\ \quad\; - c & + ac & + bcd & \\ \quad\; + d & - ad & + acd. & \\ & - bd & & \\ & - cd. & & \end{array}$$

Quæ dividi potest per $x - a \propto 0$, per $x - b \propto 0$, per $x - c \propto 0$, & per $x + d \propto 0$, & non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

c *Cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.*] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimensiones habentem, per $x + d \propto 0$, orietur Æquatio

$$\begin{array}{lll} x^3 - a\,xx & + ab\,x & - abc \propto 0. \\ \quad\; - b & + bc & \\ \quad\; - c & + ac & \end{array}$$

In quâ incognita quantitas tres duntaxat dimensiones habet. Quâ rursus divisâ per $x - c \propto 0$, prodibit $xx \begin{smallmatrix} -a \\ -b \end{smallmatrix} x + ab \propto 0$, æquatio duarum dimensionum. Quæ denuo per $x - b \propto 0$ divisa exhibet $x - a \propto 0$, æquationem simplicem.

Vnde perspicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione, plures radices habente, quantitas cognita secundi termini, æqualis sit summæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis summæ productorum ex singulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis summæ productorum ex singulis ternis, atque ita porrò; at verò quantitas cognita ultimi termini sive ipse ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione $x^3 - 9\,xx + 26\,x - 24 \propto 0$ tres sint radices 2, 3, & 4, quæ designantur per a, b, & c: erit earum summa 9, quæ denotatur per $-a-b-c$, æqualis -9, quantitati cognitæ secundi termini $-9\,xx$. Summa autem productorum ex singulis binis 26, quæ denotatur per $+ab+bc+ac$, æqualis $+26$, quantitati cognitæ tertii termini $+26\,x$. Et productum ex ipsis tribus, 24, quod denotatur per $-abc$, æqualis -24, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino.

Eodem modo, si fuerit Æquatio talis: $x^4 - 4\,x^3 - 19\,xx + 106\,x - 120 \propto 0$, cujus radices sunt 2, 3, 4, & -5, atque designantur per $+a$, $+b$, $+c$, & $-d$: disponatur ipsa, ut termi-

ni,

ni, in quibus incognita quantitas x pares dimensiones habet, unam constituant æquationis partem, & reliqui alteram, hoc modo: $x^4 - 19xx - 120 \infty 4x^3 - 106x$. Eodem videlicet quo hæc:

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +abxx & -abcd \;\infty & +ax^3 & +abcx. \\ & +bc & & +b & -abd \\ & +ac & & +c & -bcd \\ & -ad & & -d & -acd \\ & -bd & & & \\ & -cd & & & \end{array}$$

Præstat enim illam hîc ita considerare, ut ea, quæ proponuntur, meliùs explicentur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta simul addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquationis, eorumque signis conveniunt. Et manifestum est, summam harum radicum efficere $+4$, & æqualem esse $+4$, quantitati cognitæ secundi termini $4x^3$. Deinde summam productorum ex singulis binis efficere -19, & æqualem esse -19, quantitati cognitæ tertii termini $19xx$. Postea summam productorum ex singulis ternis efficere -106, & æqualem esse -106, quantitati cognitæ quarti termini $106x$. Denique productum ex ipsis omnibus in se invicem ductis efficere -120, & æqualem esse -120, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino 120. Quæ porrò, quo pacto intelligenda sint de Æquationibus, in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de Cubicarum Æquationum resolutione, quam hisce Commentariis subjunximus, ubi ista fusiùs pertractantur.

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot D *falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur.*] Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex suis radicibus, in se invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70 est ostensum, quod & de cæteris regulis, ubi signorum + & — fit mentio, est observandum. Vt satis declarant priora verba: *Ex quibus etiam cognoscitur.* quæ horum verborum cum prioribus cohærentiam demonstrant: cum aliàs fieri posset, ut in qualibet Æquatione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet di-

dimensiones; neque tot veræ, quot in ea reperiuntur variationes signorum + & —; aut tot falsæ, quot vicibus deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quæ se invicem sequantur.

Vt in æquatione $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, quæ non producitur ex multiplicatione trium radicum, ut fit pag. 69 & 70, sed tantùm ex multiplicatione æquationis impossibilis $xx - 4x + 5 \infty 0$ per $x - 2 \infty 0$. Vnde fit, quòd, licèt in æquatione proposita tres concipiantur veræ radices, tamen una tantùm ex illis sit realis, nimirùm 2, & reliquæ duæ non nisi imaginariæ, quarum valor nullo modo comprehendi potest.

Quæ autem dicta sunt de æquationibus, quæ ex radicibus suis in se invicem ductis procreantur, non tantùm referenda sunt ad æquationes completas, hoc est, in quibus omnes termini extant, ut in exemplo ab Authore allato; sed etiam de incompletis, ubi unus vel plures termini desunt.

Vt si habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, & scire velim, postquam multiplicatione productam supposuerim, quot admittat veras radices, & quot falsas; scribo z^3 8 $ozz + pz - q \infty 0$. Deinde supponendo ozz esse primò signo + adfectum (perinde enim est, sive illum signo + sive signo — adfectum concipias): invenio, propter terminos $+z^3$ & $+ozz$, eodem signo affectos, statuendam esse unam falsam radicem: similiter, propter terminos $+ozz$ & $+pz$, eodem rursus signo adfectos, statuendam esse alteram falsam: ac denique, propter terminos $+px$ & $-q$, diversis signis notatos, ponendam esse unam veram radicem. Postea, supponendo secundum terminum signo — adfici: erit, propter terminos $+z^3$ & $-ozz$, diversis signis notatos, una vera radix: &, propter terminos $-ozz$ & $+pz$, qui diversa possident signa, altera vera: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, etiam diversis signis designatos, tertia radix vera. Adeò ut ex prima suppositione eliciam duas falsas & unam veram, at ex secunda tres veras. Quas sic designo: Verùm, quoniam, supponendo secundum terminum affe-
1. 2. ctum esse signo sive + sive —, certò scimus, nihil in
f v proposita æquatione mutari: ideo, ut hæc regula mul-
f v tiplicationem, quâ æquatio allata producta fuerit,
v —— v nos edoceat: radices illas inter se confero. Vnde, cum deprehendam duas tantùm esse, quæ consentiunt, easque veras; reliquas autem, quomodocunque collatio instituatur, ne-

qua-

quaquam consonare: concludo æquationem propositam explicabilem tantùm esse de unica radice vera, & reliquas duas non nisi imaginarias existere; neque ipsam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam esse, quàm superiorem $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$.

Eodem modo, si habeatur $z^3 \infty * - pz - q$, seu $z^3\ 8\ ozz + pz + q \infty 0$: invenio è priori suppositione tres falsas radices; è posteriori verò duas veras & unam falsam. Quibus inter se col-
1. 2. latis, ut consensus earum appareat, invenio, æquatio-
f v nem propositam unam tantùm admittere radicem,
f v nempe falsam; duasque reliquas esse imaginarias: ac
f——f proinde æquationem non posse procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, si fuerit $z^3 \infty * + pz + q$, seu $z^3\ 8\ ozz - pz - q \infty 0$; quoniam è priori suppositione invenio duas falsas & unam veram
1. 2. radicem; & è posteriori duas itidem falsas & unam
f v veram: cognosco, æquationem propositam, multi-
v f plicatione trium radicum, quarum duæ sunt falsæ &
f——f una vera, produci posse.

Non secus, si habeatur $z^3 \infty * + pz - q$ seu $z^3\ 8\ ozz - pz + q \infty 0$; video in priori suppositione reperiri duas veras radices,
1. 2. cum una falsa, atque in posteriori similiter duas ve-
f v ras, & unam falsam: adeo ut concedendum sit, ipsam
v f procreari posse ex multiplicatione trium radicum, qua-
v——v rum duæ sunt veræ, & tertia falsa. Idem de aliis sentiendum. Vbi notandum, radices veras & falsas alicujus æquationis semper esse reales, seu existentes, hoc est, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis designantes, quarum valor Arithmeticè vel Geometricè exprimi potest; imaginarias verò non item. Vt in æquatione $xx - 4x + 5 \infty 0$. Quamvis enim in ea duas nobis imaginari possimus radices; tamen nulla iis respondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri possunt. Quod sanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propositam esse impossibilem; neque ullam veram nec falsam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipsis respondeat, inveniri posse. Nisi velis, radices ejus esse $x \infty 2 + \sqrt{-1}$, & $x \infty 2 - \sqrt{-1}$, quarum certè

valor

valor nullo modo comprehendi poteſt. Non magis quàm ſi illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p.7, deſcribendo ex centro N, intervallo lineæ N L ∞ 2, (utpote æqualis ſemiſſi ipſius 4, quantitatis cognitæ ſecundi termini) circulum L Q R, faciendoque rectam L M $\infty \sqrt{5}$ (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5); circulus deſcriptus L Q R neutiquam ſecare aut tangere poteſt rectam M R, quæ ipſi L M ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices deſignandas.

Idem de altioribus æquationibus eſt intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E deſcriptus Parabolam F A G ſecare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus C N Q curvam A C N neutiquam vel tangit vel ſecat.

E *Nimirum mutando ſigna omnia + & —, quæ in* 2^{do}, 4^{to}, 6^{to}, *aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis* 1^{mi}, 3^{tii}, 5^{ti}, *ſimiliumque locorum, qui per impares numeros deſignantur, non mutatis.*] Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis deſunt, qui cyphrâ ſunt ſupplendi. Vt ſi fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$ ſeu x^3 8 $0xx + 8x + 24 \infty 0$, mutando ſigna + & — ſecundi & quarti loci in contraria, fit æquatio x^3 8 $0xx + 8x - 24 \infty 0$, ſeu $x^3 \infty * - 8x + 24$, cujus radix eſt $x \infty 2$, unde radix prioris fit $x \infty - 2$.

Eodem modo ſi ſit $x^3 \infty * 1201x + 14400$, ſeu x^3 8 $0xx - 1201x - 14400 \infty 0$, mutatis ſignis 2^{di} & 4^{ti} loci, fiet æquatio x^3 8 $0xx - 1201x + 14400 \infty 0$, ſeu $x^3 \infty * 1201x - 14400$, cujus radices ſunt $x \infty 25$, & $x \infty \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, nec non $x \infty -\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Vnde radices prioris erunt $x \infty -25$, & $x \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, nec non $x \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Et ſic de aliis.

F *Vnde ſi ſcribamus ſummam præcedentem, ſubſtituendo ubique y pro x, invenietur*

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + & 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - & 108 \\
 & - 19yy & + 114y & - & 171 \\
 & & - 106y & + & 318 \\
 & & & - & 120 \\
\hline
y^4 - 8y^3 & - 1yy & + 8y & & *
\end{array}$$

$\infty 0$, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$. *Vbi vera radix, quæ erat 5, jam eſt 8, propter ternariam* *narium ipsi additum.*] Notandum hîc est, quòd, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propositæ $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$, in æquationem incidimus, tres tantùm dimensiones habentem, cujus ideo non nisi tres sunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propositæ est aucta, sit æqualis alicui ex falsis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Autore p. 72 paulò post explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, incidimus in æquationem $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y * \propto 0$, vel $y^3 + 8yy - 1y - 8 \propto 0$, innotescit, unam ex veris radicibus esse 3. Et sic de aliis.

Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.] Vel etiam hoc modo: *Nimirum, diminuendo quantitatem cognitam secundi termini divisam per numerum dimensionum primi, unaquâque verarum radicum, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.* Vt ad tollendum secundum terminum Æquationis $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$, divido $2a$ per 4, & provenit $\frac{1}{2}a$: unde faciendo $\frac{1}{2}a - x \propto z$, hoc est, $\frac{1}{2}a - z \propto x$, scribendum est G

$$\begin{array}{llr}
 & +\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3z + \frac{3}{2}aazz - 2az^3 + z^4 & \text{pro } x^4 \\
\& & -\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3z - 3aazz + 2az^3 & \text{pro } -2ax^3 \\
\& & +\frac{1}{2}a^4 - 2a^3z + 2aazz & \text{pro } +2aaxx \\
\& & -\frac{1}{4}aacc + accz - cczz & \text{pro } -ccxx \\
\& & -a^4 + 2a^3z & \text{pro } -2a^3x \\
\text{tum} & +a^4 & \text{, \& exsurget} \\
\hline
 & \begin{smallmatrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix} \begin{smallmatrix}+a^3z\\+acc\end{smallmatrix} \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aazz\\-cc\end{smallmatrix} \; * \; + z^4 \propto 0, & \text{æquatio,}
\end{array}$$

secundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantùm in quarto termino, qui hîc per + denotatur, & illic per —. Vnde fit, ut per ea, quæ pag. 70 sunt ostensa, æquationes hæ in eo tantùm inter se differant, quòd falsæ illius æquales sint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua sit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Vbi porrò operæ pretium est considerare, quòd, tollendo secundum terminum Æquationis $x^4 + 2ax^3 \genfrac{}{}{0pt}{}{+2aa}{-cc} xx - 2accx - aacc \infty 0$, (quæ quidem invenitur, cùm pro linea C E in quæstione pagin. 83 ponitur x) in eandem incidamus Æquationem, quam invenimus tollendo secundum terminum præcedentis $x^4 - 2ax^3 \genfrac{}{}{0pt}{}{+2aa}{-cc} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ ab illa omnino est diversa, resultans ex investigatione lineæ D F.

Deinde animadversione dignum est, quòd hâc sublatione secundi termini Æquationes pagin. 6 & 7 in faciliores sic transmutentur, ut earum radices statim se prodant, nec aliâ regulâ ad eas inveniendas opùs esse videatur. Etenim, tollendo secundum terminum æquationis $zz \infty az + bb$ seu $zz - az - bb \infty 0$, si dividatur a per 2, fit $\frac{1}{2}a$, ac ponatur

$z - \frac{1}{2}a \infty x$, sive $z \infty x + \frac{1}{2}a$,

atque pro zz reponatur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$,
nec non pro $-az$ $\quad -ax - \frac{1}{2}aa$,
& addatur $\quad -bb$:

resultabit æquatio hæc $xx * - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde sequitur radicem prioris æquationis $zz \infty az + bb$ fore $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quæ radices, cum vera tum falsa etiam inveniuntur tollendo secundum terminum, hoc pacto: ponatur

$\frac{1}{2}a - z \infty x$, seu $z \infty \frac{1}{2}a - x$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax + xx \\ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax \\ \hline \end{array}$$

& scribatur $\frac{1}{4}aa - ax + xx$ pro zz,
atque $-\frac{1}{2}aa + ax$ pro $-az$,
tum $-bb$

Et emerget Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$. eadem quippe, quæ invenitur, ponendo $z \infty \frac{1}{2}a + x$ (quod similiter in reliquis sequentibus quadratis Æquationibus locum habet), & fit, ut supra, $x \infty \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ac proinde $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem

Eodem modo, quia auferendo ſecundum terminum Æquationis $yy \infty - ay + bb$, ſeu $yy + ay - bb \infty 0$, ponitur $y + \frac{1}{2}a \infty z$, ſive $y \infty z - \frac{1}{2}a$,

atque pro yy ſcribitur $zz - az + \frac{1}{4}aa$,
& pro $-ay$ $\quad + az - \frac{1}{2}aa$,
atque deinde $\quad - bb$:

prodibit æquatio $zz * - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix eſt $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: hinc radix prioris erit $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$, vel $y \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ quidem falſa & vera radix invenitur quoque tollendo ſecundum terminum Æquationis hâc ratione: videlicet, ſupponendo y deſignare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major ſit quàm $\frac{1}{2}a$, Exempli causâ, $y \infty - \frac{1}{2}a - z$,

& ſubſtituendo $\frac{1}{4}aa + az + zz$ loco yy,
& $\quad - \frac{1}{2}aa - az$ loco $+ ay$,
tum $\quad - bb$:

unde fit Æquatio $- \frac{1}{4}aa - bb * + zz \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix eſt $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; atque adeò $y \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ut ante. Quem modum, tollendi ſecundum terminum, tanquam diverſum ab eo, qui ab Authore pag. 73 eſt oſtenſus, notare potes, cùm primus & ſecundus terminus eodem ſigno + vel — ſunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum ſecundum terminum Æquationis $zz \infty az - bb$, vel $zz - az + bb \infty 0$, ponendum ſit

$z - \frac{1}{2}a \infty x$, vel $z \infty x + \frac{1}{2}a$,
& ſcribendum $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ pro zz,
& $\quad - ax - \frac{1}{2}aa$ pro $- az$,
& addendum $\quad + bb$:

proveniet Æquatio $xx * - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix eſt $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit radix prioris $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quæ radix utraque vera eſt, & alio item modo inveniri poteſt, ſi nimirum ponatur $\frac{1}{2}a - z \infty x$ ſive $z \infty \frac{1}{2}a - x$, & ſubſtituatur

$\frac{1}{4}aa - ax + xx$ in locum zz,
& $-\frac{1}{2}aa + ax$ in locum $-az$,
& addatur $+bb$:

exsurget æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit prioris radix $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut supra.

Denique, quoniam tollendo secundum terminum Æquationis $zz \infty -az - bb$, vel $zz + az + bb \infty 0$, ponendum est $z + \frac{1}{2}a \infty x$ sive $z \infty x - \frac{1}{2}a$, & subrogandum
$xx - ax + \frac{1}{4}aa$ in locum zz,
& $+ax - \frac{1}{2}aa$ in locum $+az$,
atque addendum $+bb$:

producetur æquatio $xx * -\frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Vnde radix prioris fit $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ utraque hoc casu est falsa, & hâc etiam viâ inveniri potest, nimirum supponendo z designare quoque defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, utpote ponendo $z \infty -\frac{1}{2}a - y$, & substituendo
$+\frac{1}{4}aa + ay + yy$ loco zz,
& $-\frac{1}{2}aa - ay$ loco $+az$,
tum addendo $+bb$,

unde provenit æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + yy \infty 0$, vel $yy \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$; atque adeò $z \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut ante.

Eâdem ratione tolletur secundus terminus reliquarum Æquationum quadratarum pag. 6 & 7, quæ similiter hâc operatione eò reducentur, ut ad ipsarum radices inveniendas hæc regula sufficere videatur.

Intellige Æquationes, in quibus z^3 æquatur duo-

Verùm enimverò animadvertendum est, quòd, sicut Æquatio quælibet Quadrata composita sublatione secundi termini ad aliam reducitur, in qua duo tantùm sunt termini, sic nulla Cubica esse possit, pluribus terminis constans, (ex quibus 13 casus confici posci possunt) quæ hâc ratione non reducatur semper ad aliquam trium sequentium formularum:

$$z^3 \propto * - pz + q$$
$$z^3 \propto * + pz + q$$
$$z^3 \propto * + pz - q.$$

Idem de Quadrato-quadratis Æquationibus, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, quarumque 42 diversi modi extare possunt, est intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 expositam ad Cubicas reduci queant, quarum radices duas habent dimensiones & termini omnes sunt completi, sic nulla itidem earum esse potest, quæ hâc sublatione non reducatur ad aliquam trium prædictarum formularum.

bus aut tribus terminis, per +, aut per + & −, simul junctis.

Sic postquam Æquatio Quadrato-quadrata 1 ℨℨ + 8 ℭ − 26 ℨ − 68 ℛ − 84 $\propto$ 0 per dictam regulam reducta est ad Cubicam $x^6 - 100\,x^4 + 2900\,xx - 10000 \propto 0$, in qua omnes termini sunt completi, tollitur secundus terminus, hoc modo: Divisis 100 per 3, fit $33\frac{1}{3}$. Vnde ponendo $xx - 33\frac{1}{3} \propto yy$, sive $xx \propto yy + 33\frac{1}{3}$, scribendum est

$$\begin{array}{llllll} & y^6 + 100\,y^4 + 3333\frac{1}{3}\,yy + & 37037\frac{1}{27} & \text{pro } x^6, \\ \& & - 100\,y^4 - 6666\frac{2}{3}\,yy - & 111111\frac{1}{9} & \text{pro } - 100\,x^4, \\ \& & + 2900\,yy + & 96666\frac{2}{3} & \text{pro } 2900\,xx, \\ \text{tum} & & - 10000: & \end{array}$$

fietque æquatio $y^6 * - 433\frac{1}{3}\,yy + 12592\frac{16}{27} \propto 0$, vel $y^6 \propto * + 433\frac{1}{3}\,yy - 12592\frac{16}{27}$, tertiæ formulæ. Vbi notandum, dimensionum numerum primi termini x^6 tantùm pro 3 haberi, cum non sit x^5, x^3, & x in tota summa. Id quod similiter in sublatione secundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices duas dimensiones habent, est notandum. Quòd si verò ponatur $33\frac{1}{3} - xx \propto yy$, hoc est, $xx \propto 33\frac{1}{3} - yy$, prodibit Æquatio $y^6 \propto * + 433\frac{1}{3}\,yy + 12592\frac{16}{27}$, secundæ formulæ, à præcedenti tantùm differens termino quarto, qui ibi signo + adficitur, hîc verò signo −. Vnde fit, quòd hujus æquationis falsæ radices æquales sint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut radices omnes veræ evadant, sciendum est, nos uti posse exemplo ab Authore proposito pag. 74: nimirum, $x^6 + n\,x^5 - 6\,nn\,x^4 + 36\,n^3\,x^3 - 216\,n^4\,xx + 1296\,n^5\,x - 7776\,n^6 \propto 0$, tanquam regulâ seu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ H

 sunt,

ſunt, inveniendam, ſicut annotavit Vir Nobiliſſimus D. Gothofridus ab Haeſtrecht, Mathematum cultor eximius, hujusque ſcientiæ peritiſſimus. Si enim, exempli causâ, propoſita ſit Æquatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \infty 0$, oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus ſigna + & — diverſa ſunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe b, c, & f, conſiderare tantùm omnes reliquos, ut a, d, & e. Vtpote $+ax^5$, quia in canone habetur $+nx^5$; & $-dxx$, quia in canone $-216n^4xx$; nec non $+ex$, quia in canone $+1296n^5x$. Qui quidem ſeorſim conſiderandi ſunt, & quærenda quantitas n, quæ non ſit minor quàm a, quia in canone habetur n, ubi in data Æquatione eſt a: & cujus quadrato-quadratum non ſit minus quàm $\frac{1}{216}d$, quia in canone habetur $216n^4$, ubi in data Æquatione eſt d: nec non cujus ſurſolidum non ſit minus quàm $\frac{1}{1296}e$, quia in canone habetur $1296n^5$, ubi in data Æquatione eſt e. Quantitate n ſic inventâ, manifeſtè ex ipſa operatione demonſtratur, ſi ponatur $y - 6n \infty x$, inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falſa eſſe poteſt, ut in exemplo Authoris. Quod Authori tam facilè viſum fuit, ut id explicare neglexerit.

I Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur ſequens exemplum. Proponatur æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, cujus loco alia invenienda ſit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Suppoſito igitur $zz \infty \frac{3}{10}yy$, ſcribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per numeros proportionales fietque Æquatio

$$y^6 \; 8 \; 0y^4 - 433\tfrac{1}{3}yy - 12592\tfrac{16}{27} \infty 0.$$
$$1. \quad \tfrac{3}{10}. \quad \tfrac{9}{100}. \quad \tfrac{27}{1000}.$$
$$z^6 \; 8 \; 0z^4 - 39\,zz - 340 \infty 0,$$

vel $z^6 \infty * + 39zz + 340$, cujus radix zz ad præcedentis radicem yy eſt, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inſervire etiam poteſt inveniendis radicibus proximè veris, cùm ipſæ ſunt irrationales. Vt, ad inveniendam veram radicem æquationis $y^3 \infty 200y + 400$ (quæ irrationalis eſt) quàm proximè, ita ut differentia milleſimâ parte unitatis minor ſit: ſuppoſito $z \infty 1000y$,

ſcribo $y^3 \; 8 \; 0yy - 200 \quad y - 400 \quad \infty 0$,

& multiplico per $1. \quad 1000. \quad 1000000. \quad 1000000000.$

& exſurget æquatio $z^3 \; 8 \; 0zz - 200000000z - 400000000000 \infty 0$, vel $z^3 * - 200000000z \infty 400000000000$, cujus radix z præcedentis radicis y eſt millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex

ex hac æquatione, methodo à Viëta tradita in tractatu de Numeroſa Poteſtatum reſolutione, invenietur z major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus diviſis per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicavimus per 1000), fiet y major quàm $15\frac{52}{1000}$, & minor quàm $15\frac{53}{1000}$. adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram milleſimâ parte unitatis minor ſit. Quod erat inveniendum. Porrò quoniam æquatio propoſita $y^3 \infty 200y + 400$ duas adhuc admittit falſas radices, quæ ſimiliter ſunt irrationales, quia ipſa per $y +$ vel $-$ nullo numero ultimum terminum dividente dividi poteſt, poſſunt eæ eâdem ratione inveniri, mutato tantùm ſigno $+$ in $-$. Quarum equidem major excedet $13\frac{10}{1000}$, & minor deficiet à $2\frac{42}{1000}$, componentes ſimul veram inventam $15\frac{52}{1000}$. Cæterùm, ſicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipſas beneficio diviſionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum reſolutio non niſi operoſiorem induſtriam requirat, in faciliores tranſmutare. Vt ſi fuerit æquatio $x^3 \infty * + 203125x + 234375OO$, & ejus loco alia deſideretur, quæ minoribus numeris exprimatur, dividenda eſt ipſa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125,

$$\text{hoc pacto: } \frac{x^3 \quad 8\, 0xx \quad -203125x \quad -23437500 \infty 0,}{1. \qquad 125. \qquad 15625. \qquad 1953125.}$$

& prodibit æquatio $y^3\ 8\ 0yy - 13y - 12 \infty 0$, vel $y^3 \infty * 13y + 12$, cujus radices ſunt $+4$, -3, & -1, quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 diviſimus) exſurgent radices prioris $+500$, -375, & -125.

Vbi porrò notandum, quòd, poſtquam æquatio quælibet à fractionibus aut ſurdis numeris eſt liberata, atque in faciliorem tranſmutata, fieri non poſſit, ut ulla ex hujus radicibus, ſive falſis, ſive veris, ſit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facilè ex 7mo Elementorum libro demonſtrari poteſt. Adeò ut, ſi illa deinde ſicut pag. 77 eſt oſtenſum dividi nequeat, concedendum ſit, nullam ex radicibus ſive falſis ſive veris numero explicari poſſe, ſed omnes eſſe irrationales.

Quibus ita conſtitutis, ut pateat quo pacto hæ radices ſurdis numeris ſint exprimendæ, viſum fuit ea, quæ ab ingenioſiſſimo Huddenio noſtro circa hæc excogitata ſunt, in medium adducere.

Hinc ut inveſtigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis

tionis $zz - az - bb \infty 0$, quæ per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividi nequit, per surdas quantitates exprimi possi t: suppono primùm z esse æqualis simplici alicui quantitati surdæ, utputa, $\sqrt{x}$, & fit $z - \sqrt{x} \infty 0$. Quam, ut ad æquationem quadratam ejusdem formæ perducam, in qua secundus terminus est rationalis, multiplicare debeo per $z + y + \sqrt{x} \infty 0$. Sed quoniam sic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis est, concludo radices æquationis propositæ hoc modo non posse denotari sive exprimi. Idem fit supponendo $z \infty - \sqrt{x}$.

Quocirca statuendo nunc $z \infty y + \sqrt{x}$ seu $z - y - \sqrt{x} \infty 0$, oportet ipsam, ut ad æquationem quadratam ascendat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicare per $z - y + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $zz - 2yz + \begin{matrix} yy \\ -x \end{matrix} \infty 0$, æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua item tertius terminus rationalis est. Hinc comparando secundum terminum unius cum secundo alterius invenio $-2y \infty -a$, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $yy - x \infty -bb$. In qua si in locum yy subrogetur $\frac{1}{4}aa$, habebo $\frac{1}{4}aa + bb \infty x$. Ac proinde cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $z \infty y + \sqrt{x}$, & $z \infty y - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem modo si investigare velimus, quo pacto radices æquationis indivisibilis $yy + ay - bb \infty 0$ per quantitates surdas exprimi queant, statuatur (neglectâ suppositione ipsius $y \infty 8 \sqrt{x}$) $y \infty -z + \sqrt{x}$ seu $y + z \sqrt{x} \infty 0$, eaque, ut ad æquationem quadratam assurgat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicetur per $y + z + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $yy + 2zy + \begin{matrix} zz \\ -x \end{matrix} \infty 0$. æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus est rationalis. Vnde comparando secundum terminum hujus cum secundo illius invenitur $z \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $x \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Atque adeò, cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $y \infty -z + \sqrt{x}$, & $y \infty -z - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $y \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Similter, investigando num radices æquationis $zz - az + bb \infty 0$, quam per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividere non licet, per surdas quan-

quantitates exprimi queant, invenitur z exprimi posse per $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & per $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perspicuum fit, hac ratione inveniri quoque simplicissimos surdos numeros, quibus radices hasce exprimere licet, atque ideo hinc etiam constare, quæ circa hæc à D^no^ des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quòd natura harum radicum non permittat, ut simplicioribus terminis exprimantur.

Vbi tandem etiam est advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componuntur pauciores numero existunt, tantò etiam quæsitum faciliùs obtineri possit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere secundum terminum tollere, ita ut deinde, si res bene inspiciatur, perpauci casus superfuturi sint.

Supponendum est $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, *deinde verò scribendum* K
$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0$.] Etenim positâ $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ sive $y \propto \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; erit $x \propto \frac{by}{a\sqrt{3}}$, & $xx \propto \frac{bbyy}{3aa}$, & $x^3 \propto \frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}}$. Quæ si in æquatione substituantur, habebitur $\frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}} * - \frac{b^3y}{a\sqrt{3}} + c^3 \propto 0$; hoc est, communi multiplicatore $3a^3\sqrt{3}$, fiet $b^3y^3 * - 3aab^3y + 3a^3c^3\sqrt{3} \propto 0$: ac proinde communi divisore b^3, erit $y^3 * - 3aay - \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0$. Quod erat demonstrandum.

Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit ra- L
dix quæsita; aut Æquatio, per ipsam divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat.] Sic æquatio superior pag. 76: $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$ divisa per binomium $x - 2 \propto 0$ dat æquationem impossibilem $xx - 4x + 5 \propto 0$, & fit radix quæsita 2. Sic æquatio $x^3 \propto 1201x + 14400$ seu $x^3\ 8\ 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$ divisa per x *Vide hîc*
$+ 25 \propto 0$ dat æquationem $xx - 25x - 576 \propto 0$ seu $xx \propto 25x$ *post in*
$+ 576$, quæ juxta præcepta pag. 6 & 7 resoluta ostendit radicem *Appendice de Cu-*
quæsitam esse $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. *bicarum*

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, *æquatio-*
cùm Problema est Simplex. *num resolutione.*

Reductio Æquationum Quadratarum, cùm Problema est Simplex.

Vt si, verbi gratiâ, habeatur æquatio $xx \infty ax + \begin{array}{l} ab \\ +bb \end{array}$ seu $xx - ax - \begin{array}{l} ab \\ -bb \end{array} \infty\, 0$, poterit ea, inventis ipsius $ab + bb$ ultimi termini divisoribus 1, b, $a + b$, & $ab + bb$, dividi per binomium $x + b \infty 0$, oriturque $x - a - b \infty 0$. Id quod ostendit, radicem quæsitam esse $\infty\, a + b$, & Problema, quod ad hanc æquationem reducitur, esse Simplex, hoc est, construi posse ducendo tantùm rectas lineas.

Eodem modo, si fuerit $xx \infty \frac{-aax + aa}{a+1}$ seu $xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \infty\, 0$, quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatâ primùm

$$xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \infty\, 0$$

per quantitates proportionales $1.\quad a+1.\quad aa + 2a + 1,$
fit æquatio $yy + aay - a^3 - aa \infty\, 0$,
atque hâc, ut ante, divisâ per binomium $y + aa + a \infty\, 0$, oritur $y - a \infty\, 0$: liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter simplex existere, & y esse $\infty\, a$, adeoque $x \infty \frac{a}{a+1}$.

Haud secus Problema simplex erit, si obtineatur æquatio $xx \infty \frac{aax - aac}{a-c}$ seu $xx - \frac{aax}{a-c} + \frac{aac}{a-c} \infty\, 0$. Multiplicata enim eâ per proportionales 1, $a - c$, & $aa - 2ac + cc$, fit $yy - aay + a^3c - aacc \infty\, 0$. Quæ dividi potest per binomium $y - ac \infty\, 0$, oriturque $y - aa + ac \infty\, 0$. Vnde y invenitur $\infty\, ac$, aut etiam $y \infty\, aa - ac$: ac proinde $x \infty \frac{ac}{a-c}$, aut etiam $x \infty\, a$. Quorum duorum valorum ipsius x non nisi unus tantùm quæsito Problematis respondet, licèt uterque æquationi propositæ satisfaciat. Quod ipsum ex Problemate non adeò difficile semper est dignoscere.

Cæterùm Problema aliquod non præter simplex existere, vel hinc quoque inferre licet, cùm, operando juxta regulas pag. 6 & 7, quantitas, quæ per $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}$ aut per $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$ exprimitur, omnino per extractionem radicis inveniri potest; ita ut ipsa sit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit. Vbi porrò observare licèt, quòd, in primo & secundo casu earundem æquationum, postquam ultimus terminus per bb fuerit designatus, aut is inventione mediæ proportionalis (sicut pag. 2 docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipsarum

rum constructionem faciendum relinquatur, quod non per solarum rectarum linearum ductum absolvatur. Vide Exercitationum nostrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum constructione ex professo agitur.

Vbi demum observatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per solas rectas lineas construi posse, in quibus a & $b\,b$ non nisi numeros designant sive integros sive fractos; aut etiam eas, in quibus hæ quantitates non per diversas literas denotatæ reperiuntur, etiamsi ipsis integri aut fracti numeri præfigantur.

Vbi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantùm pro M
tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota summa.] Potest enim pro æquatione

$$y^6 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{smallmatrix} \infty\ 0$$ substitui æquatio hæc:

$$z^3 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{smallmatrix} \infty\ 0.$$ nimirum, supponendo $z \infty yy$, atque subrogando zz in locum y^4, & z^3 in locum y^6; ita ut, postquam innotuerit valor radicis z, opùs tantùm sit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radicis y.

Nec aliter operandum, si habeatur $x^4 \infty -axx + bb$. Possumus enim ipsius x^4 dimensiones solummodo pro duabus dimensionibus habere, & scribere $yy \infty -ay + bb$, supponendo $y \infty xx$, & $yy \infty x^4$, eritque radix ejus $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: adeoque radix $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. *Vide pag. 6.*

Quin & si fuerit $z^6 \infty * 39zz + 340$, supponendo $x \infty zz$ potest pro ea reponi $x^3 \infty * 39x + 340$, atque adeò ipsius z^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus haberi.

Eodem modo, si fuerit $x^8 \infty * + 10x^4 + 16xx - 9$, atque z supponatur ∞xx: poterit ejus loco scribi $z^4 \infty * + 10zz + 16z - 9$, ita ut ipsius x^8 dimensiones tantùm pro 4^{or} dimensionibus habeantur. Et sic de aliis.

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema, quod ab ea dependet, esse solidum.] N

 Sic

Sic quoniam æquatio $x^3 \infty 300x + 1200$, seu $x^3 \ast 0xx - 300x - 1200 \infty 0$, dividi nequit per x plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 absque fractione dividente, quin aliquid post divisionem supersit, certum est, Problema, quod ad illam reducitur, esse Solidum. Quo autem pacto inveniantur numeri omnes, datum numerum absque fractione dividentes, manifestum fiet, ubi ex Stifelio exposuero rationem, inveniendi omnes cujusque numeri partes aliquotas, quod unum idemque est.

Etenim, si numerus par fuerit, dividendus est per 2, & divisor reservandus; tum rursus, si quotiens est par, dividatur similiter per 2, & divisor reservetur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quòd si verò numerus est impar, vel divisione jam factâ ad numerum imparem sit perventum, dividi debet per 3, si fieri potest, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 ampliùs dividi non possit. Tum eadem divisio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliumve numerum primum, sive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentasse, donec ad dati numeri radicem quadratam, sive veram, sive veræ proximam, perventum fuerit: cum ulteriores divisiones supervacaneæ sint habendæ. Iam verò quomodo ex reservatis numeris partes aliquotæ, seu divisores omnes dati cujusque numeri, inveniantur, sequentia exempla manifestabunt. Etenim ad inveniendos divisores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reservo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reservo. Postea divisis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reservo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reservo. Vnde numeri reservati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus divisores omnes seu partes aliquotæ sic inveniuntur.

1

2 . 3

6

7. 14. 21. 42.

11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. 462.

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fient 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fientque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt divisores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. & 462.

& 462. Vbi notandum, ex ductu ultimi numeri reservati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeò ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opùs non sit hosce duos numeros in se invicem ducere, si tantùm de illis quæstio fuerit, & non de divisoribus. Eodem modo, numerus 2310 divisores habebit sequentes.

~~1~~	~~21~~	~~3~~			
~~2310~~	~~1155~~	~~385~~	~~77~~	~~11~~	~~1~~
2	3	5	7	11	

1

2 . 3

6

5. 10. 15. 30.

7. 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210

11. 22. 33. 66. 55. 110. 165. 330. 77. 154. 231. 462. 385. 770. 1155. 2310.

Similiter divisores numeri 1200 erunt

		~~1~~	~~1~~	~~1~~			
~~1200~~	~~600~~	~~300~~	~~150~~	~~75~~	~~25~~	~~5~~	1
2	2	2	2	3	5	5	

1

2 . ~~2~~.

4

~~2~~ . 8

~~2~~ . 16

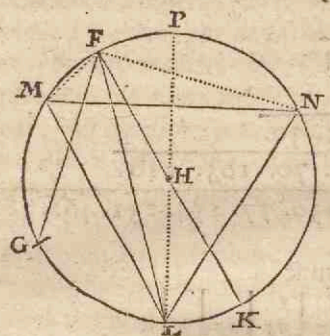
3. 6. 12. 24. 48.

5. 10. 20. 40. 80. 15. 30. 60. 120. 240.

~~5~~. 25. 50. 100. 200. 400. 75. 150. 300. 600. 1200.

Verùm enimverò cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Æquationis propositæ summa dividenda est, ad investigandum, utrum Problema, quod ad æquationem illam est perductum, sit Solidum, an verò Planum, & si Planum sit, ipsa ad ejusdem æquationis radices inveniendas valde videatur prolixa; præsertim cùm ultimus terminus plures admittit divisores: sciendum est, quosdam ex iis seligi posse, è quibus si componatur binomium, per quod æquationis divisio non succedat, certi esse possimus Problema ab ea dependens Solidum existere.

Sic cum in superiori æquatione $x^3 \propto * 300x + 1200$, vel $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x - 1200 \propto 0$, triginta sint numeri, ultimum terminum 1200 absque fractione dividentes, atque hinc divisio vel sexagies esset tentanda, antequam certò constaret, Problema esse Solidum; sciendum est non opùs esse nisi tres vel quatuor ex iis considerare, ut 4, 15, & 20, atque reliquos insuper habere. Quemadmodum ex sequentibus fiet manifestum.



Etenim si numerus 300 vocetur p, & numerus 1200 vocetur q, & juxta id, quod docetur pag. 93, circulus describatur F G N, cujus radius F H sit 10, utpote $\propto \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in eo recta inscribatur F G $\propto$ 12, quippe $\propto \frac{3q}{p}$, ac deinde singuli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes dividantur per rectas F M, F N, & F L: designabunt duæ rectæ F M & F N quantitatem utriusque falsæ radicis, & F L quantitatem veræ. Adeò ut, ad eligendos divisores, qui ad æquationem dividendam utiles censeri possunt, opùs tantùm sit considerare eos, qui inventis lineis F M, F N, & F L quàm proximè accedunt, nullâ reliquorum habitâ ratione: adeoque divisionem tentandam tantùm esse per $x + 4 \propto 0$, vel per $x + 15 \propto 0$, vel per $x - 20 \propto 0$. Ac proinde cum tentatâ divisione aliquid supersit: sequitur, Problema, quod ad æquationem propositam perducitur, esse Solidum, nec ullam radicem sive veram sive falsam, quæ numero exprimi queat, admittere; sed omnes esse irrationales, earumque valorem esse exprimendam per quantitatem linearum dictarum F M, F N, & F L.

Eodem modo si habeatur $x^3 \propto * + 300x - 1200$, vel $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x + 1200 \propto 0$: descripto rursus circulo F G N, cujus radius F H sit 10 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo inscriptâ rectâ F G $\propto$ 12 seu $\frac{3q}{p}$, si secentur singuli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes, designabunt F M, F N utramque veram radicem, & F L falsam. Adeò ut, cum divisio æquationis $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x$

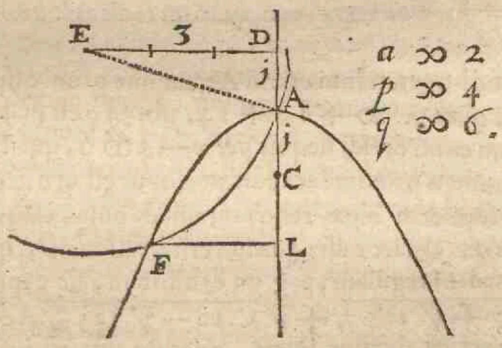
$+ 1200$

$+ 1200 \propto 0$ tentata per $x - 4 \propto 0$, per $x - 15 \propto 0$, & per $x + 20 \propto 0$ non ſuccedat, concedendum ſit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falſam, quæ numero exprimi queat; ſed omnes eſſe irrationales: adeoque earum valorem non aliter quàm per quantitatem linearum FM, FN, & FL eſſe exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum eſſe.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generaliùs efficere.

Vt ſi habeatur Æquatio primæ formulæ $x^3 \propto * - 8x + 24$, cujus inveſtigandæ ſint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit diviſores, qui ſunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè diviſio tentanda eſſet antequam radicem propoſitæ Æquationis ſic invenire poſſemus. Verùm ſufficit ſemel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hiſce diviſoribus ſeligi poſſint, per quos ſi diviſio non ſuccedat, certi reddamur radicem eſſe irrationalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus eſſe formæ $x^3 \propto * - z, 4x + z, 6$, eadem nempe quæ $x^3 \propto * - \acute{a}px + \acute{a}\acute{a}q$; in qua a pro unitate aſſumpta valet 2, p 4, & q 6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 reſolutâ, invenitur radicem quæſi-



tam deſignari per lineam FL. Poſtea exploretur quiſnam ex inventis diviſoribus huic lineæ proximè accedat, ut ſeligantur per quos diviſio ſit tentanda, neglectis reliquis. Poſtquam autem compertum fuerit nullum ex ipſis propiùs huic lineæ congruere

quàm

quàm divisorem 2, & quidem Æquationem propositam $x^3 \; 8 \; 0 \; xx + 8x - 24 \infty 0$ dividi posse per $x - 2 \infty 0$, & prodire Æquationem impossibilem $xx + 2x + 12 \infty 0$, quæ per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, ulteriùs dividi nequit: sequitur radicem quæsitam fore 2, neque ullam aliam extare, cum reliquæ duæ in hac formula semper sint imaginariæ.

Nec aliter fit, si fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$, quæ est Æquatio unam habens radicem falsam, nempe 2, & duas imaginarias: cum producatur ex multiplicatione Æquationis impossibilis $xx - 2x + 12 \infty 0$ per $x + 2 \infty 0$. Vbi observandum, quòd, licèt D. des Cartes ejusmodi Æquationis formulam inter Cubicas non reposuerit, sed tantùm eas, in quibus bini posteriores termini per $+$ aut per $+$ & $-$ juncti sunt, ipsa tamen nihilominus eodem modo, quo præcedens, resolvi, atque radix ejus exprimi possit. quod & de æquatione quadrata $zz \infty - az - bb \infty 0$ supra monuimus. Hinc si fuerit $x^3 \infty - 3x - 10$, seu $x^3 \; 8 \; 0 \; xx + 3x + 10 \infty 0$, quæ per $x +$ aliquo numero ultimum terminum dividente dividi nequit: sequitur radicem ejus esse irrationalem, eamque juxta primam Cardani regulam, pagin. 93 descriptam, sic exprimi $x \infty - \sqrt{C.\sqrt{26} + 5} + \sqrt{C.\sqrt{26} - 5}$. nempe mutatis tantùm signis $+$ & $-$ utriusque partis. Idem intellige de Æquationibus $x^3 \infty - 8$, aut $x^3 \infty - 10$, quarum radices sunt $x \infty - 2$, & $x \infty - \sqrt{C.\,10}$.

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi casus secundæ formulæ, puta $x^3 \infty + 8x + 24$, ubi $\frac{1}{4}qq$ est majus quàm $\frac{1}{27}p^3$. Quoniam enim dividi nequit per $x - 4 \infty 0$, qui divisor ad quantitatem radicis proximè accedit, non opùs est ut ulteriùs progrediamur, siquidem binæ reliquæ radices hujus casus semper sunt imaginariæ. Quare radix quæsita crit irrationalis, quæ juxta secundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, sic exprimetur: $x \infty \sqrt{C.\,12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\,12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Adeò ut dicatur composita ex duabus lineis, quarum una est prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}$, & altera prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}$. E quibus perspicua fiunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me potuisse quidem accipere a pro 1, ita ut p futura fuisset 8, & q 24:

quo-

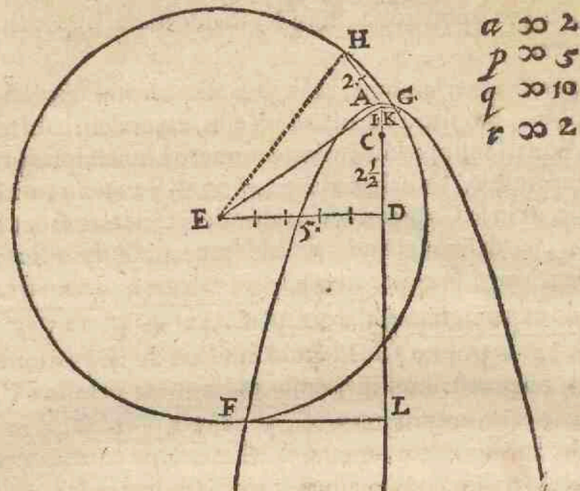
quoniam hîc liberum eſt aſſumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verùm quia praxis aliquo modo accommodatior viſa eſt, ſi pro a ponatur 2, non 1, malui illam hypotheſin huic poſthabere.

Vbi porrò advertendum, radicibus Æquationum ita implicatis exiſtentibus, ſimplicius cenſendum eſſe, earundem habitudinem ex ſola Æquationum conſtitutione innuere, quàm ipſas prædicto modo exprimere. Vt in hac ultima $x^3 \propto + 8x + 24$, dicendo x talem eſſe, ut in ſe Cubicè ducta tantundem faciat ac ſi per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod fit addatur 24. Quippe ſic ejus habitudinem longè ſimpliciùs concipere valemus, quàm ſi eandem hoc modo exprimeremus: $x \propto \sqrt{C.\, 12 + \sqrt{125\tfrac{1}{27}}} + \sqrt{C.\, 12 - \sqrt{125\tfrac{1}{27}}}$. Id quod ſimiliter de Æquatione $x^3 \propto - 3x + 10$ poteſt intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam ſic exprimitur $x \propto \sqrt{C.\, \sqrt{26} + 5} - \sqrt{C.\, \sqrt{26} - 5}$: cum illius habitudinem, quam ex Æquationis conſtitutione induit, multò faciliùs concipiamus, prout eandem in ſe Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipſius triplo. Et ſic de aliis.

Porrò ſi habeatur $x^4 \propto * + 10xx + 40x + 16$; ſuppoſitâ $a \propto 2$, erit $aa \propto 4$, & $a^3 \propto 8$, fietque æquatio $x^4 \propto * + 2,5xx + 4,10x + 8,2$, ejuſdem formæ cum $x^4 \propto * \acute{a}pxx + \acute{a}\acute{a}qx + a^3r$, in qua p idem valet quod 5, q idem quod 10, & r idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividentibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem reſolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 oſtenſam, eritque vera radix FL, & falſa GK. Denique, examinando ordine diviſores inventos, explorando quinam ex ipſis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimùm diſcedant; invenio diviſionem ſolummodo tentandam eſſe per $x - 4 \propto 0$, aut per $x + 1 \propto 0$. Ac proinde cum neutra harum diviſionum ſuccedat, concludo, Æquationem propoſitam, unam admittere veram radicem, & unam falſam, quarum utraque eſt irrationalis; ac reliquas duas eſſe imaginarias.

Vide figuram paginâ verſâ.

Haud ſecus ſi fuerit æquatio $x^4 \propto * - 60xx + 7400x + 36000$, cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72,



75, 80, 90, 96, 100, 120, 125, 144, 150, 160, 180, 200, 225, 240, 250, 288, 300, 360, 375, 400, 450, 480, 500, 600, 720, 750, 800, 900, 1000, 1125, 1200, 1440, 1500, 1800, 2000, 2250, 2400, 3000, 3600, 4000, 4500, 6000, 7200, 9000, 12000, 18000, & 36000, fingo *a* esse 10, ac proinde æquationem propositam esse hanc $x^4 \infty * - \cancel{1}\cancel{0},6\,xx + \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0},74\,x + \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0},36$, hoc est, ipsam esse hujus formæ $x^4 \infty * - \acute{a}p\,xx + \acute{a}\acute{a}q\,x + a^3 r$; ita ut, secto latere recto *a* in 10 æquales partes, *p* earundem faciat 6, *q* 74, & *r* 36. Quâ deinde juxta regulam pag. 85, 86, 87 & 88 constructâ, invenio ipsam sicut antecedentem non nisi unam veram radicem admittere, utputa FL, & unam falsam, utpote KG, quarum longitudo ad partes lateris recti ceu scalæ relata ostendit divisionem æquationis propositæ solummodo tentandam esse per $x - 20 \infty 0$ aut per $x + 5 \infty 0$. Hinc cum ipsa dividi possit per $x - 20 \infty 0$ & oriatur æquatio $x^3 + 20\,xx + 460\,x + 1800 \infty 0$, non autem per $x + 5 \infty 0$ quin aliquid post divisionem relinquatur: concludo veram ejus radicem esse 20, & falsam esse irrationalem, cujus valor seu quantitas, dum per longitudi-

nem

nem solius inventæ rectæ K G accuratè exhibetur, propter hujus cum reliquis asymmetriam, numero tantùm quadantenus ex ipsius ad hasce relatione innotescit. Eodem modo investigari queunt radices æquationum, plures paucioresve dimensiones habentium.

Cæterùm cum radicum inventio res magni sit momenti, atque eorum, circa quæ Algebra versatur, præcipua: alium modum seligendi divisores, qui ad æquationem dividendam utiles judicari possunt, subjungam, quem communicavit Iacobus à Waessenaer, Vltrajectinus, Geometra peritissimus, atque in hac Cartesiana Methodo versatissimus.

Inveniantur radices æquationis $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Vnde æquatio proposita dividenda est per x ♉ 1, vel per x ♉ 2, &c. Verùm cum complures hîc sint divisores, & tantùm tres hîc esse possint, per quos divisio fieri queat: constat, divisionem pluries esse tentandam, antequam fortè incideremus in aliquem, qui quæsito satisfacere posset. Quapropter ut seligantur illi, quorum præ cæteris est ratio habenda: augendæ sunt radices veræ certâ quâdam quantitate, hoc est, transmutanda est æquatio in aliam, cujus veræ radices sint dato numero majores. Commodissimum autem fuerit ad id assumere 1 vel 10: quia cùm multiplicatio alicujus numeri instituitur per 1, vel 10, numerus ille sic non mutatur, sed ipsi tantùm in fine cyphra adjungitur. Vnde ponendo $y \propto x + 1$, sive $x \propto y - 1$, exsurget æquatio $y^3 - 4yy - 25y + 100 \propto 0$, cujus veræ radices unitate majores sunt veris prioris & falsæ contra unitate minores falsis. Quia verò in hac æquatione, numeri ultimum terminum 100 dividentes, sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: ideo dividenda foret per y ♉ 1, vel per y ♉ 2, vel per y ♉ 4, &c. quod cum non minorem quàm in superiori requirat laborem, oportet similiter ex iis quosdam seligere. Atque adeò cum cognoscatur, ad inveniendas veras radices, divisores hujus unitate debere esse majores divisoribus prioris æquationis, facilè constat, si ex inventis, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 aliqui idonei sunt ad posteriorem æquationem dividendam, aliquos etiam inter eosdem unitate diminutos, nempe inter 0, 1′, 3′, 4′, 9′, 19, 24′, 49, 99, ad priorem æquationem dividendam utiles futuros. Qui ut inveniantur, conferendi sunt iidem divisores

$1, 3, 4', 9', 19, 24', 49, 99$ cum supra inventis $1', 2, 3', 4', 6', 8, 9', 12, 18, 24', 36, 72$, sumendique qui sibi invicem respondent, cæteris neglectis. Ac proinde cum hîc quinque sint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, divisionem tentare per $x - 1$, per $x - 3$, per $x - 4$, per $x - 9$, & per $x - 24$; aut, ad obtinendas falsas, quæ quidem hâc auctione in tantum sunt diminutæ, per $x + 2$, per $x + 3$, & per $x + 6$. Quòd si verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantùm radices ad summum habere potest, quot incognita quantitas habet dimensiones, ita ut hîc non ultra tres inveniantur: poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminuere, supponendo videlicet $z \propto x - 1$, sive $x \propto z + 1$, & prodibit æquatio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \propto 0$. Cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt divisores $2, 3', 4', 7, 8, 15, 22, 43$. Iam verò cum ex prioribus quinque $1, 3', 4', 9, 24$ bini tantùm sint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum consentiunt, eò deventum est, ut ad inveniendas veras radices opùs tantùm sit divisionem tentare per $x - 3$, vel per $x - 4$; aut, ad obtinendas falsas, quæ hâc diminutione verarum unitate sunt auctæ, per $x + 2$, & per $x + 6$. Hinc, cum $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x - 3 \propto 0$, atque oriatur $xx + 2xx - 24 \propto 0$, cujus radices sunt $+4$, & -6; vel etiam $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x - 4 \propto 0$, & proveniat $xx + 3x - 18 \propto 0$, cujus radices sunt $+3$ & -6; vel denique $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi possit per $x + 6 \propto 0$, & resultet $xx - 7x + 12 \propto 0$, cujus radices sunt $+4$, & $+3$; sequitur, radices propositæ æquationis esse $+3$, $+4$, & -6. Vbi notandum, in hujusmodi praxi seligendi divisores, non opùs esse totius operationis, quæ ad inveniendas posteriores hasce æquationes requiritur, rationem habere; sed tantùm quatenus ad ultimum terminum inveniendum inservire possit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati solummodo addendi sunt vel subtrahendi, prout signa $+$ & $-$ indicant. At verò cùm per denarium aliumve numerum augentur vel diminuuntur, tum priùs cyphræ ipsis in fine apponendæ sunt, vel ipsi per datos numeros sunt multiplicandi, antequam addantur vel à se invicem subtrahantur. quod usus edocebit.

Vbi

Vbi tandem notandum, ad ſeligendos diviſores diviſioneſque ſuperfluas evitandas, ſpectari etiam poſſe ea, quæ Vir Clariſſimus D. de Beaune de limitibus Æquationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia iſta in 2[do] tractatu continentur, qui unâ cùm primo de natura & conſtitutione Æquationum huic editioni nunc acceſſit.

