Geometria

RENATI DES-CARTES GEOMETRIÆ

PARS SECVNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

CATALOGVS

eorum,

Quæ in hâc secundâ parte continentur.

LECTORI BENEVOLO
I. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epiſtolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me ſuſcepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi conſtaret, num quædam nimis obſcurè expreſſa eſſent, vel etiam errata irrepſiſſent; Quæcunque inveni, illa ſunt quæ ſequuntur.

Ad clariorem ſenſum.

p.424 l.15. *Excepto* &c. Cum $x - a \infty 0$, multiplicatur per $b - c$, reſultat $bx - cx - ab + ac \infty 0$, ſeu $x \infty \frac{ab - ac}{b - c}$; ſi ponas jam $b - c \infty 0$, non ſequitur valorem x per hanc æquationem non poſſe inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi poteſt, ſed tum ſequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi poteſt, vel cum ambo per eandem quantitatem indiviſibiles ſunt: Notandum ergo eſt Denominatorem hic conſiderari ſine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex ſequentibus, 1°. *Obſervandum venit num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant.* Sed hæc omnia fortaſſis clarius ſic intelligentur. Excepto tantum ſi æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita ſit ab una parte, reliqui, qui ab altera ſunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris diviſor aliquis, Nominatorem dividat, quod ſi contingat, videndum eſt, priuſquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem diviſorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominatorem, vel Denominatoris diviſorem aliquem, diviſibilis ſit. p. 459. l. 10. vel ſic lege, æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x, x^3, x^5, &c., 8, vel per xx, x^4, x^6, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates* pone omnia membra. p.492, l.13. pro *Regula*, ſcribe Methodo. p.451 & 456, l.1. lege, nullus terminus eſt $\infty 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ *extrahi poterit*; ſcribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$. & pro, *ſed cum* $\sqrt{C}$ *&c.*, uſque ad, *liceat &c.*; pone, ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p.389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod ſufficit, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex æquatione Propoſita ſive numerali, ſive literali ſit, inveniri, cum pro literis numeros, vel o, ad arbitrium aſſumere liceat. p. 502, l.31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic ſumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Propoſita æquatio produci poteſt. Errata, quæ irrepſerunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas eſt me, non ſine admiratione, in Epiſtolis meis, quæ tam ſedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores oſtendiſſe, niſi cogitarem D. Elzevirios & Clariſſimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuiſſe, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impreſſum ſit, quam quis fortaſſis exſpectaſſet.

C A R M E N

IN LAUDEM

FR. à SCHOOTEN,

Mathematicorum ocelli.

SCotenI cum scripta legis, se promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores spectas, se præbet ubique
Spectandam integritas, ac sine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum sit superabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

ΠΕΡΙ'

ΦΡΑΓΚΙ'ΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗ'ΝΟΥ,

τοῦ μακαρίτου,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Ὁδοιπόρου.

Μαθ. Τί κλαίεις; σφετέρους τί νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαύδα, καὶ μὴ κεῦθε νόῳ, Εὐσεβίη)
Ἠδ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἐέσσαο; χώματι τούτῳ
Ἤματα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη;
Εὐσ. Θυμήρης μοι υἱὸς ἀπώλετο, φέρτατος ἀνδρῶν,
Ὃς Σοφίην θείην μῖξε ταπεινοσύνῃ.
Τὸν Βαταβῶν Λούγδουνον ἐγείνατο, τόν τε μαθητὴν
Δῶκέ σοι ἐξ ἁπαλοῦ ἀγχίνοον βρέφεος.
Μ. Σκώτηνος; Ε. κεῖνος. Μ. Σκώτηνος; λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσείου γένεος, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτηνος, τὸν ἐμοῖσιν ἴσον φαέεσσι φίλησα,
Ἠδέ μ' ὑπὲρ πασῶν ἀντεφίλησε θεῶν·
Ὃς πόρεν ἀμφ' ἀπόρων, αἰεὶ φάτιας σκοτεινὸν
Συμμύσας, ζοφερῷ κεῖται ἐνὶ σκότεϊ;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κεῖται, πᾶσιν μερόπεσσι φαεινός,
Οἷ τε καὶ Εὐσεβίην, καί σε, φίλη, ἐφίλει.
Μαθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεά, κατὰ δάκρυα λείβεις,
Καὶ στέρνον πλήττεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τόπον, οὐχ ὅπως (τὸ πάλαι τάχα ποιησαίμην
Ὅτ' ἂν ἔην πάντων πολὺ μάκαρ μακάρων)
Γαῖαν κινήσαιμι, ἀκίνητόν περ ἐοῦσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, προσιὼν σεῖο προσισαμένη,
Αὐτὴ ἀκίνητος μίμνω, νεκρῆς τε λυπηρὸν
Μνῆμα πέλω Νιόβης πᾶσιν ἐφημερίοις·
Ὁδοιπ. Ὦ θεαί, οὐκ ἔστιν δακρύων ἄλις; οὔποτε νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στοναχαῖς εἰς φάος αὖθις ἔβη.
Ἀλλ' ἴτε, κ' εὐόδμοισι ῥόδοις καταπάσσατε γαῖαν,
Λείρια μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον·
Εὔξασθ', ὥσπερ ἔην μερόπων βαρὺς οὐδενὶ ζωὸς,
Οὕτω καὶ κούφη γαῖα νεκρῷ τελέθῃ.

Μ. ΣΛΑ'ΔΟΣ,
ἰατρὸς Ἀμστελ.

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO

AD

GEOMETRIÆ METHODVM

RENATI DES CARTES,

Conscripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio tertia, priore correctior.

AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

Generis & virtutum Nobilitate Perillustri & Generoso Heroï,

D. CHRISTIANO THOMÆ,
TOPARCHÆ IN STAVGARD,
Equiti Aurato, Serenissimæ Regiæ Majestatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Hafniensis Conservatori summo, Patrono incomparabili.

NOn minùs verè quam eleganter Cicero lib. 1. Tusc. quæst. *Magni*, inquit, *est ingenii revocare mentem à sensibus, & cogitationem à consuetudine abducere.* Cùm enim mens nostra, quam in nobis conclusam circumferimus, divina quædam particula habeatur, nihil sanè illi gratius accidere potest, quàm, cùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique suæ quàm simillima redditur. Sensuum quippe uſurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præſtant; mente verò quia non gaudent, univerſam hanc mundi machinam, quaſi tabulam pictam aſpiciunt, nec cogitant quâ de causâ quóve modo tot varietates rerum ſint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt ſemetipſos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent ſeſe ſenſuum judicio ita mancipari, ut ea ſufficere putent, quæ manibus quaſi palpare poſſunt, ac pauca velint ſi non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ ſenſus non approbant, & pauciſſima eligant, niſi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri poſſumus, hoc propoſitum utile eſſe atque neceſſarium, ut initio juvetur cogitatio noſtra & intel-

intellectus; unde factum eſt, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia ſubſidia invenerint; Sed experimentis ejuſmodi vix acquieſcere debent magna ingenia, nec poteſt is, qui ſapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facilè mereri mentis aſſenſum, & eſſe veriſſima, etiamſi ſenſuum judicio pro veris non agnoſcantur: & vice verſâ, ſenſus quædam approbare; quæ, quia falſa, ratio nullo modo admittere poteſt. Atque hæc licèt omnibus in confeſſo ſint, non deſunt tamen, qui nihil niſi Praxin amantes, Theoriam & ſpeculationes omnes odio proſequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertinaciæ ſuæ ſerò nimis pœnitebit, cùm aliorum imperio ita ſubjecti eſſe coguntur, ut ne in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſasque inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæque uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes penetrare, eaſdemque invenire poſſint; adeoque ſuper-

ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cùm contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuêre, viderent. Ad quæ invenienda cùm non aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ poſtquam innotuit, longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodiêre. Non patitur tempus & lex ſcribendi, ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, ſed etiam Opticam aliasque ſcientias manaverint emolumenta. Nihil enim ſani antehac de viſu novimus, cum omnia hîc, ſicut in aliis artibus, quæ materiæ immerſæ, non abſtrahuntur à ſenſibus, ad directionem mentis, diſputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonſtrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hoſpites ſunt, ſat ſciunt, quàm incerta, quamque defectuoſa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falſa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, deque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantia, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitiùs introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opus mihi eſt, multa coram Te, Heros Periluſtris, de hujus artis totiusque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Matheſis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quiquè varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſura quam-

quamquam ſciam hoc ſcriptum non poſſe notari; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti, faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibusque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quam experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate potius inſtigatus, Tibi hæc conſecrare ſum veritus: & quidem tantâ majore fiduciâ, & ſpe certiore, quantò certius mihi conſtat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia noſtra ſentit, & grato animo ſemper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique conſule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVAE

Scribebam Leidæ, Anno cIↄ Iↄc L. *Calend. Iun.*

Devotiſſimus & obſequentiſſimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.

CUm omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quàm aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quòd non operam dent ejuſmodi ſtudiorum viam ingredi, quâ mens adſueſcat verum à falſis & dubiis diſtinguere. Quandoquidem enim à teneris adſueſcere multum eſt, egregiè ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi, vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſæ variis modis ſeſe habuerint: Adeò ut, etſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis, tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea ſperaretur emolumentum. Quod cum abundè obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quàm quantum noſtrorum ingeniorum acies intueri poteſt; inter alia mirari ſubit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deſeruiſſe. Quippe compertum eſt, antiquos Philoſophos non permiſiſſe, ἀγεωμετρήτους ſcholas ſuas ingredi, ut ad Sapientiæ ſtudium admitterentur, quique ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod ſanè propoſitum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuiſſe cauſam, quòd ad illam pertigerint ſcientiam, quam poſteritas tantopere miratur, & quò virtute ſua nonnulli eniti ſe poſſe deſperant, conjiciam. Fruſtra enim ſpectatur fructus diſciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere *potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices*

dices ſtirpeſque non item : ſic multi ad ſumma pervenire optarent, niſi in elementis hærere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo ſine radicibus, ſtirpibuſque eſſe non poteſt ; ita illi fruſtra ſe in id faſtigium recipi ſperant, quibus cordi non eſt fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita ſint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent ; quid mirum? ſi multi in ipſo limine hæſitaverint, plureſque, quos, re inexpertâ, deſperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctiſſimi ejus Commentatores à ſemetipſis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas ſubtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum ſternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipſo olim, quàm à multis hodie expetita, præſtitum eſſe repererim: diu multumqne inter ſpem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea deſiderari, quæ ad ſcientiarum incrementa emunctioris naris homines neceſſariò requiri jampridem cenſuerunt. Ego ſanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti campos factus, poſtquam ad haſce oras Academiam Illuſtrem, quæ Leidæ eſt, acceſſi, Vir Celeberrimus atque Doctiſſimus Franciſcus à Schooten, Matheſeos ibidem Profeſſor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam induſtriam defuiſſe crediderim. Quocirca ſepoſitâ privati commodi æſtimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis uſibus deſtinaveram, publici juris redderem, de elementis hiſce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido ſemper ſervari optabam, hac ratione violarem ; tamen facilem mihi veniam ſperabam, ſi non niſi officioſa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui ſe bono

publico

publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dni. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Universalis constitutionem animo comprehendisse. neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.

PRIN-

Celeberrimi de Centro Oscillationis problematis solutio.

Viro Sapientissimo salutem dat

STEPHANUS GILLET,

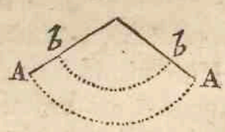
Nulla in re tam irrito conatu laborarunt Viri Clarissimi, quam in centro oscillationis investigando; licet enim quadraginta abhinc annis mathematicus celebris nusquam gentium extiterit ullus, qui huic indagationi accuratissime haud incubuerit, quin etiam plurimi Εὕρηκα *audacter exclamarint; nullos tamen in errores incidit nullus. Næ ego aliena infelicitate minime exterritus, viam adeo expeditam inveni, ut ad scopum optatum recte pervenerim. Quo circa arbitror tibi rebus mathematicis gaudenti non ingratum fore, si hoc arcanum tantopere investigatum exhibuero.*

Centri oscillationis demonstratio.

I. *Definitio.*

Oscillatio est ipsa agitatio penduli sua gravitate circa axem horizonti parallelum moti. V. G. Si pendulum, A, suam agitationem vi gravitatis incipiat in puncto μ. inhibeatque in puncto ν. ipsa agitatio hujus penduli totum arcum $\mu\,\nu$. percurrentis vocatur oscillatio.

II. *Definitio.*



Quorum pendulorum centra gravitatis arcus similes percurrunt, eadem suas oscillationes, similes faciunt, sicut pendula A & *b*.

III. *Definitio.*

Centrum oscillationis est punctum, quod in pendulo composito agitato perinde movetur, ac si nullo modo stipatum foret: ac proinde ſi in extremo penduli ſimplicis reſideret , oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum compoſitum datum. Itaque tota difficultas huc recidit, ut inveniatur longitudo penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficiat , atque pendulum compoſitum datum : nam longitudo hujus penduli ſimplicis eadem eſt , atque diſtantia centri oſcillationis penduli compoſiti ab axe. Qua in inveſtigatione ut mens dirigatur, aliquid de gravitate, ſpatioque decurſo præmittendum eſt.

I. *Lemma.*

Gravia gravitatem habent a levioribus, quæ tantumdem aſcendunt, quantum graviora deſcendunt.

I. *Coroll.*

Hinc colliges mobili ſecundum horizontem moto gravitatem acquiri nullam : Quia nulla leviora aſcendunt.

II. *Coroll.*

Hinc animadvertis mobili circa centrum moto gravitatem acquiri nullam : ideo quod mobile haud magis deprimitur, quam extollitur.

III. *Coroll.*

Hinc vides gravitatem acquiri per ſolam deſcenſionem centri : quippe qui alii motus pro nihilo habeantur; ac proinde incidentiam gravis ſemper eſſe ſpectandam ex altitudine deſcenſionis centri.

IV. *Coroll.*

Hinc perſpicis duorum gravium ex eadem altitudine cadentium, quorum unum perpendiculariter, alterum vero oblique decidit; utriuſque velocitatem eandem eſſe in horizonte, ſive in plano horizonti parallelo : propterea quod gravitas per motum vel circa centrum, vel horizonti parallelum, neque intenditur, neque remittitur.

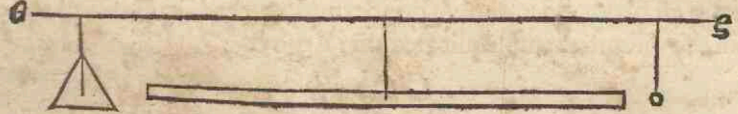
V. *Coroll.*

Hinc manifeſtum eſt velocitatem gravis penſilis, ſive penduli eandem eſſe, atque gravis ex eadem altitudine perp. decidentis : penſile enim nihil aliud eſt, quam grave oblique decidens.

VI. *Co-*

VI. *Coroll.*

Hinc clarum est eandem esse velocitatem in omnibus pendulis quorum centra gravitatis æque distant ab axibus, quandoquidem æqualiter descendunt.



VII. *Coroll.*

Hinc liquet eandem esse velocitatem ejusdem plani tum in planum, tum in latus moti: utpote quod centrum utroque modo æque deprimatur.

II. *Lemma.*

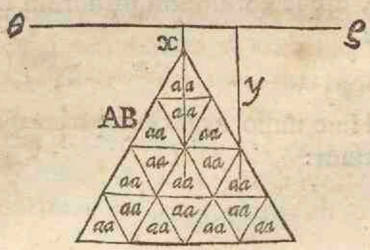
Duobus gravibus ex eadem altitudine cadentibus, quorum unum perp. alterum vero oblique secundum rectam lineam decidit; Tempora utriusque incidentiæ sunt inter se sicut utraque linea secundum quas incidunt; quandoquidem eadem est velocitas in utroque mobili æqualiter descendente.

Coroll.

Hinc sequitur ut duobus gravibus ex eadem altitudine secundum singulas lineas rectas oblique cadentibus; Tempora utriusque incidentiæ inter se referantur, sicut utraque linea obliqua, vel sicut spatia decursa, si gravia sint æqualia.

III. *Lemma.*

Si planum indefinite dividatur in partes aliquotas. Summa productorum singularum partium per suam ab axe distantiam multiplicatarum, æqualis est producto totius plani per sui centri ab eodem axe distantiam multiplicati.



Sit planum (A B) indefinite divisum in partes aliquotas (*aa*), ex quibus singulis dimittantur singulæ lineæ inter se parallelæ, eæque ad axem θϱ extra positum perpendiculares, quæ vocentur x: linea e plani centro ad eundem axem perp. ducta appelletur x: dico ſummam omnium producto-rum, aay, eſſe æqualem producto abx.

Namque plani ita diviſi ſingulæ partes perinde ſpectari poſſunt, ac ſi forent ſingula pondera: at ex geoſtatica ſumma productorum ſingulorum ponderum per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatorum, æqualis eſt producto omnium ponderum per centri communis ab eodem axe diſtantiam multiplicatorum; Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc perſpicuum eſt ſummam productorum ſingularum partium ejuſdem plani multiplicatarum per ſingulas peripherias, quarum ſemidiametri ſunt ipſæ perpend. ad axem, eſſe æqualem producto totius plani multiplicati per peripheria m, cujus ſemidiameter eſt ipſa diſtantia centri ab axe.

II. *Coroll.*

Hinc patet ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari producto ipſius plani multiplicati per peripheriam, cujus ſemidiameter eſt diſtantia centri ipſius plani ab axe.

III. *Coroll.*

Hinc ultro emergit inveſtigatio omnium ſolidorum a planis circa axes motis deſcriptorum; ſed iſtæc alibi.

IV. *Coroll.*

Hinc deduces ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari alteri ſpatio, quod percurreretur ſi ſingula puncta, vel ſingulæ partes aliquotæ plani tantumdem ab axe diſtarent, quantum ipſius centrum gravitatis.

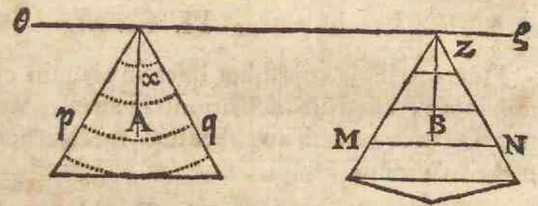
V. *Coroll.*

Hinc apparet ſpatia a planis æqualibus decurſa, eſſe in eadem ratione, atque eorumdem planorum diſtantias centrorum gravitatis ab axe.

VI. *Coroll.*

Hinc nullo negotio reperias ſpatium a plano in latus moto decurſum:

Si enim planum A indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium sit idem axis $\theta\varrho$: conficiatur planum, *b*, cujus singulæ lineæ axi parallelæ æquentur singulis sectionibus cylindraceis, quæ tantumdem ab axe distant, V. G. linea recta MN. æquetur sectioni. *pq*. sicque de cæteris; ex hujus plani *b* centro linea



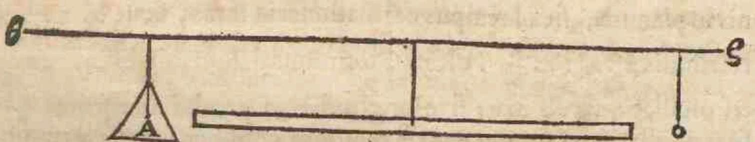
ad axem $\theta\varrho$ perp. ducta vocetur Z: ex plani A centro linea perpend. ducta ad eundem axem appelletur, *x*. Spatium a plano A in planum est ad spatium ab eodem plano in latus moto decursum, sicut *x*. *z*. nam spatium a plano A in latus moto decursum, æquatur spatio per planum *b* in planum motum decurso.

Iam vero centrum oscillationis collustretur.

I. *Problem.*

Invenire centrum oscillationis plani in planum circa axem extra positum moti.

Centrum oscillationis idem est, atque centrum gravitatis ipsius plani.



Cum enim, ex 6° corollario primi lemmatis, & ex 4° coroll. 3tii lemmatis, planum A eadem velocitate, idem spatium percurrat, quod percurreret si ipsius omnia puncta tantumdem ab axe distarent, quantum centrum gravitatis; necesse est ut oscillationes suas eodem tempore perficiat, atque perficeret si singula puncta tantumdem ab axe distarent: atqui si singula puncta tantumdem ab axe distarent, oscillationes suas eodem tempore conficeret, atque pendulum simplex, cujus longitudo est ipsa distantia centri gravitatis ab axe, Ergo &c.

 I. Co-

I. *Coroll.*

Hinc noveris omnium planorum, quorum centra gravitatis ab axe æque distant, idem esse centrum oscillationis in planum.

II. *Coroll.*

Hinc intelligis cujuslibet lineæ in planum circa axem extra positum motæ, centrum oscillationis idem esse, atque centrum gravitatis; Quandoquidem quælibet linea spectari potest, sicut planum minimæ latitudinis.

II. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

Tempora oscillationum plani tum in planum, tum in latus moti, sunt inter se, sicut spatia utroque motu decursa; propterea quod utriusque oscillationis tempora perinde spectanda sunt, atque tempora incidentiarum duorum gravium æqualium ex eadem altitudine oblique decidentium.

III. *Probl.*

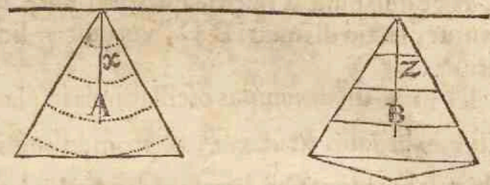
Invenire centrum oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

Si centri plani ab axe distantia vocetur x. tempusque oscillationis in planum, sit ad tempus oscillationis in latus, sicut x. z: hujus relationis $x^2. z^2 : x. \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus designabit distantiam centri oscillationis ab axe, sive longitudinem penduli simplicis, quod suas oscillationes similes eodem tempore conficit, atque pendulum in latus motum; propterea quod longitudines pendulorum simplicium sunt inter se, sicut quadrata temporum oscillationum.

IV. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis solidi.

Si solidum A, indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem sit axis, atque oscillationis; componaponatur planum b, cujus singulæ lineæ axi parallelæ, sint inter se, sicut singulæ sectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe distant. Distantia centri hujus plani ab axe



vocetur z. distantiaque centri solidi ab eodem axe appelletur x. Tempus oscillationis solidi, est ad tempus oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo sit x. sicut z. x. quandoquidem solidum spectari debet sicut planum in latus motum.

V. *Probl.*

Invenire centrum oscillationis solidi.

Hoc problema perinde solvitur, atque 3. prob. supra.

VI. *Probl.*

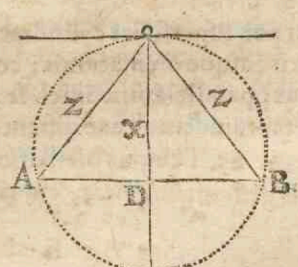
Invenire centrum oscillationis peripheriæ in latus circa tangentem motæ.

Distantia centri oscillationis ab axe, sive longitudo penduli simplicis oscillationes suas eodem tempore conficientis, refertur ad radium, sicut quadratoquadratum diametri ad productum circuli per se ipsum multiplicati; Quandoquidem spatium oscillatione in planum est ad spatium oscillatione in latus decursum, sicut circulus ad quadratum diametri, ut ex infinitorum geometria demonstratur.

VII. *Probl.*

Componere pendulum quod oscillationes suas eodem tempore conficiat, atque pendulum simplex datum.

Longitudo penduli simplicis dati sit diameter peripheriæ, quam axis tangit in puncto O. si hac in peripheria bina puncta A & B a puncto suspensionis æque distantia ad libitum sumantur; hæc duo puncta component pendulum, quod suas oscillationes in latus eodem tempore conficiet, atque pendulum simplex. ad quod probandum.



Hæc duo puncta linea diametrum perp. ſecante in puncto D. jungantur, ſectio diametri D O, vocatur x. linea A O ſive B O appelletur z.

Ex ſupra dictis tempus oſcillationis in planum, eſt ad tempus oſcillationis in latus ſicut $x . z$, ac proinde hujus relationis $x^2 . z^2 : x . \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus ſive diameter deſignabit longitudinem penduli ſimplicis, quod oſcillationes ſuas eodem tempore conficit, atque pendulum ex iſtis binis punctis compoſitum, in latus motum.

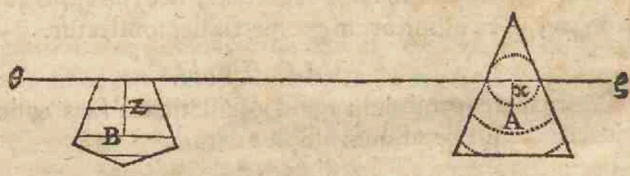
Coroll.

Hinc tibi confeſtim occurrunt infinita pendula compoſita, quæ ſuas quodque oſcillationes eodem tempore conficiunt: verum haud ſcio an obſtupeſcas quod peripheria ſuas oſcillationes breviore tempore perficiat, quam pendulum ſimplex, cujus longitudo eſt ipſa diameter, cum peripheria integra reſolvi poſſit in pendula ſimpliciora componentia, quorum ſingula ſuam quodque oſcillationem eodem tempore ſeorſim conficiant; mirari tamen deſines ſi perſpexeris majorem eſſe gravitatem in peripheria conglutinata, quam in omnibus ipſius partibus disjunctim motis.

VIII. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis cujuſlibet penduli circa axem intra poſitum moti.

Si pendulum A, cujus diſtantia ab axe vocetur x. indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem ſit axis, atque oſcillationis: componatur planum B, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ ſint inter ſe, ſicut ſingulæ ſectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe diſtant: diſtantiaque centri plani B ab axe appelletur z: Tempus oſcillationis penduli A, erit ad tempus oſcillationis penduli ſimplicis, cujus longitudo ſit x, ſicut $z . x$.



F I N I S.

PRINCIPIA MATHESEOS UNIVERSALIS, SEU INTRODUCTIO AD GEOMETRIÆ METHODUM RENATI DES CARTES.

De LOGISTICA QUANTITATUM SIMPLICIUM.

Cum in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile ſit à ſimpliciſſimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconſultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehenſionum Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem verſantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus ſpeciem excludere, ſed eas, quocunque ſe habeant modo, ſub certis notis cuique obviis repræſentare poſſint. Vnde cum in univerſa illarum Scientiarum conſtitutione, licèt diverſa objecta reſpiciant, non niſi relationes ſive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, conſiderentur; conſentaneum eſt rationes atque proportiones illas ſeorſim ſpectare, eaſque literis Alphabeti, utpote notis ſimpliciſſimis nobiſque cognitiſſimis, inſignire. Neque enim ratio ulla eſt, quo minùs per *a*, *b*, *c*, &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c*, &c. quàm pondera aut numeri iiſdem characteribus deſignati. Attamen quia tum phantaſiæ tum ſenſibus ipſis, nihil ſimplicius nec diſtinctius exhiberi poſſe occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

Vide diſſertationem de methodo, parte ſecunda.

ſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per a & b, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per a intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per b longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per a & a, aut per b & b duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſuppoſuerisve a eſſe æqualem ipſi b, vel a & b ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur $a \propto b$. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Vt ad deſignandum, lineam a eſſe bis ſumendam, ſcribo $2a$. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius b, ſcribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ a, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. ſic & duas tertias, tres quartas, &c. ipſius b, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Iam cum in univerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam a ad lineam a, ſcribo pro ſumma $2a$: ſic & ad addendum $2b$ ad $3b$, ſcribo $5b$. Lineæ enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet interpoſito ſigno $+$, quod denotat plus. Vt ſi ad lineam a ſit addenda linea b, ſcribo $a+b$, hoc eſt, a plus b, quo indicatur b eſſe additam ipſi a, vel adhuc eſſe addendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Vt ad addendum $2b$, b, & $3b$, ſcribo $6b$. Sic & ad addendùm a, b, & c, ſcribo $a+b+c$.

Exempla additionis ſimplicium.

				$2b$
Add.	$a.$	$2b.$	$3d.$	$b.$
	$a.$	$3b.$	$d.$	$3b.$
Summa	$2a.$	$5b.$	$4d.$	$6b.$

				$a.$
Add.	$a.$	$a.$	$3c.$	$b.$
	$b.$	$2b.$	$4d.$	$c.$
Summa	$a+b.$	$a+2b.$	$3c+4d.$	$a+b+c.$

Vbi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum eſſe literam d ſibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in ſequenti exemplo & ſimilibus eſt obſervandum: ut &, cùm plures adduntur diverſæ literæ, perinde eſſe quo ordine ſcribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum ſimplicium.

IAm verò ad ſubtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, ſcribendum eſt $3a$: ſiquidem lineæ, quæ iiſdem literis ſunt deſignatæ, ſubducuntur, ſubtrahendo tantùm à ſe invicem numeros præfixos. Sic & ſi $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ ſeu b. Similiter ſublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet o ſeu nihil.

Quòd ſi verò lineæ diverſis literis notatæ fuerint, ſubductio fiet interpoſito ſigno —, quod denotat minus. Vt ſi ab a ſubtrahenda ſit b, ſcribo $a-b$, hoc eſt, a minus b, quo indicatur b eſſe ſublatam ex a, vel adhuc eſſe ſubducendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, hoc eſt, quæ ex priori eſt ſubtrahenda.

Eodem modo, ſublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla ſubtractionis ſimplicium.

Ex	$5a.$	$3b.$	$4d.$	$a.$	Ex	$a.$	$3c.$	$a.$	$2c.$
ſubtr.	$2a.$	$2b.$	$d.$	$a.$	ſubtr.	$b.$	$4d.$	$4b.$	$d.$
reliq.	$3.a.$	$b.$	$3d.$	$0.$	reliq.	$a-b.$	$3c-4d,$	$a-4b.$	$2c-d.$

Vnde notandum, in ejuſmodi quantitatum ſubtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia ſubtrahi debet, eſſe minorem:

hoc eſt, ad ſubtrahendum b ex a, (ut in ſuperiori exemplo) opùs eſſe, ut b ſit minor quàm a. Quòd ſi autem non proponatur aut conſtet, utra quantitas ſit major aut minor, & tamen ſubductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a = b$, hoc eſt, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

Porrò ad multiplicandum lineam a per lineam b, ſcribo ab vel ba. Sic & ad multiplicandum a per a, hoc eſt, a in ſe, ſcribo aa ſeu a^2: & aaa ſeu a^3 ad prædictum productum aa adhuc ſemel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim a, b & c per invicem, ſcribo abc, vel bac, vel cba &c: & abb ſeu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum a, b, & b. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine ſcribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in ſe, id quod producitur vocatur Quadratum ejuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipſius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque ſi a multiplicetur per a, productum aa ſeu a^2 appellari conſuevit a quadratum, ſeu a duarum dimenſionum; & ſi aa rurſus multiplicetur per a, producetur aaa ſeu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, ſeu a trium dimenſionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a ſurdeſolidum, a quadrato-cubus, &c. ſeu, a habens 4, 5, aut 6, &c. dimenſiones.

Sicuti autem numerus aliquis, ſi in ſe ducatur, dicitur radix quadrata iſtius producti ſeu quadrati: & ſi adhuc ſemel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus poſterioris producti appellatur, &c; ſic & a dicitur radix Quadrata ex aa ſeu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surſolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis eſt intelligendum.

Ex quibus conſtat diligenter eſſe notandum, quòd magnum ſit diſcrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus eſt, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo eſt adſcriptus. Vt inter $2a$ & a^2, $3a$ & a^3, $4a$ & a^4, &c. ſiquidem

per

per 2 a, 3 a, 4 a, &c. ſimpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. ſumpta, hoc eſt, a ſibi ipſi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipſius a, hoc eſt, ipſa quantitas a toties poſita & multiplicata.

Exempla multiplicationis ſimplicium.

Multipl.	$a.$	a	aa	ab	ab	ab	aa	$a^3.$
per	$b.$	a	a	c	b	cd	ab	$a^3.$
productum	$ab.$	$aa.$	$a^3.$	$abc.$	$abb.$	$abcd.$	$a^3b.$	$a^6.$

Vbi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a reſpicere, non autem ſequentem b: quod, cum brevitatis causâ ſcribatur pro $aaab$, in omnibus ſimilibus caſibus quoque eſt intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc eſt, aaa per a^3 ſeu aaa, producetur a^6, hoc eſt, $aaaaaa$.

Quòd ſi quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, ſive integri ſive fracti præfiguntur, oportebit dictos numeros in ſe invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exſurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Vt ad multiplicandum 2 a per 3 b; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod ſi præfigatúr ipſi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæſitum productum 6 ab. Similiter multiplicatis 2 b per c, productum erit 2 bc. nam unitas, quæ hîc ipſi c præfigi ſubintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum 3 ab, hoc eſt, ter ab per 2 cd, hoc eſt, bis cd, ſcribatur 6 $abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc eſt, ſemiſſe ipſius aa per tertiam partem ipſius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc eſt, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3.$
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3.$
product.	$6ab.$	$2bc.$	$\frac{3}{4}ad.$	$6abcd.$	$\frac{1}{6}a^3b.$	$3a^3b^3.$	$4a^6.$

Vbi tandem ſciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimenſionum ſeu literarum; earum tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Vt ad addendum $2\,ab$ ad $3\,ab$, ſcribitur $5\,ab$: & ad addendum $6\,ab$ ad $2\,bc$, ſcribitur $6\,ab + 2\,bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2\,ab$ de $3\,ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2\,bc$ de $6\,ab$, ſcribitur $6\,ab - 2\,bc$, Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QVoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$$\left.\begin{matrix}\text{Divid. } ab \\ \text{per } a\end{matrix}\right\} b \text{ quot. } \left.\begin{matrix} aa \\ a\end{matrix}\right\} a. \left.\begin{matrix} a^3 \\ a\end{matrix}\right\} aa. \left.\begin{matrix} abc \\ a\end{matrix}\right\} bc. \left.\begin{matrix} abc \\ ab\end{matrix}\right\} c. \left.\begin{matrix} a^3b \\ ab\end{matrix}\right\} aa. \left.\begin{matrix} a^5 \\ aa\end{matrix}\right\} a^3.$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Divid. } 6\,ab \\ \text{per } 2\,a\end{matrix}\right\} 3\,b. \left.\begin{matrix} \frac{1}{6}a^3b \\ \frac{1}{3}ab\end{matrix}\right\} \tfrac{1}{2}\,aa. \left.\begin{matrix} 3\,a^3b^3 \\ 3\,b^3\end{matrix}\right\} 1\,a^3 \text{ ſeu } a^3. \left.\begin{matrix} 3\,a^3b^3 \\ a^3\end{matrix}\right\} 3\,b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Vt ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hìc obiter notandum, diviſis a per a, $2\,b$ per $2\,b$, ſimilibuſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QVANTITATVM COMPOSITARVM.

Explicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum $+$ compoſitæ, aut per ſignum $-$ disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

Igitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna $+$ & $-$, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Vt ad addendum $a+3b$ ad $a+2b$: additis a ad a, & $3b$ ad $2b$, ſumma erit $2a+5b$. Eodem modo $2a-b$ additum ad $3a-3b$, facit ſummam $5a-4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Vt ſi addendum ſit $3b+5a$ ad $2b-2a$: additis $3b$ ad $2b$, & ſubtractis $2a$ ex $5a$, ſumma erit $5b+3a$. Similiter ſi $a+d$ addatur ad $a-4d$, fiet ſumma $2a-3d$. Vbi patet ſi $2b+a$ addatur ad $3b-a$, ſummam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Iam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Vt ad addendum $a+b$ ad $c-d$, ſcribo $a+b+c-d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum $+$.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a+3b$	$2a-b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc$	$aa+2a-3.$
	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc$	$aa+a-6.$
ſumma	$2a+5b.$	$5a-4b.$	$ab+bb.$	$\frac{5}{3}a^3-2abc.$	$2aa+3a-9.$

Add.	$3b+5a$	$a+d.$	$2b+a$	$aa-2ab$	$3a^3-\frac{1}{3}aab$	$aa-5a+6.$
	$2b-2a$	$a-4d.$	$3b-a$	$aa+ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab$	$aa+a-6.$
aggr.	$5b+3a.$	$2a-3d.$	$5b.$	$2aa-ab.$	$5a^3+\frac{1}{6}aab.$	$2aa-4a.$

Add.

Add.	$a+b$	$2aa+3ab-bb$	$3abc$	$a^3+2abb-aab+abc$.
Summa	$c-d$	$5ab-3aa$	a^3-abc	$a^3+aab-3abb-b^3$.
ſeu aggr.	$a+b+c-d$.	$8ab-aa-bb$.	a^3+2abc.	$2a^3-abb+abc-b^3$.

E quibus manifeſtum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, ſcribi poſſit $3b+5a+2b-2a$, hoc eſt, $5b+3a$: ſiquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eiſdem literis denotatas, quando diverſa habent ſigna, ſubtrahendas eſſe, & ſummæ aſcribendum eſſe ſignum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compoſitarum.

PORrò ad ſubtrahendum quantitates compoſitas, quæ eiſdem literis ſunt denotatæ, ſciendum eſt: ſi ſigna eadem fuerint, & quantitas è qua ſubtractio fieri debet, major ſit quantitate ſubducendâ; tum ſubtractionem fieri ut in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſſe idem ſignum. Vt ſi ſubtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (ſubtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò ſigna eadem fuerint, & quantitas à qua ſubtractio fieri debet quantitate ſubducendâ minor ſit; oportet, ſubtractâ minore ex majore, reſiduo ſignum contrarium præponere. Vt ſi ſubtrahendum ſit $a+3b$ ab $3a+2b$: ſubtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, reſiduum erit $2a-b$. Similiter, ſublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd ſi quantitates iiſdem literis deſignatæ, atque ad ſubtrahendum propoſitæ, diverſa ſigna habeant; erunt ipſæ addendæ, ut in ſimplicibus, & ſummæ præfigendum ſignum quantitatis, à qua ſubductio fieri debet. Vt ſi velimus ſubtrahere $a-b$ ex $2a+b$: ſubtractis a ex $2a$, additiſque b ad b, reſiduum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ ſubductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad ſubtrahendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet quantitates ſubducendas, variatis ſignis connectere cum iis, à quibus ſubductio fieri debet. Vt ſi ſubtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia ſeu reſiduum $a+b-c+d$: variatis nempe ſignis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b.$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$

Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Reſid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$

Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$

Ex	$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$
Subtr.	$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-2a^3+c^3-abb.$
Rel. reſid. ſeu diff.	$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perſpicuum fit (cum ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$, ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum $-$, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum: at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

POst hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa $+$ & $-$ attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est $+$ per $+$, vel $-$ per $-$) facere signum $+$, diversa verò (hoc est $+$ per $-$, vel $-$ per $+$) facere $-$. Vt ad multiplicandum $a+b$ per c: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, seu $ac+bc$. Sic si multiplicandum sit $a-b$ per c, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per c, ut ante; & rursus $a+b$ per d (siquidem $a+b$ non tantùm per c, sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non secus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ scribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primùm $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Mult.}\ a+b & a-b & a+b & a-b & a+b \\
\text{per}\ \ c & c & c+d & c-d & a+b \\
\hline
\text{prod.}\ ac+bc. & ac-cb. & ac+bc & ac-bc & +ab+bb \\
 & & +ad+bd & -ad+bd & aa+ab \\
\hline
 & \text{product.} & ac+bc+ad+bd. & ac-bc-ad+bd. & aa+2ab+bb.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Multipl.} & a-b & a+b & aa-2ab+bb & aa-ab+bb \\
\text{per} & a-b & a-b & a-b & a+b \\
\hline
 & -ab+bb & aa+ab & -aab+2abb-b^3 & +aab-abb+b^3 \\
 & aa-ab & -ab-bb & a^3-2aab+abb & a^3-aab+abb \\
\hline
\text{prod.} & aa-2ab+bb. & aa-bb. & a^3-3aab+3abb-b^3. & a^3+b^3.
\end{array}
$$

Mult.

$$\begin{array}{ll} \text{Mult.} & 3dd + 4de + ee \\ \text{per} & 3dd - ee \\ \hline & 9d^4 + 12d^3e + 3ddee \\ & \quad - 3ddee - 4de^3 - e^4 \\ \hline \text{product.} & 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{2}{3}abb \\ \frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa \\ \hline -a^5 - \frac{1}{4}a^4b - \frac{1}{3}a^3bb \\ + \frac{4}{3}a^4b + \frac{1}{3}a^3bb + \frac{4}{9}aab^3 \\ \hline \frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Multipl.} & 4a^3 + 3aa - 2a + 1 \\ \text{per} & aa - 5a + 6 \\ \hline & + 24a^3 + 18aa - 12a + 6 \\ & - 20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a \\ & + 4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + 1aa \\ \hline \text{product.} & 4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6. \end{array}$$

Cæterùm advertendum hîc est, non rarò utile esse, multiplicationem hoc modo non instituere, sed tantummodo eam innuere interserendo voculam *in* vel M. Vt ad multiplicandum $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ per $\overline{aa - 5a + 6}$, scribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, sic patet. Esto $a - b$ multiplicandum per c, & sit $a - b \infty e$: hinc si utrobique addatur b, fiet $a \infty b + e$. Iam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo si utrinque multiplicetur per c, erit $ac \infty bc + ec$, hoc est, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \infty ec$. Quocirca cum statuatur $a - b \infty e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \infty ec$; perspicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter ostendetur $-$ per $-$ multiplicatum producere $+$. Etenim si $a - b$ multiplicandum sit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \infty e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e: id est, $ce - de$. Sed ce, ut supra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis sit posita ipsi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto de: hinc si ex $ac - bc$ subtrahatur $ad - bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam subtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæsitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Divisione quantitatum compositarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compositas, operatio non absimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per se invicem dividuntur. Quod autem signa $+$ & $-$ concernit, sciendum est, si dividatur $+$ per $+$, aut $-$ per $-$, semper oriri $+$; at si $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ dividatur, semper oriri $-$. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem sive à dextra sive à sinistra incipias perinde erit. Vt ad dividendum $ac + bc$ per c: divisis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in simplicibus est ostensum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæsitus erit $a + b$. Similiter si dividatur $ac - cb$ per c, orietur $a - b$: divisis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non dissimili ratione dividitur $ac + ad + bc + bd$ per $c + d$, & fit $a + b$. Cujus operatio talis est.

$$\begin{array}{lcc|c|c}
\text{Divid.} & ac+ad+bc+bd & +ac & +a.\ +bc & +b. \\
\text{per } c+d) & \underline{ac+ad+bc+bd} & +c & +c & \\
 & 0\quad 0\quad 0\quad 0 & & & \\
\text{Quotiens} & +a+b. & & &
\end{array}$$

Diviso ac per c, (ut in simplicibus) fit a, scribendum sub linea in quotiente. hinc multiplicato divisore $c + d$ per quotientem inventum a, productum $ac + ad$ ex dividendo auferatur, scribendo partes ejusdem denominationis sub invicem, & reliquum sub linea infra ductâ. Vnde cum subducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, scribitur sub linea ducta o. Deinde diviso $+bc$ per $+c$, fit $+b$, ascribendum priori quotienti. unde multiplicato divisore $c + d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc + bd$. id quod si scribatur, ut ante, sub dividendo, & fiat subductio; erit pro reliquo sub linea scribendum o. Et peracta erit divisio.

$$\begin{array}{rlc|c}
\text{Eodem modo ad dividendum} & ac-ad-bc+bd & +ac & +a \\
\text{per } c-d:) & \underline{ac-ad-bc+bd} & +c & \\
 & 0\quad 0\quad 0\quad 0 & +bc & -b \\
\text{Erit quotiens} & +a-b. & +c &
\end{array}$$

Divido primùm ac per c, & fit a, scribendum sub linea in quotiente. Iam multiplicato divisore $c - d$ per $+a$, fit productum

$ac -$

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c-d$ per $-b$, fit productum $-bc+bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a-b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$ per $a-b$:

$$
\begin{array}{rrr}
 & aa - 2ab + bb & \\
a-b:) & aa - ab & \\
 & \overline{o} - \overline{ab} & \\
 & -ab + bb & \\
 & \overline{o}\quad \overline{o} & \\
\text{fit quotiens} & \overline{a-b.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
aa & a \\
a & \\
\hline
-ab & -b \\
+a &
\end{array}
$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a-b$ per a, & ablato producto $aa-ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a-b$ in $-b$, fit productum $-ab+bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a-b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa-bb$ per $a+b$.

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{Divid.} & aa - bb & -ab \\
\text{Diviſ. } a+b) & \overline{aa} - \overline{bb} & \overline{-ab} \\
 & o \quad o & o \\
\text{Quotiens} & \overline{a-b} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
aa & a \\
a & \\
\hline
-ab & -b \\
+a &
\end{array}
$$

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a+b$ per quotientem inventum a, producetur $aa+ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hîc terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a+b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab-bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractio-

nem

nem relinquat o; liquet abſolutam eſſe operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter ſe res habet ſi dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

Dividend.	$a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$	b^3	bb
Diviſor $a + b$)	$+a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$	b	
	o o	o	o	$-abb$	$-ab$
				$+b$	
Quotiens	$+aa - ab + bb.$			$+aab$	$+aa$
				$+b$	

Etenim diviſo $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, ſcribendum in quotiente. tum ducto diviſore $a + b$ in $+bb$, producitur $+abb + b^3$: Id quod ſi ſubtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviſo $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, ſcribendum in quotiente, quo multiplicato per diviſorem $a + b$ exſurgit $-aab - abb$, ad ſubtrahendum ex reliquo dividendi, eritque reſiduum $+aab$. Denique diviſo $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ ſcribendum in quotiente. unde ſi multiplicetur diviſor $a + b$ per $+aa$, & productum $+a^3 + aab$ auferatur ex reſiduo dividendi, erit reliquum o. Id quod oſtendit, diviſo $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem diviſionis compoſitarum.

Dividend.	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$-b^3$	$+bb$
Diviſor $a - b$.)	$+abb - b^3$	$-b$	
	$+2abb$ o	$+2abb$	$-2ab$
	$-2aab + 2abb$	$-b$	
	$-aab$ o	$-aab$	$+aa$
	$a^3 - aab$	$-b$	
	o o		
Quotiens	$+aa - 2ab + bb.$		

Divi-

Dividend. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$

Divis. $3dd - ee)\,9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$

0 0 0 0 0

Quotiens $+4de + 3dd + ee$

$-e^4 \mid +ee$
$-ee \mid$

$-3ddee \mid +3dd.$
$-ee \mid$

$-4de^3 \mid +4de.$
$-ee \mid$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$

Divis. $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa)\,+\frac{4}{3}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$

$-\frac{1}{4}a^4b$ 0 0 0

$-\frac{1}{4}a^4b$

0

Quotiens $+\frac{2}{3}abb + \frac{1}{2}aab + 2a^3.$

$-a^5 \mid +2a^3.$
$-\frac{1}{2}aa \mid$

$-\frac{1}{4}a^4b \mid +\frac{1}{2}aab.$
$-\frac{1}{2}aa \mid$

$-\frac{1}{3}a^3bb \mid +\frac{2}{3}abb.$
$-\frac{1}{2}aa \mid$

Divid. $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$ Pag. 340.

Div. $d+b)\,d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$ lin. 4.

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Quotiens $+d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab.$

$d^4 \mid d^3.$ $-bd^3 \mid -bdd.$ $+bbdd \mid +bbd.$ $-b^3d \mid -b^3.$
$d \mid$ $+d \mid$ $+d \mid$ $+d \mid$

$+2aady \mid +2aay.$ $+aadd \mid +aad.$ $-aabd \mid aab.$
$+d \mid$ $+d \mid$ $+d \mid$

Dividend. $+y^6 - 8y^4 - 124yy - 64$ Pag. 77.

Divisor $yy - 16)\,+y^6 + 8y^4 + 4yy - 64$

$0 - 16y^4 - 128yy$ 0

$-16y^4 - 128yy$

0 0

Quotiens $+1y^4 + 8yy + 4.$

$-64 \mid +4$
$-16 \mid$

$-128yy \mid +8yy.$
$-16 \mid$

$-16y^4 \mid +1y^4.$
$-16 \mid$

Divi-

$$\begin{array}{lllllllllll|l}
\text{Dividend.} & +y^6 & +aay^4 & -2ccy^4 & -a^4yy & +c^4yy & -a^6 & -2a^4cc & -aac^4 & & & +2aaccyy \\
\text{Pag. 78. Div. } yy-aa-cc) & +y^6 & -aay^4 & -ccy^4 & -2a^4yy & +c^4yy & -a^6 & -a^4cc & -aac^4 & & & +aaccyy \\
\hline
 & o & +2aay^4 & -ccy^4 & +a^4yy & o & o & -a^4cc & o & & & +aaccyy \\
 & & +2aay^4 & -ccy & +a^4yy & & & -a^4cc & & & & +aaccyy \\
\hline
 & & o & o & o & & & o & & & & o
\end{array}$$

$$\text{Quotiens} \quad +y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$$

$$\left.\frac{+y^6}{+yy}\right| +y^4. \left.\frac{+2aay^4}{+yy}\right| +2aayy. \left.\frac{-ccy^4}{+yy}\right| -ccyy.$$

$$\left.\frac{+a^4yy}{+yy}\right| +a^4. \left.\frac{+aaccyy}{+yy}\right| +aacc.$$

$$\begin{array}{lllllll|l}
\text{Pag. 380. Dividend.} & +\frac{1}{4}q & -\frac{1}{4}fq & +f^3uuq & -fuuq & -4f^4u^4q & +4f^3u^4q & +ffuuq \\
\text{lin. 15. Div. } \frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu) & \frac{1}{4}q & -\frac{1}{4}fq & +f^3uuq & -fuuq & -4f^4u^4q & +4f^3u^4q & +ffuuq \\
\hline
 & o & o & o & o & o & o & o
\end{array}$$

$$\text{Quotiens} \quad +q-4fuuq.$$

$$\left.\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}\right| +q. \quad \left.\frac{-fuuq}{+\frac{1}{4}}\right| -4fuuq.$$

Quòd ſi quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, ſubſcribendus erit diviſor ipſi dividendo, interjectâ lineolâ, ſicut in fractionibus vulgaribus. Vt ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, ſcribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ diviſum eſſe per $d+e$, vel adhuc eſſe dividendum. Sic & ſi $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens ſeu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc eſt, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe ſæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, diviſionem, quantùm fieri poteſt, inſtituere, & quod ſupereſt inſtar fractionis quotienti adſcribere. Et tantum de diviſione.

DE EXTRACTIONE RADICIS.

QVoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro diviſionis ſpecie haberi poteſt, agendum reſtat, ſciendum eſt, ejus operationem non eſſe diverſam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, seu a quadratum, cujus radix seu latus dicitur a; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a. Similiter cum aa, hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit o. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & aa + 2ab + bb \\ & \underline{aa} + \underline{2ab} + \underline{bb} \\ & 0 \quad\;\; 0 \quad\;\; 0 \\ \hline \text{Radix} & a + b \\ \hline \text{Divisor} & 2a \end{array}$$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adscribo priori radici inventæ a. Hinc si ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsita $a + b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & a^4 - 2aabb + b^4 \\ \hline \text{Radix} & aa - bb \\ \hline \text{Divisor} & 2aa \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & 64xx - 160x + 100 \\ \hline \text{Radix} & 8x - 10 \\ \hline \text{Divisor} & 16x \end{array}$$

Quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$

$\underline{aa} + \underline{2ac} + \underline{cc} - \underline{2ab} - \underline{2bc} + \underline{bb}$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Radix $a + c - b$

Primus divisor $2a$

Secundus divisor $2a + 2c$

Quadratum aa $\qquad a + c$

Radix a per 2

$2a + 2c$. secundus divisor.

$a \quad a$

per $2 \quad a \quad -2ab \,|\, -b$ quot. secundus.

Primus divisor $2a \quad aa \quad +2a$

$+2ac \,|\, +c$ quotus primus $\qquad 2a + 2c$

$+2a \qquad\qquad -b$

$2a \quad c \quad -b \qquad -2ab - 2bc.$

$+c \quad c \quad -b$

$+2ac \quad cc. \quad +bb$

Cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

Radix $a + b$ $\qquad +3aab \,|\, +b.$

Divisor $3aa$ $\qquad +3aa$

Cub. $27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125$ Cub. $27x^6$

$27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125$ Rad. $3xx$.

$0 \quad 0 + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \quad 0 \quad 0$ $\quad 3xx$

$+135x^4 - 180x^3 + 225xx$ $\quad 3xx$

$0 \quad 0 \quad 0$ $\quad 9x^4$.

Radix $3xx - 2x + 5$. $\qquad$ per 3

Primus divis. $27x^4$ $\qquad -54x^5 \,|\, 27x^4$ 1. div.

Secundus divisor $27x^4 - 36x^3 + 12xx$ $\quad +27x^4 \,|\, -2x$ quot. primus.

$$\begin{array}{r} +27x^4 \\ -2x \\ \hline -54x^5 \end{array} \quad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ +3xx \\ \hline +12x^4 \\ \text{per } 3 \\ \hline +36x^4. \end{array} \quad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ -2x \\ \hline -8x^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3xx-2x \\ 3xx-2x \\ \hline -6x^3+4xx \\ 9x^4-6x^3 \\ \hline 9x^4-12x^3+4xx \\ \text{per } 3 \\ \hline 27x^4-36x^3+12xx. \end{array} \text{Secund. div.}$$

$$\begin{array}{r|l} +135x^4 & +5 \text{ quotus secund.} \\ +27x^4 & \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +3xx-2x \\ \hline +75xx-50x \\ \text{per } 3 \\ \hline +225xx-150x. \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +5 \\ \hline +125. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +27x^4-36x^3+12xx \\ +5 \\ \hline +135x^4-180x^3+60xx. \end{array}$$

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\surd$. Vt ad extrahendum radicem quadratam ex aq, scribo $\surd aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\surd \overline{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, scribo $\surd C.aaq$. Vt & $\surd \overline{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Vbi notandum, signum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi $\surd Q$, vel etiam simpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd C$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd QQ$ seu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\surd (2)$, $\surd (3)$, $\surd (4)$, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd$ ℨ, $\surd$ ꝶ, $\surd$ ℨℨ, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

QVandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur, facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Vt $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Vnde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet multiplicato a per d, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic & $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $\frac{+aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb, pro

pro-

producto scribendum esse numeratorem aa. Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Vnde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a; superest tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæsitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm restat 1 per ab, & fit productum quæsitum $1ab$ seu ab. Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciorem; elisâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: elisis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab^3 quàm abc per ab, fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^5ccoomm+4a^6ccm^3p}{oopp z^4+4mp^3z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6ccmm}{ppz^4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non secus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

$\frac{aa - ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+ 2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+ 2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Vt & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Vt,

Vt, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd: conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QVibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reducantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Vt ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Iam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientis d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non ſecus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ ſub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^8 - 3 a^7 b + 5 a^7 bb - 6 a^5 b^3 + 5 a^4 b^4 - 3 a^3 b^5 + aab^6}{a^6 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5},$$

$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb - a^5 b^3 - a^3 b^5 + aab^6 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$

$$\frac{a^8 - a^7 b + 2 a^6 bb - 2 a^5 b^3 + 2 a^4 b^4 - 2 a^3 b^5 + aab^5 - ab^7}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & ſubtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim ſi fractiones ejuſdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut ſubtrahere, & ſummæ vel reliquo ſubſcribere denominatorem communem. Vt ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, ſumma erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d + e}$ additum ad $\frac{2ae}{d + e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d + e}$, ſeu $2a$. Non ſecus ſi addantur $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{bb}{b + d}$, & $a - \frac{dd}{b + d}$, erit ſumma $a + \frac{2bd + bb}{b + d}$.

Quod ſi fractiones diverſæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum eſt. Vt ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet ſumma $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non ſecus ſi addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit ſumma $\frac{4a^8 - 6a^7 b + 9a^6 bb - 9a^5 b^3 + 7a_4 b^4 - 6a^3 b^5 + 3aab^6 - 2ab_7 + b^8}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}$,

Iam ad ſubtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, ſcribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo ſubductis $\frac{2ae}{d - e}$ à $\frac{2ad}{d - e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d - e}$ ſeu $2a$ Similiter $\frac{bd}{b + d}$ de $d + \frac{bd}{b + d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b + d}$.

Nec aliter fit, ſi ſubtrahendum ſit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$ relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Vt ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & d, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per d: eritque productum $\frac{a^4 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$

& $a -$

& $a-b$ reduci poſſunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$ ſeu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter ſi ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb; hinc productum quæſitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$. cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, ſupereſt tantùm multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique ſi multiplicandum ſit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, diviſis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{a}$.

De Diviſione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omiſſo communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione ſi $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ ſeu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd ſi denominatores fuerint diverſi, reductio ad eandem denominationem fiet, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, ut in vulgaribus. Vt ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per poſterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

 Ad-

Advertendum autem hîc eſt, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, ſicut etiam denominatores non rarò ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Vt ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci poſſint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^3 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens diviſionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione ſi $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci poſſunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc eſt, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæſitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, ſi dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exſurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CVm in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæſitam: hinc ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c, ſcribo pro radice quæſita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ eſt $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10 - 8x}{5}$ ſeu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\surd$. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SVRDARVM.

QVemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

SCiendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs sit, quantitates surdas, si diversa signa radicalia habuerint, reducere ad idem signum radicale. Quod fit, si ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividi possit. Vt ad reducendum $\sqrt{aq}$ seu $\sqrt{(2)\,aq}$ & $\sqrt{C.aaq}$ seu $\sqrt{(3)\,aaq}$ ad idem signum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipsos sine reliquo dividi potest, qui est 6. Iam cum 6 diviso per 2 oriatur 3, & per 3 diviso oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in se cubicè, & aaq quadratè; fientque sub eodem signo $\sqrt{QC.a^3q^3}$ seu $\sqrt{(6)\,a^3q^3}$, & $\sqrt{QC.a^4qq}$ seu $\sqrt{(6)\,a^4qq}$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ sub eodem signo radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in se reducitur ad aliquod signum radicale. Exempli gratiâ: ad reducendum $a+b$ ad idem signum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$ oportet multiplicare $a+b$ in se quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non secus si multiplicetur $a+b$ in se cubicè, fiet $\sqrt{C.a^3+3aab+3abb+b^3}$ sub eodem signo cum $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$. Et sic de aliis.

Deinde sciendum, quantitates surdas non rarò ad simpliciores reduci posse, tollendo ex signo radicali quicquid est rationale: nimirum, dividendo quantitates sub eodem signo $\sqrt{}$ comprehensas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Vt $\sqrt{75\,aa}$ reduci potest ad $5\,a\sqrt{3}$: nam $75\,aa$ producitur ex multiplicatione $25\,aa$ per 3, quarum radices sunt $5\,a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, si $75\,aa$ dividatur per quadratum $25\,aa$, sub signo radicali tantùm scribendum sit 3, hoc modo: $5\,a\sqrt{3}$. Id quod monstrat $5\,a$, hoc est, $\sqrt{25\,aa}$, multiplicatum esse per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi possit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ scribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi potest per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix est $a+c-b$, & quotiens est $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$
scribi potest $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$.

Non secus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ scribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31. lin. 9.*
reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, potest utriusque numerator dividi per $aamm$, cujus radix est am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit rationalis, liberabitur à signo $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco
$\sqrt{C.\, x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$
scribi potest $x - 3\sqrt{C.\, x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verùm enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores omnes inveniantur, perinde atque in numeris est ostensum. vide p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi potest), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per se ipsam est dividenda. Vt ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rursus per a divisum dat $ab + bb$. Iam quia quotiens hîc per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se ipsam dividenda. Quibus peractis reserventur divisores $a, a, b,$ & $a + b$. *Ratio inveniendi divisores omnes quarumcunque datarum quantitatum.*

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b + aabb & aab + abb & ab + bb & a+b & 1 \\ a & a & b & a+b & \end{array}$$

Iam ut ex hisce divisoribus inveniantur divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per $1, a,$ & aa, fiuntque $b, ab,$ & aab. Denique multiplico $a + b$ per $1, a, aa, b, ab,$ & aab, & fiunt $a + b, aa + ab, a^3 + aab, ab + bb, aab + abb,$ & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3$ per $aa-ab-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b^4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78, lin. 12. Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Iam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per a aut c similemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quâ denuo per ſeipſam diviſâ, provenit 1. Vnde cum diviſores reſervati ſint a, a, $aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc: ac denique $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque diviſores omnes 1, a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

$a^6+2a^4cc+aac^4$	$a^5+2a^3cc+ac^4$	$a^4+2aacc+c^4$	$aa+cc$	1
a	a	$aa+cc$	$aa+cc$	

1.

$a.$ $a.$

$aa.$

$aa+cc.\ a^3+acc.\ a^4+aacc.$

$aa+cc.\ a^4+2aacc+c^4.\ a^5+2a^3cc+ac^4.\ a^6+2a^4cc+aac^4.$

Similiter ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia, factâ diviſione per b, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ eſt $a+c-b$, hoc eſt, $aa-2ab-2ac-2bc+cc+bb$ diviſum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Vnde cum diviſores reſervati ſint b, $a+b$, $a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, b, $a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita diviſores omnes erunt 1, b, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, a^3+2aac

$+acc$

$+ acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$.

Non ſecus ſi proponatur $a^3bc - ab^3c$, invenientur ex diviſoribus reſervatis $a, b, c, a - b$, & $a + b$ diviſores ſequentes: 1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, $a - b$, $aa - ab$, $ab - bb$, $aab - abb$, $ac + bc$, $aac - abc$, $abc - bbc$, $aabc - abbc$, $a + b$, $aa + ab$, $ab + bb$, $aab + abb$, $ac + bc$, $aac + abc$, $abc + bbc$, $aabc + abbc$, $aa - bb$, $a^3 - abb$, $aab - b^3$, $a^3b - ab^3$, $aac - bbc$, $a^3c -$, $abbc$, $aabc - b^3c$, & $a^3bc - ab^3c$.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum diviſorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex ſuperioribus facilè fuit colligere, ad ſimpliciſſimos terminos reduci queant. Vt ad reducendum $a^3 - abb$, $aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ ad terminos ſimpliciſſimos, eandem cum ipſis rationem habentes; quæro primo (ut ante) omnes cujuſque quantitatis datæ diviſores: eruntque ipſius $a^3 - abb$ diviſores 1, a, $a - b$, $aa - ab$, $a + b$, $aa + ab$, $aa - bb$, & $a^3 - abb$: ipſius autem $aab - b^3$ diviſores erunt 1, b, $a - b$, $ab - bb$, $a + b$, $ab + bb$, $aa - bb$, & $aab - b^3$: at verò ipſius $a^3 + aab - abb - b^3$ diviſores erunt 1, $a - b$, $a + b$, $aa - bb$, $aa + 2ab + bb$, & $a^3 + aab - abb - b^3$. Iam cum inter ipſos tres ſint, qui ſibi invicem reſpondeant, ut $a - b$, $a + b$, & $aa - bb$, quorum ope datæ quantitates ad ſimpliciores reduci poſſunt; hinc ad inveniendum terminos ſimpliciſſimos, divido $a^3 - abb$, aab, $aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ per $aa - bb$ (utpote diviſorem pluribus dimenſionibus conſtantem), fiuntque a, b, & $a + b$. Vbi notandum, quantitates propoſitas fore inter ſe primas, ſi nulli ex diviſoribus ſibi mutuò reſpondeant.

Quæ ratio inveniendi diviſores non ineptè quoque adhiberi poteſt ad fractionum abbreviationem. Vt ad abbreviandum $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi poteſt per $a + b$, poterit pro $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ ſcribi $\frac{aa - ab}{a + b}$. Et ſic de cæteris.

Vide ſupra pag. 22.

Inventis autem omnibus diviſoribus, videndum eſt num aliqui ex ipſis ſint quadrati, vel cubi, &c. qui ſi reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex ſigno radicali.

dicali. Vt quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Vt quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per se consideratæ surdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram relatio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Vt $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

 mu-

munem diviſorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc eſt, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſcribi poſſit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter ſe ſunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, ſeu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter ſe ſunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes ſunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio eſt, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, ſeu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter ſe eam rationem, quæ eſt ipſius $x+3$ ad $5-x$. Et ſic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum ſurdarum.

Ad addendum vel ſubtrahendum quantitates ſurdas, oportet primùm explorare utrum ſint communicantes nec ne: ſi enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel ſubtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra ſignum radicale reperiuntur. Vt ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, ſcribo, additis $5a$ & $3a$, pro ſumma $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote ſublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo ſi fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & ſubtrahendo a & b, erit ſumma $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter ſi proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc eſt, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit ſumma $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{\overline{pzz \sim aam}}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim summa $\frac{\overline{2a+b}}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{\overline{2a \sim b}}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit summa $8\sqrt{xx+12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $\overline{2x \sim 2}\sqrt{xx+12}$. Pag. 173. lin. 18.

Quòd si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Vt si addendum sit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Vt ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, &

 pro-

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæsitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd si datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda priùs sunt ad idem signum, sicut superiùs est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Vt, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quæsitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$, per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantùm signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescunt: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitatum surdarum.

Si datæ quantitates sunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, & quod

& quod oritur erit quotiens quæſitus. Vt ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, ſeu 5 per 3; eritque quotiens quæſitus $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: diviſis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non ſecus $\sqrt{abcc}$ ſeu $c\sqrt{ab}$ diviſum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et ſic de aliis.

Quòd ſi communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ, & ei quod oritur præfigendum eſt commune ſignum radicale. Vt ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: diviſis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem ſi ſigna radicalia fuerint diverſa, reducenda priùs erunt ad idem ſignum, & deinde operatio inſtituenda erit, ut jam dictum eſt. Vt ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in ſe, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare diviſâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in ſe, ut fiat ſub eodem ſigno radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæſitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviſo quadrato per ſuum latus, oritur latus. Vnde ſi a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò ſi dividendum ſit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non ſecus ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter ſi dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab diviſâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæſitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Poſtea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a,

& fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3+abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a_4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\text{ in }\overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $\overline{5-x}$ in $xx+12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\text{ in }\overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, estque talis:

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex semisse summæ & differentiæ, per signum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæsitæ.

Vt ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, subtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt aa & bc: unde radices quadratæ sunt a & $\sqrt{bc}$, quæ si connectantur per signum +, erit radix quæsita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$, *Pag.* 182. *lin.* 13.

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde semissium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam. $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim subtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata est $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd ſi, ſubductis quadratis partium dati binomii à ſe invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: ſatius erit ipſi binomio ſignum univerſale radicis quadratæ præfigere. Vt ad extrahendam radicem quadratam

Pag. 6. ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ſcribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Vniverſales.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

QVoniam ad reſolvendum aliquod Problema, id ipſum ſupponendum eſt ut jam factum, atque nomina imponenda ſunt quantitatibus tum datis, tum quæſitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c, &c. pro quæſitis autem poſteriores z, y, x, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto diſcrimine, à ſe invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Vnde cum æquatio nihil aliud ſit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè conſtat, quantitates haſce cognitas & incognitas, prout diverſimode ſunt affectæ atque diſpoſitæ, diverſas efficere poſſe Æquationum formulas, quæ tamen per ſequentes regulas reduci queunt ad haſce ſimileſve ſpecies:

$z \propto b$, aut
$zz \propto -az + bb$, aut
$z^3 \propto +azz + bbz - c^3$, aut
$z^4 \propto +az^3 + bbzz - c^3z + d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

VT ſi habeatur æquatio inter $z - 3$ & 12, hoc eſt, ſi fuerit $z - 3 \propto 12$: quoniam ſi æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt ſunt æqualia; hinc ſi utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt o.

Sic & ſi fuerit $z - b \propto o$, addendo utrinque b, fiet $z \propto b$. Aut ſi ha-si habeatur $b - z \infty o$, fiet, addendo utrobique z, $b \infty z$. Et si habeatur $zz - aq \infty o$, erit $zz \infty aq$: ut & si $z^3 - aaq$ æquetur o, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3 z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3 z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo $-$ adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo $+$.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \infty bb$, subtracto utrinque $+ az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, subtrahendo utrinque $+ 2c^3$.

Vnde colligitur quantitates signo $+$ adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo $-$: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

POrrò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z-b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, sublato denomina-

 tore

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata est pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz - bz + bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz - abz + abb}{z}$. Vnde cum æquatio proposita reducta sit ad $zz \infty \frac{azz - abz + abb}{z}$, si denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem posterioris partis $\frac{azz - abz + abb}{z}$, fiet $z^3 \infty azz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Vbi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Vt si fuerit $\frac{z^3}{zz - aa} \infty \frac{az - aa}{z + a}$: reductis denominatoribus $zz - aa$ & $z + a$ ad $z - a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z - a} \infty \frac{az - aa}{1}$. ac proinde, si multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \infty azz - 2aaz + a^3$. Similiter si habeatur $\frac{aaz - bbz}{z + b} \infty \frac{a^3 - abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz - bbz$ & $a^3 - abb$ ad z & a, habebitur $\frac{z}{z + b} \infty \frac{a}{z}$, ubi si per crucem multiplicetur, fiet $zz \infty az + ab$. Non secus si habeatur $\frac{azz - bzz}{bb - bz} \infty \frac{aa - ab}{b}$: cum numeratores $azz - bzz$ & $aa - ab$ reduci possint ad zz & a, ut & denominatores $bb - bz$ & b ad $b - z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b - z} \infty \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $zz \infty - az + ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Vt si habeatur æquatio inter $\frac{az^3 - bz^3}{zz + az + aa}$ & $ab - bb$: substituta enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab - bb$, cum $az^3 - bz^3$ & $ab - bb$ reduci possint ad z^3 & b, erit æquatio talis

z^3

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \propto 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \propto aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.\,z} \propto \sqrt{C.\,aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \propto aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

POstea si detur $zz \propto 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z, oriatur $z \propto 4$. Sic & si habeatur $z^4 \propto az^3 + bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \propto az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \propto 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \propto 4$. Eodem modo si fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \propto b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \propto bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a - b$, $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si pro- Pag.149.
ponatur $azz + bzz \propto abz + bbz - abb - b^3$: quoniam u- lin.27.
traque pars dividi potest per $a + b$, orietur $zz \propto bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \propto aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $zz \propto az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $zz \propto \frac{a}{+b}z + \frac{abc}{a-b}$.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Vt si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbzz$ & $-abz^3 + 2abbzz - 2ab^3z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz - abz + abb$, orietur $zz \propto -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

DEnique ad reducendum $zz \propto 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

veniat $z \infty 5$. Sic & si fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx
Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4 - 9a^4}{4}$. Vbi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3bb}{4b - 4a}$. Vbi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b - a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b - a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem inſtitui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates ſurdas; & reductionem per diviſionem, tam ad deprimendas dimenſiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & ſimpliciſſimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis conſtantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæſitam ex data æquatione inveniendam utiles eſſe poſſint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta ſufficiant.

FINIS.

FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN

AD LECTOREM.

CÆterùm ne locus superstes hujus paginæ vacuus relinqueretur, visum fuit hoc loco simul indicare sphalmata, quæ in Exercitationibus nostris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emisimus, fuerunt commissa, ac postmodum à nobis recognita: ut, iis sequenti modo correctis, Lectoris studium in consimili argumento absque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæstio*. p. 163. l. penult. lege *quæsiverim*. p. 193. l. 12. lege *nullæ omnino*. p. 228. l. 3 lege fit $zz - 2aa$. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *descriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod est rectum*. p. 327. l. 4 lege *Ostenso*. ibid. l. antep. lege *ipsa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege e C, e F. p. 361. l. 1. lege *ad E, ita ut A E sit æqualis AB*. p. 372. l. antep. post *Quod*, & p. 393. l. 9 post *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22 lege *in locum x x*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 sunt substituendæ, & vice versâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE
ÆQVATIONVM
Natura, Conſtitutione, & Limitibus

Opuſcula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Bleſenſi Conſiliario Regio;

Abſoluta verò, & poſt mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,

Medicinæ & Mathematum in Regia Academia Hafnienſi Profeſſore publico.

AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

SVMMO MVSARVM
MÆCENATI
ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO
DOMINO,
IOACHIMO GERSDORPH
TOPARCHÆ IN TVNDBYHOLM, &c.
EQVITI AVRATO,
REGNI DANIÆ SVMMO AVLÆ MAGISTRO,
PRINCIPI SENATORI,
REGIÆ MAIESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI
HOC
SPECIMEN ANALYTICES
NOVO ARGVMENTO
CONSECRAT
OBSEQVIVM.

Quod

QVod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram oneraſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectusque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modo ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæpiùs

piùs favoris, quàm virtutis esse beneficium? unde patrono & defensore iis opus est, sub cujus auspiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum fastigium superest, hoc tamen uno modo crescere potest. Te ergo præsertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut literas ſuſciperes, attribuas, ut ſuſceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, ſed quale poſſum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum eſt famâ & acclamatione quantum Aſtronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renaſcentis Aſtronomiæ gratia debetur. Et ſi propoſito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem conſtitues etiam Algebram, hoc eſt, Matheſin Vniverſalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique feliciſſimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum eſſe, ſupra humanum ſolatium recreabor.

Illæ & Excmæ Dni Væ

Hafniæ, Anno cIↃIↃCLVII.

Deditiſſimus

ERASMIVS BARTHOLINVS, Medicinæ & Mathematum Profeſſor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAVDIVM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

QVamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibique, Vir Clarissime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantum intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctissimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alter-

alterutri de Analyticis sermocinari volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat. Vnde non obscurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac studiorum eminens, a quo, si publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè sperari posset. Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi obstare, occupationes tam publicas quam privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum suarum meditationum necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & significare conscriptam esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum proposito moram afferre diutiùs posset. Quibus valde recreatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed, cùm Arthriticis doloribus plus solito, lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reliquas Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense transire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea verò studia iteratò

ratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundem esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gasti-

nensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Analyticis disserentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego, cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis rationem

nem

nem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ solicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipsô familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quam effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D.de Beaune pleraque conformia esse disserendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi *dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quam publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.*

FLO-

FLORIMONDI DE BEAVNE

PRÆFATIO.

Decreveram in publicum edere hoſce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo inſequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum graviſſimo ad oculos defluxu, oculorum uſu privatus fui. Vnde propoſito planè deſtitiſſem, niſi D. Eraſmius Bartholinus operam mihi ſuam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione ſepulta jacerent, obtuliſſet. Ejus igitur auxilio hoc opus compoſui, ad quod intelligendum ſuppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes verſatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctiſſimis Franciſci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheſeos Vniverſalis, ſeu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATVS
DE
NATVRA
ET
CONSTITVTIONE
ÆQVATIONVM.

DE

DE NATURA ÆQUATIONUM.

CAPUT I.

MUltò faciliùs inveniemus Naturam & Constitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum similibus seu ejusdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præstitit Viëta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita disponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipsos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimensiones descendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipsam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimensionum existens nullis aliis quantitatibus adficitur; secundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimensione minor est; tertium in quo duabus; & sic deinceps, usque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, asterisco complebimus, quæ tum sub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio transpositionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ scripta & commentata sunt in Geometriam Renati des Cartes, nota est methodus cognoscendi, quot haberi possint radices in qualibet Æquatione: nimirum, posse Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes signorum continuæ adfuerint, & quoties eadem signa se invicem sequuntur immutata, tot posse reperiri falsas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes similes esse dicimus seu ejusdem formæ, quando in utraque idem est primus terminus, & reliqui termini in utraque similiter sunt affecti; & si in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque absit in altera. Nam cùm similes sunt Æquationes, eandem habebunt constitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio seu collatio singulorum terminorum unius cum singulis terminis correspondentibus alterius.

CAPVT II.

De natura & conſtitutione Æquationum Quadratarum, ſeu duarum dimenſionum.

QVando æquationes hæ ſunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas ſequentes:

$$xx + lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx + mm \propto 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad intelligendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$ ſequens æquatio: $xx \begin{array}{l} -bx \\ +c \end{array} - bc \propto 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propoſitarum $xx + lx - mm \propto 0$. & per conſequens, binæ hæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum ſecundorum habebimus $c - b \propto l$. Vnde diſcimus, l eſſe differentiam inter falſam radicem c & veram b; &, cognitâ falſâ c, veram b eſſe æqualem ipſi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falſam c eſſe æqualem ipſi $b + l$.

Præterea, ex comparatione poſtremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Vnde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; &, cognitâ falſâ c, veram b æqualem eſſe $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falſam c æqualem eſſe $\frac{mm}{b}$.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$, æquatio $xx \begin{array}{l} -bx \\ +c \end{array} - bc \propto 0$. In qua ſi ſupponamus b majorem quàm c, erit ipſa ejuſdem formæ cum ſecunda propoſita $xx - lx - mm \propto 0$. Et per conſequens duæ illæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-latione secundorum terminorum $c - b \propto -l$, vel $l \propto b - c$. Vnde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c; & si cognita fuerit falsa c, erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b, falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \propto bc$. Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse $\propto \frac{mm}{b}$.

3 *Propositio.*

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x - c \propto 0$, æquationem sequentem $xx \begin{array}{l}-b\\-c\end{array} x + bc \propto 0$, & habebit eandem formam atque proposita tertia $xx - lx + mm \propto 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \propto l$. Vnde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c, est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \propto bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \propto 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \propto 0$, & $x + m \propto 0$. Vnde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m.

CAPVT III.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes reducuntur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $x x + b x + c c \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 * \underset{+cc}{-bbx} - bcc \infty 0$. Supposito autem cc majori quàm bb, ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \infty mm$. Vnde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \infty 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$. Vnde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * \underset{+cc}{-bbx} - bcc \infty 0$. Supposito autem bb majori quàm cc, habebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \infty mm$. Vnde constat, cc esse æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * \begin{matrix} -bb \\ -cc \end{matrix} x + bcc \infty 0$, eandem habens formam cum tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Vnde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Vnde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per consequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPVT IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} xx * - bbc \infty 0$. Et suppositâ c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde constat, cognitâ

gnitâ verâ radice b, æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + bb + bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty bbc$. unde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{b}\, x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} xx * - bbc \infty 0$. Et ſuppoſitâ b majore quàm c erit ejuſdem formæ cum ſecunda propoſitarum $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Vnde conſtat, c eſſe æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Porrò per comparationem poſtremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Vnde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, ſi vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}\, x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} xx * + bbc \infty 0$, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propoſitarum $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Vnde diſcimus, quòd c æquetur $l - b$; &, ſi vera radix b ſit cognita, quòd æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\-l\end{array} x - bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices inveſtigandas referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde sequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inservire.

CAPVT V.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, in quibus omnes termini extant.

Æquationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio sequens $x^3 \begin{matrix} -bxx \\ -c \end{matrix} \begin{matrix} +ddx \\ +bc \end{matrix} - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & constitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc est, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c est inventa æquari $l - b$. Vnde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{matrix} -lx \\ +b \end{matrix} + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde constat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{matrix} -lx \\ +b \end{matrix} + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro ſecunda propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto o$ per $x - b \propto o$ æquatio hæc $\begin{array}{l}x^3 - b\,xx - bc\,x - bdd \propto o.\\ \quad\;\;\, + c \quad\;\;\, + dd\end{array}$
& ſuppoſitâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quàm propoſitio ſecunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto o$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto - mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l}xx + lx + bb + bl - mm \propto o\\ \quad\;\; + b\end{array}$ duabus reliquis radicibus inveſtigandis eſſe utilem. Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $bdd \propto n^3$. Vnde ſequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{l}xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto o\\ \quad\;\; + l\end{array}$$ reliquis duabus inſervituram.

3 *Propositio.*

Pro tertia propoſitione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto o$ per $x - b \propto o$ eadem æquatio $\begin{array}{l}x^3 - b\,xx - bc\,x - bdd \propto o.\\ \quad\;\;\, + c \quad\;\;\, + dd\end{array}$
Et ſuppoſitâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum tertiâ propoſitarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto o$, & conſequenter ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \propto - l$, hoc eſt, $c \propto b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore invento ipſius c, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Vnde conſtat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $\begin{array}{l}xx + bx + bb \propto o\\ \quad\;\; - l \quad - bl\\ \qquad\quad\;\; - mm\end{array}$
ad duas inveſtigandas reliquas adhiberi poſſit. Denique, ex collatione

latione poſtremorum terminorum, habebitur $bdd \infty n^3$. Vnde ſequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad duas reliquas quærendas eſſe utilem.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-bc\\+dd\end{smallmatrix} x - bdd \infty 0$. Et ſuppoſitâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejuſdem formæ ac quarta propoſitio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, ſeu $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bb + bl + mm$. Vnde conſtat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+b\\+l\end{smallmatrix} x + bb + bl + mm \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. Vnde ſequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+b\\+l\end{smallmatrix} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi poſſe.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-dd\\+bc\end{smallmatrix} x + ddb \infty 0$. Et ſuppoſito bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum quinta propoſitarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum, habebimus $l \infty c + b$, vel $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bl - bb - mm$. Vnde diſcimus, cognitâ radice verâ b,

æqua-

æquationem hanc $xx \begin{matrix}-l\\+b\end{matrix} x - bl + bb + mm \infty 0$ duabus reliquis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Vnde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}-l\\+b\end{matrix} x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ duabus reliquis inveniendis inservire.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{matrix}+c\\-b\end{matrix} xx \begin{matrix}-dd\\-bc\end{matrix} x + ddb \infty 0$. Et, suppositâ c majori quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+l\\+b\end{matrix} x \begin{matrix}-mm\\+bl\\+bb\end{matrix} \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{matrix}+l\\+b\end{matrix} x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad investigandas duas reliquas utilis erit.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{matrix}+c\\-b\end{matrix} xx \begin{matrix}-dd\\-bc\end{matrix} x + ddb \infty 0$. Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

$l \infty b -$

$l \infty b - c$, seu $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \infty bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bb + bl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l} + bx \\ - l \end{array} - mm + bb - bl \infty 0$ ad inveniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \infty n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l} + bx \\ - l \end{array} - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPVT VI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

HVjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * * \begin{array}{l} + c^3 x \\ - b^3 \end{array} - bc^3 \infty 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \infty 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \infty bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * * \begin{array}{l} + c^3 \\ - b^3 \end{array} x - bc^3 \propto 0$. Et, si ponatur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \propto 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \propto - n^3$, hoc est, $c^3 \propto b^3 - n^3$. Vnde cognoscimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \propto 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porrò, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \propto bc^3$. Vnde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^4 * * \begin{array}{l} - c^3 \\ - b^3 \end{array} x + bc^3 \propto 0$, & habebit eandem formam atque tertia propositarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \propto n^3$, hoc est, $c^3 \propto n^3 - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \propto 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \propto bc^3$. Vnde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

CAPVT VII.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, tertio & quarto termino carentium.

Æ Quationes hæ ad ſequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 * * - b^3 c \infty 0$. Suppoſitâ vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} +b \\ +l \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \end{array} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis inveſtigandis inſervire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3 c$. unde ſequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{bb} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi poſſe.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 * * - b^3 c \infty 0$. Et ſupponendo b ſuperare ipſam c, habebit illa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis ſecundis terminorum habebimus $-b + c \infty -l$, hoc

 eſt,

est, $c \infty b - l$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \begin{matrix} b \\ -l \end{matrix}\, xx + \begin{matrix} bb \\ -bl \end{matrix}\, x + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas investigandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Vnde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3}\, xx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 - \begin{matrix} c \\ -b \end{matrix}\, x^3 * * + b^3 c \infty 0$ & erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{matrix} -l \\ +b \end{matrix}\, xx \begin{matrix} -bl \\ +bb \end{matrix}\, x - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire. Porrò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per consequens $c \infty \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{bb}\, xx - \frac{p^4}{bb}\, x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

CAPVT VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $\begin{array}{l} x^4 * - ccxx + d^3x - bd^3 \infty 0. \\ \qquad\;\; - bb \qquad + bcc \end{array}$ quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Vnde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} x^3 + bxx + n^3 \quad \infty 0 \\ \quad\;\; - m \quad + b^3 \\ \qquad\qquad - bmm \end{array}$ tribus reliquis indagandis inservire.

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} x^3 + bxx - mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\qquad + bb \end{array}$ ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \propto 0$ per $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & + d^3x & - d^3b \propto 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$

Supposito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 * + mm\,xx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \propto -n^3$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \propto bmm + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + bmm & \propto 0, \\ & + bb & + b^3 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis investigandis inservire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto d^3b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{lll} x^3 + bxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas indagandas posse usurpari.

3 *Propositio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & + d^3x & - d^3b \propto 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$

Et, supposito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Vnde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \propto -bb + cc$, hoc est, $cc \propto bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \propto -ccb + d^3$, hoc est, substituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto b^3 + bmm - n^3$. unde patet, si cognita sit radix vera b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ & - m^2 & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremo, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + bxx \begin{array}{l} + bbx \\ - mm \end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - bxx + ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l} + ccxx \\ - bb \end{array} \begin{array}{l} + d^3x \\ - ccb \end{array} - d^3b \propto 0$. Et supposito cc majore quàm b, ac d^3 majore quàm ccb, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - ccb$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto b^3 + bmm + n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} \begin{array}{l} + b^3 \\ + bmm \\ + n^3 \end{array} \propto 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3 b \propto p^4$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l} - ccxx \\ - bb \end{array} \begin{array}{l} - d^3x \\ + bcc \end{array} + d^3b \propto 0$. Et supposito bcc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc + bb$, hoc

hoc eſt, $cc \propto mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto bcc - d^3$; ideoque, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto bmm - b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} -mm \\ +bb \end{array} x \begin{array}{l} -bmm \\ +b^3 \\ +n^3 \end{array} \propto 0$ reliquis tribus quærendis inſervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \propto p^4$. Vnde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} -mm \\ +bb \end{array} x - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l} +cc \\ -bb \end{array} xx \begin{array}{l} -d^3 \\ -ccb \end{array} x + d^3 b \propto 0$. & ſupponendo cc majus quàm bb, habebit ipſa eandem formam cum ſexta propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens erit utraque ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc eſt, $cc \propto mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto n^3 - bmm - b^3$. Vnde patet, datâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} +mm \\ +bb \end{array} x \begin{array}{l} -n^3 \\ +bmm \\ +b^3 \end{array} \propto 0$ ad trium reliquarum inveſtigationem poſſe uſurpari.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \propto d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} +mm \\ +bb \end{array} x - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres quærendas eſſe adhibendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3+bxx+ccx-d^3 \infty o$ & $x-b \infty o$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l} +ccxx \\ -bb \end{array} \begin{array}{l} -d^3x \\ -bcc \end{array} +bd^3 \infty o$. Et supposito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * -mmxx-n^3x+p^4 \infty o$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb +cc$, hoc est, $cc \infty bb-mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \infty d^3+bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3-b^3+bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3+bxx \begin{array}{l} +bbx \\ -mm \end{array} \begin{array}{l} -n^3 \\ +b^3 \\ -bmm \end{array} \infty o$ ad reliquas tres investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3+bxx \begin{array}{l} +b^3x \\ -m^2b \end{array} -\frac{p^4}{b} \infty o$ ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPVT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4-lx^3+mmxx*-p^4 \infty o.$$
$$x^4+lx^3-mmxx*-p^4 \infty o.$$
$$x^4-lx^3-mmxx*-p^4 \infty o.$$
$$x^4-lx^3+mmxx*-p^4 \infty o.$$
$$x^4-lx^3+mmxx*+p^4 \infty o.$$
$$x^4+lx^3-mmxx*+p^4 \infty o.$$
$$x^4-lx^3-mmxx*+p^4 \infty o.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & * -bbdd \infty 0; \\ & -b & +bc & \end{array}$$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +bmm \infty 0 \\ & -b & -bl & -bbl \\ & & -bb & -b^3 \end{array}$$

ad reliquas tres investigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & * -ddbb \infty 0. \\ & -b & -bc & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quam dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -m^2 & -bm^2 \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera radix

radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\\-mm\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty 0$ & $x-b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx^3\\-b\end{array} \begin{array}{l}+ddxx\\-bc\end{array} * -bbdd \infty 0$. Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4-lx^3-mmxx*-p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \infty c-b$, hoc est, $c \infty b-l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty dd-bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bb+bl-mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+bxx\\-l\end{array} \begin{array}{l}+bbx\\+bl\\-m^2\end{array} \begin{array}{l}+bbl\\+b^3\\-bm^2\end{array} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+bxx\\-l\end{array} \begin{array}{l}+bbx\\+bl\\-mm\end{array} + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty 0$ & $x-b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx\\-b\end{array} \begin{array}{l}+ddxx\\-bc\end{array} * -bbdd \infty 0$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4+lx^3+mmxx*-p^4 \infty 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \infty c-b$, hoc est, $c \infty l+b$. Deinde, de, conferendo rertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bl + bb$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +mmx & +bmm \propto 0 \\ & +b & +bl & +bbl \\ & & +bb & +b^3 \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$. unde ſequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +l & +bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas eſſe utilem.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & * & +bbdd \propto 0. \\ & -b & +bc & & \end{array}$$

Et ſupponendo bc majus quàm dd, erit ipſa ejuſdem formæ cum quinta propoſitione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \propto 0$, ac per conſequens eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis ſecundis terminis, habebimus $l \propto b + c$, hoc eſt, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto bc - dd$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $dd \propto bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -bbl \propto 0 \\ & +b & +bb & +bmm \\ & & +mm & +b^3 \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi poſſe.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \propto p^4$, ac per conſequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & +mm & \end{array}$$

pro tribus reliquis inveſtigandis inſervire poterit.

6 *Pro-*

6 Propoſitio.

Pro ſexta propoſitarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & * + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & + b & + bl & + bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tres reliquas radices reſpicere.

Poſtremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & + b & + bl & \\ & & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit adhibenda.

7 Propoſitio.

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & * + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & - l & - bl & - bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$; ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & -l & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

Capvt X.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus, ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 * & +d^3 x & -bd^3 \propto 0, \\ & -b & +bbc & \end{array}$$

& habebit ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 * + n\ x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $d^3 \propto n^3 - bbl + b^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & +n^3 \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{c}-l\\+b\end{array} xx \begin{array}{c}-bl\\+bb\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres erit referenda.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{c}+c\\-b\end{array} x^3 * \begin{array}{c}+d^3\\-bbc\end{array} x - d^3 b \infty 0$. Suppoſitis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus, $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty bbl + b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{c}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{c}+bl\\+bb\end{array} x \begin{array}{c}+bbl\\+b^3\\-n^3\end{array} \infty 0$ tribus reliquis inſervire. Poſtremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bd^3$, ac per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{c}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{c}+bl\\+bb\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas erit utilis.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus, $x + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{c}+c\\-b\end{array} x^3 * \begin{array}{c}+d^3\\-bbc\end{array} x - d^3 b \infty 0$. Suppoſitis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 + lx * - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc eſt,

reſti-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty lbb + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + lbb \infty 0 \\ \quad + b & + bb & + b^3 \\ & & - n^3 \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad + b & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + c\,x^3 & * & + d^3 x & - d^3 b \infty 0. \\ \quad - b & & - bbc & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 + b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + n^3 \infty 0 \\ \quad + l & + bl & + b^3 \\ & & + bbl \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad + l & + bl & \end{array}$$

tribus reliquis inserviet.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - c\,x^3 & * & - d^3 x & + b d^3 \infty 0. \\ \quad - b & & + bbc & \end{array}$$

supponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipsa eandem formam

quinta

atque quinta propoſitio $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc eſt, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, ſubſtituto nempe valore c invento. Vnde patet, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\ 0 \\ \quad\;\; + b & + bb & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad\;\; + b & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas eſſe adhibendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - cx^3 & * & + d^3 x & + bd^3 & \infty\ 0. \\ \quad\;\; - b & & - bbc & & \end{array}$$

Suppoſitâ autem c majore quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \infty\ 0 \\ \quad\;\; + b & + bb & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad\;\; + b & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \substack{+c\\-b} x^3 * \substack{-d^3\\-bbc} x + bd^3 \infty 0$. Supponendo autem b majorem quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \substack{+b\\-l} xx \substack{+bb\\-bl} x \substack{-n^3\\-bbl\\+b^3} \infty 0$ reliquis tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde constat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \substack{+b\\-l} xx \substack{+bb\\-bl} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

CAPVT XI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

REducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & + ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty o, \\ - b & + bc & - bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Vnde constat, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - n^3 & \infty o \\ + b & + bb & - bbl & \\ & - bl & + bm^2 & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty o \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty o. \\ - b & + bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \infty o \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & +bmm \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \infty o \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty o$, & $x - b \infty o$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty o. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -n^3 \propto 0 \\ & +b & -mm & -bbl \\ & & +bb & -bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$
ad tres reliquas esse referendam.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \propto 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$
Suppositis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \propto l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \propto -mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl - b^3 - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -bmm \propto 0 \\ & +b & -bl & -bbl \\ & & +bb & +b^3 \\ & & & +n^3 \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus, $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$
ad tres reliquas esse referendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b$, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & + ddxx & - f^3 x & + bf^3 \infty 0. \\ - b & - bc & - bdd & \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + mmb - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - n^3 \infty 0 \\ + b & - bl & - m^2 b \\ & - bb & + bbl \\ & & + b^3. \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lll} x^3 + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ + b & - bl & \\ & - bb & \end{array}$$
ad tres reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{llll} x^4 - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 \infty 0. \\ + c & + dd & - f^3 & \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc est, substituto valore c in-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & - n^3 & \infty\ 0 \\ & +b & +bb & -bmm & \\ & & -mm & +bbl & \\ & & & +b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & +b & +bb & & \\ & & -mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 & \infty\ 0. \\ & -b & -bc & +bdd & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Vnde ſequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ & +l & +bb & +b^3 & \\ & & +bl & +bbl & \\ & & & +n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

tio-

tionem $\begin{array}{llll} x^3 & +b\,xx & -mm\,x & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +l & +bb & \\ & & +bl & \end{array}$ ad reliquas tres esse refe-
rendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $\begin{array}{lllll} x^4 & -c\,x^3 & +dd\,xx & +f^3\,x & -f^3\,b \propto 0. \\ & -b & +bc & & -bdd \end{array}$
Supposito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm - bbl - n^3 + b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & +mm\,x & +b\,mm \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & -bbl \\ & & & -n^3 \end{array}$$ tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & +mm\,x & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$ ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $\begin{array}{lllll} x^4 & -c\,x^3 & +d^3\,xx & +f^3\,x & -f^3\,b \propto 0. \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$
Supposito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \propto 0 \\ & +b & +bb & +bmm \\ & & -bl & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 Propositio.