Vnde cognoſcitur, valorem ipſius z eſſe $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ o
$+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, *vel* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$
$-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] utpote qui elicitur ex priori æquatione $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$. Quæ quidem primi vel tertii caſus eſſe poteſt æquationum Quadratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, ſi $\frac{5}{4}aa$ eſt minus quàm cc, quo caſu $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ deſignabit verum valorem radicis z, & $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ $-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, falſum valorem, juxta ea quæ pag. 162 annotavimus. At tertii, ſi $\frac{5}{4}aa$ majus fuerit quàm cc, quo caſu utraque radix eſt vera. Vbi porrò notandum, æquationem poſteriorem $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$, poſtquam $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$ non fuerit minus quàm $\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, ſive, quod idem eſt, cc non minus quàm $8\,aa$, duas admittere falſas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ ſunt $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, & $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Ita ut quatuor ſint radices binarum præcedentium æquationum ſive æquationis

$$z^4 * \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aa \\ -\ cc \end{array} zz \begin{array}{l} -a^3 \\ -acc \end{array} z \begin{array}{l} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{array} \propto 0,$$

nempe $z \propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Et quandoquidem ſupra feceramus $z+\frac{1}{2}a \propto x$, *in-* P *notescit, quantitatem x, ad quàm cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse*

$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$]

vel $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

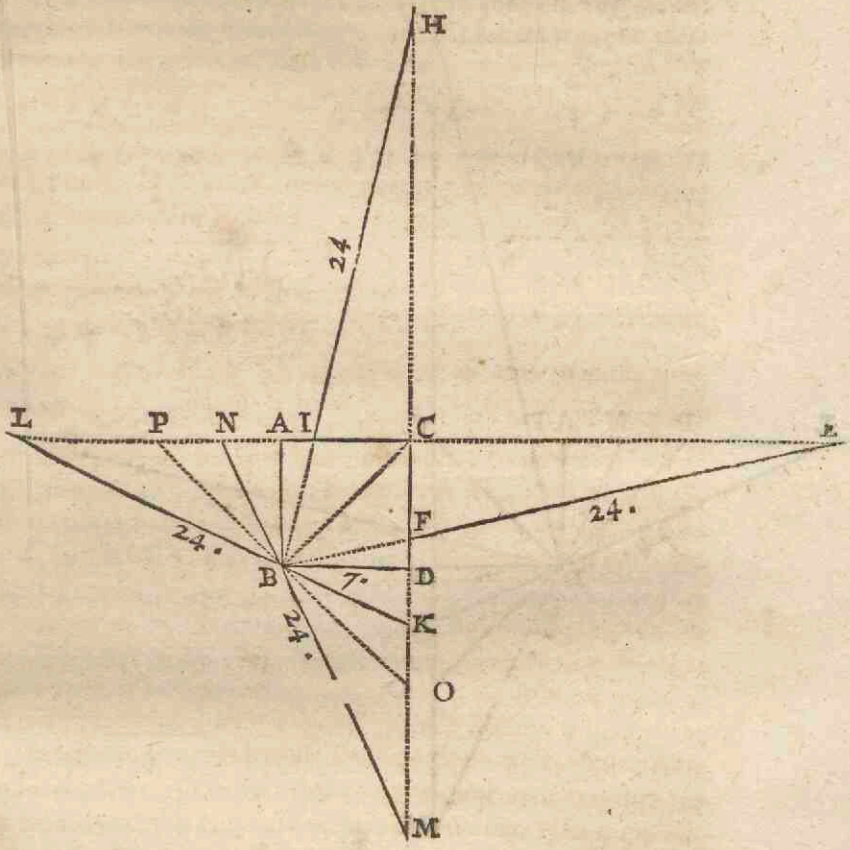
vel $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel denique $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Vt liquet ex iis, quæ proximè annotata sunt.

Q *Vbi per præcedentes regulas cognoscitur, radicem ejus, quæ est longitudo lineæ D F, esse* $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] Vbi patet, quòd ex quatuor radicibus supra expositis, æquationis $x^4-2ax^3\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}xx-2a^3x+a^4\ \infty\ 0$, quarum binæ priores semper veræ sunt, seu plus quàm o, D. des Cartes eam tantùm sibi delegerit, quæ ad quantitatem lineæ D F, pro qua invenienda x posuerat designandam inservire possit, & reliquam veram $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ neglexerit, eò quòd lineam ipsâ D C majorem exhibeat.

Vide figuram p. 83.

Potest autem hîc eleganter ostendi usus, quem radices tam falsæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamur; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim est, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut supra indicavimus) quantitatem aliquam designant, majorem quàm nihil, & falsæ defectum alicujus quantitatis, seu quantò nihilo sunt minores, sic in Geometria veræ radices eas communiter lineas designent, sensu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò falsæ, sensu contrario. Adeò ut si veræ accipiantur in data recta indefinita, à dato puncto versùs aliquod in ea punctum designatum, progrediendo, falsæ in ipsa ab eodem puncto sumi debeant versùs contrarium punctum, regrediendo.

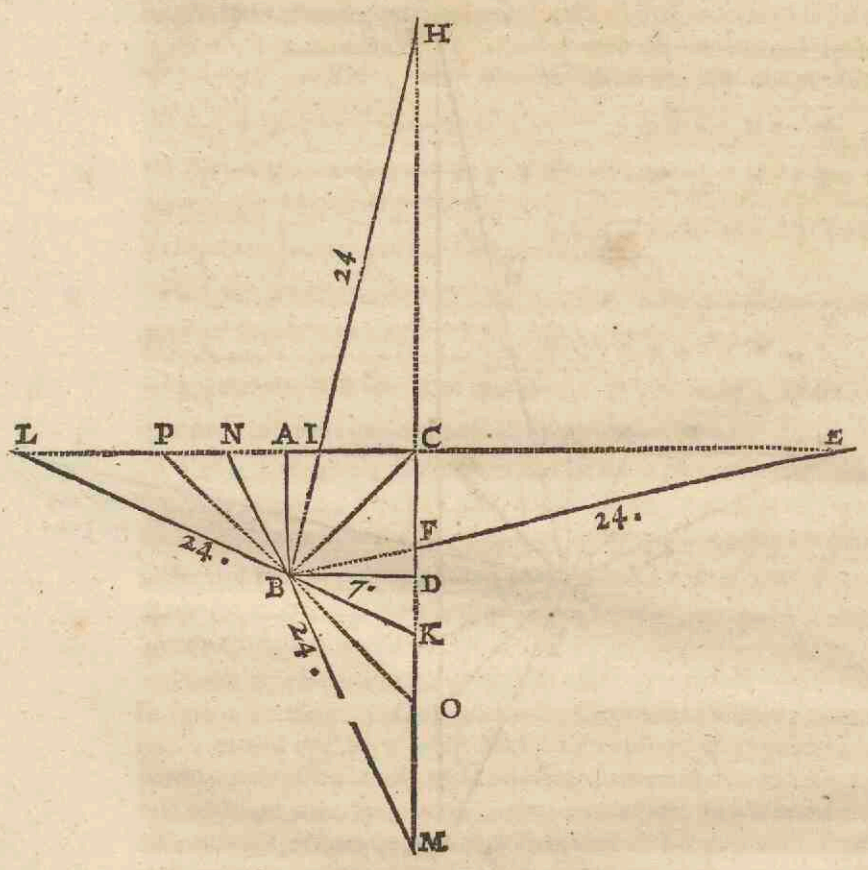


r Vt, quoniam in expoſito Problemate, ad inveniendam quantitatem lineæ D F $\propto x$, ſive ad cognoſcendum quanta ſumi debeat longitudo à puncto D versùs C, ut fiant quæ quæruntur, inventa eſt æquatio

$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$, quæ duas admittit veras radices, utpote

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

& $\frac{1}{2}a$



& $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$:
hinc à puncto D versùs C sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una est æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,
designans lineam D F, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,
designans lineam D H: deinde à puncto B ad inventa puncta F & H

F & H ducendæ rectæ B F, B H, quarum hæc secet latus A C in I, & illa idem latus productum in E: Eritque quælibet interceptarum F E, I H æqualis datæ c. Porrò, quoniam dicta æquatio duas quoque admittit falsas radices, quæ sunt

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

& $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}}$:
ideo à puncto D, versùs alteram partem, sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una est æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

designans lineam D K, & altera æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

designans lineam D M. Quibus sic inventis, si ab inventis punctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipsi A C productæ versùs A: erit similiter unaquæque interceptarum K L, M N ipsi c æqualis.

Vnde apparet, quòd, etiamsi de sola D F invenienda quæstio fuerit, nec quicquam de interceptis I H, K L, & M N cogitaverimus, ipsæ tamen ultro post æquationis resolutionem sese offerant. Ita ut constet, per harum radicum cognitionem nos deduci in notitiam uniuscujusque casus, quem Problema propositum potest admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipsis est construendus ac determinandus.

Vt, quoniam, ad explicandas radices æquationis

$zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$, requiritur, ut $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc$ non sit minus quàm $\tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive cc non minus quàm 8 aa (sicut dictum est pag. 309): Sic quoque ad ducendas interceptas K L, M N opùs est, ut cc non sit minus quàm 8 aa. Quemadmodum facilè demonstrari potest, ducendo tantùm rectam O P ipsi B C perpendicularem: siquidem recta O P rectarum omnium, quæ per punctum B duci possunt, minima existit. Cujus quadratum cum duplum sit quadrati ex P C, & hoc duplum quadrati ex B C, & hoc rursus quadrati ex B D duplum: erit quadratum ipsius O P quadrati ex B D octuplum. Hæc igitur ad ducendas interceptas K L, M N Problemati præfigenda est determinatio.

Porrò, quod ad reliquas interceptas attinet, ut F E & I H, eæ ſemper ſic duci poſſunt, ut datis rectis ſint æquales, nec eſt Problema eo caſu determinationi obnoxium.

In numeris, eſto B D ∞ a ∞ 7, E F ∞ c ∞ 24, fietque æquatio quæſita $x^4 - 14x^3 - 478\,xx - 686\,x + 2401 \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo ſecundum ejus terminum, & fit æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}\,zz - 4375\,z - 6305\frac{11}{16} \infty 0$. Quæ ad tres dimenſiones reducta dabit æquationem $y^6 - 1103\,y^4 + 329375\,yy - 19140625 \infty 0$. Hæc autem cum dividi poſſit per $yy - 625 \infty 0$, arguitur y eſſe 25, quâ mediante dividetur æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}\,zz - 4375\,z - 6305\frac{11}{16} \infty 0$ in duas æquationes, $zz - 25\,z - 50\frac{3}{4} \infty 0$, & $zz + 25\,z + 124\frac{1}{4} \infty 0$: fientque radices prioris $z \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{207}$, & $z \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{207}$; at poſterioris $z \infty -12\frac{1}{2} + \sqrt{32}$, & $z \infty -12\frac{1}{2} - \sqrt{32}$. Verùm quoniam, ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis, ſuppoſita fuit $x \infty z + \frac{1}{2}a$: hinc radices ejus erunt $x \infty 16 + \sqrt{207}$, & $x \infty 16 - \sqrt{207}$, ut & $x \infty -9 + \sqrt{32}$, nec non $x \infty -9 - \sqrt{32}$. Et liquet D F fore $16 - \sqrt{207}$, D H $16 + \sqrt{207}$, D K $9 - \sqrt{32}$, ac denique D M $9 + \sqrt{32}$.

Eodem modo, ſi B D fuerit 3, & F E 4, invenietur æquatio $x^4 - 6x^3 + 2\,xx - 54x + 81 \infty 0$, quæ ſimiliter per $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit: unde ſublato ſecundo ejus termino, fiet æquatio $z^4 * - 11\frac{1}{2}\,zz - 75\,z - 10\frac{11}{16} \infty 0$, quæ ad tres dimenſiones reducta, dabit æquationem $y^6 - 23\,y^4 + 175\,yy - 5625 \infty 0$. Hæc, cum per $yy - 25 \infty 0$ dividi poſſit, ſequitur y fore 5. Vnde diviſâ æquatione præcedente in duas æquationes $zz - 5\,z - \frac{3}{4} \infty 0$, & $zz + 5\,z + 14\frac{1}{4} \infty 0$, inveniemus $z \infty \sqrt{7} + 2\frac{1}{2}$, vel $z \infty \sqrt{7} - 2\frac{1}{2}$. Quæ binæ tantùm radices ex utraque æquatione erui poſſunt, cum poſterior æquatio $zz + 5\,z + 14\frac{1}{4} \infty 0$ ſit impoſſibilis, per ea, quæ p. 165 expoſuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falſas, ſed tantùm imaginarias. Quibus radicibus ſi addatur $1\frac{1}{2}$ (quoniam ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis poſuimus $x \infty z + 1\frac{1}{2}$), habebitur $x \infty \sqrt{7} + 4$, vel $x \infty \sqrt{7} - 1$. Id quod monſtrat lineam D F ſumendam eſſe æqualem $\sqrt{7} - 1$, & lineam D H $\infty \sqrt{7} + 4$. Ex quibus conſtat, quòd, poſtquam æquatio inventa $x^4 - 6\,x^3 + 2\,x\,x - 54\,x - 81 \infty 0$ nullam agnoſcat radicem falſam, (quan-

(quandoquidem radices æquationis $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$, tantummodo ſunt imaginariæ, & æquatio impoſſibilis) ideo ſimiliter nulla linea, cujus longitudo ſit 4, per punctum B duci, atque à rectis C A, C D intercipi poſſit.

Cæterùm, ne quid ad penitiorem intellectum harum regularum, quibus hîc in reducendis ac dividendis æquationibus uſi ſumus, deficiat, viſum fuit ſequentia adjicere.

Hinc ſi, exempli causâ, æquatio reducenda ſit $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$, inveſtigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ ſimilis exiſtit. Quocirca cum, ſupponendo $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$, ex mutua harum duarum multiplicatione producatur

$$x^4 * \begin{array}{l} +zxx \\ -yy \\ +v \end{array} \begin{array}{l} -zyx \\ +vy \\ \end{array} + vz \infty 0,$$

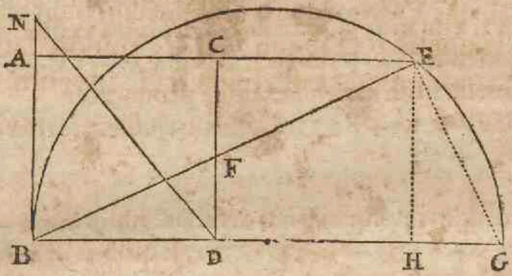
æquatio ejuſdem formæ cum propoſita, elicio inde tres æquationes diverſas: nimirum, $z - yy + v \infty - p$, $-zy + vy \infty - q$, & $vz \infty r$. E quibus deinde, ſi ad inveniendam quantitatem y, in locum z & v ſubrogentur earum valores $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ & $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, emerget æquatio $y^6 - 2py^4 \begin{array}{l} +pp \\ -4r \end{array} yy - qq \infty 0$. Inventâ autem quantitate y, loco duarum præcedentium æquationum $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$ ſcribo haſce duas $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \infty 0$ ac $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$. Et patet quæſitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quarum ſigna ab allatæ ſignis ſunt diverſa, eſt intelligendum, è quibus omnibus poſtea inter ſe collatis dictarum regularum veritas penitùs eluceſcit. Vbi etiam liquet, ſi valor ipſius yy per diviſionem ſuperioris æquationis Cubicæ inveniri poſſit, Problema, quod ad æquationem propoſitam $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$ perducitur, fore omnino Planum; ſin minus, illud ipſum tunc eſſe Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore adducta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

Cum aliàs; ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, per- R

 veni-

veniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propositum non est Solidum, si quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compositam, tum communiter aliâ viâ ad simpliciorem Æquationem perveniri possit.] Modus autem, quo ad Æquationem dictam pervenerim, talis est.



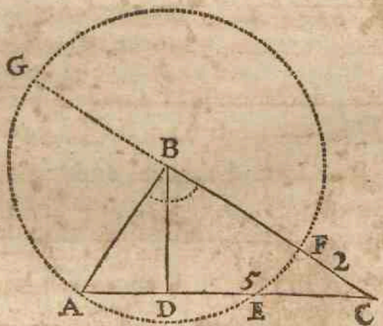
Iungatur E G, ductâque E H parallelâ ipsi C D vel A B, ponatur B D vel D C $\infty\ a$, F E $\infty\ c$, B F $\infty\ y$, & D G $\infty\ x$. Hinc cum E H æqualis sit ipsi C D vel D B, & triangulum E H G simile triangulo B D F: erit & E G æqualis B F, hoc est, $\infty\ y$. Eodem modo similia sunt triangula B G E & B E H: unde erit, ut B G, seu $a + x$, ad G E, seu y; ita B E, seu $y + c$, ad E H, seu a. Ac proinde ductis tum mediis tum extremis in se invicem, fiet æquatio inter $yy + cy$ & $aa + ax$, vel inter yy & $-cy \begin{smallmatrix}+aa\\+ax\end{smallmatrix}$. Non secus, triangula B F D & B E H sunt similia: quare, si fiat ut B F, seu y, ad B D, seu a; ita B E seu $y + c$ ad B H; erit B H $\infty\ \frac{ay + ac}{y}$. Subductâ autem B H ex B G seu $a + x$, relinquetur H G $\infty\ \frac{xy - ac}{y}$. Porrò cum B H, H E, & H G tres sint proportionales: hinc si multiplicetur B H per H G, hoc est, $\frac{ay + ac}{y}$ per $\frac{xy - ac}{y}$, erit productum $\frac{axyy + acxy - aacy - aacc}{yy}$ æquale ei, quod fit ex H E in se, hoc est, aa; & per consequens $xyy - ayy \infty \begin{smallmatrix}+ac\\-cx\end{smallmatrix} y + acc$, unde $yy \infty -cy + \frac{acc}{x - a}$. Cæterùm

cum

cum illa, quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe quoque ſint æqualia, erit $-cy\begin{matrix}+aa\\+ax\end{matrix} \propto -cy+\frac{acc}{x-a}$. Ac proinde ablatis utrinque æqualibus, reliquumque multiplicando per $x-a$, habebitur $axx - a^3 \propto acc$, ideoque $xx \propto aa+cc$. Quod erat oſtendendum.

Sed lubet hîc aliud exemplum non inelegans afferre, quod mihi à Doctiſſimo, ac in omni ſtudiorum genere verſatiſſimo D. Marco Meibomio, eſt ſuppeditatum, cujus operâ Ariſtoxenus, Alypius, aliique Veteres Muſici priſtino nitori ſunt reſtituti.

Datis trianguli rectanguli A B C, minore latere A B, & differentiâ ſegmentorum baſis E C, invenire differentiam laterum F C.



Ponatur A B $\propto a$,
E C $\propto b$,
F C $\propto x$:
eritque G C $\propto 2a+x$.

$$\begin{array}{cccc} EC & FC & GC & AC \\ b & x & 2a+x & \frac{2ax+xx}{b} \end{array}$$

 2 ax

$$\begin{array}{r}
2ax + xx \\
2ax + xx \\
\hline
+ 2ax^3 + x^4 \\
4aaxx + 2ax^3 \qquad\quad \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{bb} \propto 2aa + 2ax + xx$$

$$\overline{\underline{4aaxx + 4ax^3 + x^4 \propto 2aabb + 2abbx + bbxx}}$$

$$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx - 2abbx - 2aabb \propto 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per $x \mathbin{8} a$, vel per $x \mathbin{8} b$, vel per $x \mathbin{8} 2a$, vel per $x \mathbin{8} 2b$, hinc tollendus est secundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantùm dimensiones habentem: quod fiet ponendo $z - a \propto x$

$$\begin{array}{lllllcl}
z^4 & -4az^3 & +6aazz & -4a^3z & +a^4 & \propto & x^4 \\
 & +4az^3 & -12aazz & +12a^3z & -4a^4 & \propto & +4ax^3 \\
 & & +4aazz & -8a^3z & +4a^4 & \propto & +4aaxx \\
 & & -bbzz & +2abbz & -aabb & \propto & -bbxx \\
 & & & -2abbz & +2aabb & \propto & -2abbx \\
 & & & & -2aabb & \propto & -2aabb. \\
\hline
\end{array}$$

$z^4 \quad * \quad \begin{smallmatrix} -2aa \\ -bb \end{smallmatrix} zz \quad * \quad \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \propto 0$. Quia autem hîc post sublationem secundi termini contingit æquationem esse Quadratam, cum in ea desit z^3 & z: non opùs est ulteriùs progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro sunt ostensa inveniri possit. Erit enim

$$zz \propto aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb},$$

$$\& \; z \propto \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}, \text{ ac proinde}$$

$$x \propto -a + \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}.$$

Vbi notandum, si pro majori latere B C ponatur x, æquationem quæsitam fore quadratam: utpote,

$x^4 * \begin{smallmatrix} -2aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx * \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \propto 0$, sive $x^4 \propto \begin{smallmatrix} +2aa \\ +bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +aabb \end{smallmatrix}$, cujus radix est $xx \propto aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}$, hoc est,

$x \propto \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}$. Cujus sanè cum præcedente convenientia ex ipso schemate est perspicua. Quòd si verò pro A E, duplo minori segmento, ponatur x, fiet Æquatio $xx \propto -bx + 2aa$, cujus radix est $x \propto -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + 2aa}$.

Quæ

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non diſſimilis erit quæſtio, ſi datis A B $\propto a$, & D C $\propto b$, quæratur F C $\propto x$. Fiet enim æquatio

$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +6aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +4a^3 \\ -2abb \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} \propto 0$. In qua ſi tollatur ſecundus terminus, ponendo ſcilicet $z - a \propto x$, prodibit æquatio $z^4 * - bbzz * - aabb \propto 0$, ſive $z^4 \propto bbzz + aabb$, cujus radix eſt $zz \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, hoc eſt,

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$, adeoque $x \propto -a + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Sed ſi quæratur B C $\propto x$, erit æquatio $xx \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, cujus radix eſt $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Cujus cum præcedente conſenſus ex figura perſpicitur. Denique ſi quæratur A D, habebitur æquatio $xx \propto -bx + aa$, cujus radix eſt $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Quod ſimiliter ſuperioris moniti non inelegans eſt exemplum.

His adde ſequentem quæſtionem, quam olim ab Arithmetico ſubtiliſſimo, D. Nicolao Huberti à Perſyn, Harlemenſi, fautore meo honorando, ſolvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate ſe invicem excedentes, qui inter ſe multiplicati faciant 100.

Ponatur primus x, ſecundus $x + 1$, tertius $x + 2$, & quartus $x + 3$. Fietque æquatio $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \propto 100$, vel $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \propto 0$. cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Diviſio verò tentata per $x \pm 1$, vel per $x \pm 2$, vel per $x \pm 4$ &c. non ſuccedit. Hinc ſublato ſecundo termino, prodibit æquatio $z^4 * - 2\frac{1}{2}zz * - 99\frac{7}{16} \propto 0$, vel $z^4 \propto 2\frac{1}{2}zz + 99\frac{7}{16}$, cujus radix eſt $zz \propto \sqrt{101} + 1\frac{1}{4}$, hoc eſt, $z \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}}$. Ac proinde, cum ibi tollendo ſecundum terminum poſuerimus $x \propto z - 1\frac{1}{2}$, fiet $x \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$. Eritque quæſitorum numerorum, primus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, ſecundus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, tertius $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, & quartus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$. Quod facilè probari poteſt.

Vbi notandum, ſi cum hujus quæſtionis Authore pro primo numero ponamus $x - 1\frac{1}{2}$, pro ſecundo $x - \frac{1}{2}$, pro tertio $x + \frac{1}{2}$,

pro

pro quarto $x + 1\frac{1}{2}$, quæstionem faciliùs solvi posse. Invenitur enim æquatio $x^4 \infty 2\frac{1}{2}xx + 99\frac{7}{16}$, omnino ut præcedens, denominata à radice z: unde quæsiti numeri fiunt ut supra. Verùm difficile satis foret in hasce hypotheses incidere, non secus quàm in superiorem Pappi constructionem, sicut Author innuit pag. 83.

Restat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum existit. Quale est illud, quod ante annos aliquot sibi ad investigandum proposuit Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. Ioannes de Wit, Consiliarius & Pensionarius sive primarius Hollandiæ West-Frisiæque minister, Mathematum peritissimus. à quo insignem tractatum, brevi, si volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Cartesius exponit.

Datis in superiori triangulo rectangulo A B C, segmento basis D C $\infty\ a$, & differentiâ laterum C F $\infty\ b$; invenire A B, latus minus.

Esto A B $\infty\ x$, fietque æquatio $x^4 + 4bx^3 \begin{smallmatrix} +6bb \\ -2aa \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +4b^3 \\ -2aab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +b^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} \infty\ 0$. Quæ cum dividi nequeat per x 8 b, tollo secundum ejus terminum, statuendo $z - b \infty x$, unde emergit æquatio $z^4 * - 2aazz + 2aabz - aabb \infty\ 0$, quippe quæ invenitur, quærendo latus majus B C. Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantum dimensiones habentem, juxta regulam pag. 79, fietque æquatio $y^6 - 4aay^4 \begin{smallmatrix} +4a^4 \\ +4aabb \end{smallmatrix} yy - 4a^4bb \infty\ 0$. Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, constans ex quantitate incognitâ yy 8 quantitate cognitâ, ultimum terminum $4a^4bb$ dividente, indicio est, Problema propositum esse Solidum, adeoque non nisi per Conicas sectiones solvi posse. Neque minus vitium est, solutionem ejus post hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas sectiones ad constructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos construi possunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, esto D C ∞ 5, C F ∞ 2, A B ∞ 1 ꝶ, eritque æquatio 1 ȥȥ + 8 ꞓ − 26 ȥ − 68 ꝶ − 84 ∞ 0. Quæ cum dividi non possit per 1 ꝶ plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 84 dividente, aufero secundum terminum 8 ꞓ, & fit, 1 $QQ * - 50\,Q + 100\,N - 100 \infty\ 0$. Hæc autem ad tres dimenmensiones reducta producit $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \infty 0$. quæ cum similiter dividi non possit per xx + vel — aliquo numero, ultimum terminum dividente: sequitur Problema in datis numeris esse Solidum, lineamque A B per planorum Geometriam sive per regulas primo libro expositas non posse inveniri.

Non dissimilis erit quæstio, si, datis A D $\infty\, a$, F C $\infty\, b$, quæratur B C $\infty\, x$. Invenitur enim æquatio

$$x^4 - 4bx^3 \begin{smallmatrix}+6bb\\-2aa\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-4b^3\\+4aab\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+b^4\\-aabb\end{smallmatrix} \infty\ 0.$$ Vnde ponendo $x \infty z + b$, emerget æquatio $z^4 * - 2aazz - 2aabz - aabb \infty 0$. eadem nempe, quæ provenit, quærendo A B $\infty\, z$.

Porrò, si exemplorum copiam desideres, potes rursus ex iisdem datis quærere E C $\infty\, x$, & habebis

$$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix}+4aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx - 8abbx \begin{smallmatrix}-8aabb\\+b^4\end{smallmatrix} \infty\ 0.$$ Cujus secundum terminum si tollas, ponendo $z - a \infty x$, obtinebis $z^4 * \begin{smallmatrix}-2aa\\-2bb\end{smallmatrix} zz - 4abbz \begin{smallmatrix}+a^4\\-2aabb\\+b^4\end{smallmatrix} \infty 0$, eandem, quam si quæras D C $\infty\, z$.

Vbi si denique quæras B D, invenies hanc æquationem:

$$x^8 \begin{smallmatrix}-2a^4\\-2aabb\end{smallmatrix} x^4 - 4a^4bbxx \begin{smallmatrix}+a^4b^4\\+a^8\\-2a^6bb\end{smallmatrix} \infty\ 0.$$ Sed hæc forsan nimia videbuntur.

E quibus colligere licèt: quòd, Problemate aliquo Solido existente, si per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compositam, communiter etiam per aliam viam ad simpliciorem deveniri possit, veruntamen pauciores quàm tres dimensiones non habentem.

Iam verò postquam compertum est, Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum ascendat; sive ipsa non altiùs quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum sectionum, quæcunque illa tandem sit, &c.] Ex his notandum est, quoties in proposita quæstione data est aliqua Conica sectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantùm dimensiones ascendit, tunc eam semper ope illius datæ Conicæ sectionis per solam regulam & circinum solvi posse. Adeò ut pro Plano Problemate haberi quodammodo possit, etiamsi reverâ sit Solidum, ut etiam ab Authore hîc appellatur. S

Hujus rei elegans exemplum ſuggerere poteſt Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in ſcholio Prop^nis^ 30 libri 4^ti^ Collectionum Mathematicarum. In cujus ſolutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc eſt, per improprium genus ſolvere quæſiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctiſſimus ac de Mathematicis ſtudiis perinde meritus Alexander Anderſonus in exercitatione ſua 5^ta^ dictum Problema non levibus indiciis ſequentis argumenti fuiſſe innuit, ſeque ibidem ſcribit Analyticâ ſuâ duce tandem reperiſſe abſque ſolida inclinatione (ut Pappus loquitur) non poſſe definiri: viſum fuit id ipſum hîc loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus iſtis ſic diſſentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim ſi in hujus Problematis ſolutione inveſtiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæſita recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen ſecundùm regulam generalem p. 85 ope ejuſdem datæ Parabolæ quàm facillimè conſtrui poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonſtrationem univerſalem, quam ſibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutiſſimus pariter atque eruditiſſimus noſter Chr. Hugenius concinnavit, cum ipſa jam pridem nobis aliiſque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci exiſtat, eandem hîc prætereundam duximus.

T *Atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam*: $z^3 \propto * \, a p z . a a q$, *ſi incognita quantitas tres tantùm dimenſiones habeat; aut ad hanc*: $z^4 \propto * \, a p z z . a a q z . a^3 r$. *ſi quatuor obtineat dimenſiones; ſeu, ſumendo a pro unitate, ad hanc*: $z^3 \propto * \, p z . q$; *aut ad hanc*: $z^4 \propto * \, p z z . q z . r$.] Vbi apparet, hujus Geo-

Geometriæ Methodum requirere, ut, literæ, quæ in priori æquatione pro unitate est accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in posteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino zz est accepta, quadratum reperiatur in termino z, ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim si habeatur æquatio $z^3 \infty * bbz.c^3$, ac illius loco alia desideretur, cujus penultimus terminus habeat a, ac ultimus aa: Fiat ut a ad b, sic b ad quartam, quæ vocetur p: eritque $ap \infty bb$; Rursus, fiat ut aa ad cc, sic c ad quartam, quæ sit q; sive etiam (quòd eòdem redit) ut a ad c, sic c ad tertiam, quæ vocetur d; ac denuo ut a ad d, sic c ad q: eritque $aaq \infty c^3$. Vnde pro $z^3 \infty *.bbz.c^3$ scribi poterit $z^3 \infty * apz.aaq$, sive, sumendo a pro unitate: $z^3 \infty *.pz.q$.

Nec aliter fit si habeatur $z^4 \infty * bbzz.c^3z.d^4$. Substituto enim ap in locum bb, & aaq in locum c^3 (ut ante), faciendum est, ut a ad d, sic d ad quartam, quæ vocetur e, eritque $ae \infty dd$, ideoque $aaee \infty d^4$. Vbi rursus, si fiat, ut a ad e, ita e ad tertiam, quæ vocetur r, erit $ar \infty ee$, ac proinde $a^3r \infty d^4$. Ita ut pro æquatione propositâ $z^4 \infty *.bbzz.c^3z.d^4$ reponi possit $z^4 \infty * apzz.aaqz.a^3r$, sive, sumendo a pro unitate: $z^4 \infty *.pzz.qz.r$. Quod erat ostendendum. Eadem est ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò constat, quanti sit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro ostensam, non solùm ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimensionum ita præparentur, ut hæ juxta unam & illæ juxta aliam regulam resolvi queant; sed ipsæ etiam hoc pacto designatæ ad numeros referri, atque ad ipsarum radices explicandas inservire possint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia existat, edoceant.

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, & axem ejus esse A C D K L, latusque rectum a seu 1.] Vbi liquet, quòd, postquam in æquatione resolvenda quantitatem a seu unitatem, ut proximè est explicatum, subrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ F A G assumpsimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejusdemque Parabolæ ope solvi possint. Cum enim reduci semper queant ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, superiorum for- V mularum, & una eademque quantitas a in earundem æquationum terminis subrogari semper possit, evidens est, ipsam unius ejusdemque Parabolæ ope construi posse. Idem intelligendum quoque est de æquationibus numericis trium quatuorve dimensionum, quarum nulla ex radicibus est rationalis, quarumque valor similiter per sectionem Conicam est determinandus. Vt supra fuit ostensum.

Vide figuram p. 86 vel 89. Cæterùm ut hæc regula cuivis perspecta reddatur, concipiatur Parabola esse descripta F A G, cujus latus rectum sit $\infty\, a$, seu 1, & in axe ejus A D K L assumptâ A D $\infty\, b$, fingatur ex D eidem perpendicularis esse erecta D E $\infty\, c$, centroque E intervallo E H $\infty\, d$ descriptus circulus F H G, qui Parabolam ab utraque parte axis secet in G & F: oporteatque investigare æquationem, cujus radix sit perpendicularis G K aut F L $\infty\, z$.

Ad quam inveniendam, dividatur zz, quadratum ex G K, per latus rectum seu a, & fit A K $\infty\, \frac{zz}{a}$. E qua subductâ A D $\infty\, b$, relinquetur D K seu E M $\infty\, \frac{zz}{a} - b$. Deinde, quoniam additis E D, hoc est, M K, & K G, tota M G est $\infty\, c + z$; & quadrata ex E M & M G simul addita faciant $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz$, quadratum ex E G: erit $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty\, dd$, hoc est, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio

$$\begin{array}{llll} z^4 \infty\, * & + 2abzz & - 2aacz & + aadd. \\ & - aa & & - aabb \\ & & & - aacc \end{array}$$

Eadem quippe, quæ invenitur, ponendo F L $\infty\, -z$. Hinc si, exempli caussâ, æquatio proposita construenda fuerit $z^4 \infty\, * + apzz - aaqz + a^3 r$: erit, factâ separatim comparatione inter singulos terminos unius & singulos alterius, $b \infty\, \frac{a+p}{2}$, $c \infty\, \frac{1}{2}q$, & $d \infty\, \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$. Quod illud ipsum est, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum casuum constructio inveniri potest. Idem intellige de constructione æquationis pag^{næ} 97, aliarumque hîc sequentium.

VV *Adeò ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.*] Quoniam autem,

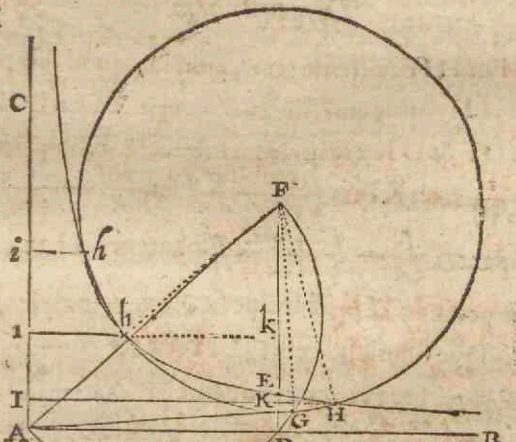
quo

quo pacto Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modò jucundum quin imò utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingeniosissimo atque integerrimo nostro Huddenio inventam, quâ ejusdem æquationis radices, prout ipsa ad hanc formam $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0$ aut ad hanc $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$ est revocata, ita ut omnes termini per signa + & — se invicem sequantur, inveniri valeant.

CONSTRVCTIO ÆQVATIONIS.

$$z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0.$$

Ductis AB, AC, rectum angulum A efficientibus, sumptâque in AB lineâ AD $\infty \frac{1}{2}p$, agatur ex D ipsi AC



parallela DF. Deinde in hac invento puncto E, ita ut id, quod sub AD, DE continetur, sit $\infty \sqrt{s}$, describatur per E circa Asymptotos AB, AC Hyperbola HEh.

 Por-

Porrò assumptâ D F $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}}$, jungatur A F; & super A F descripto semicirculo A D F, collocetur in eo A G $\infty \sqrt{q}$, centroque F circulus describatur, transiens per inventum punctum G. Qui quidem Circulus Hyperbolam secabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diversas radices admittet, à quibus si ad lineam A C demittantur perpendiculares H I, h i, & *h i*: erunt ipsæ radices quæsitæ.

Vbi notandum, si A G major inveniretur, quàm ut semicirculo super A F descripto inscribi posset; aut etiam Circulus G H *h* adeò parvus esset, ut Hyperbolam H E *h* in nullo prorsus puncto secaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non esset imaginaria.

Demonstratio.

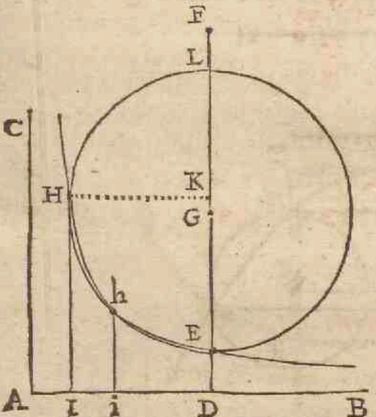
Etenim lineâ I H existente ∞z, cum id, quod sub A D, D E vel sub A I, I H continetur, sit $\infty \sqrt{s}$: erit A I seu D K $\infty \frac{\sqrt{s}}{z}$. Vnde cum D F & D K à se invicem subductæ relinquant K F, & D F sit $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}}$: erit K F $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{z}$ seu $\frac{\sqrt{s}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{s}}$, adeoque $\Box$ K F semper $\infty \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s}$. Est autem K H $\infty z - \frac{1}{2}p$ seu $\frac{1}{2}p - z$, ac proinde $\Box$ K H semper $\infty zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hinc summa utriusque simul, hoc est, $\Box$ F H erit $\infty \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hoc verò cum æquetur $\Box^{to}$ A F $-$ $\Box^{to}$ A G, hoc est, $\infty \frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4s} - q$: fiet, ordinatâ æqualitate, $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0$. Quæ est æquatio proposita. Vnde liquet I H esse ∞z.

CON-

CONSTRVCTIO ÆQVATIONIS

$$z^3 - pzz + qz - r \infty 0.$$

Ductis, ut ante, A B, A C, & in A B aſſumptâ A D $\infty \sqrt{q}$, agatur ex D ipſi A C parallela D F. Deinde in hac acceptis D E $\infty \frac{r}{q}$, & E F $\infty\, p$, deſcribatur per E circa Aſymptotos A B, A C Hyperbola E h H. Porrò ſectâ D F bifariam in G, centro G & intervallo G E deſcribatur circulus E H L, qui quidem Hyperbolam in tot punctis præter E ſecabit vel tanget, quot æquatio diverſas radices admittet, è quibus ſi ad lineam A B demittantur perpendiculares H I, h i, erunt ipſæ radices quæſitæ.



Demonſtratio.

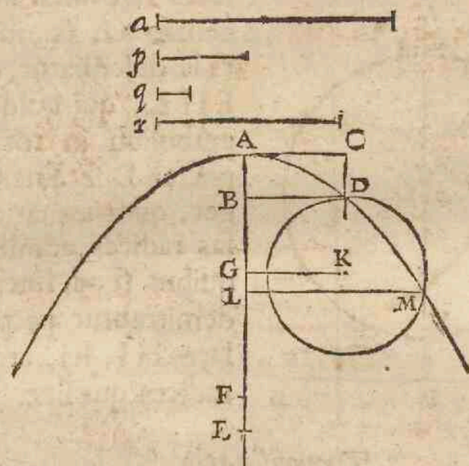
Quoniam, H I exiſtente $\infty\, z$, A I, per ſupra dicta, eſt $\infty \frac{r}{qz}\sqrt{q}$, & eadem ab A D ſubducta relinquit I D vel H K $\infty \sqrt{q} - \frac{r}{qz}\sqrt{q}$: erit □ ex H K $\infty\, q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz}$. Deinde, quoniam D E $\infty \frac{r}{q}$ ablatâ ex D K ſeu I H $\infty\, z$, relinquitur E K $\infty\, z - \frac{r}{q}$; at verò D K $\infty\, z$ ſubtractâ ex D L ſeu E F $\infty\, p$, relinquitur K L $\infty\, p - z$: erit ▭ E K L $\infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Hinc cum □ ex H K æquetur ▭ E K L, erit $q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz} \infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Et fit, ordinatâ æqualitate,

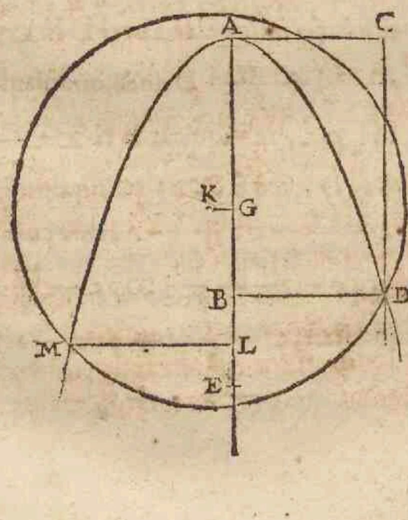
$$\begin{array}{l} z^4 - \frac{r}{q}z^3 + qzz - 2rz + \frac{rr}{q} \infty\, 0. \\ \quad\;\; - p \qquad\;\; + \frac{pr}{q} \end{array}$$

Quæ

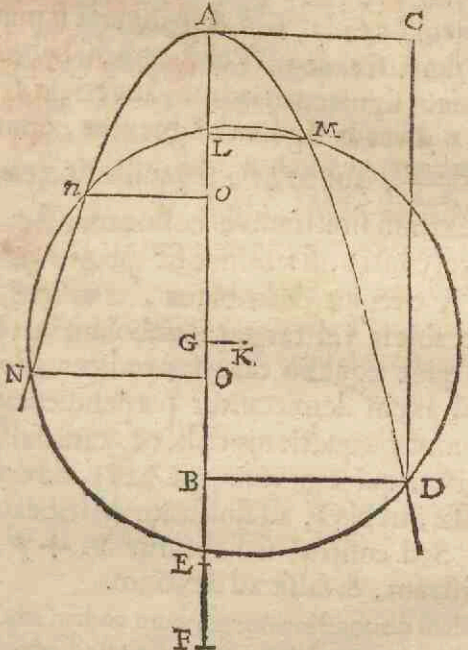
Quæ æquatio dividi poteſt per $z - \frac{r}{q} \infty 0$, & fit $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$, æquatio propoſita. Vnde liquet H I eſſe ∞z.

His ſubjunge ſequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ, in quibus 2[dus] terminus non eſt ſublatus, conſtrui poſſunt, prout ipſæ ad hanc formam $z^3 \infty pzz . aqz . aar$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . aar$; ſive etiam (ſumendo a pro unitate) ad hanc $z^3 \infty pzz . qz . r$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . r$, ſunt reductæ. Ea autem talis eſt.





De-



Descriptâ Parabolâ N A M, cujus axis sit A B E, & latus rectum ∞ a seu 1, erigo ex vertice A, ad dextram Parabolæ, super axe, perpendicularem A C ∞ p; & ex C ductâ C D ipsi A B parallelâ, donec Parabolæ occurrat in D, duco ex D ipsi A C parallelam D B, occurrentem axi in B. Dehinc in linea A B, continuatâ versùs B, sumendo B E ∞ 1, oportet facere E F ∞ q, eamque ulteriùs in illa versùs hanc eandem partem sumere, si habeatur $+ q$ in æquatione; sed versùs alteram partem, si habeatur $- q$. Porrò sectâ A F bifariam, aut A E, si q sit nulla, in G, si habeatur $- p$, & q & r diversis signis sint adfectæ; aut etiam si habeatur $+ p$, & q & r iisdem signis denotatæ fuerint, erigenda est ex G perpendicularis G K $\infty \frac{r + pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eaque ad dextram collocanda, si p & r diversa signa habeant, aut ad sinistram, si eadem. Vel contra, si habeatur $-p$, & q & r iisdem signis adficiantur; aut etiam si habeatur $+p$, & q & r diversis signis designentur, oportet facere G K $\infty \frac{r \mathrel{=\!\!=} pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eamque, ut ante, ad dextram sinistramve collocare, si r sit major quàm pq; vel contra, si r minor sit quàm pq. Quo peracto, si ex K circulus describatur, transiens per punctum D, secabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter D, quot æquatio diversas radices admittet; è quibus si ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quàm veræ. Quarum quidem veræ, ut M L, ad dextram cadent, & falsæ, ut N O, ad sinistram, si habeatur $-p$ in æquatione. Sed contra, si habeatur ibi $+p$, veræ cadent ad sinistram, & falsæ ad dextram.

Signum $\mathrel{=\!\!=}$ *significat differentiam, quæ est inter r & pq.*

Cujus quidem demonstrationem, cum eodem modo fieri possit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis studio hîc omittimus.

Vbi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2^{dus} terminus est sublatus, si tantùm in iis p intelligamus esse ∞ 0, & veras radices ex eadem parte Parabolæ esse sumendas, quâ erecta est perpendicularis G K, & falsas ex altera, cùm habetur $+r$ in æquatione; aut contra, si in ea habetur $-r$.

Cæterùm cum & alias regulas huc afferre possem, quibus hæ eædem æquationes sicut & superiores Quadrato-quadratæ construi queunt: tamen, ne in iis hîc recensendis nimis longus sim (quandoquidem infinitas invenire licet), suffecerit jam allatas, tanquam faciliores exposuisse, cæterasque etiam aliis quærendas reliquisse.

X *Falsa autem F L æqualis est duabus hisce Q N & N V simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.*] Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hîc obiter adnotat Au-

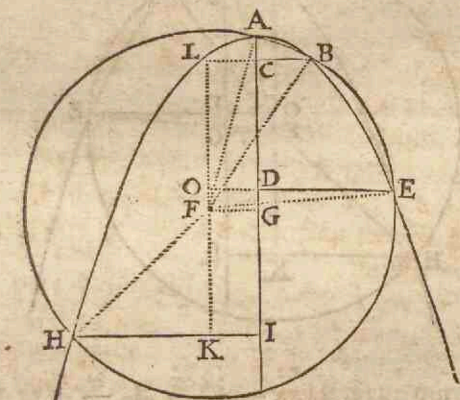
ctor,

ctor, & ad quam investigandam me ante annos aliquot Parisiis instigavit Doctissimus, ac Mathematum peritiâ, non minùs quàm omnigenâ virtute, ornatissimus vir D. Claudius Mylon, I. C, sicut à me tum inventa fuit, sequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quòd si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

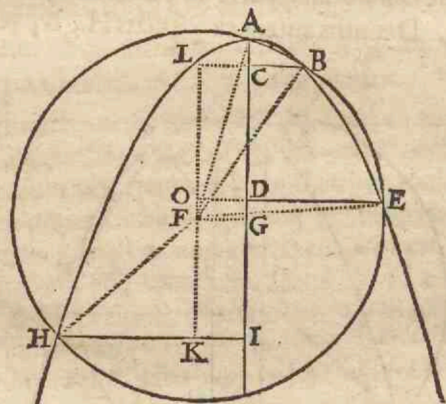
Sit Parabola H A B E, cujus axis A I, vertex A, Circulus autem ipsam secans H B E. Qui quidem primò transeat per verticem, secetque Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in punctis B & E. Demissis autem ex punctis H, B, & E in axem



perpendicularibus H I, B C, & E D: ostendendum est, H I æqualem esse ipsis B C & E D simul sumptis.

Esto latus rectum Parabolæ ∞ *a*, C B ∞ *c*, D E ∞ *d*, H I ∞ *z*, A G ∞ *x*, & F G ∞ *y*. Hinc cum, per 11 propositionem 1 libri

Conicorum Apollonii, latus rectum seu a sit ad C B seu c, ut C B seu c ad A C: erit A C $\infty \frac{cc}{a}$. Eâdem ratione cum sit ut latus rectum ad D E, ita D E ad A D: erit A D $\infty \frac{dd}{a}$. Similiter, quoniam latus rectum est ad H I, ut H I ad I A: erit A I $\infty \frac{zz}{a}$. Unde, si auferatur A C $\infty \frac{cc}{a}$ ex A G ∞x, relinquetur C G seu L F $\infty x - \frac{cc}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ L B $yy + 2cy + cc$, erit summa $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, quadratum rectæ F B, per 47 prop. 1^mi lib. Elementorum. Sic etiam, si addantur quadrata ipsarum A G & G F, nimirum, xx & yy, erit summa $xx + yy$ quadratum rectæ F A. Quoniam autem in Circulo rectæ lineæ, à centro ad circumferentiam ductæ, sunt æquales; erunt quoque rectæ F B F A æqua-



les, unde & earum quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx + yy$. Quæ quidem æqualitas, si ritè ordinetur, dabit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$.

Eodem modo auferendo A D $\infty \frac{dd}{a}$ ex A G ∞x, relinquetur

GD

GD seu FO $\propto x - \frac{dd}{a}$. Cujus quadrato $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa}$ si addatur quadratum ex EO $dd + 2dy + yy$, erit summa $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ quadratum ex FE. Quod similiter adæquetur quadrato ex FA $xx + yy$, atque æquatio ritè ordinetur, ut inveniatur rursus $x \propto \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$.

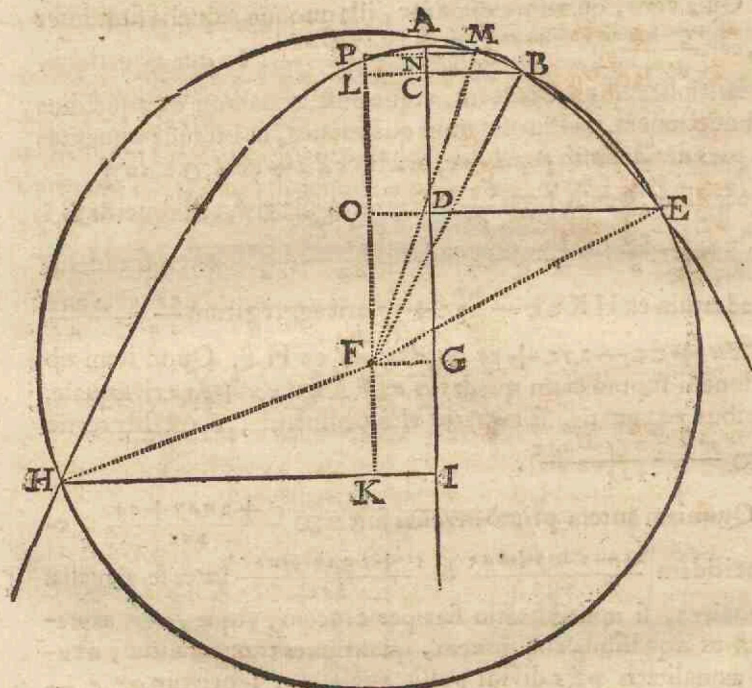
Quia verò, quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac} \propto \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$. In qua æquatione, si multiplicemus per crucem, atque post æqualium ex æqualibus subductionem, ita transferamus quantitates, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per $d - c$, orietur $cdd + ccd \propto 2aay$.

Similiter, si ex AI $\propto \frac{zz}{a}$ auferatur AG $\propto x$, relinquetur GI seu FK $\propto \frac{zz}{a} - x$. cujus quadrato $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx$ si addatur quadratum ex HK $zz - 2yz + yy$, erit aggregatum $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2yz + yy$ quadratum ex HF. Quod item ob rationem supradictam quadrato ex FA seu $xx + yy$ erit æquale. Quibus adæquatis, si æquatio ritè ordinetur, constabit tertiò $x \propto \frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$.

Quoniam autem primò inventa fuit $x \propto \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$, erunt itidem $\frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$ & $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$ inter se æqualia. Quocirca, si multiplicatio fiat per crucem, atque, post æqualium ex æqualibus ablationem, quantitates transferantur, ut utra æqualitatis pars dividi possit per $z + c$: orietur $czz - ccz \propto 2aay$.

Cum verò & supra inventnm fuerit $2aay \propto cdd + ccd$, erunt itidem $czz - ccz$ & $cdd + ccd$ inter se æquales. Quam æquationem si porrò per c dividamus, atque quantitates unius partis transferamus in aliam sub contrario signo, fiet $zz - cz \begin{smallmatrix}-dd\\-cd\end{smallmatrix} \propto 0$.

Postquam igitur evolvimus atque enodavimus propositionis data, donec tandem pervenerimus ad æquationem $zz - cz \begin{smallmatrix}-dd\\-cd\end{smallmatrix} \propto 0$, restat ut illa quæsito respondeat, atque ejus beneficio propositi veritas eluceat, modò ex datis elici possit. Ideoque tentatâ divisione ejusdem æquationis per $z - c - d \propto 0$, ut constet, num verum sit, quod intenditur, nempe, z æquari $c + d$: reperitur divisionem fieri posse, & oriri $z + d \propto 0$. Et manifestum fit, z æquari $c + d$, sive H I æqualem esse ipsis B C, E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.



Vnde patet, si Circulus, transiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc est, rectas C B, D E sibi invicem æquales faciat, tunc quidem H I ipsius C B seu D E duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, fiet æquatio $zz - cz - 2cc \propto 0$. Quæ dividi poterit per $z - 2c \propto 0$, & orietur $z + c \propto 0$. Id quod arguit z valere $2c$, hoc est, H I ipsius C B seu D E duplam esse.

Sed non transeat circulus H B E per verticem A, verùm secet Para-

Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in tribus punctis E, B, & M: Dico similiter H I æqualem esse ipsis E D, B C, & M N simul sumptis.

Positis enim iisdem quæ priùs, esto præterea M N ∞ b. Vnde, simili ratione, quâ ante, A N erit $\frac{bb}{a}$. Sublatâ autem A N ex A G ∞ x, relinquitur N G seu P F ∞ $x - \frac{bb}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ M P ∞ $bb + 2by + yy$, erit summa $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ quadratum rectæ F M.

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ F B & F M sunt æquales, erunt quoque eorundem quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde, si demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per aa, atque quantitates in x ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy - 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $c - b$, & orietur $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \infty 2acx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ac + 2ab$, & orietur $x \infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ F E & F M sint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe, $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquisque ductis in aa, transeant porrò quantitates in x ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fietque $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur utraque pars per $d - b$, orieturque $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \infty 2adx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ad + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$.

Iam verò, quoniam, quæ uni æqualia sunt, illa quoque inter se sunt

ſunt æqualia, erit $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$
$= \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Brevitatis verò causâ pro $b^3 + 2aay + aab$ ſcribatur $+ e^3$ ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, ſeu (quod idem eſt) diviſo utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + bbcd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 = c^3d + c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc + de^3 + be^3$. Et, deletis utrinque æqualibus, reſtituatur valor quantitatis aſſumptæ e^3, habebiturque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + b^3d + aabd + b^3c + 2aacy + aabc = c^3d + c^3b + bccd + bbcc + b^3c + aabc + b^3d + aady + aabd$. Rurſus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & diviſio tandem inſtituatur per $d - c$, orieturque $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc = 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM ſint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde ſublatis utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, ſi transferantur porrò quantitates, ita ut, quæ in x ductæ ſunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4 - b^4 - 2aazy - 2aaby + aazz - aabb = 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z + b$, orieturque $z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab = 2azx - 2abx$. Et rurſus utrinque per $2az - 2ab$, fietque

$$x = \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}.$$

Quoniam verò ſuperiùs inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$, hinc
$\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$ &
$\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$ erunt quoque inter ſe æqualia.

Bre-

Brevitatis autem causâ rursus pro $+b^3+2aay+aab$ scribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3-2aay-aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+bbcz+b^3z+aacz+aabz-ce^3-be^3 \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc+bbcz-b^3c+aacz-aabc+ze^3-be^3$. Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, & fit $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+b^3z+aabz-b^3c-2aacy-aabc \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc-b^3c-aabc+b^3z+2aayz+aabz$. Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituatur divisio per $z+c$, & orietur $2aay \infty czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc$.