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \propto 0. \\ & -b & -bc & -bd^2 & \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bb\,x & +b^3 \propto 0 \\ & -l & -bl & -bbl \\ & & -m^2 & -bmm \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & -bl & \\ & & +mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

11 *Propositio.*

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^4 & -ddxx & +f^3x & -bf^3 \infty 0. \\ & -b & -bc & +ddb & \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb - b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +n^3 \infty 0 \\ & -l & -bb & +bbl \\ & & +bl & -mmb \\ & & & -b^3 \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & -bb & \\ & & +bl & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

12 *Propositio.*

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0. \\ & -b & -bc & -bdd & \end{array}$$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & + mm & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + l & + bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propositio.*

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & \\ - b & - bc & - bdd & - f^3b \infty 0. \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \infty f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n + b^3 + bbl - bmm$. Vnde constat, cognitâ

verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -bbx & +b^3 & \propto 0 \\ & +l & -bl & +bbl & \\ & & +m^2 & +n^3 & \\ & & & -bm^2 & \end{array}$$
reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \propto p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -bbx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +l & -bl & & \\ & & +mm & & \end{array}$$
ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem
$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b & \propto 0. \\ & -b & -bc & -bdd & & \end{array}$$
Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \propto bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \propto - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto b^3 + bbl - bmm - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 & \propto 0 \\ & +l & +bl & +bbl & \\ & & -m^2 & -bm^2 & \\ & & & -n^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \propto f^3 b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +l & +bl & & \\ & & -m^2 & & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

15 *Pro-*

15 *Propositio.*

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 \propto 0. \\ & - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 \propto 0 \\ & + l & + bl & + bbl \\ & & - mm & + n^3 \\ & & & - bm^2 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto f^3b$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & + l & + bl & \\ & & - mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA
hîc in genere nonnulla.

1. NOtandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, patebit,

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2^{di}, 4^{ti}, &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes :) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis + & —; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cùm singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Vnde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvè falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; &, deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum + vel — designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} x - bc \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx \begin{array}{l}+b\\-c\end{array} x - bc \infty 0$. Vnde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ $+b$ & falsæ $-c$; & $-bc$ esse productum ex multiplicatione falsæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\-c\end{array} x + bc \infty 0$, ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx \begin{array}{l}+b\\+c\end{array} x + bc \infty 0$. Vnde apparet, $+b+c$ esse summam duarum verarum radicum, & $+bc$ esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio sequens: $x^3 \begin{array}{l}-b\\-c\\+f\end{array} xx \begin{array}{l}+bc\\-bf\\-cf\end{array} x + bcf \infty 0$. Quare mutatis signis terminorum loco pari positorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 \begin{array}{l}+b\\+c\\-f\end{array} xx \begin{array}{l}+bc\\-bf\\-cf\end{array} x - bcf \infty 0$. Vnde apparet, secundum termi-

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b$, $+c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, & $x-d\infty 0$, quæ sit

$$x^3 \begin{array}{l}-b\\-c\\-d\end{array} xx \begin{array}{l}+bc\\+db\\+dc\end{array} x - bcd \infty 0.$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis signis reliquorum, habebimus

$$x^3 \begin{array}{l}+b\\+c\\+d\end{array} xx \begin{array}{l}+dc\\+bd\\+bc\end{array} x + bcd.$$

Vnde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b$, $+c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, $x-d\infty 0$, & $x+f\infty 0$ sequens æquatio

$$x^4 \begin{array}{l}-b\\-c\\-d\\+f\end{array} x^3 \begin{array}{l}+bc\\+bd\\+cd\\-bf\\-cf\\-df\end{array} xx \begin{array}{l}-bcd\\+bcf\\+bdf\\+cdf\end{array} x - bcdf \infty 0.$$

Vnde mutatis signis terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus

$$x^4 \begin{array}{l}+b\\+c\\+d\\-f\end{array} x^3 \begin{array}{l}+bc\\+bd\\+cd\\-bf\\-cf\\-df\end{array} xx \begin{array}{l}+bcd\\-bcf\\-bdf\\-cdf\end{array} x - bcdf \infty 0.$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in ſe invicem ductarum. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam radicem $-f$ æquari ſummæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, ſummam productorum ex binis, per $-$ deſignatorum, æquari reliquæ ſummæ productorum ex binis, cum ſigno $+$ affectorum. Non ſecus ſe res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, $x-d \infty 0$, & $x-f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & +bcdf \infty 0. \\ & -c & +bd & -bcf & \\ & -d & +cd & -bdf & \\ & -f & +bf & -cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf. \\ & +c & +bd & +bcf & \\ & +d & +bf & +bdf & \\ & +f & +cd & +cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Atque apparet, ſecundum terminum $+b+c+d+f$ eſſe ſummam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis ternis; ac denique $+bcdf$ eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in ſe invicem ductarum.

CAPVT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falsarum datâ.

Oportet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutentur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty\, 0$ una ex falsis radicibus data, quæ sit b, atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty\, 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulatur Capitis V. Prop^tio^ 2^da^; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx \begin{array}{l} +lx \\ +bx \\ \end{array} \begin{array}{l} +bb \\ +bl \\ -mm \end{array} \infty\, 0 \;\&\; xx \begin{array}{l} +bx \\ +lx \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty\, 0.$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum parium, habebimus

$$xx \begin{array}{l} -lx \\ -bx \\ \end{array} \begin{array}{l} +bb \\ +bl \\ -mm \end{array} \infty\, 0 \;\&\; xx \begin{array}{l} -bx \\ -lx \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty\, 0,$$

quarum quælibet quæsito satisfaciet.

CAPVT XIII.

Ad tollendum secundum terminum Æquationum QVADRÀTARVM.

$xx + lx - mm \infty\, 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty\, x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty\, 0$.

$$xx - lx - mm \infty\, 0. \text{ Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty\, x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty\, x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{l} zz * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty\, 0 \\ yy * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty\, 0. \end{array} \right.$$

$$xx - lx + mm \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \infty x,\\[1em] \frac{1}{2}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lll} zz\,* & -\frac{1}{4}ll & \infty 0.\\ & +mm & \\ yy\,* & -\frac{1}{4}ll & \infty 0.\\ & +mm & \end{array}\right.$$

CVBICARVM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\[2em] \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & +m^2 & -n^3 & \\ & & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ y^3\,* & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & +m^2 & -n^3 & \\ & & -\frac{1}{3}lm^2 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\[2em] \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & -m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & -n^3 & \\ y^3\,* & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\[2em] \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & +mm & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \\ y^3\,* & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & +m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & -n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\[2em] \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & -m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \\ y^3\,* & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & -n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & -n^3 & \end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{llll} z^3\,* & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 & \infty 0.\\ & +m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & -n^3 & \end{array}$$

$x^3 +$

$x^3+lxx-mmx+n^3 \propto 0$. Sit $z-\frac{1}{3}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 & \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QVADRATO-QVADRATARVM.

$x^4-lx^3+mmxx-n^3x+p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z \propto x, \\ \frac{1}{4}l-y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4-lx^3-mmxx+n^3x+p^4 \propto 0$. Sit $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z \propto x, \\ \frac{1}{4}l-y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4-lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \propto 0$. Sit $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z \propto x, \\ \frac{1}{4}l-y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4-lx^3-mmxx-n^3x+p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z \propto x, \\ \frac{1}{4}l-y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$
\begin{array}{lllll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 & \propto 0. \\
 & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & +p^4 &
\end{array}
$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$
\begin{array}{lllll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm & \propto 0. \\
 & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & +p^4 &
\end{array}
$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$
\begin{array}{lllll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm & \propto 0. \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & +p^4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x^4 - lx^3 + mmxx - \\
n^3x - p^4 \propto 0.\ \text{Esto}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{4}l + z \propto x, \\
\\
\frac{1}{4}l - y \propto x,
\end{array}
\right\}
\text{eritque}
\left\{
\begin{array}{lllll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\
 & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & -p^4 & \\
y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\
 & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & -p^4 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
x^4 - lx^3 - mmxx + \\
n^3x - p^4 \propto 0.\ \text{Esto}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{4}l + z \propto x, \\
\\
\frac{1}{4}l - y \propto x,
\end{array}
\right\}
\text{eritque}
\left\{
\begin{array}{lllll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\
 & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & -p^4 & \\
y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 & \\
 & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\
 & & & -p^4. &
\end{array}
\right.
$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty\, o.\ \text{Esto} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3\, y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\, o.\ \text{Esto} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3\, y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx - n^3x - p^4 \infty\, o.$ Esto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & +\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx + n^3x - p^4 \infty\, o.$ Esto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & +\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty\, o.$ Esto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & +\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx + n^3x - p^4 \infty\, o.$ Esto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & +\tfrac{1}{8}l^3\, z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty\, o. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

 Vnde

Vnde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualis eſſe $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit; transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno $+$, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

Capvt XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

Pro *Cubicis.* Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, tranſmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere quadratum ultimi termini divisum per incognitam quantitatem R esse æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty\, 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty\, x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty\, 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty\, 0$, adeoque divisis per n^3, fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \infty\, 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \infty\, 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty\, 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty\, x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty\, 0$, hoc est, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \infty\, 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex supra posita suppositione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty\, 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty\, x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty\, 0$, hoc est, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \infty\, 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty\, 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \infty\, x$, &, transformatâ æquatione fiet, $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3pp}{R} - p^4 \infty\, 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4R^2 + n^3ppR^3 - p^4R^4 \infty\, 0$, ac proinde divisis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty\, 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty\, 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty\, x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * + p^4 \infty\, 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Suppositâ $x \propto \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \propto 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \propto 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1^{mo} de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusquè æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

CA-

CAPVT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 \infty 0$. Supponamus $zz - zx - mm \infty 0$, hoc est, $x \infty \frac{zz - mm.}{z.}$. Vnde, transformatâ æquatione, habebitur
$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0,$$
hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 \infty 0$, vel $z^6 \infty n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognita autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x \infty \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm \infty 0$, eritque $x \infty \frac{mm - zz}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 \infty 0$, hoc est, $z^6 \infty - n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \infty - \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x \infty \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$, supponaturque $zz - zx + mm \infty 0$, hoc est, $x \infty \frac{zz + mm}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3}$ $- \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 \infty 0$. seu $z^6 \infty n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$

Vnde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4} n^5$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPVT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{lll} lxx & -mmx & +n^3 \infty 0, \\ b & -cc & -d^3 \end{array}$ hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l + b}$. in quâ litera x pauciorum est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{ll} mmxx & + d^3 x \\ cc & - n^3 \end{array}}{l + b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem $\begin{array}{lll} +m^2 xx & -n^3 x & -ln^3 \infty 0. \\ +cc & +lm^2 & -bn^3 \\ -ll & +bm^2 & \\ -lb & +d^3 & \end{array}$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Vnde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \propto o$ & $xx - bx + dd - bb \propto o$, habebimus $xx - bx \propto cc$, & $xx - bx \propto + bb - dd$, ergo $cc \propto bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ. Vnde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.bbx} - \sqrt{dx} \propto o$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \propto \sqrt{C.bbx}$, & $z \propto \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habebimus $c + R - z \propto o$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \propto bbx$, & $zz \propto dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \propto z - c$, ideoque $R^3 \propto z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \propto bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \propto o$, & per consequens $z^3 \propto + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \propto dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \propto dxz$. Ergo erit

$$\begin{array}{llll} 3czz & -3ccz & +c^3 & \propto o, \\ & -dx & +bbx & \end{array}$$

& substituto dx loco zz, habebimus

$$\begin{array}{llll} 3cdx & -3ccz & +c^3 & \propto o, \\ & -dx & +bbx & \end{array}$$

hoc est,

$$\begin{array}{lll} 3ccz & \propto 3cdx & +bbx \\ dx & & c^3 \end{array}$$

seu $z \propto \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet $zz \propto \frac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \propto dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \propto 3ccdx + ddxx$, hoc est, $\frac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \propto z$. Inventa autem est $z \propto \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \infty 0. \\ & -6bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

FINIS.

Ad

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematatum in Illustri Leidensi Academia Professori,

ERASMIVS BARTHOLINVS

S. P.

NIsi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meæ conscientiæ interpretem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriæ laudi, indies deservire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusque varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleræque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum

 tem-

tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, uſque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ diſceſſurus, Iſagogen Carteſianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offenſas, verùm etiam ſimultates varias ſubierim; non ignoro, quæ futura ſit de hiſce jam edendis ſententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præſertim quia pietas & obſequium cauſam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improviſa eſt calumniandi vanitas. Eſt ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conſcientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum ſuæ detractum iri gloriæ exiſtimant, quantum ceſſerit alienæ: poſtremò, ignaviſſimus quiſque aliorum ſcripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio eſt. Quod recordantem, poſteritatis magna miſeratio ſubit. Quot enim præclara inventa putas obſcurari, propter ſcelus hoc obtrectandi? Plerique ſe intra perpetuum ſilentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici,

nul-

nullam ex meis laboribus ſperare laudem; tanta tamen mihi ſemper fuit reverentia poſterûm, ut cenſuram erroris non tam reformidem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore niſi Artifex judicare, ita niſi Mathematicus non ſatis poteſt perſpicere Mathematica; tuæ potiſſimùm ſententiæ hæc exponuntur. Eximium habent uſum ea quæ ſequenti tractatu exponentur, ad numeroſam Æquationum reſolutionem, ut reliquas utilitates pertranſeam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inſpexerint. Et ſi qui fuerint qui hæc recuſaverint, ſciant ſe nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conſcientiam. Te verò, Vir Clariſſime, ſi offenderint, omnibus commendationibus deſtituta reputabo. Vale.

POSTERIOR TRACTATUS
DE
LIMITIBUS
ÆQUATIONUM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBVS ÆQVATIONVM.

CAPVT I.

De Æquationum Quadratarum ſeu duarum dimenſionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem erit $mm \infty lx - xx$, & ſi prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviſo utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per tranſpoſitionem propoſitæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars eſt realis, & lx majus quàm mm. Vnde diviſo utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propoſitæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, ſed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Vnde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque ſi utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rurſus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde ſi uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Poſtremò, quandoquidem x major eſt quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Vnde radix æquationis propoſitæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, ſed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPVT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$.

PEr transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Vnde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisâ utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non

sit

ſit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimenſionibus ipſius n^3, ſumendoque loco nn rectangulum ſub duabus quantitatibus; quarum alterutra non ſit ipsâ n minor. Eritque hoc ad ſequentia notatu dignum.

$$Prop. 3.\ x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rurſus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per tranſpoſitionem æquationis propoſitæ eſt quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn + mm}$. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ eſſe major quam $\frac{n^3}{mm + nn}$, ſed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Poſſumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimenſionum ipſius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

Caput III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

$$Prop. 1.\ x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rurſus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & conſequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propoſitæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

$$Prop. 2.\ x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rurſus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & conſequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per tranſpoſitionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$

major quàm x. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ major quàm l & n, sed minor quàm $l+n$. Manifestum est quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n sumi possit minor trium dimensionum ipsius n^3, quando x major est; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimensionum ipsius n^3 accipi queat, & sic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Est etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc est, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, sed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonstratur præterea $nnx + lnx$ majus esse quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & consequenter x major quàm $\frac{n.n}{l+n}$, quandoquidem n major est quàm x.

Caput IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc si x æquetur ipsi l, erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{m.m}$ æqualis. Ideoque, si vicissim l æquetur ipsi $\frac{n^3}{m\,m}$ hoc est, $lmm \infty n^3$, erit similiter x radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & $\frac{n^3}{m\,m}$. Præterea si $x^3 - lxx$ est realis, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & consequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd si autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor sit, transponatur proposita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem supponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx; & si xx minus est quam mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quam mm, & x major quam m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quam n, & nxx majus quam n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mxx majus quam mmx, & nxx majus quam n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quam x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quam l, m, & n, sed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty\ 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + mmx \infty\ n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed est quoque $x^3 + lxx \infty\ n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò est etiam $lxx + mmx \infty\ n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui est $x^3 + lxx + mmx \infty\ n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty\ 0$.

Per transpositionem erit $mmx + n^3 \infty\ lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rursus erit $x^3 + n^3 \infty\ lxx - mmx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per transpositionem est quoque $x^3 + mmx \infty\ lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty\ 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \infty\ mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \infty\ mmx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rursus erit $lxx + n^3 \infty\ mmx - x^3$, & consequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Pro-

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major est quàm l, tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l, tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per consequens $l + m$ major quàm x. Quòd si autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus est quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major sit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x, si major fuerit x quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si verò m major est quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ est ma-

jus.

jus quàm n^3, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm + mm}$.

CAPUT V.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \infty n^3 x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed est quoque $x^4 - p^4 \infty n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per transpositionem est etiam $n^3 x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utraque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propositæ est major quàm n & p, sed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quam $n + p$.

Prop. 3. $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3 x$, ac per consequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3 x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4. Sed est præterea $x^4 + n^3 x \infty p^4$, ideoque $p^3 x + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p.

CA-

CAPVT VI.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major est quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major qûàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed est etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l+p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p, at minor quàm $l+p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty p^4 - lx^3$ ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui est etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l+p}}$, sed minor quàm p & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc caſu, quoniam x^3 major eſt quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus eſt quàm x^3, erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major eſt quàm x. Atqui eſt $x^4+lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l}+lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & diviſâ per pp, habebitur $ppx+llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: ſiquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipſarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri poſſint.

CAPVT VII.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentibus.

$$\textit{Prop. } 1.\quad x^4 * -mmxx+n^3x-p^4 \infty 0.$$

PEr tranſpoſitionem erit $x^4-mmxx \infty p^4-n^3x$. Vnde apparet, quòd, ſi fuerit xx æquale ipſi mm, hoc eſt, $x \infty m$, etiam x ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ ſit æqualis futura. Ideoque ſi fuerit m æqualis ipſi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam ſive tres habuerit, ſemper erit inter duos hoſce terminos. Præterea cognoſcitur, ſi duo hi termini fuerint æquales, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, ſubſtituto mn^3 loco p^4 in æquatione propoſita, eâque diviſâ per $x-m$, fore, ut non poſſit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3 x \infty p^4 - mmxx$. Vnde constat, si x æqualis fuerit ipsi n, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & si fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos. Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3 x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3 x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 - n^3 x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Eodem modo est $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3 x$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per transpositionem est quoque $mmxx + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Consimili ratione demonstrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & consequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + n^3 x \infty p^4 - mmxx$, ac per conſequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc eſt, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui eſt quoque $mmxx + n^3x \propto p^4 - x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 + mmxx + n^3x \propto p^4$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus eſt quàm p^4, ac per conſequens, diviſâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propoſitæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3x + p^4 \propto mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter eſt $x^4 + p^4 \propto mmxx - n^3x$, & conſequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea eſt $x^4 + n^3x \propto mmxx - p^4$, ac per conſequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \propto n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed eſt etiam $x^4 + p^4 \propto n^3x - mmxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + mmxx + p^4 \propto n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \propto n^3x - p^4$. Vnde patet,

tet, si xx æquatur ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint; neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty mmxx - p^4$. Vnde similiter discimus, si x^3 æquatur ipsi n^3, hoc est, $x \infty n$, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{pp}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, ideoque $mmxx + n^3 x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $mm + nn$ majus quàm xx, hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessariò minorem esse quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique existente $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, erit similiter $mmxx + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa est $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x, erit consequenter $mmx\sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx\sqrt{mm + nn}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{mm\sqrt{mm + nn}, + n^3}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quòd x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$.

CAPVT VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Vnde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$ ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Vnde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$; ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x

major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$, majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quam lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx \infty p^4 - lx^3$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $llpp$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde est $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea est $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{pp}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Vnde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m, fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPVT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. I. $x^4-lx^3 * +n^3x-p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4-lx^3 \infty p^4-n^3x$. Vnde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æquationis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4, & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si x æqualis est ipsi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3 x - lx^3$. Vnde patet, si fuerit x æqualis ipsi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3 x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo est $x^4 - n^3 x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, n, & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$ etiam constat, quod $lx^3 + n^3 x$ est minus quàm x^4: & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x, erit $l^3 x$ minus quàm lx^3, ideoque $l^3 x + n^3 x$ multo minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Pro-

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo est $x^4 + n^3x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 + n^3x \infty p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 \infty n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc est, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3x - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty lx^3 - p^4$. Vnde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l+n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l+n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l+n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l+n$. Præterea, quoniam $l+n$ major est quàm x, si fuerit x

major

major quàm n, erit necessariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia $lx^3 + n^3x$ majus est quàm p^4, erit & $lnnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

CAPVT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3, hoc est, $l+n$ major quàm x, & x minor quàm n. Multò igitur magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$ constat, esse $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Sed inventa est $l+n$ major quàm x, ac per consequens $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propositæ, sive hæc duas sive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ semper major est quàm x, si ponatur x quoque major quàm n; manifestum est eam esse inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam est $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4; erit $lnnx + n^3x$

 majus

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l + n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \infty lx^3 - n^3x$; ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \infty lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Iam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l + m + n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x$ $+ n^3x$

$+ n^3 x$ æquale aut majus quàm $lx^3 + mmxx + n^3 x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$. Vnde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx \propto x^4 + n^3 x + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx$ majus quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx + mx$ majus quàm xx, & $l + m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l + m$. Vnde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minór quàm m, quandoquidem & $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4; erit $lmxx + mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$, at minor quàm $l + m$.

Pro-

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, si major est quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam est $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, erit $x \infty l$, & $ln^3 \infty n^3x$, & $n^3x + p^4 \infty mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \infty mmxx$, & $x \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Vnde patet, si fuerit $l \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm \infty ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc est, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Iam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p, sitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l, ipsa sit æqualis vel major quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minùs quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc casu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cùm est $llmm \infty ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty - n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4, substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Iam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l, etiam ipsa minor sit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per consequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l, quando est $llmm \propto p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur, quòd x major est quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto x^4$, & per consequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n+p$ major quàm x. Porrò, quoniam est $x^4 \propto lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx+mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lxx+mmx+n^3$, erit multo magis major quàm $l^3+m^3+n^3$, $l^3+lmm+n^3$, & $2lmm+n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus est quàm $l^4+m^4+n^4$, quàm $m^4+n^4+p^4$, & sic de reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p, & $lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \propto x^4$, erit $lx^3+mmxx+nnxx+ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx+mm+nn+pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si appelletur zz, habebitur $lx+mm+nn+pp \propto xx+zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessariò minor erit quàm $mm+nn+pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex prima ma & majori ex ſecunda, eſſet reliqua $l\,x$ aut æqualis, aut major quàm $x\,x$. Quod foret abſurdum, quandoquidem x demonſtrata eſt major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $x\,x \propto l\,x + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifeſtum verò eſt, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus eſt quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propoſitæ æquationis neceſſariò ſit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. II. $x^4 - l\,x^3 - mm\,x\,x + n^3\,x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - l\,x^3 - mm\,x\,x \propto p^4 - n^3\,x$. Vnde, ſi fuerit $x^4 - l\,x^3 - mm\,x\,x \propto 0$, hoc eſt, omnibus per $x\,x$ diviſis, $x\,x - l\,x - mm \propto 0$, erit quoque $p^4 - n^3\,x \propto 0$. Hoc eſt, ſi fuerit $x\,x \propto l\,x + mm$, vel $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \propto n^3 x$, vel $x \propto \frac{p^4}{n^3}$. Quare conſtat, ſi fuerit $\frac{p^4}{n^3} \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ fore æqualem ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm $l\,x^3 + mm\,x\,x$, hoc eſt, $x\,x$ majus quàm $l\,x + mm$; erit p^4 etiam majus quàm $n^3\,x$, hoc eſt, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Iam exiſtente $x\,x$ majori quàm $l\,x + mm$, erit $x\,x \propto l\,x + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi vocetur zz: habebitur $x\,x \propto l\,x + mm + zz$, & $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 minus quàm $l\,x^3 + mm\,x\,x$, hoc eſt, $x\,x$ minus quàm $l\,x + mm$; erit & p^4 minus quàm $n^3\,x$, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc exiſtente $x\,x$ minori quàm $l\,x + mm$,

erit

erit $xx \infty lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur zz, habebitur $xx \infty lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \infty p$, erit quoque $n^3x \infty lx^3 + mmxx$, & $x \infty \frac{n^3}{lp + mm}$. Vnde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc est, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Iam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major sit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p, ipsa sit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx + mmxx$, erit n^3x minor

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc n^3x minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Vnde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3+lpp+mmp+n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \propto mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \propto n^3x$, hoc eſt, $x \propto n$, erit $mmxx + p^4 \propto lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn+p^4}{l} \propto x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Iam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n, & ipsa etiam minor sit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor est quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc casu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Vnde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideoque si fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc est, si est $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$ erit $p^4 \infty n^3x$, seu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Vnde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus sit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, seu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc est, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 minus

nus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque p^4 minus quàm $n^3 x$, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus ſit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \infty mm$, vel $xx \infty - lx + mm - zz$, hoc eſt, $x \infty - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perſpicuum eſt, cùm $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; ſin minus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, neceſſariò eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.

JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Clarissimo, Doctissimoque Viro,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac pro-

 inde

inde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quàm maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò Coni sectiones *appellarunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni, at verò earundem singulas infinitis quoque modis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci, ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quod*

linea-

linearum curvarum ſecundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque eſſentia, cum exacta ſpecierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonſtrata ſint, quàm quòd tam in tractatione ortus & generationis, quàm in demonſtratione eſſentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & ſimpliciſſima via deflexum ſit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano ſimpliciſſimè & quidem diverſimodè generantur, intellectum & imaginationem ad geneſin linearum curvarum ſecundi generis quaſi ſponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò ſpectantia meditatus ſum, tu nunc amiciſſime Schooteni, *copiam tibi fieri deſideres, en, quantum in me eſt, deſiderio tuo ſatisfacio, quæque de eodem argumento à me quondam conſcripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera autem, quæ ſparſim tantùm annotata ſunt, ſi modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata ſuo quoque tempore tibi miſſurus, Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

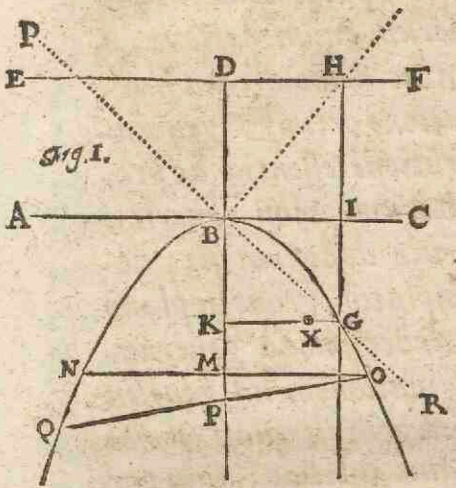


Fig. I.

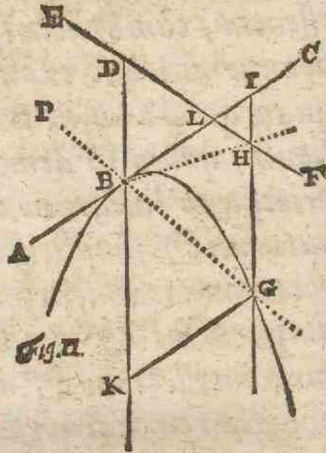


Fig. II.

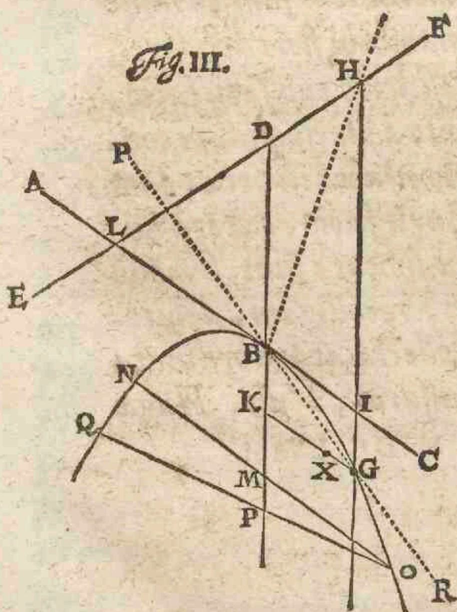


Fig. III.

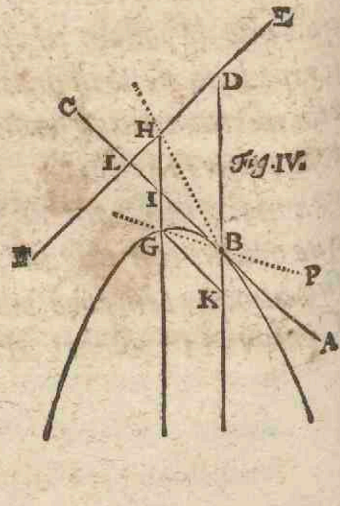


Fig. IV.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER PRIMVS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo ſui puncto ſibi ſemper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujuſdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem ſit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum ſemper per prædictum mobile punctum tranſiens ſecum ducat, atque ita ſimul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis interſectione curva deſcribatur linea; recta, quæ, uti prædictum eſt, ſibi ſemper parallela movetur aut incedit, *Deſcribens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immotà manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei eſt deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

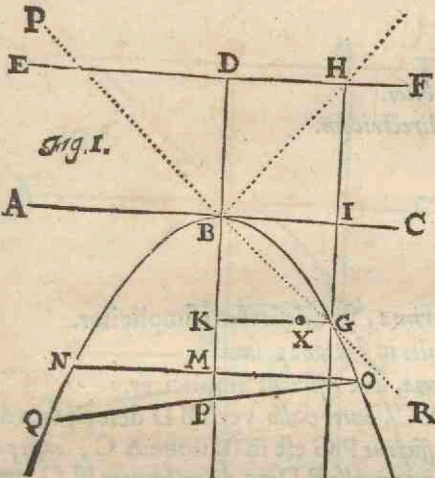
Cum *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus,

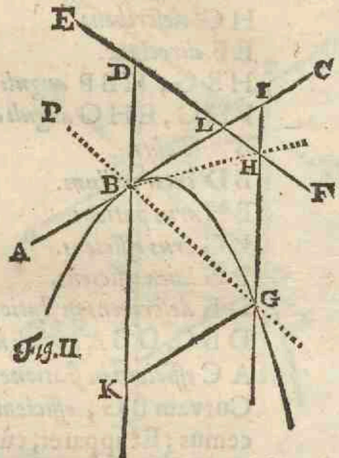
X.

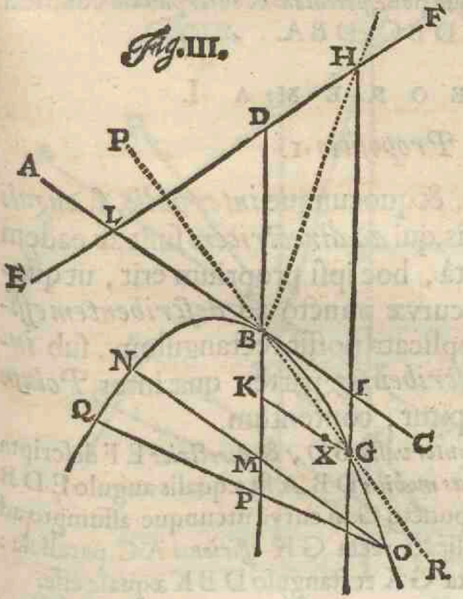
Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur *in statione prima;* adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

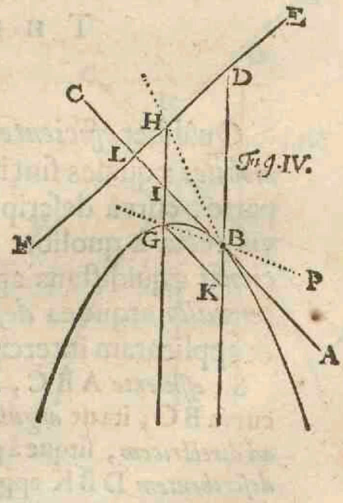
Ut

Vt in appositis figuris, si recta H G sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam E F, eodemque illo motu secum ducere crus B H anguli H B G, circu-









lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens.*
EF *directrix.*
HBG, HBP *anguli mobiles.*
FHG, EHG *anguli ad directricem.*
B *Polus.*
BD *intervallum.*
BH *crus patiens.*
BG *crus efficiens.*
PG *linea efficiens.*
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

Propositio 1.

Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is

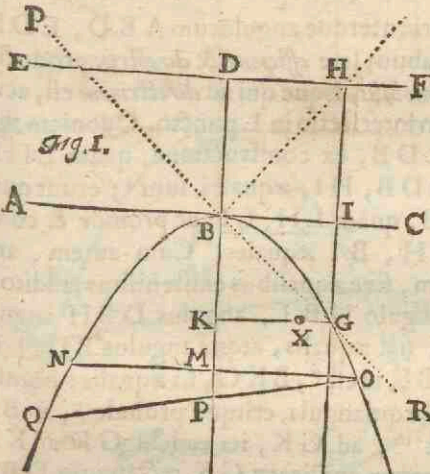


Fig. I.

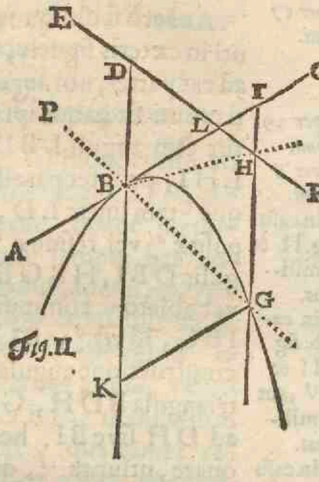


Fig. II.

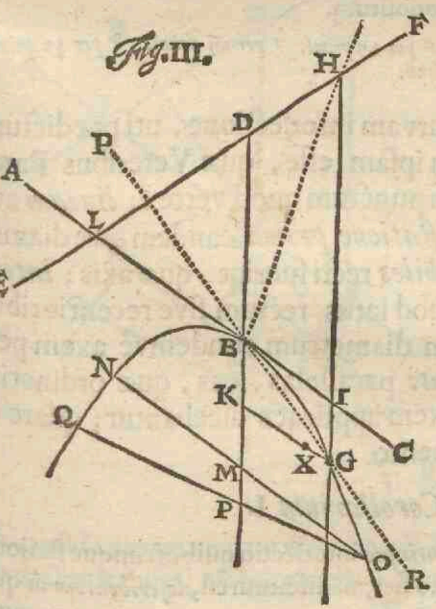


Fig. III.

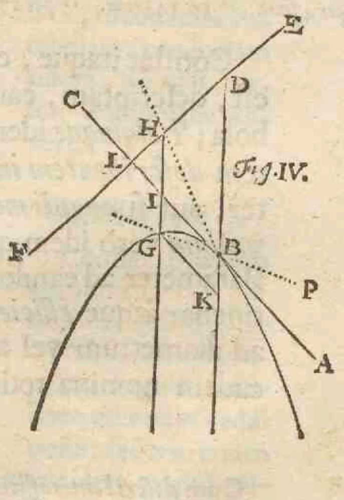


Fig. IV.

 qui-

qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit [1] ut HI ad IB, ita IB ad IG, id est [2], ut DB ad GK, ita GK ad BK. ac proinde [3] quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale erit.

At verò si obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acuti erunt. sit itaque ipsarum intersectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex constructione, quàm LIH, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales sunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compositæ [a] vel residuæ [b] DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iisdem, sive æqualibus existentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id est [6], BGK, fiat æqualis, atque angulus BDH ex constructione angulo DBI, id est [7], BKG, sit æqualis: erunt [8] triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde [9], ut BD ad DH sive BI, hoc est [10], ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut supra [11], quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod est propositum.

[1] per Cor. 8 sexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 sexti. [4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in casu fig. II & similibus. [b] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [c] in casu fig. II. & sim. [d] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 sexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 sexti.

Constat itaque, curvam intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *describentis efficientisque* intersectio quibuscunque stationibus in uno tantùm puncto fiat, manifestum est, *describentem* in quacunque

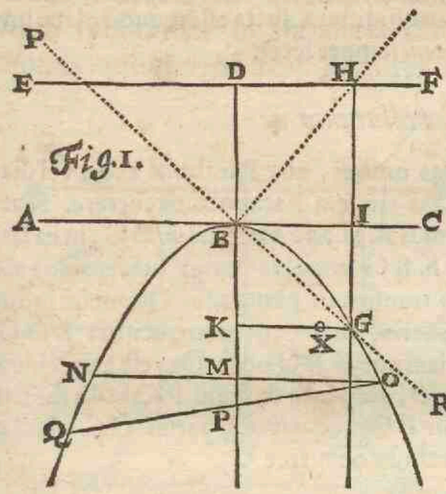


Fig. I.

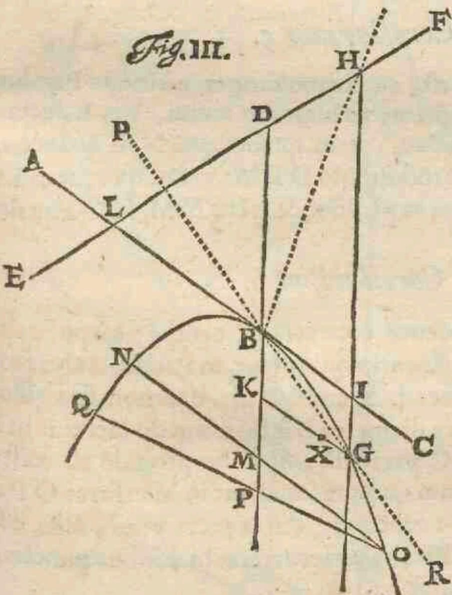


Fig. III.

cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti G B I, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., B G, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

Corollarium 3.

Constat præterea angulum G B K indefinitè quidem diminui, omnique proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* B G nunquam cum *describente* B K coincidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

[1] per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens.
[3] per Corol. 2 hujus.
[4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Vt, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

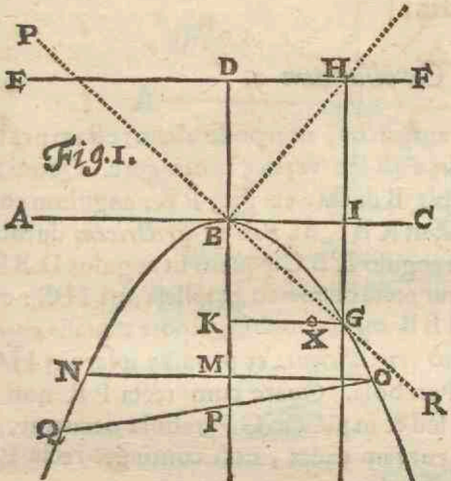
Corollarium 6.

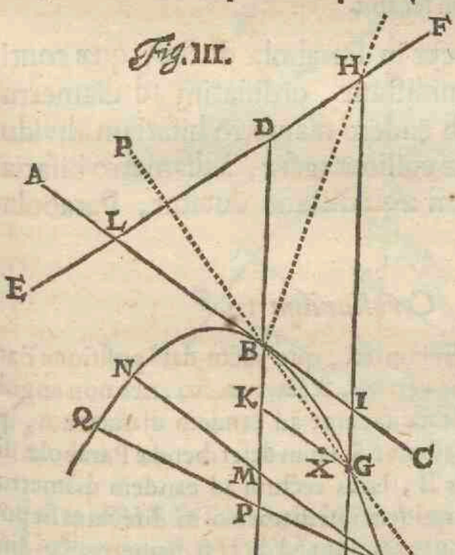
Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

[6] per Corol. præcedens.
[7] per 2 sexti.
[8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ ſunt: & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam biſariam dividat omnes quoque ipſi æquidiſtantes biſariam ſecabit.





Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, ſi applicatæ ſint G K, N M, erit [1] quadratum rectæ G K ad quadratum ipſius N M, ut rectangulum D B K ad rectangulum D B M, id eſt [2], ut B K ad B M.

[1] per 1 hujus.

[2] per 1 sexti.

Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

[3] *per Corol. 1 hujus.*

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti termi-

Fig. I.

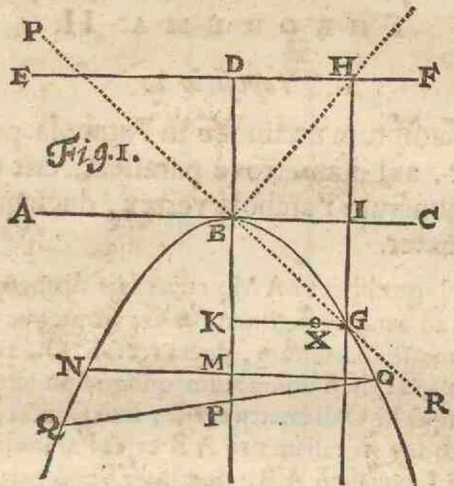
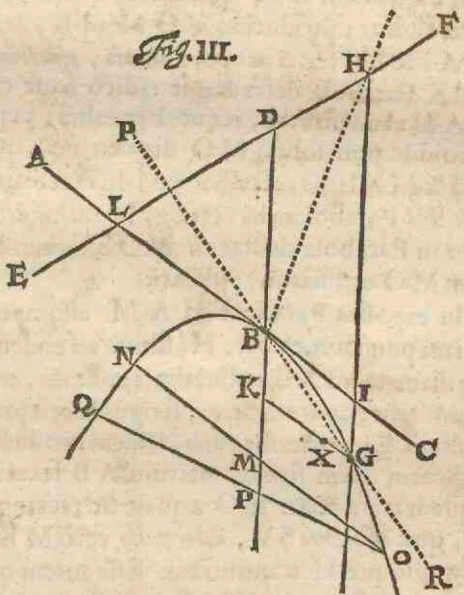


Fig. III.



terminum rectâ E D F in angulo E D B ipsi A B D æquali, *efficiente* A C, & *intervallo* B D, ad *directricem* E F curvam describere, ut N B G: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per assumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque assumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diameterve A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; sitque per punctum M, in curva utcunque assumptum, ducta recta M O, axi sive diametro A B parallela: dico assumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum esse; imò si ductâ, per M rectâ S V, ita ut ab axe sive diametro A B extra Parabolam abscindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut sit M K ipsis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V, *intervallo* verò M K Parabola describatur: dico hanc cum exposita Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non solùm M O diametrum, atque M verticem fore, sed & M K latus rectum esse ad dictam diametrum M O pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omnesque ipsi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque ad hanc ipsam M O ordinatim applicari.

Sit enim in exposita Parabola H A M assumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; sitque ab eodem ducta H G ad axem sive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipsi S V æquidistans, quarum prior, si opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; posterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem sive diametrum A B secet in D. Et apparet [1], si quadratum rectæ H O æquale sit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describetur, per punctum quoque H transituram. Esse autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo saltem judicio, breviter simpliciterque satis in eum qui sequitur modum demonstratur.

Quoniam est [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, dupli-

[1] ex 1 hujus.

[2] per 1 hujus, & 17 sexti.

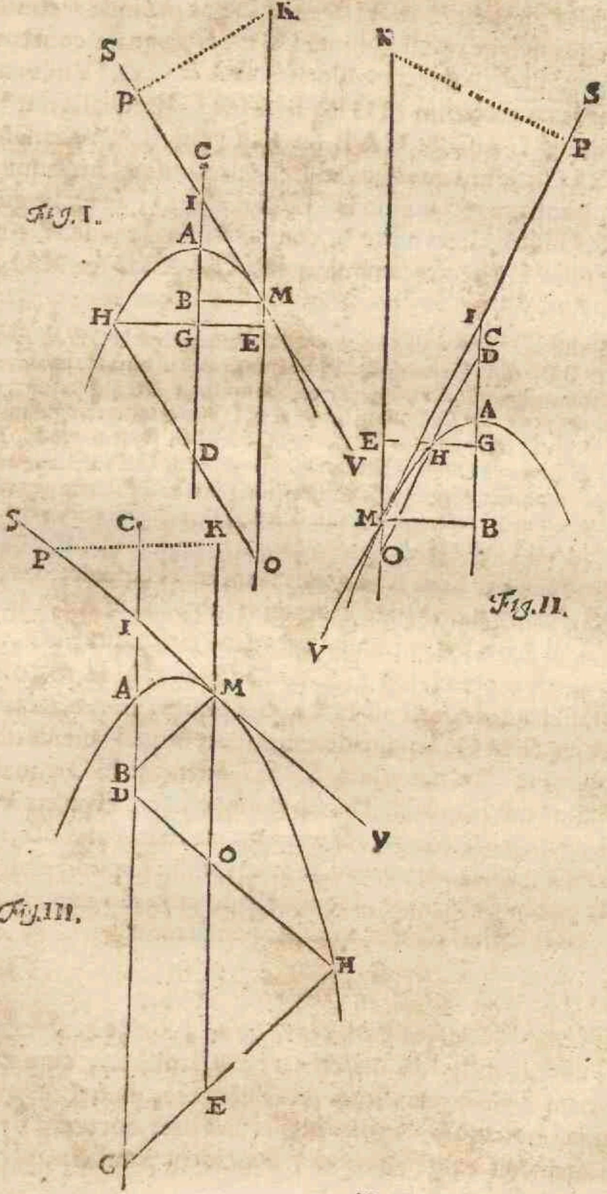


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

catis consequentibus, ut C A ad duplam M B seu ad G E bis, ita
3 per 29 primi, & 4 sexti. M B ad B I, hoc est [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento sub
4 per 16 sexti. extremis, nimirum rectangulo sub C A & G D. Vnde cum bina quadrata rectarum H G & B M seu G E æqualia sint [5] binis
5 per 1 hujus. rectangulis C A G & C A B seu C A I, id est [6], rectangulo sub
6 per 1 secundi. C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo sub
a in casu fig. I & similibus. C A & G D ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum sub C A & I D seu M O æqualia [c].

b in casu fig. II & III ac similibus. [7] *quippe per supra demonstrata rectangulum* H G E *bis æquale est rectangulo sub* C A *&* G D. [c] in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compositum fit E H quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub C A & I G addatur rectangulum sub C A & G D, fit, per I secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, residuum erit, per 7 secundi, E H quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub C A & I G auferatur rectangulum sub C A & G D residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O.

Ideoque cum sit ut B M quadratum ad M I quadratum, sive ut
8 per 1 hujus, & ex hypothesi. C A B rectangulum [8] ad rectangulum sub K M & A B [9], hoc est [10], ut C A ad K M, seu, assumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum sub C A & M O ad K M O rectangulum,
9 per 17 sexti, & ex hypothesi. ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; sitque rectangulum sub C A & M O, ut jam ostensum est, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

10 per 1 sexti. Vnde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola A H assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita
11 per 4 & 22 sexti. 12 per 14 quinti. ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium quo-

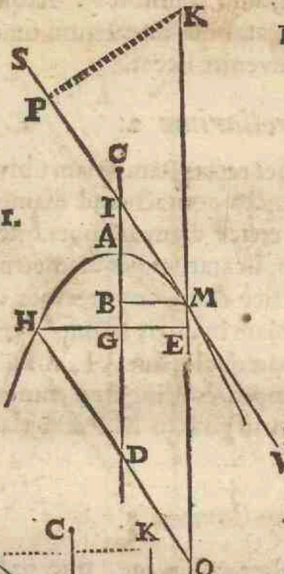


Fig. I.

Fig. II.

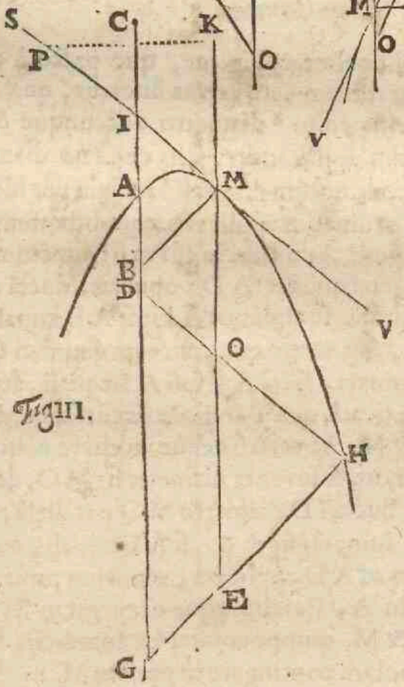


Fig. III.

quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuſlibet Parabolæ diametrum ſimulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

1 per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

Corollarium 2.

Patetque porrò, quaſlibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abſcindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abſcindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales ſint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque aſſumpto contingere, nunc [2] demonſtratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere poſſe, ſuperiùs [3] oſtenſum eſt.

2 in 2 hujus.
3 per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, ſi in ejuſdem diametri termino ſit datum punctum, notum nunc eſt [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidiſtantem, Parabolam ibidem contingere. At ſi alibi in curva ſit punctum datum, veluti M, ſitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipſi A D applicatâ, ſumptâque A I ipſi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipſi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rurſus rectam per I & M. At verò ſi neque in curva neque in diametro producta detur, ut, ſi inventa diameter ſit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam ſecet in A, ſumptâque A B ipſi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidiſtans ſit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe conſtat ex antedictis [6], ipſam I M omni caſu Parabolam contingere in puncto M.

4 per 1 Corol. 2 hujus.
5 per 8 & 9 Corol. 1 hujus.
6 per 2 hujus, ejuſque Cor. 2.

Co-

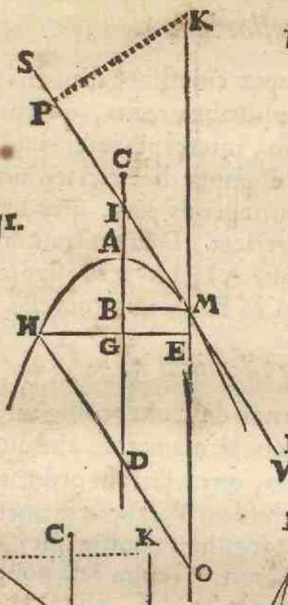


Fig I.

Fig II.

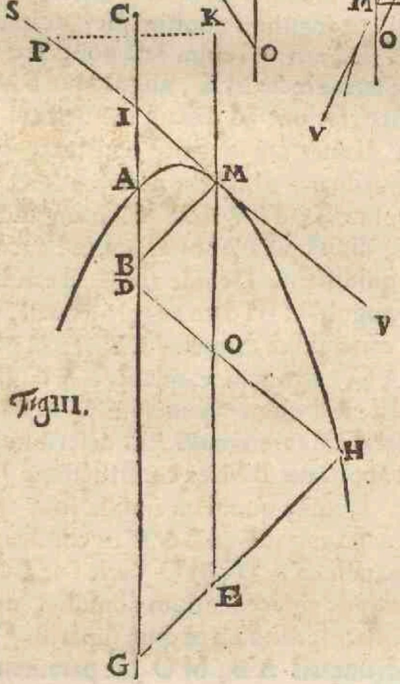


Fig III.

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam M K, ex eo quòd ipsis A I, I M tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri M O parametrum esse.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro M O, vertice M, & latere recto M K, anguloque S M K vel V M K, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum M O, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo A B M: ducatur à termino K ad S V recta K P in angulo K P V ipsi dato A B M æquali, divisâque P M bifariam in I ducatur per I recta I B ipsi M O æquidistans. Deinde ab M ad eandem I B applicetur recta M B in angulo M B I dato angulo æquali, divisâque B I bifariam in A, erit quæsita diameter A B, vertex punctum A, ejusque parameter A C, recta nempe, quæ ipsis A B, B M tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi B M parallelâ ac *intervallo* A C describitur, quandoquidem quadratum applicatæ B M ex constructione [3] rectangulo C A B est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula B I M & P M K, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas A D, M O) erit [5] ut B I ad I M, ita P M ad M K. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut A I ad I M, ita I M ad M K. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris A B, M O, ac parametris A C, M K,

[2] per 1 hujus.
[3] per 17 sexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 4 sexti.
[6] in 2 hujus.

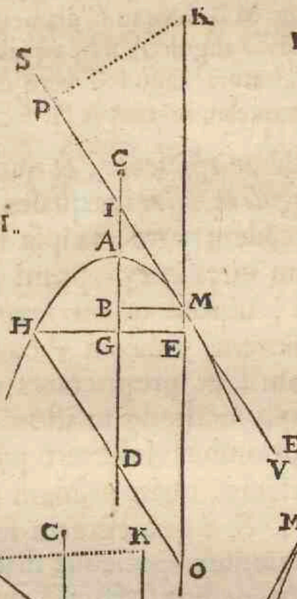


Fig. I.

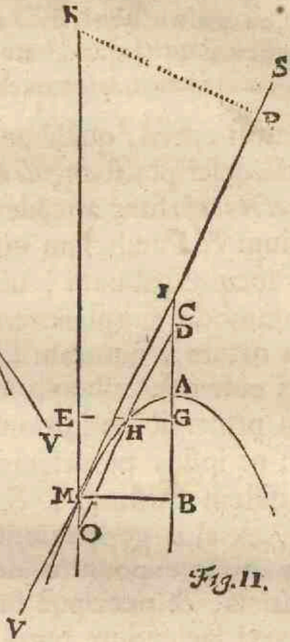


Fig. II.

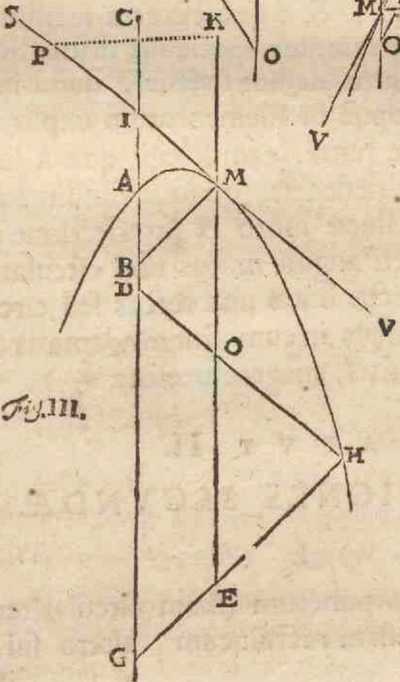


Fig. III.

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & interfectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPVT II.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quòd à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *deſcribentem* interjacet, quàm eam *deſcribentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in appoſita figura, ſi recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque ſuo promovere & ſecum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B ſemper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis ſemper tranſeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, ſimulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C interſectione C deſcribatur curva linea *c* C, ſitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipſam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipſa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipſa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evaneſcere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, ſtatione illâ, cruri E C parallela ſit; ita ut tunc dictum crus E C ſive recta C E M eadem ſit cum linea G F H, nimirum ſuppoſitâ D F ipſi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor diſtinctis ſtationibus exhibentur.

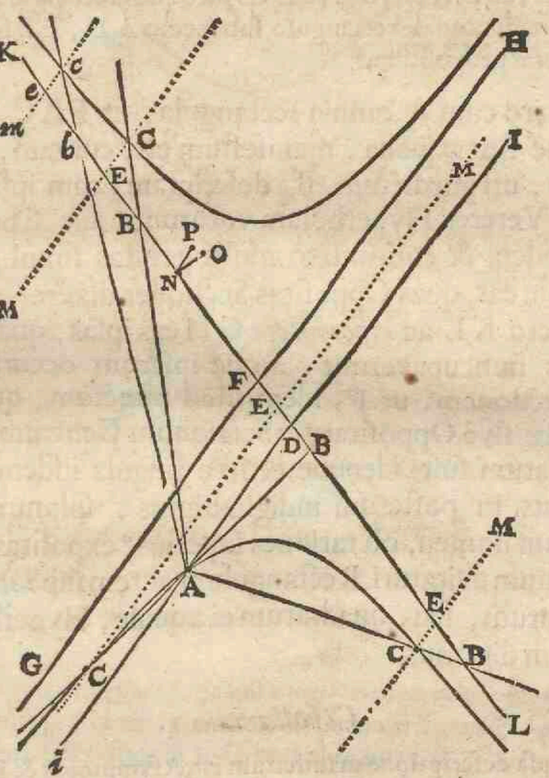
A B C *deſcribens* in ſtationibus diverſis.
K L *directrix.*
B E C, B E M, ſive D F H & D F G *anguli mobiles.*
A *Polus.*
E B *crus patiens.*
E C *crus efficiens.*
M C *linea efficiens.*
G F H *efficiens in ſtatione prima*, ſeu *efficiens* ſimpliciter.
A D I *deſcribens in ſtatione prima*, ſeu *deſcribens* ſimpliciter.
E B ſeu F D & A D utrumque *intervallum.*

THEOREMA III.

Propoſitio 3.

Quibuſlibet *angulis mobilibus* ac quibuſcunque *intervallis*, juxta definitiones præmiſſas deſcriptâ curvâ, hoc ipſi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* E B, ſeu F D & A D, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

 Con-

Conſtitutis enim tam *angulo mobili* quàm *deſcribente* in ſtatione uti fuêre, cùm per ipſarum interſectionem deſcriptum eſt punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales ſunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula ſint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id eſt, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis A D, E B ſeu A D F. Quod erat propoſitum.

[1] per 29 primi.
[2] per 4 ſexti.
[3] per 16 ſexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter ſe quoque ſint æqualia, manifeſtum eſt, curvam, interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, ſi binas curvas eodem & continuato motu genitas ſimul conſideres, eſſe eas, quas Oppoſitas Sectiones dixêre: *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipſas, quas Aſymptotos nuncupaverunt, atque ipſarum occurſum ſive interſectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ ſive Oppoſitarum Sectionum Centrum ab ipſis appellatum fuit. ideoque & hæc ſingula iiſdem illis nominibus in poſterum indigitabimus, ſolummodo ſectionum nomen, ob rationes ſuperiùs [4] expoſitas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem ſub *intervallis* contentum, ſeu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

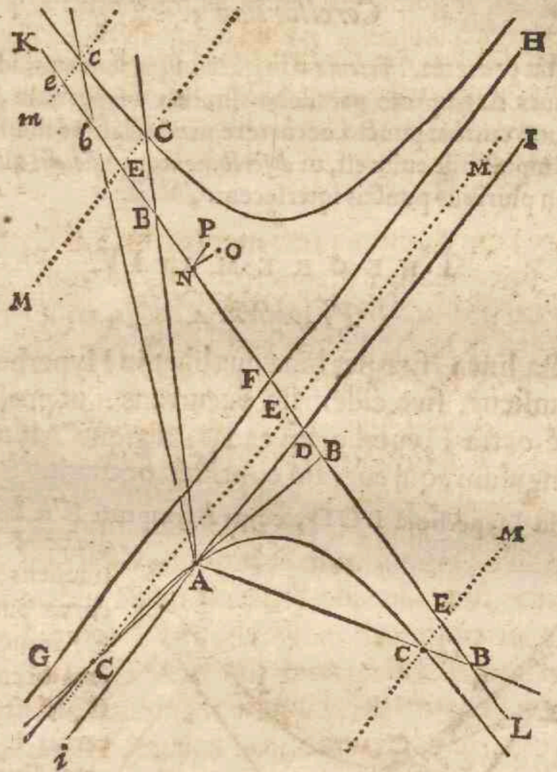
[4] in Epiſtola ad Schotenium.

Corollarium I.

Ex ipſa deſcriptione manifeſtum eſt, Aſymptotos & Hyperbolam magis magiſque ad ſe invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad diſtantiam, datâ quâlibet diſtantiâ minorem; cujus tamen, ſi demonſtrationem exactiorem deſideres, data diſtantia ſit recta N O, ad Aſymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor ſit, ſi fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipſi N P æqualis atque Aſymptoto F H æquidiſtans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

[5] per 16 ſexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonstrata sunt, punctum C in Hyperbola. Est autem & ce ipsi P N æqualis, hoc est, datâ di- [6 in 3 hujus.]



stantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto c ad Asymptoton F K ducta, id est, distantia Hyperbolæ à prædicta Asymptoto, ibidem datâ distantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita simul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem est ei, qui Hyperbolam continet, per centrum transeunt, vel Asymptotorum alterutram secant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, & in in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

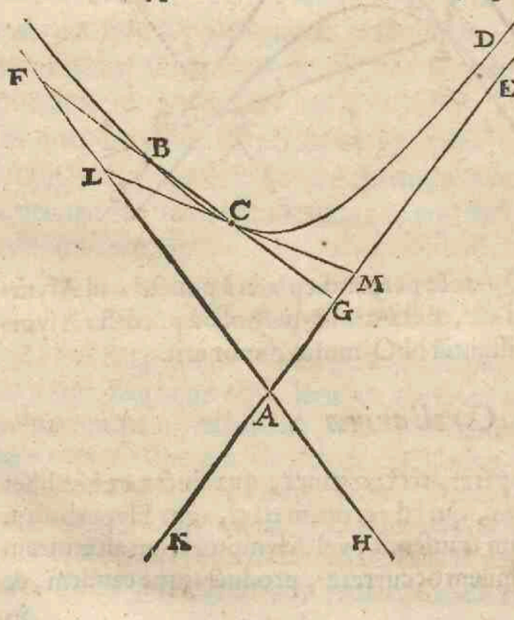
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF,



ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-

Aſymptotorum alterutri parallela eſſet, aut, ſi vel huic vel illi Aſymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Aſymptoton ſecaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem ſecaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde conſtat propoſitum.

[1] *per 2 & 3 Cor. 3 hujus.*

THEOREMA V.

Propoſitio 5.

Aſſumptis, vel in una eademque, vel in oppoſitis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductiſque per eadem ſive unâ rectâ ſive duabus, ſibi mutuò parallelis: erunt rectangula ſub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Aſymptoto utrinque interceptis, ſibi invicem æqualia.

Fig I.

Sint, vel in eadem, vel in oppoſitis Hyperbolis B P C D, cujus Aſymptoti A E, A F, aſſumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ B D, C P ſibi invicem parallelæ Aſymptotiſque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum E B F rectangulo G C H æquale eſſe.

[a] qui utique occurſus in caſu primæ figuræ fit intra angulum E A F, per 4 hujus.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Aſymptoto parallelis alteraque Aſymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectangula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc eſt [3], ut E B ad

[1] *per 16 ſexti.*

[2] *per 3 hujus.*

[3] *per 29 primi, & 4 ſexti.*

4 per 16 sexti. ad GC, ita CM ad BL, id est, ita CH ad BF. ac proinde [4] rectangula EBF & GCH æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur BD, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F[a], rectangula EBF, FDE sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut CP in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti CGP in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur BD, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum EBF vel FDE quadrato GC itemque & GP quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque GC, GP esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

Ductâ enim utcunque BD, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] BF sit ad DF, ut DE ad BE: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], BD ad DF, ut eadem BD ad BE, ideoque DF, BE [8], ac proinde & BF, DE sibi invicem æquales erunt.

5 per 5 hujus, & 16 sexti.
6 per 17 quinti.
7 per 18 quinti.
8 per 9 quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio

sui

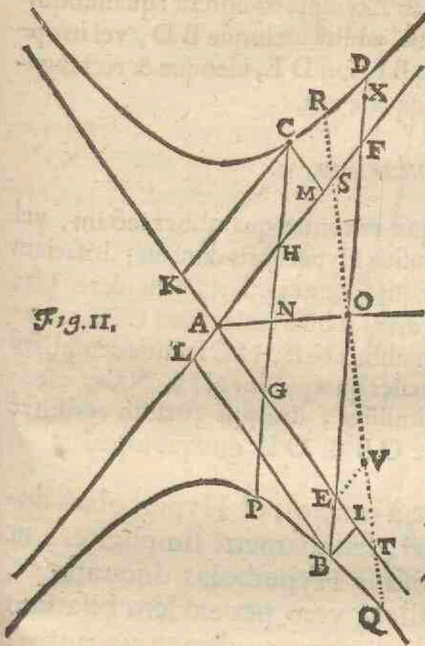


Fig. II.

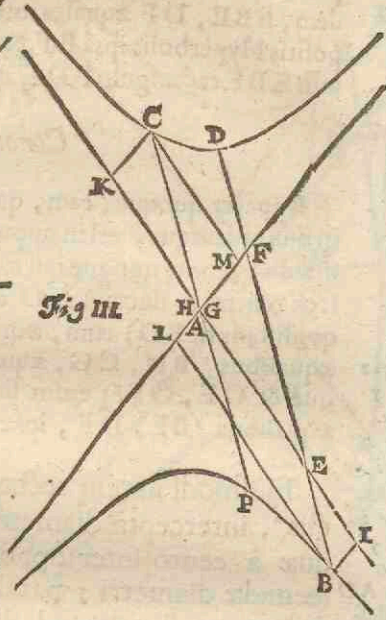


Fig. III.

ſui puncto in Hyperbola eſſe. Si enim præter D & B aliud quoddam ipſius D B punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, eſſet [1] X F ipſi B E ac proinde & ipſi D F æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum.

[1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & converſum quoque propoſitionis verum eſſe: nempe, ſi, iiſdem poſitis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola ſit, & alterum quoque fore in eadem vel oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia ſint rectangula E B F & G C H, demonſtrabitur æqualia quoque eſſe rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ converſum ſupra oſtenſum fuit. ideoque ſi punctum B ſit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E, A F, & vice verſâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum eſto; imò & idem erit in eadem linea, ſi dicta

[2] per 3 hujus.

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF, ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium. 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP, cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisvè æqualibus [1] PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque & OE, OF [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvè æqualibus [3] BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à cento inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

1 per 2 Cor. 5 hujus.
2 per 9 quinti, & 4 sexti.
3 per 2 Cor. 5 hujus.
a ut AO similesque in I figura.
b ut AO similesque in II figura.
c ut PC, DB in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T, & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO [4], quàm TO, SO [5]. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ [6], æqui-

4 per 2, & 5 Cor. 5 hujus.
5 ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus. 6 per 15 & 29 Primi.

Fig. I.

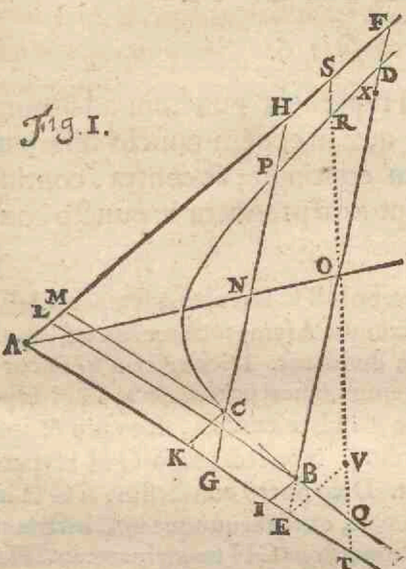
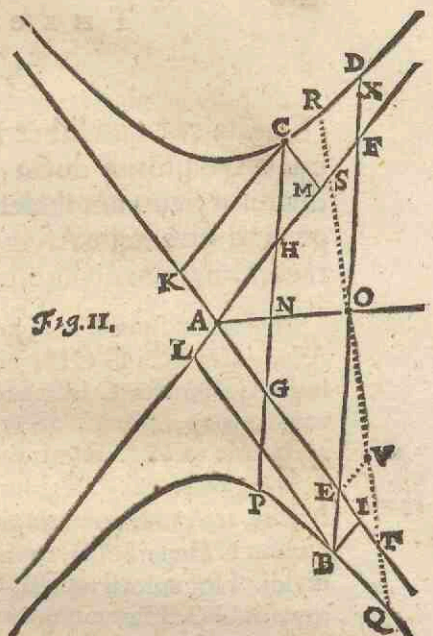


Fig. II.



æquiangula ſunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad [1] per 4
O V, ita F O ad O S. Quare cum E O ipſi F O ſit æqualis, ſexti.
erit & [2] O V ipſi O S, hoc eſt, rectæ O T æqualis, pars toti, [2] per 14
quod eſt abſurdum. Non ergo bifariam ſecatur recta R Q à dia- quinti.
metro A O.

Corollarium 7.

Atque hinc manifeſtum fit, quòd, ſi vel in una eademque vel ad oppoſitas Hyperbolas binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum tranſeat ſeu diameter ſit: Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ [3] per 5
Hyperbolæ vel oppoſitarum Hyperbolarum diametros quotli- Corol. 5
bet, ſimulque ordinatim applicatas ad eaſdem, nec non & cen- hujus.
trum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis interſectio eſt, reperire liceat.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipsi C H æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo G H Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in C H majori parte ipsa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa G H Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipsi C H inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

1 per 2 Cor. 5 hujus.
2 per 4 Cor. 5 hujus.
3 per 3 Cor. 5 hujus.

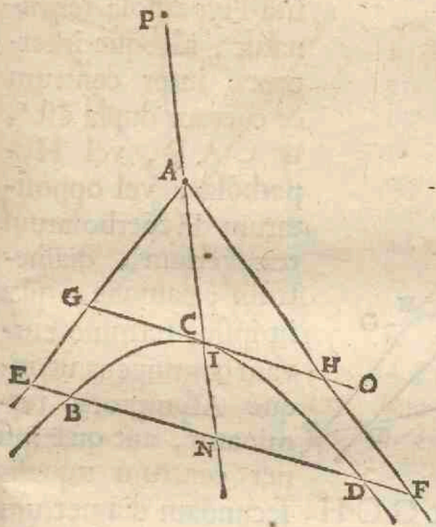
Corollarium 1.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti G C H æquidistans utcunque ducta sit B D, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F sive [4] B F D, ut & F D E sive D E B æquale rectangulo G C H [5], id est, ipsius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

4 per 2 Cor. 5 hujus.
5 per 5 hujus.

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum A N ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi B N D æquidistans, cum æquales sint N F & NE [1] : erunt [2] quoque CH & CG æquales, ideoque [3] GCH Hyperbolam continget in C.



[1] per 2 & 5 Corol. 5 hujus. [2] per 9 quinti, & 4 sexti. [3] per 6 hujus.

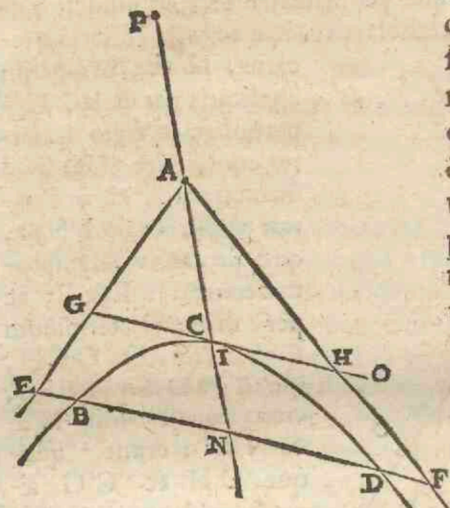
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti GH parallela sit BD, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A CN, quæ ductæ BD occurrat in N: quoniam [4] GC, CH æquales sunt, nec non EN, NF [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) BN, ND æquales, ideoque & ad dictam diametrum A CN ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter GH Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] per 6 hujus. [5] per 9 quinti & 4 sexti. [6] per 2 Cor. 5 hujus. [7] per supra demonstrata. [8] in Cor. 6 5 hujus.

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta opposita Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut C A P, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam; diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut G C H, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis P C, G H, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut C O, rectum latus sive Parametrum dici.



[1] per Corol. 1 5. hujus.

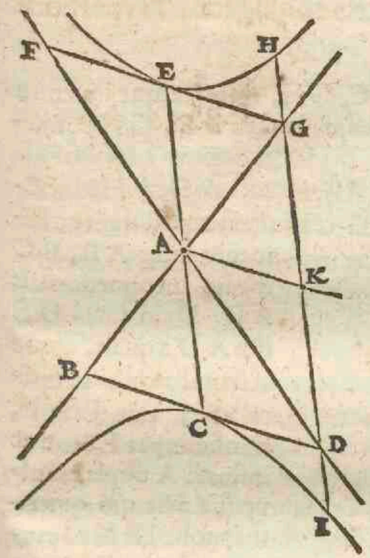
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Asymptoti B G, D F, diameter transversa utcunque assumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipsi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipsi C E diametro æquidistare.



Quoniam enim est [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm A E ad E F, ut A C ad C D; & sunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipsi C B, quàm E F ipsi C D, ac proinde & E G ipsi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppositam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porrò si per G & D ducatur recta G D, secans secundam diametrum A K in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ sint E G, C D, erunt & [6] quæ ipsas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter A K contingentibus B D, F G, id est [7] ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus si addantur æquales [10] G H, D I: erunt similiter rectæ K H, K I sibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad secundam diametrum A K applicata sit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 1 Corol. 5 hujus.
[3] per 6 hujus.
[4] per 14 quinti.
[5] per 6 hujus.
[6] per 33 primi.
[7] per 3 Cor. 6 hujus.
[8] per 34 primi.
[9] per 1 Cor. 5 hujus.
[10] per 2 Cor. 5 hujus.
[11] per 6 Cor. 5 hujus.
[12] per 5 & 6 Cor. 5 hujus.

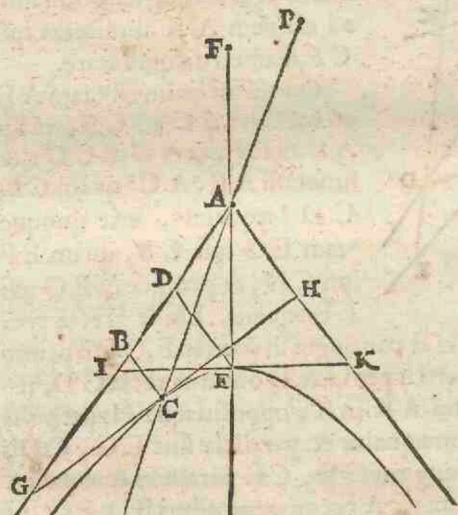
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuſcunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H[1], oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri exiſtunt.

Ductis ab A centro per G & H Aſymptotis A G, A H, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidiſtante, ſumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipſi A D æquali, atque Aſymptoto A H parallelâ, erit E A F, tranſiens per E & A ac ipſius E A dupla, tranſverſus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Aſymptotis terminata, axis ſecundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola eſt, rectangulumque A D E ipſi A B C æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque ſit D A E angulus ipſi D E A, id eſt [5], E A K angulo, ſintque & anguli A E I, A E K ex conſtructione æquales: erunt [6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune [7] etiam æqualia, latusque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola exiſtat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Aſymptotis terminatam, continget ipſa I K [9] curvam in E: ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypotheſi.*
[2] *per 17 ſexti.*
[3] *per 3 hujus.*
[4] *per 5 primi.*
[5] *per 29 primi.*
[6] *per 32 primi.*
[7] *per 26 primi.*
[8] *per ſup. demonſtr.*
[9] *per 6 hujus.*

THEO-

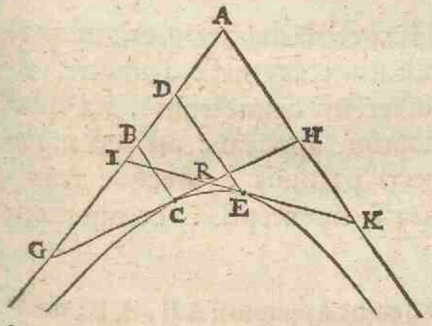
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Aſymptotis comprehenſo æqualia abſcindunt triangula, & rectangula ſub eorundem triangulorum lateribus comprehenſa invicem quoque æqualia ſunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipſæque baſes ſeu contingentes Aſymptotis terminatæ, in mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam contingentes inter occurſum & Aſymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam C E, cujus Aſymptoti A G, A K, rectæ G H, I K utrinque Aſymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula G A H, I A K æqualia eſſe; ac præterea eſſe G I ad I A, ſicut K H ad H A; itemque G R ad R H, ſicut K R ad R I; nec non G C ad C R, ſicut K E ad E R.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis C B, E D Aſymptotorum alterutri, ut A H, parallelis, cum ſit ut G C ad G H, ita G B ad G A, & B C ad A H [1]; ſitque G H ipſius G C dupla [2]. [1] *per 4 ſexti.*

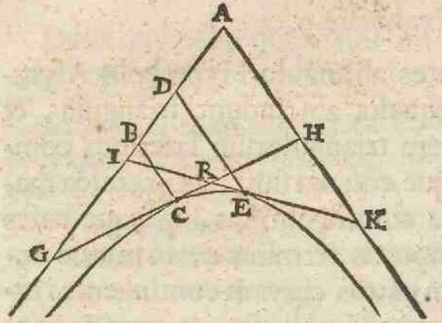


erit quoque tam G A ipſius G B quàm A H ipſius B C dupla, ideoque [3] rectangulum G A H rectanguli G B C ſive A B C quadruplum. Eodem modo rectangulum I A K rectanguli A D E quadruplum oſtendetur. Hinc cum æqualia ſint rectangula A B C, A D E [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula G A H & I A K æqualia. Quod eſt primum.

[2] *per 6 hujus.* [3] *per 20 ſexti.* [4] *per 3 hujus.*

Unde cum [5] ſit ut G A ad A K, ita I A ad A H, triangula quoque [5] *per 16 ſexti.*

6 per 15 sexti. que G A H, I A K æqualia erunt[6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



7 per 16 quinti. 8 per 17 quinti. Ac cum permutando [7] quoque sit G A ad I A, ut A K ad A H: erit & [8] dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod est tertium.

9 per 15 sexti. Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, residua, nempe triangula G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt[9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod est quartum.

10 per 18 quinti. Unde cum componendo [10] quoque sit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, sumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I ad I R: erit & per conversionem rationis [11] C H sive G C ad C R, ut E I sive K E ad E R. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

11 per Coroll. 19 quinti.

THEOREMA IX.

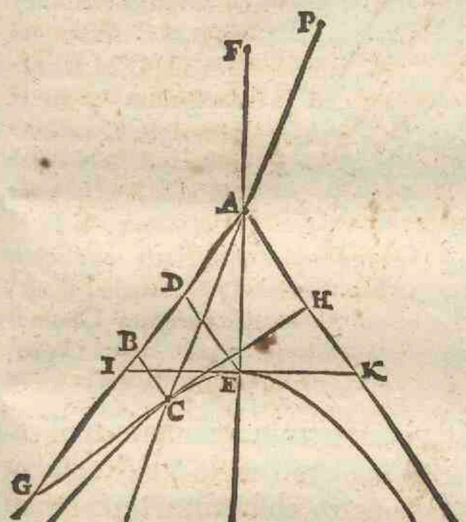
Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum tranversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus secunda diameter transversæ P C conjugata sit G C H, parameter verò C I, ipsis nempe P C, G H tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet D N: dico esse ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum. [1] per Corol. 20 sexti.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut E B N D F, cum sit [2] F N quadratum ad H C quadratum, id est [3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo [4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum [5] ad C A quadratum, & permutando [6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, sive [7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est, ut I C ad C P. Quod demonstrandum erat. [2] per 4, & 22 sexti. [3] per 1 Corol. 6 hujus. [4] per 6 secundi, & 17 quinti. [5] per 6 secundi. [6] per 16 quinti. [7] per 15 quinti.

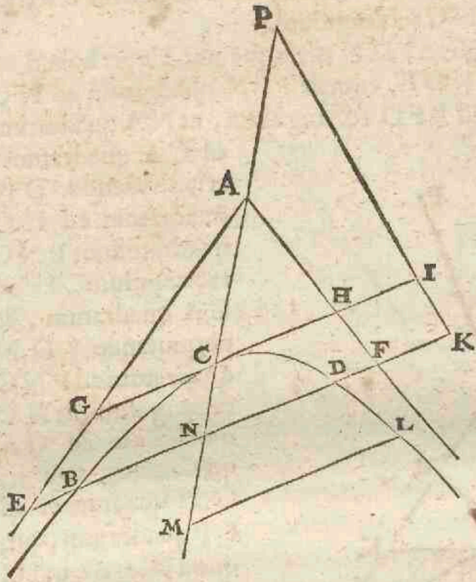


Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut B C D, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quâcunque A N quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; si, productâ N A ad P, ut A P ipsi A C sit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit P N C rectangulum ad B N quadratum, sicut A C quadratum ad quadratum abs C G seu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Asymptoti quæsitæ [9]. [8] per 7 Coroll. 5 hujus. [9] per conversum 10 hujus.

Corollarium. 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet applicatæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale esse.



Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:

1 per 10 hujus conv.

2 per 4 sexti.

3 per 1 sexti.

4 per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis, ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C; cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

5 per 10 hujus.
6 per 16 quinti.

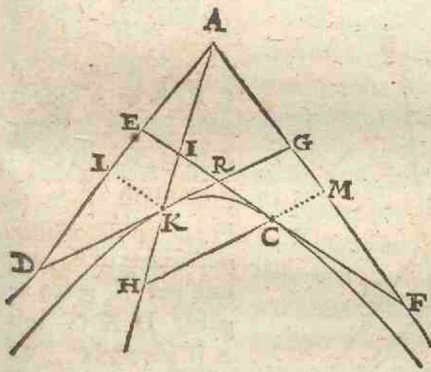
THEO-

THEOREMA X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Asymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque sumpto recta E C F, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit C H, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato semidiametri K A, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc est [3], M G ad M F, ut L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] sit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id est [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc est [8], ut K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonstrandum erat.

[1] *per 17 sexti.*
[2] *per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.*
[3] *per 2 sexti.*
[4] *per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 quinti.* [5] *per 9 hujus.* [6] *per 22 quinti.* [7] *per 2 sexti.* [8] *per 2 sexti.* [9] *per 18 quinti.*

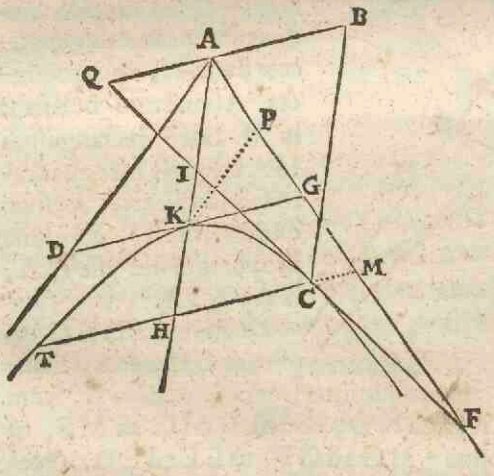
THEO-

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque secundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub secundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, æquale semi-secundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Asymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque sumpto, recta F C Q, occurrens secundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, si ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidistans ducatur A K H, secans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipsi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter sit secundæ diametro A B conjugata, ac semi-secundæ diametri magnitudine sint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipsius K G vel K D semi-secundæ diametri quadrato.



[1] per 7 hujus.

Ductâ enim per C rectâ T C M secundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Asymptoto verò A F in M: Quoniam est [2] H A quadratum ad K A quadratum, sive [3] H M quadratum ad K G quadratum seu

[2] per 11 hujus, & Cor. 20 sexti.
[3] per 4 & 22 sexti.

ſeu[1] ad T M C rectangulum, ut H A ſeu C B ad I A, id eſt[2], ut B Q ad A Q; erit dividendo[3] H C quadratum ſeu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea[4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q[5] quadrato K G æquale. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium ad duas propoſitiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti K, inventis Aſymptotis[6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Aſymptoto parallelâ, ut K P, ac ſumptâ P G ipſi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K[7]. quoniam uti G P ipſi P A, ita G K ipſi K D æqualis eſt[8].

Eodem modo, ſi datum punctum ſit in Aſymptotorum alterutra, veluti G, diviſâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Aſymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat[9] in K: continget juncta G K D[10] Hyperbolam in puncto occurſus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Aſymptotis comprehenſum, veluti I: ductâ à centro[11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, ſumptâque A H ipſis A I, A K tertiâ proportionali, ſi per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidiſtet[12]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C[13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps ſunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A ſecundâ diametro Q A B, tranſverſâque ipſi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipſi Q A B æquidiſtantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Aſymptoto terminatâ; ſi fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad ſecundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipſi A K æquidiſtans[14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C[15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifeſtum porrò eſt, ſi datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non poſſe[16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non ſecet.

[1] *per 1 Cor. 6 hujus.*
[2] *per 4 ſexti.*
[3] *per 17 quinti.*
[4] *per Cor. 20 ſexti.*
[5] *per 17 ſexti.*
[6] *per 1 Cor. 10 hujus.*
[7] *per 6 hujus.*
[8] *per 2 ſexti.*
[9] *per 2 Cor. 3 hujus.*
[10] *per 2 ſexti, & 6 hujus.*
[11] *invento per 7 Corol. 5 hujus.*
[12] *per 3 Cor. 6 hujus.*
[13] *per 11 hujus.*
[14] *per 7 hujus.*
[15] *per 12 hujus.*
[16] *juxta 1 Cor. 3 hujus.*

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

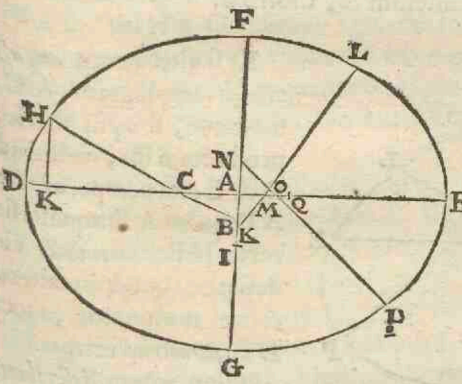
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

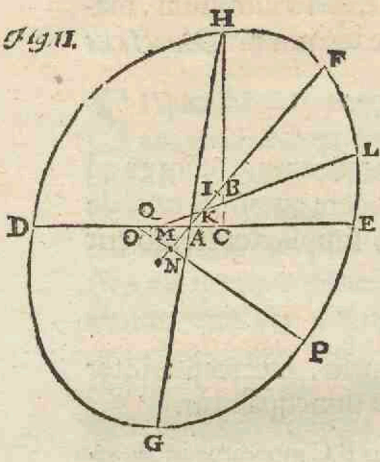
Ut si trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuêre, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto, ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa B C, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti H cur-

Fig. I.



H curvæ portio HF: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus LE: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus EP: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva HFLEPGD: erunt

Fig. II.



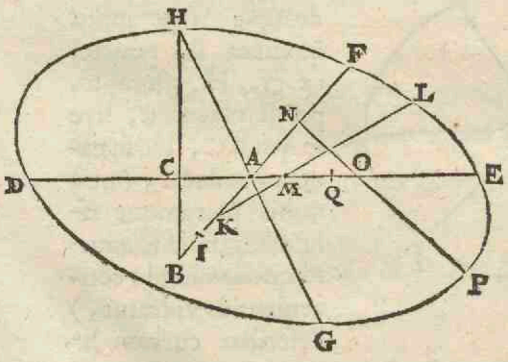
BC, quæ & in aliis stationibus est IA, KM, AQ, NO, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

HC & HB utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, si opùs fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quàm AE æqualis sit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *describens* BC eidem *directrici* DE est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe existente recto, ut in ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repræsentat.

[a] in casu fig. I & similib. [b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuslibet H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G [a] vel H A G [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E.

[a] in casib. fig. I, II, & similibus. [b] in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit [a], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale sit dimidiæ *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut L I quadratum ad L N quadratum, id est [4], ad D I E rectan-

[1] *per 34 primi.* [2] *per 47 primi, & 5 secundi.* [3] *per 4 & 22 sexti.* [4] *per supra demonstr.*

gulum,

Fig. I.

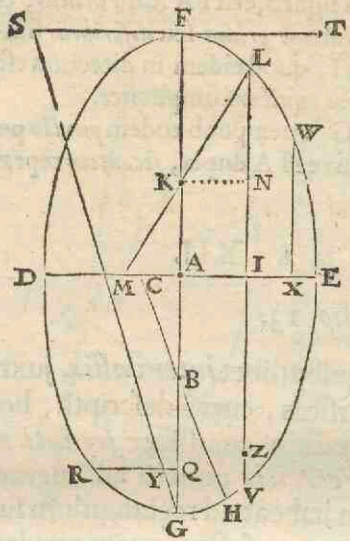
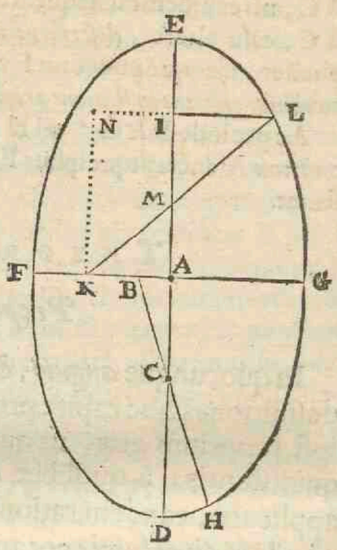
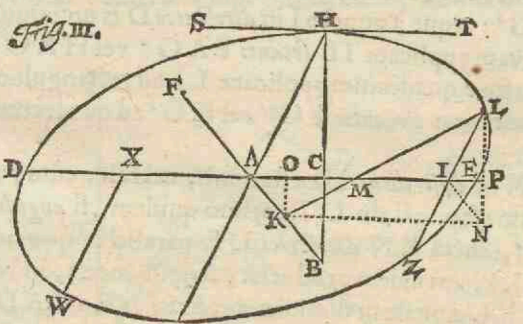


Fig. II.



1 per 15 *quinti.* gulum, ita L M quadratum ad L K quadratum, hoc est, ita F A quadratum ad A E quadratum, sive [1] ut F G quadratum ad D E quadratum, constat priori casu propositum.

Fig. III.



Non sit deinde *angulus* B A C rectus [b], ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, si opùs fuerit, rectæ K O, L P *describenti* B C parallelæ, ideoque ad *directricem* D E perpendiculares, ut & I N lateri A B parallela, quæ ipsi L P, eidemvè productæ, si opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] similia sint triangula A H C & I L P, item-

2 per 29 *primi.*

que

Fig. IV.

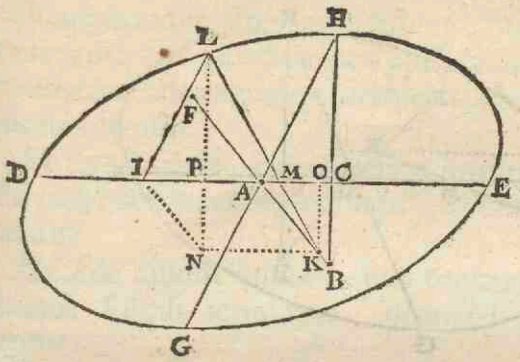


Fig. V.

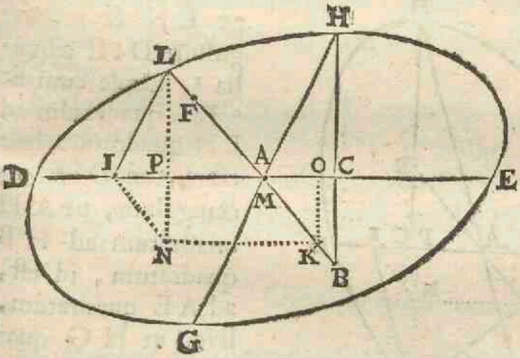
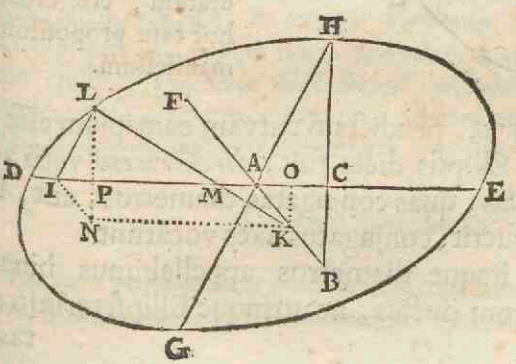


Fig. VI.



que AHB & ILN, ac denique jungatur KN. Quoniam itaque est [1], ut BA ad KA, sive ut BC, id est, MK, ad KO, ita ML, hoc est, HC, ad LP; ut autem HC ad LP, ita HA ad LI, & ita BA ad NI, ac per consequens BA ad KA, ut eadem BA ad NI: erit [2] KA ipsi NI æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypothesi. Quare & AI, KN æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales sint rectæ KL & AE vel AD, ideoque & ipsarum quadrata, hinc subductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

[1] per 4 sexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

Fig. VII.

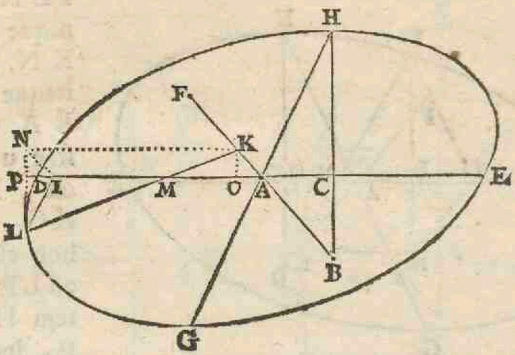
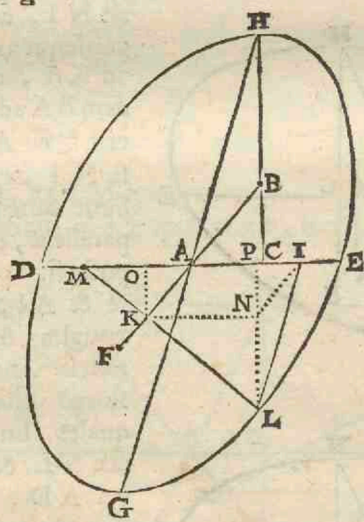


Fig. VIII.



erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

[1] *per 47 primi, & 5 secundi.*
[2] *per 4 & 22 sexti.*
[3] *per supra demonstr.*
[4] *per 15 quinti.*

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistunt, transversa; illa verò, cui eædem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium. 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim L I vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri transverſæ æquidiſtans ducitur, Ellipſin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem ſeca-

Fig. I.