Verùm cum & supra inventum fuerit $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \infty 2aay$, &, quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit $czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc \infty cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, fietque

$$\begin{array}{llll} czz & \infty + ccz & + cdd & \text{Deinde dividatur utrobique} \\ +b & + 2bc & + ccd & \\ & + bb & + bdd & \\ & & + 2bcd & \\ & & + bbd & \end{array}$$

per $c+b$, ut oriatur

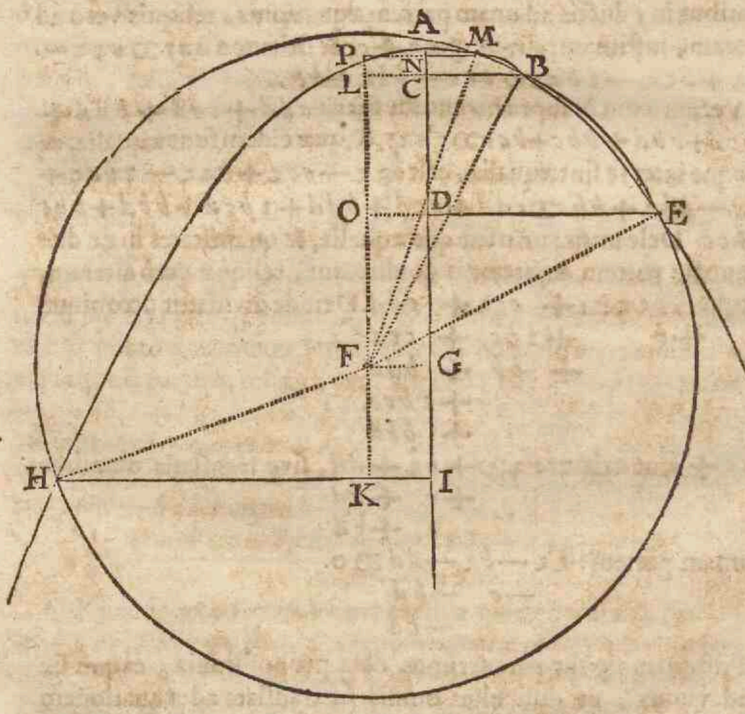
$$\begin{array}{llll} zz & \infty + bz & + dd, & \text{sive translatis omnibus} \\ & + c & + bd & \\ & & + cd & \end{array}$$

ad unam partem:

$$\begin{array}{lll} zz - bz & - dd & \infty\, 0. \\ - c & - bd & \\ & - cd & \end{array}$$

Postquam igitur percurrimus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem $zz \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} z \begin{array}{l} -dd \\ -bd \\ -cd \end{array} \infty\, 0$, superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantùm quidem ex suppositis datis deduci potest. Hunc in finem tentanda erit divisio æquationis per $z - b - c - d \infty 0$, ut constet num verum sit, quod intenditur. Quare cum tentatâ divisione reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \infty 0$, sequitur quoque quæsitum propositionis esse verum, hoc est, z æquari $b + c + d$, sive H I æqualem esse ipsis M N, B C, & E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde liquet, si circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in M vel B, hoc est, rectas N M, C B sibi invicem æquales faciat, tunc H I æqualem fore ipsi D E, unà cum dupla ipsius N M vel C B. Si enim in hac ultima æquatione pro c scribatur b,



fiet æquatio $z z - 2 b z \begin{matrix} - dd \\ - 2bd \end{matrix} \infty 0$, quæ dividi poterit per $z - d - 2 b \infty 0$, & orietur $z + d \infty 0$. Id quod arguit z valere $d + 2 b$,

$d + 2b$, hoc est, HI æqualem esse compositæ ex DE & dupla NM seu CB.

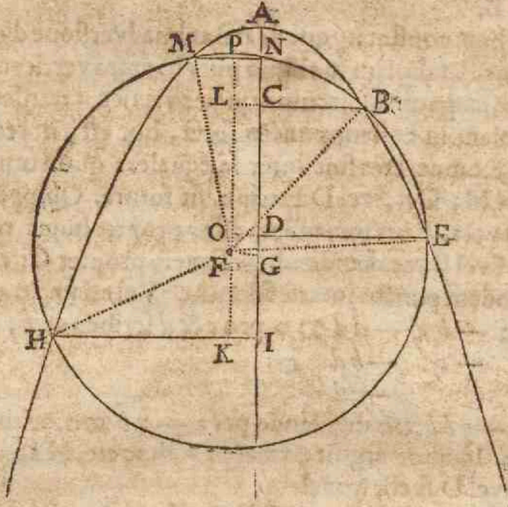
Præterea hinc constat, (quod sanè animadversione dignum) si recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipsa ibidem quoque tangatur à Circulo non per verticem transeunte, quique Parabolam in eodem puncto secet, hoc est, ut rectæ NM, CB, & DE omnes tres sint inter se æquales: quòd tunc quidem HI ipsius NM, CB, vel DE tripla sit futura. Quippe considerando NM vel CB bis sumendam esse, propter hujus rectæ contactum in M vel B, ac deinde adhuc semel, propter Circuli & Parabolæ in eodem puncto intersectionem. Vel etiam in æquatione inventa $zz \begin{array}{l} -bz \\ -c \end{array} \begin{array}{l} -dd \\ -bd \\ -cd \end{array} \infty\ 0$ pro c & d scribendo b, ac deinde $zz - 2bz - 3bb \infty\ 0$ dividendo per $z - 3b \infty\ 0$. oritur namque $z + b \infty\ 0$. Id quod arguit z valere $3b$, hoc est, HI triplæ ipsius NM, CB, vel DE esse æqualem.

Denique secet Circulus HBE Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; istinc verò in B & E. Dico itidem HI, MN simul sumptas ipsis BC, ED simul sumptis esse æquales.

Positis enim iisdem quæ priùs, invenietur similiter, sicut ante ostendimus, quadratum ex FM esse $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ FB & FM sunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Vnde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per aa multiplicatis, si transferantur porrò quantitates in x ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy + 2aaby + aacc - aabb \infty\ 2accx - 2abbx$. Divisâ autem utrâque parte per $c + b$, orietur $c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab \infty\ 2acx - 2abx$. Vbi rursus si utrinque dividatur per $2ac - 2ab$, orietur

$$x \infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}.$$

Eodem modo, cum rectæ FE & FM sint æquales, erunt etiam earum quadrata $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ &



$xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Quare si demantur utrobique æquales, & reliquæ ducantur in aa, nec non quantitates in x ductæ disponantur ad unam, reliquæ verò ad alteram æquationis partem constituendam, fiet $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \propto 2addx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $d + b$, & proveniet $d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab \propto 2adx - 2abx$, & rursus utrinque per $2ad - 2ab$, orieturque $x \propto \frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$.

Quia verò quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$

$\propto \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$. Brevitatis autem causâ pro $- b^3 + 2aay - aab$ scribatur, propter earundem quantitatum amphiboliam, $\pm e^3$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd + bbcd - b^3d + aacd - aabd \pm ce^3 \mp be^3 \propto c^3d - c^3b - bccd + bbcc + bbcd - b^3c + aacd - aabc \pm de^3 \mp be^3$. Et, deletis

Signum $\pm$ significat + vel —. Signum $\mp$ significat + vel — sensu contrario tis utrinque æqualibus, reſtitutoque valore quantitatis aſſumptæ $8\,e^3$, fiet $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd - b^3 d - aabd - b^3 c + 2aacy - aabc \infty c^3 d - c^3 b - bccd + bbcc - b^3 c - aabc - b^3 d + 2aady - aabd$. Vbi ſi demum demantur utrobique æquales quantitates, & quæ in y ductæ ſunt transferantur, ut unam faciant æquationis partem, reliquæ autem alteram, ac tandem diviſio inſtituatur per $d - c$, orietur $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \infty 2aay$.

prioris ſigni, h.e., cum per ſignum 8 intelligitur +, tum per ſignum 8 intelligitur —; aut cùm per ſignum 8 intelligitur —, tum per ſignum 8 intelligitur +.

Similiter, cum rectæ HF & FM æquales ſint, erunt quoque earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Vnde ablatis utrinque æqualibus, reliquisque multiplicatis per aa, adhibeatur porrò tranſlatio, ut quantitates in x ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fietque $z^4 - b^4 + 2aaby - 2aazy + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z - b$, & orietur $z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab \infty 2azx + 2abx$. Rurſus dividatur utrinque per $2az + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$.

Quia verò & ſupra quantitas x inventa fuit $\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$, erunt $\frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$ & $\frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ inter ſe æqualia. Brevitatis cauſsâ, ſcribatur rurſus $8\,e^3$ pro $-b^3 + 2aay - aab$, & $8\,e^3$ pro $+b^3 - 2aay + aab$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$; ſeu, quod idem eſt, diviſo utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz + bbcz - b^3 z + aacz - aabz \;8\; ce^3 \;8\; be^3 \infty c^3 z + bc^3 - bccz - bbcc + aacz + b^3 c + bbcz + aabc \;8\; ze^3 \;8\; be^3$. Ablatis porrò utrinque æqualibus, reſtitutisque valoribus quantitatum aſſumptarum $8\,e^3$ & $8\,e^3$, fiet $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz - b^3 z - aabz + b^3 c - 2aacy + aabc \infty c^3 z + bc^3 - bccz - bbcc + b^3 c + aabc - b^3 z + 2aazy - aabz$. Vbi ſi rurſus utrobique demantur æquales, & quantitates in y ductæ ad unam

 partem

partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per $z + c$, orietur $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \propto 2aay$, &, quæ eidem æquantur, inter se quoque sint æqualia, erit $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$. Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, habebiturque

$$\begin{array}{lllll} +czz & \propto & +ccz & + & cdd. \\ -b & & -2bc & + & ccd \\ & & +bb & - & bdd \\ & & & - & 2bcd \\ & & & + & bbd \end{array}$$

Vbi tandem si utrobique dividatur per $c - b$, orietur

$$\begin{array}{lll} zz \propto & cz & + dd. \\ & -b & +cd \\ & & -bd \end{array}$$

Hoc est, si collocentur quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0. \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

Quare postquam percurrimus omnia propositionis data, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis reducta sit ad æquationem

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0: \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

superest ut ipsa contineat quæsitum propositionis, modò sit verum atque ex datis deduci possit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi possit per $z - c - d + b \propto 0$. Quare cum reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \propto 0$, sequitur quæsitum propositionis esse verum, hoc est, $z + b$ æquari $c + d$, sive H I & M N simul sumptas æquales esse ipsis B C & E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde liquet, si Circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc est, rectas C B, D E sibi invicem æquales faciat, tunc H I, M N simul sumptas ipsius C B vel D E duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, erit æquatio

tio talis: $\begin{matrix} zz & -cz & -2cc \\ & +b & +bc \end{matrix} \infty 0$, quæ dividi poteſt per $z - 2c + b \infty 0$, & oritur $z + c \infty 0$. Id quod arguit, z valere $2c - b$, ſive $z + b$ eſſe $\infty 2c$, hoc eſt, H I & M N ſimul ſumptas æquales eſſe ipſi C B ſeu D E bis ſumptæ.

Quare conſtat Theorematis veritas.

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus &c.] Quò ea, quæ de exprimendis radicibus Æquationum Cubicarum Autor hîc breviter perſtrinxit, cuivis manifeſtiora fiant: viſum fuit poſt ſequentis loci illuſtrationem afferre huc Appendicem, quam de Cubicarum Æquationum reſolutione anno 1646 ſimul cum Organica Conicarum Sectionum deſcriptione in lucem emiſimus, & nunc emendato hîc illic ſenſu cum additione quorundam ſubjungimus. Y

Hanc autem curvam in 6 diverſis punctis ſecare poteſt, ita ut hîc ſex diverſæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus ſecat, hoc indicio eſt, quaſdam ex hiſce radicibus inter ſe æquales eſſe, aut ipſarum aliquas eſſe tantùm imaginarias.] Quoniam hîc nonnulli ſcrupulum ſibi ipſis injiciunt, concipiendi, qui fieri poſſit, ut circulus aliquis hanc curvam in 6 diverſis punctis ſecet: haud abs re fore credidi, ſi hoc loco exemplum, quod ſibi jam pridem ingenioſiſſimus Huddenius, ad difficultatem hujus rei è medio tollendam, ſubjecit, adducerem. Z

Quocirca ſumendo ad hoc æquationem $y^6 - 21y^5 + 169y^4 - 675y^3 + 1414yy - 1464y + 576 \infty 0$, cujus radices, ut, 1, 2, 3, 3, 4, & 8, ſunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3, ad calculi prolixitatem evitandam, inter ſe æquales: oportet, ad curvæ hujus deſcriptionem, aſſumere A B $\infty \frac{1}{2}p \infty 10\frac{1}{2}$, B K $\infty \sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$ ſeu $n \infty \sqrt{\frac{479}{4}}$, & E D vel T V $\infty \frac{2\sqrt{v}}{pn} \infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$. Deinde, ut inveniatur circulus P C N, oportet, acceptâ B L æquali E D $\infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$, aſſumere L H $\infty \frac{t}{2n\sqrt{v}} \infty \sqrt{\frac{3721}{479}}$; & ex puncto H erectâ perpendiculari H I $\infty \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$ (id quod brevitatis causâ vocetur $\frac{m}{nn}$) $\infty \frac{2727}{479}$, in circulo cujus diame-

$p \infty$	21
$q \infty$	169
$r \infty$	675
$s \infty$	1414
$t \infty$	1464
$v \infty$	576

Vide figuras Pag. 98 & 100.

diameter I L inscribere L P $\propto \sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}} \propto \sqrt{\frac{7672}{479}}$: eritque I P radius quæsiti circuli $\propto \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}} \propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$.

Iam ut constet, circulum hunc ex I intervallo invento I P descriptum secare vel tangere curvam A C N in tot diversis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc est, hîc in 5 diversis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non secet sed tangat: considerandum est, lineam I M esse $\propto \frac{m}{nn} - y$ vel $y - \frac{m}{nn}$, adeoque quadratum ex I M semper esse $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, & lineam G H vel C M semper

$$\propto \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}.$$

Ac proinde, si, tribuendo radici y unumquemque ex supra dictis valoribus, ex lineis hisce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam I C, eamque singulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento I P $\propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$: certum est, quòd circulus P C N eandem curvam A C N, quemadmodum indicatum fuit, sit secturus vel tacturus.

Hinc,

si ponatur $y \propto 1$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{5053504}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{490496}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \propto 2$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{3129361}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{2414639}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \propto 3$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{1664100}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{3879900}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \propto 4$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{657721}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{4886279}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \propto 8$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{1221025}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{4322975}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$.

Ex quibus igitur apparet, quòd, assumptâ qualibet ex radicibus, linea I C semper ipsi I P inveniatur æqualis, hoc est, quòd circulus, qui ex I intervallo I P describitur, curvam A C N in 5 diversis punctis secet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio proposita diversos admittit radicis valores. Quod erat ostendendum.

Eodem modo liquet, si æquatio proposita 6 radices inæquales habuerit, quòd tunc quoque circulus P C N curvam A C N in 6 diversis punctis secet.

AP-

APPENDIX,

DE

CVBICARVM

ÆQVATIONVM RESOLVTIONE.

ÆQVATIONES Cubicæ omnes, & Quadrato-quadratæ, * quæ quidem & ad Cubicas reducuntur, quarum radix duarum eſt dimenſionum, ſemper ad aliquam trium ſequentium formularum reduci poſſunt.

*Vide quæ habentur pag. 92. à lin. 11 uſque ad finem ejuſdem paginæ.

$$z^3 \propto * - pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz - q.$$

In priori autem formulâ, ubi z^3 æquatur $-pz+q$, regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit, nos docet radicem eſſe $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Quemadmodum etiam ſi habeatur $z^3 \propto +pz+q$, in qua quadratum ſemiſſis ultimi termini ſit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, ſimilis regula oſtendit radicem fore $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

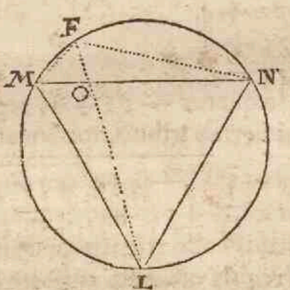
Vnde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles, ſemper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoſcitur, exprimi poſſe.

Deinde verò ſi habeatur $z^3 \propto +pz+q$, ubi $\frac{1}{4}qq$ ſit minus quàm $\frac{1}{27}p^3$, ibi prædicta regula non habet locum, nec ejuſdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari poteſt, ſicut inferiùs oſtendemus. Quæ quidem res olim multæ fuit caliginis, & ut ſcribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodiit: *hoc eſt, in quo Autores hactenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maximè difficili.*

Hinc, quæ huc ſpectant ſubobſcura, aut neglectâ demonſtratione apud prædictos Autores invenimus, ea illustrare nobis visum fuit: præmittentes ad hoc sequentia Theoremata demonstrata.

THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum M N L circulo inscriptum, atque ex L educta utcunque recta L F usque ad circumferentiam in F, quæ secet M N in O, junctæque rectæ M F, F N: Dico F L æqualem esse ipsis M F, F N simul sumptis.



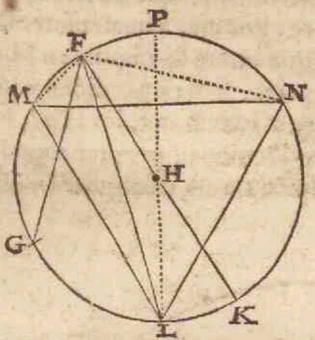
Triangula enim L N O & L N F similia sunt, cum habeant angulum ad L communem, & angulum L N O, hoc est, L M N ipsi L F N [1] æqualem, unde & tertius L O N tertio L N F [2] æqualis est. Quocirca [3] erit ut N O ad L N, ita F N ad L F. Eodem modo cum similia sint triangula L M O & L F M, erit ut M O ad L M seu L N, ita F M ad L F. Igitur [4] erit, ut N O, M O simul ad L N, ita F N, F M simul ad L F. Æquales autem sunt N O, M O simul sumptæ ipsi L N, æquales ergo quoque erunt F N, F M simul sumptæ ipsi L F. Quod erat ostendendum.

1 per 21 prop. tertii Elem.
2 per 32 primi Elem.
3 per 4tam sexti Elem.
4 per 24 quinti Elem.

THEOREMA II.

Iisdem positis, ductâ diametro F H K, sumatur arcus G L K triplus arcûs L K, jungaturque G F: Dico similiter arcum G M F arcus M F, nec non arcum G N F arcûs N F triplum esse.

Ducatur enim diameter L H P. Hæc namque secabit arcum M F N bifariam in P. Quoniam autem propter triangulum æquilaterum M N L circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-



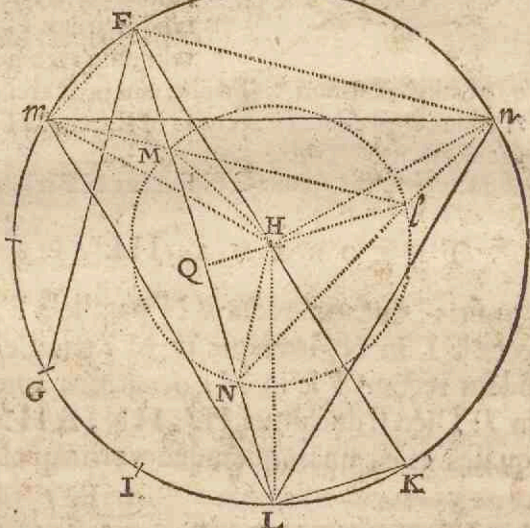
æquales, ac ipſa tripla eſt arcus M P N, erit & ſemicircumferentia F M K tripla arcus M P. Quocirca cum eadem ratio ſit arcus F M K ad arcum M P, totius ad totum, quæ arcus G L K ad arcum L K ſeu F P, ablati ad ablatum, erit quoque reliqui arcus G M F ad reliquum arcum M F eadem ratio, quæ totius ad totum *. Triplus autem eſt arcus F M K arcus M P. Triplus ergo etiam eſt arcus G M F arcus M F. Quod erat demonſtrandum. *per 19 quinti Elem.

Eodem modo oſtenditur arcum G N F arcus N F triplum eſſe.

THEOREMA III.

Iiſdem poſitis, ducatur recta *n* N parallela F *m*, occurrens rectæ F L in N; itemque *m* M *l* parallela F *n*, ſecans quidem rectam F L in M, occurrens autem ductæ *n* N in *l*: Dico ſi ducantur H *l*, H N, & H M ipſas inter ſe æquales eſſe, unamquamque verò æqualem rectæ L K.

Quoniam enim anguli *m* F M & N F *n* ſinguli circumferentiæ tertiæ parti inſiſtunt, & ob parallelas ductas angulus F M *m* angulo N F *n* æquatur, at angulus F N *n* angulo *m* F M: erunt triangula *m* F M & N F *n*, quemadmodum etiam triangulum N M *l* æquiangula, ac proinde æquilatera. Porrò cum F L æquetur ipſis *m* F, F *n* ſimul ſumptis (ut ſupra oſtenſum fuit); atque ablata F M ipſi *m* F, erit reliqua M L ipſi F *n* æqualis: cumque F N æquetur ipſi *m l*, erunt quoque M L & *m l*, atque adeò omnes tres *m l*, *n* N, & M L inter ſe æquales. Vnde ſi ab his æqualibus rectis auferantur rectæ inter ſe æquales M *l*, N *l*, & M N, remanebunt ſimiliter *m* M, *n l*, & N L inter ſe æquales. Præterea cum *m n*, *n* L, & L *m* tres rectæ ſint inter ſe æquales, liquet triangula *mnl*, *n*L N, & L*m*M inter se constare ex æqualibus lateribus, ipsaque ob hoc & angulos singulos singulis æquales habere, hoc est, æquales inter se erunt anguli *m n l*, *n* L N, & L *m* M. Quia autem & anguli *m n* H, *n* L H, & L *m* H inter se æquales sunt, patet, si hi ex prædictis æqualibus inter se angulis demantur, reliquos itidem angulos H *n l*, H L N, & H *m* M inter se æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum H *n*, H L, & H *m*, perspicuum est, triangula H *n l*, H N L,

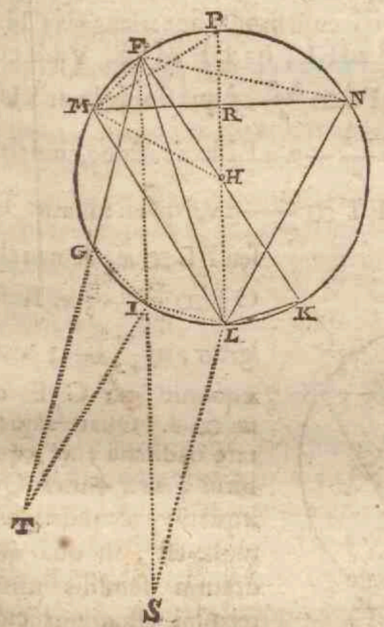


& H *m* M habere inter se duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac insuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & basin basi æqualem habebunt, atque adeò æquales inter se erunt rectæ H *l*, H N, & H M. Quòd autem præterea unaquæque ex ipsis æquetur rectæ L K, consequenter sic ostenditur. Producatur *l* H ut secet F L in Q. Hæc igitur ad rectos angulos cadet in F L, atque eam bifariam secabit in Q. Quia porrò, propter similitudinem triangulorum F L K & F Q H, F L est ad L K, ut F Q ad Q H; & permutando F L ad F Q, ut L K ad Q H, atque F L ipsius F Q est dupla; erit quoque L K ipsius

Q H

Q H dupla. Dupla autem etiam eſt H *l* ipſius Q H; ſiquidem æquilaterum eſt triangulum M *l* N: quare & H *l* nec non H M, H N ipſi L K æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

Ex his perſpicua ſunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello ſupra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12, in qua cubus trientis numeri radicum major eſt quadrato ſemiſſis numeri abſoluti, ſit exprimenda.



Vt autem pateat M N eſſe $\surd\ 13$, ob 13 ① in æquatione, ſciendum eſt ductis rectis H M, M P triangulum H M P eſſe æquilaterum, ac proinde quadratum M R triplum eſſe quadrati H R. Quocirca cum eadem ſit ratio duplæ M R, hoc eſt, ipſius M N ad duplam H R, hoc eſt, H P, quàm ſimplæ M R ad ſimplam H R: erit quoque quadratum M N quadrati H P triplum. Vnde ſi ſtatuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicum 13, hoc eſt, ∞ $\surd\ 4\frac{1}{3}$, liquet M N tunc fore $\surd\ 13$. Sicut proponebatur.

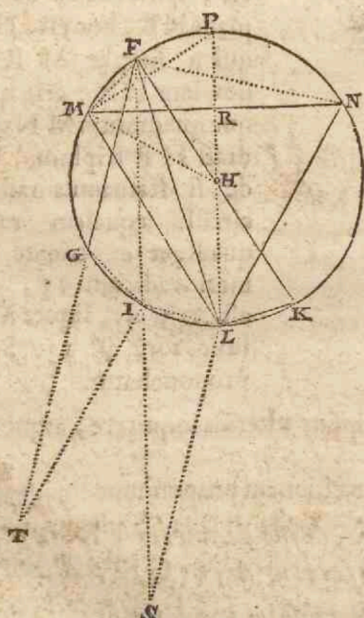
Lubet autem propoſitum ipſius ulteriùs inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejuſmodi quæſtionem proponimus.

Circulo exiſtente F G K, *cujus diameter* F K, *in eoque inſcriptâ* F G, *trifariam ſecetur arcus* G K, *à diametro & inſcriptâ interceptus, in punctis* I & L, & *recta conne-*

ctatur F L; *datâ autem* F H *seu* HK ꝏ a, & F G ꝏ b, *oporteat invenire* F L ꝏ x.

Iungantur K L, L I, & I G, ductâque F I producatur ad S, donec angulus F S L æquetur angulo I F L: eritque S L æqualis L F, & S I æqualis F L. Æqualis enim est S L ipsi L F [1], & S I ipsi F K, propter triangula I L S & K L F, quorum duo anguli L I S & S unius singuli sunt æquales duobus L K F & L F K alterius [2], ac præterea latus I L lateri L K [3]. Eodem modo, productâ F G donec angulus F T I æquetur angulo G F I; erit similiter T I æqualis I F, atque T G ipsi L F. Porrò cum similia sint triangula F H L, F L S, & F I T: erit ut H F ad F L, ita L F ad F S. Vnde cum H F sit ꝏ a, & F L ꝏ x, erit F S ꝏ $\frac{xx}{a}$, è quâ si auferatur S I seu K F ꝏ $2a$, relinquetur I F ꝏ $\frac{xx}{a} - 2a$. Eâdem ratione, cum sit ut H F ad F L, ita I F ad F T, erit F T ꝏ $\frac{x^3}{aa} - 2x$, è quâ si tollatur T G seu F L ꝏ x, remanebit G F ꝏ $\frac{x^3}{aa} - 3x$. Restat igitur, ut $\frac{x^3}{aa} - 3x$ adæquetur ipsi G F datæ ꝏ b. Quare æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax + aab$. Quæ æquatio secundæ formulæ est, in quâ quadratum semissis ultimi termini est minus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi: majus enim est a^6 quàm $\frac{1}{4}a^4bb$. Nam si utrobique dividamus per a^4, fit aa majus quàm $\frac{1}{4}bb$, cum, utrinque extrahendo radicem, a fiat majus quàm $\frac{1}{2}b$, seu $2a$ majus quàm b. Vt est manifestum, cum $2a$ dia-



[1] per 6 primi Elem.
[2] per 21 & 22 tertii Elem. nec non 13 primi Elem.
[3] per 29 tertii Elem.

2 a diametrum circuli referat, b autem in eodem inſcriptam G F, atque diameter omnium rectarum circulo inſcriptarum [1] ſit maxima. Vnde ſi a^6 æquetur $\frac{1}{4}a^4\,bb$, tunc quoque inſcripta G F æqualis erit diametro F K: ita ut eo caſu duæ hæ lineæ coincidant, ac eadem fiat quæſtio ac ſi ſemicircumferentia F G K in tres æquales partes ſecanda foret. Quo quidem caſu radix quæſita F L ſit latus trianguli æquilateri, eodem circulo inſcripti.

[1] per 15 tertii Elem.

E quibus plana fiunt illa, quæ ad explicationem radicis ſupradictæ æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12 Albertus Girardus in medium affert. Vbi inter $4\frac{1}{3}$ (tertiam partem ipſius 13) & unitatem, mediam proportionalem invenit $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, eamque ſemidiametrum circuli ſtatuit F H, quâ ut radio ipſum deſcribit, ac in eo deinde lineam F G adaptat æqualem $2\frac{10}{13}$, (quotienti videlicet diviſionis 12 per $4\frac{1}{3}$). In quo porrò trifariam ſecando arcum G K in punctis I & L, jungendoque F L, ait F L eſſe valorem radicis quæſitæ 1 ① æquationis propoſitæ. Dicens præterea alios duos valores ipſius ①, per — expreſſos, deſignari per rectas F M, F N, eoſque duobus modis inveniri. Iuxta priorem quidem, ſi [2] centro H & intervallo L K arcus deſcribatur M N, ſecans F L in M & N; Iuxta poſteriorem verò, [3] deſcribendo in circulo à puncto L triangulum æquilaterum L M N, jungendoque F M & F N. Illas enim utroque modo eaſdem inveniri, ex ſupra demonſtratis manifeſtum eſt.

[2] ut in fig. pag. 348.

[3] ut in fig. pag. 347.

Vbi præterea notat in æquatione 1 ③ ∞ 13 ① — 12 oſtenſos valores prioris æquationis radici quæſitæ propoſitæ æquationis ſatisfacere, ſi tantùm eorum ſigna + & — immutaverimus, eaque denotaverimus per — F L, + F M, & + F N. Sed hoc ex ſequentibus perſpicuum fiet. Quemadmodum etiam illud, quod ſpectat ad æquationes ſecundæ formulæ, quas inquit neminem ad ſuum uſque tempus reſolvere ſciviſſe, quæ ſecundùm Analyſin ſpecioſam Vietæ ita denotantur:

$$\text{A cubus æqualis} \left.\begin{matrix}+BB\\+BC\\+CC\end{matrix}\right\}\text{in A}\left.\begin{matrix}+B\\+C\end{matrix}\right\}\text{in BC.}$$

Quòd eodem recidit ac ſi earundem conſtitutionem ſic agnoſceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta eſſe tria proportionalia plana B B, B C & C C, quorum aggregatum ſit B B + B C + C C, ſeu quantitas p; & quod fit ex medio plano

plano in aggregatum eorundem laterum ſit $\overline{B+C}$ in BC, ſeu quantitas q. Quod quidem ultimum factum ſic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus ſecundum; vel etiam ex ſumma duorum poſteriorum planorum in latus primum: cum tria illa ſolida inter ſe æqualia ſint, ut experienti conſtabit.

Vt autem penitiùs hæc introſpiciamus, atque æquationum harum conſtitutionem agnoſcamus, ponamus $x \propto d$ ſeu $x - d \propto 0$, & rurſus $x \propto -b$ ſeu $x+b \propto 0$, ac denuo $x \propto -c$ ſeu $x+c \propto 0$, ducamusque $x - d \propto 0$ in $x + b \propto 0$, tum verò quod inde fit in $x + c \propto 0$, & prodibit æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 - d\,xx & - b\,d\,x & - b\,c\,d \propto 0, \text{vel } x^3 \propto + d\,xx & + b\,d\,x + b\,c\,d. \\ \quad + b & - c\,d & \qquad\qquad\qquad\quad - b & + c\,d \\ \quad + c & + b\,c & \qquad\qquad\qquad\quad - c & - b\,c \end{array}$$

In qua ſi ponatur d, verus valor radicis x, æqualis $b + c$, duobus falſis valoribus ipſius x ſimul ſumptis, tunc quidem $+ d$ deſtruet $- b - c$, fietque $0\,x\,x$, hoc eſt, evaneſcet adfectio ſub quadrato, nec ampliùs ſeſe deſtruent. Nam cùm ex hypotheſi d æquatur $b + c$, communi multiplicatore d, fiet quoque $d\,d$ æquale $b\,d + c\,d$. At verò $d\,d$ majus eſt quàm $b\,c$, quandoquidem idem valet quod $b\,b + 2\,b\,c + c\,c$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $b\,d + c\,d$ majus erit quàm $b\,c$, manebitque adfectio ſub latere cum ſigno $+$. Ita ut, ſi $+ b\,d + c\,d - b\,c$ interpreteris per $+ p$, & $+ b\,c\,d$ per $+ q$, æquatio hanc recipiat formam: $x^3 \propto * + p\,x + q$. Quam itaque conſtat tres admittere diverſos radicis valores, unum quidem verum ſeu $+$ quàm 0, & alios duos falſos ſeu $-$ quàm 0, qui ſimul ſumpti ipſi vero ſunt æquales.

Porrò, ut hæc æquatio tres ſemper ejuſmodi radicis valores recipiat, requiritur, ut in illâ $\frac{2}{3}\,p\sqrt{\frac{1}{3}\,p}$ non ſit minus quàm q, ſeu quod idem eſt, ut $2\sqrt{\frac{1}{3}\,p}$ non ſit minus quàm $\frac{3\,q}{p}$, ſive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}\,q\,q$. Quandoquidem, ſi p planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum ſolidum, quod fit ex ductu ſummæ duorum priorum vel duorum poſteriorum in latus ſecundum vel primum, eſt illud, quod fit, cùm p planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejuſdem æquationis de unico tantùm valore explicabilis eſt, utpote verò, cum æquatio tunc non producatur

ex

ex ductu trium ejusmodi laterum in se invicem, nisi duo sumantur fictitia seu non existentia, quæ & impossibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem $1\,C \propto 6\,N + 40$, ubi $1\,N$ valet $+ 4$, cum $1\,C \pm 0\,Q - 6\,N - 40 \propto 0$ dividatur per $1\,N - 4 \propto 0$, oriaturque æquatio impossibilis $1\,Q + 4\,N + 10 \propto 0$, quæ nullas omnino admittit radices. Nisi velis illas, quarum sanè valor nullo modo comprehendi potest, utcunque tamen exprimere, ut scribendo $1\,N \propto -2 + \sqrt{-6}$, nec non $1\,N \propto -2 - \sqrt{-6}$. Ita ut verus valor ipsius $1\,N$ realis existat & sit 4, & duo falsi fictitii sint $-2 + \sqrt{-6}$, & $-2 - \sqrt{-6}$.

Signum $\pm$ significat + vel —.

Quòd si verò proponatur æquatio $1\,c \propto 6\,x + 6$, seu $1\,c \pm 0\,z - 6\,x - 6 \propto 0$, quæ per $1\,x$ + vel — aliquo numero, ultimum terminum 6 dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus $1\,x$ per ullum numerum absolutum vel fractum designari; sed verum valorem admittet, qui est irrationalis, quique juxta secundam Cardani regulam (hîc ante expositam) sic exprimitur: $1\,x \propto \sqrt{c}\,4 + \sqrt{c}\,2$.

In quo porrò sensu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi est obnoxia. Nam si, verbi gratiâ, proponatur $1\,C \propto -3\,N + 14$, poterit $1\,C \pm 0\,Q + 3\,N - 14 \propto 0$ dividi per $1\,N - 2$, & orietur æquatio impossibilis $1\,Q + 2\,N + 7 \propto 0$. Vnde liquet $1\,N$ valere tantùm 2, nec ullos alios valores admittere; nisi eos sic velis exprimere $-1 + \sqrt{-6}$, & $-1 - \sqrt{-6}$.

Sin autem æquatio ejusdem formulæ sit $1\,c \propto -3\,x + 10$ seu $1\,c \pm 0\,z + 3\,x - 10 \propto 0$, quæ per $1\,N$ — aliquo numero, ultimum terminum 10 dividente, dividi nequit, valor quoque verus radicis nullo numero absoluto vel fracto designari poterit. Quo igitur casu explicabitur secundùm priorem Cardani regulam, hoc modo: $1\,x \propto \sqrt{c.\,\sqrt{26}+5} - \sqrt{c.\,\sqrt{26}-5}$.

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus secundæ formulæ æquationis usum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod sequitur.

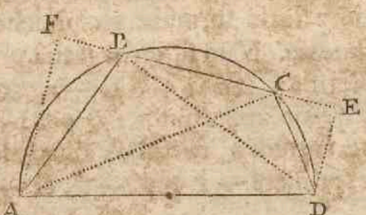
PROBLEMA.

In semicirculo supra diametrum A D *descripto quadrilatero* A B C D, *cognita sint tria ejus latera* AB, BC, & C D: *Oporteatque invenire diametrum seu quartum latus* A D.

Esto A B ꝏ a, B C ꝏ b, C D ꝏ c, diameter verò A D ꝏ x; ducaturque recta B D, atque in B C productam perpendicularis demittatur D E.

Quia itaque [1] triangulum A B D est rectangulum, ideoque [2] quadratum A D æquale duobus quadratis A B, B D: si à quadrato A D ꝏ xx subducatur quadratum A B ꝏ aa, relinquetur quadratum B D ꝏ $xx - aa$. Porrò quoniam obtusangulum est triangulum B D C, atque [3] quadratum B D majus quadratis B C, C D simul sumptis, duplo rectangulo B C E; si à quadrato B D ꝏ $xx - aa$ subducamus aggregatum quadratorum B C, C D ꝏ $bb + cc$, restabit duplum rectangulum B C E ꝏ $xx - aa - bb - cc$. Denique cum similia sint triangula A B D & C E D, siquidem ipsa rectangula sunt, ac angulos præterea A & D C E [4] æquales habent: erit ut D A ad A B, ita D C ad C E. Unde cum A D sit ꝏ x, A B ꝏ a, & D C ꝏ c: erit C E ꝏ $\frac{ac}{x}$. Quæ si ducatur in duplam B C ꝏ $2b$, fiet duplum rectangulum B C E ꝏ $\frac{2abc}{x}$. Æquandum propterea duplo rectangulo B C E ante invento ꝏ $xx - aa - bb - cc$. Quare $\frac{2abc}{x}$ æquabitur $xx - aa - bb - cc$. Hoc est ordinatâ æqualitate, erit

$$x^3 \;ꝏ\; \begin{array}{l} +aax + 2abc. \\ +bb \\ +cc \end{array}$$



Unde cum hæc æquatio sit cubica secundæ formulæ, videndum deinceps an quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipsi æquale, an eo

[1] per 31 tertii Elem.
[2] per 47 primi Elem.
[3] per 12 secundi Elem.
[4] per 22 tertii & 13 primi Elem.

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quàm illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini est $\frac{aa+bb+cc}{3}$, ejus cubus

$$\frac{a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6}{27}.$$

Quadratum autem semissis ultimi termini est $aabbcc$. Oportet itaque horum utriusque relationem indagare. In quem finem productas quantitates $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ & $27aabbcc$ inter se confero, ut sequitur.

$3a^4bb$. $3aabbcc$. $3bbc^4$. sunt tres proportionales in ratione aa ad cc, unde $3a^4bb+3bbc^4$ majus erit quàm $6aabbcc$, *per 25 quinti Elementorum.*

Sic $3aab^4$. $3aabbcc$. $3aac^4$. sunt tres proportionales in ratione bb ad cc, unde $3aab^4+3aac^4$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Vt & $3a^4cc$. $3aabbcc$. $3b^4cc$. sunt tres proportionales in ratione aa ad bb, unde $3a^4cc+3b^4cc$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Quare & omnes simul omnibus simul erunt majores, hoc est, erit $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus quàm $18aabbcc$.

Vnde & illius subtriplum $a^4bb+aab^4+a^4cc+bbc^4+aac^4+b^4cc$ majus quàm hujus subtriplum $6aabbcc$.

Rursus quoniam a^6. a^4bb. aab^4. b^6. sunt proportionales continuè in ratione aa ad bb, erit a^6+b^6 majus quàm $a^4bb+aab^4$.

Sic etiam quia b^6. b^4cc. bbc^4. c^6. sunt proportionales continuè in ratione bb ad cc, erit b^6+c^6 majus quàm $b^4cc+bbc^4$.

Similiter cum a^6. a^4cc. aac^4. c^6. sint proportionales continuè in ratione aa ad cc, erit a^6+c^6 majus quàm $a^4cc+aac^4$.

Quare & simul omnes simul omnibus erunt majores, hoc est, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $a^4bb+aab^4+b^4cc+bbc^4+a^4cc+aac^4$. Quia autem hoc ipsum majus est quàm $6aabbcc$, ut supra ostendimus, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $6aabbcc$. Vnde & semissis $a^6+b^6+c^6$ majus quàm $3aabbcc$.

Quocirca cum $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b_4cc$ majus sit quàm $18aabbcc$.
ac ipsi addatur $a^6+b^6+c^6$ —— —— —— quod majus est quàm $3aabbcc$.
& adhuc utrobique $6aabbcc$ —— —— —— —— —— $6aabbcc$.

Fiet quoque $a^6+3a^4b+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ majus quàm $27aabbcc$.

 Equi-

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porrò est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data A B, B C, & C D inter se inæqualia statuantur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cùm verò duo quælibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Vt si b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 \begin{matrix} -aa \\ -2bb \end{matrix} x - 2abb \infty 0$, quæ dividi poterit per $x + a \infty 0$, quâ ratione ipsa reducetur ad quadratam: $xx - ax - 2bb \infty 0$, quæ ulteriùs dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam: $x^3 - 3aax - 2a^3 \infty 0$, eaque dividi poterit per $x - 2a \infty 0$, orietur namque æquatio: $xx + 2ax + aa \infty 0$, duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Vnde sequitur verum valorem radicis x eo casu fore $2a$, & duos falsos valores esse $-a$ & $-a$. Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera A B, B C, & C D æqualia inter se extiterint, figura A B C D fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porrò si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto A B seu $a \infty 24$, B C seu $b \infty 20$, C D seu $c \infty 15$, & quæratur A D ∞x. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniatur $\infty 1201$, & $2abc \infty 14400$, exurget ejusmodi æquatio: $x^3 \infty 1201x + 14400$, seu $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$. Quæ dividi potest per $x + 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \infty 0$, seu $xx \infty 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ seu diameter quæsita A D tres recipiat diversos valores, unum verum seu + quàm 0, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falsos seu — quàm 0, ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quòd si verò æquatio supra dicta $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam x + vel — aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm fal-

sam

ſam ullo numero exprimi potuiſſe, ſed eam hoc caſu denotandam eſſe per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra oſtendetur.

Vt ſi, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \infty 243x + 1215$, ſeu $x^3\ 8\ 0xx - 243x - 1215 \infty 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falſa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoſcitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hîc cubus trientis numeri radicum major ſit quàm quadratum ſemiſſis numeri abſoluti. Adeò ut radix ejus per ſectionem anguli in tres æquales partes ſit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum deſcribendo circulum cujus radius FH ſeu HK ſit 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam porrò ſecando arcum GK ſeu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipſius radicis x exprimere. Vbi prætereà, ſi centro H intervallo rectæ LK arcum deſcripſerimus ſecantem ipſam FL in M & N [1], vel quod idem eſt à puncto L triangulum æquilaterum circulo inſcripſerimus LMN [2], rectæ FM & FN utramque falſam quantitatem radicis x deſignabunt.

[1] ut in fig. pag. 349.
[2] ut in fig. pag. 350.

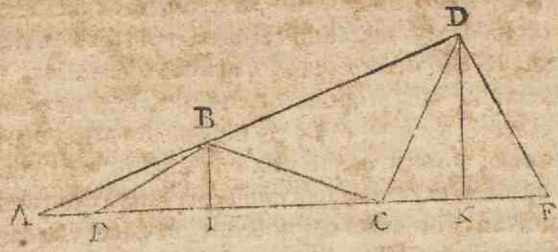
Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exſequi. Videlicet, ſi, [3] intervallo rectæ FH vel HK ∞ 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ deſcribatur circulus, in quo, inſcriptâ rectâ FG ∞ 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, arcus FMG & FNG trifariam porrò ſecentur, per rectas FM & FN, quas inquit ſimul ſumptas radici quæſitæ eſſe æquales.

[3] ut in fig. pag. 350.

Sin autem ejuſdem æquationis radicem juxta modum Viëtæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, triplus ſit anguli, qui eſt ad baſin primi, & intelligere baſin quidem ſecundi eſſe $7\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò eſſe 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem, de qua quæritur, eſſe baſin primi.

Quod ut cuivis obvium ſit, ſupponamus triangula illa eſſe ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit ∞a, & baſis ſecundi CE ∞b: Oporteatque invenire baſin primi AC ∞x.

Quia



Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus B I, D K, in triangulo rectangulo A B I, quadratum ex A I $\infty \frac{1}{4} xx$ subductum à quadrato ex A B ∞ aa, relinquit quadratum ex B I[1]: erit quadratum ex B I ∞ $aa - \frac{1}{4} xx$.

[1] per 47 primi Elem.

Eodem modo, in triangulo rectangulo C D K, quadrato ex C K $\infty \frac{1}{4} bb$ subducto à quadrato ex C D ∞aa, relinquetur $aa - \frac{1}{4} bb$, pro quadrato ex D K.

Porrò quoniam, propter similitudinem triangulorum A B I & A D K[2], A I est ad I B, sicut A K ad K D: erit quoque ut $\frac{1}{4} xx$, quad. ex A I, ad $aa - \frac{1}{4} xx$, quad. ex I B; sic $xx + bx + \frac{1}{4} bb$, quad. ex A K, ad $aa - \frac{1}{4} bb$, quad. ex K D. Vnde multiplicando extrema, invenietur productum $\frac{1}{4} aaxx - \frac{1}{16} bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4} aabb - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} bx^3 - \frac{1}{16} bbxx$, producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \infty 0$. Quæ summa si porrò per $x + b \infty 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \infty 0$, seu $x^3 \infty * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cujusque æquationis vera radix illic per rectam F L, hîc autem per rectam A C designatur.

[2] per 4 Sexti Elem.

Cæterùm quòd angulus secundi trianguli D C E, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & B C A[3], propter æqualia crura A B, B C; & ob id[4] externus C B D alterutrius hujus duplus. Est autem hic C B D æqualis ipsi C D B[5], propter æqualitatem linearum C B, C D. Quare & C D B, id est, C D A ipsius A duplus est. Atqui[6] binis hisce A & C D A æqualis est externus D C E.

[3] per 5 primi Elem.
[4] per 32 primi Elem.
[5] per 5 primi Elem.
[6] per 32 primi Elem.

D C E. Hinc, qualium partium angulus A eſt 1, talium angulus C D A erit 2, & D C E 3, hoc eſt, triplus erit angulus D C E anguli A. Quemadmodum fuit propoſitum.

Denique quoniam omnes ſimiles æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propoſitæ $x^3 \propto 243\,x + 1215$ ſic interpretari: dicentes eam eſſe diametrum ſemicirculi, ſupra quam deſcripto quadrilatero inæqualium laterum, tria ſuperiora in ſe invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{1}{2}q$; at verò ſumma quadratorum ex ipſis faciat 243 ſeu p.

Vbi præterea notandum, æquationem numericam 1 ③ $\propto$ 13 ② + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1 ① valeat + 4, — 3, & — 1; ac ipſa æquatio 1 ③ $\propto$ 0 ② — 13 ① — 12 $\propto$ 0 per 1 ① — 4 $\propto$ 0, & per 1 ① + 3 $\propto$ 0, atque etiam per 1 ① + 1 $\propto$ 0 dividi queat. Ita ut tantùm radices earum æquationum ſecundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi poſſe.

Sed jam tempus eſt ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur $* + pz - q$.

Hæc autem æquatio tres diverſos radicis valores admittit, duos nempe veros & unum falſum, æqualem veris illis ſimul ſumptis, ſicut ex ejuſdem æquationis conſtitutione agnoſcere licet. Nam ſi ponamus $x \propto b$ ſeu $x - b \propto 0$, & $x \propto c$ ſeu $x - c \propto 0$, atque etiam $x \propto -d$ ſeu $x + d \propto 0$, & multiplicemus $x - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$, ac denuo quod inde fit per $x + d \propto 0$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{lllll} x^3 + d\,xx & - b\,dx & + bcd \propto 0, \text{ vel } x^3 \propto & - d\,xx & + bd\,x - bcd. \\ - b & - cd & & + b & + cd \\ - c & + bc & & + c & - bc \end{array}$$

In qua ſi ponatur d, valor falſus radicis x, æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipſius x ſimul ſumptis, tunc quidem $b + c$ deſtruet $-d$, fietque $0\,xx$, hoc eſt, evaneſcet adfectio ſub xx, nec ampliùs ſeſe deſtruent. Nam cùm ex hypotheſi $b + c$ æquatur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque $bd + cd$ æquale dd. At verò dd majus eſt quàm bc, quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio ſub x cum ſigno —.

Ita

Ita ut, si $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $+q$, æquatio hanc induat formam: $x^3 \propto * + px - q$. Quam constat tres admittere differentes valores radicis x, duos quidem veros seu $+$ quàm o, unum autem falsum seu $-$ quàm o, æqualem veris illis simul sumptis.

Porrò ut hæc æquatio recipiat semper tres ejusmodi radicis valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q, seu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem supra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non nisi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falsum, qui juxta Cardani regulam sic exprimeretur: $x \propto \sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Vt in exemplum afferre licet æquationem: 1 ☊ $\propto$ 6 ♃ $-$ 40, in qua 1 ♃ valet $-$ 4, cum 1 ☊ 8 o ☿ $-$ 6 ♃ $+$ 40 $\propto$ o dividi queat per 1 ♃ $+$ 4 $\propto$ o, oriaturque æquatio impossibilis 1 ☿ $-$ 4 ♃ $+$ 10 $\propto$ o, seu 1 ☿ $\propto$ 4 ♃ $-$ 10, cujus valores radicis nullo modo comprehendi possunt, nisi eos sic exprimere velimus: 1 ♃ $\propto 2+\sqrt{-6}$, & 1 ♃ $\propto 2-\sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipsius 1 ♃ sint tantùm fictitii $2+\sqrt{-6}$ & $2-\sqrt{-6}$, & falsus realis sit $\propto -4$.

E quibus patet tertiæ hujus atque secundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum suarum reciprocatio.

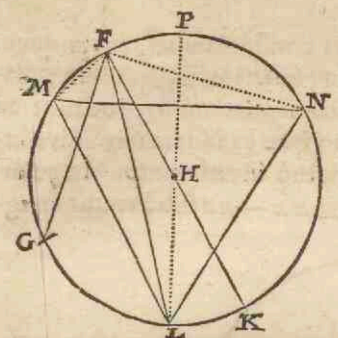
Lubet autem in usum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut sequentia manifestiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato F M G N, *in eoque inscriptâ* F G, *trifariam secetur arcus uterque* F M G *&* F N G *in* M *&* N: *Oporteatque invenire* F M *subtensam trientis unius*, *&* F N *subtensam trientis alterius.*

Esto F H seu H K $\propto a$, F G $\propto b$, & F M $\propto x$, quæraturque ex H F & F M ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inscripta F G, perinde atque ipsa esset incognita: quæ ideo erit $3x-\frac{x^3}{aa}$. Iam verò cum ipsa detur $\propto b$, erit $3x-\frac{x^3}{aa}\propto b$. Vnde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax-aab$.

Eodem



Eodem modo, si pro F N ponatur x, atque ex H F & F N quæramus F G, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam F M vel F N quæsitæ quantitati radicis x æqualem esse. Hinc cum 1 ③ æquetur 13 ① — 12, seu 1 ③ ∞ o ② — 13 ① + 12 æquetur o, ac ipsa æquatio dividi possit per 1 ① — 1 ∞ o, & per 1 ① — 3 ∞ o, nec non per 1 ① + 4 ∞ o: arguit id ipsum F M fore 1, at verò F N 3. Porrò quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æquè ac secundæ formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus — 4, seu quantitas lineæ F L. quæ ipsis M F & F N simul sumptis ostensa est æqualis.

Vnde perspicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Vbi docet, illas ad secundum casum secundæ formulæ revocandas esse, convertendo tantùm signum — numeri absoluti in signum +: cum in iis sicut hîc cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæsitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantùm illos ex o auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæsiti hujus, in qua duo semper veri sunt seu + quàm o, & tertius est falsus seu — quàm o, quemadmodum est ostensum.

Alivd Problema.

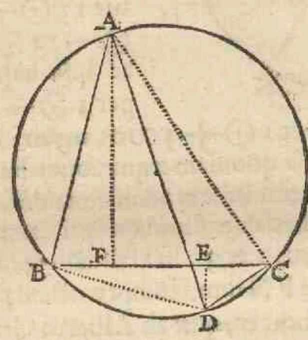
In circulo, cujus diameter A D, *inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis* A B, B C, & C D, *sibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis* A & D: *Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum* A D.

Ponatur ad hoc A B ∞ a, B C ∞ b, C D ∞ c, & A D ∞ x. jun-

gan-

ganturque A C, B D, & in B C, productam, si opùs sit, perpendicularis demittatur D E.

Duplex autem hîc occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ A B & C D è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se mutuò intersecantes. In priori igitur positione si quadratum B D $\propto xx - aa$ subducatur ex ag-



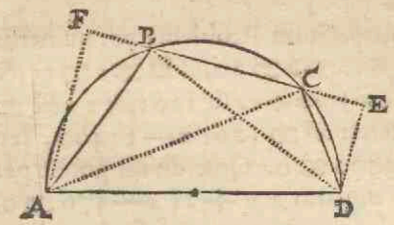
gregato quadratorum B C, C D $\propto bb + cc$, relinquetur [1] duplum rectangulum B C E $\propto bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula A B D & C E D similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & B A D, E C D æquales [2], utpote eidem peripheriæ B D insistentes: erit ut D A $\propto x$ ad A B $\propto a$, ita D C $\propto c$ ad C E $\propto \frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam B C $\propto 2b$ dat duplum rectangulum B C E $\propto \frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo B C E, ante invento. Unde ordinatâ æquatione invenitur: $x^3 \propto \begin{array}{l} + aax - 2abc, \\ + bb \\ + cc \end{array}$ æquatio cubica tertiæ formulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constat ex præmisso Problemate paginæ 354.

In secunda autem positione, si à quadrato D C $\propto cc$ auferantur quadrata D B, B C $\propto xx - aa + bb$, relinquetur [3] duplum rectangulum C B E $\propto cc - xx + aa - bb$. Cæterùm, quoniam rursus

[1] per 13 secundi Elem.

[2] per 21 tertii Elem.

[3] per 12 secundi Elem.



rurſus propter ſimilitudinem triangulorum A B D & C E D, A D $\propto x$ eſt ad A B $\propto a$, ſicut D C $\propto c$ ad C E: erit C E $\propto \frac{ac}{x}$. E quâ ſubductâ C B $\propto b$, remanebit B E $\propto \frac{ac}{x} - b$. Hæc autem ſi multiplicetur per duplam C B, proveniet duplum rectangulum C B E $\propto \frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo C B E ante invento $\propto cc - xx + aa - bb$. Vnde addito utrinque bb, ordinatâque ſecundùm artem æquatione, obtinebitur eadem atque ſuperior: $x^3 \propto \begin{array}{l} +aax - 2abc. \\ +bb \\ +cc \end{array}$

Quocirca cum utroque caſu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat A D, ſequitur quoque eam differentem ſortiri quantitatem, & ex eiſdem datis inſcriptis pro diverſa earum poſitione dupliciter inveniri.

Vbi prætereà notandum eſt, Problema propoſitum eſſe ſolidum, ſi tres inſcriptæ A B, B C, & C D inæquales inter ſe fuerint: ſiquidem ad cubicam æquationem adſcendit, quæ diviſione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inſcriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exſurget æquatio talis: $x^3 \begin{array}{l} -aax \\ -2bb \end{array} + 2abb \propto 0$, quæ dividi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \propto 0$, quæ ulteriùs non eſt reducibilis.

Si autem juxta alterutram poſitionem omnes hæ tres inſcriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \propto 0$, poterit hæc ipſa dividi per $x + 2a \propto 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \propto 0$, quæ porrò dividi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur $x - a \propto 0$. Quoniam verò hoc caſu inſcriptæ cum diametro coïncidere intelliguntur ac ipſi diametro eſſe æquales, conſtat æquationis radicem x, hoc eſt, diametrum A D duos in eo admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cæterùm si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto A B ∞ a ∞ 24, B C ∞ b ∞ 20, C D ∞ c ∞ 15, & quæratur A D ∞ x. Hinc cum $aa + bb + cc$ sit 1201, & $2abc$ ∞ 14400, invenietur æquatio talis: $x^3 \infty 1201x - 14400$, seu $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \infty 0$. Quæ dividi potest per $x - 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx + 25x - 576 \infty 0$, seu $xx \infty -25x + 576$. Cujus porrò vera radix est $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, & falsa $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæsita A D, hoc est, x radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x - 14400$, tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu + quàm o, nimirum + 25 majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falsum seu — quàm o, nimirum $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ radices inventæ sint -25, $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantùm ex o esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \infty 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam x + vel — aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

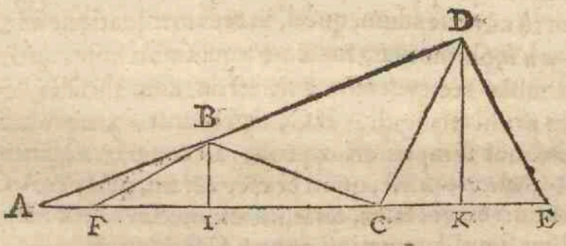
Ut si in exemplum proponatur æquatio $x^3 \infty 2700x - 32400$, seu $x^3 * 0xx - 2700x + 32400 \infty 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radicis x, sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato semissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hîc major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum cujus radius

FH ſeu HK ſit 30 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam FG ∞ 36 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque deinde trifariam ſecando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inſcriptam 36 in duos inæquales arcus diſpeſcitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem ſortitur; ſitque alterutra è ſubtenſis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falſus autem ejuſdem valor æqualis eſt veris illis ſimul ſumptis, atque per rectam FL deſignatur.