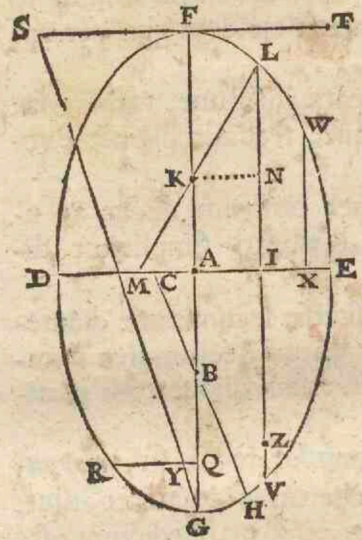
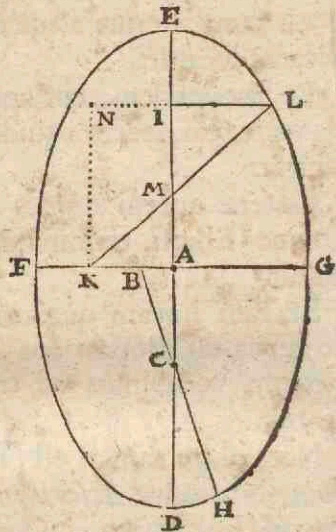


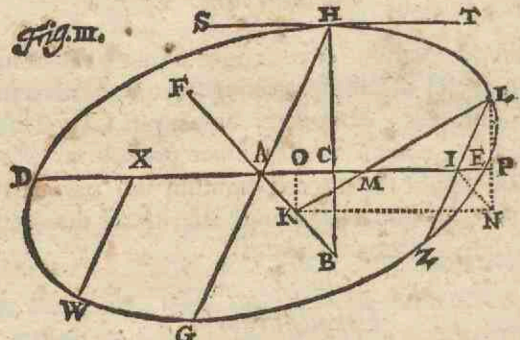
Fig. II.



re. Si enim per F [a] aut H [b] terminum ſecundæ diametri GF [a] vel GH [b] ductâ rectâ S T, tranſverſæ diametro DE paralle-

[a] in caſu fig. I & ſimilib.
[b] in caſu fig. III & ſimilib.

Fig. III.



lâ, aſſumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod deſcriptum ſit *deſcribente* in ſtatione K M, ducaturque

L I [a] vel L P [b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut [a] in triangulo M L I [a] vel M L P [b] recta M L, id est, perpendicularis F A [a] vel H C [b], major sit [1] quàm L I [a] vel L P [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam S T, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.
[1] *per 18 primi.*

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint L I, W X, erit quadratum W X ad rectangulum D X E, ut quadratum L I ad rectangulum D I E: cum [2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati F G [a] vel H G [b] ad quadratum D E, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim W X quadratum ad L I quadratum, ut D X E rectangulum ad D I E rectangulum.

[2] *per 13 hujus.*

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata L I producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est [3] quadratum L I ad rectangulum D I E, ut quadratum V I ad idem D I E rectangulum, erit [4] quadratum L I æquale quadrato V I, ideoque & ipsa recta L I ipsi rectæ V I æqualis.

[3] *per Cor. præced.*
[4] *per 9 quinti.*

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim L I V alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ I L & I Z [5], ideoque I V & I Z pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

[5] *per Cor. præced.*

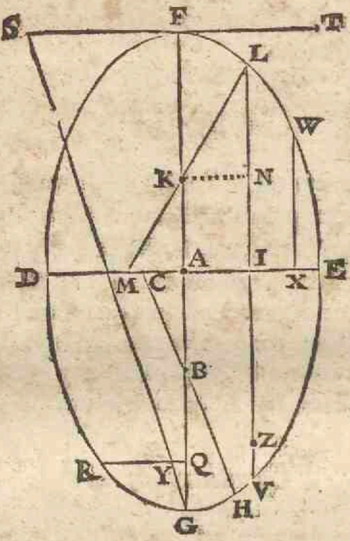
Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ dia-

metri,

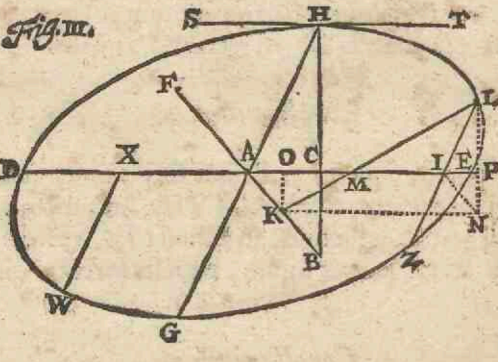
a in casu fig. I & similib. metri, ut puta F G [a], eductâ parametro F S secundæ diametro D E parallelâ, jungatur S G, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut R Q, quæ secet junctam S G in Y: fore rectangulum F Q Y quadrato applicatæ R Q æquale.

Fig. III.



1 per 13 hujus.
2 per Cor. 20 sexti.
3 per 1 sexti.

Quoniam enim est [1] G F quadratum ad D E quadratum, id est [2], G F ad F S, sive G Q ad Q Y, hoc est [3], G Q F rectangulum ad

Y Q F

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum ad R Q quadratum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat.

[1] per 13 hujus. [2] per 9 quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiterque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet diametris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipsis sit describenda, *describente* B C, quæ semi-axium A D, A F differentia sit, *intervallis* verò H C, H B, ipsis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis quæsita.

[a] in casu fig. I & similib.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese intersecantibus, ut D E, H G [b], Ellipsis sit describenda: demissâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, sumptâque in eadem seu in ipsa productâ, si opus fuerit, rectâ H B ipsi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, si *describente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipsis describatur, erit hæc ea ipsa quæ quæritur.

[b] in casu fig. III & similib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innotescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

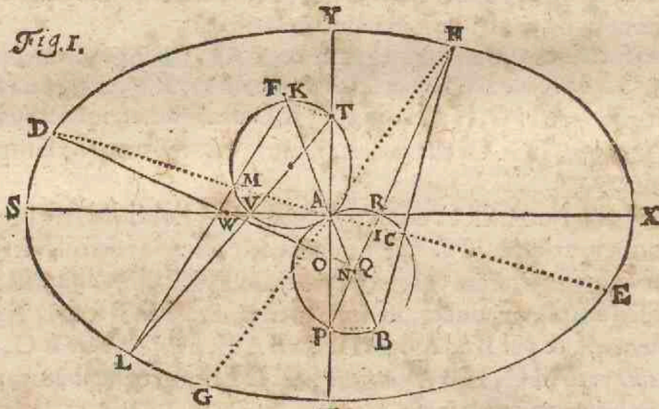
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ducta quælibet diameter transversa est, habetque secundam sibi conjugatam.

Sit in Ellipsi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter D A E; & sic describens O W in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi W A O deinceps sunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipsis A W, A O reciprocè sint æquales, nimirum A R ipsi A O, & A P ipsi A W, ac proinde triangulum W A O [1] simile & æquale triangulo P A R, ab Ellipseos puncto H, quod describenti P R in directum est, ducta sit diameter altera H A G. Dico diametrum D E transversam esse, H G autem secundam ipsi D E conjugatam: id est, si, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

[1] per 4 primi.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur H B ipsi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in D E, & H G [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione T V, diametro T V circulus describatur, qui, propter angulum T A V rectum [*], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque B A F & D A E

[2] per 13 hujus ejusque Corol. 7

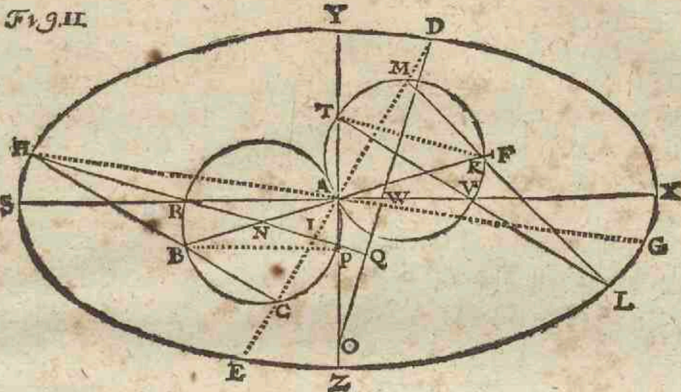
[*] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coincidit, uti est casus in fig. VI

[3] per conversam 31 tertii.

DAE alibi etiam ſecabit [b], uti in K & M. Deinde junctâ KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò ſecabit, ut in caſib. fig. III & IV.

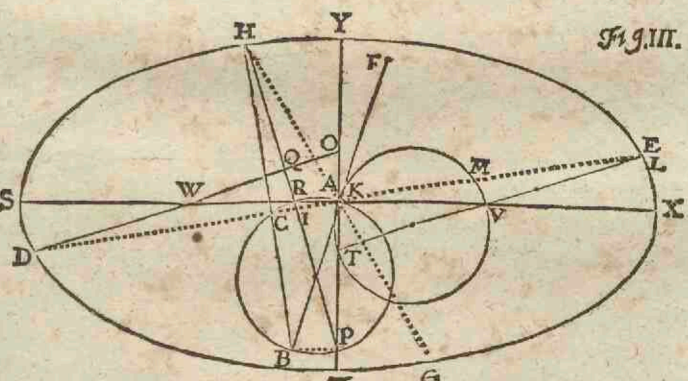
Fig. II.



Cum igitur ipſarum DO, HP, productarum, ſi opùs fuerit, interſectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob ſimilitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP [c], notato ipſarum DE, PH interſectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, ſi puncta O & P coïncidant, ob angulos AOW, APR ſemirectos.

Fig. III.



IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [d] baſis [d] OA,

[d] per 4. primi.

O A, five recta A R, basi P B, angulusque D O A, id est P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipsi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis A B basi P R, seu describenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B descriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipsis T K M, K T V, uterque utrique, æquales sint, nempe P B C ipsi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C seu T A M [5] binos rectos constituit [e], & B P R ipsi

[1] per 27 primi.
[2] per 4 primi.
[3] per conversam 31 tertii.
[4] per conversam 21 tertii.

[d] pro casu fig. II adde: ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] *per 22 tertii.* [e] in casu fig. II uterque angulo P A C seu T A M æqualis est *per 20 tertii.* In casu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos constituit, nempe hic *per 13 primi*, & ille *per 22 tertii.* In casu fig. IV æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, posterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales sunt *per 32 tertii*) binos rectos constituit *per 22 tertii.* In casu fig. V, T K M sive T A M æqualis est angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos constituit *per 13 primi & 20 ac 22 tertii.* In casu fig. VI æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis est ei, qui in segmento A V M constitueretur *per 32 tertii*, quorum quidem prior cum angulo P B C, posterior verò cum angulo T K M binos rectos constituit *per 22 tertii.*

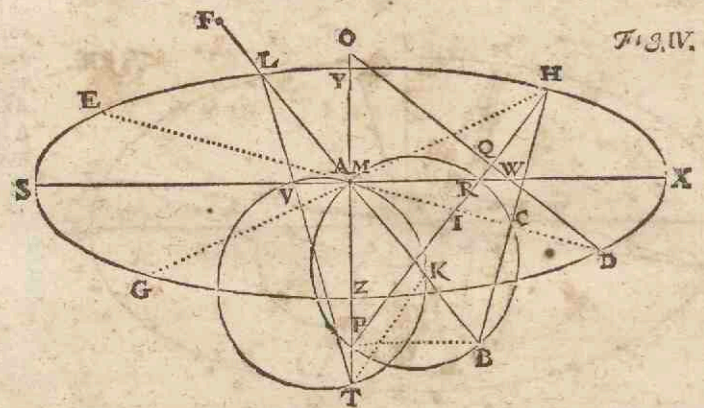


Fig. IV.

K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R seu K A V sive F A V æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum subtensæ, nempe

[6] per 20 tertii, atque in casu fig. III per eandem & 32 *tertii.* [f] In casibus fig. IV & V tam angulus B P R seu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos constituit *per 13 primi, & 22 tertii.* [7] *per 26 & 29 tertii.*

pe latera PB, TK dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia [g]: apparet sicuti rectæ BC, PR productæ concurrunt in H, ita quoque rectas KM, TV productas, & quidem, cum ipsi PH æqualis sit TL, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [1] similia atque in totum æqualia sunt triangula BPH, KTL, adeoque & latus KL lateri BH æquale. Est autem [2] & subtensa KM subtensæ BC æqualis [h], ob æquales an-

[g] In casu fig. III. ubi recta BAF tangit circulum TKV, æqualia sunt latera BP, TK ob angulos BAP, TVK æquales *per 32 tertii*. In casu fig. VI, ubi recta PAY contingit circulum TKV, æquales sunt subtensæ BP, TK ob angulos PAB, TMK æquales *per 32 tertii*. [1] *per 26 primi*. [2] *per 26 & 29 tertii*. [h] In casu fig. III, KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento KTM æqualis foret angulo FAM seu BAC *per 32 tertii*. In casu fig. IV, KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus KTM æqualis est angulo KAC seu BAC *per 32 tertii*. In casu fig. V, KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus in segmento BC æqualis foret angulo KAM, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo CAB duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii*.

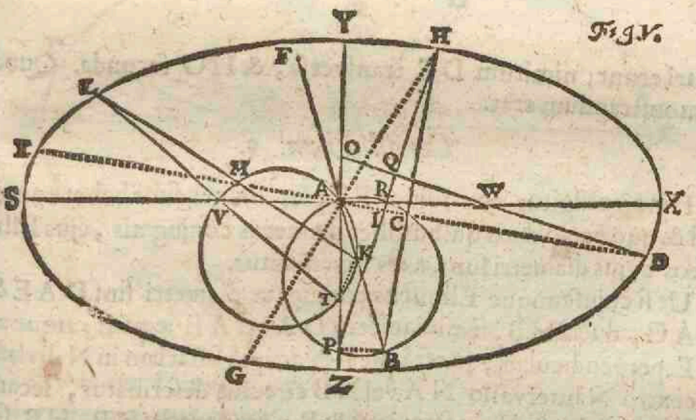


Fig. V.

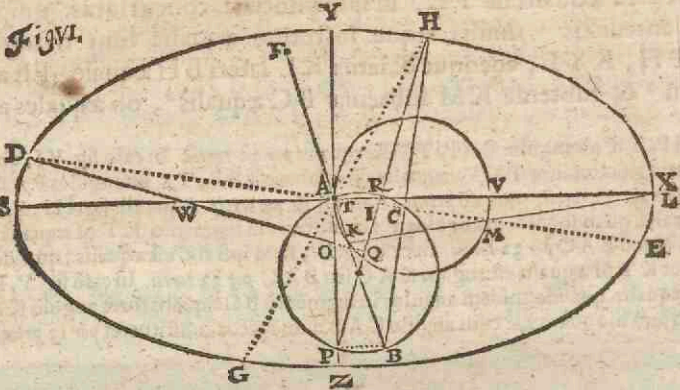
gulos KAM, BAC. Quocirca & LM ipsi HC æqualis erit. Unde cum describens sit KM, utpote ipsi BC æqualis, ac constituta in angulo KAM (qui cum ipso BAC vel idem [i], vel ei ad verticem [k], vel denique ipsi deinceps est [l]) aut certè cum alterutro crurum coïncidens [m], atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla HB, HC intervallis LK, LM: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin SYXZ, esse in Ellipsi, quæ in angulo BAC, intervallis HB, HC, describitur, ideoque alteram alteri per

[i] ut in casu fig. VI.
[k] ut in casibus fig. I. & II.
[l] in casu fig. V.
[m] ut in casibus fig. III. & IV.

omnia congruere. Sunt autem[1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-

[1] per 13 hujus, ejusque Cor. 7.

Fig. VI.



metri erunt, nimirum D E transversa, & H G secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium. I.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint D A E & H A G, ductâ H B, semidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo N A vel N B circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri existunt.

Ductâ enim P B, sumptâque A O ipsi A R, ideoque[2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipsi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum descriptus circulus etiam per C transeat[3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uterque

[2] per 4 primi.

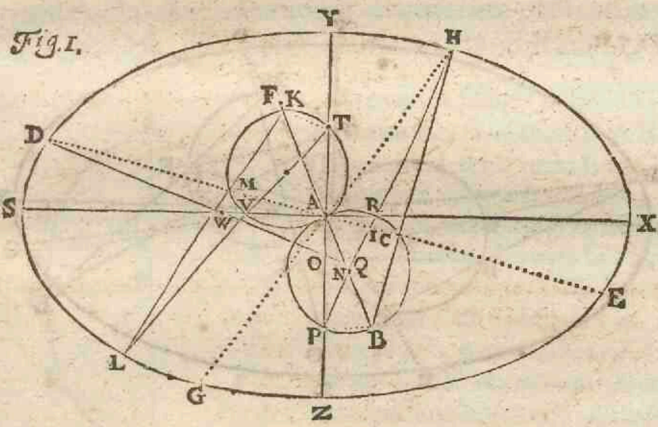
[3] per 31 tertii.

que cum angulo [a] P A C seu P B C duos rectos constituit [1]. Unde cum triangula O A D, P B H latera O A, A D lateribus P B, B H, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] basis O D basi P H, id est, rectæ S A vel A X, ut & angulus A O D angulo B P H seu [3] P R A æqualis. Hinc cum æqualia sint triangula R A P, O A W, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] R A P, O A W rectos, nec non latera R A & O A æqualia: erit etiam [5] latus A W lateri A P, ut & latus O W ipsi P R æquale. Quocirca cum [6] *describentes* sint

[a] nimirum *cum angulo* P A C in casu fig. I. & similibus, & *cum angulo* P A C *seu* P B C, in casu fig. II. & similibus.

[1] *per* 13 *primi &* 22 *tertii.* [2] *per* 4 *primi.* [3] *per* 29 *primi.* [4] *per* 31 *tertii &* 13 *primi.* [5] *per* 26 *primi.* [6] *per* 13 *hujus.*

Fig. I.



O W, P R ejus Ellipseos, cujus axes sunt S X, Y Z, & quidem in statione reciproca constitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quæ axibus S X, Y Z describitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ sunt D E & H G, omnino eandem esse:

Atque ita, quæ de Ellipsi, circa quoscunque axes descripta, superiori Theoremate proposita ac demonstrata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque diametros conjugatas descriptæ, convenire, manifestum est.

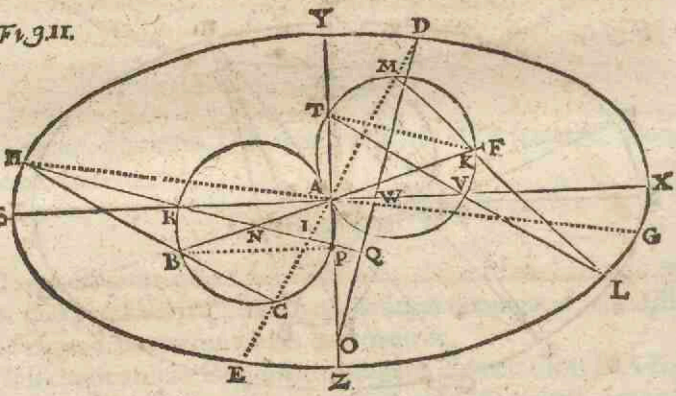
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem esse, cum utraque *intervallo* H B æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum D E, H G transversa sit D E, & H G se-

Fig. II.



1 per 14 hujus ejusque Corol. 1. cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter [1] transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque H G transversa. At verò & D E secundam esse ipsi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit [2].

2 per 2 Cor. 13. & 3 Cor. 14 hujus.

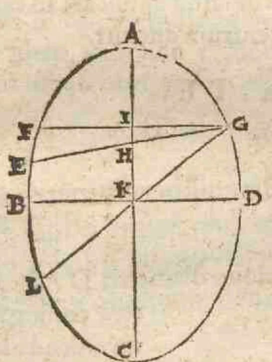
Corollarium 5.

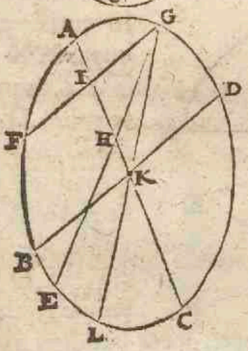
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipſeos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipſin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipſin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] poſſit. [1] per Cor. præcedens. [2] per 5 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XIV.

Propoſitio 15.

Quæ bina quælibet Ellipſeos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc eſt, conjugatæ diametro æquidiſtans.





Si enim in Ellipſi ABCD, cujus centrum K, à diametro AKC bifariam divideretur recta EHG, quæ neque per centrum tranſeat, neque conjugatæ diametro BD æquidiſtans ſit; applicatâ ordinatim GIF, ductâque per centrum rectâ GKL: Quoniam eſſet, ut GH ad HE, ita tam GI ad IF [3], quàm GK ad KL [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque AC parallela [5]; ideoque ad alteram ipſi conjugatam, nempe ad BD, ordinatim applicata [6], atque Ellipſi in tribus punctis occurreret; quod fieri non poſſe ſupra [7] oſtenſum eſt. [3] per 4 Cor. 13 hujus. [4] per 2 Cor. 14 hujus. [5] per 2 ſexti. [6] per 13 & 3 Cor. 14 hujus. [7] in 5to Coroll. 13 hujus.

Corollarium 1.

Ideoque ſi diameter rectam quamlibet in Ellipſi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit [8]. [8] per 4 Cor. 13, & 15^{tam} hujus.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumve diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

1 per 1 Cor. 15 hujus.

2 per 1 Cor. 14 hujus, aliterve, ut cuilibet obvium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

3 per 5 Cor. 14 hujus.

4 per 15 hujus ejusque Cor. 1.

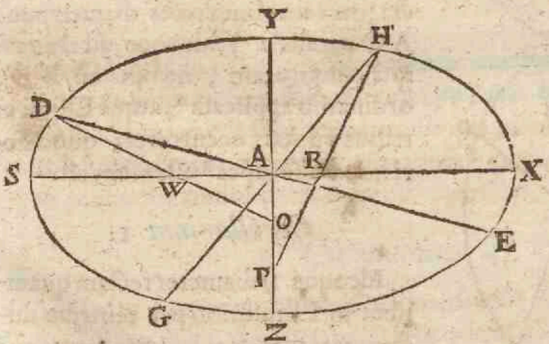
PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri SA æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-

5 per 2 Cor. 15 hujus.



alterum, uti in W, applicetur in statione reciproca ipsi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipsis A W, A O singulæ singulis æquales sint, ac producta P R Ellipsi occurrat in puncto H, à quo si per centrum A ducatur recta H A G, Ellipsi terminata: constat, per ea, quæ ad Propositionem 14tam hujus libri demonstrata sunt, eandem H A G esse diametrum ipsi D E conjugatam.

Atque ita simul apparet, singulis diametris suas quoque distinctas conjugatas diametros esse, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci posse.

Corollarium.

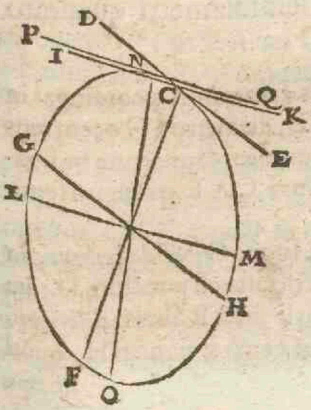
Unde porrò perspicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipsi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipsi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidistans: erit eadem recta [2] contingens quæsita.

[1] *per 16 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 14 hujus.*

THEOREMA XV.

Propositio 17.

Ellipsin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela est diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipsin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata sit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipsin non contingere.

Si enim fieri potest, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidistanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori C F

[1] per 4 Cor. 14 hujus. [2] per 2 Cor. 13 hujus. [3] per idem Coroll.

CF diversa sit, punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipsi L M, ideoque & contingenti I C K, æquidistans ducta sit P Q. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta I C K infra rectam P N Q: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta P N Q, infra contingentem I C K: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo I C K Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

[4] per Coroll. præcedens. [5] per 4 Cor. 13 hujus.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5], & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

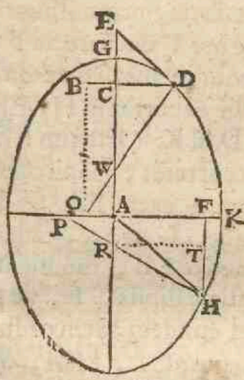
Quamcunque Ellipsin G D, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta D E, diametro I G occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C: dico rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

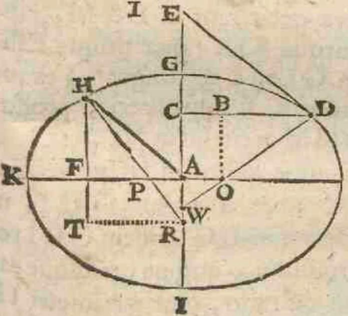
Sit enim primùm axis diameter I G, sitque O W *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut O D *intervallum* semi-axi A G æquale sit, P R autem *describens* in statione, ipsi O W reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod

nempe

nempe *describenti* P R in directum est, ducta diameter H A conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad secundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipsis A G, A K æquidistantes, quæ applicatis D C, H F, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.

1 per 4 Cor. 14 hujus.
2 per Cor. 17 hujus.



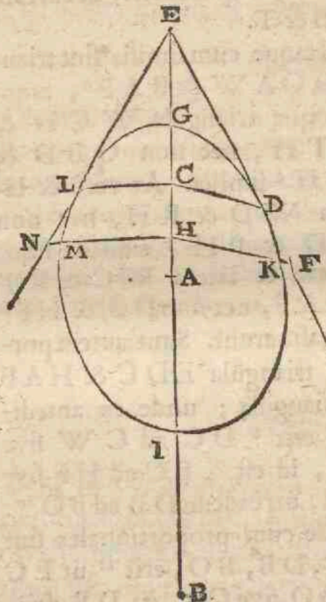


Itaque cum similia sint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] similia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia sunt. Quare & latera W C & R T sive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W sive A F, id est [9], E C ad H F sive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales sint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O sive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc est, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato semi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam D E Ellipsin contingere non possit [16], patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum C A E æquale sit quadrato semi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipsi ocrurrat in D, junctam E D esse contingentem.

3 ex constructione.
4 per 29 primi, & 21 sexti.
5 ex constructione.
6 per 26 primi.
7 per 29 primi.
8 per 4 sexti.
9 propter triangula E D C, H F A æquiang.
10 propter triangula D C W, D B O æquiangula.
11 per Cor. 20 sexti.
12 per 18 quinti.
13 per 47 primi.
14 per Cor. 20 sexti.
15 per 17 sexti.
16 per 17 hujus.

Deinde non sit recta I G Ellipseos G D axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab assumpto in curva utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H; Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opùs fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin, G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D in-

[2] per 13 hujus, & Cor. 20. sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in D. contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra [1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

[1] *in Cor. 16. hujus.*

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

[2] *per 2 Cor. 15. hujus.*

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur [5], occuratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu [6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

[3] *inventum per 2 Coroll. 15 hujus.*
[4] *juxta Cor. 17. hujus.*
[5] *per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.*
[6] *per 18 hujus.*

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

quàm

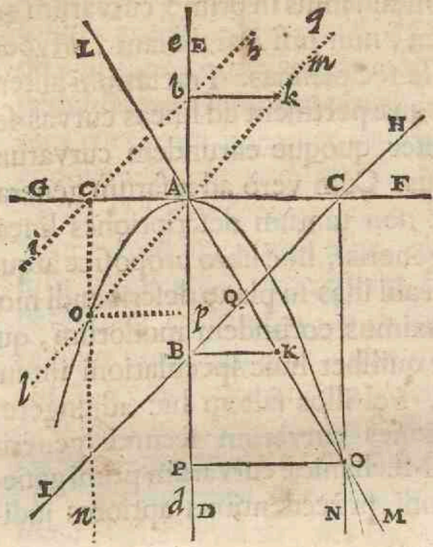
quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* ſive *Compoſitio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæteriſque Geometris ea præcipuè conſcripta eſſe, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis ſuperaddidere, omnino credibile eſt. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac diſtinctionem, ut & diſtributionem in ſua genera & ſpecies, cum ſegregatione earum, quæ verè Geometricæ non ſunt, ab iis quæ in Geometriam ſunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam exiſtimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc ſubjungere, non quidem eâ methodo, ſicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem ſufficeret, ſi vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id eſt, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipſis*, ſive *circuli circumferentia* exiſtunt, (quorumque Locorum Compoſitioni eos ſolummodo intentos fuiſſe invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immenſum excreſceret, ſi ad Loca, quæ ſunt lineæ curvæ ſecundi generis, uti nobis propoſitum eſt, extenderetur; ſed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino caſus poſſibiles reſolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem ſumus obſervaturi, ut jam poſt explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſis, (ſuppoſitâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ ſunt vel ex prædictis curvis conſtant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

Caput IV.

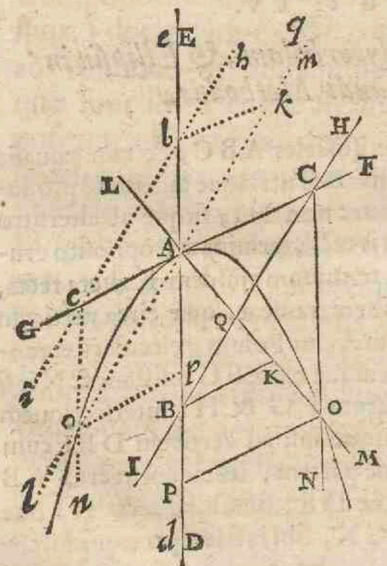
Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque isosceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm basis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito crurí æquidistans, ut B K, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G insistens C N ipsi D E parallela transeat per ipsarum F G & H I intersectionem C. Dico, si angulus E B H atque ipsi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B semper applicatum maneat rectæ D E, simulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, sibi ipsi semper æquidistantem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædictam L M, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum C N, LM, quæ sit ad O, Parabolam describere,[1] cujus diameter est AD, parameter KB, ac F G eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI, si intersectio rectarum F G, HI designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad diametrum applicata sit O P ipsi F G æquidistans: erit semper KB ad B A, hoc est, ad A C, uti eadem A C ad C O[1]: ac proinde [2] rectangulum sub KB, C O, id est [3], sub K B, A P quadrato rectæ A C, hoc est [4], ipsius O P æquale. Unde si B A C angulus rectus fuerit, erit A D axis, sin minùs, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi B A C vel B A G angulo æquales.

1 per 29 primi, & 4 sexti.
2 per 17 sexti.
3 per 34 primi.
4 per eandem.



In transitu etiam hîc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum H I, L M, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

positas

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum B A C isosceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B sed ubivis in recta A D educta esset, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*; & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, descripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis sit, centro A & intervallo A K circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ad *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, sibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Asymptotos esse [b].

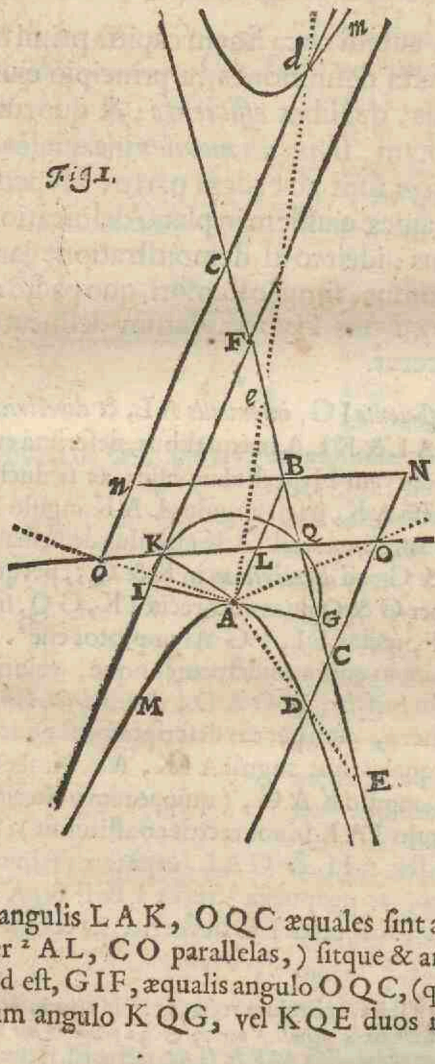
Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *describens*, ut O D, in statione ubi fuêre, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli A I K, A K I inter se [1], nec non simul sumpti angulo K A G, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos constituunt): erunt quoque anguli A I K seu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [c]; ideoque sicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V. exhibito.
[b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F in priori, & G F in posteriori eum contingere cernitur. [1] *per 5 primi.* [2] *per 13 & 32 primi.* [3] *per 28 primi.* [c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus est, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

rent describentes A L & O D, utpote ipsi I K F æquidistantes. Sint itaque ipsarum occursus in B & C, ac per B agatur recta B N directrici K O æquidistans, occurrensque describenti D O in N: eritque ut G A ipsi A I, ita [1] G B ipsi B F æqualis. Cum

[1] per 2 sexti, & 14 quinti.

Fig. 1.



autem in triangulis L A K, O Q C æquales sint anguli ad L & O, (propter [2] A L, C O parallelas,) sitque & angulus L A K sive G A L, id est, G I F, æqualis angulo O Q C, (quippe tam hic quàm ille cum angulo K Q G, vel K Q E duos rectos constituit

[2] per 29 primi.

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula L A K & O Q C sive [2] N B C. Porrò, quoniam angulus A G E angulo I K O seu A L O æqualis est, (quippe tam hîc quàm ille cum angulo I G Q sive I G F [3] binos rectos constituit [e],) atque angulis L A G, O A D vel O A E iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi O A G [f], compositi vel residui L A O, G A D vel G A E æquales quoque sunt, ac L O, A O sibi mutuò occurrant; G E quoque & A D sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, A G E, A L O, eritque propterea [4] A L ad A G, ut L O sive N B ad G E. At verò

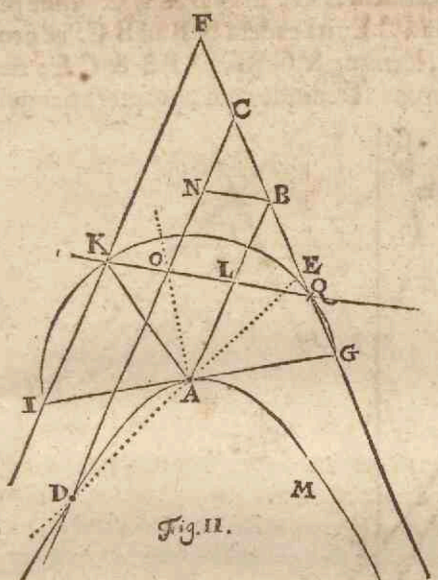


Fig. II.

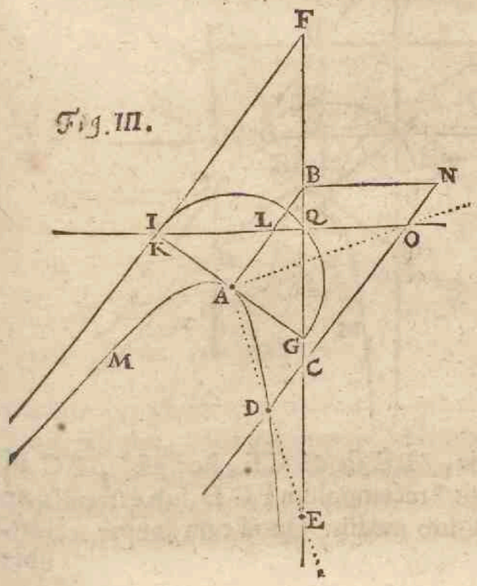


Fig. III.

[1] in I & II fig. per 13 primi, & 32 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum O Q C quàm L A K rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos G I F & O Q C æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

[2] *per 29 primi.*

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo I G Q æqualis est I K Q per 21 tertii.*

[e] in fig. II angulus A G E angulo A L O est æqualis, quia uterque cum angulo I K Q duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in casu fig. II & similibus, B A E.

[4] *per 4 sexti permut.*

(ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

1 per sup. dem.
2 per 4 sexti.
3 per 11 quinti.
4 per 9 quinti.
5 per sup. demonstr.

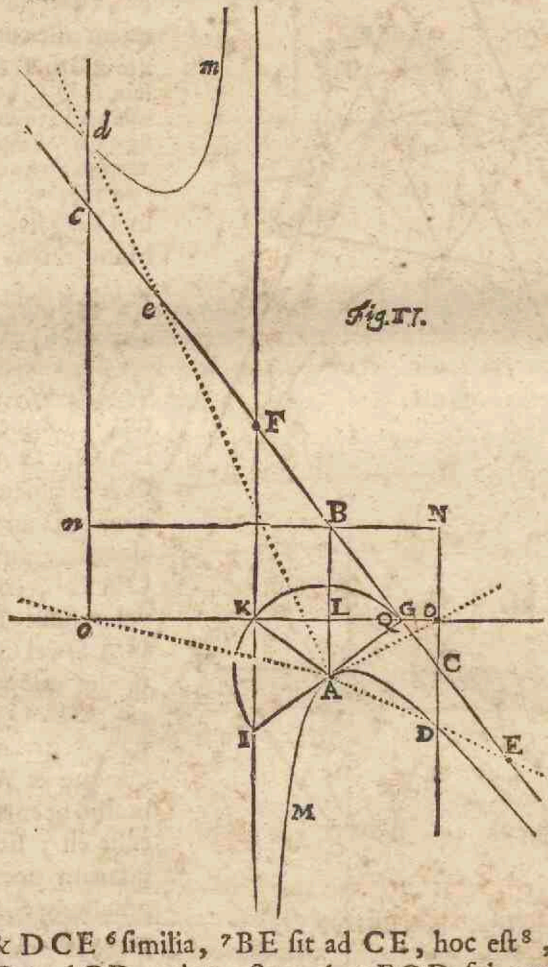


Fig. II.

ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

6 per 29 primi.
7 per 4 sexti.
8 per sup. demonstr.
9 per 16 sexti.

ubicunque in curva aſſumptum fuerit D punctum, ſequitur [1] curvam D A M Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti F I, F G. [1] per 3 hujus.
Quod erat oſtendendum.

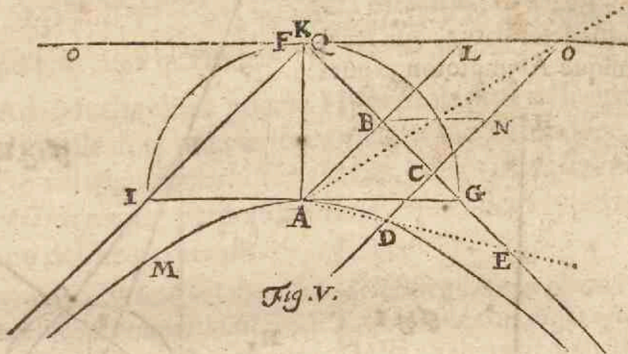


Fig. V.

Ex antedictis manifeſtum eſt, ſi *efficiens* ſeu [2] contingens, ut [2] per 6 hujus.
I G, ad Aſymptotorum alterutram perpendicularis ſit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, ſi nempe *intervallum*, ut A L, æquidiſtans ductum ſit ei Aſymptoto cui *efficiens* ſeu contingens I G ad angulos rectos occur-

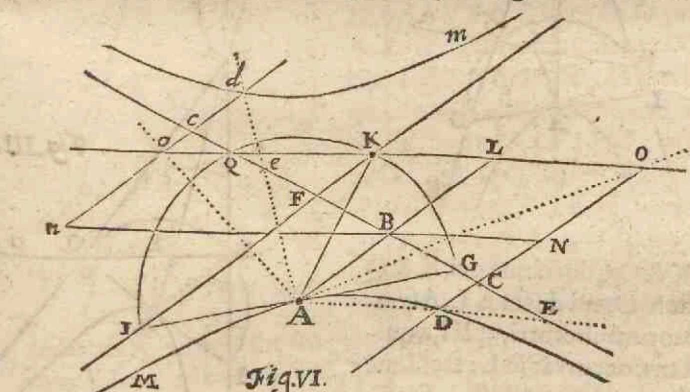


Fig. VI.

rit, ut in tertia figura, vel certè *deſcribentem* ad *directricem* fore perpendicularem, ſi nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Aſympto, cui eadem *efficiens* ſeu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque ſi vel Aſymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

 metris

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola ſit deſcribenda, ductis in caſu poſteriore Aſymptotis F I, F G, diametro I G circulus deſcribatur, qui ſecet utramque Aſymptoton, puta

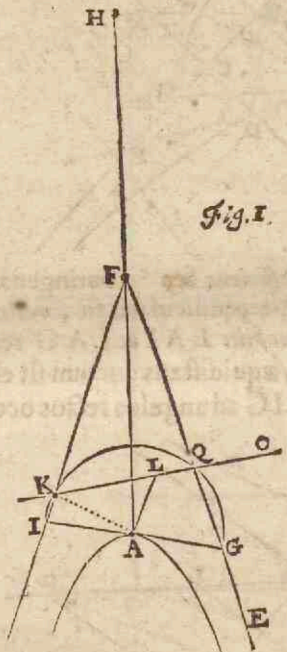


Fig. I.

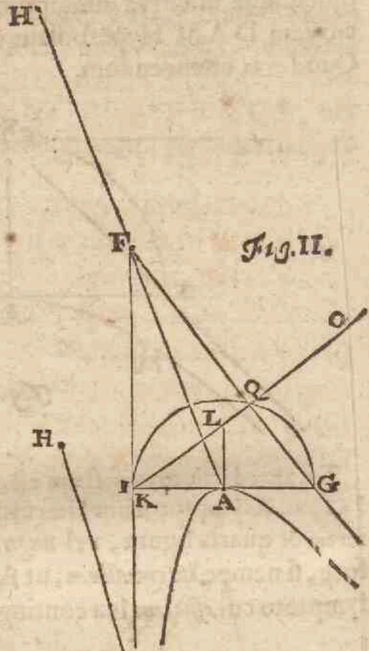


Fig. II.

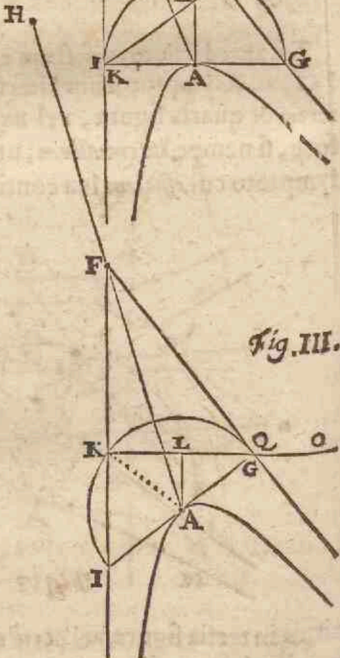


Fig. III.

in K & Q[a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Aſymptotorum alterutri, ut F I, æquidiſtans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmiſſis, ſi *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva deſcribatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram ſecet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

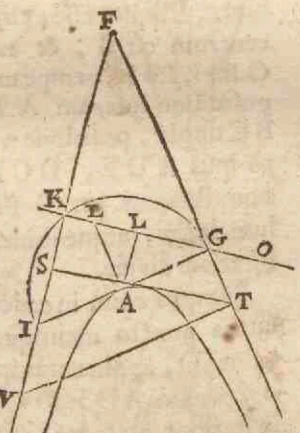
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occurſus evitemus, hæc eadem abſque Circuli deſcriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumtum ut I F inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam[1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est[2], I F ad S F, uti[3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G[4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



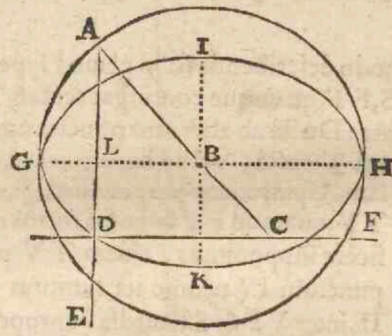
1 *per 9 hujus.*
2 *ex hypothesi.*
3 *per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.*
4 *per Cor. 16 tertii.*

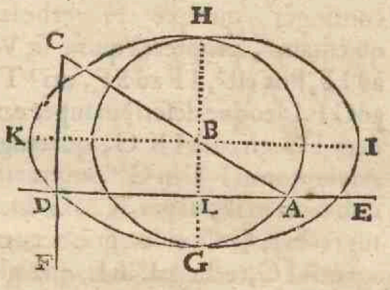
Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel ita

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipsarum A B, B C duplæ, positione verò ipsis A D E, D C F, æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* A D E, D C F in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti

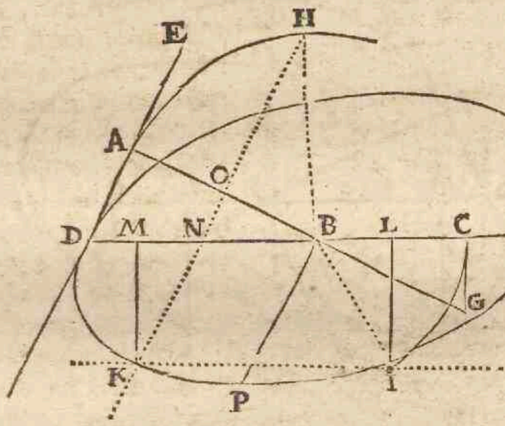
1 per 2 & 22 sexti. A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipsam G H, secat, ut in L. & sit G A H circumferentia Circuli, qui per

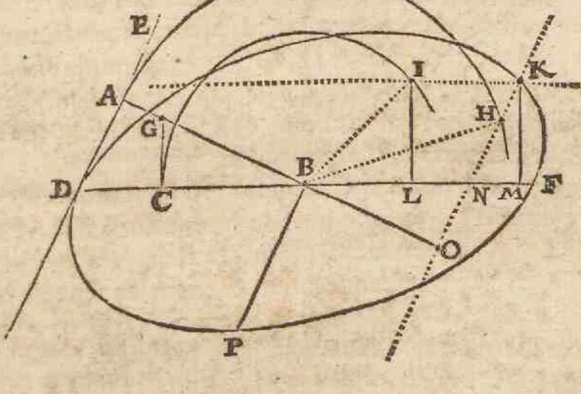
2 per 14 secundi, vel 35 tertii. motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc est, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum sive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

quadratum: constat [1], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K. [1] per 13 hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

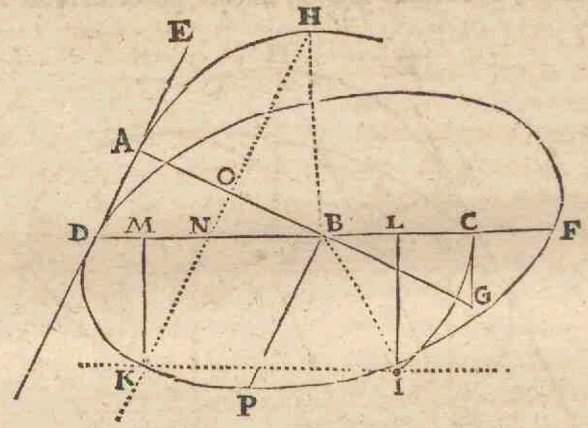
Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,





D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

cruri coincidat, (quemadmodum in statione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta D A E ad crus A B perpendicularis est:) dico iterum, si angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas D A E & D C F sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



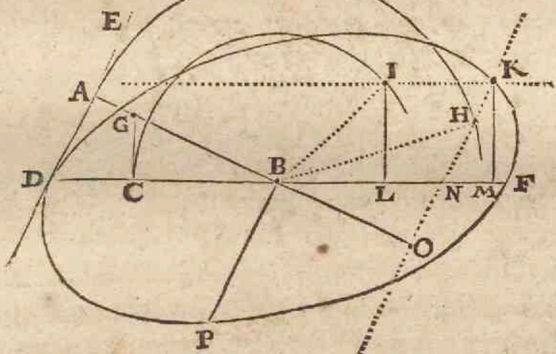
vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, si opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam positione; altera verò, ut B G, non item, sed B P ipsi æqualis, rectæque D A E æquidistans.