Quos binos radicis valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut ſequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, ſit triplus anguli, qui eſt ad baſin primi, & baſis ſecundi intelligatur eſſe 18 ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, eſſe baſin dimidiam primi, multatam continuatamve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum eſt æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perſpicuum fiat, fingantur triangula illa eſſe ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit ∞a, & baſis ſecundi CE ſit ∞b. Demiſſis autem in iis perpendicularibus BI, DK, ſumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum eſt æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita poſitis, ut inveniatur AF, liquet, ſi pro ea ponamus y, & pro AC, ut ante, ponamus x, quadratum ex BI fore $\infty\, aa - \frac{1}{4}xx$, adeoque quadratum ex FI $\infty\, 3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI $\infty\, \frac{1}{2}x$ ſublatâ AF $\infty\, y$, relinquitur FI $\infty\, \frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum eſt $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy \infty 3aa - \frac{3}{4}xx$.

Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty yx + 3aa - yy$. Vnde extractâ radice, fit $x \infty \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, si in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui est $\frac{9}{2}aay - y^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. obtinebimus æquationem $y^3 \infty * + 3aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea A F.

Eodem modo ad inveniendam F C, si pro ea ponamus z, atque ab ipsa tollamus I C $\infty \frac{1}{2}x$, remanebit F I $\infty z - \frac{1}{2}x$. Vnde cum quadratum ejus sit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \infty 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty zx + 3aa - zz$. Et fit, extractâ radice $x \infty \frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$.

Hinc si rursus in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x subrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{9}{2}aaz - z^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \infty * + 3aaz - aab$. Cujus ideo vera radix est linea F C.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit $x^3 \infty * + 3aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor A F obtinetur, si ex A I vel I C dimidia base primi trianguli A B C auferatur recta F I, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis B I; & major, si ad A I vel I C ipsa F I addatur. Omnino ut fuit propositum.

Vbi porrò advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \infty * + 3aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac secundæ formulæ reciprocationem, tertia radix sit falsa, quæ per A C, basin primi trianguli A B C, designatur, quæque ipsis veris A F, F C simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit $x^3 \infty * + 3aax + aab$, quòd præter veram, quæ per A C exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est A F, & major F C, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ A C sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis $x^3 \infty 2700x - 32400$ valores radicis x sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli A D designari, in quo si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales A B, B C, & C D, sibi

Vide figuras pag. 362. & 363.

ſibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, ſolidum ex ipſis tribus ſit ∞ 16200 ſeu $\frac{1}{2}q$, & ſumma quadratorum earundem ſit ∞ 2700 ſeu p. Nam quemadmodum hæ tres inſcriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque poſitione diameter duplicem quantitatem ſortitur, ita quoque ipſa in hac vel illa poſitione veram ſemper radicem deſignat. Falſa autem, ipſis veris adæquans, exhibetur per diametrum ſemicirculi, in quo deſcripto ſupra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inſcriptis ſumpta ſint æqualia. Vt ex ſuperioribus manifeſtum eſt.

Vbi advertendum inſuper reſtat, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① — 12, à Girardo propoſitam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipſa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① + 12 ∞ 0 per 1 ① + 4 ∞ 0, & per 1 ① — 1 ∞ 0, nec non per 1 ① — 3 ∞ 0 dividi poſſit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regula explicari poſſe.

Vnde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquè facilè, immo quidem faciliùs concipi, cùm ipſe per ſubtenſas arcuum deſignatur, quorum triplum eſt datum, quàm cùm per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non niſi contentum cognoſcitur. Præterquam quòd ad illas ſubtenſas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm $\sqrt{C.}$ ad exprimenda latera cubica, & $\sqrt{}$ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac diſtinctè explicari poſſint.

Cæterùm ne quid hîc deſideretur, ſed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutiſſimus noſter Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit.

Proponatur æquatio $z^3 \infty * - pz + q$, & ſit z quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc $z \infty x - y$. Eritque $z^3 \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Vnde cum & z^3 æquetur $-pz + q$: erit ſimiliter $-pz + q \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

Divi-

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe $-pz \propto -3xxy + 3xyy$, & $q \propto x^3 - y^3$. Quarum prima diviſa per $z \propto x - y$ dat $-p \propto -3xy$, ſeu $p \propto 3xy$; & fit $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$. Vnde, ſi in ſecunda in locum x ſubrogetur valor inventus $\frac{\frac{1}{3}p}{y}$, & in locum x^3 hujus cubus $\frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3}$, obtinebitur $q \propto \frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3} - y^3$. Hoc eſt, multiplicando utrinque per y^3, & ordinando æquationem, habebitur $y^6 \propto -qy^3 + \frac{1}{27}p^3$. Cujus radix, juxta pag. 6, eſt $y^3 \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $y \propto \sqrt{\mathrm{C}.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Adeoque $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$ $\propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{\mathrm{C}.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$. Poſueramus autem $z \propto x - y$. Erit itaque $z \propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{\mathrm{C}.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt{\mathrm{C}.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Qui ſanè valor eo Cardani ſimplicior cenſeri poteſt, ſiquidem ad hunc obtinendum radix cubica ſemel tantùm eſt extrahenda. Quòd ſi verò ipſius z valor cum Cardano ſit exhibendus, ita porrò operari licebit. videlicet in æquatione jam dictâ $q \propto x^3 - y^3$ in locum y^3 ſubſtituendo valorem inventum $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$: habebiturque $q \propto x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, ſeu $x^3 \propto + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $x \propto \sqrt{\mathrm{C}.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Hinc cum z ſit $\propto x - y$: erit $z \propto \sqrt{\mathrm{C}.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{\mathrm{C}.\, - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Haud diſſimili modo procedendum in æquatione $z^3 \propto * + pz + q$, ubi z valet $\sqrt{\mathrm{C}.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{\mathrm{C}.\, + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. ponendo nempe $z \propto x + y$.

Notandum verò, in his z æqualem ſupponi $x +$ vel $-y$, non autem pluribus incognitis quantitatibus, ex eo quòd plures duabus diverſis æquationibus inſtitui nequeunt; ut & $-pz$ ſupponi $\propto -3xxy + 3xyy$, ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere liceat per $z \propto x - y$, atque ſic deinde ipſarum x, y, & z valores in ſimpliciſſimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri poteſt, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Reſolutione dicta ſufficiant.

AD-

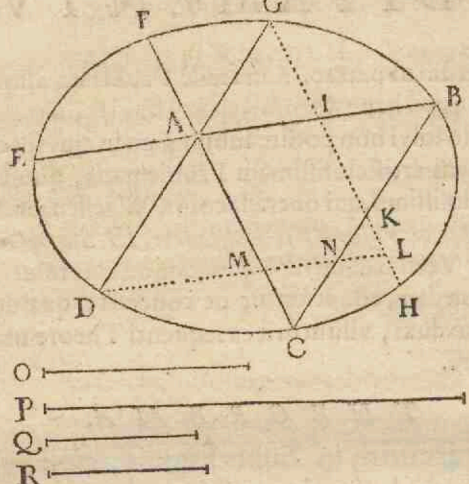
ADDITAMENTVM.

CÆterùm ut pateat, non facilè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ Iacobi à Waessenaer Anno 1640 sub titulo: *Den onwissen VVis-konstenaer. I.I. Stampioënius*, in lucem prodiit. Verùm enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

THEOREMA.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cùm Sol non occidit, defixis ad plumbum supra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita se habentibus, ut, postquam eodem die extremitas umbræ baculi A transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit extremitas umbræ baculi B transiisse per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonstrandum est eandem transiisse pariter per B.

Quod ut fiat, sciendum primò est umbram baculi A descripsisse Ellipsin vel Circulum, transeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc observata ponantur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis C A, A B, B C, productisque B A, A C donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ D G ipsi B C parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens est, quòd, postquam umbra baculi B finiit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut B A ad A E, rationem, quæ est inter baculum B & baculum A, designet. Eodem modo, postquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut C A ad A F sit, sicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipsius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipsius A ad D; ita ut B C sit ad A D, sicut baculus B ad baculum A. Quibus sic intelle-



tellectis, ut conſtet, umbram baculi C tranſiiſſe item per B, oſtendendum eſt, cùm umbra baculi A incidit in G, umbram ipſius C incidiſſe ſimiliter in B, hoc eſt, baculum C ad baculum A, vel C A ad A F eſſe, ſicut C B ad A G.

Quod ipſum igitur ut fiat manifeſtum, inveniendus nobis eſt valor lineæ A G. Quocirca ad hoc ductâ G H parallelâ A C, ſecante A B, B C in I & K, & Ellipſis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur A B ∞ a, B C ∞ b, C A ∞ c, A F ∞ d, A E ∞ e, H K ∞ x, & A G vel C K ∞ z: eritque K B ∞ $b - z$.

Deinde, ut innoteſcat A D, quoniam baculus B eſt ad baculum A, ut B A ad A E; itemque B baculus ad A baculum, ut B C ad A D: erit ut B A ad A E, vel a ad e, ſic B C vel b ad A D. quæ ideo erit $\frac{be}{a}$. Cum autem hæc multiplicata per A G ſeu z producat $\frac{bez}{a}$ rectangulum D A G, ſimiliterque A G vel C K ſeu z multiplicata per K B ſeu $b - z$ producat $bz - zz$ rectangulum C K B; & quidem, juxta 17 prop. 3[tii] libri Conicorum Apollonii, $\frac{bez}{a}$ ad $bz - zz$ ſit, vel $\frac{be}{a}$ ad $b - z$, ſicut ▭ F A C ad ▭ G K H ſeu

cd ad

cd ad cx, vel d ad x: fiet, multiplicando medios tum extremos, $db - dz \propto \frac{bex}{a}$, vel $adb - adz \propto bex$.

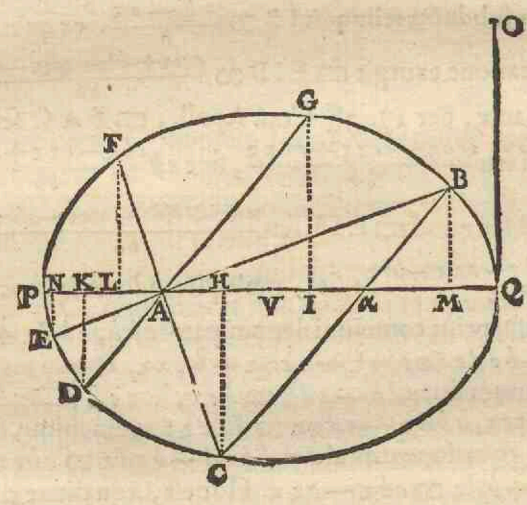
Iam, ut habeatur K I, fiat, propter similitudinem triangulorum B C A & B K I, ut B C $\propto b$ ad C A $\propto c$, ita B K $\propto b - z$ ad K I $\propto \frac{cb - cz}{b}$. quæ ad H K seu x addita dat H I $\propto \frac{cb - cz + bx}{b}$; at verò ex K G vel C A seu c subducta relinquit I G $\propto \frac{cz}{b}$. ex quarum ductu unius in alteram invenitur ▭ G I H $\propto \frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$.

Porrò, ut obtineatur A I, fiat, propter similitudinem triangulorum A G I & B C A, ut B C $\propto b$ ad B A $\propto a$, ita A G $\propto z$ ad A I $\propto \frac{az}{b}$. quæ ad A E seu e addita dat E I $\propto \frac{az + eb}{b}$; at vero ex A B $\propto a$ subducta relinquit I B $\propto \frac{ab - az}{b}$. ex quarum mutua multiplicatione exurgit ▭ E I B $\propto \frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$. Iam cum, ut ante, per 17. 3^{tii} Con. Apoll., ▭ F A C seu cd sit ad ▭ G I H seu $\frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$, sive ad $\frac{cbz - czz + bxz}{bb}$, sicut ▭ E A B seu ea ad ▭ E I B seu $\frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$, sive e ad $\frac{abz + bbe - azz - bez}{bb}$: fiet, multiplicando extremos tum medios, omisso priùs communi denominatore bb, $abdz + bbed - adzz - bedz \propto cbez - cezz + bexz$. Quoniam autem supra inventum fuit $adb - adz \propto bex$, hoc est, multiplicando utrinque per z, $abdz - adzz \propto bexz$: obtinebitur, subducendo unam æquationem ex altera, $bbed - bedz \propto cbez - cezz$, vel $bbd - bdz \propto cbz - czz$. Hoc est, æqualitate ritè ordinatâ, erit $zz \propto \frac{cb + db}{c}$ in $z - \frac{bbd}{c}$. Quæ æquatio juxta regulam pag. 7 resoluta dat $z \propto b$, ut & $z \propto \frac{db}{c}$. Cum verò horum duorum valorum ipsius z duntaxat $\frac{db}{c}$ quæsitæ A G respondeat, hicque nos doceat c esse ad d, sicut b ad z: patet, C A ad A F esse sicut C B ad A G. Quod erat ostendendum.

Sequitur Problema, ejusque solutio.

PROBLEMA.

Tempore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano Horizontali in punctis A, B, & C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum, & qui in C 8 pedum, existente lineâ A B 33 pedum: Contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A transire per puncta B & C, baculi autem B per puncta A & C, & baculi C per punctum A, unde fit ut etiam per punctum B sit transitura. Quæritur jam quo terræ loco atque anni die hæc evenerint?



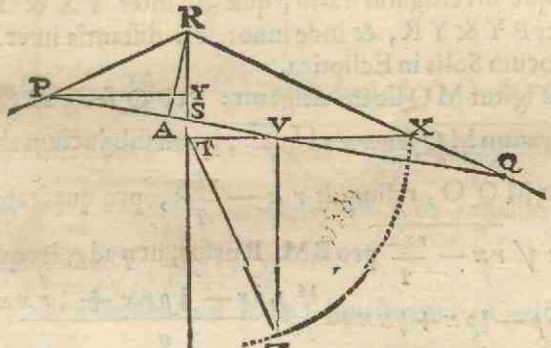
Solutio.

Vt hoc Problema solverem, primò consideravi, Solem, baculi cujusque umbrâ, eo die quo hæc observata sunt, descripsisse Ellipsin, Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde etiam facilè perspexi, umbram illam non Hyperbolam, nec Parabolam, sed Ellipsin descripsisse, eamque observationem, quæ prima recensetur, non matutino tempore, sed ante me-

mediam noctem factam fuisse. Quibus brevitatis causâ suppositis ad Problematis solutionem ita procedo.

Sit P G Q C Ellipsis, quam descripsit umbra baculi A, ejusque maxima diameter sit P Q, repræsentans lineam meridianam: liquet, cùm umbra baculi A pertigit ad Q, fuisse mediam noctem, & cùm à Q per C transiens pervenit ad P fuisse meridiem, & denique à P per G decurrens usque in Q rursus ad mediam noctem fuisse perventum. Deinde, cùm umbra baculi B incidit in A, tum quoque umbra baculi A incidit in E; ita ut A B sit ad A E, ut 3 ad 1. Porrò, cùm umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut C A ad A F sit, ut 4 ad 3. Denique, cùm umbra baculi B terminabatur in C, terminabatur quoque umbra baculi A in D; ita ut G A ad A D sit, ut 9 ad 4. Quibus A
rationibus in Ellipsi sic explicatis, demittantur perpendiculares B M, E N, C H, F L, G I, & D K.



Deinde, in secunda figura supponendo P R Q esse Conum, in quo P Q designet majorem prædictæ Ellipseos diametrum, A R baculum A, R S axem Coni, angulus A S R altitudinem Poli, & angulus R P Y distantiam inter æquatorem & locum Solis in Ecliptica: fiat in Ellipsi P Q $\propto q$, latus rectum Q O $\propto r$, A Q $\propto p$, M Q $\propto x$, H Q $\propto y$, & K Q $\propto z$: eritque A M $\propto p - x$, A N $\propto \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}x$, N Q $\propto \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x$, A H $\propto p - y$, A L $\propto \frac{3}{4}p - \frac{3}{4}y$, L Q $\propto \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}y$, & K A $\propto z - p$; In Cono verò, A R $\propto c$, seu 6, P Q $\propto q$, A V $\propto qu$, S V $\propto fuq$: eritque A S $\propto qu - fuq$, B
& P S $\propto \frac{1}{2}q - fuq$.

His poſitis, quæro primùm rationem, quam inter ſe habent M Q, H Q, & K Q, ut &, B M, H C, & D K: & invenio B M + H C æquari 3 D K: cum B C & A D parallelæ exiſtentes inter
C ſe ſint, ſicut baculus B ad baculum A, hoc eſt, ut 3 ad 1: ac pro-
D inde B M + H C ∞ 3 D K. E quibus porrò invenitur P A ad A Q eſſe, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Deinde beneficio A M & A B quæro perpendicularem B M, quæ etiam in aliis terminis inveniri poteſt. unde innoteſcit latus rectum r, quod poſtea quoque aliter beneficio Coni invenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f, tum q,
A ac poſtea etiam u.

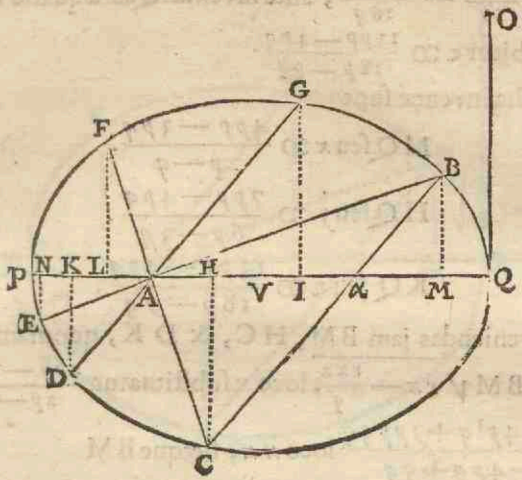
Cognitis autem f, q, & u, quæritur ratio A S ad A R, oſtendens Poli elevationem.

Denique inveſtigatur ratio, quæ eſt inter T X & T R, hoc eſt, inter P Y & Y R, & inde innoteſcit diſtantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur M Q ſic inveſtigatur: Ut P Q ſeu q ad Q O ſeu r, ita quadratum M Q ſeu xx ad $\frac{rxx}{q}$, quod ſubductum ab rx, rectangulo M Q O, relinquit $rx - \frac{rxx}{q}$, pro quadrato ex B M, adeoque $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ pro B M. Rurſus, ut q ad r, ita quadratum N Q $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{9}px + \frac{1}{9}xx$ ad $\frac{\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{9}prx + \frac{1}{9}rxx}{q}$. quod ſi ſubtrahatur à $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$, rectangulo N Q O, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx \frac{-16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$
E pro N E, $\infty \sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$, tertiæ videlicet parti ipſius B M. Quæ æquatio ſi reducatur, invenietur $x \infty \frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, pro M Q.

Deinde, ad inveniendam H Q, inveſtigetur priùs eodem modo H C, $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$. Tum fiat, ut C A ad A F, ſeu 4 ad 3, ita $\sqrt{rx - \frac{ryy}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{9}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$, ſeu L F. Porrò, ut q ad r, ita quadratum L Q $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$ ad $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9ryy}{16q}$.

Quod



Quod si auferatur à $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$, rectangulo L Q O, & ex reliquo extrahatur radix, fiet $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21pry}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$ pro L F ∞ $\sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$, ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat $y \infty \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, pro H Q.

Porrò, ad inveniendam K Q, investigetur ut priùs K D $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$. Deinde fiat ut A D ad A G, seu 4 ad 9, ita $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, seu G I. Rursus, ut 4 ad 9, ita A K $z - p$ ad $\frac{9z - 9p}{4}$, seu A I. quæ ex A Q sublata relinquit I Q $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$. Porrò ut q ad r, ita quadratum Q I $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zz}{16}$ ad $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117rpz}{8q} + \frac{81rzz}{16q}$. Quod si auferatur à $\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4}$, rectangulo I Q O, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117rpz}{8q} - \frac{81rzz}{16q}}$, pro

G I

$GI \propto \sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, ante inventæ. Quæ æquatio si reducatur, habebitur $z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$.

Atque ita inventæ sunt

$$MQ \text{ seu } x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}.$$

$$HQ \text{ seu } y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}.$$

$$KQ \text{ seu } z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}.$$

Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa est BM $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$, loco x substituatur $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, & $\frac{16p^4 - 24p^3q + 9ppqq}{4pp - 4pq + qq}$ loco xx, fietque BM

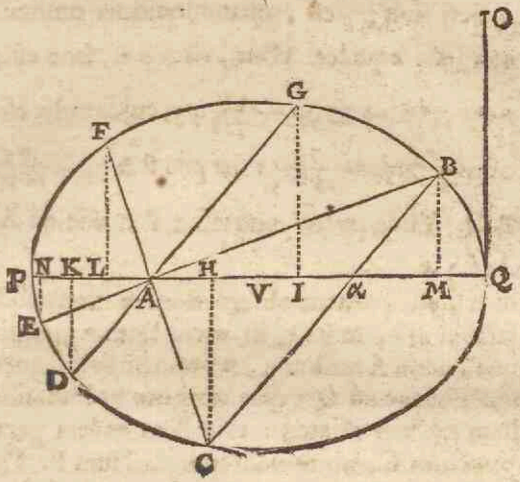
$$\sqrt{\frac{-16p^4r + 32p^3qr - 19ppqqr + 3pq^3r}{4ppq - 4pqq + q^3}}.$$

Eodem modo, quoniam HC inventa est $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$, loco y scribatur $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, & $\frac{49p^4 - 56qp^3 + 16ppqq}{36pp - 36pq + 9qq}$ loco yy eritque HC $\sqrt{\frac{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}{36ppq - 36pqq + 9q^3}}$.

Similiter, quoniam DK inventa est $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$, loco z ponatur $\frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$, & $\frac{169p^4 - 104p^3q + 16ppqq}{324pp - 324pq + 81qq}$ loco zz, fietque DK $\sqrt{\frac{-169pr + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}{324ppq - 324bqq + 81q^3}}$.

Quibus inventis, facile est invenire rationem ipsius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut supra dictum est: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipsius HC, multiplicando tam numeratorem, quàm denominatorem ipsius BM per $\sqrt{9}$, & denominatorem ipsius DK dividendo per 3, fietque omisso communi denominatore, pro BM $\sqrt{-144p^4r + 288p^3qr - 171ppqqr + 27pq^3r}$,

pro



pro H C $\sqrt{-49p^4r+98p^3qr-61ppqqr+12pq^3r}$, &
pro tripla D K $\sqrt{-169p^4r+338p^3qr-205ppqqr+36pq^3r}$.
Qui singuli si per pr dividantur, fiet pro B M
$\sqrt{-144p^3+288ppq-171pqq+27q^3}$, pro H C
$\sqrt{-49p^3+98ppq-61pqq+12q^3}$, & pro tripla D K
$\sqrt{-169p^3+338ppq-205pqq+36q^3}$; & hi rursus di- F
visi per $-p+q$, dant pro BM $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$,
pro HC $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & pro tripla D K
$\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$. Vbi porrò, si supponatur G
$-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn-27qq}$ pro BM,
$\sqrt{+49pn-12qq}$ pro HC, & $\sqrt{+169pn-36qq}$ pro
tripla D K, adeoque $\sqrt{144pn-27qq}+\sqrt{49pn-12qq}$
$\infty \sqrt{169pn-36qq}$. Quæ æquatio reducta dabit $ppnn \infty +$
$\frac{335qq}{768}pn-\frac{143q^4}{3072}$. Et fit $pn \infty \frac{1}{4}qq$, nec non $pn \infty \frac{143}{768}qq$.

Vbi sciendum, accipiendam esse tantùm radicem $pn \infty \frac{143}{768}qq$: cum reliqua radix $pn \infty \frac{1}{4}qq$, restituendo valorem ipsius n, producat hanc æquationem $pp \infty qp-\frac{1}{4}qq$, cujus radix est $p \infty \frac{1}{2}q$; ostendens baculum A in medio ipsius P Q fuisse constitutum.

Quod sanè fieri non potest, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non sunt æquales. Hinc, cum $p\,n$, hoc est, $\frac{143}{768}\,qq$, sit $\propto -pp+pq$, seu $pp \propto qp - \frac{143}{768}\,qq$, cujus radix est $p \propto \frac{1}{2}q -$
H $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, nec non $p \propto \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$: fiet pro P A $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q +$
I $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro A Q. Vnde porro innotescit P A esse ad A Q, sicut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Quo pacto cognoscatur primam observationem matutino tempore non fuisse factam.

Iam si in Ellipsi primam observationem matutino tempore ponamus factam esse, & P Q, ut ante, lineam meridianam designare, atque baculi A umbram, motum Solis insequentem, à P per F transiisse usque ad Q (quo tempore Sol humillimus existens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte sumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo posito, si per modum præcedentem quæratur æquatio, fiet $ppnn \propto \frac{67qq}{160}pn - \frac{143q^4}{3200}$: in qua numerus absolutus major est quadrato semissis numeri radicum. Vnde, cum nulla sit linea, quæ Æquationis hujus radix esse possit: liquet, primam observationem matutino tempore non contigisse, sed ante mediam noctem. Sicut initio fuit suppositum.

Quâ ratione innotescat umbram non descripsisse Hyperbolam, aut Parabolam. Quomodo inveniatur latus rectum per Ellipsin.

Deinde, si ponatur, umbram baculi A descripsisse Hyperbolam, invenietur æquatio $ppnn \propto -\frac{335qq}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}$. Quæ cum nullam admittat radicem, quæ proposito convenire possit, indicio est, umbram non descripsisse Hyperbolam. Eodem modo ostenditur ipsam non descripsisse Parabolam.

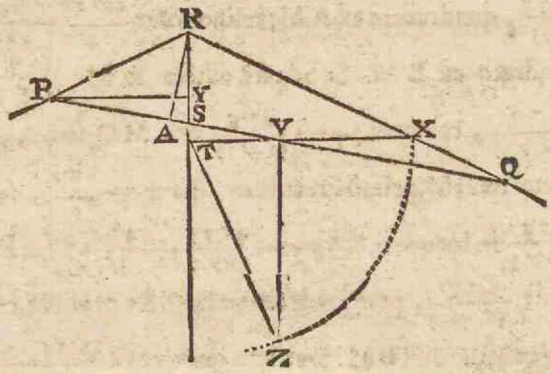
Postea ad inveniendum r, latus rectum Ellipseos, quæratur A M, ut sequitur. Quoniam subducendo M Q ex A Q, hoc est, $\frac{4pp-3pq}{2p-q}$ ex p, relinquitur $\frac{-2pp+2pq}{2p-q}$, pro A M: hinc si loco p substituatur $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ante inventum, & $\frac{1}{4}qq + \frac{7qq}{16\sqrt{3}} + \frac{49qq}{768}$ loco pp; fiet $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$ pro A M. Porrò, posito baculo A $\propto 6 \propto c$, erit A B $\propto 33 \propto \frac{11c}{2}$ (est enim ut 6 ad 33, seu 2 ad 11, sic c ad $\frac{11c}{2}$). à cujus quadrato $\frac{121cc}{4}$ si auferatur

$\frac{143,143,qq}{112,112,3}$, quadratum ex A M; relinquetur $\frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$, pro quadrato ex B M. Subductâ autem A M $\frac{143\,q}{112\sqrt{3}}$ ex A Q $\frac{1}{2}q + \frac{7\,q}{16\sqrt{3}}$, remanet $\frac{1}{2}q - \frac{47\,q}{56\sqrt{3}}$ pro M Q seu x. Iam cum quadratum ex B M, primò inventum, sit $rx - \frac{rxx}{q}$, subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47\,q}{56\sqrt{3}}$ in locum x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47\,qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ in locum xx; habebitur $\frac{143\,qr}{56,56,3}$, pro quadrato ex B M. Ac proinde, cum paulò ante pro quadrato ex B M inventum quoque sit $\frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$: erit $\frac{143\,qr}{56,56,3} \infty \frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$. Quæ æquatio si reducatur, proveniet $r \infty \frac{11,14,56,3\,cc}{13\,q} - \frac{143\,q}{4}$. K

Quomodo latus rectum inveniatur per Conum.

Præterea, ad investigandum latus rectum r in aliis terminis addatur quadratum ex A S, $qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, ad quadratum ex A R, cc; & habebitur $cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, pro quadrato ex R S: adeoque $\sqrt{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}$, pro R S. quæ brevitatis causâ nominetur n. Deinde, quoniam, propter similitudinem triangulorum A R S, T S V, & P Y S, R S seu n est ad A R seu c, sicut S V seu fvq ad T V, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad P Y; invenietur $\frac{fvqc}{n}$ pro T V, & $\frac{\frac{1}{2}qc - fvqc}{n}$, pro P Y, quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, pro T X. Rursus, quia, propter eandem triangulorum similitudinem, R S, seu n, est ad A S seu $qv - fvq$, sicut S V seu fvq ad S T, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad S Y; fiet pro S T $\frac{qqvvf - ffvvqq}{n}$, & $\frac{\frac{1}{2}qqv - fvvqq - \frac{1}{2}fvqq + ffvvqq}{n}$, pro S Y. quæ ab R S $\frac{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}{n}$ subducta, relinquit $\frac{cc + qqvv - fvvqq + \frac{1}{2}fvqq - \frac{1}{2}qqv}{n}$ pro R Y. Additis autem R S & S T, habebitur $\frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$ pro R T. L

 Iam



Iam cum, ob quatuor lineas proportionales R T, R Y, T X, & P Y, R T multiplicata per P Y tantundem producat atque R Y per T X: proveniet $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq - ccfv - fqqv^3 + ffv^3qq \infty \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq + \frac{1}{4}fvqq - \frac{1}{4}qqv$, adeoque $cc \infty fvvqq - qqvv\frac{+\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$. Porrò subducto quadrato ex T V à quadrato ex T X vel T Z, relinquetur $\frac{\frac{1}{4}qqcc - ffvvqqcc}{nn}$ pro quadrato ex Z V, $\infty \frac{1}{4}qr$. Vnde r sic invenitur. Restituatur valor ipsius nn, & fit $\frac{\frac{1}{4}ccqq - ffvvqqcc}{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq} \infty \frac{1}{4}qr$, vel $ccq - ccr - 4ffvvqcc \infty qqvvr - 2fvvqqr + ffvvqqr$: itemque loco cc valor ejus jam modò inventus, & habebitur, qq utrobique exemptis, $fvvq - 4f^3v^4q - vvq + 4ffv^4q - \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + ffvvq - fvvq\frac{+\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}r}{f} \infty - fvvr + ffvvr$. Quibus demum per f multiplicatis, si quantitates in r ductæ ad unam partem transferantur, obtinebitur, utramque partem per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffvv + f^3vv$ dividendo, $r \infty q - 4fvvq$.

Quâ ratione, ex duplici terminorum genere ipsius r, inveniatur f.

Postquam igitur inventa est $r \infty \frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4}$, nec non $r \infty q - 4fvvq$, erit $\frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$.

$4fvvq$. Ex qua æquatione quæro f, hoc modo: pro $\frac{11,14,56,3}{13}$ ſcribatur brevitatis causâ d, eritque $\frac{dcc}{q} - \frac{143q}{4} \propto q - 4fvvq$. Rurſus pro $\frac{143}{4}$ ſcribatur h, & erit $\frac{dcc}{q} - hq \propto q - 4fvvq$, hoc eſt, ſubrogato $fvvqq - qqvv + \frac{\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$ in locum cc, habebitur $dfvvq - dvvq + \frac{\frac{1}{4}dq}{f} - \frac{1}{4}dq - hq \propto q - 4fvvq$. Vnde, dividendo utrinque per q, & multiplicando per f, invenietur, quantitatibus in ff ductis ad unam partem tranſlatis, $dvvff + 4vvff \propto f + hf + \frac{1}{4}df + dvvf - \frac{1}{4}d$: adeoque ſi reſtituantur valores quantitatum d & h, atque in locum v ſubſtituatur $\frac{7}{16\sqrt{3}}$,

$\frac{317569}{2496} ff \propto \frac{137543}{208} f - \frac{6468}{13}$, vel $ff \propto \frac{33684}{6481} f - \frac{25344}{6481}$, M

cujus æquationis radix eſt $f \propto \frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$ ſeu N

$\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.

Quâ ratione ex iiſdem terminis ipſius r inveniatur q.

Deinde, ex iiſdem terminis quæro q, ut ſequitur. Reſumptâ æquatione $\frac{25872cc}{13q} - \frac{143q}{4} \propto q - 4fvvq$, loco cc reponatur valor ejus datus 36, & ubique multiplicetur per q, fietque $\frac{25872,36}{13} - \frac{143qq}{4} \propto qq - 4fvvqq$, vel $\frac{25872,36}{13} \propto qq + \frac{143qq}{4} - 4fvvqq$, adeoque $qq \propto \frac{\frac{25872,36}{13}}{1 + \frac{143}{4} - 4fvv}$. Quoniam autem inventa eſt f & v, hinc in locum $-4fvv$ ſubſtituatur

$$\frac{-4,7,7,16842 + 4,7,7,390\sqrt{785}}{16,16,3,6481},$$

ſeu $\frac{-196,16842 + 76440\sqrt{785}}{768,6481}$,

 ſeu

seu $\frac{-24,\ 137543 + 24,\ 3185\sqrt{785}}{24,32,6481}$, hoc est,

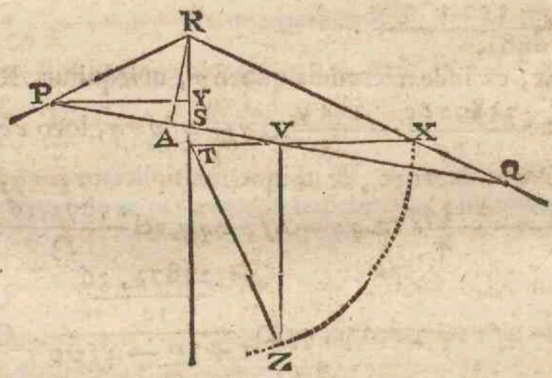
$\frac{-137543+3185\sqrt{785}}{32,\ 6481}$; eritque $qq \propto \dfrac{\frac{25872,36}{13}}{\frac{7484113+3185\sqrt{785}}{32,6481}}$,

seu $qq \propto \dfrac{\frac{25872,36}{13}}{\frac{\overline{49,\ 13} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}{32,6481}}$, hoc est,

$\frac{25872,36,32,6481}{\overline{13,13,49} \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, seu $\frac{528,49,36,32,6481}{\overline{169,49} \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$,

hoc est, $\frac{11,48,36,32,6481}{\overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$. Hinc posito $cc \propto 1$, erit

$qq \propto \frac{11,48,32,6481}{\overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$; at vero existente



$cc \propto \overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}$, erit $qq \propto 11,48,32,6481$, adeoque $q \propto \sqrt{11,48,32,6481}$, & $qv \propto \frac{\sqrt{49,\ 11,48,32,6481}}{16,16,3}$,

seu

seu $\sqrt{\frac{49,11,48,32,6481,}{16,48}}$, hoc est $\sqrt{\frac{49,11,32,6481}{16}}$,

seu $\infty \sqrt{49,22,6481}$.

Iam, ut inveniatur ratio A S ad A R, quoniam $1-f$ multiplicata per qv producit $qv - fvq$, atque f est $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$: ideo, si $1-f \infty \frac{390\sqrt{785} - 10361}{6481}$ multiplicetur per $qv \infty \sqrt{49,22,6481}$, exsurget $qv - fvq \infty$ $\sqrt{\frac{49,22,6481 \text{ in } 390\sqrt{785} - 10361}{6481}}$, pro A S; seu A S ∞ $\frac{7\sqrt{22,6481} \text{ in } \sqrt{13,30\sqrt{785} - 13,797}}{\sqrt{6481,6481}}$, hoc est, $\frac{7,13,\sqrt{22} \text{ in } \sqrt{30\sqrt{785} - 797}}{\sqrt{6481}}$; & A R ∞ 13 in $\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$. *Vt & ratio A S ad A R.*

Quibus per 13 divisis, erit A S $\infty \frac{7\sqrt{22} \text{ in } \sqrt{30\sqrt{785} - 797}}{\sqrt{6481}}$, & A R $\infty \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$, aut, si ponatur A S ∞ $7\sqrt{22}$, erit A R $\frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}}{\sqrt{30\sqrt{785} - 797}}$: multiplicatoque hujus tum numeratore tum denominatore per denominatoris residuum, proveniet A R $\infty \frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749+5\sqrt{785}} \text{ in } \sqrt{797+30\sqrt{785}}}{11,6481, \text{ vel } 11,\sqrt{6481},\sqrt{6481}}$, hoc est, A R $\infty \frac{\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}} \text{ in } \sqrt{797 + 30\sqrt{785}}}{11\sqrt{6481}}$, seu $\sqrt{\frac{1595143254 1 + 568541725\sqrt{785}}{121,6481}}$, seu $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$. Ac proinde si A S ∞ $7\sqrt{22}$ sumatur pro radio, erit A R $\infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, tangens anguli A S R sive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.

Denique ad investigandam rationem T X ad T R, vel P Y ad Y R; cum T X supra inventa sit $\frac{\frac{1}{2}cq}{n}$, & T R $\infty \frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$: o

hinc

hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam ſuppoſitâ AR ſeu $c \infty 1$, qq eſt $\frac{11,48,32,6481}{169 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, vel, numeratore atque denominatore per $\overline{11749-5\sqrt{785}}$ multiplicato,

$$qq \infty \frac{\overline{11,48,32,6481} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,138019376},$$ ſeu

$$\frac{\overline{48,2,176,6481} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,176,6481}$$ hoc eſt, $\frac{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}$,

& $q \infty \sqrt{\frac{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}}$, & vv eſt $\frac{49}{256,3}$, adeoque $qqvv$ $\infty \frac{\overline{48,2,49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,256,3}$, ſeu $\frac{\overline{96,49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,96,8}$, hoc eſt, $\frac{\overline{49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8}$) neglecto communi denominatore n, multiplicetur $\overline{1-f}$ per $qqvv$, & fit $qqvv-fvvqq \infty$

$$\frac{390\sqrt{785}-10361}{6481} \text{ in } \frac{49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8},$$ ſeu

$$\frac{-6517,11,6481+49,5,11,6481\sqrt{785}}{13,11,11,8,6481},$$ hoc eſt, $\frac{-6517+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$,

Cui ſi addatur $cc \infty 1$, fiet $cc+qqvv-fvvqq \infty \frac{-5373+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$, pro TR. Eodem modo multiplicato

$$q \infty \frac{\sqrt{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}}{169,121},$$ per $\frac{1}{2}c$, ſeu $\frac{1}{2}$ (quandoquidem c eſt 1):

habebitur $\frac{1}{2}cq \infty \frac{\sqrt{\overline{24} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}}{169,121}$, pro TX. Inventæ igitur TX & TR ſi reducantur ad eandem denominationem, ac deinde denominator communis omittatur, obtinebitur TX ∞ $\sqrt{\overline{64,24} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}$, & TR $\infty 49,5\sqrt{785}-5373$, ſive TX $\infty \sqrt{18046464-\sqrt{463011840000}}$, & TR $\infty \sqrt{47119625}-5373$.

P Quarum ſi TX vel PY ſumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, diſtantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.

Cum autem in expoſita hujus Problematis ſolutione nonnulla occurrant, quæ illuſtrationem aliquam requirere videntur, atque

minùs

minùs exercitatis ſcrupulum injicere poſſent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clariſſimus D. Eraſmius Bartholinus, Caſp. Fil. Medicinæ ac Mathematum in Academia Hafnienſi Profeſſor Regius concinnavit, paucis hîc adjicere.

Ita ut G A ad A D ſit, ut 9 ad 4.] Oſtenſum enim eſt A
Theoremate præcedenti C A eſſe ad A F, hoc eſt, baculum C ad baculum A, ſicut C B ad A G. Vnde cum baculus A ad baculum B ſit, ſicut D A ad C B: erit quoque ex æqualitate in proportione perturbata, ut C baculus ad B baculum, hoc eſt, ut 8 ad 18, ſeu 4 ad 9, ita D A ad A G; & convertendo G A ad A D, ut 9 ad 4.

$AV \propto qu$, $SV \propto fuq$.] Puta hîc unitatem ſubintelligi, B
quæ ſit a; ita ut a ſeu 1 ſit ad q, ſicut u ad qu; & rurſus a ſeu 1 ad qu, ſicut f ad fuq.

Ac proinde $BM + HC \propto 3 DK$.] Nam cum, propter C
ſimilitudinem triangulorum α B M & α C H, α B ſit ad B M, ſicut α C ad C H, & permutando α B ad α C, ſicut B M ad C H, componendoque B C ad α C, ſicut B M + C H ad C H: & propter ſimilia triangula C α H & D A K, α C ad C H, ſicut A D ad D K, permutandoque α C ad A D, ſicut C H ad D K; erit ex æquo, ut B C ad A D, ſic B M + C H ad D K. Vnde cum B C ipſius A D tripla ſit, erit quoque B M + H C ipſius D K tripla. *Huc refer fig. p. 372.*

E quibus porrò invenitur P A ad A Q eſſe, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ D
ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quemadmodum poſtea perſpicuum fiet.

Tertiæ videlicet parti ipſius B M.] Nimirum, propter E
ſimilitudinem triangulorum A B M & A E N, ubi A B eſt ad B M, ſicut A E ad E N, & permutando A B ad A E, ſicut B M ad N E. Vnde cum A B ad A E (ut ſupra) ſit, ſicut 3 ad 1: erit quoque B M ipſius N E tripla.

Et hi rurſus diviſi per $-p + q$, &c.] Vbi notandum, ſi F
B M $\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pqq + 27q^3}$, H C $\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3}$, & tripla D K $\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pqq + 36q^3}$ dividantur per $-p + q$, oriri pro B M $\sqrt{+144pp - 144pq + 27qq}$, pro

HC $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$, & pro tripla DK $\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$; non autem $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$, ut habet Auctor, Ratio autem cur ita signa immutaverit, est, quòd signa negata prævaleant signis affirmatis. quod sic ostendi potest.

Etenim cum $2p$ — major sit quàm — q — — — $2p$ major quàm q
& utrinque multiplicetur per $72q$ — — — — $72q$ utraque in se $2p$ — — q
— — — ducatur — —
erit quoque $144pq$ — major quàm — $72qq$, & fiet $4pp$ major quàm qq:
unde si auferatur* $144pp$ — major quàm — $36qq$ adeoque mul-
— — — tiplicando u-
relinquetur $144pq-144pp$ major quàm $36qq$: trinque per 36 — — — 36
adeoque addendo utrinque $144pp$ — — — — — $144pp$ *erit $144pp$ major quàm $36qq$.
erit quoque $144pq$ major quàm $144pp+36qq$.

Ac proinde $144pq$ multò major quàm $144pp+27qq$. Et sic de reliquis. Vbi notandum, si loco divisoris superioris $-p+q$ sumatur divisor $+p-q$, eosdem terminos inveniri, iisdemque signis affectos, quemadmodum ab Auctore sunt propositi.

G *Vbi porrò si supponatur $-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn-27qq}$ pro BM.*] Etenim existente $-p+q \infty n$, si utrobique multiplicetur per $+144p$, fiet $-144pp+144pq \infty +144pn$: adeoque $-144pp+144pq-27qq \infty +144pn-27qq$, ac proinde $\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \infty \sqrt{+144pn-27qq}$. Et sic de reliquis.

H *Fiet pro PA $\frac{1}{2}q-\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro AQ.*]

Vide pag. 165 vel 284. Quoniam enim æquatio $pp \infty qp-\frac{143}{768}qq$, duas admittit veras radices, quarum summa est q, referens quantitatem cognitam secundi termini qp, atque designans lineam PQ: fit, ut si una $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumatur pro linea AQ, pro quâ supposita fuit p, altera $\frac{1}{2}q-\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumenda sit pro linea PA.

I *Vnde porrò innotescit PA esse ad AQ, sicut $\sqrt{3}-\frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3}+\frac{7}{8}$.*] Quod sic liquet,

$$\begin{array}{lccc} & AP & & AQ \\ \text{Multiplicetur} & \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}} & \text{ad} & \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}: \\ \text{utrinque per 2, \& fit} & q - \frac{7q}{8\sqrt{3}} & \text{ad} & q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}. \\ \text{tum rursus} & & & \\ \text{per } \sqrt{3}\text{, \& fit} & q\sqrt{3} - \frac{7q}{8} & \text{ad} & q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}. \\ \text{Denique dividatur} & & & \\ \text{utrobique per } q\text{, fietque} & \sqrt{3} - \frac{7}{8} & \text{ad} & \sqrt{3} + \frac{7}{8}. \end{array}$$

Subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ *in locum* x, *&* $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} +$ K
$\frac{47,47,qq}{56,56,3}$ *in locum* xx, *habebitur* $\frac{143qr}{56,56,3}$, *pro quadrato ex* *BM.*] Id quod hoc pacto fieri potest.

$$\text{Ex } rx \infty \tfrac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$$

subtrahatur $\frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qr}{56,56,3}$:

& remanebit $rx - \frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47,47,qr}{56,56,3}$ vel $\frac{142qr}{56,56,3}$.

Nimirum si reducatur $\frac{1}{4}qr$ ad denominatorem ipsius $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$. utpote faciendo ut 4 ad 56, sic 1 ad 14, eritque $\frac{1}{4}qr \infty \frac{14qr}{56}$. & deinde multiplicando tam numeratorem quàm denominatorem hujus fractionis per 56, 3, fiet $\frac{56,3,14qr}{56,56,3}$, vel $\frac{2352qr}{56,56,3}$: à quo subducto $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$ seu $\frac{2209qr}{56,56,3}$, relinquetur $\frac{143qr}{56,56,3}$.

Quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, *pro TX.*] Est enim PY æ- L
qualis VX. Quod facilè demonstrari potest. Cum enim Sol quotidianâ suâ conversione circa mundi axem rectos Conos efficiat: fit, ut PY, si producta concipiatur, donec ipsi RQ occurrat, ab axe RT in puncto Y bifariam atque ad angulos rectos secetur, triangulumque efficiat, quod triangulo VXQ sit simile ac similiter positum. cujus latus PQ duplum existens lateris VQ trianguli VXQ (propter punctum V, quod centrum refert Ellipsis, cujus transversa diameter est PQ, & ZV semissis secundæ dia-

 metri)

metri) facit ut etiam linea P Y producta ipsius V X dupla sit futura, adeoque P Y æqualis V X.

M *Atque in locum v substituatur* $\frac{7}{16\sqrt{3}}$.] Convincitur autem v esse $\frac{7}{16\sqrt{3}}$: est enim A Q supra inventa $\infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & P A $\infty \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Vnde cum P Q sit $\infty\, q$, & V punctum medium ipsius P Q, adeoque P V vel V Q $\infty \frac{1}{2}q$; erit A V $\infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Hinc cum A V supposita sit $\infty\, v\, q$, erit $vq \infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ac proinde $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$.

N *Cujus æquationis radix f est* $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$, *seu* $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.] Notandum hîc, æquationem $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$ aliam adhuc admittere radicem, nempe $f \infty \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$, juxta ea, quæ habentur pag. 7. Quam quidem radicem, cum major sit quàm $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$, cujus non nisi partem designare debet, Author meritò neglexit. Esse autem $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ majorem, patet, si reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo $\frac{16842,7 + 390,7\sqrt{785}}{6481,16,\sqrt{3}}$, & $\frac{6481,7}{6481,16\sqrt{3}}$.

O *Ac proinde si AS* $\infty\, 7\sqrt{22}$ *sumatur pro radio, erit AR* $\infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, *tangens anguli A S R sive elevationis Poli, videlicet* 80 *grad.* 45 *min. circiter.*] Est enim $7\sqrt{22}$ in rationalibus ∞ 32, 8′ 3″ 1‴, circiter, & $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \infty$ 201, 6′ 2″ 8‴, circiter. Vnde si fiat ut A S 32, 8′ 3″ 1‴ ad radium 100000, ita A R 201, 6′ 2″ 8‴ ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli A S R. proximè respondens tangenti grad. 80, & 45 min.

Qua-

Quarum si T X vel P Y sumatur pro radio, erit T R vel Y R tangens anguli T X R vel Y P R, grad. 19, *& 27 min. circiter, distantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.*] Cum enim pro T X inventa sit $\sqrt{18046464 - \sqrt{46301184000}}$, quæ in rationalibus ferè est 4222, 7′ 1″ 1‴, & pro T R $\sqrt{47119625 - 5373}$, quæ in rationalibus est 1491, 3′ 7″ 4‴ circiter: hinc, si fiat ut T X 4222, 7′ 1″ 1‴ ad radium 100000, ita T R 1491, 3′ 7″ 4‴ ad quartum 35318; erit 35318; tangens anguli T X R vel Y P R, congruens quàm proximè tangenti grad. 19. & 27 min.

Et tantum de solutione Problematis, quod in specimen hujus Methodi afferre visum fuit: quæ cum talis sit, ut ad Arithmeticæ quæstiones enodandas, non minùs quàm ad Geometriæ Problemata resolvenda atque construenda deserviat, non abs re fuerit, si Coronidis loco hîc subjiciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unà cum præcedenti solutione tunc temporis prodiit; præsertim cum illa à nemine (quod sciam) antea sit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam satisfactum, cujus demonstrationem, qualis à me inventa est, breviter sum subjuncturus.

Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.

PRÆPARATIO.

PRimo, si in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Vt, exempli gratiâ, ad extrahendam $\sqrt{\text{③}}$ ex $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$, multiplico binomium per 2, & fit $\sqrt{968} + 25$. Similiter si sit $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$, primùm multiplico binomium per

√ 5, & fit √ 242 + $\frac{25}{2}$, deinde per 2, ut jam factum eſt, & ſic de cæteris.

Deinde, ſi neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum eſt per multiplicationem aut diviſionem ad aliud binomium, cujus altera pars ſit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis ſemper fieri poteſt; ſed breviùs plerumque per minoris numeri multiplicationem aut diviſionem. Quemadmodum √ 242 + √ 243 multiplicari quidem poteſt per √ 242, & fit 242 + √ 58806; ſed compendioſiùs per √ 2, & provenit 22 + √ 486. Eodem modo √ ③ 3993 + √ ⑥ 17578125 poteſt bis multiplicari per √ ③ 3993, & producitur aliud binomium, cujus abſolutus numerus eſt 3993; ſed breviùs per √ ③ 9; & adhuc breviùs, ſi dividatur per √ ③ 3, fietque 11 + √ 125.

Vbi notandum, poſtquam habetur binomium, cujus una pars eſt rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale eſſe debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut diviſionem deductum eſt, extrahi poſſe.

Tertiò, ad extrahendam √ ⑥, oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac √ ③. Et ad extrahendam √ ⑨ oportet bis extrahere √ ③. Et ſic de reliquis radicibus, quæ per numeros compoſitos, hoc eſt, qui per alios dividi poſſunt, deſignantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam ſatis nota eſt: quapropter hîc tantùm opùs eſt, ut doceam, quo pacto extrahendæ ſint √ ③, √ ⑤, √ ⑦, √ ⑪, & ſimiles aliæ, quæ per numeros primos, hoc eſt, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Poſtremò ad extrahendam √ ③, √ ⑤, √ ⑦, aut ſimilem, per numerum primum deſignatam, explorandum primò eſt, utrum radix Binomium eſſe poſſit, cujus una pars ſit rationalis. Id quod innoteſcit ſubducendo quadrata partium à ſe invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam ſi ex dato binomio √ ③ ſit extrahenda; aut ſurdeſolidam, ſi √ ⑤ ſit extrahenda, & ſic de cæteris. Quod ita in poſterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum eſt, licèt expreſsè non dicatur. Etenim ſi radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò conſtat, radicem quæſitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc eſſe poſ-

ſit,

ſit, cujus utraque pars ſit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, ſi de radice cubica extrahenda quæſtio fuerit; aut per quadratum hujus differentiæ, ſi de √ ⑤; aut per ejuſdem cubum, ſi de √ ⑦; aut per ipſius ſurdeſolidum, ſi de √ ⑪ quæratur, atque ita de cæteris. Quâ ratione aliud ſemper binomium habebitur, in quo radix differentiæ quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Vt ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, ſubduco primùm 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cujus numeri radix cubica eſt 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi poſſit, fore binomiam, cujus una pars futura ſit rationalis. Similiter ad extrahendam √ ③ ex $22 + \sqrt{486}$, oportet 484, quadratum à 22, ſubducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non poteſt, conſtat radicem cubicam ex $22 + \sqrt{486}$ parte rationali carere: ac propterea $22 + \sqrt{486}$ per 2 multiplicandam eſſe, ut habeatur binomium $44 + \sqrt{1944}$, in quo radix differentiæ quadratorum partium eſt 2. Sic ad extrahendam radicem ſurſolidam ex $11 + \sqrt{125}$, quoniam ſubductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus ſurdeſolidus non eſt: hinc $11 + \sqrt{125}$ multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat $176 + \sqrt{32000}$. In quo radix ſurſolida differentiæ quadratorum partium eſt 4. Denique ad extrahendam √ ⑦ ex $338 + \sqrt{114242}$, in quo differentia quadratorum partium eſt 2, quoniam hic numerus B-ſurdeſolidus non eſt: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc eſt, per cubum ex 2, & fit $2704 + \sqrt{7311488}$, in quo √ ⑦ differentiæ quadratorum partium eſt 2.

REGVLA.

Per præcedentem præparationem ſemper invenitur binomium, cujus una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiæ quadratorum partium, ſunt numeri rationales integri; ex quo √ ③, aut √ ⑤, aut √ ⑦, &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus eſt numerus rationalis radice quæſitâ paulò major; ita ut differentia non major ſit quàm $\frac{1}{2}$. Quod facilè per vulgarem Arithmeticam fieri poteſt.

Iam

Iam si pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque semissis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radicis quæsitæ. A cujus partis quadrato si auferatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi possit. Id quod facilè per multiplicationem hujus inventæ radicis experiri licet, quæ datum binomium, si aliqua ex eo extrahi possit, producere debet.

Verùm, si dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, subducere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radicis quæsitæ. Ad cujus partis quadratum si addatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modò radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut supra) manifestum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, cognito jam radicem cubicam differentiæ quadratorum partium esse 7, extraho radicem quadratam ex $\sqrt{968}$, quæ est major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum absolutum, addo 31 aut 32, & fit summa 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor est quàm 4, at major quàm $3\frac{1}{2}$; ita ut 4 sit numerus quæsitus rationalis, verâ radice paulò major. Postea ex 4 subtraho $\frac{7}{4}$ (hoc est, 7, radicem cubicam differentiæ quadratorum partium, postquam per radicem inventam 4 est divisa), & remanent $2\frac{1}{4}$. Subtraho autem, quoniam numerus absolutus 25 minor est quàm $\sqrt{968}$; si enim esset major addenda fuisset. Maximus verò integer numerus in $2\frac{1}{4}$ contentus, est 2, cujus semissis est 1, pars rationalis, radicis. Cujus quadrato 1, addo 7, $\sqrt{③}$ nempe differentiæ quadratorum partium, & fit summa 8, quadratum alterius partis. Ita ut $1 + \sqrt{8}$ sit $\sqrt{③}$ ex $25 + \sqrt{968}$, nimirum si $\sqrt{③}$ ex eo extrahi possit. Quod ut cognoscatur, oportet per multiplicationem investigare cubum ex $1 + \sqrt{8}$; aut si brevitati consulamus, tantùm ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radicis, ad triplum ejus-

ejusdem partis 1, multiplicatæ per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, constat, $1 + \surd\, 8$ esse veram radicem: si verò non conveniret, radicem extrahi non posse, liquidò constaret.

Eodem modo ad extrahendam $\surd\,\textcircled{3}$ ex $44 + \surd\, 1944$: radix cubica differentiæ quadratorum partium est 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero absoluto 44, & fit summa 88 aut 89, cujus $\surd\,\textcircled{3}$ major est quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$. Quapropter subtractâ $\frac{4}{9}$, radice differentiæ quadratorum partium, divisâ per radicem rationalem, ex $4\frac{1}{2}$, pro radice rationali assumptâ, remanent $4\frac{1}{18}$. Et fit 2, semissis ex 4, pars rationalis radicis. cujus quadrato 4, si addatur 2, radix differentiæ, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Vt patet, addendo 8 ad ter 2, multiplicatum per 6, hoc est, 36; & fit summa 44, pars rationalis binomii dati: adeoque $2 + \surd\, 6$ radix quæsita.

Ad extrahendam $\surd\,\textcircled{5}$ ex $176 + \surd\, 32000$; radix sursolida differentiæ quadratorum partium est 4; radix autem sursolida rationalis ex dato binomio est $3\frac{1}{2}$, unde subductis 4, divisis per $3\frac{1}{2}$, hóc est, $1\frac{1}{7}$, remanebunt $2 + \frac{5}{14}$. Semissis verò ex 2 est 1, cujus quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit $1 + \surd\, 5$, radix sursolida quæsita ex $176 + \surd\, 32000$; saltem si aliqua inveniri possit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari potest, vel breviùs, addendo simul, surdesolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum ejusdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum ejusdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exsurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii sit æquale, sequitur $1 + \surd\, 5$ propositi binomii esse veram radicem.

Ad extrahendam $\surd\,\textcircled{7}$ ex $2704 + \surd\, 7311488$; radix B-sursolida differentiæ quadratorum partium est 2; radix autem B-sursolida rationalis totius binomii est $3\frac{1}{2}$, cui addo $\frac{4}{7}$ (quoniam hîc numerus absolutus major est), & fit summa $4\frac{1}{14}$: ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cujus quadrato 4 subtraho 2, radicem B-sursolidam differentiæ quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porrò multiplico $2 + \surd\, 2$ B-sursolidè, vel breviùs, in unam summam colligo; 128, B-sursolidum ex 2;

1344, vicies & semel sursolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex $\sqrt{\ }2$; 1120, trigesies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex $\sqrt{\ }2$; & 112, septies 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex $\sqrt{\ }2$, & provenient 2704. Unde manifestum fit, $2 + \sqrt{\ }2$ esse radicem quæsitam.

Cæterùm observandum hîc est, postquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut divisum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam sit inventa, quòd, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut divisum.

Sic quoniam ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{3}}$ ex $\sqrt{\ }242 + 12\frac{1}{2}$, ipsum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus posterioris binomii radicem invenimus esse $1 + \sqrt{\ }8$; dividendum erit $1 + \sqrt{\ }8$ per $\sqrt{\textcircled{3}}$ ex 2, & fiet $\sqrt{\textcircled{3}}\,\frac{1}{2} + \sqrt{\textcircled{6}}\,128$, radix cubica ex $\sqrt{\ }242 + 12\frac{1}{2}$.

Multiplicavimus $\sqrt{\ }\frac{242}{5} + \sqrt{\ }\frac{125}{4}$ per $\sqrt{\ }5$, & invenimus $\sqrt{\ }242 + 12\frac{1}{2}$, cujus radix est $\sqrt{\textcircled{3}}\,\frac{1}{2} + \sqrt{\textcircled{6}}\,128$; quâ divisâ per $\sqrt{\textcircled{6}}\,5$, emerget $\sqrt{\textcircled{6}}\,\frac{1}{20} + \sqrt{\textcircled{6}}\,\frac{128}{5}$, pro radice ex $\sqrt{\ }\frac{242}{5} + \sqrt{\ }\frac{125}{4}$.

Multiplicatum est $\sqrt{\ }242 + \sqrt{\ }243$, primò per $\sqrt{\ }2$, & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica $2 + \sqrt{\ }6$ dividenda sit per $\sqrt{\ }2$, & prodibit $\sqrt{\ }2 + \sqrt{\ }3$, pro radice cubica quæsita ex $\sqrt{\ }242 + \sqrt{\ }243$.

Divisimus $\sqrt{\textcircled{3}}\,3993 + \sqrt{\textcircled{6}}\,17578125$ per $\sqrt{\textcircled{3}}\,3$, & multiplicavimus per 16, ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{5}}$: quare necesse est inventam radicem $1 + \sqrt{\ }5$ dividere per $\sqrt{\textcircled{5}}\,16$, & multiplicare per $\sqrt{\textcircled{15}}\,3$, ut habeatur vera radix sursolida ex dato binomio.

SEQUITUR DEMONSTRATIO.

IN primis est ostendendum, quòd, si binomium aliquod in se multiplicetur cubicè, proveniat semper aliud binomium, cujus partium quadrata, à se invicem subducta, relinquant cubum differentiæ, quadratorum partium radicis sive primi binomii. Id quod

quod manifestum fit, supponendo binomium illud designari per $a \pm \sqrt{bc}$, quod in se multiplicatum quadratè producit binomium $aa + bc \pm 2a\sqrt{bc}$, & hoc rursus per $a \pm \sqrt{bc}$, producit binomium $a^3 + 3abc \pm 3\,\overline{aa + bc}\sqrt{bc}$; utpote cubum ex $a \pm \sqrt{bc}$.

Vbi notandum, quòd, licèt in binomio plures reperiantur partes, tamen non nisi pro duabus sint habendæ, quarum una, utpote, $a^3 + 3abc$, designet numerum rationalem, at verò $3\,\overline{aa + bc}\sqrt{bc}$, numerum irrationalem seu surdum. Deinde constat, partem rationalem $a^3 + 3abc$, compositam esse ex cubo partis rationalis radicis, & ex triplo solido, quod fit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radicis: ac denique, si dictarum partium $a^3 + 3abc$ & $3\,\overline{aa + bc}\sqrt{bc}$ quadrata $a^6 + 6a^4bc + 9aabbcc$ & $b^3c^3 + 6aabbcc + 9a^4bc$ à se invicem auferantur, relinqui $a^6 \sim 3a^4bc + 3aabbcc \sim b^3c^3$, cubum ex $aa \sim bc$, differentiâ quadratorum partium radicis. *Signum significat differentiam inter duas pluresve quantitates, cùm non exprimitur aut cognoscitur, per quas sit excessus.*

In numeris. Esto $a = 2$, $\sqrt{bc} = \sqrt{6}$. Hinc multiplicato binomio $2 + \sqrt{6}$ in se cubicè, fit binomium $44 + \sqrt{1944}$: in quo partium quadrata, 1936 & 1944, à se invicem subducta, relinquunt 8, cubum differentiæ quadratorum partium.

Deinde ostendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere semper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium sit numerus cubicus.

Quod patet si multiplicetur binomium $a \pm \sqrt{bc}$, per $aa \sim bc$, differentiam quadratorum partium. Exsurgit enim binomium $a^3 \sim abc \pm \sqrt{\overline{a^4bc \sim 2aabbcc + b^3c^3}}$: cujus partium quadrata, $a^6 \sim 2a^4bc + aabbcc$ & $a^4bc \sim 2aabbcc + b^3c^3$ à se invicem subducta, relinquunt $a^6 \sim 3a^4bc + 3aabbcc \sim b^3c^3$, numerum cubicum, cujus radix cubica $aa \sim bc$, est, ut supra, differentia quadratorum partium prioris binomii $a \pm \sqrt{bc}$.

In numeris. Sit $a = 22$, & $\sqrt{bc} = \sqrt{486}$. Vnde multiplicato binomio $22 + \sqrt{486}$ per differentiam quadratorum partium 2, prodibit binomium $44 + \sqrt{1944}$. in quo differentia quadratorum partium est 8, utpote cubus differentiæ 2, quæ est inter 484 & 486, partium quadrata prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Quibus expositis, ad extrahendam $\sqrt[3]{\ }$ ex binomio $20 + \sqrt{392}$, in quo pars rationalis 20 est major reliquâ parte $\sqrt{392}$:

 cogi-

cogitetur a^3+3abc esse 20, & $\overline{3aa+bc}\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{392}$, ita ut $\begin{array}{l}+a^3\ +3aa\\+3abc+bc\end{array}\sqrt{bc}$ designet datum binomium $20+\sqrt{392}$, & radix ejus cubica $a+\sqrt{bc}$ ipsam radicem quærendam, cujus major pars sit a, & minor $\sqrt{bc}$. Tum operare secundùm regulam.

$$20+\sqrt{392}$$
$$\underline{20}$$

subt. $\left\{\begin{array}{c}400\\ \underline{392}\end{array}\right\}$ quadrata partium à se invicem.

reliq. $\underline{8,}$

2 radix cubica reliqui, sive $aa-bc$.

$\begin{array}{c|l}\cancel{3} & 2\\ \cancel{2} & \cancel{1}\\ \cancel{3} & \cancel{0}\ 2\\ \hline 1 & \ \ 9\\ \hline & \cancel{2}\end{array}$

Adde ad 20, partem rationalem binomii

— — — $\underline{19,}$ præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circiter. utpote à vero unitate non discedens, quippe qui inter 39 & 40 consistit. Vnde radix cubica sit major quàm 3 & minor quàm $3\frac{1}{2}$, ita ut $3\frac{1}{2}$ radicem veram non supra $\frac{1}{2}$ excedat. Sumatur autem quasi esset vera, & æqualis $a+\sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $aa-bc$,
per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$:
& fit $\frac{4}{7}$, sive $a-\sqrt{bc}$.
add. $\underline{3\frac{1}{2}}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$,

& fit summa $4\frac{1}{14}$, sive $2a$, duplum partis rationalis, radicis. supponendo $3\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum $3\frac{1}{2}$ sit major radice verâ; ita tamen, ut differentia non sit supra $\frac{1}{2}$, fit, ut $4\frac{1}{14}$ quoque duplo partis rationalis major existat, & differentia minor quàm 1. sicut inferiùs ostensuri sumus. Vnde cum eadem pars sit numerus rationalis integer, sequitur duplum ejus fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4\frac{1}{14}$ contentum, adeoque ipsam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile est reliquam invenire. Etenim, si à 4, quadrato ejusdem partis, subducatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium dati binomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis: Ita ut radix inventa sit $2+\sqrt{2}$.

Vbi

Vbi notandum, operationem hanc sufficere ad investigandam radicem, cùm constat illam binomium esse; sed quando id incertum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi binomii in se cubicè, aut etiam breviùs per sequentem operationem.

Divid. 40, hoc est, $2a^3 + 6abb$
per 4, hoc est, $2a$:
& fit quotiens 10, sive $aa + 3bc$.
Cui addatur ter 2, seu 6, hoc est, $3aa - 3bc$.
& provenit 16, sive $4aa$: quod est quadratum superioris 4, nimirum duplum partis rationalis inventæ 2. Vnde radix binomia erit, & duplum ejusdem partis 4: adeoque $2 + \sqrt{2}$ radix quæsita.

Vel etiam hoc modo:
Ad 8, hoc est, a^3
add. 12, hoc est, $3abc$:
& provenit 20, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{2}$ esse radicem quæsitam.
Omnino ut supra fuit expositum.

Similiter, ad extrahendam $\sqrt{}$ ③ ex $44 + \sqrt{1944}$, in quo pars rationalis 44 est minor reliquâ parte $\sqrt{1944}$; cogitetur (ut supra) $\begin{matrix} a^3 \\ +3abc \end{matrix}$ esse 44, & $\begin{matrix} 3aa \\ +bc \end{matrix} \sqrt{bc}$ esse $\sqrt{1944}$, ita ut $\begin{matrix} a^3 & +3aa & \\ +3abc & + bc & \sqrt{bc} \end{matrix}$ designet datum binomium $44 + \sqrt{1944}$, & illius radix cubica $a + \sqrt{bc}$ hujus radicem quærendam, cujus a sit minor pars, & $\sqrt{bc}$ major. Tum operare secundùm regulam.

$44 + \sqrt{1944}$
subt. $\left\{ \begin{matrix} 1944 \\ 1936 \end{matrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.
reliq. 8
2, radix cubica reliqui, sive $bc - aa$.

3 / 19 / 4 | 4 4 Adde ad 44 partem rationalem binomii
4 — — 44, præter propter valorem partis irrationalis:
8 & fit 88, valor binomii dati in rationalibus, circiter. quippe qui à vero unitate non absit, cum inter 88 & 89 consistat. Radix autem ejus cubica est major quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$;

 ita

ita ut $4\frac{1}{2}$ sit major radice verâ, excessu minore quàm $\frac{1}{2}$. Assumatur autem ut vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $bc - aa$,
per $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc} + a$:
& fit quotiens $\frac{4}{9}$, sive $\sqrt{bc} - a$.

subt. $\left\{ \begin{array}{l} \text{ex } 4\frac{1}{2}, \text{ hoc est, } \sqrt{bc} + a, \\ \phantom{\text{ex }} \frac{4}{9}, \text{ hoc est, } \sqrt{bc} - a: \end{array} \right.$

& relinquitur $4\frac{1}{18}$, sive $2a$, duplum partis rationalis radicis, videlicet supponendo $4\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum major sit, fit ut etiam $4\frac{1}{18}$ excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; sicut mox ostendemus. Vnde cum eadem pars sit numerus integer rationalis: sequitur duplum ejusdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4 + \frac{1}{18}$ comprehensum: adeoque ipsam partem esse 2. Quâ inventâ, facile est reliquam partem invenire. Etenim si ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit summa 6, quadratum alterius partis: ita ut radix inventa sit $2 + \sqrt{6}$.

Vbi (ut supra) notandum, non opùs esse ut ulteriùs operemur, postquam constat radicem extrahi posse, hoc est, ipsam binomium esse: quandoquidem eo casu radix inventa sit quæsita. Illud autem si ignoretur, dignosci poterit multiplicando radicem inventam in se cubicè, aut etiam breviùs, hoc modo:

Divid. 88, hoc est, $2a^3 + 6abc$,
per 4, hoc est, $2a$:
& fit quotiens 22, sive $aa + 3bc$.
Subtr. ter 2, sive 6, hoc est, $3bc - 3aa$:

& relinquitur 16, sive $4aa$, quod est quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monstrat, duplum ejusdem partis esse 4, adeoque radicem quæsitam binomium esse, videlicet $2 + \sqrt{6}$. quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam sic:

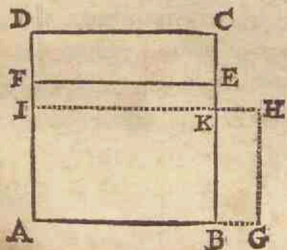
Ad 8, hoc est, a^3
add. 36, hoc est, $3abc$:

& provenit 44, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{6}$ esse radicem quæsitam.

Vt ſupra expoſitum fuit.

Quibus explicatis, demonſtrandum nunc eſt, quod ſuperiùs polliciti ſumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum eſt, ſuperante, ſcribatur m; at pro vera, quam in allatis exemplis per $a + \sqrt{bc}$ deſignavimus, brevitatis causâ ſcribatur v; ſimiliterque pro $aa - bc$, differentiâ quadratorum partium radicis, ſcribatur d. Hinc, cùm d diviſa per m dat $\frac{d}{m}$, quæ in primo exemplo ipſi m eſt addita, & in ſecundo exemplo ab m ablata; oſtendendum eſt, differentiam, quâ $m + \frac{d}{m}$ excedit $v + \frac{d}{v}$, quod duplum partis rationalis, antea $2a$ nominatum, & quâ $m - \frac{d}{m}$ excedit $v - \frac{d}{v}$, quod ſimiliter duplum partis rationalis, ſuperiùs $2a$ nominatum, deſignat, unitate non eſſe majorem. Quod facile erit, ſi tantùm oſtendatur exceſſum ipſius $\frac{d}{v}$ ſupra $\frac{d}{m}$ minorem eſſe exceſſu ipſius m ſupra v. hoc modo:



Eſto AB ∞ v, ſupra quam deſcribatur quadratum ABCD, quod majus erit quàm d, quippe quæ tantùm differentiam deſignat, quæ eſt inter quadrata partium ipſius v, cujus quadratum earundem partium quadratis unà cum duplo ſub partibus rectangulo eſt æquale. Hinc ſi ſupponatur rectangulum ABEF ∞ d, erit AF ∞ $\frac{d}{v}$. Tum aſſumptâ AG ∞ m, ita ut BG non ſuperet $\frac{1}{2}$, factoque rectangulo AGHI ∞ d, hoc eſt, æquali rectangulo ABEF: erit AI ∞ $\frac{d}{m}$; nec non rectangulum IKEF æquale rectangulo KBGH. Atque adeò cum IK ſit major quàm KB, erit IF minor quam BG, hoc eſt, exceſſus ipſius $\frac{d}{v}$ ſupra $\frac{d}{m}$ minor erit exceſſu ipſius m ſupra v. Quod erat demonſtrandum.

Eadem eſt ratio cùm dati binomii partes per ſignum — disjungunguntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium $20 - \sqrt{392}$. oportet tantùm ſignum — tranſmutare in ſignum +, atque ut ſupra ex $20 + \sqrt{392}$ radicem cubicam extrahere, quæ eſt $2 + \sqrt{2}$, & fit $2 - \sqrt{2}$ radix cubica ex $20 - \sqrt{392}$. Quemadmodum liquet ex iis, quæ ſuperiùs ſunt oſtenſa. Et ſic de aliis.

Cæterùm, quæ hîc de radice cubica oſtenſa ſunt, applicari quoque poſſunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem ſunt allata: cum eadem ubique ſit demonſtrandi ratio, idemque proceſſus; ita ut plura hac de re afferre non ſit opùs. Tantùm ſciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hactenus incognitas, inveniendas inſervire poſſe. Qui quidem in eo conſiſtit, ut, dum in aliqua quæſtione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum eſſe certò conſtiterit, quæratur numerus fractus unitate verum non ſuperans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

FINIS.

Celeberrimo, Amicissimoque Viro,

D. FRANCISCO à SCHOOTEN

IOHANNES HUDDE

S. P. D.

Clarissime Vir,

VT copiam Tibi faciam rogas, prolixam illam de Reductione Æquationum epistolam, sive libellum mavis, ut & alteram illam, quæ meam de Maximis & Minimis Methodum continet, Commentariis tuis in D. Cartesii Geometriam annectendi edendique. Certè, cum id non modò postules, sed etiam seriò, ut faciam, mihi author sis, in illam opinionem, sive imaginationem potius devenio, aliquid illis, tuo saltem judicio, contineri, quod laboribus in lucem edendi respondere queat; quippe cum continuo dies noctesque cogitationes tuæ circa illa, quæ aliquo commodo humanum genus beare possint, versentur occupenturque, nec unquam, vel levissimo indicio, deprehendere potuerim, Te, secus ac Batavum deceat, aliud clausum in pectore premere, aliud verò linguâ promere, in animum inducere nequaquam potui, Te, eo tantùm temporis articulo, quo has posceres, mihique ut facerem author esses, à consuetâ tibi & regiâ viâ deflexisse. Præterea amicitiæ nostræ, nec hodie, nec heri natæ, vinculum, tuusque candor singularis, mihi satis superque, Te nequaquam hoc ab animo tuo impetraturum fuisse, testatum faciunt. Quare, si hac in re Tibi obluctarer, commissi erroris fortasse insimularer. Non pauca tamen obstant, quo minus assensum planè præbeam. Non enim Te latet, me multâ temporis egestate, quod tunc aliis studiis de-

destinâram, hæc non ita ad normam exigere potuisse, quam illa quidem, quæ publico usui viritim legenda terendaque permittuntur, quasi suo quodam jure postulant: cum non tantùm benevolorum amicorum, sed etiam vitilitigatorum, acerborumque inimicorum, quorum si non in præsens, in posterum fortasse copia suppetere possit, judicium subire debeant. At fortè inquies, quòd non sub libelli, sed epistolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem prodituras sint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis studiis animum applicassem, ideoque nullo merito accuratam illam diligentiam, summamque curam, omniumque probationes desiderari posse. Sed quid causæ est, quin paulo diutius exspectem, illaque, quibusdam præterea additis, sub libelli nomine, accuratius elaborata publici juris faciam? maximè cum libellum quendam, (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis,). de Natura, Reductione, Determinatione, Resolutione, atque Inventione Æquationum *prælo subjicere proposueriu, (nisi sontica quædam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quædam excipias, in numerato habeo, adeo ut non nisi in ordinem redigendi labor & quasi forma desideretur. Cum enim in animo habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo, quod dicitur, rem ipsam ordiri, & per numeros gradusque procedere, nec uno impetu montis verticem superare cupit, intelligi & in usum transferri possit; certè multo magis, procul omni dubio, utilitate suâ, quam hæ epistolæ, quæ non nisi partem continent, eamque ita, ut dictum est, scriptam, se publico commendaret. Sed jam mihi responsionem tuam audire videor: Quid obstat, Huddeni, quo minus utriusque nos participes facias?*

Nam bene conveniunt unaque in sede morantur.

Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quasi abortivus fœtus,

fœtus, tum allaturus eſt? Nullum equidem, fortaſſe, inquies, ubi conſummatior ſe conſpiciendum præbuerit, ſed jam quidem quandiu ille intra penetralia Veſtæ latet, cum experientiâ in omnibus pæne ſcientiis compertum ſit, illos, qui earum amore tenentur, vel quibus res curæ & cordi eſt, eamque quam penitiſſimè, & quam maxime fieri poteſt, circumſpectè rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manuductionem ad eam requirant, vel nudam modo, omnibus demonſtrationibus, quaſi ſupervacaneis ornamentis, neglectis, veritatem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum medullam ingenio ſuo penetrare illis datur, cum ex parte iis quoque inveſtigandi labor incumbat: partim majore voluptate perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum veritatem in apricum producendam evadunt. Cum etiam id experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, aliquid, quod communem captum ſuperet, & cornicum quaſi oculos configat, elaboratum dare poſſe. Vnde illud confici videtur, ſcientiarum amatoribus ſatis ſuperque dictum, nec mihi fas licitumque eſſe, illud ſubducere aut invidere iis, quibus, ſi non aliis, aliquo modo ſatisfacere queat. quibus addere poſſes: alios, licèt multis in locis, ejus, quod dicitur, veritatem demonſtrationibus fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi tantùm brachio attigi,) non reperturi ſint, nihilominus multas regulas ad uſum, cujus reſpectu non paucæ ad amuſſim factæ ſunt, transferre poſſe. Atque ita jam cauſam meam contra me ipſum egiſſe videor, ut vix mutire vel hiſcere adverſus ea, quæ dixi, mihi licitum videri poſſit, ſi in Lectores, quales eſſe decet, incidere mihi contingat: ſed cum maxima hominum pars eò propendeat, ut ante de re aliqua, quam illam clarè & diſtinctè perceperit, judicium ferat, remque potius in deteriorem,

 rem,

rem, quam meliorem partem interpretetur, atque eorum judicium ſit periculi plenum, ſi circa res verſetur, quæ non exactè ſcriptæ, dilucidè explicatæ, demonſtrationibus ſubnixæ ſunt; eoque magis ſi illæ paucis verbis indicatæ fuerint, ipſaque res ita ſit comparata, ut non niſi difficulter paucis verbis ita ſe comprehendi ſinat, quin alicubi aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem ſuſcipere poſſit, irrepat, ſeque immiſceat: Cumque multo maxima pars eorum quæ epiſtolis meis continentur talia ſint, demonſtrationibuſque deſtituta, verbiſque paucis, uti jam dictum, indicata, cum Tibi hoc pluſquam abundè ſufficeret; Satis mihi vel hoc ſolum, cauſæ videtur, epiſtolarum editioni, nulla ex parte ſuffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam ſperare fas ſit, hac in parte uti, meaſque literas non niſi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, inveſtigant, manus incidere, neque meos Lectores tales eſſe, qui, ubi ad dubium verbum, quaſi ſcopulum, offenderint, veritati conſonâ ſignificatione inſuper habitâ, eam magis quæ falſitatis aliquid ſecum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in ſinu gaudentes, & caſtellanos neſcio quos triumphos ducentes, quaſi verò jam repererint aliquid, quo ſuſpectam autoris inventionem reddant, ejuſque apud alios exiſtimationem elevent, ut ipſi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, ſi fieri poſſit, ruinâ gradum ſibi ad gloriolam, licèt inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ poſſe negamus,

Tamen adhuc plura obſtant: nam, cum non tantum typopraphicæ emendationis moleſtiam, ſatis ſæpe tædioſam, Te devoraturum, ſed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me ſcripta ſunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus eſt mos, obtuleris, videor mihi ſatis graviter in publica commoda peccaturus, niſi repulſam feras. Nonne enim

tempus

tempus illud, quod operæ illi impendere necesse habebis, nec id modicum, tum propter rite in Latinum sermonem convertendi, tum propter recte, ubi prælo subjecta fuerint, corrigendi molestiam, melioribus curis impendere, bonasque horas melius collocare posses? nisi enim me experientia docuisset, quid non possis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego sum conscius, optatum Tibi exitum consequutus fueris, facilius assensum præberem. Ne igitur impræsentiarum ægrè feras, quòd is audire nolim, qui, cum tempori tuo non contemnendam partem suffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidisse videri possit. Atque adeo omnes hæ rationes eo me impellerent, ut, nisi à mea consuetudine abhorreret, amicis aliquid denegare, jam sine omni dubio repulsam ferres. Quid ergo in re dubia consilii? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; sin id recusem, optimo meorum amicorum præter consuetudinem refragabor. sed in omnes partes mentem versando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperisse, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec assentior, nec repugno editioni epistolarum, sed totum hoc, quicquid est, Tibi plane trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & sequaris, ubi rationum mearum momenta non præoccupato, sed libero ac provido animo perpenderis, libraverisque. Vale, Vir Amicissime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amstelædami ipsis
Calendis Aprilis 1658.

IOHANNIS HVDDENII
EPISTOLA PRIMA
DE
REDVCTIONE
ÆQVATIONVM.

Clarissimo, Præstantissimoque Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO IOHANNES HUDDE

S. P. D.

Doleo, Vir Amicissime, quòd dubia valetudine & negotiis impeditus amicæ petitioni tuæ, de iis latiùs deducendis, quæ de Reductione Æquationum ad Amicum quempiam ante aliquot annos breviter perscripseram, hactenus satisfacere nequiverim. Impræsentiarum ergo aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) decidam, ut promissa, si non in totum, ex parte saltem exsolvam, ne vel nimis longa te offendat mora, vel nomen malum apud te audiam, quamvis non videaris immeritò mihi crimen illud impingere posse, sed tamen velim memor sis Belgici adagii: Die noch wat betaalt, wil noch betalen, en is van de quaatste slagh niet.

Quod igitur ad *Reductionem Æquationum* attinet, eam duobus modis considero, vel quatenus æquatio *absolutè* considerari potest, vel *relativè* in quantum scilicet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit, referre licet.

Primò verò eam *absolutè* considerabo, omissa vulgari Reductione, quæ per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem & extractionem procedit: ponamque tantùm Reductionum Regulas quasdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exemplis, ut mentem meam meliùs percipias, illustrabo, relictis earum demonstrationibus, tum quòd maxima earum pars sit perquàm inventu facilis, tum, quod rei caput

caput eſt, quòd hominis foret otio ſuo abutentis, eas tibi (cui, quicquid in Matheſi inacceſſum aliis videtur, perſpectum eſt,) tranſmittere.

Et ut diſtinctius meos conceptus exprimam, primo reſtringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas reperitur, quam ſemper nominabo x; & in quibus Primus Terminus (Primum Terminum eum dico, in quo x plurimarum eſt dimenſionum; Secundum, ubi x eſt unâ dimenſione minor, & ſic porrò) non eſt multiplicatus aut diviſus per aliquam cognitam quantitatem, atque ſemper affectus ſigno $+$: Quia non tantum hoc pacto omnes æquationes conſiderare conſuevimus, ſed etiam quia nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet notum eſt, ad talem formam, ſi eam non habeant, redigi poſſunt.

SEQVENTES NOVEM REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNEM ÆQVATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QVANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NVLLÆ INVENIANTVR.

I. REGVLA.

Si in æquatione literali una vel plures literæ ſeu quantitates cognitæ ſupponantur ∞ o, atque eo *ultimus Terminus non evaneſcat*, neque æquatio, quæ hinc reſultat, reducibilis ſit, certum eſt neque Propoſitam æquationem reducibilem fore; at verò ſi *ultimus Terminus evaneſcat*, atque etiam inde Reſultans æquatio non exiſtat reducibilis, æquatio Propoſita ad pauciores dimenſiones quàm iſta reſultans reduci non poterit.

Exem-

Exemplum, ubi ultimus Terminus non evanescit.

Sic in æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3axx & + 2bbx & - 3a^3 & \infty\ 0, \\ - b & + 3ab & - b^3 & \\ & + 4aa & - 5aab & \\ & & - 4bba & \end{array}$$

si supponatur $a \infty 0$, resultabit, inde $x^3 - bxx + 2bbx - b^3 \infty 0$. Quia autem hæc æquatio reducibilis non est, certum est neque Propositam reducibilem fore.

Exemplum, ubi ultimus Terminus evanescit.

Si in æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^6 - 6abx^4 & + 6c^3x^3 & + 6a^3bxx & - 12aac^3x & + 12c^5d & \infty\ 0 \\ - 3aa & + ccd & & - 6abccd & - 12abbc^3 & \\ & - bba & & + 6aab^3 & & \end{array}$$

supponantur d & $a \infty 0$, resultat inde $x^3 + 6c^3 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum reduci nequit, argumentum est neque Propositam ad pauciores dimensiones quàm ad tres, reducibilem fore.

Sic etiam supponendo d & $b \infty 0$, vel tantùm $c \infty 0$, orientur hæ duæ æquationes

$$x^5 - 3aax^3 + 6c^3xx - 12aac^3 \infty 0.$$

$$\begin{array}{l} x^5 - 6abx^3 - bbaxx + 6a^3bx + 6aab^3 \infty 0. \\ - 3aa \end{array}$$

Quæ si reduci non poterunt, denotabunt Propositam æquationem, ad pauciores dimensiones quàm ad 5, reduci non posse.

Dico, *illam non ad pauciores dimensiones reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. quemadmodum contingit in hac $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 \infty 0$, supponendo $a \infty 0$: exsurgit enim $x^3 + 2b^3 \infty 0$, quæ non potest reduci, & tamen æquatio Proposita est reducibilis per $x - 2a \infty 0$.

II. *REGVLA*.

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel omnibus literis seu quantitatibus cognitis, supponantur

tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, sive numeralis, sive literalis, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est, neque Propositam æquationem reducibilem fore; si verò *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones, quàm ista Resultans, reduci non poterit.

Exempla, ubi ultimus Terminus non evanescit.

1. Si in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2axx & + 3bbx & - 3a^3 & \infty\, 0 \\ - b & + 3ab & - 3b^3 & \\ & + 4aa & - 6aab & \\ & & + 9abb & \end{array}$$

supponatur $a \infty 1$, & $b \infty 1$, resultabit inde æquatio numeralis $x^3 - 3xx + 10x -{}^3 \infty 0$. Quæ, quoniam non est reducibilis, indicabit, neque Propositam æquationem reducibilem esse.

2. Sic etiam, si habeamus hanc

$$\begin{array}{lll} x^5 *** & + 4aabbx & - 10a^4b \infty 0, \\ & - \frac{3a^3bb}{a-b} & - \frac{2}{3}b^3aa \end{array}$$

atque supponamus $4aabb \infty \frac{3a^3bb}{a-b}$, seu $b \infty \frac{1}{4}a$, exsurget inde $x^5 **** - 2\frac{49}{96}a^5 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio reduci non potest, certum est, neque Propositam reducibilem fore.

3. Non secus, si in æquatione

$$\begin{array}{llll} x^5 ** & - 8a^3xx & + 4ca^3x & - 2a^3cd \infty 0 \\ & - 2aac & + accd & \end{array}$$

supponatur $-8a^3 - 2aac \infty 0$, seu $c \infty -4a$; ac $4ca^3 + accd \infty 0$, seu $d \infty -\frac{4aa}{c}$, fiet inde $x^5 **** + 8a^5 \infty 0$. Quoniam verò hæc æquatio non reducibilis existit, *certum est, &c.*

4. Eodem modo se res habet in æquationibus, ubi quantitates Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, si detur hæc æquatio $x^5 ** + xx\sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}, * + a^3b\sqrt{C. \tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{1}{27}abb} \infty 0$, supponendo $\frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, seu $bb \infty -\frac{1}{4}aa$, resultabit $x^5 **** + a^3b\sqrt{C. \tfrac{25}{216}a^3} \infty 0$. quæ, quoniam reduci non potest, *certum est, &c.*

Exem-

Exempla, ubi æquatio Resultans pauciores quàm Proposita dimensiones habet.

1. Si habeatur $\begin{array}{l} x^4 + 4cx^3 + 4ccxx - 4bbcx + b^4 \infty 0, \\ \, - dd - bbdd \\ \, - 2bb \end{array}$ ac

supponatur $c \infty 1$, $b \infty 1$, $d \infty 1$, resultabit inde æquatio numerica $x^3 + 4xx + 1x - 4 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum non existit reducibilis, etiam æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ad tres reduci non poterit.

2. Si proponatur $x^3 - \frac{1}{4}ab\sqrt{xx+aa-bb} + 3axx + \frac{1}{4}abx - aab + bb\sqrt{3aa+bb} \infty 0$,

& supponatur $aa - bb \infty 0$, seu $a \infty b$, resultabit $x^3 + 3axx * + a^3 \infty 0$. quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propositam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimensiones reduci non posse.

Dico *non ad pauciores dimensiones illam reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. Quod etiam in 1ma Regula locum habuit, ibique explicatum est. Sed si roges, quot ego dimensiones 2do huic exemplo adscribam? respondeo, me tot dimensiones cuilibet æquationi adscribere, quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet, dempto omni signo radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud 2^{dum} exemplum habiturum 6 dimensiones, postquam signum radicale ante quantitatem incognitam, nempe $\sqrt{xx + aa - bb}$, ablatum fuerit.

NOTÆ *duæ in hanc* I & II *Regulam.*

I. Notandum est, utramque hanc Regulam non tantùm magnum habere usum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis sit, verùm etiam eodem modo inquiri posse:

1mo. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis composita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis sit, dividi possit.

2do. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

3^{tio}. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem divisorem.

Nam, *si non admittant divisorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem*, illud plerumque, monstratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel saltem admodum facilè, innotescet; præsertim in æquationibus vel quantitatibus valde compositis, atque ex multis diversis literis constantibus, quod sæpenumero ineundo aliam viam valde difficile inventu esset, magnumque & laborem & industriam requireret. Hæc enim Methodus tantùm exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (supponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum sumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde scimus non admittere reductionem, vel rationalem divisorem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem. Quod omne, exemplis explicare, supervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi usum enumerare, quem satis insignem esse jam patuit; ac vel eo nomine, quòd ipsa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non raro magnum adfert compendium.

Denique, *si æquationes, vel quantitates compositæ, admittant reductionem, vel divisorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem divisorem*, possunt etiam illa omnia in multis casibus hâc Methodo satis compendiosè inveniri. sed hæc non sunt hujus loci, posthac fortassis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per *æquationem ex Proposita Resultantem*, necessarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maximè quia id etiam in sequentibus Regulis, ubi litera aliqua ∞ o supponitur, usum suum habebit. Quando enim una pluresve literæ vel quantitates ∞ o sumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Proposita æquatione necessariò evanescere. quemadmodum in allatis exemplis quoque est videre. Adeò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Resultantem intelligam. Sed si literales fractiones dantur, tunc quidem facilè, nisi quis probè animum advertat, error committi posset. Etenim fractionis numeratore ∞ o existente, tollenda est ista fractio ex Proposita æquatione; at denominatore ∞ o existente, oportet terminos omnes æquationis primùm per ejusmodi deno-

denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in quâ scilicet nulla ampliùs reperitur fractio literalis, cujus denominator est ∞ o, & in qua conditiones omnes assumptæ, sive suppositiones, sunt adimpletæ, illa, quam ex Proposita resultare dico.

Exempla.

ÆQUATIONES PROPOSITÆ.		ÆQUATIONES RESULTANTES.
$\begin{array}{lll} xx & -\frac{cc}{a}x & +cc\infty 0. \\ & +b & -aa \\ & & -\frac{ccb}{a} \\ & & +ab \end{array}$	supponatur $c \infty 0$ $a \infty 0$	$\begin{array}{l} xx+bx-aa\infty 0 \\ \qquad\quad +ab \end{array}$ $-ccx-ccb\infty 0$, seu $x+b\infty 0$.
$\begin{array}{lll} xx & -cx & +\frac{c^3}{2a}\infty 0. \\ & +a & -\frac{1}{2}cc \\ & +\frac{ac}{a+b} & -\frac{cca}{2a+2b} \\ & -\frac{cc}{2a} & \end{array}$	$c \infty 0$ $a \infty 0$	$xx+ax\infty 0$, seu $x+a\infty 0$ $-\frac{ccx}{2}+\frac{c^3}{2}\infty 0$, seu $x-c\infty 0$.

$$x^5 ** + \frac{2ac-ab}{3a-b}xx + \frac{ccb^3}{3aa-ab}x + \frac{b^3a^3}{a+b}\infty 0,$$

suppositâ $3a-b\infty 0$:

habebitur $\overline{2ac-ab}$ in xx, $+\frac{ccb^3}{a}x\infty 0$, seu $\begin{array}{l}+2acx+\frac{ccb^3}{a}\infty 0. \\ -ab\end{array}$

Unde, suppositione $3a\infty b$ adimpletâ, resultat
$$\begin{array}{l} +2acx+27aacc\infty 0. \\ -3aa \end{array}$$

Nec tantùm hoc observandum in æquationibus, sed etiam in quantitatibus compositis, quarum communis mensura, vel divisor, vel radix petitur. Ut, exempli gratiâ, si inquirere velis, num $\surd$ Q extrahi possit ex $cc-2cd+dd+\frac{b^4}{cc-2cd+dd}+2bb$; & in eum finem supposuisses $cc-2cd+dd\infty 0$: retinendum esset b^4, non autem $2bb$. Si enim $2bb$ retineres, concludendum foret, meam ſequendo methodum, quòd $\sqrt{Q}$ ex $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc - 2cd + dd} + 2bb$ extrahi non poſſet, quæ tamen eſt $c - d + \frac{bb}{c-d}$.

SEQVENTES 3, 4, ET 5 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNES ÆQVATIONES, QVÆ EX MVLTIPLICATIONE DVARVM ALIARVM PRODVCI POSSVNT, IN QVARVM VNA ALIQVA LITERA INCLVDITVR, QVÆ IN ALTERA NON CONTINETVR.

III. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ* litera *non habet eundem dimenſionum numerum in diverſis Terminis.*

Suppono omnes Propoſitæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque ſimul ſic dividi poſſunt, ut litera illa evaneſcat, ∞ o. Atque hoc in *ſingulis literis* inſtituo, verùm *uno tantùm modo*. Quippe id interdum variis modis fieri poteſt, quo caſu illi præ cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes ſubminiſtrant, vel quibus omnium breviſſimè ad quæſitum pervenire licet. Et, ſi Propoſita æquatio ex duabus ejuſmodi dictis æquationibus produci poterit, etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in quibus dictæ *literæ* ſunt ſublatæ, diviſibilis erit.

1^{mum} *genus exemplorum, in quibus Propoſitæ æquationes nec numerales nec literales fractiones continent.*

1. Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - 6ax^3 & + 4bcxx & - 16abcx & + 16bbca \infty o. \\ & + 4ac & - 16aac & + 48aabc \\ & + 16aa & - 8aab & + 32a^3c \\ & + 4ab & - 16a^3 & \end{array}$$

Primò

Primò itaque periculum faciam in litera a, supponendo $-16a^3x+32a^3c \infty 0$. Quæ sunt omnes quantitates per a^3 divisibiles, quæ in Proposita æquatione inveniuntur, & in quibus factâ divisione litera a evanescit: oritur enim $-16x+32c \infty 0$, seu, dividendo per -16, $x-2c \infty 0$.

Iam tento, num Proposita æquatio dividi queat per $x-2c \infty 0$. Nam si per hanc dividi non possit, *uti &, si hæc* $x-2c \infty 0$ *ab omni fractione non libera fuisset*, (*quod huic quidem primo exemplorum generi est proprium*) ad aliam literam transiissem. (Quamvis enim aliæ adhuc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus a continetur, quæque omnes per aliam quàm a^3 dividi possunt, sic ut litera a ubique evanescat, utpote supponendo

$$\begin{array}{llll} +16aaxx & -16aacx & +48aabc \infty 0, \text{ ut \&} \\ & -8aab & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -6ax^3 & +4acxx & -16abcx & +16bbca \infty 0; \\ & +4ab & & \end{array}$$

tamen id *uno modo* in hac Regula tentasse sufficit.) Hinc cum Proposita æquatio per $x-2c \infty 0$ divisibilis non sit, transeo ad aliam literam, puta b. Quoniam autem hîc una tantùm quantitas existit, in qua bb reperitur, nempe $16bbca$, idcirco & hanc transeo, quandoquidem per $16bbca$ nullus valor ipsius x obtineri potest, & considero literam c, ponendo

$$\begin{array}{llll} 4bcxx & -16abcx & +16bbac \infty 0. \end{array}$$ Hæc igitur cum absque
$$\begin{array}{lll} 4ac & -16aac & +48aabc \\ & & +32a^3c \end{array}$$

fractione dividatur per $4bc+4a^6$, ac oriatur $\begin{array}{l} xx-4ax+4ab \infty 0: \\ \qquad\qquad\quad +8aa \end{array}$

inquirendum ulteriùs restat, an Proposita æquatio dividi possit per $\begin{array}{l} xx-4ax+4ab \infty 0. \\ \qquad\quad\;\; +8aa \end{array}$ inveniturque divisionem fieri posse.

Dixi in Regula, *quòd sufficiat, rem singulis literis uno tantùm modo tentasse, & quòd illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui facillimas æquationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum pervenire licet.* Sic enim breviorem viam ingressus essem, si quantitates sumpsissem, in quibus a ubique unam tantùm dimensionem habet. Nam quoniam tunc obtineo $-6ax^3+4acxx+4abxx-16abcx+16bbca \infty 0$, primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi nequeat, quòd hæ quantitates non sine fractione dividi possint.

2. Eo-

2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3c\,xx & +\,abx & -\,2aab \propto 0: \\ - 2a & +\,6ac & +\,3abb \\ + 3b & -\,9bc & \end{array}$$

quia quantitas $-2aab$ in eâ sola reperitur, in qua a duas habet dimensiones; & quantitas $+3abb$ sola, in qua b duas dimensiones habet: idcirco transeo ad literam c, obtineoque

$$\begin{array}{l} -3cxx + 6acx \propto 0 \\ - 9bc \end{array} \text{ seu } \begin{array}{l} -3cx + 6ac \propto 0. \\ - 9bc \end{array}$$

Id quod divisum per $-3c$, dat

$$\begin{array}{l} x - 2a \propto 0. \\ + 3b \end{array}$$

Cujus ope Proposita æquatio dividi potest. Quod, si aliter evenisset, postquam jam periculum in omnibus factum esset literis, indicio fuisset, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

3. Similiter examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + b & xx + 2b\sqrt{ab+3bb} \text{ in } x & -\,6bb\sqrt{ab+3bb} \propto 0, \\ -\sqrt{ab+3bb} & & +\,18b^3 \end{array}$$

exordiens à litera a, invenio æquationem $-\sqrt{ab+3bb}$ in xx, $+2b\sqrt{ab+3bb}$ in x, $-6bb\sqrt{ab+3bb} \propto 0$. Quam divido per $-\sqrt{ab+3bb}$, & evanescit a, obtineoque hanc $xx - 2bx + 6bb \propto 0$; per quam Proposita dividi potest. Quòd si verò hæc divisio non fieri potuisset, progrediendum fuisset ad literam b. Quia autem liquet per b, secundùm singulas etiam suas dimensiones considerata, non posse aliquem ipsius x valorem inveniri: conclusissem, ut ante, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

4. Nec aliter se res habet in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} & -\,2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} & -\,6acx - a\sqrt{3cc+aa} \text{ in } \sqrt{xx+aa} \propto 0. \\ + 2a & +\,ax\sqrt{xx+aa} - 3aax & +\,3aa\sqrt{3cc+aa} \\ & +\,ax\sqrt{3cc+aa} & \end{array}$$

Nam primò video literam a negligi posse, quia sola $-3aax$ reperitur, nec ulla alia, quæ per aa sic dividi possit, ut ipsa a prorsus evanescat. Transeo itaque ad literam c, supponendo

$-2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx \propto 0$ seu $-2cx + 2c\sqrt{xx+aa} - 6ac \propto 0$,

& fit, dividendo ubique per $-2c$, $x - \sqrt{xx+aa} + 3a \propto 0$. Cujus ope

ope Propositam æquationem dividere licet. Quæ si per hanc dividi non potuisset, quia jam res singulis literis tentata esset, conclusissem, ut priùs, Propositam æquationem, &c.

2^dum^ genus exemplorum, in quibus Propositæ æquationes fractiones continent.

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia respectu operationis existit, quàm quòd Ficta æquatio, per quam divisio Propositæ tentatur, non necessariò, sicut ibi, ab omni fractione libera esse debeat. Quocirca unicum exemplum in medium adduxisse suffecerit.

Proponatur æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + \frac{2bb}{a+c}\,xx & + \frac{bba}{a+c}\,x & - \frac{1}{2}a^3 & \infty\ 0. \\ \quad + 2b & + \frac{3}{4}aa & + \frac{1}{2}acc & \\ & - cc & + 2abb & \\ & + ab & - 2cbb & \\ & & + 2aab & \\ & & - 2bcc & \end{array}$$

Transeo literam a, propter quantitatem $-\frac{1}{2}a^3$, quoniam a nusquam ampliùs 3 dimensionum reperitur. Hinc transiens ad b, invenio $2bxx + abx + 2aab - 2ccb \infty 0$, seu dividens ubique per $2b$, $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$, per quam Proposita dividi po-

$$\qquad\qquad - cc$$

test. Quòd si verò hæc divisio fieri non potuisset, conclusissem; cum tantùm per literam c adhuc explorandum foret, atque hæc ipsa c non magis quàm litera a, sicut ex quantitate $-2cbb$ manifestum est, ad rem quidquam faciat; æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

Ordo verò, quem in hac inquisitione, an nimirum Proposita æquatio per hujusmodi Fictas divisibilis sit, observo, talis est: Primùm inquiro, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc ablata litera reperitur, in Proposita æquatione existant. Si enim plures reperiantur, tum ipsas omnes, quæ ita per illam dividi possunt, ut ea ubique evanescat, in unam summam colligo. (ut in hoc exemplo, quantitates omnes in quibus b duas dimensiones habet.) Quo peracto, si quotiens non idem sit cum præcedenti, per quod divisio examinatur, concludo, hanc divisionem fieri non

 posse.

posse. Denique, si nullæ ampliùs in Proposita æquatione supersint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque simul per dictam Fictam divisibiles sunt futuræ, si quidem Proposita æquatio per eam divisibilis existat.

Vt $2bxx+abx+2aab-2bcc \infty o$ div. per $+2b$, fit $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}\infty o$,

itemq; $\frac{2bb}{a+c}xx+\frac{bba}{a+c}x+\begin{array}{l}2abb\\-2cbb\end{array}\infty o$ div. per $+\frac{2bb}{a+c}$, fit $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}\infty o$.

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non convenisset, etiam Proposita æquatio per $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}\infty o$ divisibilis non fuisset.

Quoniam autem conveniunt, & nullæ ampliùs quantitates in Proposita æquatione supersunt, in quibus litera b reperitur, inquiro tandem, num omnes reliquæ etiam per $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}\infty o$ dividi possint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus b non reperitur, sint $x^3 * +\begin{array}{l}\frac{3}{4}aax\\-ccx\end{array}\begin{array}{l}-\frac{1}{2}a^3\\+\frac{1}{2}acc\end{array}$, ipsæque per $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}$ dividi queant, ac oriatur $x-\frac{1}{2}a$; idcirco & Proposita æquatio per $xx+\frac{1}{2}ax+\begin{array}{l}aa\\-cc\end{array}\infty o$ dividi poterit. Quæ aliàs, ut manifestum est, per illam non divisibilis fuisset, si ultima hæc divisio fieri non potuisset; Quotiens verò est $x-\frac{1}{2}a+\frac{2bb}{a+c}+2b\infty o$.

IV. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem Æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit*, *quæ in altera non continetur; quæque* litera *in aliquo termino tot dimensiones habet, quot in nullo alio.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic dividi possunt, ut illa *litera* evanescat, ∞ o. Atque hoc in *singulis literis* facio, verùm *non uno duntaxat modo*, sicut in præcedenti 3^{tia} Regula, sed *modis omnibus*, *quibus id fieri potest*. Et si Proposita Æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam divisibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublatæ.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præscribit, quæ præcedens 3^{tia}; hoc tantùm excepto, quòd illic in singulis diversis literis duntaxat *uno modo*, uti dictum est, hîc *modis omnibus* sit tentandum; sufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + \frac{1}{2}aaxx & - \frac{1}{4}aabx & - \frac{1}{8}aabb \infty 0. \\ \quad - \frac{1}{2}b & + 1\frac{1}{2}ab & - \frac{1}{4}abb & - \frac{1}{4}ab^3 \\ & - \frac{1}{4}bb & & \end{array}$$

Exordiens à litera a, prout unam habet dimensionem, obtineo $- ax^3 + 1\frac{1}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \infty 0$, seu $- x^3 + 1\frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 \infty 0$. Cujus ope Proposita æquatio dividi nequit (quod ipsum in hoc exemplo vel hinc apparet, quòd hîc ultimus terminus $- \frac{1}{4}b^3$, ultimum terminum Propositæ æquationis non absque literali fractione dividat). Iam, non quidem ad aliam literam transeo, quemadmodum in præcedenti Regula, sed tamdiu considerabo eandem a, quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimensionum reperitur. Atque ideo cum ipsa a hîc adhuc 2 dimensionum reperiatur, suppono similiter quantitates omnes, in quibus 2 dimensiones habet, ∞ o: nimirum, $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{8}aabb \infty 0$, seu $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb \infty 0$, quæ Propositam æquationem dividere potest. Quod si secus evenisset, ad aliam literam transiissem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus a continetur, solummodo dividi possunt per a, vel aa. Quocirca facto periculo in singulis literis, & omnibus modis, si comperiatur, divisionem æquationis Propositæ per nullam Fictarum succedere, certum est, neque Propositam æquationem, ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci posse.

V. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur aliqua litera ∞ o; inveſtigeturque num æquatio, quæ hinc reſultat, habeat cum Propoſita communem diviſorem. Si non habeat, ſupponatur iterum alia litera ∞ o, inveſtigeturque num iſta Reſultans habeat communem diviſorem: atque ſic porrò, donec aut communis reperiatur diviſor, aut nulla ampliùs litera ſuperſit, quæ non ſuppoſita ſit ∞ o. Et ſi non inveniatur communis diviſor, ſignum erit, æquationem Propoſitam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non poſſe.

Ex. gratiâ, ſi proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^5 * & +4abx^3 & +30b^3\,xx & +34ab^3x & +20ab^4 & \infty\, 0, \\ & +bb & -10abb & +7a^4 & +10a^4b & \\ & +\frac{a^4}{bb} & -\frac{2a^4}{b}. & & & \end{array}$$

ſupponaturque litera $a \infty$ o, reſultabit inde $x^5 * + bbx^3 + 30bbbxx \infty$ o, quæ cum Propoſita communem habet diviſorem, nempe $xx - 3bx + 10bb \infty$ o. Quod, ſi aliter eveniſſet, aliam literam, nimirum b, poſuiſſem ∞ o. & ſi inde Reſultans æquatio etiam non habuiſſet communem diviſorem, concluſiſſem æquationem Propoſitam, quoniam tantùm duas iſtas a & b diverſas habet literas, non reſultare poſſe ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo ſe habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opùs ſit alia exempla adjungere.

SEQVENTES 6ta, 7ma, ET 8va REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNES ÆQVATIONES, QVÆ EX MVLTIPLICATIONE DVARVM ALIARVM PRODVCI POSSVNT, IN QVARVM VNA IRRATIONALIS QVANTITAS INCLVDITVR, QVÆ IN ALTERA NON CONTINETVR.

VI. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque* quantitas *non eundem dimenſionum numerum in diverſis Terminis habet.*

Suppono, &c.

VII. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque* quantitas *in aliquo Termino tot habet dimenſiones, quot in nullo alio.*

Suppono, &c.

VIII. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6tam & 3tiam Regulam, & inter 7mam & 4tam, nec non inter 8vam & 5tam haud magna diſparitas exiſtit, & tantùm pro *litera* poni debet *irrationalis quantitas*; erunt hæ Regulæ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque idcirco hæc verba in 6^{ta} Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non existit*; & hæc in 7^{ma}: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8^{vam} Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est *rationalis*, hoc est, *in qua nullum est signum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5^{ta} & 8^{va} Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc. illas $\propto 0$: cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd \propto 0$, & $d^4c - bbcdd + caabb - caadd \propto 0$.

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam c, fiuntque

$d^3 - add + 2aab - 2abd \propto 0$, & $d^4 - bbdd + aabb - aadd \propto 0$.

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut d, a, vel b. Atque considerando ipsam, puta d, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1^{ma} Æquatio	2^{da} Æquatio
$d^3 - add - 2abd + 2aab \propto 0$.	$d^4 * \begin{array}{l} -bb \\ -aa \end{array} dd * + aabb \propto 0$.

Porrò valor ipsius d^3, per 1^{mam} æquationem inventus, substituatur

tuatur ubique in locum ipſius d^3 ſecundæ æquationis: invenieturque

$$d^4 \infty ad^3 \quad + 2abdd - 2aabd \infty bbdd, + aadd - aabb$$

ſeu

$$aadd + 2aabd - 2a^3b$$
$$- 2aabd + 2abdd$$

Hoc eſt, $aabb - 2a^3b + 2abdd - bbdd \infty 0$

$$\& \; dd \infty \frac{2a^3b - aabb}{2ab - bb} \text{ ſeu } aa; \; \& \; d \infty a, \text{ ſeu } d - a \infty 0.$$

Si jam hujus dd valor ſubſtituatur in ipſius locum in 1ma æquatione, habebitur $aad - a^3 - 2abd + 2aab \infty 0$.

Denique ſubſtituatur ipſius d valor a in ejus locum in hac ultima, obtinebitur $a^3 - a^3 - 2aab + 2aab \infty 0$.

In hac igitur cum termini omnes ſe mutuò deſtruant, indicio eſt tam æquationem $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$ quàm $d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0$ eſſe diviſibilem per $d - a \infty 0$, &

$$\quad - aa$$

$d - a$ utriuſque maximum communem diviſorem exiſtere. Atque adeò, cum duæ Propoſitæ æquationes (vel quantitates) priùs per c ſint diviſæ, manifeſtum eſt earundem maximum communem diviſorem fore $\overline{d - a}$ in c, ſeu $dc - ac$.

Quòdſi autem aliam literam quàm d ceu incognitam quantitatem conſideremus, licebit ſimiliter illius ope eoſdem ſemper diviſores invenire. Exempli gratiâ, ſi a ut incognita quantitas conſideretur, obtinebitur pro

1ma Æq.	2da Æq.
$aa - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$	$aa - \frac{bbdd + d_4}{bb - dd} \infty 0.$
$\quad - \frac{dd}{2b}$	vel $aa - dd \infty 0$, ſeu $aa \infty dd$
	vel $a - d \infty 0$, ſeu $a \infty d$.

Subrogetur jam dd valor ipſius aa, per 2^{dam} æquationem inventus, in locum aa primæ æquationis, & invenietur pro ipſa

$$dd - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$
$$\quad - \frac{dd}{2b}$$

Denuo

Denuo in hac ultima in locum ipſius a ſubrogetur ejus valor d, obtinebitur $$dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty o.$$ $$- \frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rurſus termini omnes ſe mutuò tollant, argumentum eſt, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem eſt ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate ſumatur.