Sit enim prædictus A B C angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam D F, ipsius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatisque intersectionem punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus A B C sive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] ex hypothesi, & per 29 primi.
[2] per 21 sexti.

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N simile sit[1]: quare cum sit [2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratum, id est[3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit[4] per conversionem rationis D B quadratum ad D N F[5] rectangulum, sicut H B quadratum ad H O[6] quadratum, id est[7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum[8], id est[9], uti B G sive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando [10] D B quadratum ad

[1] *ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N sive eosdem sive ad verticem.* [2] *per 4 & 22 sexti.* [3] *ex hypothesi.* [4] *per Cor. 19 quinti.* [5] *per 5 secundi.* [6] *per 47 primi.* [7] *per 4 & 22 sexti.* [8] *æqualis est enim B C ipsi B I, & I L ipsi K M.* [9] *per 4 sexti, propter triangula C B G & M K N æquiangula.* [10] *per 16 quinti.*



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva D K P F, intersectione uti prædictum est descripta [11], cujus semi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipsin in vertice D [12].

Notandum hîc est, quòd si rectus foret A B C angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

[11] *per 13 hujus.* [12] *per 2 Cor. 13 hujus.*

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes ſolummodo per ſimiles interſectiones in præcedentibus expoſuimus, per motum puncti in una eademque recta deſcribi poſſunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ ſunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propoſitas exiſtimamus, hiſce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumque* inventiones ac determinationes progredimur.

IOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, sive is sit ad lineam rectam, sive ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiatur, quæsitus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæsitus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, sive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non assurget, si de loco Plano Solidovè quæstio sit): erit Locus quæsitus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

Quo-

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \infty \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \infty b$) $y \infty x$.

II. $y \infty \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \infty x + c$.

III. $y \infty \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \infty x - c$.

IV. $y \infty - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \infty - x + c$.

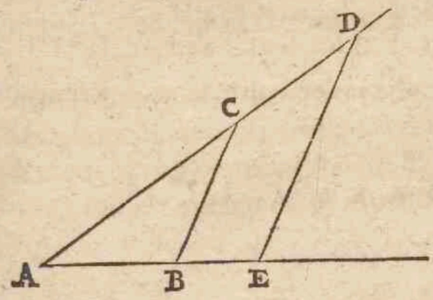
Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

THEOREMA I.

Propoſitio 1.

Si æquatio ſit $y \infty \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem A B puncto utcunque, veluti B, agatur B C in angulo A B C, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ est a cognitæ ad b cognitam.



hoc est, ut sit uti a ad b, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel assumpto æquali, si eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc est, ut a ad b, ita A E ad E D, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $a y \infty b x$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

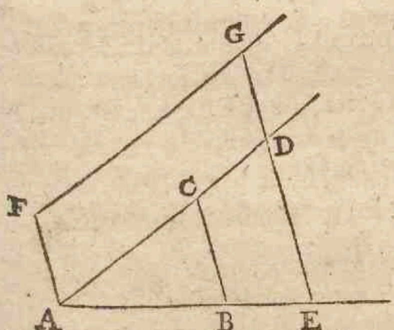
[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonstratio, ac proinde ipsa A C locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta A F ipsi B C parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

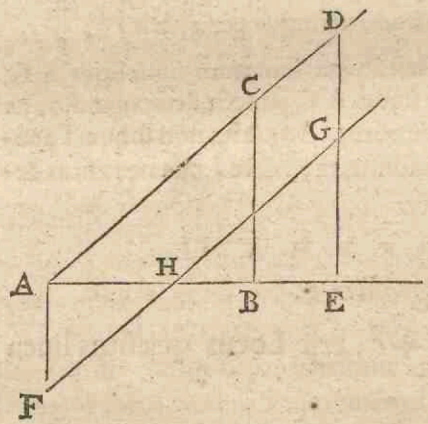
Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $y - c$. At verò est, ut supra [1], uti A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac \infty bx$, vel $ay \infty bx + ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1mo, agatur insuper ex A recta A F, ipsi B C parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipsi A C parallelâ, secante rectam A B in H, dico H G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $a + c$. Iam verò est [3] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty bx$, vel $ay \infty bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a, $y \infty \frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

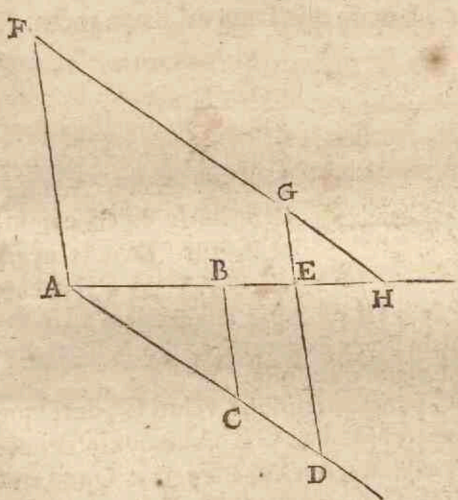
[3] per 29 primi, & 4 sexti.
[4] per 16 sexti.

THEO-

THEOREMA IV.

Propoſitio 4.

Si æquatio ſit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæſitus linea recta.



Poſitis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab oppoſita parte ipſius AB cadat, quodque angulus A B C æqualis ſit dati vel aſſumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta F G ipſi A C parallela, occurrens rectæ A B in H: dico F H eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in F H puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel aſſumpto æquali, quæ producta ſecet A C in D, ſi eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $c - y$. Cumque ſit [1] ex conſtructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \infty bx$, vel $ay \infty ac - bx$, id eſt, dividendo utrinque per a, $y \infty c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propoſitum.

[1] per 13 & 29 primi, & 4 ſexti.
[2] per 16 ſexti.

At verò fieri etiam poteſt, ut per operationem, priuſquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evaneſcat, alteraque ſola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

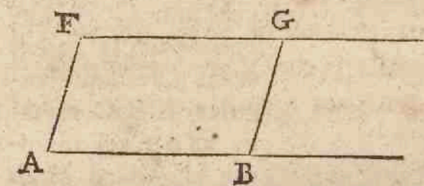
exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \propto c$, vel
2. $x \propto c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \propto c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ A F $\propto c$, faciente cum A B angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur F G ipsi A B parallela, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

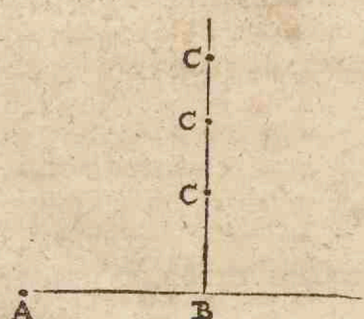
Etenim assumpto in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G B ipsi A F parallelâ, apparet eandem G B omnesque ipsi æquidistantes [1] rectæ A F fore æquales, hoc est, esse $y \propto c$. Quod erat demonstrandum.

[1] per 34 primi.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \propto c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea A B, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo A B æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta B C. dico eandem B C, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper A B, hoc est, $x \infty c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \infty \; ax \\ \text{II.} & yy \infty \; ax + bb \\ \text{III.} & yy \infty \; ax - bb \\ \text{IV.} & yy \infty - ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \infty xx \\ ay + bb \infty xx \\ ay - bb \infty xx \\ bb - ay \infty xx. \end{array}\right.$$

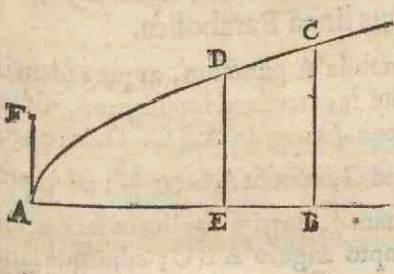
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \infty ax$, vel conversim $ay \infty xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

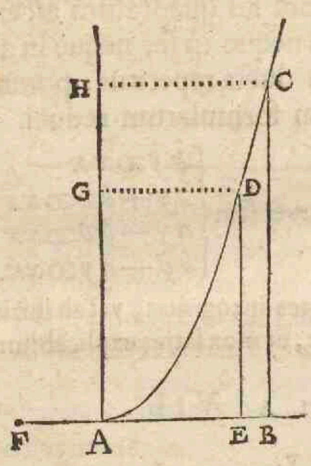
Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo A B C; Assumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F



1 per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus. sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam A D C, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\ a$, esse Locum quæsitum.

Sit enim in eadem curva A D C assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2] quadratum ex E D ∞ F A E rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.

2 per 1 primi hujus.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta A H ipsi B C parallela, atque eadem A H assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B C seu A H C æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola A D C Locus quæsitus.

3 per 1 primi hujus. Est enim [3] quadratum ex G D sive A E quadratum æquale rectangulo sub F A & A G, seu F A & E D, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

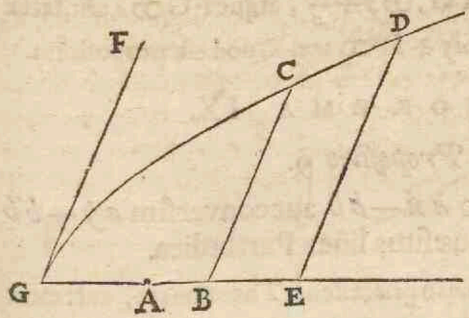
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo A B C. Deinde producatur A B versùs A usque ad G, ita ut sit A G $\infty\ \frac{bb}{a}$; assumptâque G B pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum

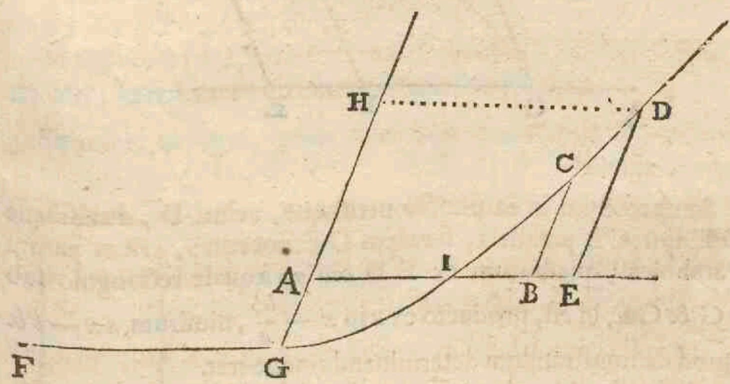
rectum G F sit æquale a cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\ a$, esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, quoniam G E sive A E + A G est $\infty\ x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo sub F G & G E, erit $yy \infty ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut A G sit $\infty\ \frac{bb}{a}$, di-



co, si ad G H diametrum latere recto G F $\infty\ a$ Parabola describatur ut G C, quæ secet rectam A B in I, curvam I D esse Locum quæsitum.

Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H con-

[2] per 1 primi hujus.

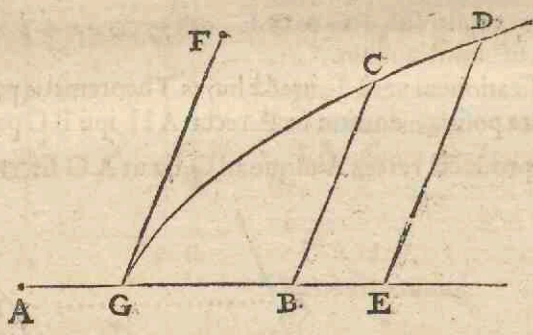
contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ac proinde, quoniam G H, sive D E + A G, $\infty\, y + \frac{bb}{a}$, atque F G $\infty\, a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab A B recta A G $\infty\, \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam G C D esse Locum quæsitum.

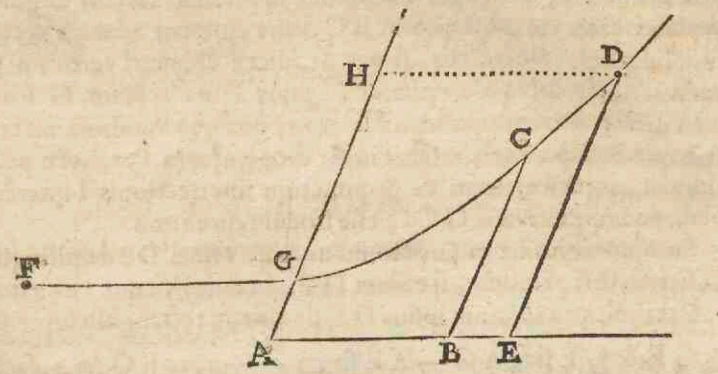


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D seu yy æquale rectangulo sub F G & G E, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela, atque ab ea subductâ A G $\infty\, \frac{bb}{a}$, sumatur G H pro diametro, &c. ut supra, dico curvam G C D fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ideoque, quoniam G H sive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propositum.

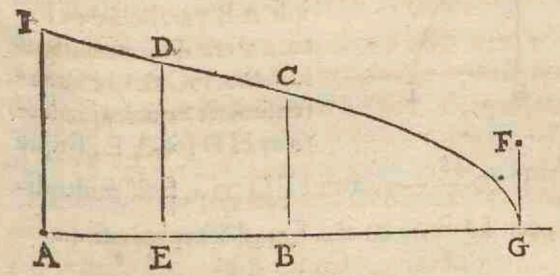
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit $yy \infty bb - ax$ aut conversim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

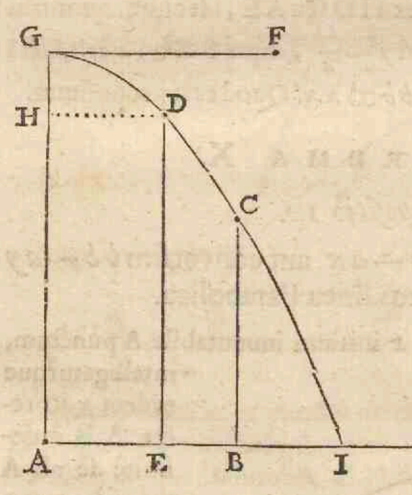
Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x in recta A B indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo



A B C. Deinde ab A versùs B assumptâ A G ∞ $\frac{bb}{a}$ sumatur G A pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto A B C, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum G F eidem diametro correspondens sit $\infty\, a$, quæque Parabola rectam A I ipsi B C parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam G C I, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius D E sit æquale rectangulo sub F G & G E, & G E sive A G — A E sit $\infty\ \frac{bb}{a} - x$, ac F G $\infty\, a$, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur A G ipsi B C parallela atque $\infty\ \frac{bb}{a}$, assumaturque G A pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta A E.

Cum enim ductâ D H ipsi A B parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum sit æquale quadrato ex H D seu A E, sitque G H sive A G — E D $\infty\ \frac{bb}{a} - y$, atque F G $\infty\, a$, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty xx$. Quod erat propositum.

[2] per eandem.

Regulæ

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

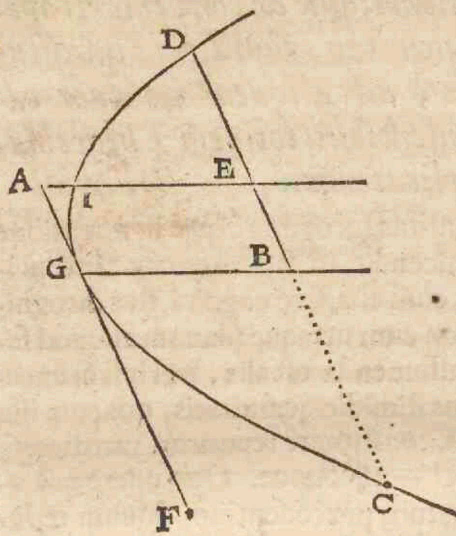
Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversa dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Vnde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\propto y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela,

ita

ita ut pars rectæ A F, omniumque ipſi parallelarum, intercepta inter A E & G B, veluti A G, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta G B aſſumenda eſt ut Parabolæ diameter, ad quam ſi per ejuſdem verticem G, exiſtente G F latere recto, ipſi diametro G B correſpondente, $\infty\ b$ Parabola deſcribatur, ſecans rectam A E in I: dico curvam I D indefinitè versùs D productam eſſe Locum quæſitum.



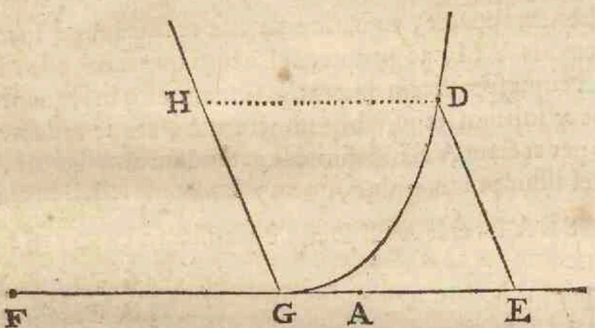
Etenim aſſumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A F parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro G B occurrat in B: erit ex conſtructione intercepta E B $\infty\ a$, ac proinde tota D B $\infty\ y + a$, hoc eſt, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex D B æquetur rectangulo ſub F G & G B, vel F G & A E: erit quoque $zz \infty bx$, ſive, reſtituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id eſt, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

Quòd ſi æquatio fuiſſet $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ aſſumptione ſecundùm Regulam, atque operatione, ut ſupra; deventum fuiſſet ad eandem æquationem, nimirum, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo caſu juxta Regulam aſſumenda fuiſſet $\infty\ y - a$, idcirco quoque diameter G B (iiſdem ut ſupra poſitis) non infra, ſed ſupra rectam A E cecidiſſet, cæteraque omnia eodem quo ſupra modo expedienda fuiſſent.

Si verò æquatio ſit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ eſt converſa ſuperiùs expoſitæ, aſſumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare ſi loco ipſius x in æquatione ſubſtituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc est, omissis iis, quæ se mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Vnde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,

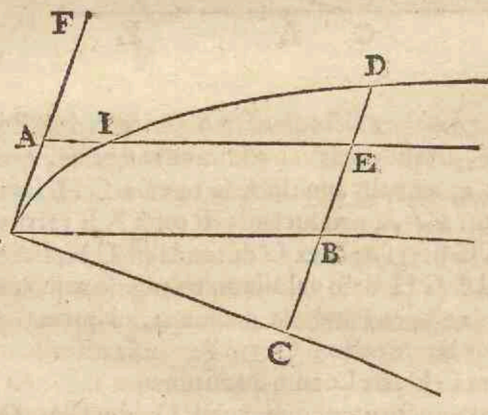


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta A E versùs A usque ad G, ita ut A G sit ∞a; & ex G ducenda est G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel assumpto angulo æqualem, ipsaque G H sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per ejus verticem G atque latere recto F G ∞b Parabola describatur, ut G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi H G parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum G E sit $\infty x + a$ seu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum ∞ quadrato ex H D sive G E, erit $by \infty vv$, sive, restituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis secundùm Regulam instituenda fuisset operatio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Vnde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm est infra eandem recta G B ipsi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum G B seu A E indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipsi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipsius G B inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a. Quod ipſum ut fiat, ſtatuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C ∞ $\frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipſi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt ∞ $\frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet ſupra A E exſurgens, quæ poſſit eſſe y, poſtquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Hujus igitur quadratum cum debeat eſſe ∞ dx, ſtatim inde apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita eſſet aſſumptum, ut rectangula, ſub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent ∞ dx, eandem illam Parabolam fore Locum quæſitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque ſimilium, cognita ſit, nempe, ut a ad b; ſitque itidem notus angulus G B C, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque ſimilium, quæ ſit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B ſeu A E indefinitè ſumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè ſumpta, hoc eſt, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ diviſus ut prædictum latus rectum reſtituat neceſſe eſt: ac proinde per eandem diviſionem cognoſcitur quæſitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, ſi ad diametrum G C, ut ſupra dictum eſt, deſcribatur Parabola G I D, ſecans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæſitum.

[1] per 6 ſexti.

Atque hîc, ut & in aliis ſimilibus exemplis obiter notandum, ſi Parabola deſcripta prædictam A E non ſecaret, id certo indicio fore, quæſtionem propoſitam, per quam legitimâ operatione ad ſupra expreſſam æquationem perventum fuerit, ejus eſſe conditionis, ut Locus ad indagandum propoſitus ſui quidem naturâ linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

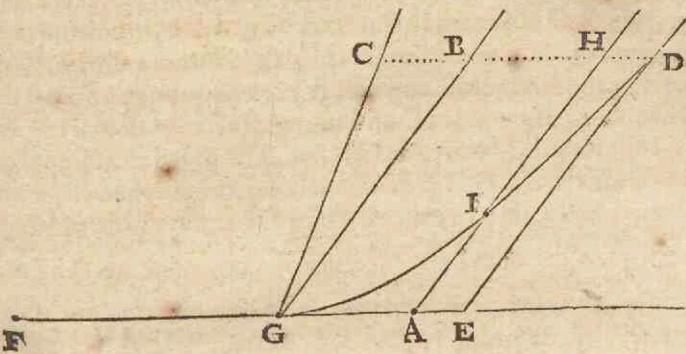
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, quæ protracta secet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, si D E vocetur y, cum E B seu A G sit ∞ c, & B C ∞ $\frac{bx}{a}$, erit tota D C ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ G B non infra sed supra rectam A E, ut & G C non infra sed supra eandem G B ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Vnde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis VII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque da-



tus vel assumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex secunda parte Theorematis VII constat, prædictam Parabolam ita esse describendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum sint ipsi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propositam æquales esse quantitati assumptæ v, hoc est, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm est recta G B ipsi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipsi æquidistantium, velut A G vel H B sit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ possit esse ipsi A E æquidistans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, secundùm ea, quæ in præcedentibus explicata sunt, constituenda est Parabolæ diameter ab adversa parte ipsius G B, quàm est punctum E in recta G C, ut, si G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipsi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipsi A E parallela, quæ possit esse x ad rectam G C producta, veluti D C, fit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cujus quidem quadratum cum æquale esse debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: statim apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C,

 cujus

cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent ∞ dy, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A H: erit quoque [1] ratio ipsius G B ad G C aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si G B sive E D indefinitè sumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C inventam, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

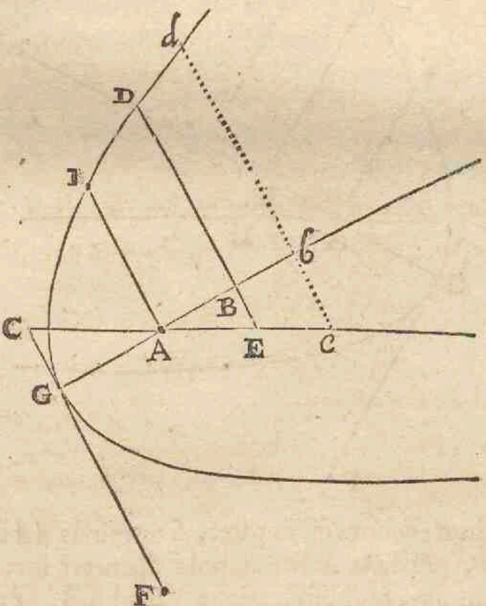
Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A H, ut & D C ipsi A E parallelâ, quæ quidem D C secet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E $\infty\, x \,\infty$ D H; E D $\infty\, y \,\infty$ G B; A G & H B $\infty\, c$; B C $\infty \frac{by}{a}$ ideoque tota D C $\infty\, x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C sit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \infty vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonſtrari queant; obſervatâ ſolummodo diversâ linearum poſitione, quæ ex ſignorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes ſimilium locorum caſus mox per generalem Regulam ſim exhibiturus.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

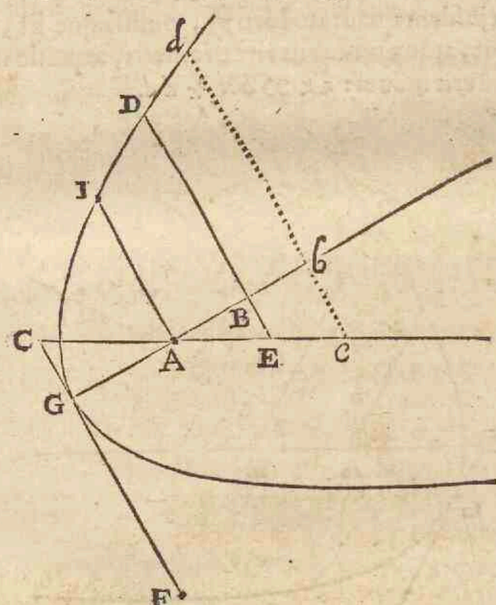
Si æquatio ſit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, omiſſisque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio ſuperior ſequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus particularem deſcriptionem eſto in adjuncta figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A

per

per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque est supra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem sit ratio A E ad E B, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita A E seu x ad E B, eritque E B $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter A B

A B versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum ſub prædicto latere recto & parte G A contentum ſit ∞ dd, rectam G B quæſitam fore diametrum, ejuſque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc eſt per $\frac{2ab}{e}$, diviſum æquari longitudini G A, ideoque G A fore ∞ $\frac{dde}{2ab}$. Quare ſi diametro G B & latere recto G F ∞ $\frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola deſcribatur G D d, ſecans A I ipſi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæſitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: ſi nempe E A producatur ad C, ita ut A C ſit ∞ $\frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipſi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concurſus puncto vertex quæſitus.

Demonſtratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel aſſumpto æquali, ſecante diametrum G B in B: erit, ex conſtructione, B E ∞ $\frac{bx}{2a}$; ideoque ſi E D vocetur y, erit D B ∞ $y - \frac{bx}{2a}$ ſeu z; F G ∞ $\frac{2ab}{e}$, G A ∞ $\frac{dde}{2ab}$; A B ∞ $\frac{ex}{2a}$, totaque G B ∞ $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum ſit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipſius z in ſe ipſam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \infty dd + bx$. Vnde ſubſtituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty bx + dd$, id eſt, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem pro caſu hujus exempli converſo Parabola deſcribenda ſit, ex comparatione ejuſdem cum antedictis facile eſt colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$,

 aſſum-

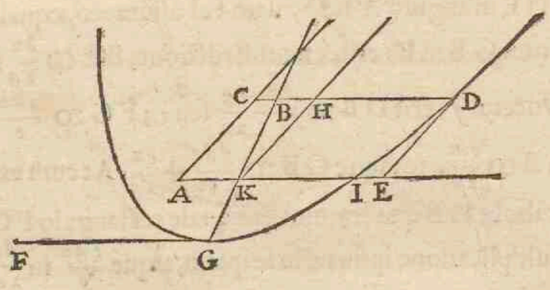
assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{2}cc \infty vv.$$

Vnde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
AK $\infty \frac{1}{2}c \infty$ CH, quia KH parallela AC.



Vt a ad b, ita KH seu y ad HB: unde HB fit $\infty \frac{by}{a}$, & DB $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.

Vt a ad e, ita KH seu y ad KB: unde KB (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\infty \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{e}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde K G fit $\infty \frac{cce}{2ab}$, atque G B $\infty \frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum F G B ∞ B D quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc.$

$- \frac{1}{2}cc.$

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.

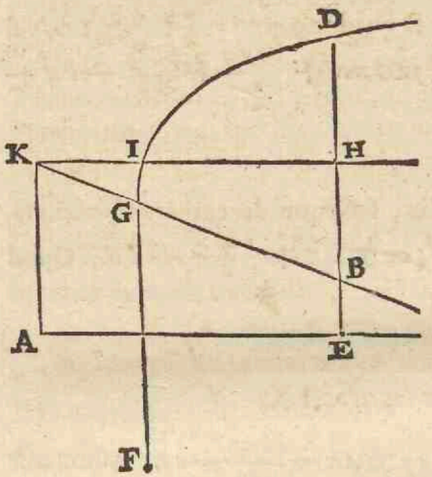
A E indefinitè ∞x.

E D omnesque ipsi parallelæ ∞y.

E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.

A K $\infty \frac{1}{2}c$.
K H parallela ipsi A E.

Vt $2a$ ad b, ita K H seu x ad H B: unde H B erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e, ita K H seu x ad K B: unde K B (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit F G, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde K G fit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque G B $\infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si G B diametro & latere recto F G per verticem G descripta sit Parabola, secans K H in I, erit I D Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in I D, & D E ducta parallela ipsi A K, quæ si vocetur y; erit H D $\infty\, y - \frac{1}{2}c$, ac D B $\infty\, y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo F G B, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

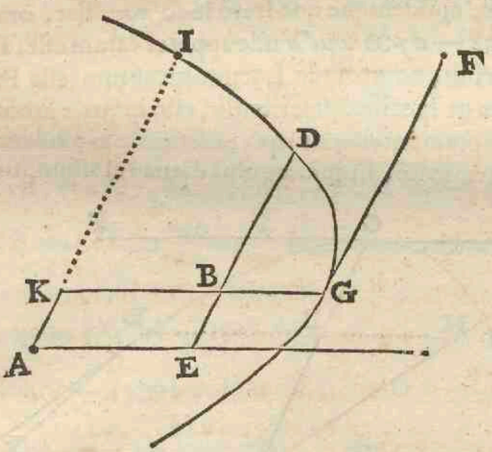
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio sit $ay - yy \infty bx$, sive, quod idem est, $yy - ay + bx \infty 0$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,

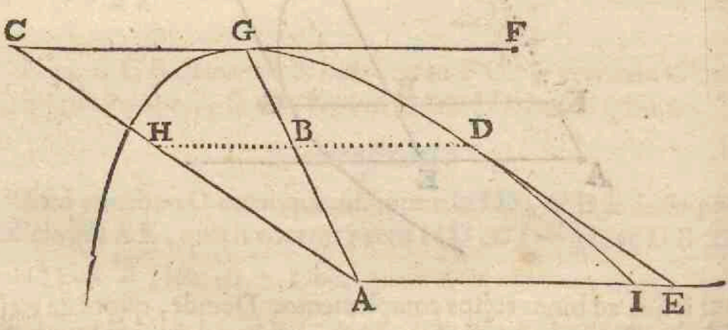


aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\infty y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K G ipsi A E parallela, ita ut A K omnesque ipsi æquidistantes inter A E & K G interceptæ sint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, si juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K parallelæ, cujusque latus rectum F G sit ∞b: erit ipsius portio descripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæsitus.

 Etenim

Etenim assumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet diametrum K G in B, si eadem D E vocetur y: erit D B ∞ $y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac G B sive G K—K B ∞ $\frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D sit æquale rectangulo F G B, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Vnde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in A H recta A C $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipsi A E parallela, atque in eadem sumptâ C G, quæ se habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel aſſumpto aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento æqualem, cognita item ſit ratio, quam habet AC ad AG, quæ ſit ut a ad e; erit, AC exiſtente $\infty \frac{cc}{d}$, AG $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam ſi terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde ſi fiat GF $\infty \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæſitæ Parabolæ, diametro GA correſpondens; atque iccirco ſi ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola deſcribatur, ut GDI, ſecans AE in I: dico IDG curvam eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductiſque DE ipſi AH, ac DBH ipſi AE parallelis, ſi eadem DE exprimatur per y, erit quoque AH ∞y. Cumque ſit ut AC ad CG, id eſt, ut a ad b, ita AH ad HB: erit HB $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum DH ſeu AE ſit ∞x, erit DB $\infty x - \frac{by}{a}$ ſeu v. Similiter cum ſit ut AC ad AG, hoc eſt, ut a ad e, ita AH ſeu y ad AB: erit AB $\infty \frac{ey}{a}$, & GA — AB ſeu GB $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB ſit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipſius FG ſeu $\frac{ad}{e}$ in GB ſeu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipſius BD ſeu v in ſe ipſam, $cc - dy \infty vv$. Hoc eſt, reſtituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile eſt colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuiſſe, hoc modo:

Cum AH indeterminatè ſit ∞y, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipſi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, ſit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ eſt inter AH & AB ſimileſque, ut a ad e: ideoque cum AB indeterminatè ſit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divifus oftendet latus rectum fectionis F G $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum feu $\frac{ad}{e}$ divifus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæfita A G.

Plura hîc exempla fubjungere fupervacuum foret, cum mox omnes omnino cafus poffibiles generali regulâ annotare ac demonftrare animus fit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis feu cafibus in hypothefi non illuftraverimus, neque etiam id aut hîc aut in fequentibus ullo modo neceffarium ducamus, quippe cum unufquifque, qui Regulas ipfas rectè perceperit, eafdem quibuflibet propofitis exemplis feu cafibus in hypothefi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo infignes quafdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipfis confultò prætermifimus, eâ mente, ut in hoc libro fuis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonftrari, fimulque tanquam propofitarum Regularum particularia exempla haberi poffent, earundem explicationem hîc & fub finem fequentis capitis fubjiciemus.

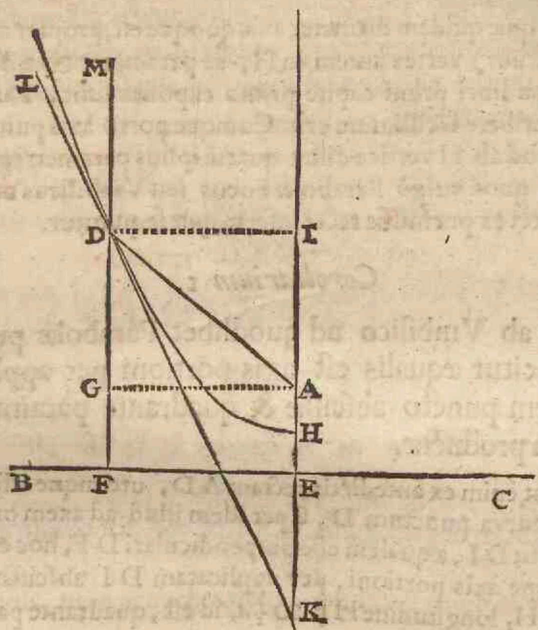
PROBLEMA I.

Propofitio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, fibi invicem fint æquales: & quoniam infinita funt ejufmodi puncta, quæ quæftioni fatisfaciunt, Locum determinare ac defcribere, in quo cuncta & fingula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data pofitione recta linea B C, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac posterior F D nominetur y; si ducta præterea intelligatur A G ipsi E F æquidistans, erit in triangulo rectangulo A G D basis A D ∞ y, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G seu recta E F ∞ x, & G D, sive (si punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (si punctum D inter F & G cadat) A E—F D ∞ $y \sqsubset a$. Vnde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit yy ∞ $xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa$ ∞ xx. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta ea, quæ ibidem expoſita ſunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extenſa atque ipſi F D æquidiſtans ; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id eſt, $\frac{1}{2}a$: erit deſcribendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque eſt, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ $2a$. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo expoſita ſunt, Parabolam ipſam deſcribere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice diſtat quartâ ipſius parametri parte, id ipſum ſit, quod vulgò Parabolæ Focus ſeu Vmbilicus nuncupatur, apparet ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Vmbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis eſt axis portioni per applicatam ab eodem puncto abſciſſæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Conſtat enim ex antedictis rectam A D, utcunque aſſumptum fuerit in curva punctum D, ſi per idem illud ad axem ordinatim applicata ſit D I, æqualem eſſe perpendiculari D F, hoc eſt, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abſciſſæ, & per verticem H, longitudine H E ∞ $\frac{1}{2}a$, id eſt, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifeſtum quoque eſt ex antedictis, ſi poſitis quæ ſupra, & productâ F D, uti ad M, per aſſumptum punctum D contingens ducta ſit, ut L D K, angulum F D K ſive M D L angulo A D K æqualem eſſe.

1 per 1 Cor. 2 primi huius. *2 per 5 primi.*

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipſi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc eſt, A D, ipſi A K æqualis ; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc eſt, angulo F D K ſive M D L æqualis ſit neceſſe eſt.

CA-

CAPUT III.

Tertio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

I. $yx \infty ff$.

II. $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$.

III. $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$.

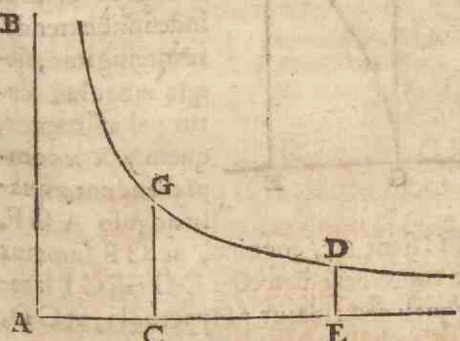
IV. $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \infty ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A B, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in A E recta A C ∞f, ducaturque C G eidem



æqualis ac ipsi A B parallela, descriptâque ' per punctum G atque

' per ea quæ in Corol. ad 11 & 12, nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis AE, AB Hyperbolâ GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

[1] *per 3 primi hujus.*

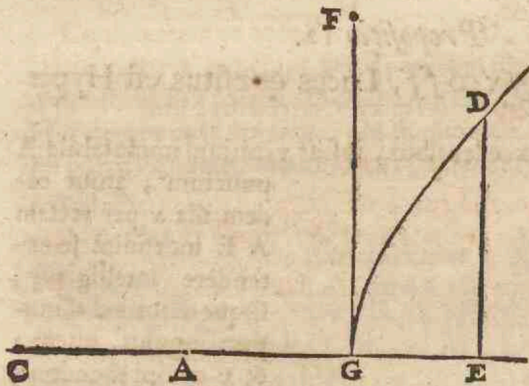
Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AB parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum AED rectangulo ACG, hoc est, quadrato ex AC æquale. Hinc, cum AE sit assumpta pro incognita quantitate x, si ED vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \infty xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF, quòd si tam AG quàm AC fiant ∞f cognitæ, ac GF sumatur ∞ GC, centroque A, & transversâ diametro CG ipsi GF lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.



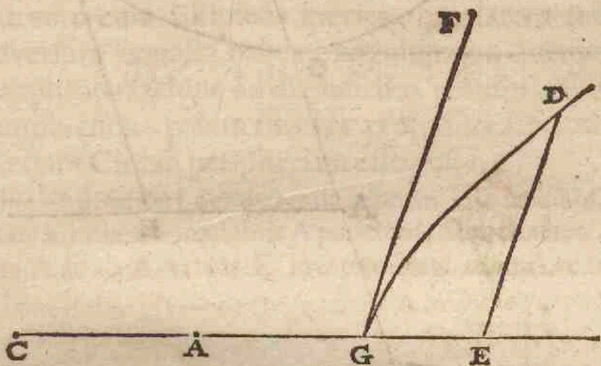
[2] *per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.*

[3] *per 10 primi hujus.*

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm CG & GF supponantur æquales, quadratum ex DE æquale rectangulo CEG.

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit $\infty\ x+f$, & GE sive AE — AG $\infty\ x-f$, erit $yy \infty\ xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [r] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty\ gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty\ xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat. [r] *per 10 primi hujus.*

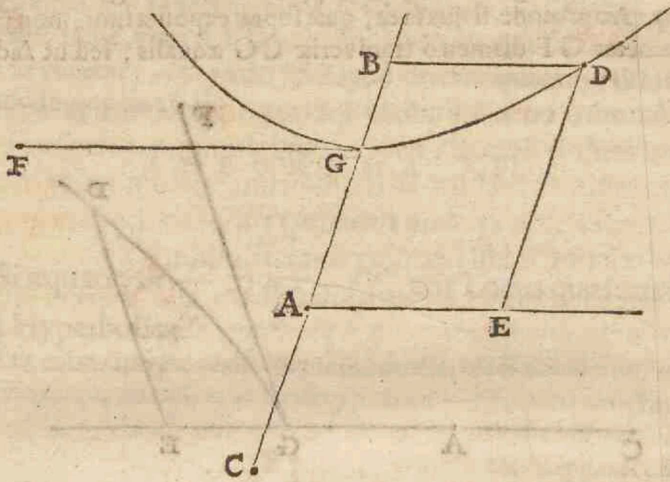
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

E in linea A E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, statim apparet, si tam A G quam A C sumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F sit ipsi A E parallela), ac postea centro A, transversâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola describatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A G, ac D B ipsi A E parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit C B, hoc est, D E + A C, $\propto y + f$; & B G, sive D E — A G, $\propto y - f$, ideoque C B G rectangulum $\propto yy - ff$. Dein cum [1] ex natura Hyperbolæ sit ut C G ad G F, hoc est, ex hypothesi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B sive A E quadratum, id est, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \propto lxx$, hoc est, $yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$: Quod demonstrandum, determinandumque erat.

[1] per 10 primi huius.

THEO-

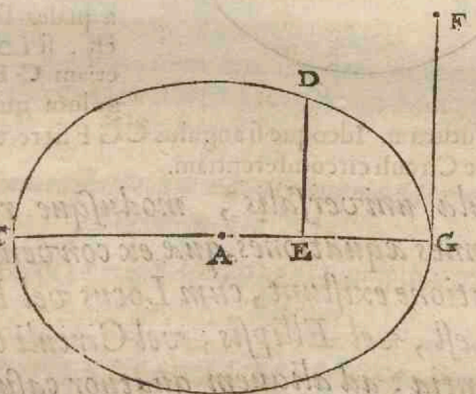
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$, erit Locus quæſitus Ellipſis.

At verò cum Ellipſeos ſpecies, quæ latera rectum & tranſverſum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, ſit Circuli circumferentia: palam fit caſu propoſito Locum quæſitum etiam Circuli peripheriam eſſe poſſe.

Hinc ad prædicti Loci determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe per lineam A E ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



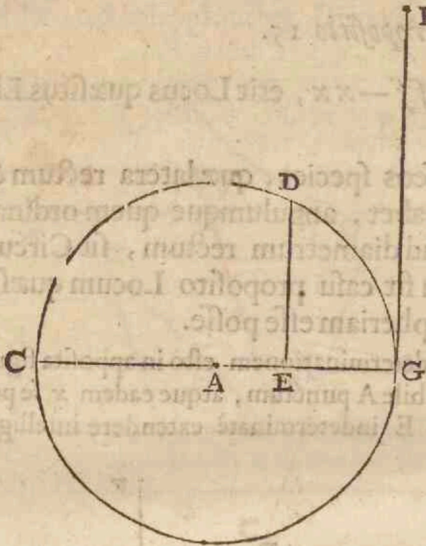
tur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum ſit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, ſi tam A G quàm A C ſumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita C G ad G F, ac centro A, tranſverſâ diametro C G, & parametro G F [1] Ellipſis deſcribatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæſitum.

Sum-

[1] *per 7 Corol. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejuſdem lib. tradita ſunt.*

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut F G ad G C, ita E D quadratum ad C E G rectangulum. Hoc est, si E D vocetur y, cum C E sit $\infty f + x$, & E G $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.

[1] per 13 primi hujus.



Cæterùm liquidò constat, si C G & G F æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam C E G rectangulum quadrato E D æquale sit futurum. Ideoque si angulus C G F sit rectus, curvam G D C fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

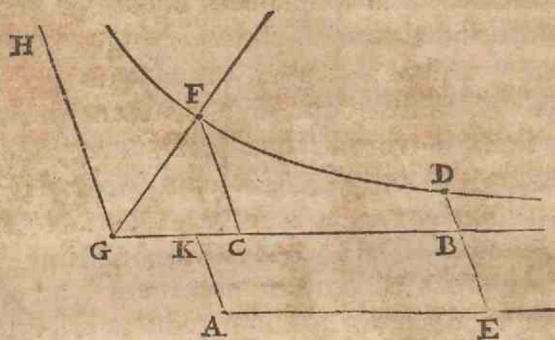
Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incognitâ, tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \infty ee$: aſſumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + b$, erit $z + c \infty y$, & $v - b \infty x$.

Vnde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + bz + bc \infty ee$, ſive $zx + bz + bc \infty ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - b$, erit $zv - bz + bz + bc \infty ee$, id eſt, $zv \infty ee - bc$. aut, (ſi loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\infty\, y - c$, si y supra lineam A E exsurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta K B ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipsi æquidistantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v est $\infty\, x + h$, producenda est ipsa B K per K usque ad G, ita ut K G sit



$\infty\, h$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & G B una Asymptotωn, eritque altera ipsi A K parallela, ut G H. Vnde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta G B sumatur G C æqualis f cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Asymptotis G B & G H, sive Asymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola describatur F D: dico curvam F D fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet rectam K B in B, si eadem D E vocetur y, erit D B sive D E — E B $\infty\, y - c$, id est, z. Est autem & G B sive A E + G K $\infty\, x + h$, hoc est, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $zv \infty ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z, & $x + h$ in locum ipsius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch \infty ee - ch$, hoc est, $yx - cx + hy \infty ee$. Quod erat propositum.

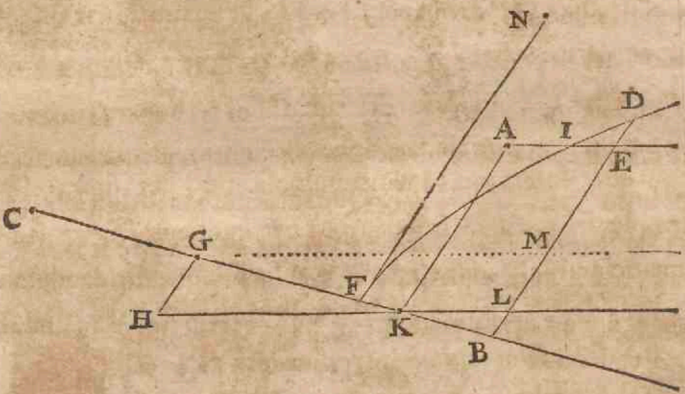
Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum ipsius y, atque ejusdem quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ transpositione, $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \infty x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat, habebitur $x \infty v \frac{-aac - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ se invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa+bb}$ scribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2hx \frac{+aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum assumpto $v \infty x + h$ seu $x \infty v - h$, eoque substituto loco x in æquatione, ac ejusdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Vnde apparet, ante omnia hîc esse considerandum, utrum hh sit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra. si enim majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm est infra eandem A E recta K L ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K usque ad H, ita ut K H sit ∞ b, ideoque H L indefinitè sumpta ∞ $x + b$, hoc est, v, ducatur per H punctum recta H G ipsi A K parallela, ita ut K H ad H G sit, ut a ad b. Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ est inter b & a: hoc est, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque sit ut K H ad H G. Ideoque cum K L sive A E indefinitè sumpta sit ∞ x, erit L B, ut & quælibet ipsi parallela, inter K L & K B intercepta, ∞ $\frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra A E rectam exsurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B sive D E + E L + L B erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Unde apparet, juxta Regulam lineam G B sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K seu D B parallelæ: eritque ejus-

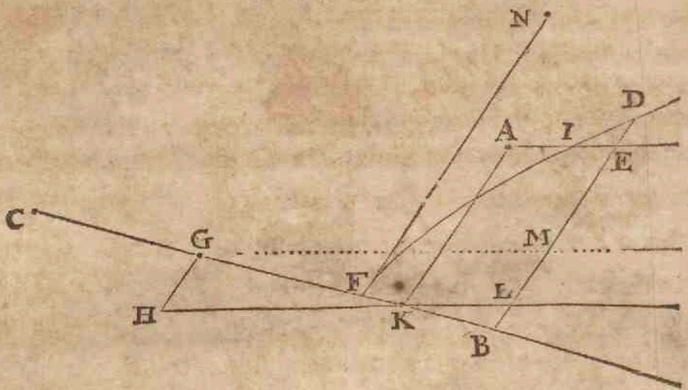


dem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Unde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Est autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC $\infty \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC $\infty \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF $\infty \frac{iv}{a} -$

$\sqrt{\frac{iibb}{aa}\frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum C B F $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles N F ad F C, seu $fa+bb$ ad ii sit, ut D B quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum C B F: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$,

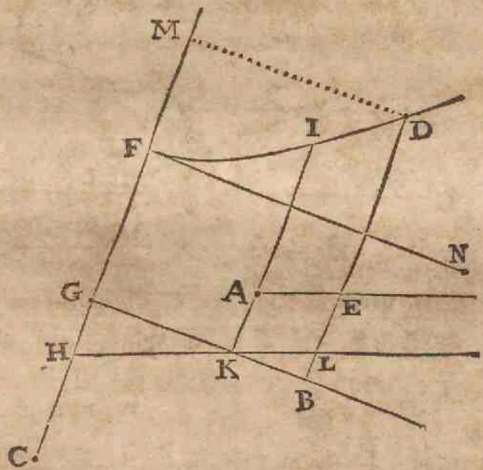


Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Dein restituto $x+h$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx+2hx+\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{eaax+2bcax}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa+bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa+ccaa}{fa+bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{ddii+ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa+bb$, ac producto

divi$\!$so

diviso per ii, factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divis. per ii, id est, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in præcedenti figura ductæ sunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, & GKB: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit diameter in linea GK, sed, juxta Regulam, in linea HG producta

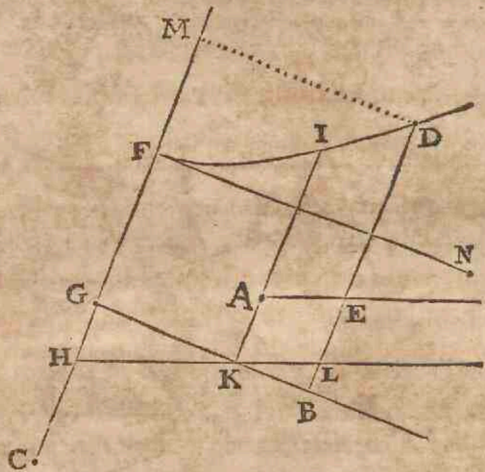


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi GKB parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ diametri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc \frac{-fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare si fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita CF ad FN, quæ quidem FN ipsi GKB æquidistans sit, erit FN parameter: ac proinde si centro G transversâ diametro CF & parametro FN Hyperbola describatur FD, secans ipsam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DB ipsi AK (sive GF), & DM ipsi GB parallelâ, si

ED

E D vocetur y, erit, ut supra, D B sive M G $\infty\ z$, & B G sive D M $\infty\ \frac{iv}{a}$. Cumque sit G F vel G C $\infty\ \sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, erit C M $\infty\ z+\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, & M F $\infty\ z-\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, ac propterea rectangulum C M F $\infty\ zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$. Est autem D M quadratum $\infty\ \frac{iivv}{aa}$.