Si verò accidiſſet, ut nec per ſubrogationem valoris ipſius d^3, nec ipſius dd, nec denique ipſius d, termini omnes ſe mutuò deſtruxiſſent, argumentum fuiſſet, quòd duæ illæ æquationes $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty o$, & $d^4 * - bbdd * + aabb \infty o$
$$- aa$$
nullum communem diviſorem habuiſſent, & quòd duarum Propoſitarum æquationum, quæ priùs per c fuerunt diviſæ, nullus communis diviſor præter c extitiſſet. Excepto tantùm, ubi diviſio fieri poteſt per ejuſmodi quantitates, quæ ſimul poſſunt fieri ∞ o, atque in cauſa eſſe, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas conſideratur, per iſtam æquationem inveniri non poſſit.

Exempli gratiâ, ſi in Propoſitis æquationibus literam b, ut incognitam quantitatem conſideraſſem, obtinuiſſem

pro 1^{ma} — pro 2^{da}

$$b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa} \text{ ſeu } \frac{dd}{2a}, \ \& \ bb \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa} \text{ ſeu } dd$$

vel $b \infty d$.

Vbi videmus, valores ipſius b, nempe $\frac{dd}{2a} \infty d$, ſe invicem non tollere, ideoque concludendum eſſet, has duas æquationes non habere communem diviſorem, ſi nempe ejuſmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum ∞ o ponuntur, efficiunt, ut valor ipſius b inveniri nequeat. Quemadmodum ſi ponatur $d - a \infty o$, non poterit valor ipſius b per 1^{mam} æquationem inveniri: quippe tum d^3 erit ∞add.

Priuſquam itaque concludatur, non dari duarum ſive æquationum ſive quantitatum communem aliquem diviſorem: 1^{mo} obſervandum venit, num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in cauſa eſſe poſſunt, quòd valor incognitæ literæ,

ſeu

ſeu inſtar incognitæ conſideratæ, per iſtam æquationem inveniri nequeat. 2[do] ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant. quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur $d - a \propto 0$, cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, ſubrogando a in locum d, uno intuitu videre eſt. At verò ſi aliter eveniſſet, concluſiſſem, non dari, &c.

Vnum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus inveniendum eſſe maximum communem diviſorem harum duarum æquationum ſive quantitatum

$$\overset{1^{ma}\ \text{Æq.}}{12a^4 + 11aaxx + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x \propto 0}, \ \& \ \overset{2^{da}\ \text{Æq.}}{12aaxx - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 \propto 0}.$$

Quoniam autem hæ non diviſibiles ſunt per aliquam literam nec per numerum, conſidero literam aliquam, ad libitum ſumendam, tanquam incognitam quantitatem, puta x, atque operationem porrò inſtituo, ut ſequitur

$$\begin{array}{rl} \text{per } 1^{mam} \text{ invenitur } x^4 \propto & 4ax^3 - 11aaxx + 20a^3x - 12a^4 \\ \text{add.} & -3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4 \\ \hline \text{fit pro } 2^{da} \text{ æquatione} & ax^3 + aaxx + 4a^3x + 12a^4 \propto 0 \\ \hline \text{div. per } a. & x^3 \propto -axx - 4aax - 12a^3 \end{array}$$

Subſtituatur jam hîc valor ipſius x^3 in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum interſit, poteſt tamen in multis caſibus magnum eſſe diſcrimen, tunc enim oportet, brevitatis causâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cùm duæ ſunt, dimenſionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque $xx \propto ax - 6aa$.

Subſtituatur rurſus hîc valor ipſius xx ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, ſumendo, brevitatis causâ, præcedentem 3 dimenſionum, invenietur

$$\begin{array}{rl} & 2^{da}\ \text{Æq.} \\ x^3 \propto axx - 6aax \text{ ſeu} & \left.\begin{array}{l} \begin{array}{l} +aax \\ -6aax \end{array} - 6a^3 \\ \\ +aax - 6a^3 \\ +4aax + 12a^3 \end{array}\right\} \propto 0 \\ +axx \propto & \\ +4aax + 12a^3 \propto & \end{array}$$

In qua videmus terminos omnes ſe invicem tollere, quod arguit, haſce Propoſitas æquationes ſive quantitates diviſibiles eſſe

 per

per $xx - ax + 6aa$; quæ ideo maximus est earum communis divisor.

Porrò manifestum est, si quis *omnes duarum vel plurium sive Æquationum sive Quantitatum communes divisores* invenire velit, tantùm inveniendos esse *divisores omnes Maximi earum communis divisoris*.

Præterea etiam liquet, non tantùm in multis casibus, per 1^mam & 2^dam Regulam (uti annotatum est) uno intuitu videri posse, duas Æquationes vel Quantitates non habere communem aliquem divisorem; verùm etiam Regulas omnes, de Reductione æquationum agentes, ad inveniendos omnes ipsarum communes divisores inservire posse.

IX. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, quæ per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.

Ostendam hoc in uno aut altero tantùm exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi satis poterit.

Proponatur itaque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 \infty 0$, deturque illam dividi posse per aliam duarum dimensionum, cujus ultimus Terminus sit -2. Esto autem illa $xx + yx - 2 \infty 0$, seu, $xx \infty -yx + 2$. Hunc valorem ipsius xx ubique substituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propositæ obtineo, in qua x tantùm unius dimensionis reperitur: nimirum, $\overline{y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5}$ in x, $-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0$. quemadmodum ex sequenti operatione videre est.

$xx \infty$

$$\underline{xx \infty -yx+2}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{ergo } x^4 \infty yyxx - 4yx + 4 & \text{seu} & -y^3x + 2yy \\
 & & -4yx + 4 \\
\hline
x^3 \infty -y^3xx + 2yyx & \text{seu} & +y^4x - 2y^3 \\
\quad -4yxx + 4x & & +2yyx \\
 & & +4yyx - 8y \\
 & & +4x \\
-4x^4 \infty & & +4y^3x - 16 \\
 & & +16yx - 8yy \\
+4x^3 \infty -4yxx + 8x & \text{seu} & +4yyx - 8y \\
 & & +8x \\
+1\frac{1}{2}xx \infty & & -1\frac{1}{2}yx + 3 \\
-7x - 3 \infty & & -7x - 3 \\
\hline
 & \text{summa} & +y^4x - 2y^3 \\
 & & +4y^3 - 8yy \infty 0. \\
 & & +10yy - 16y \\
 & & +14\frac{1}{2}y - 16 \\
 & & +5
\end{array}$$

Deinde considero unumquemque terminum separatum æquationis hujus deductæ ∞ o, & cum hîc duo tantùm sint termini, habebo inde hasce duas æquationes

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & \text{II.} \\
y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 \infty 0, \& & -2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0 \\
 & \text{seu } \; y^3 + 4yy + 8y + 8 \infty 0.
\end{array}$$

Quarum quidem æquationum, si juxta præcedentem methodum quæratur maximus communis divisor, invenietur pro ipso $y + 2 \infty 0$; ita ut Proposita æquatio, cum y sit $\infty -2$, divisibilis sit per $xx - 2x - 2 \infty 0$.

Eodem modo, proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0, \\ \qquad\quad - cc \end{array}$$ deturque ipsam dividi posse per æquationem duarum dimensionum, cujus ultimus terminus sit $+aa$. Esto autem æquatio illa $xx + yx + aa \infty 0$, adeoque $xx \infty -yx - aa$. Hinc, subrogato hoc valore in locum xx, obtinebitur loco Propositæ æquationis alia, in qua x unius tantùm erit dimensionis, nempe

$$\begin{array}{ll} -y^3 \; x & -aayy \infty 0. \\ -2ayy & -2a^3y \\ +ccy & +aacc \end{array}$$

 Cujus

Cujus si unusquisque separatus terminus rursus consideretur ∞ o, habebimus has duas æquationes

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & & \text{II.} \\ -y^3-2ayy+ccy\infty 0, & \& & -aayy-2a^3y+aacc\infty 0 \\ \text{seu} & & \text{seu} \\ -yy-2ay+cc\infty 0 & & -yy-2ay+cc\infty 0. \end{array}$$

Cum igitur harum communis mensura seu divisor sit $-yy-2ay+cc\infty 0$, quæro hinc valorem ipsius y: invenioque $y\infty -a \pm \sqrt{aa+cc}$, ac proinde æquationem Propositam esse divisibilem per $xx-a\pm\sqrt{aa+cc}$ in x, $+aa\infty 0$.

Similiter, si detur, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^5 * & +bbx^3 & +3abbxx * & +2ab^4\infty 0 \\ & +aa & -2a^3 & \end{array}$$

esse divisibilem per aliam 3 dimensionum, cujus tertius terminus sit $+2aax$: pono pro ipsa $x^3+yxx+2aax+z\infty 0$, seu $x^3\infty -yxx-2aax-z$. Quo valore ubique in locum x^3 in Proposita æquatione subrogato, obtinebitur

$$\begin{array}{llll} -z & xx\ +yzx & +aaz\infty 0. \\ +3aay & \quad\ \ +2a^4 & -yyz \\ -y^3 & \quad\ \ -2aayy & -bbz \\ -bby & \quad\ \ -2aabb & +2ab^4 \\ +3abb & & \\ -2a^3 & & \end{array}$$

Quoniam autem hæc æquatio 3 habet separatos terminos, habebuntur inde hæ 3 æquationes

$$\begin{array}{c} 1^{ma} \\ -z+3aay-y^3-bby+3abb-2a^3\infty 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2^{da} & 3^{tia} \\ yz+2a^4-2aayy-2aabb\infty 0, & aaz-yyz-bbz+2ab^4\infty 0. \end{array}$$

Hinc per 1^{mam} sublatâ z, quæ est $\infty\ 3aay-y^3-bby+3abb-2a^3$, invenietur pro 2^d:

$$\begin{array}{lllll} -y^4 * & +aayy & +3abby & -2aabb\infty 0, \\ & -bb & -2a^3 & +2a^4 \end{array}$$

& pro 3^{tia}:

$$\begin{array}{llllll} +y^5 * & -4aay^3 & +2a^3yy & +3a^4\,y & +5a^3bb\infty 0. \\ & +2bb & -3abb & -4aabb & -2a^5 \\ & & & +b^4 & -ab^4 \end{array}$$

Quarum duarum maxima communis mensura per superiorem me-

methodum est $y - a \propto 0$, ideoque $y \propto a$; cumque z sit $\propto 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$, erit inde z etiam $\propto +2abb$. Æquatio autem, per quam Proposita dividi potest, posita erat $x^3 + yxx + 2aax + z \propto 0$. Quocirca si in hac subrogentur valores quantitatum incognitarum y & z, invenietur pro ipsa $x^3 + axx + 2aax + 2abb \propto 0$.

Atque ita de aliis omnibus Propositis æquationibus, sive rationalibus sive irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus; atque etiam sive ultimus Terminus, sive aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Propositæ dividi queunt, datus fuerit, sive alicui quantitati (ut in his exemplis), sive nihilo æqualis sit; cujus quidem generis nullum exemplum affero, cum operatio haudquaquam diversa existat. Id tantùm addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formæ æquationum inveniri posse.

10^ma, ET 11^ma REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ REPERIANTUR, EXCEPTIS TANTUM ILLIS ÆQUATIONIBUS, IN QUIBUS SIGNA RADICALIA SUNT, QUÆ INCOGNITAM QUANTITATEM INCLUDUNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia signa radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, si in æquatione Proposita talia fortè fuerint, primùm tollantur; sequentes verò Regulæ, quibus omnia signa sine discrimine primùm auferantur: præmittam

Modum tollendi signa radicalia ex qualibet æquatione Proposita.

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio $n \propto e + g + h + k + m$, &c. in qua 1°. quælibet litera quantitatem designet, signo radicali $\sqrt{}$ Q adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evanescet signum quantitatis n. Quoniam autem reliquæ literæ e, g, h, k, m, &c. aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale, in quantum duas habent, evanescet; manifestum est, obtineri posse æquationem, in qua e æquatur aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quæ æquatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratè, evanescet pariter signum radicale ipsius e; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimensiones, ac ipsæ in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, & quantùm ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandæ sunt tanquam unâ duntaxat dimensione constantes, cum duæ signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse æquationem, in qua g sit æqualis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Quâ æquatione denuo quadratâ, sublatum item erit signum radicale ipsius g. Atque ita facile est intelligere, quâlibet quadratione unum signum radicale tolli.

Majoris perspicuitatis ergo addatur sequens operatio, existente $n \propto e + g + h + k$, ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio $nn \propto ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$. Brevitatis autem causâ, pro $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$ scribatur pp; cum hæ quantitates signo radicali careant; & fit $pp \propto eg + eh + ek + gh + gk + hk$, sive $e \propto \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$. Vnde quadrando rursus utramque partem invenitur:

$$ee \propto \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk}{gg + hh + kk + 2gh + 2gk + 2hk},$$

seu

$$p^4 + gghh + \overline{ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk} + 2gghk + 2ghhk +$$
$$2ghkk - gg - hh - kk - 2gh - 2gk - 2hk \text{ in } ee \propto 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk \overline{- gg - hh - kk} \text{ in } \overline{ee} \propto q^4$$
$$+ 2kk - 2pp - 2ee \propto rr$$
$$+ 2hh - 2pp - 2ee \propto ss$$
$$+ 2gg - 2pp - 2ee \propto tt,$$

erit-

eritque $q^4 + rrgh + ssgk + tthk \infty 0$

$$\frac{q^4 + tthk}{rrh + ssk} \infty -g$$

$$\frac{q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk}{r^4hh + s^4kk + 2rrsshk} \infty gg$$

$$q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk - r^4hh - s^4kk - 2rrsshk \text{ in } gg \infty 0.$$

Supponatur rursus, brevitatis causâ,

$$q^8 + t^4hhkk - r^4hhgg - s^4kkgg \infty v^8,$$

$$\& \; 2q^4tt - 2rrssgg \infty w^6:$$

fietque $v^8 + w^6hk \infty 0$

$$v^8 \infty -w^6hk$$

& invenietur $v^{16} \infty w^{12}hhkk$. Quæ æquatio ab omnibus signis radicalibus liberata est.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis superioris $n \infty e + g + h$, &c. designare quantitatem signo radicali $\sqrt{C.}$ adfectam. In hac igitur si loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evanescet signum radicale ipsius n, & unaquæque reliquarum literarum, e, g, h, &c. acquiret 1, 2, aut 3 dimensiones. In quantum autem tres dimensiones habent, in tantum carent etiam signo radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua e non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce terminos per e, obtinebitur æquatio, in qua e præter 1, 2, & 3 dimensiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac proinde ipsa e in hac æquatione etiam non nisi 1 & 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si ope hujus æquationis quæratur valor ipsius ee, isque in locum ee præcedentis substituatur, obtinebitur æquatio in qua e unam tantùm dimensionem habebit, atque ideo inveniri poterit e æqualis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quæ æquatio, si deinde cubetur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius e prorsus evanescet. vel potest rursum per e multiplicari, & valor ee de novo inveniri, qui iterum, ut antea, positus loco ee, habes valorem ipsius e alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in quâ $\sqrt{}$ cœ^am^.

ipsius

ipſius e non reperies. Atque ſic omnia alia ſigna radicalia ex æquatione tolli poſſunt; quod facillimè perſpicitur, ſi tantùm advertamus, quòd, verbi gratiâ, $g, gg, g^4, g^5 g^7, g^8, g^{10}, g^{11}, g^{13}, g^{14}$, &c. ſolummodo habendæ ſint pro g, gg, cum g^3 ſignum radicale deponat. Quæ ut magis perſpicua evadant, ſequentem operationem adjicere viſum fuit.

Sit ex. gr. $n \infty e + g$

$$n^3 \infty e^3 + 3eeg + 3egg + g^3$$

$$n^3 - e^3 - g^3 \infty 3eeg + 3egg.$$

Eſto jam, brevitatis causâ, $n^3 - e^3 - g^3 \infty f^3$, quoniam ipſæ Aſymmetriâ carent, fietque $f^3 \infty 3eeg + 3egg$

$$f^3 e \infty 3e^3 g + 3eegg$$

$$\& \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} \infty 3eeg.$$

Invento valore ipſius $3eeg$ in ejus locum in æquatione præcedente ſubrogato, habebitur:

$$f^3 \infty \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} + 3egg$$

$$f^3 g \infty f^3 e - 3e^3 g + 3eg^3$$

$$f^3 g + 3e^3 g \infty f^3 e + 3eg^3$$

$$\frac{f^3 g + 3e^3 g}{f^3 + 3g^3} \infty e.$$

Denique ponatur, brevitatis causâ, $f^3 + 3e^3 \infty p^3$, & $f^3 + 3g^3 \infty q^3$, cum ſingulæ ſignum radicale deponant,

eritque $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$

& $\frac{p^9 g^3}{q^9} \infty e^3$. Quæ æquatio ab Aſymmetria libera eſt. Vel hoc modo: multiplicetur $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$ per e, erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \infty ee$; & quoniam inventa eſt $f^3 \infty 3gee + 3gge$, ſeu, $\frac{f^3 - 3gge}{3g} \infty ee$

erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \infty \frac{f^3 - 3gge}{3g}$

& $3ggp^3 e \infty q^3 f^3 - 3q^3 gge$

ergo $e \infty \frac{q^3 f^3}{3ggp^3 + 3q^3 gg} \infty \frac{p^3 g}{q^3}$

& $q^6 f^3 \infty 3g^3 p^6 + 3g^3 p^3 q^3$. Quæ æquatio itidem ab omni ſigno radicali libera eſt.

Pari

Pari ratione tolli quoque possunt signa quævis altiora, sive illa ejusdem, sive diversæ dimensionis sint. Sed notandum est, quòd signa hæc, sive ipsa cognitis, sive incognitis quantitatibus præfigantur, per hunc modum semper quidem tolli possint, sed eum sæpissimè non esse brevissimum, quando scilicet signa radicalia ad quantitates cognitas pertinent; quemadmodum pag. 75 Geometriæ cernere licet, ubi constat, quædam signa tolli posse multiplicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem, quo opere ipsa in aliam æquationem transmutatur, æquè multas dimensiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum supra allatum exemplum specimen erit: hæc enim æquatio $f^3 \propto 3gee + 3gge$ divisa per n ab una parte, & per $e + g$ (quæ æqualis est n,) ab altera parte, dat $\frac{f^3}{n} \propto 3ge$, cujus partes cubicè multiplicatæ dabunt $\frac{f^9}{n^3} \propto 27g^3e^3$, æquationem, in qua nullum signum radicale invenitur: Sed quoniam proposui tantummodo hìc generalem modum indicare, quo semper omnia signa radicalia tolli queant, & non compendia, quibus in multis casibus faciliùs eo pervenire posses, monstrare; ideo huic rei finem imponam, & ad Regulas Reductionum revertar.

X. *REGVLA.*

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita considerari potest) duos vel plures æquales habet valores.

Primò si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant, multiplico eam per Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam: nimirum, 1^{mum} terminum æquationis per 1^{mum} terminum progressionis, 2^{dum} terminum æquationis per 2^{dum} terminum progressionis, & sic deinceps; & Productum, quod inde fit, erit $\propto$ o. Deinde, cum sic duas habeam æquationes, quæro, per Methodum ſuperiùs explicatam, maximum earum communem diviſorem; atque hujus ope æquationem Propoſitam toties divido, quoties id fieri poteſt.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$, in qua duæ ſunt æquales radices. Multiplico ergo ipſam per Arithmeticam Progreſſionem qualemcunque, hoc eſt, cujus incrementum vel decrementum ſit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus ſit vel o, vel +, vel — quam o: Ita ut ſemper ejus ope talis terminus æquationis tolli poſſit, qualem quis voluerit, collocando tantùm ſub eo o.

Vt ſi, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri poteſt ipſius

$$\begin{array}{rccccc} & x^3 & -4xx & +5x & -2 & \infty\, 0 \\ \text{per hanc progreſſionem} & 3. & 2. & 1. & 0 & \\ \hline \text{fietque} & 3x^3 & -8xx & +5x & * & \infty\, 0. \end{array}$$

Maxima autem communis diviſor hujus & Propoſitæ æquationis eſt $x - 1 \infty 0$, per quam Propoſita bis dividi poteſt; ita ut ejuſdem radices ſint 1, 1, & 2.

Sic ſi cupiam 1^{mum} æquationis terminum auferre, multiplicatio inſtitui poteſt ipſius

$$\begin{array}{rccccc} & x^3 & -4xx & +5x & -2 & \infty\, 0 \\ \text{per hanc progreſſionem} & 0. & 1. & 2. & 3. & \\ \hline \text{\& fit} & * & -4xx & +10x & -6 & \infty\, 0. \end{array}$$

Cujus quidem ac Propoſitæ æquationis maximus communis diviſor, ut antea, eſt $x - 1 \infty 0$.

Similiter ſi 2^{dum} terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri poteſt, hoc pacto:

$$\begin{array}{rccccc} & x^3 & -4xx & +5x & -2 & \infty\, 0 \\ & +1. & 0. & -1. & -2 & \\ \hline \text{\& prodibit} & x^3 & * & -5x & +4 & \infty\, 0. \end{array}$$

Cujus item & Propoſitæ maximus communis diviſor eſt $x - 1 \infty 0$.

Vbi notandum, non neceſſarium eſſe, ſemper uti Progreſſione cujus exceſſus ſit 1, quanquam ea communiter ſit optima.

Cæterùm notandum, inter omnes has diverſas operationes, quamvis eundem communem diviſorem maximum exhibeant, tamen alias aliis ſæpe eſſe præferendas, quandoquidem unius termini deſtructione ſæpenumero multò faciliùs ad finem pervenitur

quàm

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc divisorem immediatè ex Proposita æquatione & aliqua hujusmodi Progressione genita investigare: cum duæ ex his eligi possint, quarum beneficio eum invenire liceat. Ut sumendo, verbi gratiâ, $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $-4xx + 10x - 6 \infty 0$, vel $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$, vel $-4xx + 10x - 6 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$. Et sæpe etiam longè compendiosiùs est, duo hujusmodi producta sibi eligere, ac deinde illorum communem divisorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Propositâ. Quæ quidem omnia usus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Proposito procedo: cum perinde sit, sive æquatio numerica, sive literalis fuerit, & sive fractiones aut surdas quantitates includat, sive non; modò incognita quantitas inter surdas non contineatur: ita ut superfluum sit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem transeo.

2$^{\text{dò}}$. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progressionem, ut antea; eritque Productum $\infty 0$: Hoc Productum rursus multiplico per Arithmeticam Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam $\infty 0$. Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; & ita semper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Exempli gratiâ, detur hæc æquatio $x^4 * - 6xx + 8x - 3 \infty 0$, habens 3 æquales radices.

Primò multiplico eam per $\underline{0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$

& fit $-12xx + 24x - 12 \infty 0$.

Hoc productum iterum multiplico per $\underline{0. \quad 1. \quad 2}$

& provenit $24x - 24 \infty 0$.

eritque communis divisor $x - 1 \infty 0$,

Ita ut Proposita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, & -3. Et sic de aliis omnibus.

Quod verò uſum hujus Methodi concernit, is tantus eſt, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibuſvis extremis, ut, quamvis ſe ad alia non extenderet, immenſus tamen dici poſſet. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc ſola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis litera, quæ ut incognita conſideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæſitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. quippe nihil aliud opùs eſt, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progreſſionem multiplicare: cum duæ hæ æquationes tunc omnes Problematis conditiones ſint comprehenſuræ, ita ut ipſæ tantùm reſolvendæ reſtent. Et notandum eſt, hoc ſæpe beneficio ſolius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præſtari poſſe; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à D^no des Cartes in ſua Geometria ſunt allata, in quibus v & s incognitæ exiſtunt & y quidem cognita, ſed quæ ut incognita conſideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehenſæ, ſi illæ ipſæ æquationes ſic determinentur, ut dicta quantitas y duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum eſt $yy \frac{+qr - 2qv}{q - r} y \frac{+qvv - qss}{q - r} \infty 0$

Multiplico per meam Methodum per 2. 1: 0

$$\text{fit } 2yy + \frac{qr - 2qv}{q - r} y \infty 0$$

$$\text{ſeu } 2qy - 2ry + qr \infty 2qv$$

$$\& \ y - \frac{ry}{q} + \tfrac{1}{2} r \infty v.$$

2^dum exemplum eſt

$$\begin{array}{llll}
y^6 - 2by^5 - 2cdy^4 & + 4bcdy^3 & - 2bbcdyy & - 2bccddy + bbccdd \infty 0 \\
\qquad\qquad\quad + bb & - 2ddv & + ccdd & \\
\qquad\qquad\quad + dd & & - ddss & \\
 & & + ddvv &
\end{array}$$

Mult. per $+4, +3, +2, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2$

eritque productum

$$\begin{array}{llll}
4y^6 - 6by^5 - 4cdy^4 & + 4bcdy^3 & * & + 2bccddy - 2bbccdd \infty 0 \\
\qquad\qquad\quad + 2bb & - 2ddv & & \\
\qquad\qquad\quad + 2dd & & &
\end{array}$$

Divi-

Dividendo jam per 2 ddy^3 & transferendo v ad alteram partem, obtinebitur

$$\frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} \infty v.$$
$$+\frac{bby}{dd}$$
$$+y$$

3^{tium} autem exemplum ejuſdem eſt naturæ cum 1^{mo}.

Vbi patet, in omnibus hiſce exemplis Quæſitum ex ſola Producta æquatione uno intuitu inveniri, y enim cognita eſt, atque v, quæ erat incognita ac ſola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò ſæpe etiam accidit, ut Quæſitum ex ſola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit ſi valorem quantitatis incognitæ s inveſtigare velimus. Quippe tunc valor ipſius v in prima æquatione in ejus locum ſubrogandus eſt, vel potiùs in alia æquatione, per aliam Progreſſionem productâ, cujus beneficio ex illà prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1^{mam} Progreſſionem eſt ſublatus) tolli poteſt.

Exempli gratiâ, in 1^{mo} exemplo multiplicatum fuit per 2, 1, 0, ac inde inventum $v \infty y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; Iam ſi multiplicetur

$$yy + \frac{qr - 2qv}{q - r}\,y + \frac{qvv - qss}{q - r} \infty 0$$

per $+1,\quad 0,\quad -1$:

obtinetur $yy \quad * \quad \dfrac{-qvv + qss}{q - r} \infty 0$

mult. per $q - r$.

div. per q. $\quad qyy - ryy \quad * \quad -qvv + qss \infty 0$

$$ss \infty -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

$$\text{fit } s \infty \sqrt{-yy + \frac{ryy}{q} + vv}.$$

Quocirca ſi in hac æquatione in locum vv ſubrogetur ejus valor, innoteſcet inde etiam quantitas s.

Eodem modo, multiplicando in 2^{do} exemplo per hanc Progreſſionem 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, inveniri poteſt valor quantitatis s. Vbi ſi ſimiliter in locum vv, ejus valor ſubſtituatur, quantitas s inde innoteſcet.

Quòd ſi verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, eſſe talem, ut valor ipſius v per eandem æquationem ſolam ſine ipsius s inclusione obtineri non possit; quemadmodum hîc valor ipsius s absque inclusione ipsius v ex producta æquatione inveniri nequit; potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps sunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, si habeatur hæc æquatio

$$\begin{array}{l} y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \propto 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 9aazz \end{array}$$

in qua y & z sint incognitæ, & y ad 2 æquales radices determinari debeat: operationem instituo, ut sequitur.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & y^4 * & - 6zzyy & - 12z^3y & + 9z^4 & \propto 0 \\
 & & & & - 9aazz & \\
\text{Mult. per} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\
\hline
\text{fit} & & - 12zzyy & - 36z^3y & + 36z^4 & \propto 0 \\
 & & & & - 36aazz & \\
\hline
\text{div. per } 12zz. & & - yy & - 3zy & + 3zz & \propto 0 \\
 & & & & - 3aa & \\
\hline
 & & yy \propto & - 3zy & + 3zz. & \\
 & & & & - 3aa &
\end{array}$$

Similiter multiplicetur Proposita

$$\begin{array}{lcccccc}
 & y^4 * & - 6zzyy & - 12z^3y & + 9z^4 & \propto 0 \\
 & & & & - 9aazz & \\
\text{per} & 4, 3, & 2, & 1, & 0 & \\
\hline
\text{fit} & 4y^4 * & - 12zzyy & - 12z^3y & * & \propto 0
\end{array}$$

div. per $4y$. $y^3 * - 3zzy - 3z^3 \propto 0$.

Substituendo jam valorem ipsius yy, supra inventum, in ejus locum, habebitur

$$\begin{array}{lll}
y^3 \propto - 3zyy + 3zzy \text{ seu} & + 9zzy & - 9z^3 \\
\qquad\quad - 3aay & + 3zzy & + 9aaz \\
 & - 3aay & \\
- 3zzy - 3z^3 \propto \quad . \quad . \quad . & - 3zzy & - 3z^3 \\
\hline
\text{summa} & + 9zzy & - 12z^3 \quad \propto 0 \\
 & - 3aay & + 9aaz \\
\hline
 & \multicolumn{2}{l}{y \propto \dfrac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}.}
\end{array}$$

Quo-

Quocirca substituendo rursus hunc valorem ubique in locum y in hac æquatione $yy \propto -3zy + \begin{array}{l}3zz\\ -3aa\end{array}$, exurget inde alia æquatio, in quâ nulla incognita præterquam sola z reperitur, quæque per eam porrò inveniri potest.

Denique, quicquid hîc de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus est intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac solâ, quòd incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc sit determinanda: oportet ipsam primùm multiplicare per Arithmeticam Progressionem, & hoc productum rursus eodem modo, & sic deinceps, donec totidem æquationes habeantur, quot æquales radices. ut supra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantùm æquationes eodem modo resolvendæ sunt, ut in superiori exemplo ostensum est, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non nisi una incognita quantitas reperiatur. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificiosa ac ingeniosa dicuntur, ad talem æquationem, in qua solummodo una hujusmodi determinatio adhuc implenda est, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum solvi posse.

XI. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, sive literales, sive numerales, quæ produci possunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.

Brevitatis causâ, quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam suis signis $+$ & $-$, vocabo p; 3^{tii} q; 4^{ti} r; 5^{ti} s; atque sic deinceps: & $-p$, $-q$, $-s$, &c. easdem quantitates designabunt, sed contrariis signis adfectas.

Ex.gr. in hac æquatione $x^4 \begin{array}{l}-2ax^3\\ +3b\end{array} -4bbxx \begin{array}{l}+6abbx\\ +2aab\end{array} -4a^4 \propto 0$, erit $-2a+3b \propto p$; $-4bb \propto q$; $+6abb+2aab \propto r$; $-4a^4 \propto s$; & $+2a-3b \propto -p$; $+4bb \propto -q$; &c.

1ma *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimenſiones habens, produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit unius dimenſionis, altera verò uno pluribuſve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem ſibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi hæ æquationes ſeu Diviſores copulantur per voculam *&*; per *aliquam* verò, ubi disjunguntur per voculam *vel.*

$x^3, pxx, qx, r \infty o$ ... per $x + p \infty o$, & $x + \frac{r}{q} \infty o$.

$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty o$ per $x + p \infty o$, *vel* $x + \frac{s}{r} \infty o$.

$x^4, px^3, *, rx, s \infty o$ per $x + p \infty o$, & $x + \frac{s}{r} \infty o$.

$x^4, px^3, qxx, *, s \infty o$ per $x + p \infty o$, & $x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} \infty o$.

$x^4, *, qxx, rx, s \infty o$ per $x + \frac{s}{r} \infty o$, & $x \pm \sqrt{-q} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty o$. per $x + p \infty o$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty o$, *vel* $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty o$ per $x + p \infty o$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty o$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty o$ per $x + p \infty o$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty o$ per $x + p \infty o$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty o$

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty o$ per $x + \frac{t}{s} \infty o$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty o$ per $x + p \infty o$, & $x + \frac{t}{s} \infty o$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \infty o$ per $x + p \infty o$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty o$.

x^5,

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x \, 8 \, \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, \frac{t}{q}} \infty 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, r} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x \, 8 \, \sqrt{-q} \infty 0$, & $x \, 8 \, \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \, 8 \, \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$,

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \, 8 \, \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \, 8 \, \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* per utramque harum duarum
$x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \infty 0$,
$x + \frac{1}{2}p \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \, 8 \, \sqrt{-q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \, 8 \, \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \, 8 \, \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x \, 8 \, \sqrt{-q} \infty 0$, *vel* $x \, 8$
$\sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, *, r x^3, s x x, t x, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, vel $x + \sqrt{C.\, r} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, vel $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, t x, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, vel $x + \frac{v}{t} \propto 0$,

vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, *, q x^4, *, s x x, t x, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, vel $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, *, s x x, t x, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, vel $x + \frac{v}{t} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, r x^3, *, t x, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, vel $x + \frac{v}{t} \propto 0$.

$x^6, p x^5, q x^4, *, *, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x - \frac{v}{p^3} \propto 0$,

& $x \pm \sqrt{-\frac{v}{ppq}} \propto 0$,

& $x \pm \sqrt{\sqrt{-\frac{v}{q}}} \propto 0$.

$x^6, *, q x^4, r x^3, *, *, v \propto 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, & $x - \frac{v}{qr} \propto 0$,

& $x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \propto 0$.

$x^6, *, *, r x^3, s x x, *, v \propto 0$ per $x - \frac{rs}{v} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$,

& $x + \sqrt{C.\, r} \propto 0$.

$x^6, *, *, *, s x x, t x, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x - \frac{s t^3}{v^3} \propto 0$,

& $x \pm \frac{t}{v} \sqrt{-s} \propto 0$,

& $x - \sqrt{C.\, \frac{st}{v}} \propto 0$,

& $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, r x^3, *, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \propto 0$,

& $x + \frac{v}{ppr} \propto 0$.

$x^6, *, q x^4, *, s x x, *, v \propto 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, *, *, r x^3, *, t x, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x + \sqrt{C.\, r} \propto 0$.

$x^6, p x^5, *, *, s x x, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6,$

$x^6, *, q x^4, *, *, t x, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, p x^5, *, *, *, t x, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

2^{da} *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimenſiones habens, produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit duarum vel plurium dimenſionum, ac duorum tantùm terminorum; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem ſibi adjunctam.

1^{mò}. *Per* $x x \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\infty 0$.

$x^3, p x x, q x, r \infty 0$ per $x x + q \infty 0$, (& $x + p \infty 0$.)

$x^4, p x^3, q x x, r x, s \infty 0$ per $x x + \frac{r}{p} \infty 0$, & $x x + \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q q - s} \infty 0$.

$x^4, p x^3, *, r x, s \infty 0$ per $x x + \frac{r}{p} \infty 0$, & $x x \pm \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^4, *, q x x, *, s \infty 0$ per $x x + \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q q - s} \infty 0$, & $x x + \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} q q - s} \infty 0$.

$x^4, *, *, *, s \infty 0$ per $x x + \sqrt{-s} \infty 0$, & $x x - \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^5, p x^4, q x^3, r x x, s x, t \infty 0$ per $x x + \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q q - s} \infty 0$, & $x x + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{r r}{4 p p} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, p x^4, q x^3, r x x, *, t \infty 0$ per $x x + q \infty 0$, & $x x + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{r r}{4 p p} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, p x^4, q x^3, *, *, t \infty 0$ per $x x + q \infty 0$, & $x x \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, *, q x^3, r x x, *, t \infty 0$ per $x x + q \infty 0$, & $x x + \frac{t}{v} \infty 0$.

$x^5, *, *, r x x, s x, t \infty 0$ per $x x + \frac{t}{r} \infty 0$, & $x x \pm \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5,$

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $xx \pm \sqrt{} - \frac{t}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx \pm \sqrt{} - \frac{t}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty 0$ per $xx \pm \sqrt{} - \frac{t}{p} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\,v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 - qyy + sy - v \infty 0$.

$x^6, *, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 \, x + sy - v \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, *, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 - qyy * - v \infty 0$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \infty 0$ per $xx + \sqrt{C.\,v} \infty 0$.

2do. *Per* $x^3 \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\infty 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, & $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$ (& $x + p \infty 0$)

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, (& $xx + q \infty 0$)

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$ $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, & $x^3 \pm \sqrt{} - v \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 \pm \sqrt{} - v \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, *, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \propto 0$ per $x^3 + \sqrt{-v} \propto 0$, & $x^3 - \sqrt{-v} \propto 0$.

3tiò. *Per $x^4 \pm$ quantitate aliquâ cognitâ $\propto 0$.*

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, & $x^4 + \frac{t}{p} \propto 0$, (& $x + p \propto 0$.)

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, $x^4 + \frac{t}{p}$ & $x^4 + \frac{v}{q} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, & $x^4 + \frac{v}{q} \propto 0$ (& $xx + q \propto 0$.)

4tò. *Per $x^5 \pm$ quantitate aliquâ cognitâ $\propto 0$.*

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto 0$ per $x^5 + t \propto 0$, & $x^5 + \frac{v}{p} \propto 0$, (& $x + p \propto 0$.)

3tia *Pars.*

Si aliqua æquatio 5 dimenſionum produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimenſiones, & nullum terminum $\propto 0$, altera verò aliquem terminum $\propto 0$; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem ſibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi vocula &; per *aliquam*, ubi *vel* invenitur: ut antea.

Quan-

Quantitatem cognitam 2^di termini æquationum ſequentium quadratarum, adfectam ſuis ſignis + & —, brevitatis cauſâ, vocabo y, & ultimum terminum z.

$x^5, p x^4, q x^3, r xx, s x, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{t\grave{e}} + \frac{t}{p}} \infty 0$,

vel per $xx, + \frac{1}{2}p + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}\square^{t\grave{e}} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0$,

vel per $x^3 + r \infty 0$.

$x^5, p x^4, *, r xx, s x, t \infty 0$ per $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty 0$,

vel per $xx, + p + \frac{t}{s}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0$.

$x^5, p x^4, q x^3, *, s x, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty 0$,

vel per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \infty 0$.

$x^5, p x^4, *, *, s x, t \infty 0$ per $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \infty 0$,

vel per utramque harum duarum $\begin{cases} xx, + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{yt}{s} \infty 0, \\ xx, \pm \frac{s}{t}\sqrt{s} \text{ in } x, \pm \sqrt{s} \infty 0. \end{cases}$

$x^5, p x^4, q x^3, r xx, *, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{t\grave{e}} + \frac{t}{p}} \infty 0$,

& per $xx + px + \frac{t}{2r} \pm \sqrt{\frac{tt}{4rr} - \frac{ppt}{r}} \infty 0$.

$x^5, p x^4, *, r xx, *, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}pp \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^4 + pr} \infty 0$,

& per $xx + px + \sqrt{C.\,pt} \infty 0$,

& per $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, p x^4, q x^3, *, *, t \infty 0$ per $xx + px + pp \infty 0$,

& per $xx + px + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, p x^4, *, *, *, t \infty 0$ per $xx + px + pp \infty 0$,

& per $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, *, q x^3, r xx, s x, t \infty 0$ per $xx, + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0$.

x^5,

$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty o$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \infty o$.

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \infty o$ per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \infty o$,

& per $xx, \pm \sqrt{\frac{s}{z}}$ in $x, + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \infty o$,

& per $xx, \overline{+ \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty o$,

& per $xx + x\sqrt{C.\frac{ss}{t}} + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \infty o$.

$x^5, *, *, *, sx, t \infty o$ per $xx, \pm \frac{s}{t}\sqrt{s}$ in $x, \pm \sqrt{s} \infty o$,

& per $xx, \pm \sqrt{\sqrt{s}}$ in $x, \pm \sqrt{s} \infty o$,

& per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \infty o$,

& per $xx, + \sqrt{C.\frac{ss}{t}}$ in $x, + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \infty o$,

& per $xx, + \sqrt{\beta.t}$ in $x, + \frac{tt}{ss} \infty o$.

Ad 1^mam^ & 3^tiam^ Partem annotandum venit, ſi non conſtet an Propoſita æquatio ex duabus aliis, requiſitas conditiones habentibus, produci poſſit, quòd id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotieſcunque enim diviſores, qui per voculam & copulantur, inter ſe non ſecundùm omnes terminos conveniant, concludendum eſt, Propoſitam æquationem ita produci non poſſe, adeò ut eo in caſu diviſio irrita foret. Exempli gratiâ, ſi Proponatur æquatio $x^6, *, *, *, -xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{8} \infty o$, quæ hujus eſt formulæ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \infty o$, ea diviſibilis erit ſecundùm 1^mam^ Partem, per $x + \frac{v}{t} \infty o$, & per $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \infty o$; & per $x \pm \frac{t}{v}\sqrt{-s} \infty o$; & per $x - \sqrt{C.\frac{st}{v}} \infty o$; & per $x - \frac{st^3}{v^3} \infty o$, ſi produci poſſit *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit unius dimenſionis, altera verò uno pluribuſve terminis careat.* Vt autem ſciatur, utrum hoc fieri queat, non opùs eſt id diviſione per aliquem ex diviſoribus explorare, cum hîc duo diviſores reperiantur inter ſe non convenientes: nimirum, $x + \frac{v}{t} \infty o$, & $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \infty o$, nam $\frac{v}{t}$ rationalem, & $\sqrt{\sqrt{-s}}$ irrationalem numerum deſignat. Atque cum indiviſibilitas etiam

ſæpe

ſæpe uno intuitu ex variis ſignis conſtet, ut, ex. gr. ſi loco $-\surd 3$ habuiſſemus $+\surd 3$, quo caſu $\surd$ Q. ex $-s$ extrahi non potuiſſet; Poterimus interdum operoſas aliquot multiplicationes & diviſiones, quæ alioquin eſſent faciendæ, inſuper habere. Majoris perſpicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Diviſores æquationis $x^5, *, *, *, sx, t \propto 0$ ſunt, ſecundùm 3^tiam^ Partem, $xx \pm \frac{s}{t} \surd s$ in $x, \pm \surd s \propto 0$; $xx \pm \surd\surd s$ in $x, \pm \surd s \propto 0$; $xx + \frac{t}{s} x + \frac{tt}{ss} \propto 0$; $xx + \surd C. \frac{ss}{t}$ in $x + \surd C. \frac{tt}{s} \propto 0$; & $xx + \surd ß. t$ in $x + \frac{tt}{ss} \propto 0$: ſi jam comperiatur $\pm \frac{s}{t} \surd s$ non eſſe $\propto \surd\surd s$, vel $\propto \frac{t}{s}$ vel $\propto \surd C. \frac{ss}{t}$, vel $\propto \surd ß. t$, quæ ſunt quantitates cognitæ 2^di^ termini; vel ultimos terminos $\pm \surd s$, & $+ \frac{tt}{ss}$, &c. non inter ſe convenire; indicio eſſet æquationem Propoſitam produci non poſſe *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habet duas dimenſiones, & nullum terminum $\propto 0$, altera verò aliquem terminum $\propto 0$.*

4^ta^ *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimenſionum produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimenſiones, & nullum terminum $\propto 0$; altera verò unum, pluresve terminos $\propto 0$; erit ea diviſibilis per $xx + yx + z \propto 0$, cujus y & z valores per ſequentes æquationes ac ſequenti modo ſunt inveniendi.

Æquationem Propoſitam, ſive in ea aliquis terminus deficiat, ſive non, ſic deſignabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2^di^ termini, vel 0, ſi is deficiat; q quantitatem cognitam 3^tii^ termini, vel 0, ſi is deſit; r 4^ti^ termini, &c.

A $\begin{array}{l} zz - 2qz + ppq \propto 0 \\ \;\; - pp \quad - rp \\ \;\; + \frac{r}{p} \quad + s \\ \; - \frac{t}{p} \\ \hline \qquad 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} zz - \frac{t}{p}z + 2v \propto 0 \\ \phantom{zz - \frac{t}{p}z} - s \\ \phantom{zz - \frac{t}{p}z} + rp \\ \phantom{zz - \frac{t}{p}z} - ppq \\ \hline \phantom{zz - \frac{t}{p}z} \frac{r}{p} + pp \end{array}$ $\quad y \propto p$

B $\begin{array}{l} y^3 - pyy + qy - r \propto 0 \\ - \frac{2v}{t} + \frac{pv}{t} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} yy - \frac{qt}{v}y + \frac{t^4}{v^3} \propto 0 \\ - p \quad + \frac{rt}{v} \\ + \frac{rtt}{vv} \\ - \frac{t^3 s}{v^3} \\ \hline \quad 2 \end{array}$ $\quad z \propto \frac{yv}{t}$

C $\begin{array}{l} y^4 - \frac{q}{p}y^3 + 3qyy - \frac{s}{p}y + \frac{t}{p} \propto 0 \\ - 2p \quad + pp \quad - 2pq + qq \\ - \frac{qq}{p} - \frac{rq}{p} \\ + r \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} y^4 - \frac{t}{s}y^3 + ppyy - 2pqy + qq \propto 0 \\ - 2p \quad + \frac{tp}{s} \quad - \frac{tq}{s} \quad - \frac{vq}{s} \\ + 2q \quad + \frac{vp}{s} \end{array}$

$\begin{array}{l} - \frac{t}{s}y^3 + \frac{tp}{s}yy - \frac{tq}{s}y - \frac{vq}{s} \propto 0 \\ + \frac{q}{p} \quad - q \quad + \frac{vp}{s} \quad - \frac{t}{p} \\ \phantom{+ \frac{q}{p} \quad - q \quad} + \frac{s}{p} \quad + \frac{rq}{p} \\ \phantom{+ \frac{q}{p} \quad - q \quad} + \frac{qq}{p} \\ \phantom{+ \frac{q}{p} \quad - q \quad} - r \end{array}$ $\quad z \propto -py + yy + q$

D $\begin{array}{l} + qy^3 * + sy - t \propto 0 \\ + qq + rq \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} + sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs \propto 0 \\ - vq \end{array}$

$z \propto yy + q$

e	f	g
$y \propto p$	$y \propto p$	$y \propto \frac{t}{s}$
$z \propto q$	$z \propto q - \frac{r}{p} \propto \frac{vp}{t}$	$z \propto \frac{v}{s}$.

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Propoſita ſunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando eſt p ∞ o	... per aliquam harum	B, D, g
q	— — —	A, B, C, f, g
r	— — —	A, B, C
s	— — —	A, B, C, e, f
t	— — —	A, C, e
p, q	— — —	B, D, g
p, r	— — —	B, D
p, s	— — —	B, D
p, t	— — —	D
q, r	— — —	A, B, C
q, s	— — —	A, B, C, f
q, t	— — —	A, C
r, s	— — —	A, B, C
r, t	— — —	A, C
s, t	— — —	A, C, e
p, q, r	— — —	B, D
p, q, s	— — —	B
p, r, s	— — —	B, D
p, r, t	— — —	D
q, r, s	— — —	A, B, C
q, r, t	— — —	A, C
q, s, t	— — —	A
r, s, t	— — —	A C
p, q, r, s	— — —	B
p, q, s, t	—	erit $y^6{*}{*}+ry^3{*}{*}+v$ ∞ o, & z ∞ yy
q, r, s, t	— — —	A
p, q, r, s, t	—	erit $y^6{*}{*}{*}{*}{*}+v$ ∞ o, & z ∞ yy.

1. Pro A, vel B, vel C assumere licet, vel unam æquationum juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipsius y, vel z; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut superiùs ostensum est, earum communem divisorem, qui, aut unius, aut plurium futurus est dimensionum. si unius, habebitur quæsitus valor ipsius y vel z; si plurium, eundem ex hoc communi divisore investigare oportet.

2. Si primò per capitales sive majusculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g, non sunt necessariæ; sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur

$$\begin{array}{l} x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 5 \infty 0. \\ \quad\;\; p \qquad\; q \qquad\; r \qquad\; s \qquad\; t \qquad\; v \end{array}$$

Cum nullus terminus hîc deficiat, examinanda est æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, si à minusculis g, f, e incipiamus, si autem à capitalibus, erunt minusculæ insuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque sumere licet æquationem $zz - 2qz + ppq \infty 0$,

$$\begin{array}{ll} -pp & -rp \\ +\frac{r}{p} & +s \\ & -\frac{t}{p} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2} \end{array}$$

vel $zz - \frac{t}{p} z + 2v \infty 0$, vel utramque.

$$\begin{array}{l} -s \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

Si primam sumamus, obtinebitur pro ipsa (quoniam $p \infty 2$, $q \infty -3$, $r \infty 7$, $s \infty -3$, $t \infty -13$, & $v \infty -5$) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} \infty 0$; sin alteram, obtinebitur $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 10 \infty 0$, quarum communis divisor est $z + 5 \infty 0$. Quoniam autem

$y \infty p$

$y \propto p \propto 2$, dividendum eſt per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx + 2x - 5 \propto 0$, invenieturque pro quotiente $x^4 * + 2xx + 3x + 1 \propto 0$. Et manifeſtum eſt, nos etiam alterutra tantùm duarum illarum æquationum uti potuiſſe. Facilior itaque via eligenda erit: non enim ſemper illa per communem diviſorem brevior eſt, neque ſemper longior; verùm hanc habet prærogativam, quæ ſanè non parva eſt, quòd inutiles radices abſcindat. Quemadmodum ſequenti exemplo clariùs patebit.

Eſto æquatio Propoſita $x^6 * - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 1 \propto 0$. Quoniam hîc p eſt $\propto 0$, reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, invenietur pro 1^{ma}

$$\begin{array}{llll} y^3 - pyy & + qy & - r & \propto 0, \\ & -\frac{2v}{t} & +\frac{pv}{t} & \end{array}$$

hæc æquatio $y^3 - \frac{2}{5}yy - 2y - 3 \propto 0$; & pro 2^{da}

$$\begin{array}{lll} yy & -\frac{qt}{v}\,y & +\frac{t^4}{v^3} \propto 0, \\ & -p & +\frac{rt}{v} \\ & +\frac{rtt}{vv} & \\ & -\frac{t^3 s}{v^3} & \\ \hline & 2 & \end{array}$$

hæc $yy + 230y - 305 \propto 0$: eſt enim in hoc exemplo $q \propto -2$, $r \propto 3$, $s \propto -3$, $t \propto -5$, & $v \propto -1$. Vnde, quærendo earum communem diviſorem, comperietur nullum dari, ac proinde diviſionem per B fieri non poſſe. Hinc tranſeo ad D, ubi pro 1^{ma} æquatione

$$\begin{array}{l} qy^3 * + sy - t \propto 0 \\ \quad\; + qq \;\; + rq \end{array}$$

invenio $-2y^3 * + 1y - 1 \propto 0$, & pro 2^{da}

$$\begin{array}{l} sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs \propto 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - vq \end{array}$$

invenio $-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 14 \propto 0$. Quarum æquationum diviſor communis eſt $y + 1 \propto 0$; adeoque $z \propto yy + q \propto -1$; ita ut diviſio ſit facienda per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx - 1x - 1$, eritque quotiens $x^4 + 1x^3 * + 4x + 1 \propto 0$.

Vbi notandum, modum hunc quærendi communem diviſorem in altioribus præſertim æquationibus permagni eſſe uſus, non autem tanti uſus, cùm æquationes, quarum diviſor communis inveſtigandus eſt, ſolummodo ſunt 2 dimenſionum, aut etiam trium, quoniam tum diviſores faciles ſunt inventu. Vt in æquatione superiori $-2y^3 * + 1y - 1 \infty 0$, ubi protinus apparet y esse $\infty - 1$, adeoque si ipsa dividatur per $y + 1 \infty 0$, obtinebitur $-2yy + 2y - 1 \infty 0$. Cujus radices quoniam sunt impossibiles, solùm superest $y \infty - 1$; adeò ut divisio æquationis Propositæ tentanda sit per $xx - 1x - 1 \infty 0$.

Sic & si habeatur æquatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \infty 0$, comperietur ejus divisionem fieri posse beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur $2yy - 5y + 3 \infty 0$, & pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \infty 0$, & pro communi divisore $y - 1 \infty 0$. Et quoniam z est $\infty \frac{yv}{t} \infty 1$, erit $xx + yx + z \infty 0 \infty xx + 1x + 1 \infty 0$. Per quam igitur si Proposita æquatio dividatur, fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx * + 1 \infty 0$.

Si autem detur æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 * + 1xx + 14x + 2 \infty 0$, in qua r est 0, oportet ipsam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis

$$zz \begin{array}{l} -2q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \end{array} z + \frac{\begin{array}{l} ppq \\ -rp \\ +s \\ -\frac{t}{p} \end{array}}{2} \infty 0$$

invenitur $zz - 4z + 1 \infty 0$; & loco æquationis

$$zz - \frac{\begin{array}{l} \frac{t}{p} \\ -s \\ +rp \\ -ppq \end{array}}{\frac{r}{p} + pp} z + 2v \infty 0$$

invenitur eadem $zz - 4z + 1 \infty 0$. Ex qua, quia utriusque communis divisor est, radices invenire oportet, quæ sunt $z \infty 2 + \sqrt{3}$, & $z \infty 2 - \sqrt{3}$. Vnde cum y sit ∞p, hoc est, 2, pro $xx + yx + z \infty 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, & $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$. Per quas igitur si Proposita æquatio divisa fuerit, comperietur ipsam produci posse multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$, & $xx - 2x + 2 \infty 0$.

5^{ta} *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimenſionum produci poſſit multiplicatione duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, in quarum alterutra unus pluresve termini ſint ∞ o; erit ipſa diviſibilis vel per æquationem tantùm 2 terminorum, juxta 2^{dam} partem, vel per æquationem $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, in qua tantùm alterutra vel y vel z eſt $\infty 0$; quarumque y, z, & w valores inveniuntur per ſequentes æquationes.

Æquationem Propoſitam, ſive in ea aliquis terminus deficiat, ſive non, ſic deſignabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + ſxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2^{di} termini, vel o, ſi is deficiat; q quantitatem cognitam 3^{tii} termini, vel o, ſi is deſit; r quarti termini, &c.

$$\text{A}\quad 2z^3 - 3qzz - rpz - ſq \infty 0 \qquad + qqzz + 4ſq\,z - 4ſſ \infty 0 \qquad w \infty \frac{ſ + zz - qz}{p}$$
$$+pp \qquad +2ſ \quad +tp \qquad\qquad +p^4 \quad -3pqr \quad -4ppv$$
$$+qq \qquad\qquad -4ſ \quad -2ppſ \quad +4pſr$$
$$+2pr \quad +2tp \quad +ſqq$$
$$-q^3 \quad -ptq \qquad\qquad y \infty 0.$$
$$-rp^3 \quad -ſqpp$$
$$+qqpp \quad +tp^3$$

$$\text{B}\quad y^4 - \frac{qt}{v}y^3 + \frac{pqt}{v}yy - \frac{ſt}{v}y - qq \infty 0 \qquad y^4 - 2py^3 + qyy - ry + pr \infty 0$$
$$-p \qquad\qquad +qp - \frac{tt}{v} \qquad\qquad + \frac{2v}{t} \quad +pp \quad -pq - ſ$$
$$-\frac{qqt}{v} + \frac{rtq}{v} \qquad\qquad -\frac{3pv}{t} + \frac{2qv}{t} - \frac{pqv}{t}$$
$$+\frac{ppv}{t}$$
$$w \infty \frac{t}{q - py + yy}$$
$$z \infty 0.$$

$$\text{C}\quad zz - qz + ſ \infty 0 \qquad ww - rw + v \infty 0 \qquad y \infty 0.$$
$$\text{D}\quad yy - py + q \infty 0 \qquad ww - rw + v \infty 0 \qquad z \infty 0.$$
$$\text{e}\quad z \infty q \qquad w \infty \frac{ſ}{p} \qquad y \infty 0.$$
$$\text{f}\quad y \infty p \qquad w \infty \frac{t}{q} \qquad z \infty 0.$$

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Propoſita ſunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando eſt *p* ∞ o...	per aliquam harum	C, B
q	— — —	A, B
r	— — —	A, B, e, f
ſ	— — —	A, B
t	— — —	A, D
p, q	— — —	C, B
p, r	— — —	C, B
p, ſ	— — —	B
p, t	— — —	C, D
q, r	— — —	A, B
q, ſ	— — —	A, B
q, t	— — —	A
r, ſ	— — —	A, B
r, t	— — —	A, D
ſ, t	— — —	A, D
p, q, r	— — —	C, B
p, q, ſ	— — —	B
p, q, t	— — —	C
p, r, ſ	— — —	B
p, r, t	— — —	C, D
p, ſ, t	— — —	D
q, r, ſ	— — —	A, B
q, r, t	— — —	A
q, ſ, t	— — —	A
r, ſ, t	— — —	A, D
p, q, r, ſ	— — —	B
q, r, ſ, t	— — —	A

1. Pro A vel B aſſumere licet vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius y, vel z; vel duas, eandem incogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem diviſorem valores ipſius y vel z eodem modo quo in Parte 4ta dictum eſt.