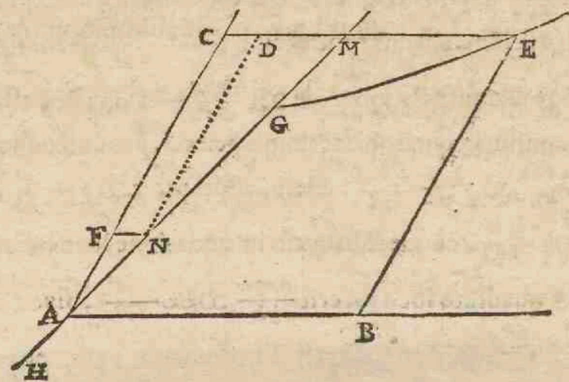
Quare cum ex natura Hyperboles sit ut F N ad F C, ita D M quadratum ad C M F rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$: erit quoque $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}\ \infty\ \frac{favv+bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa+bb}\ \infty\ vv-hh\frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$: Dein restitutis $x+h$ loco v, $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy\ \infty\ \frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Si

Si æquatio ſit $xx + 2ay \propto \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \propto 0$. Aſſumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$, eoque ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco $x\,x$, ſublatiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \propto 0$. &, factâ congruâ tranſpoſitione, $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per bb, $\frac{aavv}{bb} \propto yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, aſſumpto $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \propto z + \frac{a^3}{bb}$, eoque ſubſtituto in æquatione loco ipſius y, atque ipſius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \propto zz - \frac{a^6}{b^4}$, ſive $zz - \frac{a^6}{b^4} \propto \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13[tii], ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè ſeſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc caſu & ſimilibus ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ ſint ipſi A B æquidiſtantes, ductâ rectâ A C ipſi B E parallelâ, quoniam $v \propto x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò eſt recta A M; ita ut omnium ipſi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipſius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a; hoc eſt, ut ſit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Vnde ſi A C ſeu B E indefinitè ſumpta vocetur y, erit C M & ſimiles $\propto \frac{by}{a}$, ac deſcribendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, ſi ab A C auferatur A F $\propto \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè ſumpta $\propto z$, &, ductâ F N ipſi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipſi F C æquidiſtantis & æqualis ad rectam D M aliarumque ſimilium ſit cognita, nempe ut a ad b, ſitque itidem notus angulus

NDM, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque ſimilium nota, quæ ſit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND ſeu FC indefinitè ſumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè ſumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum conſtituere debeat, multiplicanda eſt ſupraſcripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iiſdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole deſcribatur GE: dico curvam GE eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel aſſumpto æquali, nec non EC ipſi AB parallelâ, ſecante diametrum AM in M; ſi eadem EB, hoc eſt, AC, vocetur y, erit, ut ſupra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, ſive AB—CM, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Eſt autem, ut ſuperiùs annotatum, NM $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypotheſi NG ſeu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectan-

gulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles ſit ut latus rectum ad tranſverſum, ſive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id eſt, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviſo, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein reſtituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipſius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviſo per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique reſtituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipſius v, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propoſitum.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG ſeu AD.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit, intelligatur demiſſa perpendicularis, ut CE; tum, ſuppoſitis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, aſſumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac poſterior, nempe EC, nominetur y, ipſa autem AB, ſeu datorum punctorum cognita diſtantia, vocetur a, & data FG ſive AD exprimatur per b. Hinc cum BE ſive (ſi punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (ſi punctum E inter A & B cadat) AB — AE ſit

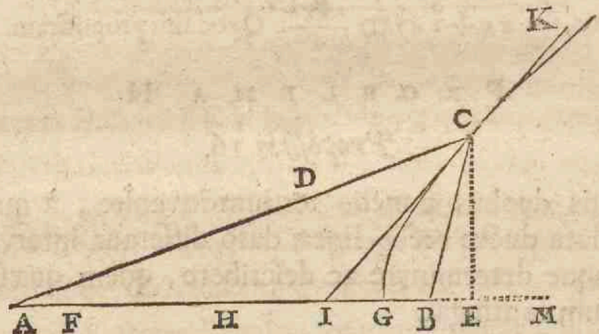
$\infty\, x - a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$; sitque A C — A D ∞ B C : æquatio erit

$\sqrt{xx+yy}-b \infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit

$4bbyy \infty 4aaxx-4bbxx-4a^3x+4bbax+a^4-2bbaa+b^4$.

Vnde factâ divisione per $4aa-4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^{mi} hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞ b. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa-bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiamediametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4} bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive BH — HG $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgo oppositarum Hyperbolarum Foci sive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusvè, quòd sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonstratum sit: id ipsum hîc demonstratione unicâ, & quidem breviore satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Vmbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Vnde cum sit [2], ut

HF q ad GAF, ita FEG ad CE q: erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut

HF q ad (HF q + GAF, id est [3], ad) HA q; ita FEG ad FEG + CE q; adeoque [4] ut

HF q ad HA q, ita (HF q + FEG sive [5]) HE q ad HA q + FEG + CE q. Est autem quoque [6], ut

HF q ad HA q, ita HE q ad HM q. Quocirca [7]

HM $q \infty$ HA q + FEG + CE q; hoc est, addito utrinque HF q seu HG q, erit

 HM

[1] per 16 sexti. [2] ex hyp. & per 10 primi hujus. [3] per 6 secundi. [4] cum sit ut una antecedentium ad unam conseq., ita omnes antecedentes ad omnes conseq. per 12 quinti. [5] per 6 secundi. [6] ex constructione & per 22 sexti. [7] per 9 & 11 quinti.

[1] per 6 secundi. $HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{seu} \\ HBq \end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})HEq, + CEq.$

Hinc additis vel ſublatis ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum $\left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{array}\right.$ bis ab una, & $\left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{array}\right.$ bis ab altera parte: erit [2]

[2] per 4 secundi.

[3] per 47 primi.

[4] per 7 secundi.

[5] per 47 primi.

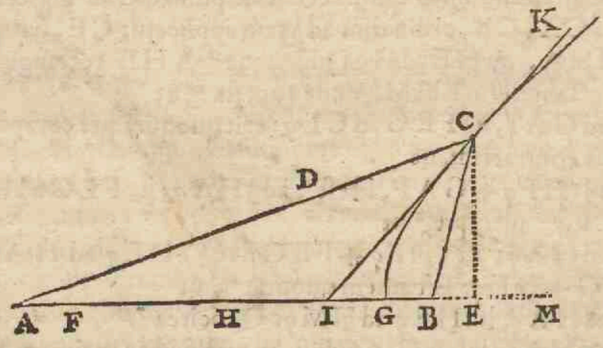
$FMq \infty (AEq + CEq$, id eſt [3]$)$ ACq; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id eſt [5]$)$ BCq. Cumque propterea F M ſit ∞ A C; & G M ∞ B C; ſitque ipſarum F M & G M differentia F G, manifeſtum eſt ipſarum quoque A C & B C majorem ſuperare minorem, ejuſdem F G, nempe axis tranſverſi, longitudine. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, quæ angulum iis comprehenſum biſariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & converſim.

Si enim quæ angulum A C B biſariam dividit recta I C K non contingat Hyperbolam in C puncto, ſecet eandem, ſi fieri poteſt,

Fig. 1.

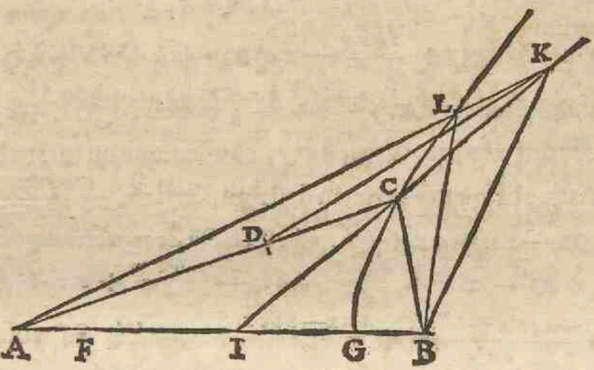


atque ita ſaltem aliquo ſui puncto, veluti K, intra Hyperbolam ſit.

Tum

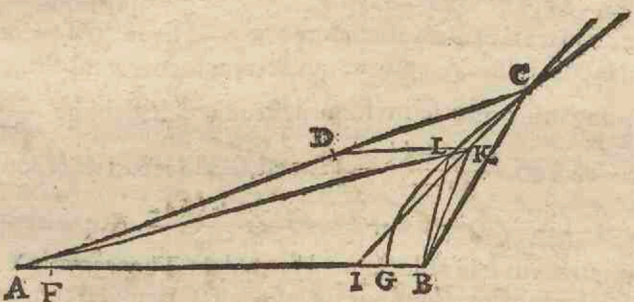
Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia

recta,

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

[2] per 20 primi.

recta Hyperbolam contingere quàm I C K[1], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

[1] per 3 Corol. 6 primi hujus.

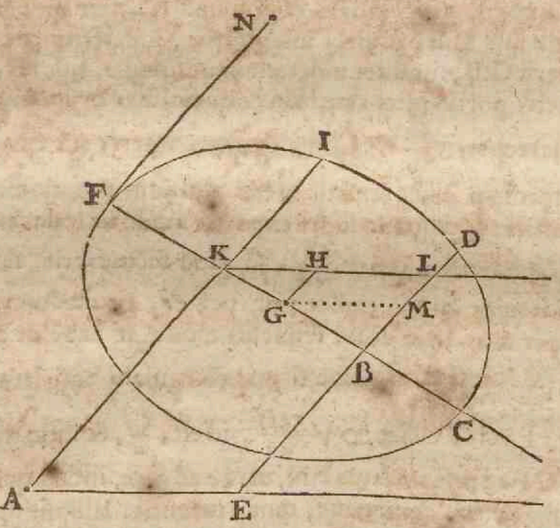
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \propto z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y; ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \propto - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \propto - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive $zz \propto \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \propto - xx \frac{+ daax - 2bacx}{aa-bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Iam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa-bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa-bb} \propto - xx + 2hx + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$, aut $\frac{aazz}{aa-bb} + xx - 2hx \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \propto x - h$ sive $x \propto v + h$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa-bb} + vv - hh \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \propto - vv + hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa-bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$.

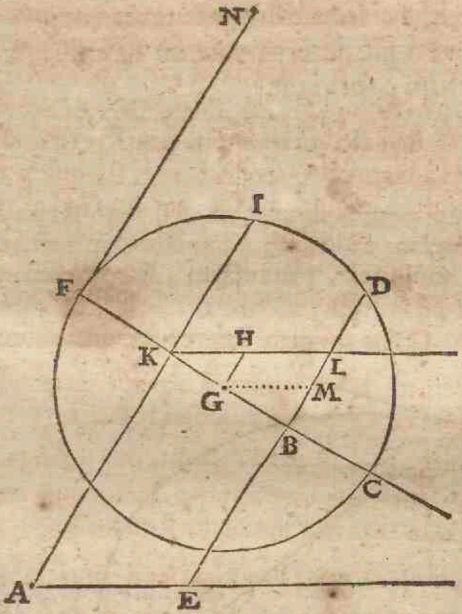
Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda est recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a, hoc est, ut sit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita positâ K L sive A E, indefinitè sumptâ, $\propto x$, L B omnesque ipsi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis constat diametrum fore in recta K B, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K æquidiſtantes. Iam verò cum v ſit $\propto x - h$, à recta K L ſive A E auferenda eſt K H, ita ut eadem K H ſit $\propto h$, ideoque H L indefinitè quoque ſumpta $\propto x - h$ ſeu v. Deinde per punctum H ducenda eſt H G ipſi A K parallela, ſecans inventam diametrum in G, eritque idem interſectionis punctum G quæſitæ Ellipſeos centrum. Porrò quoniam ſimilium triangulorum K H G & K L B nota eſt ratio lateris K H ad H G ſive K L ad L B, ut & angulus ſub iiſdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel aſſumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G ſive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L ſive G M, quæ ipſi H L parallela intelligitur, indeterminatè ſumpta ſit $\propto v$, erit G B, ſimiliter indeterminatè ſumpta, hoc eſt, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\propto \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum conſtituat, æquatio ſupra expoſito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, ſi ſinguli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim ſequenti modo ſe habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum G F vel G C fiat $\propto \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id eſt, $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iiſdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipſis deſcribatur F D C, ſecans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæſitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, ac ſi opùs ſit productâ ut ſecet rectas K L & K B in L & B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B, hoc eſt, D E $-$ E L $+$ L B $\propto y - c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Eſt autem ut jam annotatum eſt G B $\propto \frac{ev}{a}$, atque ex conſtructione G F vel G C $\propto \frac{ef}{a}$, ideoque F B $\propto \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C $\propto \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C $\propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipſis ſit ut N F ad F C, hoc eſt, ut ut gaa ad lee, ita D B quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum F B C; erit $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \infty$



$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx \div \frac{2bcx}{a} \infty cc + kk$. Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hîc est, quòd si angulus A K B foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut D B, K I, &c. ad diametrum K B perpendiculares, ac simul F N æqualis F C, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

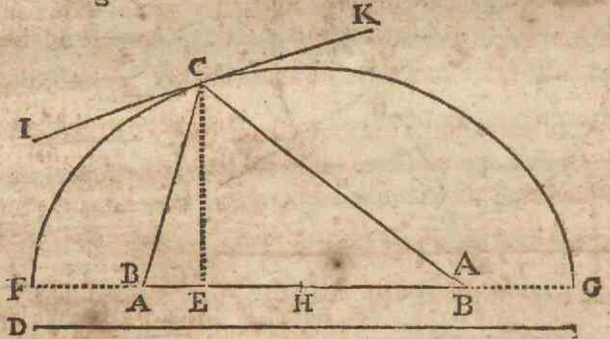
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demissa perpendicularis, ut C E. Tum suppositis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac posterior, nempe E C, nominetur y; ipsa autem A B seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E sive (si punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (si punctum B inter A & E cadat) A E — A B sit ∞ $a \sqsubset x$; atque A C ∞ $\sqrt{xx+yy}$; & C B ∞ $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; sitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b-\sqrt{xx+yy}$ ∞ $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; factâque operatione ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$, hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}$. Assumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invicem destruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}$, sive $\frac{bbyy}{bb - aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem casus est Theorematis 13^{tii}, ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut H F ab una, & H G ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞b. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæsita Ellipsis facillimè describetur. Porrò cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum F B seu G A sit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & B G seu A F $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum F B G seu G A F $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium I.

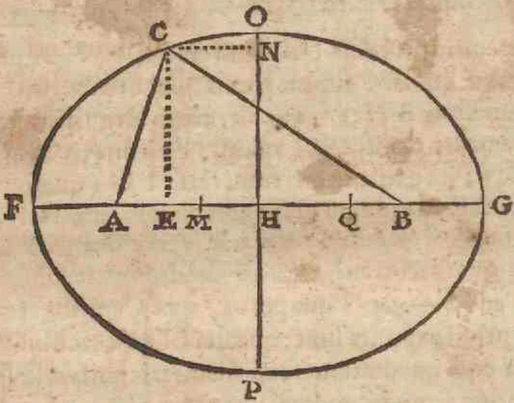
Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola superiùs demonstratum est, ductarum C A, C B differentiam transverso axi F G æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem,

 ut

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis F C G, cujus centrum H, axis major F G, minor O P, atque Vmbilici A & B; adeoque rectangulum F B G ut & G A F æquale quadrato semi-secundæ diametri H O.



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis C A, C B, ordinatim ad utrumque axem applicentur C E, C N; & fiat ut H F ad H A, ita H E ad H M, adeò ut [1] A H E rectangulo æquale sit rectangulum F H M; sumaturque H Q æqualis ipsi H E. Hinc cum sit [2] ut H F q ad H A q, ita H E q ad H M q, erit quoque per conversionem rationis ut H F q ad G A F seu [3] H O q, id est [4], ut C N q sive H E q ad O N P, ita idem H E q ad E M Q; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula O N P & E M Q. Quocirca cum [6] H M q unà cum E M Q, id est, cum O N P rectangulo, æquale sit H E q; sitque & H F q [7] æquale quadratis rectarum H A & (H O [8] seu [9]) C E unà cum rectangulo O N P: erunt H M q + O N P + H F q æqualia H E q + H A q + C E q + O N P. Ac proinde si utrinque auferatur O N P rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum H M & H F seu H G simul æqualia tribus quadratis rectarum H E, H A seu H B, & C E. Hinc

[1] per 16 sexti.
[2] per 22 sexti.
[3] ex hypothesi.
[4] per 13 primi hujus ejusque Corol. 1
[5] per 9 quinti.
[6] per 5 secundi.
[7] per 5 secundi.
[8] quippe quadr. ex H O æquale est G A F rectang. ex hypoth. [9] per 5 secundi.

Hinc additis ablatisvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum F H M seu G H M bis ab una, & A H E seu B H E bis ab altera parte: erit [1] F M q æquale (A E q + C E q, id est [2],) A C q: [1] per 7 secundi. itemque [3] G M q æquale (B E q + C E q, id est [4],) B C q. Cumque propterea recta F M æquetur ipsi A C, & G M ipsi B C: erit ipsarum A C & B C aggregatum transverso axi F G æquale. Quod demonstrandum erat.

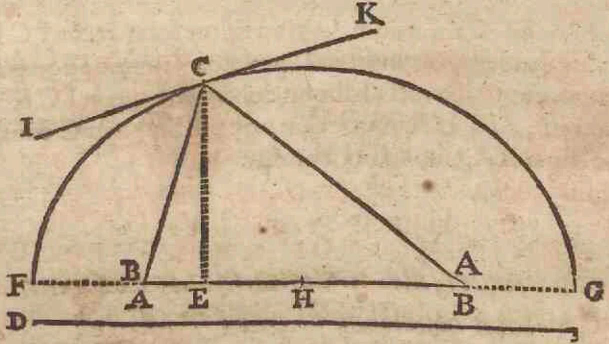
[2] per 47 primi. [3] per 4 secundi. [4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta I C K ita ducta, ut æquales sint anguli A C I, B C K, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ A C ad L, ita ut tota A L

Fig. 1.



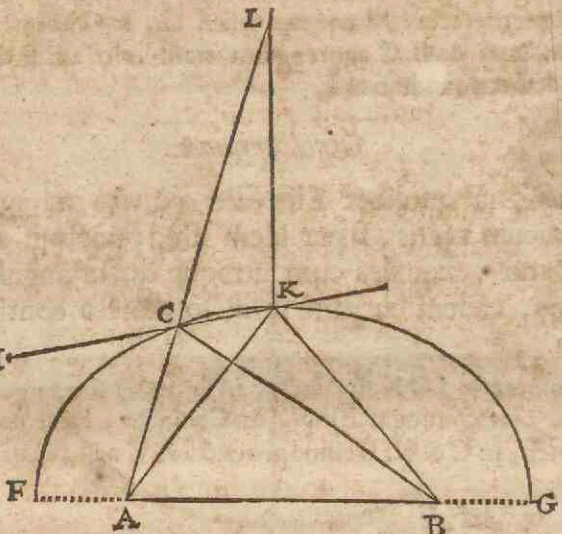
axi F G, ideoque [5] adjecta C L ipsi C B æqualis sit, jungantur A K, B K, L K. Cum igitur, in triangulis L C K, B C K latera L C, C K lateribus B C, C K, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis L K basi B K æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt,

[5] per Corol. 1 hujus.

per

per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc eſt, latera AK, KL ſimul ſumpta tranſverſo axi FG, ideoque & baſi AL

Fig 11.



[1] *per* 20 *primi.* [2] *per* 17 *primi huius.*

æqualia, quod eſt abſurdum [1]. Non igitur ſecat recta ICK Ellipſin, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia recta Ellipſin contingere quàm ICK [2], manifeſtum eſt, è contra quoque eam, quæ Ellipſin in C contingit, efficere angulos ACI, BCK æquales.

CAPVT IV.

Regula univerſalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & ſolida.

Iam verò his omnibus ita præmiſſis, pro generali Regula concludi poteſt, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere poſſunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta, neque factum ſub iiſdem ad ſolidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse: nimirum,

$$1^{\text{mò}}.\left\{\begin{array}{l} y \propto \frac{bx}{a}, \text{ sive, quod idem est, } y \propto x\text{: cum supponi} \\ \qquad \text{possit esse } a \propto b. \\ y \propto \frac{bx}{a} \pm c, \text{ vel } y \propto c - \frac{bx}{a}. \end{array}\right.$$

Signum $\pm$ *significat* $+$ *vel* $-$.

Sed hîc notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superiùs expositum est.

$$2^{\text{dò}}.\left\{\begin{array}{l} yy \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto xx. \\ yy \propto dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \propto xx. \\ zz \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto vv. \\ zz \propto dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \propto vv. \end{array}\right.$$

$$3^{\text{tiò}}.\left\{\begin{array}{l|c|l} yy \propto \frac{lxx}{g}.ff. & & yx \propto ff. \\ zz \propto \frac{lxx}{g}.ff. & \text{sive etiam} & zx \propto ff. \\ yy \propto \frac{lvv}{g}.ff. & & yv \propto ff. \\ zz \propto \frac{lvv}{g}.ff. & & zv \propto ff. \end{array}\right.$$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex $y \pm$ aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex $x \pm$ aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v esse $\propto x \pm$ aliâ quâdam quantitate,

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

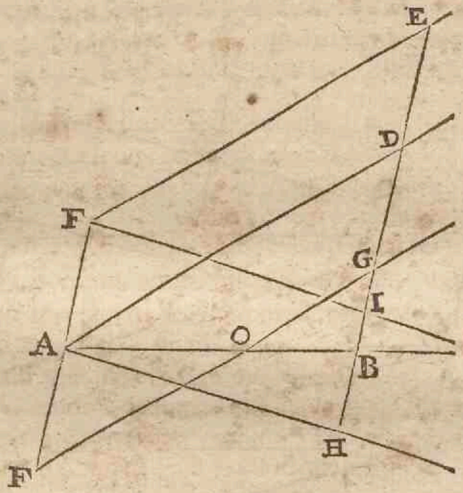
Vt autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \propto x$ vel $y \propto \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

Sed si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea H B E sumendum est ab altera parte lineæ A B, quâ datus vel assumptus angulus A B E existit, punctum H, ita ut A B ad B H sit, sicut a ad b; ductâque A H, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ A B, quâ sum-

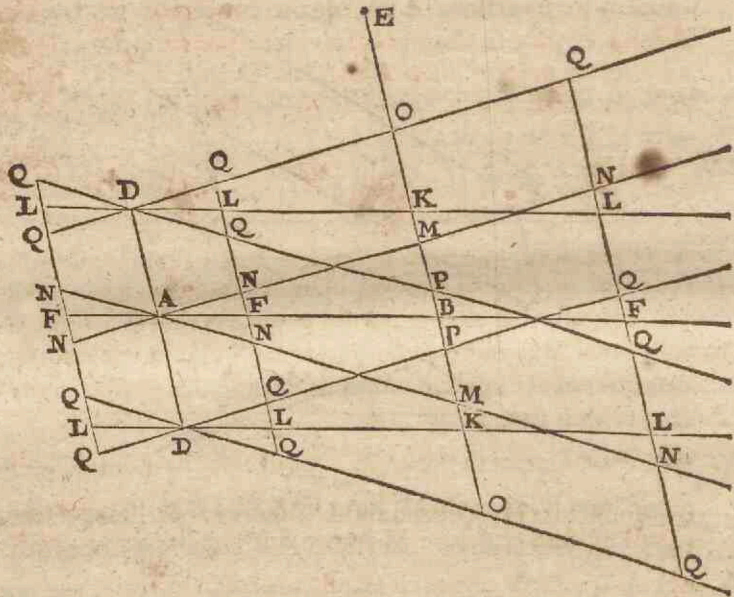


ptum est punctum H, ducenda est F I ipsi A H parallela: eritque eadem F I producta donec cum linea A B coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam A B quàm B D sit $\propto x$, aut A B ad B D ab una, ut & A B ad B H ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde B D vel B H $\propto \frac{bx}{a}$.: itemque, cum A F seu D E vel D G ut & H I sint æquales c cognitæ: erit B E sive B D + D E $\propto \frac{bx}{a} + c$, & B G sive B D — D G $\propto \frac{bx}{a} - c$, ac B I sive H I — H B $\propto c - \frac{bx}{a}$. Vnde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea A B, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas A D, F E, F G, & F I esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò ſi juxta formulas ſub N°. 2 exhibitas Locus quæſitus ſit linea Parabolica, erit

I. Primo caſu, quando æquatio eſt $yy \infty dx$, ipſa A B Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales, atque ejuſdem vertex A punctum.



II. Secundo caſu poſitâ æquatione $yy \infty dx.ff$, manente diametro in eadem linea A B, ſumptâque, ut in ſequenti figura, A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit ejuſdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, ſi uterque terminus tam dx quàm ff ſigno + ſit affectus, ab altera parte puncti A, quâ eſt punctum B, ſumendum eſt; ſed ſi vel terminus dx, vel terminus ff ſigno — affectus ſit, ab eadem parte puncti A, quâ eſt punctum B, ſumi debet: & quidem ſi terminus dx ſigno + affectus ſit, ab A versùs B Parabola deſcribenda eſt; ſin contra terminus dx ſigno — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, deſcribi debet.

At

At si æquatio sit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dx\,ff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \pm c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela atque $\infty\, c$; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ A B, quam conceptus est angulus A B E: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ A B cadat. Deinde ductâ D K ipsi A B parallelâ, erit in eadem D K Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \infty dx$.

IV. Sed si sit $zz \infty dx.\,ff$, qui sit quartus casus, sumptâ D L ∞ $\frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel — affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel — adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter $\infty\, d$.

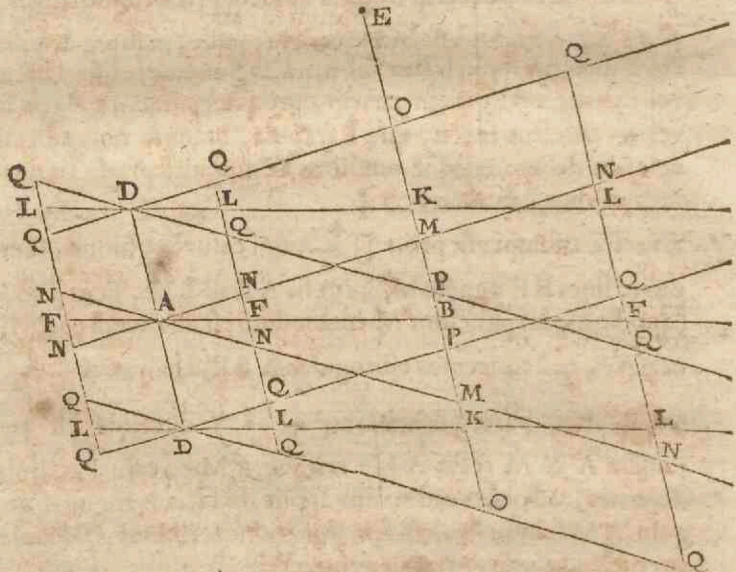
V. Si verò z assumpta sit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea B E puncto M, ita ut sit A B ad B M, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ A B, quâ conceptus est angulus A B E, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta A M: eritque A M eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo A M E æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis L F L, quæ intersecent supra dictas diametros A M vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo — affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectio ne, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \mathbin{8} \frac{bx}{a} \mathbin{8} c$, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B sumi debet) ducenda est recta D O ipsi

VII. A M, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta D P parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut A B ad A M, hoc est, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\infty\ d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & re- [1] per 1
1. cta A B contentum sit ∞ B E quadrato: erit $dx \infty yy$. primi hujus.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \infty dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \infty ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \infty ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \infty dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundum Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \infty$ rectæ A B, erit similiter recta A F major quàm A B: ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ B E
2. sive yy, ac proinde $yy \infty dx \pm ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in recta D K, quoniam A D seu B K est $\infty\, c$: erit K E, hoc est, B E — B K $\infty\, y - c$; & K B E, hoc est, B E + B K $\infty\, y + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y \pm c$, erit K E & K B E $\infty\, z$. Est autem D K seu A B $\infty\, x$, parameterque $\infty\, d$, & rectangulum sub dicta Parametro & recta D K contentum ∞ quadrato ex K E vel K B E. Quare cum hoc quadratum sit $\infty\, zz$, atque
3. rectangulum illud $\infty\, dx$, erit $zz \infty dx$.

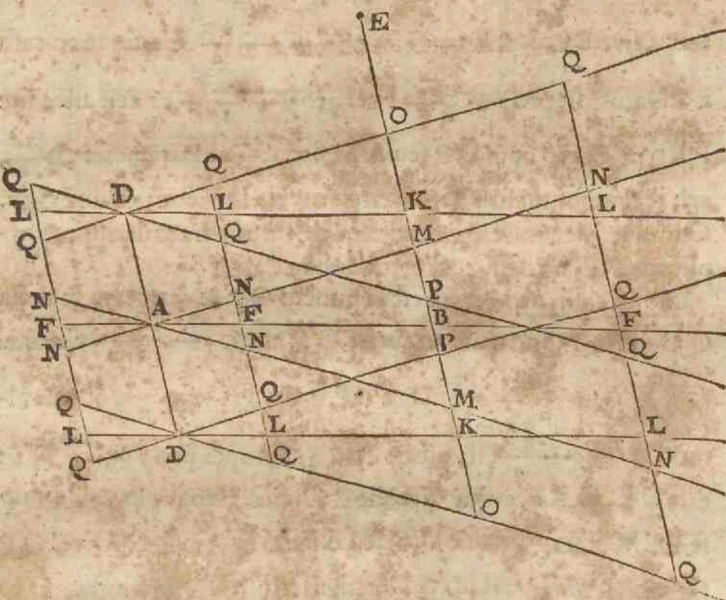
Quarto casu, ubi manente diametro in recta D K vertex est in puncto L, quoniam D L sive A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit L K (hoc est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, D K $\pm$ D L, atque etiam L D — D K) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ K E vel K B E, hoc est, zz: eritque proinde $zz \infty dx \pm ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in recta A M, cum sit ut a ad b, ita A B, hoc est, x, ad B M: erit B M $\infty \frac{bx}{a}$, ideoque M E, hoc est, B E — B M $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & M B E, hoc est, B E + B M $\infty\, y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta est pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit M E & M B E $\infty\, z$. At cum in triangulo A B M cognita sint & angulus A B M, & ratio laterum A B, B M, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est [1] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in specie etiam lateris A B ad A M, quæ sit ut a ad e. Ac proinde cum sit ut a ad e, ita A B, h.e., x ad A M: erit A M $\infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo casu sit ut A M ad A B, hoc est, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per A M seu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum $\infty\, dx$. Quod æquale est quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz; ac proin-
5. de est $zz \infty dx$.

[1] per 6 sexti.

.Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam est ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N : erit A N $\propto \frac{eff}{ad}$, & N M (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, A M $\backsim$ A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a} \backsim \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum $dx \backsim ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz : erit
6. $zz \propto dx \backsim ff$, atque $zz \propto ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D seu M O est $\propto c$, erit O E (sive B E — B M — M O) $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (sive B E + B M + M O) $\propto y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E $\propto z$. Porrò cum D O

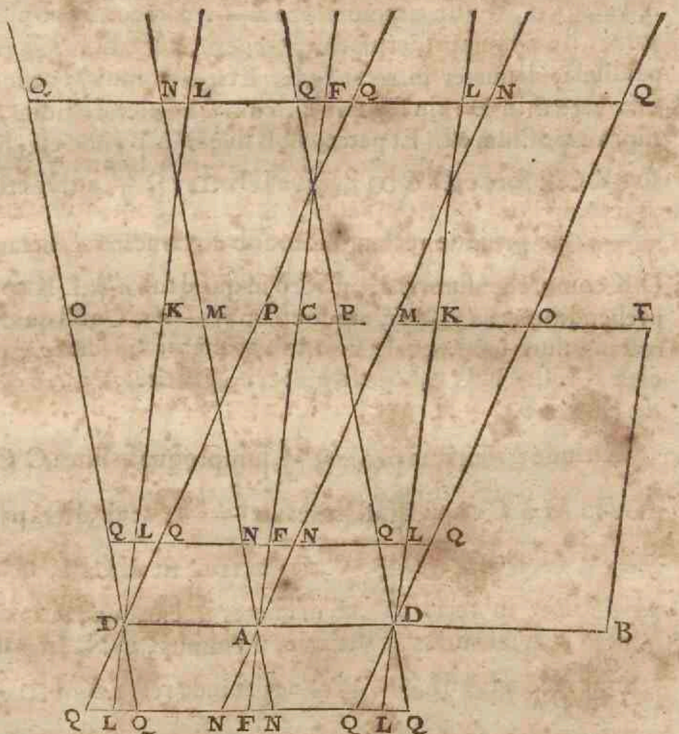
seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D O contentum $\infty\, dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id est, zz: erit $zz \infty dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta D P, quoniam A D seu B K est $\infty\, c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (sive B E — B K + K P) $\infty\, y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (sive B E + B K — K P) $\infty\, y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\, z$. Porrò cum D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$ ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D P contentum $\infty\, dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ P E, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut supra, O E est $\infty\, y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\, y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\, y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\, y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\, z$. Et cum D O aut D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, atque D Q seu A N $\infty \frac{eff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, D O vel D P $\pm$ D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Vnde si eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\, dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriusque P E,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$.
Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per pun-

punctum A ducenda est recta A C ipsi B E parallela, ac deinde ipsa A C, ubique consideranda, ut considerata fuit recta A B in superiori figura. Porrò sumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi A B parallelâ, velut O C E, erit similiter hæc O C E ubique consideranda, sicut considerata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æ-
I. quatio sit $dy \propto xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter $\propto d$. Cum enim A C seu B E sit concepta ut y, & C E seu A B ut x, rectangulumque sub Parametro & A C contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ C E seu A B, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \propto xx$.

II. Si æquatio sit $dy.ff \propto xx$, sumptâ A F $\propto \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro $\propto d$. Est

 enim

enim pro triplici juxta Regulam distinctione F C ∞ y 8 $\frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem F C contentum ∞ dy 8 ff, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ C E, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy.ff$ ∞ xx.

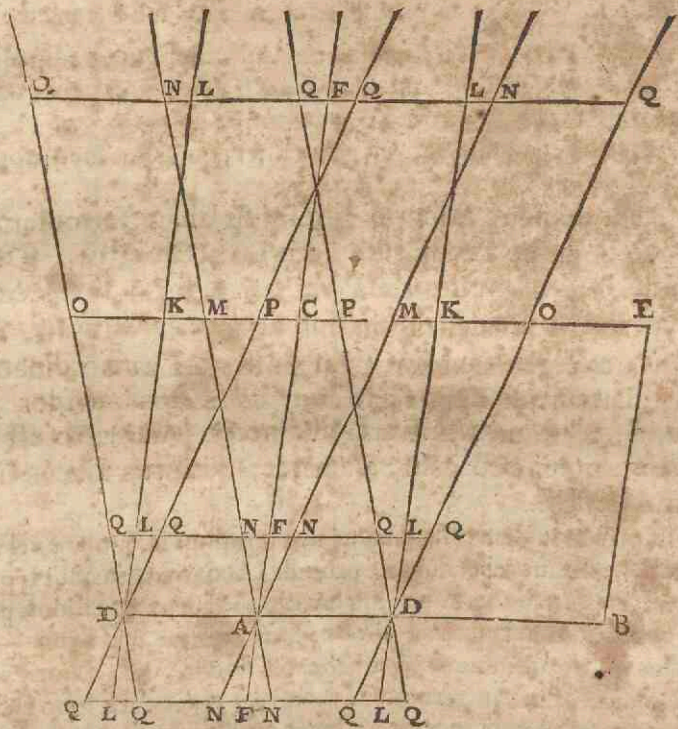
III. Si æquatio sit dy ∞ vv, vel $dy.ff$ ∞ vv, atque v primùm assumpta sit pro x 8 c, factâ A D ∞ c, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ D K ipsi A C parallelâ, diameter in recta D K. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, D B sive D A B, hoc est, K E sive K C E fore v, D K ∞ y, atque L K ∞ y 8 $\frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque D K comprehensum ∞ dy; at verò id quod sub d & L K comprehenditur ∞ dy 8 ff, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ K E sive K C E, hoc est, vv: erit, ut petitur, dy ∞ vv, vel $dy.ff$ ∞ vv.

V. Sit deinde v assumpta pro x 8 $\frac{by}{a}$, sumptoque in linea O C E puncto M à C versùs E, si habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ A C, si habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut A C sit ad C M, sicut a ad b: erit in recta A M diameter, ejusque vertex in
VI. puncto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et positâ ratione A C ad A M, ut a ad e, ac proinde recta A M ∞ $\frac{ey}{a}$, erit Parameter ∞ $\frac{ad}{e}$. Est enim recta C M ∞ $\frac{by}{a}$, ac proinde M E ∞ $y - \frac{by}{a}$, atque M C E ∞ $y + \frac{by}{a}$, id est, M E vel M C E ∞ v. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta A M contentum ∞ quadrato ex M E vel M C E, erit, dy ∞ vv.

Porrò cum N A sit ∞ $\frac{ffe}{da}$, erit N M ∞ $\frac{ey}{a}$ 8 $\frac{ffe}{da}$, atque

etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta N M contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc est, vv; erit quoque $dy.ff \infty vv$.



Sit denique v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in D O, vel in D P;
IX. &, si terminus ff deficiat vertex in D; sin minus, in Q.
Et positâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, sicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Est enim O E $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

O C E $\infty x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\infty x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\infty x + \frac{by}{a} - c$, hoc eſt, O E, O C E, & P E una vel altera erit ∞v. Eſtque Q O vel Q P (ſicut ſupra N M) $\infty \frac{ey}{a}$ 8 $\frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum ſub Parametro & Q O vel Q P ∞dy 8 ff, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale ſit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id eſt, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

Atque ita demonſtratum eſt generaliter, quod hoc loco propoſitum fuit.

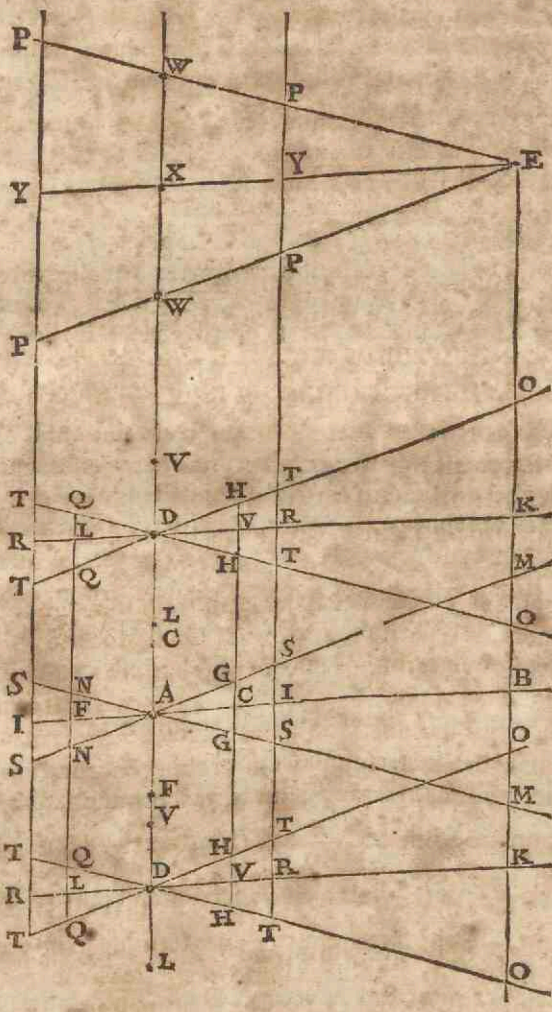
At ſi denique æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 3 comprehenſarum, erit Locus quæſitus, ſi terminus in quo invenitur xx vel vv ſigno + ſit affectus, Hyperbola; ſin idem terminus ſigno — affectus ſit, Ellipſis: excepto tantùm, cùm poſteriori caſu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & ſimul tranſverſa diameter parametro eſt æqualis: quippe eo caſu, ut patet, quæſitus Locus Circulus exiſtit.

Et primo quidem caſu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv ſigno + affectus reperitur, ac proinde Locus quæſitus eſt Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte conſtitutus vel ſigno + affectus, vel contra; & ſi ſigno — affectus ſit, atque in æquatione habeatur fractio, ipſa majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, ſequenti formâ ſe exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in ſequenti figura, caſu primo, nempe ſi terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem conſtituens ſigno + affectus ſit, diameter Hyperbolæ deſcribendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A poſitione datæ B E parallela. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, uti caſu ſecundo, erit diameter in data poſitione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Caſus 1mus, cùm Locus eſt Hyperbola.

eaſdem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & semi-latus transversum ∞ f, quod in



dictis diametris respectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porrò si l sit ∞ g, vel, quod idem est, si termino xx vel yy nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam X E, quæ ducta sit ipsi A B æquidistans, ut & ipsam B E, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \infty y + f, \qquad FB \infty x + f,$$
$$CX \infty y - f, \qquad CB \infty x - f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \infty yy - ff, \; \& \; FBC \infty xx - ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulum F X C [1] sit ∞ quadrato ex X E seu A B, hoc est, xx; itemque rectangulum F B C sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit $yy - ff \infty xx$, hoc est, $yy \infty xx + ff$ itemque

$$xx - ff \infty yy, \text{ sive } yy \infty xx - ff.$$

[1] per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli F X C ad quadratum X E, aut rectanguli F B C ad quadratum B E eadem sit [2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy - ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy, hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy - gff$, ut & $lyy \infty gxx - gff$. unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy - ff$, hoc est, $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod demonstrandum erat.