2. Si primò per capitales A, B, C, D, examen fiat, tum examen per reliquas e & f ſuperfluum habendum eſt, ſed non vice verſâ.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \infty 0.$$

Quoniam nulli termini deſunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minuſculis, ac primùm ab e, habebitur $z \infty q \infty 4$, & $w \infty \frac{s}{p} \infty 5$, adeoque pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, fiet $x^3 * + 4x + 5 \infty 0$. Cum verò Propoſita æquatio per hanc dividi nequeat, tranſeo ad f, obtineoque $y \infty p \infty 1$; $w \infty \frac{t}{q} \infty \frac{11}{4}$; $z \infty 0$; & in locum $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtineo $x^3 + 1xx * + \frac{11}{4} \infty 0$. Et cum Propoſita per hanc quoque non diviſibilis exiſtat, tranſeo ad A, & pro

$$\begin{array}{llll} 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq \infty 0 \\ & +pp & +2s & +tp \\ & & +qq & \end{array}$$

obtineo $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$, cujus radices ſunt $+3$, $+1$, & $+1\frac{1}{2}$. Quia autem omnes hæ radices ſunt rationales, ac æquatio Propoſita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inſervire. Vnde explorandum tantùm reſtat per $z \infty 3$, & $z \infty 1$. Sumendo autem $z \infty 1$, reperitur diviſionem fieri non poſſe, ac idcirco ſi ſumatur $z \infty 3$, fiet $w \infty \frac{s + zz - qz}{p} \infty 2$. Quoniam verò y eſt $\infty 0$, pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtinebitur $x^3 * + 3x + 2 \infty 0$, per quam ſi diviſio Propoſitæ tentetur, comperietur ipſam fieri poſſe, atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$. Sed loco 1^{mæ} æquationis juxta A ſumere potuiſſemus 2^{dam}, unâ dimenſione depreſſiorem, pro qua obtinuiſſemus $13zz - 60z + 63 \infty 0$. Quæ unam tantùm radicem rationalem abſolutam admittit, quæ, ut ſupra, eſt $+3$.

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ ſemper, ſi per communem diviſorem Quæſitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri poteſt radix alterutrius æquationis, ſi nempe ea facilis ſit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

 tio

tio dictam radicem admittat: Quo sæpe nonnihil laboris abscindi potest.

Priusquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ sunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri possint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimensionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, sed quæ determinationem aliquam involvebant. Vt in 1ma Parte, ubi æquationi $x^6, px^5, qx^4, *\, sxx, tx, v \propto 0$, loco divisoris $x + \frac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$, adjungere potuissem divisorem $x - \frac{v - qs}{ps - t} \propto 0$: quem, cum determinationem involvat, (siquidem $x + 3 \propto 0$, divisor æquationis $x^6 + 5x^5 + 6x^4 \; * + 5xx + 25x + 30 \propto 0$, per illum inveniri nequit:) omittendum duxi, præferendo ei alterum $x + \frac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$, qui determinationi nulli obnoxius est.

Denique, usus hujus XI Regulæ se longè lateque extendit, quod nemo facilè negaverit, qui modò viderit, non necesse esse, vel fractiones, vel cognitas quantitates surdas priùs ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præsertim valde composita, & multarum dimensionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci possit, tantùm unam requiri, in qua unus pluresve termini deficiant, ut Reductio per has Regulas inveniatur.

SEQVENTES 12, 13, 14, 15 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, IN QVIBVS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIVNTVR.

XII. *REGVLA.*

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo Termino non contineatur*; si illa non nisi semel in æquatione extet, vel semel tantùm reperiatur secundùm eundem dimensionum numerum, (ut in Æquatione

$$x \begin{array}{l} -2ax^3 \\ -2c \end{array} \begin{array}{l} +aaxx \\ +bb \\ +4ac \\ -dd \end{array} \begin{array}{l} -2abbx \\ -2acc \end{array} + aabb \propto 0,$$

in

in qua $d\,d$ ſemel duntaxat reperitur, duas habens dimenſiones) æquatio ſemper indiviſibilis erit per x, aut $x\,x$, &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali.

XIII. *REGVLA.*

Si pluries in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo termino non contineatur*; ſi illa ubique eodem ſigno + vel — ſit adfecta, ac per incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimenſiones habentem, multiplicata: æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x + vel —, vel per $x\,x$, x^3, &c. — quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + 4cx^3 & -\,ddxx & +\,4bbcx & +\,b^4 \infty 0, \\ & & -\,2bbd & \end{array}$$

in quâ c bis *tantùm* reperitur adfecta ſigno +, ac multiplicata per x unius & trium dimenſionum. aut hæc

$$\begin{array}{lllllll} x^6 & -\,ax^5 & +\,cfx^4 & -\,c^3x^3 & -\,c^4xx & -\,ddccax & +\,c^3d^3 \infty 0, \\ & +\,b & -\,dd & -\,add & +\,ddff & +\,d^3bb & \end{array}$$

ubi a ter invenitur adfecta ubique ſigno —; aut b bis ſigno +; ac ducta utraque in x, ubique habentem dimenſiones impares: aut in quâ etiam f bis reperitur adfecta ſigno +, ac ducta in x, ubique pares dimenſiones habentem.

XIV. *REGVLA.*

Si in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in nullo alio quàm in ultimo termino contineatur*; ſi ejus dimenſionum numerus ſit minor numero dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderato, (ut in hac

$$\begin{array}{llll} x^6 & -\,bbx^4 & +\,b^3cxx & +\,bcd^4, \infty 0, \\ & & -\,bbcc & +\,2bd^5 \end{array}$$

in qua

d tan-

d tantùm in ultimo termino continetur, habens ad ſummum 5, & x plures, nimirum 6 dimenſiones) certum eſt illam æquationem per $x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ eſſe indiviſibilem; Si ejus dimenſionum numerus ſit minor ſemiſſe numeri dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderati, (ut in eodem exemplo, ſi loco ultimi termini $b\,c\,d^4 + 2b\,d^5$ ponatur $b\,c^3\,d\,d + 2\,b^5\,d$) certum eſt illam æquationem per $x\,x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ indiviſibilem exiſtere. Si ejus dimenſionum numerus ſit minor triente numeri dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderati, certum eſt illam æquationem per $x^3 +$ vel $-$ &c. non poſſe dividi. atque ita porrò in infinitum.

XV. *REGVLA.*

Si in æquatione Propoſita litera cognita reperiatur, quæ in ultimo termino non continetur, *atque ea diviſibilis ſit per* $x, x\,x, x^3$, *&c.* $+$ *vel* $-$ *aliquâ quantitate rationali & cognitâ; facile erit beneficio alterius æquationis dictum diviſorem invenire.*

Vt in hac æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^5 - f x^4 & + bf\ x^3 & - 16\,b\,c\,d\,x\,x & + \tfrac{1}{2}b\,b\,c\,f\,x & - 8\,c\,c\,d\,b\,b & \infty\ 0 \\ & + 1\tfrac{1}{2}bc & - \tfrac{1}{2}b\,c\,f & + \tfrac{1}{2}b\,b\,c\,c & & \end{array}$$

in quâ f in ultimo termino non continetur, *opùs tantùm eſt, ut omnes quantitates, in quibus f æquè multas habet dimenſiones nihilo æquales ponantur, atque porrò inveſtigetur utriuſque, inventæ ſcilicet atque Propoſitæ æquationis, communis diviſor.* Quocirca poſito $-f\,x^4 + b\,f\,x^3 - \tfrac{1}{2}b\,c\,f\,x\,x + \tfrac{1}{2}b\,b\,c\,f\,x\ \infty\ 0$, ſeu $-x^3 + b\,x\,x - \tfrac{1}{2}b\,c\,x + \tfrac{1}{2}b\,b\,c\ \infty\ 0$, invenitur, ſecundùm Methodum ante deſcriptam, pro earum communi diviſore $x\,x + \tfrac{1}{2}b\,c\ \infty\ 0$.

Sic

Sic etiam ſi proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -a x^3 & +aaxx & +c^3\,x & -bc^3 \infty 0 \\ & -b & +ab & -baa & +c^4 \\ & +c & -ac & +aac & \end{array}$$

in qua a in ultimo termino non continetur; poſito $-a x^3 + ab\,xx \infty 0$, erit $x - b + c \infty 0$.
$\quad -ac$

Diviſio itaque tentanda eſt per $x - b + c \infty 0$; quoniam nullus præter hunc communis diviſor haberi poteſt. Eundem Diviſorem obtinuiſſemus ſi quantitates omnes ubi a eſt duarum dimenſionum poſuiſſemus $\infty 0$. Notandum eſt in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opùs eſſe, ut literales Fractiones ſemper priùs ex æquationibus auferantur: Nam ſi contingat, his Fractionibus ſublatis, literam, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantùm inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur: vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum neceſſaria non eſt.

SEQVENTES 16, 17, 18, 19 ET 20 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, VBI NEC SIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LITERALES VEL NVMERALES INVENIVNTVR.

Hucuſque perinde eſt, an Propoſitæ æquationis omnia membra, ſive terminorum partes ſeparatæ per ſignum + vel — junctæ eundem habeant dimenſionum numerum vel ſecus: In his ſequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis conſiderabo, brevitatis causâ, ejuſmodi tantùm æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimenſionum; poteſt enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facilè in talem permutari, ut cuique notum eſt.

Quomodo omnia radicalia ſigna ex æquatione tolli poſſint, jam antea oſtendi. Quomodò verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & ſatis à D^no des Cartes monſtratum eſt in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis ſequentibus diviſores rationales ultimi Termini neceſſariò ſciri debeant, præmittam

Modum inveniendi omnes rationales Divisores ultimi Termini surdis & Fractionibus carentis.

Vltimus Terminus æquationis Propositæ aut ex *uno* aut ex *pluribus Membris* seu quantitatibus, per + & — junctis constabit. Si *unius tantùm Membri* sit, notum est quâ ratione ipsius divisores inveniantur. Quòd si autem ex *pluribus Membris* constiterit, sæpenumero difficile est eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, considero seorsim ultimum Terminum æquationis Propositæ, supponendo ipsum $\infty\ 0$, atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus respectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 4ax^3 & +\,2cc\,xx & -\,4acc\,x & +\,c^4 & \infty\ 0 \\ & +\,7aa & -\,4aac & -\,4a^4 & \\ & +\,2ac & -\,6a^3 & +\,8a^3c & \\ & & & +\,2ac^3 & \\ & & & +\,3aacc & \end{array}$$

sumendo literam c pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \infty\ 0$.

Deinde inquiro per antecedentes vel sequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi possit; Si enim hoc fieri nequeat, manifestum est ultimum Terminum æquationis Propositæ nullos quoque divisores rationales admittere (nisi unitatem atque ipsum ultimum Terminum integrum inter divisores numerare velimus; sed hi in æquationibus literalibus, ubi omnes quantitates eundem dimensionum numerum habent, nullius usus sunt) ; Quòd si verò dividi possit, oportet rursus eodem modo quærere divisores hujus divisoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fictam

ctam æquationem dividere possunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ sunt quæsiti divisores ultimi Termini æquationis Propositæ.

Per præcedentes autem uti & per sequentes Regulas omnes divisores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus divisoribus ultimi Termini, ut plurimùm facillimo negotio inveniri poterunt, imo perpaucæ æquationes occurrunt, quarum divisores ultimi Termini non per sequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri possent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum divisores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulteriùs videndum est, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, *unum an plura membra* habeat. Si enim *unum tantùm membrum* habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus est $- 4\, a^4$, notum est quo pacto ejusdem divisores investigare liceat, possuntque deinde eorum ope per sequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta divisibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ, qui requirebantur.

Quòd si verò ultimus Terminus Fictæ æquationis *plurium membrorum* fuerit, tum rursus eundem, ut ante, supponerem $\infty\, 0$, ac iterùm agerem, quemadmodum jam dictum est, donec inveniatur æquatio, vel cujus rationales divisores per aliquam præcedentium, sive per 21 Regulam facillimè inveniuntur; vel cujus ultimus Terminus tantùm *unius membri* existit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæsitum obtineri potest, quoniam tunc per sequentes Regulas inveniri possunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus divisoribus ultimi Termini proximè

ante-

antecedentis Fictæ æquationis possunt denuo per easdem Regulas, ope horum divisorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, sicque ulteriùs ascendendo obtinebuntur tandem divisores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propositæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, si proponantur inveniendi divisores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} x^4 * -14aa\,xx & +32aac\,x & +a^4 & \propto 0, \\ \quad\;\; +4ac & +4acd & -10aacc & \\ \quad\;\; +2cc & -16add & -2accd & \\ \quad\;\; +4dd & & +4aadd & \\ \quad\;\; +dc & & +4ac^3 & \\ & & +4a^3c & \\ & & +dcaa & \\ & & +24acdd & \\ & & +4ccdd & \\ & & +4cd^3 & \\ & & +c^4 & \\ & & +dc^3 & \end{array}$$

nimirum ope Regularum sequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Proposita dividi potest, detegentium beneficio divisorum ultimi Termini: suppono ejus ultimum Terminum $\propto 0$, atque unam ex ipsius literis considero ceu incognitam quantitatem, ut puta a, obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{llll} a^4 +4ca^3 -10ccaa & -2ccda & +4ccdd & \propto 0. \\ \qquad\quad +4dd & +4c^3 & +4cd^3 & \\ \qquad\quad +dc & +24cdd & +c^4 & \\ & & +dc^3 & \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, suppono ipsum rursus, ut ante, $\propto 0$ sumendoque c pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 +dc +4ddcc +4d^3c \propto 0.$$

Quæ divisa per c dat $c^3 +dcc +4ddc +4d^3 \propto 0$, quæ est æquatio in qua ultimus Terminus $4d^3$ tantùm *unum Membrum* habet.

habet. Conſtat autem quo pacto diviſores hujus ultimi termini inveniantur, qui, poſtquam cogniti erunt, inſervire poterunt, ut eorundem ope per ſequentes Regulas quærantur, æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \propto 0$ dividentes, ac proinde etiam æquationes, quæ $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \propto 0$ dividere poſſunt, quæ quidem eſt ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{llll} a^4 + 4ca^3 & - 10ccaa & - 2ccda & + 4ccdd \propto 0. \\ & + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 \\ & + dc & + 24cdd & + c^4 \\ & & & + dc^3 \end{array}$$

Inventis verò diviſoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, poſſunt denuo per eaſdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipſam dividentes; quibus cognitis inventum eſt, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus ſit Propoſitæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per ſolam ſequentem XVII Regulam ſemper omnes diviſores ultimi Termini inveniri poſſe: ſed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas ſequentes Regulas ſæpe primo intuitu cernitur tales diviſores non dari, ſi non dentur, & ii qui dantur ſæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regulæ magno cum fructu adhiberi.

XVI. *REGULA.*

Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantùm Terminos habentes, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, ſive literalis ſive numeralis ſit, dividi poſſit.

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus, aut etiam terminis Propoſitæ æquationis; atque juxta hanc ſuppoſitionem inveniatur valor ipſius x; vel ſumatur tantùm aliquis valor pro x, ut libet. Deinde ſubſtituto hoc valore Ficto ipſius x, vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipſius x æquationis Propoſitæ: Si termini ſe mutuò deſtruere reperiantur, erit Propoſita æquatio diviſibilis per x — hoc Ficto valore ∞ o; ſi autem hi termini ſe mutuò non deſtruant, quærantur diviſores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis diſtinguatur, in poſterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque diviſore unius dimenſionis auferatur valor Fictus ipſius x, at ab unoquoque diviſore duarum dimenſionum auferatur ejuſdem valoris quadratum, & ſic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum conſentiant cum diviſoribus ultimi Termini æquationis Propoſitæ; ſi enim nulla eorum cum iis conſentiant, indicio eſt æquationem Propoſitam per aliam duos tantùm Terminos habentem, ſeu per x, aut xx, &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali non eſſe diviſibilem: Si verò aliqua conſentiant, oportet, facto unoquoque conſentiente + x earundem dimenſionum, ∞ o, explorare per quam harum æquationum æquatio Propoſita dividi poſſit; ſi enim per nullam ipſarum diviſibilis ſit, erit quoque Propoſita per x, aut xx, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali indiviſibilis. Quæ quidem omnia ſequenti exemplo clariora evadent.

Vt ad inveſtigandos diviſores, ſi qui ſint, hujus æquationis $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix} -bb \\ +20aa \end{smallmatrix} x + 20abb \infty 0$, ſuppono $x^3 \infty 21axx$, vel $bbx \infty 20abb$, vel ad libitum quemlibet pro x valorem aſſumo, utputa a vel b: ſed aſſumamus $x^3 \infty 21axx$, ſive $x \infty 21a$. Deinde ſubrogando $21a$ ubique in locum x in æquatione Propoſita $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix} -bb \\ +20aa \end{smallmatrix} x + 20abb \infty 0$ (rejiciendo brevitatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta eſt conflata, cum ipſi, dum nihilo ſunt æquales poſiti, neceſſariò evaneſcant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $-21abb + 21, 20a^3$

$20a^3 + 20abb$, vel $-abb + 21, 20a^3$, quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus divisores hi quatuor existunt $+a$, & $-a$; $-bb + 21, 20aa$, & $+bb - 21, 20aa$. Porrò subducto hoc Ficto valore $21a$ ab utroque priorum; & ab utroque duorum sequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipsi duarum sunt dimensionum;) relinquentur $-20a$, $-22a$; $-bb - 21aa/bb - 41, 21aa$. Quo peracto, si videatur num aliqua horum Reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini $+20abb$ æquationis Propositæ, comperietur solummodo $-20a$ consentire. Quocirca ad $-20a$ additâ x unius dimensionis, siquidem $-20a$ unius tantùm dimensionis existit, explorandum duntaxat restat num æquatio Proposita dividi possit per $x - 20a$. quod, si non contingat, erit ea per x, aut xx, $+$ vel $-$ quâvis aliâ quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis, quemadmodum quoque si nulli divisores congruentes reperti fuissent. at verò hæc æquatio dividi poterit per $x - 20a$, orieturque pro quotiente $xx - ax - bb \infty 0$.

Hîc autem quædam consideranda veniunt, quæ breviter saltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Proposita dividi possit, eâdem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cùm ipsi x affingitur aliquis valor, observandum est, eum brevitatis causâ ita fingi posse, ut ipso in locum x subrogato resultet inde tale quantitatum aggregatum seu *Fictus terminus*, cujus divisores faciles sint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri potest.

3. Sæpenumero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ quærantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quæ restabant Reliqua, ex divisoribus Ficti Termini & ex assumpto valore ipsius x & xx facta, hæc erant quatuor $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $+bb - 41, 21aa$, quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi Termini $20abb$ æquationis Propositæ, *cum duo Membra habeant*, *atque hîc terminus tantùm unum.* deinde apparet etiam, quòd $22a$ divisor esse non possit ipsius $20abb$, *quoniam numerus* 22 *major est numero* 20; atque eapropter considerare tantùm opor-

Nnn 2 tet

tet — 20 *a*, ita ut solummodo inquirendum sit num ultimus Terminus 20 *abb* divisibilis sit per — 20 *a*. Possumus quoque eodem modo, quando divisores ultimi Termini æquationis Propositæ cogniti sunt, invenire divisores omnes *Ficti Termini*, qui nobis inservire queunt, reliquis qui inutiles sunt prætermissis. Quin imò in multis casubus, præsertim cùm æquatio indivisibilis est, parcere possumus labori, qui in quærendis divisoribus tam ultimi Termini æquationis Propositæ quàm *Ficti Termini* esset impendendus, si modò ipsos inter se comparaverimus, quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis patescet.

4. Si fortè contingat ut divisores Congruentes multi adhuc numero existant, ita ut etiamnum nimis laboriosum foret omnibus istis divisoribus divisionem æquationis Propositæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipsi *x* alium valorem assignando rursus operari, &, ut ante, *Reliqua* (quæ singulis divisoribus hujus ultimi Ficti termini, — ultimò ipsius *x*, aut *xx*, &c. fictis valoribus sunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, si qui sint, eligere, si verò nulli reperiantur, argumentum est æquationem per *x*, aut *xx*, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali esse indivisibilem. Et si adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam rescindi possunt. Sed hoc raro accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Proposita Fractionibus carens sit divisibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantùm Terminos habentem, non opus est, ad inveniendum hunc divisorem, omnia signa radicalia ex Proposita æquatione auferre, sed ea solummodo, quæ in ultimo Termino reperiuntur.

Potest etiam hæc Regula XVI *dividi in duas partes, hoc modo:*

Inquire primùm num Proposita æquatio sit divisibilis per aliam in qua unus pluresve termini desunt, secundùm XI Regulam; Si non sit, tantùm secundùm jam descriptam XVI Regulam inquirendum est, num sit divisibilis per *x* + vel — aliquo divisore ultimi Termini,

mini, omissis omnibus reliquis divisoribus duarum pluriumve dimensionum.

XVII. *REGULA.*

Quæ docet modum inveniendi omnes æquationes rationales, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit.

Æquatio talis erit divisibilis per aliam rationalem fractione carentem, in qua vel unus pluresve termini deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum est per XI Regulam, num per rationalem fractione carentem, in qua unus pluresve termini deficiant, dividi possit; si comperiatur id fieri non posse, erit ea divisibilis per æquationem nullo termino carentem, & quidem unius dimensionis, si Proposita sit 3 dimensionum; vel per aliquam unius vel duarum dimensionum, si Proposita sit 4 vel 5 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3, si Proposita sit 6 vel 7 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimensionum, si Proposita habeat 8 vel 9 dimensiones; & sic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea divisibilis sit per æquationem simplicem sive unius dimensionis, antea ostendi: unde solummodo restat, quo modo reliqui divisores, seu æquationes duarum, trium, &c. dimensionum inveniri queant.

Et sciendum, me quantitatem cognitam 2di termini, adfectam suis signis + & — vocare p; 3tii termini q; 4ti r; 5ti s; 6ti t; 7mi v: at divisorem ultimi termini, similiter signis suis adfectum, h.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4or DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per æquationem

 ratio-

rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \propto 0.$$

Excepto tantùm, cùm $\frac{s}{h}$ est $\propto h$, ac simul $r \propto hp$, id est, $h \propto \pm\sqrt{s}$, & $h \propto \frac{r}{p}$ tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2h - q}\ \text{in}\ x, + h \propto 0.$$

1. Et cum æquatio Proposita sit liberata ab omnibus fractis & surdis quantitatibus, atque dividi queat per æquationem rationalem: sequitur, $\frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}$ debere integram esse quantitatem rationalem. Patet etiam s nunquam esse posse $\propto hh$, nisi s quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficiet etiam illos solùm divisores ultimi Termini qui ipsius $\sqrt{}$ Q^am^. non excedunt considerare, nimirum, si æquatio sit numeralis; sed si sit literalis, opùs tantùm erit divisoribus uti duarum dimensionum, atque ex his semper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum constituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, si proponatur hæc æquatio numeralis $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \propto 0$, quæ dividi potest per aliquam rationalem; & si compertum sit ipsam indivisibilem esse per x, + vel — aliquo divisore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimensionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi poterit per hanc $xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \propto 0$.

Quia igitur hìc p est $\propto -3$

q, quâ non indigemus, prætereo,

$r \propto -30$

$s \propto -200$,

hinc

hinc erit $xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto xx + \frac{-30+3h}{-\frac{200}{h}-h}x + h \propto 0$.

Sunt autem Diviſores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; ſeu valores ipſius h, $\propto +1$ vel -1

$$\begin{array}{ll} +1 & -1 \\ +2 & -2 \\ +4 & -4 \\ +5 & -5 \\ +8 & -8 \\ +10 & -10 \end{array}$$

Vnde ſumendo $h \propto +1$, erit $\frac{-30+3h}{-\frac{200}{h}-h}$ fractio, ſimiliterque ſi ſumatur $h \propto -1$; $\propto +2$; $\propto -2$; $\propto +4$; $\propto -4$, & $\propto +5$. At ſi ſumatur $h \propto -5$, obtinebitur -1, ac proinde tentanda erit diviſio per $xx - 1x - 5 \propto 0$. Quoniam autem per hanc fieri nequit, tranſeo ad alium valorem ipſius h, puta $+8$. Sed cum ſic rurſus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro h aſſumitur -8, tranſeo ad $h \propto +10$. Quia verò r ſit $\propto hp$, ac idcirco $xx + h \propto 0$, non poterit ſimiliter hic valor nobis inſervire; itaut nobis ſolùm reſtet $h \propto -10$. Vnde obtinetur æquatio $xx - 2x - 10 \propto 0$, per quam Propoſita dividi poteſt.

Eodem modo, ſi proponatur æquatio literalis

$$x^4 * \begin{array}{l} -bb \\ +2ab \end{array} xx \begin{array}{l} +4abb \\ -a^3 \\ -4b^3 \\ +aab \end{array} x \begin{array}{l} -4b^4 \\ +2aabb \end{array} \propto 0,$$

Quoniam p eſt $\propto 0$

$r \propto 4abb - a^3 - 4b^3 + aab$

$s \propto 2aabb - 4b^4$,

erit $xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto xx + \frac{4abb-a^3-4b^3+aab}{\frac{2aabb-4b^4}{h}-h}x + h \propto 0$.

Diviſores ultimi Termini, duas habentes dimenſiones, ſeu valores ipſius h, ſunt

$$\begin{array}{ll} +bb, & \& -4bb+2aa, \\ -bb, & +4bb-2aa, \\ +2bb, & +2bb+aa, \\ -2bb, & -2bb-aa. \end{array}$$

Quorum tantùm prioribus 4 indigemus, nimirum, $+bb$, $-bb$, $+2bb$,

$+2bb, -2bb$: quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum Terminum producunt.

Sumendo autem $b \infty +bb$, 2[dus] terminus erit fractio. Hinc transeundo ad $b \infty +2bb$, obtinebitur æquatio $xx \begin{smallmatrix} +b \\ -a \end{smallmatrix} x + 2bb \infty o$. Per quam Proposita dividi potest, invenitur enim pro quotiente hæc $xx \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} -2bb \\ +aa \end{smallmatrix} \infty o$.

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 5[que] DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; poterit ipsa dividi per æquationem hanc

$$xx - \frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{-\frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p^{\square te}. - q + b + \frac{s}{b}} \text{ in } x, + b \infty o.$$

Et cum æquatio hæc debeat esse rationalis quæ nullas admittat fractiones; sequitur 2[dum] terminum debere esse integram quantitatem rationalem.

Exemplum.

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^5 ** + 8aabxx & + 2ab^3 \; x & - b^5 & \infty o. \\ - 63a^3 & + 16a^3b & + a^4b & \\ + 8abb & + 15aabb & - ab^4 & \\ - b^3 & - b^4 & + a^3bb & \\ & - 4a^4 & & \end{array}$$

Postquam constat, æquationem hanc dividi non posse per ullam aliam, 2 aut 3 dimensiones habentem, in qua unus aut plures termini deficiunt, nec per x 8 aliquo divisore ultimi termini; erit illa divisibilis per superiorem

$$xx - \frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{-\frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p^{\square te}. - q + b + \frac{s}{b}} \text{ in } x, + b \infty o.$$

Quan-

Quantitates cognitæ ſunt $p \infty 0$

$q \infty 0$

r nullius hîc eſt uſus.

$s \infty 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t \infty - b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb$,

& diviſores ultimi Termini, duas dimenſiones habentes, ſeu valores ipſius h ſunt $\infty ab+bb$, vel $-ab-bb$, vel $bb-aa$, vel $-bb+aa$

vel $ab-bb$, vel $-ab+bb$

vel $aa+ab+bb$, vel $-aa-ab-bb$:

hinc ſi h ſumatur $\infty ab+bb$, obtinebitur

$$xx - \frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\left(-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p\right)^{\square^{\text{tè}}} - q + h + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + h$$

æquale $xx - 4ax + ab \infty 0$. Per quam ſi tentetur utrum Pro-
$\qquad\qquad + bb$

poſita dividi queat, invenietur diviſionem fieri poſſe, atque pro quotiente oriri

$$\begin{array}{llll} x^3 + 4axx & + 16aax & - b^3 & \infty 0. \\ & - ab & + a^3 & \\ & - bb & & \end{array}$$

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 6 DIMENSIONVM.

Si æquatio Propoſita 6 dimenſionum diviſibilis ſit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deſit; erit ipſa diviſibilis vel per æquationem 2 dimenſionum, vel per aliquam 3 dimenſionum. Si diviſibilis ſit per æquationem rationalem 2 dimenſionum, poterit dividi per æquationem $xx + yx + h \infty 0$,

$$\text{exiſtente } y \infty \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \; 8 \sqrt{\left(\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}\right)^{\square^{\text{tè}}} \frac{+s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}.$$

Si diviſibilis ſit per æquationem rationalem 3 dimenſionum, erit diviſibilis per æquationem $x^3 + yxx + zx + b \infty 0$, existente

$$y^3 \frac{-\frac{pv}{b} - 2pb}{\frac{v}{b} + b} yy \frac{+ppb - 2t}{\frac{v}{b} + b} y \frac{\overline{-\frac{v}{b} + b} \text{ in } r, \overline{-qb + t} \text{ in } p}{\frac{v}{b} + b} \infty 0,$$

$$+ qy \qquad \frac{v}{b} - b$$

$$\& \; z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}.$$

Porrò ob eandem rationem atque in præcedentibus Regulis ſequitur y & z debere eſſe integras quantitates rationales.

Atque in hoc ultimo caſu, ubi diviſio per $x^3 + yxx + zx + b \infty 0$ tentanda eſt, opùs tantùm eſt uti diviſoribus ultimi Termini qui ejus radicem quadratam non excedunt, nimirum quando æquatio numeralis eſt; at ipsâ literali exiſtente, ſufficit uti diviſoribus 3 dimenſionum, atque ex his duntaxat alterutro duorum talium, quorum productum ultimum Terminum efficit, haud ſecus ac id in præcedenti Regula pro æquationibus 4^or^ dimenſionum quoque annotatum fuit. Quæ porrò animadverſio locum etiam obtinet in omnibus æquationibus parium dimenſionum, quas dividere tentamus per aliam dimidium præcedentium dimenſionum numerum habentem.

DETERMINATIO 1^mi^ CASVS.

Cùm $2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}$ eſt $\infty 0$, hoc eſt, $b^3 \infty v$, & $b \infty \sqrt{C.v}$:

erit $y \infty \dfrac{-s + q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}}}$.

Cùm

Cùm $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}$ est $\propto 0$, ac simul $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, & $-s + q\sqrt{C.v} \propto 0$, hoc est, $h \propto \sqrt{C.v}$, $h \propto \sqrt{\frac{t}{p}}$, & $h \propto \frac{s}{q}$: erit $y^3 - pyy \begin{array}{l} + \frac{s}{\sqrt{C.v}} \\ - 3\sqrt{C.v} \end{array} y \begin{array}{l} + 2p\sqrt{C.v} \\ - r \end{array} \propto 0$.

DETERMINATIO 2di CASVS.

Cùm $\frac{v}{h} + h$ est $\propto 0$, erit $yy \begin{array}{l} - p \\ + \frac{2t}{ph} \end{array} y - \frac{2r}{p} + q - \frac{t}{h} \propto 0$.

Cùm p est $\propto 0$, ac simul $\frac{v}{h} + h \propto 0$, erit $y \propto \frac{rh}{t}$.

Cùm t est $\propto 0$, & $r \propto 0$, ac simul $p \propto 0$, & $\frac{v}{h} + h \propto 0$, erit $y \; * + 2qyy - 8hy \begin{array}{l} - 4s \\ + qq \end{array} \propto 0$.

Cùm $2y$ est $\propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, erit $z \propto \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{h} - h}$.

Sed cùm determinationes illæ manent, ac simul $\frac{v}{h} - h$ est $\propto 0$, & $t + hyy - qh \propto 0$, erit $z \propto \frac{t}{2\sqrt{v}} \, 8 \, \sqrt{\frac{tt}{4v} - s + p\sqrt{v}}$.

Denique in omnibus determinationibus advertendum est, quòd, si reperiatur $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h} \propto 0$, & $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, sed $-s + q\sqrt{C.v}$ non simul esse $\propto 0$; ut & si reperiatur $\frac{v}{h} + h \propto 0$, $p \propto 0$, & $t \propto 0$, sed r non simul $\propto 0$; itemque si reperiatur $2y \propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, & $\frac{v}{h} - h \propto 0$, sed $t + hyy - qh$ non simul $\propto 0$;

atque similiter in Regula pro 4^{or} dimensionibus, si $\frac{s}{h} - h$ reperiatur $\propto 0$, sed non perinde $r - hp \propto 0$: quòd tum inquam valor assumptus ipsius h, quò hoc contingit, nobis inservire non possit.

Exempla 1^{mi} *Casus.*

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx * + 8 \propto 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 2 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum igitur hîc p sit $\propto -3$

$$\begin{array}{lll} q & \propto & 7 \\ r & \propto & -5 \\ s & \propto & 4 \\ t & \propto & 0 \\ v & \propto & 8 \end{array}$$

erit $y \propto \dfrac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{\dfrac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}\square^{t\grave{e}} \dfrac{+s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}$

æqualis

$$\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}} \pm \sqrt{\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\square^{t\grave{e}} \frac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}}.$$

Divisores autem ultimi Termini, seu valores ipsius h sunt

$$\begin{array}{ll} +1, & \text{vel } -1 \\ +2, & -2 \\ +4, & -4 \\ +8, & -8. \end{array}$$

Hinc si primò sumatur $h \propto +1$, poterit radix ex

$\sqrt{\dfrac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\square^{t\grave{e}} \dfrac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}}$ extrahi, inveniturque

$y \propto -1$, sed æquatio proposita non poterit dividi per xx

$-1x$

$-1\,x + 1 \infty 0$, ac proinde transeo ad $b \infty +2$, sed cum sic b fiat $\infty \sqrt{\text{C.}\,v}$, deberet, juxta determinationes superiores, y esse $\infty \dfrac{-s + q\sqrt{\text{C.}\,v}}{p\sqrt{\text{C.}\,v} - \dfrac{t}{\sqrt{\text{C.}\,v}}}$, hoc est, $\infty \dfrac{+10}{-6}$. Id quod cum fractio existat, transeo ad $b \infty +4$, atque inde obtineo $y \infty \dfrac{-12}{+7} \pm \frac{2}{7}$, hoc est, $y \infty -2$, aut $\infty -\frac{10}{7}$. Quorum quidem non nisi $y \infty -2$ retinendum est, adeoque divisio tentanda per $xx + yx + b \infty xx - 2x + 4 \infty 0$. Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente $x^4 - 1\,x^3 + 1\,xx + 1\,x + 2 \infty 0$.

Eodem modo, si examinare velimus hanc æquationem $x^6 + 1\,x^5 + 1\,x^4 - 2\,x^3 + 2\,xx + 4\,x + 8 \infty 0$: quoniam p est $\infty 1$, $q \infty 1$, $r \infty -2$, $s \infty 2$, $t \infty 4$, & $v \infty 8$, invenitur

$$y \infty \frac{1\,b - \frac{4}{b}}{2\,b - \frac{\frac{16}{b}}{b}} \pm \sqrt{\overline{\frac{1\,b - \frac{4}{b}}{2\,b - \frac{\frac{16}{b}}{b}}\;\square^{\text{te}}\;\frac{+2 - \frac{8}{b} + bb - b}{b - \frac{\frac{8}{b}}{b}}}}\,.$$

Sumendo autem $b \infty +1$, non poterit $\sqrt{\text{Q.}}$ extrahi; quocirca transeo ad $b \infty +2$, invenioque b fore $\infty \sqrt{\text{C.}\,v}$, ac $b \infty \sqrt{\frac{t}{p}}$, ut & $b \infty \frac{s}{q}$. Vnde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipsius y per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + \dfrac{s}{\sqrt{\text{C.}\,v}}\,y + 2\,p\sqrt{\text{C.}\,v} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 3\sqrt{\text{C.}\,v} - r \end{array} \infty 0,$$

hoc est, $y^3 - 1\,yy - 5\,y + 6 \infty 0$.

E qua æquatione pro y nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde divisio tentanda relinquitur per $xx + yx + b \infty xx + 2\,x + 2 \infty 0$. Comperitur autem fieri posse, oritur enim pro quotiente $x^4 - 1\,x^3 + 1\,xx - 2\,x + 4 \infty 0$.

Exempla 2di Casus.

Esto examinandum, an hæc æquatio

$$x^6 * + 1\,x^4 + 3\,x^3 + 6\,xx + 3\,x - 4 \infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 3 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum

Cum hîc p ſit $\propto$ 0
$q \propto 1$
$r \propto 3$
$s \propto 6$
$t \propto 3$
$v \propto -4$,

$$\text{erit } y^3 \frac{-\frac{pv}{h}-2ph}{\frac{v}{h}+h}\,yy\,\frac{+pph-2t}{\frac{v}{h}+h}\,y\,\frac{-\overline{\frac{v}{h}+h}\text{ in } r, -\overline{qh+t}\text{ in } p}{\frac{v}{h}+h}$$

$$+qy \qquad\qquad \frac{v}{h}-h$$

æqualis

$$y^3 * \frac{+1y \atop -6}{-\frac{4}{h}+h}\,y\,\frac{\overline{\frac{4}{h}+h}\text{ in } 3}{-\frac{4}{h}+h} \propto 0.$$

$$-\frac{4}{h}-h$$

Diviſores ultimi Termini, ſeu valores ipſius h, qui ſoli ſunt conſiderandi, ſunt $+1$, vel -1, vel $+2$. Vnde ſumendo $h \propto +1$, obtinebitur $y^3 * +3y * -10 \propto 0$. Sed cum y hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, transeo ad alium, nempe $+2$. Cum autem ſic $\frac{v}{h}+h$ fiat $\propto 0$, atque etiam p ſit $\propto 0$, erit, juxta dictam determinationem, $y \propto \frac{rh}{t}$, hoc eſt, $y \propto 2$. At quoniam pro $z \propto \frac{y^3-pyy+qy+\frac{v}{h}+h-r}{2y-p}$ invenitur fractio, tranſeo demum ad $h \propto -1$, atque hinc obtineo $y^3 * -1y * \propto 0$, hoc eſt, $y \propto +1$, & $y \propto -1$. E quibus tandem inveniendus ſupereſt valor ipſius z. Quocirca ſi primùm ſumatur $y \propto +1$, invenietur inde $z \propto 1$, & $x^3+yxx+zx+h \propto x^3+1xx+1x-1 \propto 0$. Per quam æquationem Propoſita dividi poteſt, oritur enim pro quotiente $x^3-1xx+1x+4 \propto 0$. Quòd ſi autem per eam dividi non potuiſſet, ut nec per aliam, ubi y eſt $\propto -1$, æquatio Propoſita dicto modo non diviſibilis fuiſſet, quandoquidem ſic omnes ipſius h valores examini ſubjeciſſemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 \propto 0$,

in qua p eſt $\propto -6$, $q \propto 25$, $r \propto -36$, $s \propto 3$, $t \propto 16$, $v \propto -28$, & $h \propto +1$ vel -1, aut $+2$ vel -2, aut $+4$ vel -4, (neglectis ſcilicet reliquis diviſoribus, radicem quadratam ultimi termini excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum unoquoque valore ipſius h, ſi pro h aſſumitur -2, æquationem hanc $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 \propto 0$, in qua y admittit tantummodo unum valorem rationalem, qui integer numerus eſt nempe -3. Per hunc autem quæro valorem ipſius z. Sed cum hîc $2y$ ſit $\propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, non poſſum eundem per hanc æquationem $z \propto \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}$ invenire, quo circa illum quæro per hanc $z \propto \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{h} - h}$, atque invenio $z \propto 3$, &

$x^3 + yxx + zx + h \propto x^3 - 3xx + 3x - 2 \propto 0$.

Per quam igitur examinando an Propoſita dividi queat, comperietur diviſionem fieri poſſe, orieturque pro quotiente $x^3 - 3xx + 13x + 14 \propto 0$. Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi $2y$ eſt $\propto p$, non fuiſſet $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, oportuiſſet tranſire ad alium valorem ipſius h.

Vbi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 dimenſionum non ſolùm ſciri poſſe, an Propoſita aliqua æquatio per aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, diviſibilis ſit; ſed etiam utrum ipſa diviſibilis ſit per rationalem, in qua aliquis Terminus deficiat. Verùm cum idem faciliùs cognoſci queat per XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem uſus harum Regularum vel eo major eſt, quo pauciores diviſores ultimus Terminus Propoſitæ æquationis admittit, haud inconſultum fuerit hîc adjungere modum, quo plerumque levi negotio Propoſitam æquationem in aliam tranſmutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimenſiones, quæque indiviſibilis ſit ſi Propoſita ſit indiviſibilis, at diviſi-

visibilis, si Proposita divisibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipsam dividentibus facilè quoque inveniri possint æquationes, Propositam dividentes.

Assumpto in hunc finem valore aliquo pro x, ut lubet, eoque subrogato ubique in locum x, quærantur divisores omnes aggregati omnium terminorum; &, si divisores hi non pauciores numero fuerint divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ, sumatur rursus alius valor pro x, exploreturque num hinc aggregatum pauciorum divisorum inveniatur; quòd si non fiat, denuò pro x alius valor assumendus est, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum resultet, quod pauciores divisores habeat. Quo peracto, ponatur $x \infty z, +$ assumpto ipsius x valore, hujusmodi aggregatum pauciorum divisorum suggerente, atque hîc valor $z +$ &c. ubique in locum x substituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua z erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum divisorum; ita ut hæc æquatio talis futura sit, qualis requiritur, nimirum indivisibilis si Proposita indivisibilis sit, at divisibilis si Proposita divisibilis fuerit.

Exempli gratiâ, esto invenienda ejusmodi æquatio loco hujus
$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty 0.$$
Sumatur $x \infty 1$, fietque
$$\begin{array}{rcr} x^5 & \infty & +1 \\ +\ 2x^4 & \infty & +2 \\ -58x^3 & \infty & -58 \\ -49xx & \infty & -49 \\ -50x & \infty & -50 \\ -600 & \infty & -600, \\ \hline \end{array}$$
& $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty +3 - 757$, hoc est, $\infty -754$. cujus quidem numeri divisores multò pauciores existunt quàm ipsius -600.

Hinc ponendo $x \infty z + 1$,

erit

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{erit} & x^5 \infty & z^5 & +5z^4 & +10z^3 & +10zz & +5z & +1 \\
+ & 2x^4 \infty & & +2z^4 & +8z^3 & +12zz & +8z & +2 \\
- & 58x^3 \infty & & & -58z^3 & -174zz & -174z & -58 \\
- & 49xx \infty & & & & -49zz & -98z & -49 \\
- & 50x \infty & & & & & -50z & -50 \\
- & 600 \infty & & & & & & -600, \\
\hline
\end{array}
$$

$$\& \; z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754 \infty 0.$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata divisibilis reperitur per $zz + 3z - 58 \infty 0$, ac proinde cum x sit $\infty z + 1$, erit $z \infty x - 1$. Unde si in locum z subrogetur $x - 1$, obtinebitur $zz + 3z - 58 \infty xx + 1x - 60 \infty 0$. per quam itaque Proposita quoque æquatio divisibilis erit.

Quòd si autem post primam positionem ipsius $x \infty + 1$ obtinuissemus aggregatum, quod nobis non inserviisset, id est, quod non pauciores aut adhuc nimis multos divisores admisisset, ponere potuissemus $x \infty - 1$; quòd si verò & hinc quæsitum aggregatum nondum invenissemus, ponere possemus $x \infty + 2$; deinde $x \infty - 2$, atque ita porrò; vel etiam possemus nonnullos terminos supponere $\infty 0$, si aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro x inveniri posset. Exempli gratiâ, possemus in æquatione allata duos priores terminos $x^5 + 2x^4$ supponere $\infty 0$, atque sic invenire $x \infty - 2$, quærendo tantùm ulteriùs aggregatum reliquorum Terminorum $-58x^3 - 49xx - 50x - 600$. Porrò, quod hîc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$
$$+ 10a^4$$

ponere possumus $x \infty + a$, vel $x \infty - a$, vel $x \infty + b$, vel $x \infty - b$, &c. vel etiam supponere terminos aliquos $\infty 0$, ut $-6abx^3 \infty + 30aabxx$, prout visum fuerit.

3. Verùm enimvero magnum hîc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantùm, cùm hoc aggregatum nullos divisores præter unitatem ac se ipsum admittit* (quos quidem divisores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujusque termini membra eundem dimensionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere soleo, cum nulla divisio per eos fieri possit), *manifestum est, æquatio-*

nem Propositam per aliam rationalem, in qua sive omnes sive non omnes termini extant, & sive unius sive plurium est dimensionum, penitus esse indivisibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propositam nunquam fore divisibilem per æquationem rationalem, cujus dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicujus ex divisoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca si æquatione existente 6 dimensionum divisores non nisi 1 & 5 dimensionum fuerint, erit ea indivisibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimensionum; & si divisores tantùm 2 & 4 dimensionum fuerint, erit ipsa indivisibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimensionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc considerationem non tantùm multi casus resecari queant, quando æquatio per aliam rationalem divisibilis est; sed etiam si inquirere velimus, num Proposita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem divisibilis sit, poterit sæpissimè parvo admodum labore indivisibilitas, si ea sit indivisibilis, cognosci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$
$$+ 10a^4$$

ponatúrque $x \infty a$, obtinebitur

$$\begin{array}{rcl}
x^5 & \infty & + a^5 \\
- 6abx^3 & \infty & \cdot\;\cdot\;\cdot - 6a^4b \\
+ 30aabxx & \infty & + 30a^4b \\
+ 24a^3bx & \infty & \cdot\;\cdot\;\cdot - 24a^4b \\
+ 10a^4x & \infty & + 10a^5 \\
+ 120ab^4 & \infty & + 120ab^4 \\
\hline
\end{array}$$

& fit aggregatum $+ 11a^5 + 120ab^4$.

Cujus divisores (omissis unitate ac ipso aggregato) tantùm sunt $+a$, $-a$, $11a^4 + 120b^4$, & $-11a^4 - 120b^4$, unius scilicet & 4^or dimensionum: ita ut Proposita æquatio, si per rationalem unius dimensionis divisibilis non fuerit, penitus per rationalem futura sit indivisibilis. Quoniam autem hîc x est $\infty z + a$, addi debet a divisoribus $+a$, & $-a$, ad habendos valores ipsius x, idcirco tantummodo $x - 2a \infty 0$ pro divisore assumi posset. Sed per

per hunc æquatio Propoſita non eſt diviſibilis, quare illa etiam per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod ſi juxta unam poſitionem non ita accidiſſet, facilè fuerit aliam inſtituere, ponendo $x \propto b$, vel $\propto -a$, vel $\propto -b$, &c. Et rarò continget, quin per hanc tranſmutationem æquationis Propoſitæ in aliam aliquod commodum conſequuturi atque operæ plurimùm ſublevaturi ſimus.

XVIII. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem ſive literalem ſive numeralem, & quæ ex multiplicatione duarum aliarum, quarum ultimi Termini ſunt quantitates rationales, fractioneque carentes, produci poſſunt.

Hæc Regula parùm à præcedenti differt, niſi quòd ſe latiùs extendat, & per hanc quoque Reductiones ejuſmodi æquationum ſemper inveniri poſſint, quæ ex duabus aliis, ſive rationales, ſive irrationales ſint, produci poſſunt, hoc tantùm excepto, quòd ultimi earum termini ſint quantitates rationales: cum præcedens Regula ſe ſolùm extendat ad æquationes, quæ non niſi ex rationalibus produci poſſunt: ideoque tantùm opùs eſt, ut ſolummodo iiſdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes, ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, ſint rationales, quod hîc non requiritur. Exempli loco ſit prima

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 4^or^ DIMENSIONVM.

Si æquatio Propoſita diviſibilis ſit per aliam, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, & cujus ultimus terminus ſit rationalis; erit ea diviſibilis per

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h} x + h \propto 0.$$

Excepto tantùm, cum $\frac{s}{b}$ eſt $\infty\ b$, ac ſimul $r \infty bp$, id eſt, $b \infty \pm \sqrt{s}$, & $b \infty \frac{r}{p}$; tunc enim diviſibilis erit per

$$\overline{xx + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2b - q}}, \text{ in } x, + b \infty 0.$$

ubi patet s nunquam eſſe poſſe $\infty\ bb$, niſi s quadratum fuerit, ac r per p dividi poſſit.

2. Sufficit etiam illos ſolùm diviſores ultimi termini, qui ipſius radicem quadratam non excedunt, conſiderare, &c.

Exempli gratiâ, examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0: \\ \qquad\qquad\quad - \ cc \end{array}$$

quoniam $p \infty -2a$, $q \infty 2aa - cc$, $r \infty -2a^3$, $s \infty a^4$, hinc erit

$$xx + \frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b}x + b \infty xx \frac{-2a^3 + 2ab}{\frac{a^4}{b} - b} x + b \infty 0.$$

Sunt autem diviſores ultimi Termini, ſeu valores ipſius b, $+aa$ & $-aa$. Vnde ſumendo $b \infty aa$, obtinebitur $\frac{a^4}{b} - b \infty 0$, ac etiam $-2a^3 + 2ab \infty 0$ (hoc eſt, $\frac{s}{b} \infty b$, & ſimul $r \infty bp$.) ac proinde tentanda erit diviſio per $xx + \frac{1}{2}px \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2b - q}$, x, $+ b \infty 0$, hoc eſt, per $xx - ax + \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \infty 0$, vel per $xx - ax - \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \infty 0$: Quæ diviſio per utramque ſuccedit.

Ita etiam ſe res habet in

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 5^{que} DIMENSIONVM.

Si enim æquatio Propoſita 5 dimenſionum diviſibilis ſit per aliam plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, cujuſque ultimus terminus ſit rationalis; erit ea diviſibilis per

$$\overline{xx - \frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\overline{-\frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{te}. - q + b + \frac{s}{b}}} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

Et

Et ſic porrò de cæteris Regulis, tantùm, uti dictum eſt, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, illic ſint rationales, quod ſolùm hîc non requiritur.

Animadvertendum quoque eſt, hanc Regulam ſe non ſolùm extendere ad æquationes, in quibus nec ſigna radicalia, nec Fractiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantùm quadrat,) ſed quoque ad illas, in quibus & radicalia ſigna & Fractiones reperiuntur, hoc tantùm excepto, quòd non ſint in ultimo Termino, ut antea dictum.

Denique notandum eſt, quòd idem etiam ſequenti modo inveniri poſſit.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5 DIMENSIONUM.

Quære communem diviſorem duarum æquationum,

$$\begin{array}{llll} yy + \frac{t}{bb}\,y + q \infty 0, & \& \; yy - \frac{sb}{t}\,y & - \dfrac{bbp - t + rb}{\frac{t}{b}} & \infty 0, \\ \;\; -p \;\;\; -b & \;\;\;\;\;\;\;\; + \frac{b^3}{t} & & \\ \;\;\;\;\;\;\;\; -\frac{s}{b} & & & \end{array}$$

& per eum, valorem ipſius y; eritque Propoſita æquatio diviſibilis per $xx + yx + b \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 6 DIMENSIONUM.

Si Propoſita æquatio diviſibilis eſt per

$$xx + yx + b \infty 0,$$

quæratur communis diviſor duarum æquationum,

$$\begin{array}{lllll} byy - \frac{v}{bb}yy & - pby & - s \infty 0, & \& \; y^3 - pyy & + qy - r \infty 0, \\ \;\;\;\;\; + \frac{t}{b} & + \frac{v}{b} & & \;\;\;\;\;\; - 2b & + pb \\ & - bb & & \;\;\;\;\;\; - \frac{v}{bb} & + \frac{t}{b} \\ & + qb & & & \end{array}$$

& per eum, valor ipſius y.

 Si

Si Proposita æquatio est divisibilis per $x^3 + yxx + zx + h \infty 0$, possunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ sunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4[or] dimensionum, quarum communi divisore invento, per eum valor incognitæ quantitatis y inveniri potest; valor verò ipsius z quæratur eodem modo, quo antea. Eadem est ratio in altioribus æquationibus.

Sed si nullus inveniatur communis divisor, assumptum valorem ipsius h relinquo, & alium assumo. Et si omnes termini alterius æquationis se invicem tollant, per alteram inveniendus est valor ipsius y.

XIX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fractione & 2[dᵒ] termino carentem, quæ dividi possit per aliam cujus 2[dus] terminus sit rationalis, &c.

Primùm inquiro per XI Regulam, an Proposita æquatio divisibilis sit per aliam in qua non omnes termini extant; quod si fieri nequit, erit divisibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam sequenti modo invenio. 1[mo.] Experior num dividi possit per $x +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini; si neque hoc succedat, facio æquationem ejusdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita sumi queunt, ut productum totidem habeat dimensiones quot Proposita æquatio, non annumerando æquationem unius tantùm dimensionis. Exempli gratiâ, si æquatio Proposita habeat 8 dimensiones, considero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimensiones; aut, si 9 dimensiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimensionum fuerint, ex quarum multipli-

plica-

plicatione Propoſita poſſet produci. $3^{tiò}$. Poſt hæc transmuto Propoſitam æquationem in aliam, cujus incognita quantitas deſignet quantitatem 2^{di} Termini, unius harum duarum æquationum, quæ, (ſi inæqualium dimenſionum fuerint,) pauciores dimenſiones habeat, $4^{tò}$. Poſtremò inquiro num inventa æquatio diviſibilis ſit per incognitam quantitatem + vel — aliquo diviſore ultimi ſui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimenſionum,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0,$$

in qua q deſignet quantitatem cognitam tertii termini ſuis ſignis + & — adfectam; r quarti; s quinti; t ſexti; & v ipſum ultimum terminum: Et quam ſuppono indiviſibilem per aliam æquationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per x, + vel — aliquo diviſore ultimi Termini.

Primò itaque inquiro utrum ipſa diviſibilis ſit per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{llllll}
x^4 - yx^3 & + zxx & + kx & + l & & \propto 0 \\
xx + yx & + w & & & & \propto 0 \\
\hline
x^6 - yx^5 & + zx^4 & + kx^3 & + lxx & & \\
\quad + y & - yy & + yz & + yk & + ylx & \\
 & + w & - wy & + wz & + wk & + wl \\
\hline
x^6 \quad * & + qx^4 & + rx^3 & + sxx & + tx & + v \propto 0.
\end{array}$$

Vnde hæ 5 æquationes reſultant

1^{ma}. $z - yy + w \propto q$
2^{da}. $k + yz - wy \propto r$
3^{tia}. $l + yk + wz \propto s$
4^{ta}. $yl + wk \propto t$
5^{ta}. $wl \propto v$.

Per 1^{mam} fit $z \propto q + yy - w$, qui valor ſi in locum ipſius z in reliquis æquationibus ſubrogetur, habebitur

pro $2^{dâ}$. $k + qy + y^3 - 2wy \propto r$
$3^{tiâ}$. $l + yk + qw + yyw - ww \propto s$
$4^{tâ}$. $yl + wk \propto t$
$5^{tâ}$. $wl \propto v$.

Per

Per 2$^{\text{dam}}$ fit $k \infty r - qy - y^3 + 2wy$, qui valor in locum ipsius k in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 3$^{\text{tiâ}}$. $l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \infty s$

4$^{\text{tâ}}$. $yl + rw - qwy - y^3w + 2wwy \infty t$

5$^{\text{tâ}}$. $wl \infty v$.

Per 3$^{\text{tiam}}$ fit $l \infty s - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$, qui valor in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 4$^{\text{tâ}}$. $sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \infty t$

5$^{\text{tâ}}$. $sw - ryw + qyyw + y^4w - 3wwyy - qww + w^3 \infty v$.

Per 4$^{\text{tam}}$ æquationem invento valore ipsius ww (aut ipsius $3ww$), substituo ipsum in locum ww (aut $3ww$) in 5$^{\text{ta}}$ æquatione, obtineoque 6$^{\text{tam}}$ æquationem, in qua w tantùm 1 dimensionem habet, nimirum:

$$w \infty \frac{5y^8 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5sy^4 + qqy^4 - 5ty^3 - rryy + qsyy - 9vyy - qty + sry - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2qqyy - 6syy + qry - 3ty - rr}.$$

Qui valor si jam in 4$^{\text{ta}}$ æquatione in locum w subrogetur, habebitur pro ipsa

$$\begin{array}{lllllllll}
y^{15} \;* & +4qy^{13} & -2ry^{12} & +6qqy^{11} & +10ty^{10} & -2qsy^9 & +12qty^8 & -3rty^7 & +10sty^6 \\
 & & -2s & -6qr & -26v & +6rs & -24qv & -30rv \\
 & & & & +4q^3 & -6qqr & -7ss & +2qqt \\
 & & & & & & +2qqs & +4qrs \\
 & & & & & & +q^4 & +2r^3 \\
 & & & & & & & -2q^3r
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
-12tty^5 & +2qsty^4 & -5qtty^3 & -6rttyy & -qqtty & -qrtt \infty 0. \\
+6qrt & -6qrv & +7rst & +2r^3s & +3stt & +t^3 \\
-18qqv & -6rrt & +3rrv & & +qrst & +rrst \\
-6qss & +8rss & +qqrt & & +3qrrv & -r^3v \\
-6rrs & -2qqrs & -4q^3v & & -9rtv & \\
+2q^3s & +2qr^3 & +qqss & & -r^3t & \\
+54sv & -18tv & +18qsv & & -rrss & \\
 & & -4s^3 & & & \\
 & & -2qrrs & & & \\
 & & -r^4 & & & \\
 & & -27vv & & &
\end{array}$$

Hæc autem æquatio ea est, quæ juxta Regulam erat quærenda, nempe in qua y designat quantitatem secundi Termini hujus æquationis $xx + yx + w \infty 0$, quæ una est duarum, ex quarum multiplicatione Proposita supponitur esse producta, quæque pauciores habet dimensiones.

Nunc verò inquirendum restat, num hæc æquatio divisibilis sit per $y +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini $-qrtt + t^3 + rrst - r^3v$; Si enim divisibilis sit, erit quoque w cognita, poteritteritque Propoſita æquatio dividi per $xx + yx + w \infty 0$. Invenitur namque valor ipſius w per quartam æquationem

$$\underline{sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \infty t}$$

$$ww \infty \begin{array}{l} \frac{4}{3}yy \\ \frac{2}{3}q \\ -\frac{1}{3}r \end{array} w + \frac{t}{3y} \quad \frac{-s + ry - qyy - y^4}{3}.$$

Vel ipſa inveniri quoque poteſt per 5^{tam}; ut & per 6^{tam}, cùm 5^{ta} per 4^{tam} non eſt diviſibilis.

Quòd ſi jam hæc æquatio 15 dimenſionum non fuerit diviſibilis per y + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, poterimus rurſus eodem modo æquationem ejuſdem formæ facere, ſupponendo Propoſitam eſſe productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, inveſtigando æquationem, in quâ incognita quantitas rurſus deſignet quantitatem 2^{di} termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem aſcendet ad 20 dimenſiones, ſed ubique parium erit dimenſionum; ita ut hîc diviſio tunc exploranda ſit per incognitæ quantitatis quadratum + vel — aliquo diviſore ultimi Termini.

Haud ſecus ſi Propoſita æquatio ſit 5 aut 4 dimenſionum, atque conſtet ipſam dividi non poſſe per aliam æquationem in qua unus pluresve Termini deficiant, nec per x + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, erit ea diviſibilis per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimenſionum

$$x^5 * + qx^3 + rxx + sx + t \infty 0,$$

ſi ſolummodo in operatione præcedenti ponamus l & $v \infty 0$, inveniemus

pro 3^{tia}. $ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \infty s$,

& pro 4^{ta}. $rw - qwy - y^3w + 2wwy \infty t$.

Per 3^{tiam} autem valor ipſius ww eſt $\infty ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - s$, qui valor in locum ipſius ww ſubſtitutus in 4^{ta} dabit

pro 5^{ta}. $w \infty \dfrac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2sy + t}{r + 5y^3 + qy}$.

Porrò ſubrogato hoc valore ubique in locum ipſius w in 3^{tia}, obtinebitur

$$
\begin{array}{lllllllllll}
y^{10} * + 3qy^8 & - ry^7 & + 3qqy^6 & - 2qry^5 & - 2qsy^4 & + 4sry^3 & - 4ssyy & - 4sty & - tt & \infty\, 0. \\
 & & - 3s & + 11t & - rr & + 4qt & + 7rt & + r^3 & - rrs & \\
 & & & + q^3 & - qqr & + qqs & + tqq & + tqr & & \\
 & & & & & - qrr & & & &
\end{array}
$$

Et hæc eſt æquatio quæ inſervit dividendis æquationibus 5 dimenſionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimenſionum, utpote $x^4 * + qxx + rx + s \infty\, 0$, concipiendo k, l, t, & $v \infty\, 0$, invenio

pro $2^{\text{dà}}$. $qy + y^3 - 2wy \infty\, r$,
& pro $3^{\text{tià}}$. $qw + yyw - ww \infty\, s$.

Ponendo jam valorem ipſius $w \infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$ in $3^{\text{tià}}$, obtinebitur

$$
\begin{array}{llll}
y^6 + 2qy^4 + & qqyy & - rr & \infty\, 0. \\
 & - 4s & &
\end{array}
$$

Quæ æquatio erit diviſibilis per yy, + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, atque æquatio Propoſita $x^4 * + qxx + rx + s \infty\, 0$ per $xx + yx + w \infty\, 0$, ut & per $xx - yx + z \infty\, 0$; hoc eſt,

$$\text{per } xx + yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} \infty\, 0,$$

$$\& \; xx - yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} \infty\, 0.$$

Vbi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadratæ reduci poſſunt, eſſe planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 ſuæ Geometriæ deſcripſit. Nec dubitare poſſim, quin ipſam eodem modo, vel certè non multùm abſimili invenerit; præſertim ſi ei, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipſius Methodo ſecantium, & quæ deinceps pag. 49 expoſuit. Adeò ut, judicio meo, ne quidem veriſimile videatur, imprimis ſi concinnam præcedentium cum ſequentibus cohærentiam ſpectemus, ipſum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam deſumpſiſſe. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generoſitate, (ut noviſti & tu & quotquot ejus familiaritate uſi ſunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, ſed parvus etiam hîc ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis ſpecimina ſummique ingenii inventa exhibet, & quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis adeò ſunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipſorum ſcripta cum hujus ſcriptis comparaverit, in haſce cogitationes incidere unquam poſſit; Quemadmodum nemo tam præpoſtero eſt ingenio, ut fulgentem ſolis lucem à micantibus ſtellis derivandam arbitretur. Non tamen hîc quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus ſtellis aſſimilo; credo enim ſtellas dari, quæ in ſe ſint ipſo etiam ſole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem noſtrûm reſpectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multique alii, qui ſuperiori & hoc noſtro ſæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æſtimationis ſunt, ac ſuis etiam monumentis immortalem in omnes Poſteros nominis gloriam promeritos lubentiſſimè fateor. At majorem poſt illos lucem mundo exortam eſſe, ipſi etiam, ſi reviviſcerent, in noſtro Carteſio non tantùm agnoſcerent, ſed etiam ſibi ex ejus lumine majus lumen accendere ſatagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm ſuo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs ſed tutiùs etiam in ſolis lumine vivitur, & per compendioſiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs ac diſtinctiùs quàm in ſtellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantùm ex ipſius ſcriptis, ſed præſertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retrò annis interceſſit, penitus pernòviſti, quemque interea non ſemel maximo cum ſtupore admiratus es, cum videres eum quæſtiones in Matheſi difficillimas è veſtigio tantâ promptitudine reſolvere, ac ſi non difficilliores, quàm omnium facillimæ, ipſi fuiſſent, quæ nihilominus à præſtantiſſimis etiam Mathematicis in ea uſque tempora, aut non, aut non niſi maximâ cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipſe faſſus es) quòd non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata cuſtodieris, id mihi ſatis amplum teſtimonium eſt, unde certus ſim, tibi, ut mihi, ne quidem veriſimile fieri poſſe, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum ſcriptis ad ſe potius tranſtuliſſe, quàm ex propriis fundamentis, fœcundiſſimis illis omnium ſcientiarum ſeminariis, eruiſſe atque inveniſſe. Sed de his ſatis.

Iam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hîc factâ eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem possunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ considerantur; quod, meo quidem judicio, magni usus est, cum sæpenumero quæstiones difficiliores, unam tantùm incognitam quantitatem supponendo, aut non resolvi posse, aut multo majori labore, aut certè ad eas resolvendas alias vias quàm hactenus imitari consuevimus ineundas esse, deprehenderim; quod etiam Cartesium nostrum non latuisse ex pag. 4, aliisque passim locis luculenter constat. quod nihilominus haud ita pridem ab insigni Mathematico in dubium revocari comperi, cujus rei causam hanc conjicio, quòd in aliorum scriptis magis quàm in hujus versatus fuerit. Dixi autem hâc Regulâ tolli eas quantitates, quæ quidem tolli possunt: non enim semper omnes possunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam si quæstio non sit Theorema, omnes tolli nequeunt; & si determinata sit, omnes unâ exceptâ tolli possunt; si verò una deficiat conditio, quò minùs determinata existat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & sic deinceps, ut nosti. Neque, quod sedulò observo, etiam semper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli potest. Exempli gratiâ, in duabus hisce æquationibus

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3zxx & + bbx & - zzb & \infty\ 0, \\ & + bz & - zbb & \\ & + 2zz & & \end{array}$$

& $$\begin{array}{llll} x^3 - 4zxx & + zbx & - 2zzb & \infty\ 0, \\ & + 4zz & - 2zbb & \\ & + bb. & & \end{array}$$

in quibus x & z duas incognitas quantitates designant, potest x vel z per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio est, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, si omnes ejus conditiones includant, non determinatum esse, atque unam in eo conditionem, ut prorsus determinatum sit, deficere. Non rarò etiam licet in resolvendo aliquo Problemate determinato diversas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porrò quomodo easdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Propoſita, ut ante,

$$x^6 * + q x^4 + r x^3 + s x x + t x + v \infty 0,$$

& inquiratur num dividi poſſit per æquationem duarum dimenſionum cui nullus terminus deſit, pone per $x x + y x + w \infty 0$. ſi itaque per eam diviſibilis ſit, erit $x x \infty - y x - w$, quo valore ipſius $x x$, ubique in locum $x x$ ſubrogato, reſultabit æquatio in qua x unam tantùm habebit dimenſionem, nimirum

$$\begin{array}{ll} -3wwyx & -w^3 \quad \infty 0. \\ -y^5 & -wy^4 \\ +4wy^3 & +3wwyy \\ -qy^3 & +qww \\ +2qwy & +rwy \\ -rw & -sw \\ +yyr & -qwyy \\ -sy & +v \\ +t & \end{array}$$

Deinde pono ſingulos terminos $\infty 0$, adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$-3wwy - y^5$ &c. $\infty 0$. &, $-w^3 - wy^4$ &c. $\infty 0$.

eaſdem quæ præcedentes 4ta & 5ta; Ita ut w, eodem quo ibi modo, ablatâ, eandem tandem æquationem nanciſcaris $y^{15} * + 4 q y^{13}$, &c. $\infty 0$

Eodem modo ſe res habet in reliquis.

Illud verò notandum eſt, hanc poſitionem $x x - y x - w \infty 0$ ſeu $x x \infty y x + w$ paulò faciliorem reddere operationem, cum in ſubrogatione valoris ipſius $x x$ non opùs ſit ut ſigna mutentur, quod alioqui ſecundùm priorem poſitionem $x x + y x + w \infty 0$ contingit: Itaque hæc pro illa potiùs eſt eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum eſt, ut idem effectus utriuſque methodi evidentiùs pateret. Eodem modo, ſi præcedens æquatio inquirenda eſſet, num dividi poſſet per æquationem trium dimenſionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam $x^3 \infty y x x + w x + z$, ſed non $x^3 + y x x + w x + z \infty 0$, quemadmodum, ſi aliam Methodum ſequerer, facturus eſſem.

Supervacaneum verò est me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4^{or} dimensionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allatæ sint) se extendere ad omnes casus: nam cum q denotet quantitatem cognitam tertii termini Propositæ æquationis, affectam suis signis + & —; manifestum est in Regulis valorem ipsius q tantùm subrogandum esse in locum q; vel si fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per q multiplicatas, cum etiam tum sint ∞ o, delendas esse. ita quoque se res habet in r, s, & t. Verbi gratiâ, si hæc æquatio 5 dimensionum $x^5 * * + 6xx - 25x - 39 \infty 0$ divisibilis esset per rationalem duarum dimensionum, in qua nullus terminus deest; Oportet, cum in hac æquatione q sit $\infty 0$, $r \infty 6$, $s \infty - 25$, $t \infty - 39$, loco hujus $y^{10} * + 3qy^8 - ry^7$ &c. $\infty 0$, scribere hanc $y^{10} * * - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 \infty 0$. quâ y invenitur $\infty - 1$, ideoque $w \infty \dfrac{-2ryy + 2qy^3 \text{ \&c.}}{r + 5y^3 + qy} \infty - 3$; & pro $xx + yx + w \infty 0$, hæc $xx - 1x - 3 \infty 0$, per quam Proposita æquatio erit divisibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, sicut etiam in 17ma aliisque Regulis, quomodo omnes casus æquationum æqualium dimensionum, sive aliqui termini desint, sive non, vel quo tandem modo signis + & — affecti sint, sub una eademque Regula comprehendi possint, adeò ut sexcenti ejusmodi casus ad unum referri & multi labores rescindi queant. Quod satis superque Regula æquationum 4 dimensionum, cum omnibus casibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immensusque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonstrant; præsertim si eâdem ratione omnes casus æquationum 5 & 6 dimensionum describere vellent.

Denique notandum, cùm dico, primùm inquirendum esse num æquatio Proposita dividi possit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud sequendum esse; non enim id necessarium, sed plerumque brevissima via est ad æquationem Propositam reducendam.

XX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationa-

tionalem 4 dimenſionum, fractioneque carentem, 2$^{\text{dᵒ}}$ verò termino, ſi adſit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, ſi fieri poteſt, ad alias pauciorum dimenſionum.

Poſtquam exploratum eſt æquationem Propoſitam non eſſe diviſibilem per aliam, duos duntaxat terminos habentem, inveniendus eſt valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp & \infty\ 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

ubi p deſignat quantitatem cognitam, ſuis ſignis + vel — adfectam 2$^{\text{di}}$ termini; q, tertii; r, quarti; s, quinti. Invento autem valore ipſius y, poterit æquatio Propoſita ejuſdem ope dividi in duas æquationes ſequentes, quæ ſingulæ duas dimenſiones habent, nimirum in

$$xx + \tfrac{1}{2}px + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}\ \text{in}\ x, + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty\ 0,$$

$$\&\ xx + \tfrac{1}{2}px - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}\ \text{in}\ x, + \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty\ 0.$$

Quòd ſi verò valor ipſius y non ſit æqualis alicui ex diviſoribus ultimi termini $-spp + 4qs - rr$, non poterit æquatio Propoſita ulteriùs quàm ad tres dimenſiones reduci.

Exempli gratia, ſi reducere velimus æquationem $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 \infty\ 0$, quæ per æquationem, duos ſolummodo terminos habentem, eſt indiviſibilis, invenio

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp & \infty\ y^3 + 2yy * - 16 \infty\ 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

(nam $p \infty -2$; $q \infty -2$; $r \infty -2$; $s \infty 1$). quæ dividi poteſt per $y - 2 \infty\ 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$\begin{array}{ll} xx - 1x + 1 \infty\ 0, & \&\ xx - 1x + 1 \infty\ 0. \\ \quad +\sqrt{5} & \qquad\quad -\sqrt{5} \end{array}$$

Eodem modo ſi habeatur æquatio $x^4 * * - 12x - 5 \infty\ 0$, obtineo

tineo $y^3 * + 20y - 144 \propto 0$, pro $y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0$

$$\begin{array}{r} +pr \quad +4qs \\ -rr \end{array}$$

(nam $p \propto 0$, $q \propto 0$, $r \propto -12$, $s \propto -5$.) quæ divisibilis est per $y - 4 \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 \propto 0,$$
$$\& \; xx - 2x - 1 \propto 0.$$

Similiter si proponatur æquatio literalis

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0, \text{ erit } p \propto -2a; \\ \qquad\qquad\qquad -cc \end{array}$$

$q \propto 2aa - cc$; $r \propto -a^3$; $s \propto a^4$, ideoque in locum æquationis $y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0$, scribenda $y^3 - 2aayy * - 4a^4cc \propto 0$,

$$\begin{array}{l} +pr + 4qs \qquad\qquad\qquad + cc \\ -rr \end{array}$$

quæ dividi potest per $y - 2aa \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0,$$
$$\& \; xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0.$$

Si verò hæ æquationes per $y +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini non fuissent divisibiles, non potuissent etiam æquationes Propositæ ulteriùs quàm ad 3 dimensiones reduci.

XXI. *REGVLA.*

Hactenus Regulæ, quas tradidi, respexerunt æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas, quam x nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus distinctiùs exprimerem. Iam uno adhuc verbo adjiciam: *Quòd in Proposita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu Reductionis considerare liceat; & quòd sæpe compendio sit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam considerare & sic Reductionem inquirere.* Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri possunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam considerando, quàm per incognitam reductio inveniri potest, & sæpe etiam breviùs, si ex solis irrationalibus produci possunt. Dein quòd hoc sæpe compendio sit, vel hinc

hinc manifestum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimensionum numerum habent, atque adeò, si aliquam ex cognitis pro incognita consideres, sæpe quoque aliqua æquatio exsurget, quæ pauciorum sit dimensionum quàm Proposita; & adhuc pauciorum, si etiam inter ipsas cognitas delectum instituas; aut saltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

Considerando itaque omnes sine discrimine literas ut cognitas, ejusmodi ex illis eligere & pro incognita supponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, respectu Reductionum, utilissima est.

Et per eam non tantùm Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propositi Problematis conditiones includunt, ope Regularum supra explicatarum sæpe compendiosissimè inveniuntur, sed etiam priusquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones rescindi & simplicissimæ sæpe æquationes haberi possunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, sed ne te atque etiam me diutiùs remorer, unum tantùm & alterum exemplum adjungam.

Quo modo reducere possis omnem rationalem æquationem, quæ per aliam rationalem, non cognitis ultimi Termini divisoribus, dividi queat, remanente etiam, si placet, omni Fractione, quæ in illa reperitur; nimirum, si in æquatione illa aliqua litera, sive cognita, sive incognita reperiatur, secundùm quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimensiones, vel etiam plures, sed quæ ex his derivari possint: Id quod semper ex investigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit, uno tantùm casu excepto, quem postea indicabo.

 1. *Exem-*

1. *Exemplum*; in quo litera b ubique unam tantùm dimensionem habet.

Esto æquatio Proposita $\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \propto 0 \\ \quad\;\; + b \quad - ab \qquad\quad + ba^3 \end{array}$

Ergo $bx^3 - abxx + ba^3 \propto -x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4$

div. per $x^3 - axx + a^3$. fit $b \propto -x + a$

& $x - a + b \propto 0$. Æquatio, per quam Proposita dividi potest.

2 *Exemplum*.

Esto æquatio Proposita $\begin{array}{l} x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \propto 0 \\ \qquad\; - 2a \quad\;\; + 70ab \quad - 60aab \end{array}$

Ergo $-20bxx + 70abx - 60aab \propto -x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3$

div. per $-20xx + 70ax - 60aa$. fit $b \propto \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}$. Hujus autem maximus communis divisor, per Methodum ante descriptam, est $x - 2a$, per quem si fractio abbrevietur,

fiet $b \propto \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}$, vel $\frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$

seu, quod idem est, $\begin{array}{l} xx - 20bx + 30ab \propto 0. \\ \qquad\qquad + 60aa \end{array}$ Ita ut æquatio Proposita in hanc, & præcedentem $x - 2a \propto 0$ divisa sit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas c tantùm 1 & 2 habet dimensiones.

Esto æquatio Proposita $\begin{array}{l} x^4 * + 8acxx - 4aacx + 12aacc \propto 0 \\ \qquad\quad - aa \end{array}$

Ergo $\begin{array}{l} 12aacc \propto -8axxc - x^4 \\ \qquad\qquad\;\; + 4aaxc + aaxx \end{array}$

div. per $12aa$. fit $cc \propto \frac{4ax - 8xx}{12a}$ in c, $+ \frac{aaxx - x^4}{12aa}$

Vnde extractâ radice invenietur

$c \propto \frac{ax - xx}{2a}$, hoc est, $xx - ax + 2ac \propto 0$

vel $c \propto \frac{-ax - }{6a}$, hoc est, $xx + ax + 6ac \propto 0$.

Ita ut æquatio Proposita in hasce duas sit divisa. Quoniam autem

tem in ea a quoque 1 & 2 tantùm dimensiones habet, potuisset idem etiam quærendo valorem ipsius a investigari.

Vbi notari potest, quòd, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor quæritur, non plures habet dimensiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. scire non sit necesse, cujusnam illa sequentium formularum existat.

$$xx - ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax - bc \infty 0$$
$$xx - ax - bc \infty 0.$$

Etenim positâ $xx, px, q \infty 0$, si px statuatur pro 2^{do}, & q pro ultimo termino, erit semper $x \infty -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

4 *Exemplum.*

Porrò quoniam æquationes omnes quatuor dimensionum reduci possunt ad æquationes trium dimensionum, & in omnibus quidem æquationibus secundus terminus tolli potest, ostendendum solummodo restat, quo pacto divisores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur, tantùm 1 & 3 dimensiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio $x^3 \infty * qx.r$.

In qua x designet quantitatem, cujus valor quæritur; q & r autem quantitates cum suis signis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Esto etiam $x \infty y + z$

Eritque $x^3 \infty y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 \infty qx + r$.

Ex hac autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$3zyy + 3zzy \infty qx$, & $y^3 + z^3 \infty r$

div. per $y+z$. fit $3zy \infty q$ vel $y^3 \infty r - z^3$

$$y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \infty \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3},$$

& $y^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$, quia $y^3 \infty r - z^3$

$$\text{vel } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \text{ quia } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$\& \; x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

quia $x \infty z + y$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipſius x reperitur ſignum 8, & in ſecunda ſignum contrarium 8, atque quantitates per ea conjunctæ omnino eædem exiſtunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipſius x, duæ illæ partes ſimul addi debent; poterunt ipſa determinari, ponendo pro uno $+$, & pro altero $-$, ita ut habeatur

$$x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis x, licebit ipſius beneficio æquationem, ſi reducibilis ſit, in duas rationales dividere: quoniam tunc $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ extrahi poterit, excepto tantùm, quando quantitate q ſigno $+$ adfectâ, $\frac{1}{4}rr$ minor eſt quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi difficultas aliqua ſupereſſe videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hiſce extractione; ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex binomio literali inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium aſſumere liceat, &c.

Quanquam autem ſæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæſitum per aliquam ex aliis Regulis faciliùs inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præſertim in æquationibus numeralibus, ubi diviſores ultimi Termini complures exiſtunt aut difficiles ſunt inventu, cum fructu uſurpari.

Quibus præmiſſis, potero generalem Regulam commodiùs exprimere, quæ talis eſt:

Si in æquatione Propoſita, quæ in duas alias rationales eſt diviſibilis, quæratur valor quantitatis incognitæ

vel

vel alicujus alterius , quæ ut incognita consideratur, poterimus ipsam aut dividere (sicut in 1^mo^ exemplo); aut fractionem inde ortam per communem aliquem divisorem abbreviare (sicut in 2^do^ exemplo) aut denique radicem quadratam (sicut in 3^tio^ exemplo) aut radicem cubicam extrahere, excepto tantùm, ut diximus, uno casu, ubi q designat quantitatem signo $+$ adfectam, existente $\frac{1}{4}rr$ minore quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æquationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri possit. Hanc verò eandem esse, vel hinc evidens fit, si ex illa sola conficiamus hasce quatuor: quippe ponendo quantitates q & r signo $+$ adfectas esse, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx+r$,

$$x \propto \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q designet quantitatem signo $+$, r autem quantitatem signo $-$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx-r$, (mutando tantùm in Regula signa, quæ ipsi r impares dimensiones habenti præfiguntur)

$$x \propto \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q designet quantitatem signo $-$, & r signo $+$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx+r$, (mutando signa, quæ ipsi q impares dimensiones habenti præfiguntur)

$$x \propto \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Denique si q & r signo $-$ sint adfectæ, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx-r$, (mutando signa, ut supra)

$$x \propto \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Et nota, quòd eodem modo operando similes regulæ pro altioribus æquationibus inveniri possint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, trium vel

quatuor dimensionum est, aliquando paulò longior sit, præstat tum ejus loco vigesimâ Regulâ uti, per quam omnes casus trium vel quatuor dimensionum, nullo excepto, reduci possunt; Vel etiam regulâ 17, ubi non adstringeris æquationibus quatuor dimensionum, sed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam omnem Propositam rationalem æquationem, quæ per aliquam rationalem divisibilis est, si modo aliqua litera, quam libuerit, tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ considerentur.

3. Sæpe autem satis breviter Reductio æquationum, quæ tantummodo per irrationales reduci possunt, inveniri potest. exempli gratiâ, si habeas hanc æquationem,

$$\begin{array}{llll} x^4 - 2ax^3 & + 2aaxx & - 2a^3x + a^4 \infty 0 \\ & - cc & \end{array}$$

$$\text{vel } x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$$

addas utrimque quantitatem aliquam per xx multiplicatam, (cum ab altera parte habeas cc in xx) talem nempe ut $\sqrt{}$ quadrata ex altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies esse $+aaxx$, ideoque utrimque hac $+aaxx$ addita, & radice quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \infty x\sqrt{aa + cc}$$

atque ideo Proposita æquatio ex multiplicatione duarum sequentium æquationum resultare poterit

$$\begin{array}{lll} xx & - ax & + aa \infty 0. \\ & - \sqrt{aa+cc} & \\ xx & - ax & + aa \infty 0. \\ & + \sqrt{aa+cc} & \end{array}$$

4. Magnum quoque usum habent aliæ quædam Regulæ, tam in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantummodo per irrationales reduci possunt. ex.gr. per 11 Regulam, omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantùm ex duabus aliis per multiplicationem produci possunt, in quarum alterutra, unus pluresve termini deficiunt, si æquatio consideretur secundùm incognitam quantitatem, sed etiam si tantùm quævis alia litera, sive cognita, sive incognita, reperitur, quæ ut incognita consideratur, & æquatio secundùm illam in ordinem redacta talis sit, ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus plu-

pluresve termini deficiunt. ſic quamvis ſequens æquatio 6 dimenſionum

$$
\begin{array}{llllll}
 & x^3 - 2axx & + 3abx & + 6a^3 & \infty\, 0 \\
 & & & + 6abb & \\
\text{per} & x^3 + 2axx & + 4aax & - 4a^3 & \infty\, 0 \\
 & \quad + 2ab & & - 8b^3 & \\
\hline
\end{array}
$$

Product. x^6, &c.

produci non poſſit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, ſi ſcilicet x ut incognita quantitas conſideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, ſi vel a vel b ut incognita quantitas conſideretur, ut ex æquationibus, ex quibus producta eſt, patet; ac proinde æquatio illa Propoſita per XI Regulam reduci poterit.

Hîc ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in ſequentibus gradu ad finem, quem jam dudum deſidero, feſtinabo.

Diverſas adhuc alias Regulas in paratu habeo, quas hîc ſimul adjungerem, ſi non aliquid in futurum reſervare animus eſſet: Nimirum inter cæteras una eſt, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationalibus produci poſſunt, ad eaſdem reduco, non cognitis diviſoribus ultimi termini; item alia, per quam ſæpe literales æquationes reduco, quæque in eo conſiſtit, quòd unam aut alteram literam ponam ∞ 0, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, & quòd hanc æquationem inde reſultantem priùs reducere coner, & poſtea etiam Propoſitam per hanc. Exempli loco adjungam hanc

REGVLAM,

Quâ omnes rationales æquationes, quæ nullas fractiones continent & reduci poſſunt, reducuntur, ſi ponendo unam aut plures literas ∞ 0, aut ∞ alii quam libuerit quantitati, talis inde æquatio reſultet, quæ una tantùm dimenſione minor & irreducibilis ſit.

Ex. gr. habeatur hæc æquatio

$$
\begin{array}{lll}
x^3 - 5axx & + 6bbx & - 18abb \,\infty\, 0, \\
 & - 9bc & - 9a^3 \\
 & - 9aa & + 27abc
\end{array}
$$

in

in qua si a ponatur ∞ o, exsurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx \infty 0$$

seu $xx + 6bb - 9bc \infty 0$, quæ non potest reduci.
Regula verò per quam reductionem Propositæ æquationis jam instituo, talis est:

Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, si non ex diversis partibus aut Membris constet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino signis + vel — cæteris connectuntur) *vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit,* (quemadmodum hîc per $+ 6bb$, vel $- 9bc$) *omnia Membra ultimi termini Propositæ æquationis, quæcunque per illud dividi possunt, atque illud quotiens, sive unum sive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc summam Proposita æquatio dividi poterit.*

Vt in hoc exemplo, dividendo $- 18abb$ per $+ 6bb$, exsurgit quotiens $- 3a$, quod additum ipsi x, quia in Proposita æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per $+ 6bb$ sit divisibile, exsurgit $x - 3a$, quod Propositam æquationem dividere poterit. Vel si alterum exortæ æquationis Membrum assumptum fuisset, nimirum $-9bc$, similiter prodiisset $-3a$, quia solum $+ 27abc$ inter Membra ultimi termini in Proposita æquatione reperitur, quod per $- 3a$ dividi potest.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono ∞ o, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, non tantùm rationales literalium æquationum radices, sed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri possint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices investigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo asscribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quæ alia est, quàm quæ in 21 Regula ostensa fuit.

Hactenus æquationes absolutè tantùm consideravi, nunc superest, ut eas etiam relativè, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, considerem.

Sed priusquàm hoc aggrediar pauca quædam de iis Regulis, quas hucusque tradidi, dicenda restant. Illæ verò sunt duorum generum, quædam enim aliquibus in casibus docent Propositam æqua-

æquationem *vel non esse reducibilem*, *vel inquantum*, *vel per quales non sit reducibilis*, ut Regula 1, 2, 12, 13, & 14, & 15. quædam etiam docent, *quo pacto æquationes reduci debeant*, *quas scimus reducibiles esse*, *vel per aliquam in qua aliquis terminus datus*, *aut* ∞ 0 *est*, quales sunt 9 & 11, *vel per aliquam rationalem*, ut sunt 16 & 17, *vel denique per alias*. Sed quia sæpe latet, utrum Proposita æquatio, vel quæ ex Problemate quodam educta est, reducibilis sit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo observandus est. Et quem harum Regularum respectu optimum judico, talis est: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio sit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut saltem magna ex parte; adeò, ut multi labores tali in casu præscindantur. At si hoc non ita appareret, transirem ad Regulam XI, (imprimis si Vltimus æquationis terminus multos divisores, vel qui inventu difficiles sint, admittat, vel si æquatio surdas quasdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci possunt, quæ divisibiles sunt ope alterius in qua una aut plures quantitates desunt, sive æquationem in ordinem redigas respectu incognitæ, sive respectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita consideratur.

Et sic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci possunt. Si verò nec hoc pacto succedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Possunt etiam hîc quædam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur sitne aliqua æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quam quidem in præsentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.

Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio est deducta, multa adhuc dici possent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) *Inventione*, quâ omnes aut saltem multæ Reductiones rescindi queunt; quàm *de aliis Reductionibus*, *quæ sæpe illis supra descriptis breviores existunt*. Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematis multos esse, eosque diversos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimensionum æquationem, si hunc, quàm si alium modum sequaris, perveniendi. Imò non tantum diversâ, sed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurium aut pauciorum dimensionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantùm multum laboris inveniendo postremam æquationem præteribis, sed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, si ad altiores æquationes delabaris, quærendæ essent, rescindes.

Quod alterum spectat, ejus à me specimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinatarum circulo inscriptarum inveniuntur, in eo nempe consistens, quòd cum ultimam æquationem, quæ omnes Problematis conditiones includit, habeas, præterea adhuc aliam, sed aliâ methodo, investiges, quæ itidem omnes conditiones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipsas à se invicem tam diu, quàm fieri possit, subtrahas, vel quod eodem redit, earum communem divisorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus satis fusè ostendi.

Vide Sectionem XXI tuarum Exercitationum Mathematicarum.

Et hujus Methodi utilitas se longè lateque diffundit, præsertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimensiones excurrunt. Nam sæpe numero, si earum reductionem per præcedentes Regulas investigares, ætatem consumeres, quod alioquin, si hanc viam sequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento absolvere posses.

Cum igitur utrumque & Reductiones in principio in totum vel ex parte rescindendi, & eas in multis casibus adhuc compendiosiùs quàm per præscriptas Regulas inveniendi, majoris momenti sit, quàm ut hîc dignè pertractari possit; atque ego etiam scribendo, tu verò legendo, defessi simus: præstat, ut hîc subsistamus atque aliquantulùm respiremus, reliquâque opportuniori tempori reservemus.

Interim vale & me ama.

Datum Amstelædami Pridie Iduum Iulii A° 1657.

10-

IOHANNIS HVDDENII EPISTOLA SECVNDA, *DE* MAXIMIS ET MINIMIS.

Clarissime Vir,

Quod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales., atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \propto 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \propto 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0$$

in qua etiam duæ radices æquales comprehenduntur, videlicet $x \infty y$, ac denuo $x \infty y$. Vel si illam multiplicassemus per $xx + 2yx + yy \infty 0$, obtinuissemus duas falsas radices æquales: utcunque autem hæc multiplicatio fiat, si pro y ponatur ejus valor, habebitur

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, seu, quod eodem redit, $+1, -2, +1$ (quoniam dividi potest per xx, & multiplicatores x^3, pxx, qx, & r nullam mutationem efficiunt) multiplicetur per Arithmeticam Progessionem: erit productum hujus multiplicationis $\infty 0$.

Nam

$$\begin{array}{llll} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a+b, & a+2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a-2b, & +a+2b \\ \text{seu} & +2a-2a, & +2b-2b \infty 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a-b, & a-2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a+2b, & a-2b \\ \text{seu} & 2a-2a, & +2b-2b \infty 0. & \end{array}$$

Hucusque universaliter consideravi omnes æquationes, duas æquales radices habentes, quomodocunque ipsæ proponantur, hoc est, sive in iis termini quidam desint sive non, ut & quomodocunque signa + & — sese habuerint. Quod manifestum erit consideranti nobis solummodo rem esse cum hisce numeris $+1$, -2, $+1$, non autem cum multiplicatoribus x^3, pxx, qx, & r.

Similiter respectu Arithmeticæ Progressionis res etiam generalis manet, quandoquidem duo priores termini a, $a+b$, & a, $a-b$ indeterminati sunt. Quod restat, ex sola inspectione præcedentis exempli, conferendo duas sequentes multiplicationes, perspicuum fiet.

$$\begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ \underline{xx - 2xx + xx \quad \infty 0} \\ \left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0; \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ \underline{xx - 2yx + yy \quad \infty 0} \\ \left.\begin{array}{llllll} x^5 - 2yx^4 + yyx^3 & & & & & \\ \quad + px^4 - 2pyx^3 + pyyxx & & & & & \\ \qquad + qx^3 - 2qyxx + qyyx & & & & & \\ \qquad\quad + rxx - 2ryx + ryy & & & & & \end{array}\right\} \infty 0, \end{array}$$

Mult. per $a.\ a\ 8\ b.\ a\ 8\ 2b.\ a\ 8\ 3b.\ a\ 8\ 4b.\ a\ 8\ 5b.$

Nam

Nam quoniam hæc producta $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$, & $xx - 2xx + xx$ in x^3 eadem existunt, erit etiam $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multiplicatum per $a, a \; 8 \; b, a \; 8 \; 2b$ æquale o; sic &, quoniam $+ px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ idem est quod $xx - 2xx + xx$ in pxx, erit quoque $px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ multiplicatum per $a \; 8 \; b, a \; 8 \; 2b, a \; 8 \; 3b$ (siquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progressionis ad libitum sumi potest) æquale o; atque sic deinceps. Vnde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc seriem proportionalium sit ∞ o, nec non ut unus valor ipsius $x \infty y$, quæ una duarum radicum æqualium est, necessariò includatur. Et cum hîc rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propositum Theorema universaliter demonstratum de quibuscunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, & ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmeticam Progressionem multiplicari poterit. Quòd si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, & sic porrò, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantùm istarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonstrato, transeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ sic se habet.

Positis quotcunque quantitatibus Algebraïcis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ ∞z; & ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: & Pro-

 ductum

ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeò facile est, ut huic rei ulteriùs insistere nihil aliud sit, quàm operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est. Particulares verò, quas antehac in aliquibus exemplis vidisti, hinc resultant. quemadmodum ex subjunctis operationibus, utroque modo factis, perspicere licebit.

1. *Cùm Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur*, multiplico tantùm unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & suppono Productum ∞ o.

Ex.gr. sit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ ∞ alicui maximo.

mult. per $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x$ ∞ o, vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c}$ ∞ o.

Iuxta generalem Methodum erit

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \;\infty\; o.$$
$$- z$$

mult. per Arithm. Progr. $\quad 3. \quad 3.2. \quad 1. \quad o.$

& fit, ut ante, $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x$ ∞ o, seu

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \;\infty\; o.$$

2. *Si Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, unam tantùm incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur*, operatio institui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitas. Deinde si reliquæ quan-

quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatus dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul ∞ o, ut ex sequentibus exemplis clariùs patebit.

1 *Exemplum.*

Esto $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \infty$ alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ ab, reliquisque terminis sub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$$\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4.}{x^3}$$

Mult. num. per $\underline{-3, \ -2, \ +2, \ +1, +1}$:

fit $-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$ mult. per $x^3 \infty$ o.

&, dividendo per x^3,

$$-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4 \infty \text{ o.}$$

Iuxta generalem Methodum

est $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx \begin{array}{l} + ab \\ - z \end{array} \infty$ o,

id est, $4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4 \begin{array}{l} + abx^3 \\ - z \end{array} \infty$ o;

Seu, ordinatâ æquatione, $x^5 \begin{array}{l} - ax^4 \\ + b \end{array} \begin{array}{l} + abx^3 \\ - z \end{array} * + 5a^3x + 4aab^3 \infty$ o.

$$\begin{array}{cccccc} +2, & +1, & 0, & -1, & -2, & -3 \\ \hline 2x^5 & \begin{array}{l} - ax^4 \\ + b \end{array} & * & * & -10a^3x & -12aab^3 \infty \text{ o.} \end{array}$$

2 *Exemplum.*

Esto $\frac{baax + aaxx - bx_3 - x_4}{baa + x^3} - a + x \infty$ alicui maximo,

De-

Deletâ quantitate cognitâ a, & reliquis ſub communi diviſore reductis, habebitur $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Porrò pro } \overset{+1,\ +2,\ +3}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3}{baa}}, \text{ ſcribo } 2baax + 2aaxx - 3bx^3 \text{ in } baa \\ \text{pro } \overset{-2,\ -1,\ 0}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3}{x^3}}, \text{ ſcribo } -4baax - aaxx \quad \text{ in } x^3 \end{array} \Bigg\} \infty\, o$$

$$\text{Diviſis per } aax, \text{ habebitur } \left.\begin{array}{ll} \overline{2baa + 2aax - 3bxx} & \text{in } b \\ \overline{-4bx - xx} & \text{in } xx \end{array}\right\} \infty\, o$$

$$\text{adeoque } -x^4 - 4bx^3 - 3bbxx + 2aabx + 2bbaa \infty\, o.$$

Sic & ſi fuerit $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3aax - c^3} \infty$ alicui maximo,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pro } \overset{-2,\ -1,\ 0,\ -3}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3}}, \text{ ſcribo} & -4baax - aaxx - 3a^4 \text{ in } 4x^3 \\ \text{pro } \overset{-1,\ 0,\ +1,\ -2}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{2bxx}}, & -2baax - bx^3 - 2a^4 \text{ in } 2bxx \\ \text{pro } \overset{0,\ +1,\ +2,\ -1}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-3aax}}, & +aaxx - 2bx^3 - a^4 \text{ in } -3aax \\ \text{pro } \overset{1,\ 2,\ 3,\ 0}{\dfrac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-c^3}} & +2baax + 2aaxx - 3bx^3 \text{ in } -c^3 \end{array}\right\} \infty\, o.$$

Iuxta generalem Methodum

$$\text{eſt } \frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty\, z$$

$$\text{vel } \overline{2baax + aaxx - bx^3} \infty \overline{baaz + x^3z}$$

$$\text{ſeu } \begin{array}{l} -bx^3 + aaxx + 2baax - baaz \infty\, o \\ -z \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Arith. Prog. } \quad 3 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 0 \\ \overline{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax} \infty\, o, \text{ hoc eſt,} \\ -3z \end{array}$$

$$\frac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} \infty\, z$$

$$\text{ac proinde } \frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$$

&, ut ſupra, $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \infty\, o$.

Patet

Patet itaque, duas has ſpeciales Regulas in generali illa Methodo eſſe fundatas reſpectu hujus Progreſſionis 0, 1, 2, 3, 4, &c. multiplicando ſcilicet terminum, in quo incognita quantitas x non reperitur per 0; ubi x unam habet dimenſionem per 1; & ſic porrò. Sed in genere notandum, quòd, dum operando juxta generalem Methodum Progreſſionem illam Arithmeticam ad libitum ſumere licet, ſemper is terminus æquationis, quem libuerit, tolli poſſit, multiplicando illum tantùm per 0. Atque ita valor ipſius z per unam Progreſſionem ſimpliciùs obtineri poterit, quàm per aliam: ut, ſi in præcedenti exemplo, ubi multiplicavimus per 3, 2, 1, 0, multiplicaſſemus per 0, 1, 2, 3, obtinuiſſemus $aaxx + 4baax - 3baaz \infty 0$, ſeu $\frac{xx + 4bx}{3b} \infty z$.

Vnde apparet, ipſam quantitatem z (ſive maximum vel minimum), ſi x cognita ſupponatur, inveniri atque exprimi poſſe multis diverſis modis, è quibus faciliores pro Conſtructione eligere licebit: Aut ſi z cognita ſupponatur, poterit x totidem diverſis modis inveniri. Porrò conſiderando z & x, ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam æquationem inſtituere inter duos ex ſimpliciſſimis valores: ut, in ſuperiori exemplo, inter $z \infty \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $z \infty \frac{xx + 4bx}{3b}$.

3. *Si termini Algebraïci, Maximum aut Minimum deſignantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt*, ſuppono ipſos ∞z; & per hanc æquationem & per cæteras datas, ſeu quæ ex natura Problematis manant, (quæque ſemper ſimul, ſi omnes Problematis conditiones includunt, tot numero exiſtunt, quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum ſi unum tantùm Maximum aut Minimum inter infinitas magnitudines quæritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æquationes omnes ad unam, in qua neceſſariò duæ quantitates incognitæ continebuntur, & inter eas z. Cumque tunc ſola z ad Maximi vel Minimi inventionem nota eſſe debeat, manifeſtum eſt in eum finem duntaxat concipiendum eſſe, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercitationum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantùm quòd Maximùm hîc appellem z, & quod ibi z nominatum est, hîc appellem v.

1^{ma} Æq. $y^3 - nyx + x^3 \infty 0$

2^{da} Æq. $v - x \infty y$

3^{tia} Æq. $\frac{1}{2}v - y \infty z$ maximo.

Substituto valore ipsius y $2^{dæ}$ æquationis in locum ipsius y $1^{mæ}$ & $3^{tiæ}$, habebitur

pro 1^{ma} Æq. $v^3 - 3vvx + 3vxx \infty vnx - nxx$

& pro 3^{tia} Æq. $x \infty z + \frac{1}{2}v$.

Subrogato autem valore ipsius x $3^{tiæ}$ æquationis in ejusdem locum in 1^{ma}, fiet pro

1^{ma} Æq. $\frac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \frac{1}{4}nvv - nzz$

vel $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$.

Atque hæc quidem æquatio jam sola relicta est, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis satisfiat, hoc est, ut ea ita determinetur, ut z fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) eandem æquationem

$$\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$$

per Arith. Prog. $3, \quad 2, \quad 1, \quad 0:$

obtineoque $\frac{3}{4}v^3 - \frac{1}{2}nvv + 3zzv \quad * \quad \infty 0$

vel $3zz \infty \frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv$.

Hinc subrogato valore ipsius zz, per hanc æquationem invento, in ejus locum in præcedenti $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, obtinebitur $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + \frac{1}{2}nvv - \frac{3}{4}v^3 + \frac{1}{6}nnv - \frac{1}{4}nvv \infty 0$

hoc est, $-\frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{6}nnv \infty 0$

vel $vv \infty \frac{1}{3}nn$.

Si Arithmetica Progressio fuisset $0, 1, 2, 3$, invenissemus $3zz \infty \frac{nvv}{8v+4n}$; si $2, 1, 0, -1$, habuissemus $3zz \infty \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$

Et sive valor ipsius zz, per utramlibet harum æquationum inventus, in præcedenti subrogetur æquatione $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, sive alter alteri adæquetur, ponendo $\frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv \infty \frac{nvv}{8v+4n}$, vel $\infty \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$, obtinebitur semper $vv \infty \frac{1}{3}nn$.

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hîc parùm inter

inter se differant, potest tamen sæpe numero, ut supra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior sit quàm alia, quo quidem casu commodiorem viam, quæ facilè perspicitur, eligere satius erit.

Cæterùm notandum, ultimam hanc æquationem $\frac{1}{4}v^3 + 3\,v\,z\,z \infty \frac{1}{4}n\,v\,v - n\,z\,z$ determinari etiam posse per secundum modum præcedentem. Etenim existente $z\,z \infty \frac{\frac{1}{4}n\,v\,v - \frac{1}{4}v^3}{3\,v + n}$, & $z \infty$ maximo: erit etiam hic valor ipsius $z\,z$ omnium maximus, ideoque

$$\text{div. per } v\,v.\; \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}n\,v\,v - \frac{2}{4}v^3 \text{ in } 3\,v \\ \frac{2}{4}n\,v\,v - \frac{3}{4}v^3 \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{vel } \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}n - \frac{2}{4}\,v \text{ in } 3\,v \\ \frac{2}{4}n - \frac{3}{4}\,v \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0, \text{ id est, } \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}n\,v - \frac{6}{4}v\,v \\ \frac{2}{4}n\,n - \frac{3}{4}n\,v \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{vel } \frac{2}{4}n\,n - \frac{6}{4}v\,v \infty\, 0$$

$$\text{seu } \frac{1}{3}n\,n \infty v\,v.$$

Quoniam verò in multis casibus æquatio ultimò relicta non sinit ut valor ipsius z vel $z\,z$, aut z^3, &c. in ejusmodi terminis, in quibus ipse z non invenitur, exprimi possit, visum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hîc, Vir Amicissime, multa adhuc dicenda restarent, sed ne rursus epistola mea voluminis instar se extendat, scriptionis meæ filum abrumpam; præsertim cum id, quod hîc desideratur, non difficile sit ex præcedentibus colligere. At verò ne te lateat, quid hîc desiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus adornavi, quemque nuper obiter & quasi per transennam inspexisti. In eo autem pertractantur

1. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraici, Maximum vel Minimum designantes, considerantur

1. *Vel respectu cognitionis nostræ, sic ut certi simus in iis Maximum esse comprehensum, si aliquod detur Maximum; aut Minimum, si aliquod Minimum detur.*

Termini autem hi Algebraïci in se continent

Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem

1. *Vel fractionem nullam, in cujus Denominatore incognita reperitur quantitas.*
2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipsa reperitur.*

Vel plures unâ incognitâ quantitate, quæ duplices sunt

1. *Vel tot simul cum iis æquationes dantur, seu in natura Problematis includuntur, quot sunt incognitæ quantitates una exceptâ;*
2. *Vel non totidem, aut etiam nullæ.*

2. *Vel respectu nostræ inscientiæ,* id est, cùm incerti sumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur, ipsos autem rursus considero vel *absolutè*, vel *relativè* ad aliquod Problema.

2. *Ejusdem usus atque utilitas,* quæ quidem se longè lateque extendit, ac præsertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari possunt. Cujus exemplum illustre est *Determinatio omnium æquationum*, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantùm corollarium existit.

Vale, Vir Amicissime, & me amare perge.

Dabam Amstelædami
6 Cal. Februar.
A° 1658.

Tui

Observantissimum

IOHANNEM HUDDE.

FINIS.

HENRICI van HEVRAET EPISTOLA DE TRANSMVTATIONE CVRVARVM LINEARVM IN RECTAS.

Clarissimo Viro
D. FRANCISCO à SCHOOTEN
HENRICVS van HEVRAET
S. D.

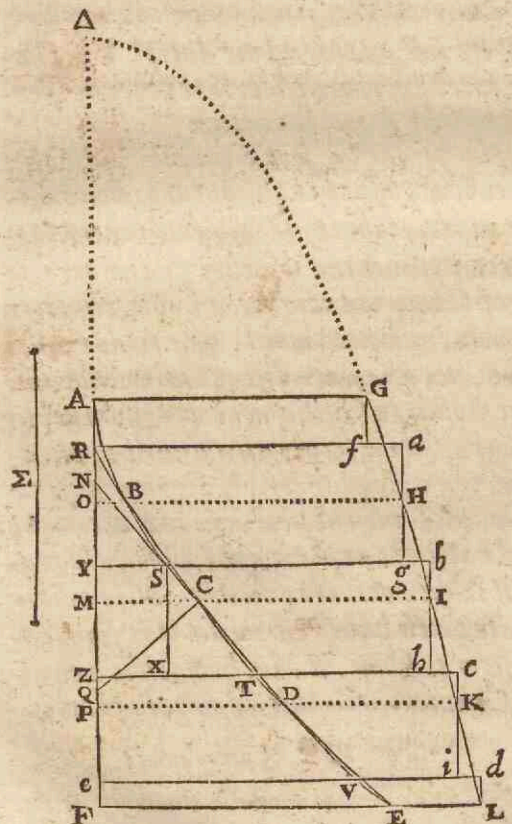
CVm nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videndi Methodum à me inventam, cujus beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit D. Huddenius) *in rectas possunt transmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocyùs transmitterem, tuoque inprimis judicio exponerem. Verùm præmonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam esse, cùm iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui, adeò ut vix quicquam prælo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quæ ante circa hanc rem meditatus sum, eaque paucis hîc subjicere. Quæ, si Mathematicis non displicitura judices, Commentariis tuis adjungere poteris.*

Dat. Salmurii, die 13 Ianuarii. A°. 1659.

Vale, & perge amare
ex asse tuum
HENRICVM van HEVRAET.

Huddenius *noster te salutat diligenter.*

Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratia, A B C D E, G H I K L, & recta A F, ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto M, in linea A F pro libitu assumpto, perpendiculari M I, secante datas curvas in C & I, uti & C Q perpendiculari ad curvam A B C D E,) M C sit ad C Q, sicut linea aliqua data Σ ad M I: erit superficies A G H I K L F æqualis rectangulo comprehenso sub data linea Σ & alia recta æquali curvæ A B C D E.



Dividatur linea A F in partes quotcunque, verbi gratiâ, in punctis O, M, & P, ducanturque perpendiculares O H, M I, P K, secantes curvam A B C D E in punctis B, C, & D, at curvam G H I K L in punctis H, I, & K; & per puncta A, B, C, D, & E agantur tangentes, quæ sibi mutuò occurrant in R, S, T, & V; & per hæc puncta ducantur lineæ R *a*, Y *b*, Z *c*, *e d* perpendiculares ipsi A F; & per puncta G, H, I, K, & L agantur lineæ ipsi A F parallelæ, secantes R *a* in *f* & *a*, Y *b* in *g* & *b*, Z *c* in in *h* & *c*, *e d* in *i* & *d*; denique ex S ducatur SX parallela lineæ AF, producaturque tangens TS usque in N.

Propter rectum angulum NCQ, erit CM ad CQ, ut MN ad NC. Atqui MN est ad NC, ut SX ad ST. Quare erit SX ad ST, ut CM ad CQ. Et quia CM est ad CQ, ut Σ ad MI, erit & SX ad ST, ut Σ ad MI, ac proinde rectangulum sub SX sive YZ & MI sive Y*b* æquale rectangulo sub ST & Σ. Eodem modo demonstrabitur, rectangulum *ce* esse æquale $\square^{lo}$ sub TV & Σ, & $\square$ *d*F ∞ $\square$ VE, Σ, & $\square$ *a*Y ∞ $\square^{lo}$ sub RS & Σ. Quapropter omnia hæc rectangula simul sumpta æqualia erunt rectangulo sub Σ & alia recta æqualia omnibus tangentibus simul sumptis. Vnde cum illud verum sit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis constans, si eorum numerus in infinitum augeatur, desinat in superficiem AGHIKLF, ac tangentes similiter in lineam curvam ABCDE, liquet superficiem AGHIKLF æqualem esse rectangulo sub Σ & recta æquali curvæ ABCDE. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ investigari possit, sequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva ABCDE ejus naturæ, ut, sumpto in linea AF pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari MC, si AM vocetur x, & MC vocetur y, semper yy sit $\infty\ \frac{x^3}{a}$. Deinde positis AQ $\infty\ s$, CQ $\infty\ v$, & MI $\infty\ z$: erit QM $\infty\ s - x$, & ejus quadratum $\infty\ ss - 2sx + xx$. Cui si addatur quadratum ex MC, hoc est, yy sive $\frac{x^3}{a}$, invenietur $ss - 2sx + xx + \frac{x^3}{a} \infty\ vv$.

Propter duas æquales radices mult. juxta meth. Huddenii per

$$\underline{\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0,}$$

$$\&\ \text{invenietur}\ -2sx + 2xx + \frac{3x^3}{a} \infty\ 0.$$

Vnde AQ sive $s \infty\ x + \frac{3xx}{2a}$. à qua si subtrahatur AM $\infty\ x$, remanebit MQ $\infty\ \frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum est $\frac{9x^4}{4aa}$. cui adde $\square$ CM seu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet $\square$ CQ $\infty\ \frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}$. Erit jam ut CM $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ad CQ $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licet

enim

enim eam pro libitu assumere) ad MI ∞ z, eritque $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$. Id quod arguit, lineam G H I K L esse Parabolam, cujus vertex est in $\triangle$, existente A$\triangle \infty \frac{4}{9}a$, & latere recto $\infty \frac{1}{4}a$. ac proinde longitudo lineæ curvæ A B C D E est $\sqrt{\frac{v^3}{a} - \frac{8}{27}a}$, existente $\triangle$F ∞ v.

Similiter si loco $yy \infty \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, aut $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, atque sic porrò in infinitum: invenietur semper superficies A G H I K L F ejus naturæ ut quadrari possit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò A B C D E sit Parabola, cujus axis A G, & latus rectum ∞ a: invenietur M Q $\infty \frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum $\infty \frac{4x^6}{a^4}$. cui adde quadratum C M, & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro $\square$ C Q. Hinc ut C M $\frac{xx}{a}$ ad C Q $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, sic cognita aliqua linea, puta a, ad MI ∞ z: eritque $z \infty \sqrt{4xx + aa}$, & linea G H I K L Hyperbola, cujus axis linea A G, centrum punctum A, latus rectum $\infty \frac{1}{2}a$, & transversum ∞ 2 a.

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non posse, quin simul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vice versâ.

FINIS.