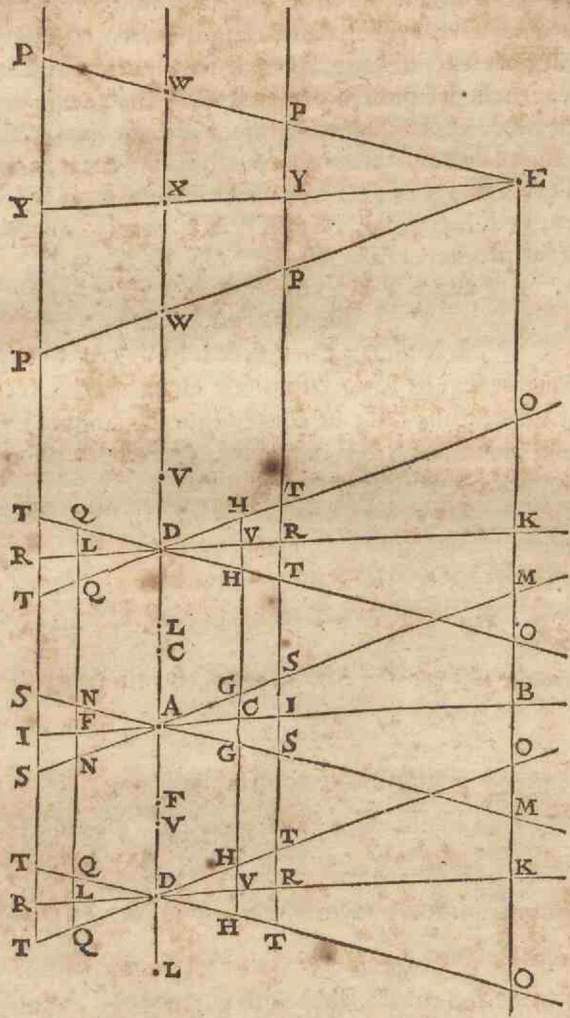
[2] per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$ (id est, $zz - ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$: aut z assumpta erit pro y 8 c, vel pro y 8 $\frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro y 8 $\frac{bx}{a}$ 8 c. Et quidem primò si z assumpta sit pro y 8 c, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela & ∞c; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E. Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo + affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta

 recta

recta D K; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E vel D K E sive D X E æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semilatus transversum $\propto f$, quod in dictis diametris respectivè per lineas D V vel D L exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam X E, ut & ipsam K E, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit D A X sive K B E $\propto y + c$, & D X seu K E $\propto y - c$; ideoque eadem D A X & K B E vel D X & K E ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea L X $\propto z + f$, & L K $\propto x + f$

atque V X $\propto z - f$, & V K $\propto x - f$:

ideoque rectangula

L X V $\propto zz - ff$, & L K V $\propto xx - ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli L X V ad quadratum X E, ut & utriusque rectanguli L K V ad quadratum ex K E vel K B E respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz - ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, sive $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$,

& $\frac{lzz}{g} \propto xx - ff$: aut, si l sit $\propto g$,

erit $zz \propto xx + ff$,

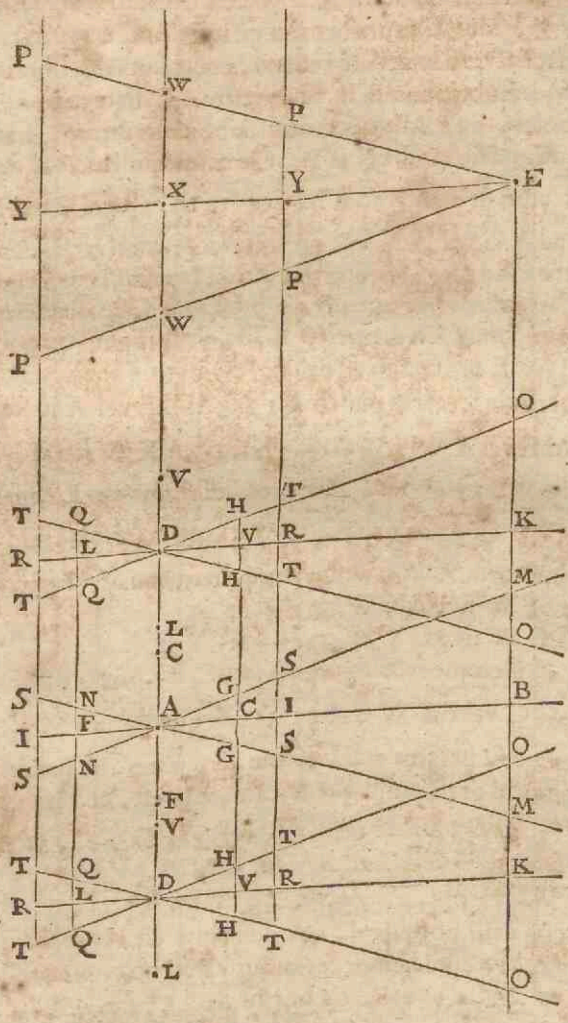
& $zz \propto xx - ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \sim \frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E puncto M, ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b; hoc est, ut B M sit $\propto \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B quâ datus vel conceptus angulus A B E sumendum est; sed contra, si habeatur $z \propto y + \frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ A B sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere A M, secantem H C H & Q F Q per prædicta puncta C & F ductas ipsi B E parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa

 faciant

faciant angulos angulo A M E vel A M B E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum A W describitur, semi-latus transversum $\propto f$ (idque iterum exprimatur per A C vel A F), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius A B ad ductam A M sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum A M describitur, semi-latus transversum erit A G vel A N. Quæ quidem A G vel A N erit $\propto \frac{ef}{a}$; cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e; ita A C vel A F, hoc est, f, ad A G vel A N; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro A W & per punctum G in diametro A M, præsupponaturque rectam M E vel W E ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit M B E vel A X W $\propto y + \frac{bx}{a}$, & M E vel A W $\propto y - \frac{bx}{a}$, hoc est, A X W seu M B E, uti & A W seu M E ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem A M seu W E $\propto \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum A W, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) F W sive F X W $\propto z + f$,

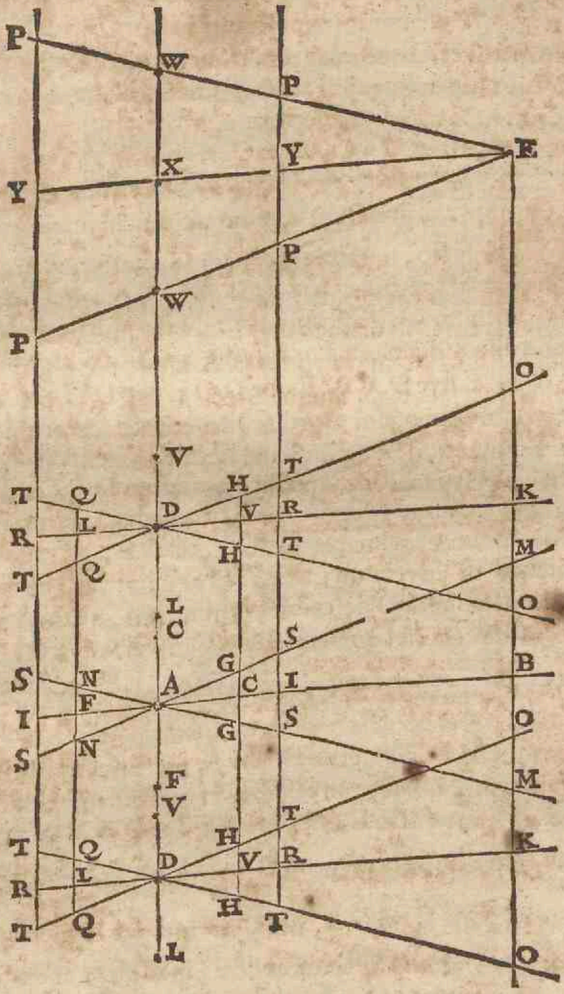
& C W sive C X W $\propto z - f$:

ideoque rectangulum

F W C vel F X W C $\propto zz - ff$, & quadratum W E $\propto \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, id est, $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum A M, cùm nempe terminus ff signo — est affectus, erit N M $\propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & G M $\propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\propto \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum N M G ad ad ME vel MBE quadratum, hoc est, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.

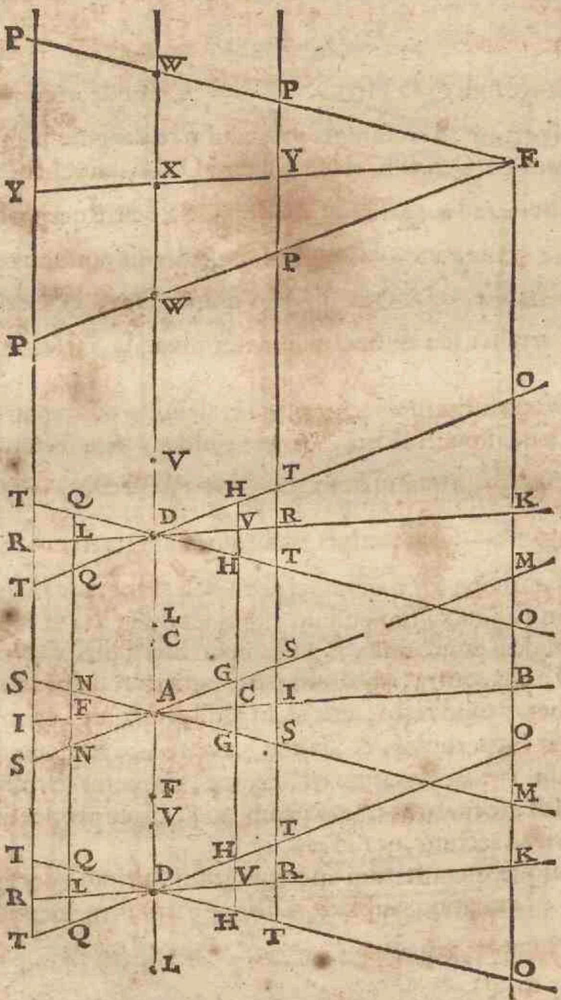


Hoc est, factâ divisione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hîc demonstrandum erat.

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a} \, 8 \, c$, ductâ, ut supra, A D ∞f, & D K ipsi A B parallelâ, sumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O sit, sicut a ad b, hoc est, ut K O sit $\infty \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta D O, secans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus A B E; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit ipsa in prædicta recta D O; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E sive D X W E, aut D O E sive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W describitur, hoc est, cùm terminus ff signo $+$ afficitur, latus transversum ∞f. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O describitur, nimirum, quando terminus ff signo $-$ affectus est, erit semi-latus transversum recta D Q vel D H, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E sive D A X W $\infty \, y+c+\frac{bx}{a}$, & O E sive D W $\infty \, y-c-\frac{bx}{a}$, ac O B E sive D A W $\infty \, y+c-\frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W $\infty \, y-d+\frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem D O seu W E $\infty \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E $\infty \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum

D W,

DW, cùm nempe terminus ff signo $+$ afficitur, LW sive LXW $\infty z+f$, & VW sive VXW $\infty z-f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\infty zz-ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad WE quadratum, hoc est, eo casu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$eexx$

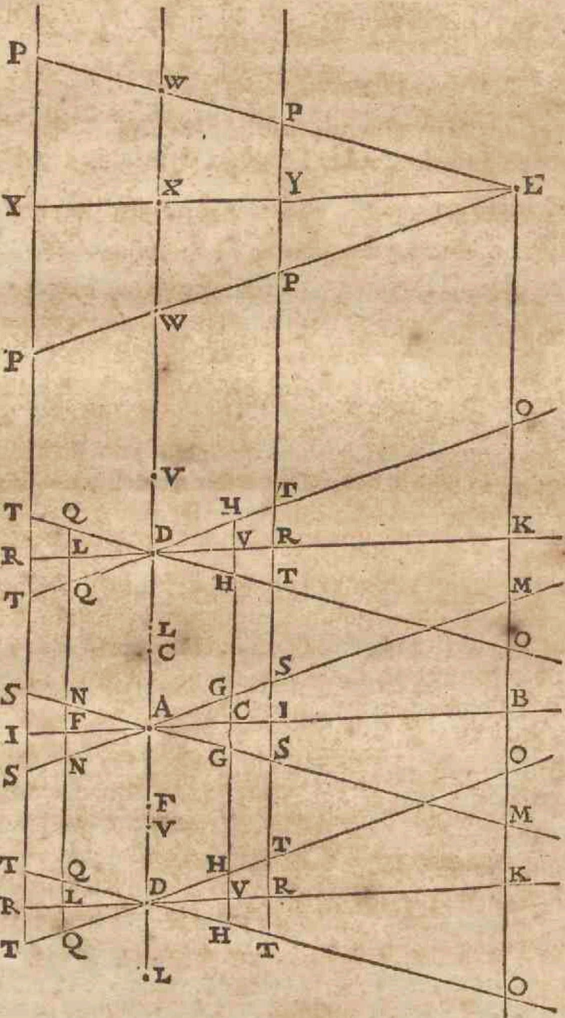
$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, sive $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\propto \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, sive O B E aut O K E: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \propto xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est Hyperbola. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \propto \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x ♉ notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x ♉ h; Hoc casu in linea A B vel eadem productâ sumendum est punctum I, ita ut A I sit $\propto h$ (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, semi-latus transversum $\propto f$, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus est Hyperbola. Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \propto \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \propto vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y ♉ c, ducenda est utrinque I R parallela B E, & $\propto c$: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y vel

vel R K, ejuſque ſemi-latus tranſverſum $\propto f$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, caſu ſecundo §. 1. fuſiùs explicata ſunt.



§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro $y \propto \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in quo MA, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum ſectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM ſeu EW erat ꝏ $\frac{ex}{a}$, ita hîc SM ſeu EP erit ꝏ $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut AB ad AM, hoc eſt, ut a ad e, ita BI, hoc eſt, v, ad SM); eritque porrò ſemi-latus tranſverſum ꝏ f & $\frac{ef}{a}$ reſpectivè, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si deniquez aſſumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & ſupra caſu ſecundo §. 3. fuſiùs expoſitum eſt. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt comprehenſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem deſignabantur per x, hîc ſint $x \pm h$, hoc eſt, v. Ita enim quod ibi erat AB & EX ꝏ x, hîc eſt IB & EY ꝏ v; quod ibi erat DK & EX ꝏ x, hîc eſt RK & EY ꝏ v; quod ibi erat AM & EW ꝏ $\frac{ex}{a}$, hîc eſt SM & EP ꝏ $\frac{ev}{a}$; quod ibi erat DO & EW ꝏ $\frac{ex}{a}$, hîc eſt TO & EP ꝏ $\frac{ev}{a}$.

Quamvis autem ſecundùm Regulam accidere etiam poſſit, ut v compoſita ſit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta ſit; ita tamen, ut eo caſu z ſolummodo ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ conſtare queat, haudquaquam tamen operæ pretium exiſtimamus, caſus omnes eò ſpectantes ſpeciatim perſequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in poſteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12mi & 13tii ſuperiùs explicata ſunt, iidem illi caſus per ſe manifeſti ſint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, ſi nimirum, ſubſtituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam AB ſed per eam, quæ ex A ipſi BE parallela ducta ſit, atque y non per BE ſed per rectam ipſi AB æquidiſtantem, deſignetur. Quòd hîc generaliter monuiſſe ſuffecerit.

Alii

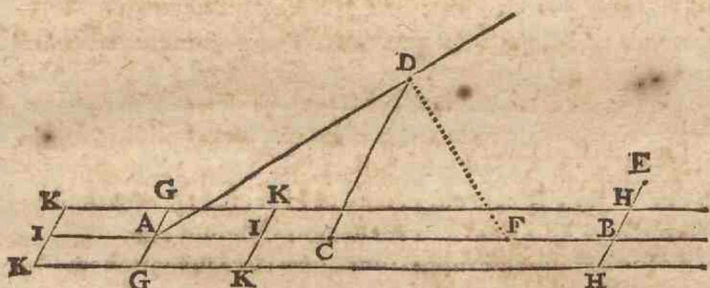
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Iam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

1. $yx \propto ff$,
2. $zx \propto ff$,
3. $yv \propto ff$,
4. $zv \propto ff$,

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta AB sumatur AC $\propto f$, atque ex puncto C eductâ rectâ CD, quæ ipsi BE sit æquidistans & æqualis priori AC, hoc est $\propto f$, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta AD, & punctum D vertex, atque AB asymptotos. sive (ductâ rectâ DF ad AD perpendiculari ac in AB terminata) erit AD semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut AD quadratum ad DF



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam BE in puncto E, erit [1] rectangulum ABE $\propto$ quadrato [1] ex AC vel CD. Quare cum AB sit $\propto x$, BE $\propto y$, & AC $\propto f$: erit $xy \propto ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

[1] per 3 primi hujus.

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \propto ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y ☿ notâ quâdam quantitate. Esto

 itaque

itaque assumpta pro *y* 8 *c*, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta A G ipsi B E parallela, ac ∞ *c*: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ A B, prout *c* quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò G H ipsi A B parallelâ, centro G, Asymptoto G H, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbole describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam B E in puncto E, erit rectangulum G H B E vel G H E ∞ *ff*. Vnde cum sit G H ∞ *x*, & H E vel H B E ∞ *y* 8 *c*, id est, *z*: erit G H E vel G H B E rectangulum ∞ *zx*, ac propterea *zx* ∞ *ff*. Quod 2do casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit *yv* ∞ *ff*: *v* quoque tantùm pro *x* 8 notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro *x* 8 *h*. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta A B vel in ipsâ productâ sumenda est A I ∞ *h*, ac porrò centro I, atque Asymptoto I A B vel I B, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam B E secare supponatur in E: erit rectangulum I A B E vel I B E ∞ *ff*. Quare cum I A B vel I B sit ∞ *x* 8 *h*, hoc est, *v*, & B E ∞ *y*: erit *yv* ∞ *ff*. Quod 3^{tio} casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit *zv* ∞ *ff*: erit *z* assumpta pro *y* 8 *c*, & *v* pro *x* 8 *h*. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est I K ipsi BE æquidistans & ∞ *c*; ductâque KH ipsi AB parallelâ, centro K, atque Asymptoto K G H vel K H, cæterisque, ut casu 1mo, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam B E in E: erit rectangulum K G H E vel K H E, ut & K G H B E vel K H B E ∞ *ff*. Hinc cum H B E vel H E sit ∞ *y* 8 *c*, id est, *z*, & K G H vel K H ∞ *x* 8 *h*, hoc est, *v*: erit *zv* ∞ *ff*. Quod 4to casu demonstrandum erat.

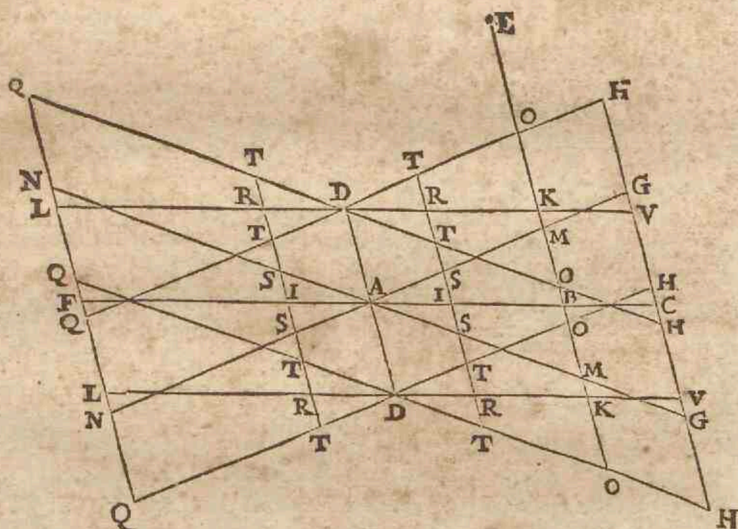
Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^{ro} 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur *xx* vel *vv* signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum *yy* vel *zz*. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate inco-

incognitâ ab initio conceptâ, sequenti formulâ se exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendæ Ellipseos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè est concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & semi-latus transversum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut l ad g. *Casus 1mus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.*

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per puncta C & F, secansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit quoque proinde eo casu $yy \infty ff - xx$. Et facilè

[1] *per 13 primi hujus.*



apparet, si, iisdem positis, B E super rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus transverso rectoque inæqualibus

[1] per 13 primi hujus.

atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio [1] rectanguli F B C ad B E quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

Casus 2^dus, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \pm c$, aut pro $y \pm \frac{bx}{a}$, aut pro $y \pm c \pm \frac{bx}{a}$.

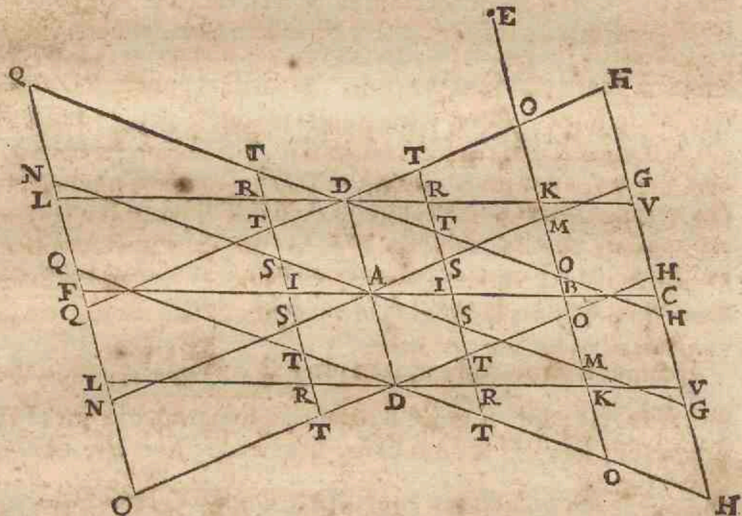
§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \pm c$, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela ac ∞c, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ A B reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E, productam versùs B, si opùs fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta D K, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E seu D K E æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum ∞f. quod in dictis diametris per lineas D V & D L exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit K B E $\infty y + c$, & K E $\infty y - c$, ideoque eadem K B E vel K E ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque L K sit $\infty f + x$, & K V $\infty f - x$: erit rectangulum L K V $\infty ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli L K V ad quadratum ex K B E vel K E, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit ∞g, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo D K B E vel D K E recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo L K V ∞ K E quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E,

pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b, hoc est, ut B M sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ A B parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, secantem rectam H C H, atque occurrentem ipsi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipsi B E ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, si ratio A B ad A M supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e, ita A C, hoc est, f, ad A G.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id est, si l sit

∞g,

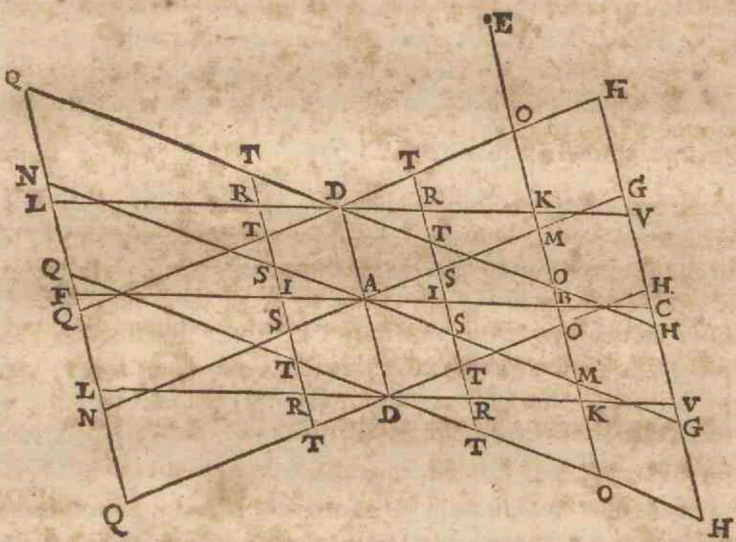
∞g, five, quod idem eft, fi termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc eft, ut A M quadratum ad quadratum A B.

Etenim fi prædicta Ellipfis defcripta intelligatur, tranfiens per N & G, fupponaturque eandem fecare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem M E $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & M B E $\infty\, y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipfa, quæ pro z affumpta eft. Cumque A M fit ∞ $\frac{ex}{a}$, erit N M $\infty\, \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty\, \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\infty\, \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem fit ratio dicti rectanguli N M G ad quadratum ex M B E vel M E, quæ eft lateris tranfverfi ad rectum, hoc eft, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\, eegff - eegxx$. id eft, factâ divifione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\, ff - xx$. five, positâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quòd fi angulus A M B E vel A M E rectus fit, ac fimul $eel \infty aag$, hoc eft, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum fit A, & femi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique fi tertiò z affumpta fit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, ductâ, ut fupra, A D ∞f, & D K ipfi A B parallelâ, fumptoque in linea K E puncto O, ita ut D K ad K O fit, ficut a ad b, hoc eft, ut K O fit $\infty\, \frac{bx}{a}$: ducenda eft per puncta D & O recta Q D O H, fecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (conftat autem ex iis, quæ jam fæpiùs monita funt, fi habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ D K, quâ datus vel affumptus eft angulus D K E, fumendum effe; at fi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipfum ab altera ejufdem lineæ parte fumi debere.) Quo facto, erit defcribendæ Ellipfeos diameter in prædicta recta Q D H, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo D O K E vel D O E æquales. Porrò centrum erit in D, & ſemi-latus tranſverſum D Q vel D H ∞ A N ſeu $\frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæſita Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per puncta Q & H, eademque ſecare ſupponatur rectam O E vel O K E in puncto E: erit O K B E $\infty\ y + c + \frac{bx}{a}$, O E ∞



$y - c - \frac{bx}{a}$, O B E $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, & O K E $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z aſſumptæ ſunt. Cumque porrò ſit D O ſeu A M $\infty\ \frac{ex}{a}$, ideoque Q O $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & O H $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum Q O H $\infty\ \frac{eeff - eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff-eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \propto eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$. id est, si l sit $\propto g$, erit $zz \propto ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & simul $eel \propto aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt; quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

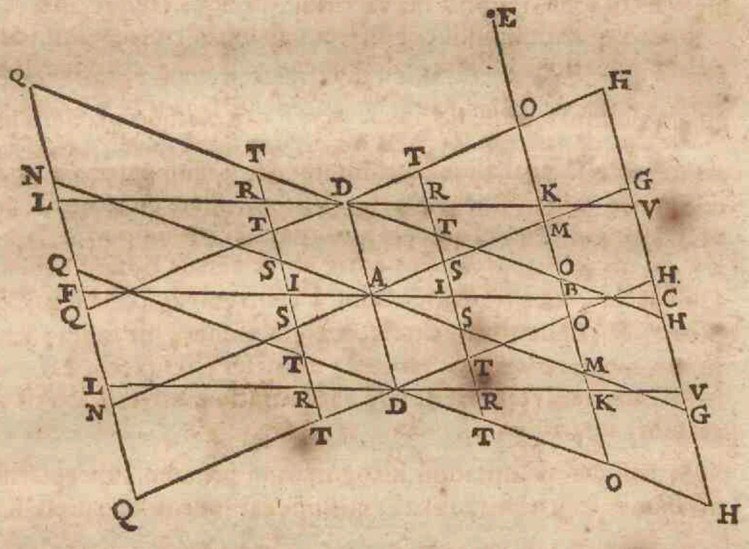
Casus 3tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x 8 h, eritque eo casu in linea A B vel A F sumendum punctum I; ita ut A I sit $\propto h$. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta I B, ac semi-latus transversum erit $\propto f$, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit. Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque I R, parallela ipsi B E, ac $\propto c$. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos,

§. 1. & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus semilatus transversum $\propto f$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g, quemadmodum ea omnia Casu 2do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A, vel,

vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat A M $\infty \frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut B A ad A M, hoc eſt, ut a ad e, ita BI, id eſt, v, ad S M:) eritque porrò ſemi-latus tranſ-



verſum $\infty \frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique ſi z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo D O, vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam I R, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac ſupra caſu ſecundo §. 3

Vu 2 fuſiùs

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta T O, & semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per x ♉ h, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat A B ∞ x, hîc est I B ∞ v; quod ibi erat D K ∞ x, hîc est R K ∞ v; quod ibi erat A M $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est S M $\infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat D O $\infty \frac{ex}{a}$, hic est T O $\infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

F I N I S.

FRANCISCI à SCHOOTEN, LEIDENSIS,

dum viveret in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

TRACTATUS DE CONCINNANDIS DEMONSTRATIONIBUS GEOMETRICIS ex Calculo Algebraïco.

In lucem editus

à

PETRO à SCHOOTEN, Francisci Fratre.

AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

Nobilissimis & Splendissimis Viris, Academiæ Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

D. AMELIO à BOVCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, I. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Vrbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORVMQVE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidensis Consulibus,

D. CORNELIO à BVYTEVEST.

D. GVILHELMO PAETS, I.C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAVLO à SWANENBVRG, I. C. in Præpotentium Fœderati Belgii Ordinum Consessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, I. C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. IOHANNI à WEVELINCHOVEN, I. C. Reip. Leidensis Syndico, & D D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini plurimum honorandi,

GEminam assequendæ veritatis methodum, quarum altera Synthesis sive Compositio dicta, altera Analysis vocata sive Resolutio, cumprimis in Mathesi à Veteribus frequentatam tritamque fuisse, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p.m. Frater, postquam methodo Synthetica scientiæ hujus præclara multa publicis tam scriptis quam prælectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendæ rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent. Sed cum Veterum dissimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præstantem usum non modo à multis ignorari ac negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli Synthesi miserando labore inhæreretur: consultum judicavit hac peculiari diatriba ostendere, ipsum quoque Syntheticum demonstrandi modum in Analysi contineri, atque ex ea elici posse; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda sit. Sed vix huic tractatui supremam imposuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut posthumus idem atque novissimus industriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui destinatus erat, rite & honeste prodire posset: ego, ut defun-

defuncti frater unicus, mei esse officii atque pietatis existimavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; sed etiam pro veneratione & observantia, quæ vobis, Nobilissimi atque Amplissimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati vestræ ac honori consecrare. Utique futurum spero, ut cujus ingenii primitias, illustribus vestris nominibus olim inscriptas, propitia benignitate excepistis, hunc quoque ultimum ejusdem fructum gratiose suscipiatis. Neque solita humanitas vestra obstare sinet meam offerentis tenuitatem, qui simul hoc quantulocunque conatu pro vestris non modo in Fratrem, sed etiam in p. m. Parentem meum, longi temporis beneficiis meritisque gratum animum profiteri ac testari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipso, luculentius aliquando me facturum confido, si & mihi, à prima ætate similibus studiis innutrito, benevolentiæ & favoris vestri auram aspirare contingat. Interim DEUM OPT. MAX. suppliciter oro, ut consilia vestra & pro Reip. salute atque Academiæ decore curas secundet, optimisque successibus donet.

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRUS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

LECTORI S.

QVoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere judicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum æquetur quadrato rectæ C D. *Vide sequentem figuram.*

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,

voco A C. a

C B. b

& B D vel D E. x: eritque A D. $a+b+x$, & C D. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico A D. $a+b+x$

per B D vel D E. x

Eritque rectangulum sub A D, D B comprehensum, hoc est, $\square$ A D E F. $ax+bx+xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + \; bx + xx \\ bb + bx \quad \\ \hline \end{array}$$

Et fit quadratum ex CD, hoc est, □ CDGH. $bb + 2bx + xx$.

Vnde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,

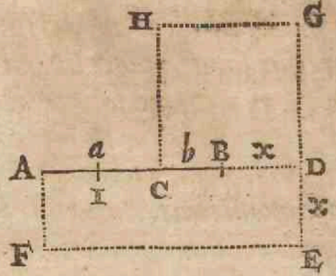
eritque $ax \propto bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,

& fit $ax - bx \propto bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $a - b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, qualis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI sit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b$ & b, esse inveniendam 3tiam proportionalem BD.

Vnde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypothesi ▭ A D B sit æquale □^{to} ex C D,

$$ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx$$

ablato utrinque ▭^{lo} sub C D & D B,

$$bx + xx$$

erit [a] ▭ sub A C & D B æquale ▭^{lo} sub C D & C B [b]. a per 1 secundi.

$$ax \quad \infty \quad bb + bx.$$

Rursus auferatur utrinque ▭ sub I C vel C B & B D, id est, bx, b per 2 secundi.

eritque [c] ▭ sub A I & B D æquale □^{to} ex C B [d]. c per 1 secundi.

$$ax - bx \quad \infty \quad bb.$$

Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit [e] d per 3 secundi.

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D. e per 17

$a - b$ —— b ——— b | x. Quod erat propositum. sexti.

Quoniam autem præstare videtur, loco horum æqualium rectangulorum considerare laterum proportionem, quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones schematum contemplationi insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum, ipsaque etiam figuras requirit minùs intricatas, vel saltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòusque continuanda varièque transmutanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5^{ti} Elementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tribus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri posse. Quod ipsum ut rectiùs percipiatur, visum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hîc afferre, qualis illa à principio usque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amussim respondet.

Etenim cum ex hypothesi sit

▭ A D B æquale □^{to} ex C D:

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx:$$

f per 17 sexti. Erit [f], resolvendo æqualitatem in proportionem,

ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum sit

ut totum AD ad totum CD,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam [g]

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

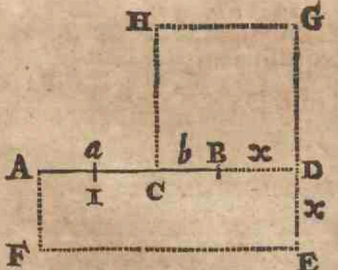
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo [h]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam AC ipsâ CB debere esse majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut quæsitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA est subtrahenda.



i per 6 secundi. Idem etiam liquet, supponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali existente ipsi CB, non posset rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse: cum illud [i] unà cum quadrato ex CB ei tantum æquale existat. Et quidem si AC ipsâ CB minor sit, manifestum est, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

Cum igitur constet Determinatio, Problema construetur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ CI æquali CB, si fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF, quod

quod ſub A D & D B ſeu D E comprehenditur, æquale eſſe quadrato C D G H, à recta C D deſcripto.

Quod ipſum retrogrado ordine fit manifeſtum, incipiendo ab Analyſeos fine & per ejuſdem veſtigia redeundo ad illius principium.

NOTA Hujus atque ſequentium Problematum Compoſitiones retro legendas eſſe.

Finis *Compoſitionis*.

habebitur [k]

▭ ſub A D & D B ſeu ADEF æquale □^to ex C D ſeu CDGH [l].

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

Quod erat faciendum.

Rurſus addito utrinque ▭^lo ſub C D & D B, id eſt, $bx + xx$,

fiet [m] ▭ ſub A C & D B æquale ▭^lo ſub C D & C B [n].

$$ax \quad \infty \quad bb + bx.$$

Deinde addito utrinque ▭^lo ſub I C vel C B & B D, id eſt, bx, ut in alteram tranſeat partem,

erit [o]. ▭ ſub A I & B D æquale □^to ex C B.

$$ax - bx \quad \infty \quad bb.$$

k per 1 ſecundi.
l per 2 ſecundi.
m per 1 ſecundi.
n per 3 ſecundi.
o per 17 ſexti.

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$$a - b \text{ —— } b \text{ —— } b \;/\; x$$

Etenim cum ex Conſtructione ſit

Principium *Compoſitionis*.

Alia ejuſdem Problematis Compoſitio, per veſtigia proportionalium ſecundæ Reſolutionis regrediens.

Finis *Compoſitionis*.

erit [p] ▭ ſub AD & BD ſeu ADEF æquale □^to ex CD ſeu CDGH.

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

p per 17 ſexti.

Quod erat faciendum.

id eſt, revocatâ proportione ad æqualitatem, q per 12 quinti. erit etiam [q]

ut A D summa antec. ad C D summâ conf., ita C D una antec. ad B D unam conseq.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ —— x

ita C D anteced. ad B D consequentem:

$b+x$ —— x

Hinc cum sit ut A C antec. ad C B conseq.,

a —— b

ut A C ad C B, ita C D ad B D.

a —— b —— $b+x/$ x.

r per 18 quinti. erit componendo [r]

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$a-b$ —— b —— $b/$ x

Cum enim ex constructione sit

Principium *Compositionis*

His igitur ita se habentibus, si velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Constructio Problematis, tum ejus demonstratio fuit inventa, tantummodo constet, allatâ Constructione quæsitum semper obtineri: poterimus, calculi vestigiis nunc prætermissis, hujusmodi ad id afferre demonstrationem.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D: erit [s] rectangulum sub extremis A I & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus si addatur commune rectangulum sub I C vel C B & B D, erit & [t] rectangulum sub A C & B D [u] æquale rectangulo sub C D & C B. His igitur si rursus addatur commune rectangulum sub C D & D B, erit similiter [x] rectangulum sub A D & D B seu A D E F [y] æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.

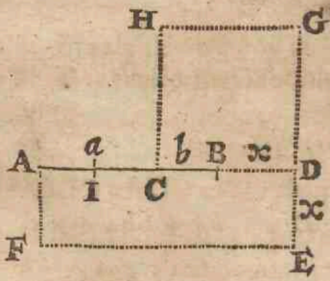
s per 17 sexti.

t per 1 secundi.

u per 3 secundi.

x per 1 secundi.

y per 2. secundi.



Vel

Vel etiam sic:

Cum ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D: erit componendo [a] A C ad C B, sicut C D ad B D. Sed ut una antecedentium C D ad unam consequentium B D, ita sunt [b] antecedentes A C & C D simul, id est, tota A D, ad consequentes C B & B D simul, id est, ad totam C D. Æqualia igitur sunt [c] quadratum C D & rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

a per 18 quinti. b per 12 quinti. c per 17 sexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebræ munus est eam deinde juxta certas regulas transmutare, servando semper æqualitatem, sic ut tandem constet, quo pacto illius ope quæsita quantitas ex datis inveniri possit: non inconveniens duxi, si unà hic ostenderem, quibus modis aliquot illius usitatiores transmutationes in proportiones resolvi queant, cum hæ, ut supra monitum fuit, in Problematîs Geometricè resolvendis ac in Theorematîs solito more demonstrandis, concinniores sint judicandæ; præsertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimensiones ascendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia est, quâ ratione per Geometriæ Elementa sit explicanda.

Typus aliquot æquationum, secundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correspondentes resolutio; tam ad Problematum Resolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonstrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraïcæ	*Resolutiones Geometricæ.*	
Si fuerit $ax \infty bc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.	d per 16 sexti.
Si sit $ax \; 8 \; bx \infty cd$: dividatur utrinque per $a \; 8 \; b$ fit $x \infty \frac{cd}{a \; 8 \; b}$.	erit [e] ut $a \; 8 \; b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a \; 8 \; b$ ad d, ita c ad x.	e per 16 sexti.

Si

f per 16 sexti.

Si sit $ax \infty bc \pm dc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{bc \pm dc}{a}$.

erit [f] ut a ad $b \pm d$, ita c ad x.
vel permutatim
ut a ad c, ita $b \pm d$ ad x.

g per 16 sexti.

Si sit $ax \pm bx \infty cd \pm ed$:
dividatur utrinque per $a \pm b$
fit $x \infty \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$.

erit [g] ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x.
vel permutatim
ut $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x.

h per 16 sexti.

Si sit $ax \infty bb - cc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$.

erit [h] ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x.
vel permutatim
ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

i per 16 sexti.
* Vt supra ad notam †
k per 17 quinti.

Si sit $ax \infty bb + bx$: *
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty bb$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{bb}{a-b}$.

erit [i] ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
& dividendo [k]
ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l per 16 sexti.
m per 18 quinti.

Si sit $ax \infty bb - bx$:
addatur utrinque bx:
eritque $ax + bx \infty bb$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \infty \frac{bb}{a+b}$.

erit [l] ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
& componendo [m]
ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n per 16 sexti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bx + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty ac$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{ac}{a-b}$.

erit [n] ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& dividendo [o]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
& per compositionem rationis contrariam [p]
ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q per 16 sexti.
r per 17 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bx + bc$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bx + bc + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty bc + ac$.

erit [q] ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$. &
& dividendo [r]
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
Vbi liquet, etiamsi 4^{tus} hîc terminus proportionalis quantitatem

dividatur utrinque per $a - b$

fit $x \infty \frac{bc + ac}{a - b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulteriùs sic argumentari.

α Haud secus, cum sit

ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$,

erit invertendo [a] — a *per Coroll. 4 quinti.*

ut b ad a, ita $x - c$ ad $x + c$.

& per compositionem rationis contrariam [b] — b *vide Clavium ad 18 quinti.*

ut b ad $b + a$, ita $x - c$ ad $2\,x$.

Hinc cum $a - b$ —— b .... $b + a$

sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2\,c$ —— $x - c$ .... $2\,x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, — c *per 22 quinti.*

$a - b$ ad $b + a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [d] — d *per 15 quinti.*

erit [e] ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$. α — e *per 16 sexti.*

& componendo [f] — f *per 18 quinti.*

ut $a + b$ ad b, ita $2\,c$ ad $c + x$.

Rursus cum sit

α ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$,

erit invertendo [g] — g *per Coroll. 4 quinti.*

ut b ad a, ita $c + x$ ad $c - x$.

& per conversionem rationis [h] — h *per Coroll. 19 quinti.*

ut b ad $b - a$, ita $c + x$ ad $2\,x$.

Si sit $ac + ax \infty bc - bx$:

addito utrinque bx

erit $ac + ax + bx \infty bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax + bx \infty bc - ac$.

dividatur utrinque per $a + b$

fit $x \infty \frac{bc - ac}{a + b}$.

Hinc cum $a+b$ —— b.... $b-a$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $c+x$.... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

$a+b$ ad $b-a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[k]

Si sit $ax+ac \infty bx-bc$:
addito utrinque bc
erit $ax+ac+bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac+bc \infty bx-ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

erit [l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$. α
& dividendo [m]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
Rursus cum sit
α ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo [n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compositionem rationis contrariam [o]
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2x$.
Hinc cum $b-a$ —— a...... $a+b$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x-c$...... $2x$,
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

$b-a$ ad $a+b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[q]

Si sit $ac-ax \infty bx+bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx+ax+bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac-bc \infty bx+ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$

erit [r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$. α
& componendo [s]
ut $b+a$ ad a, ita $2c$ ad $x+c$.
Rursus cum sit
α ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo [t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per conversionem rationis [u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2x$.
Hinc

i per 22 quinti.
k per 15 quinti.
l per 16 sexti.
m per 17 quinti.
n per Cor. 4 quinti.
o vide Clavium ad 18 quinti.
p per 22 quinti.
q per 15 quinti.
r per 16 sexti.
s per 18 quinti.
t per Cor. 4 quinti.
u per Cor. 19 quinti.

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$ sint 3 magnitudines ab una parte, & $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$ tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, (a per 22 quinti.)

$b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [b] erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. Vnde concluditur c esse $\infty\ x$. Nam minor esse non potest, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod est absurdum. Similiter major esse nequit, quandoquidem per compositionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde absurdum est. Nec aliter se res habet in sequenti formula.

(b per 15 quinti. c per 16 sexti. d per 18 quinti. e vide Clavium ad 18 quinti.)

Si sit $ax - ac \infty bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bc + ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. Vnde rursus ut ante concluditur c esse $\infty\ x$: cum nec major nec minor esse possit. (f per 16 sexti.)

Si sit $ac - ax \infty bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritque $ac + bc \infty ax + bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulteriùs hîc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematis conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superiùs reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

	Compositiones Algebraïcæ	*Compositiones Geometricæ*
a per 16 sexti.	fit $ax \infty bc$.	erit [a] $ax \infty bc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h.e., si sit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:

b per 16 sexti.	fit $ax \pm bx \infty cd$.	erit [b] $ax \pm bx \infty cd$.
	multiplicetur utrinque per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd}{a \pm b}$: h.e., si sit ut $a \pm b$, ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita c ad x:

c per 16 sexti.	fit $ax \infty bc \pm dc$.	erit [c] $ax \infty bc \pm dc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bc \pm dc}{a}$: h.e., si sit ut a ad $b \pm d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \pm d$ ad x:

d per 16 sexti.	fit $ax \pm bx \infty cd \pm ed$.	erit [d] $ax \pm bx \infty cd \pm ed$.
	multiplicetur per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$: h. e., si sit ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x:

e per 16 sexti.	fit $ax \infty bb - cc$.	erit [e] $ax \infty bb - cc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h. e., si sit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

fit $ax \infty bb + bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty bb$.
multiplicetur utrinque per $a - b$
Si fit $x \infty \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si fit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: ‡

erit [f] $ax \infty bb + bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
erit componendo [g]

f per 16 sexti.
g per 18 quinti. Vt supra ad notam ‡

fit $ax \infty bb - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bb$.
multiplicetur utrinque per $a+b$
Si fit $x \infty \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si fit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:

erit [h] $ax \infty bb - bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
erit dividendo [i]

h per 16 sexti.
i per 17 quinti.

fit $ax - ac \infty bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bx + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty ac$.
multiplicato utrinque per $a - b$
Si fit $x \infty \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si fit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:

erit [k] $ax - ac \infty bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& componendo [l]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
erit per divisionem rationis contrariam [m]

k per 16 sexti.
l per 18 quinti.
m vide Clavium ad 17 quinti.

fit $ax - ac \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ac.
eritque $ax \infty bx + bc + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty bc + ac$.

erit [n] $ax - ac \infty bx + bc$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$
& componendo [o]
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [p]
ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
id est, per divisionem rationis contrariam, [q]

n per 16 sexti.
o per 18 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q vide Clavium ad 17 quinti.

mulr per 15 quinti. multiplicato utrinque per $a - b$ ut $a - b$ ad $b + a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam [r]

Si sit $x \infty \frac{bc + ac}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad $b + a$, ita c ad x:

s per 16 sexti. erit [s] $ac + ax \infty bc - bx$. id est, reducendo proportionem ad æqualitatem, ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$. & dividendo [t]

t per 17 quinti. ut $a + b$ ad b, ita $2c$ ad $c + x$. vel, sumptis consequentium semissibus, [u]

u vide Clavium ad 22 quinti. fit $ac + ax \infty bc - bx$. ut $a + b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c + 2x$.

auferatur utrinque bx id est, per compositionem rationis contrariam, [x]

eritque $ac + ax + bx \infty bc$.

x vide Clavium ad 18 quinti. addatur utrinque ac ut $a + b$ ad $b - a$, ita $2c$ ad $2x$.

erit $ax + bx \infty bc - ac$.

multiplicato utrinque per $a + b$ erit etiam [y]

y per 15 quinti. Si sit $x \infty \frac{bc - ac}{a + b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad $b - a$, ita c ad x:

z per 16 sexti. erit [z] $ax + ac \infty bx - bc$. id est, reducendo proportionem ad æqualitatem, ut b ad a, ita $x + c$ ad $x - c$.

a per 18 quinti. & componendo [a] ut $b - a$ ad a, ita $2c$ ad $x - c$. vel, sumptis consequentium semissibus, [b]

b vide Clavium ad 22 quinti. fit $ax + ac \infty bx - bc$. ut $b - a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.

auferatur utrinque bc. id est, per divisionem rationis contrariam, [c]

eritque $ax + ac + bc \infty bx$.

c vide Clavium ad 17 quinti. addatur utrinque ax ut $b - a$ ad $a + b$, ita $2c$ ad $2x$.

erit $ac + bc \infty bx - ax$.

multiplicato utrinque per $b - a$ erit etiam [d]

d per 15 quinti. Si sit $\frac{ac + bc}{b - a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b - a$ ad $a + b$, ita c ad x:

sic

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$. e per 16
id eſt, reducendo proportionem sexti.
ad æqualitatem
ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.
& dividendo [f] f per 17
ut $b + a$ ad a, ita $2\,c$ ad $x + c$. quinti.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, [g] g vide
ut $b + a$ ad $2\,a$, ita $2\,c$ ad $2\,x + 2\,c$. Clavium
id eſt, per compoſitionem rationis contrariam, [h] ad 22 quinti.
ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2\,c$ ad $2\,x$. h vide Clavium
erit etiam [i] ad 18 quinti.

ſit $ac - ax \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty bx + ax + bc$.
addatur utrinque bc
erit $ac - bc \infty bx + ax$.
multiplicato utrinque per $b+a$

Si ſit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc eſt, ſi ſit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x: i per 15 quinti.

ſit $ax - ac \infty bc - bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bc + ac - bx$.
auferatur utrinque bx
erit $ax + bx \infty bc + ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si ſit $x \infty c$: ſeu, quod idem eſt, ſi x ſit ad c, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

ſit $ac - ax \infty bx - bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty ax + bx - bc$.
auferatur utrinque bc
erit $ac + bc \infty ax + bx$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si ſit $c \infty x$: ſeu, quod idem eſt, ſi c ſit ad x, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compoſitionibus hiſce Algebraïcis factum eſt.

PRO-

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub A D, D C comprehensum sit æquale quadrato ex D B.

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& C D. x; eritque A D $\infty\ a + x$, & D B $\infty\ b - x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

$$\begin{array}{rl} \text{Multiplico A D.} & a + x \\ \text{per D C seu D E.} & x \\ \hline \text{Et fit rectangulum A D E F.} & ax + xx. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Similiter multiplico D B.} & b - x \\ \text{per D B seu B G.} & b - x \\ \hline & - bx + xx \\ & bb - bx \\ \hline \text{Et fit quadratum D B G H.} & bb - 2bx + xx. \end{array}$$

Vnde talis exurgit æquatio
$ax + xx \ \infty\ bb - 2bx + xx.$
Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque $ax \ \infty\ bb - 2bx.$

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & coguitæ ab altera parte, & fit $ax + 2bx \ \infty\ bb.$

Cujus

Cujus utraque pars si dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a + 2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad secandam A B in D, qualis requiritur, producendam esse A B ad I, ita ut B I sit æqualis B C; ac deinde ad A I & I B vel B C inveniendam esse 3^{tiam} proportionalem, hoc est, ut A I sit ad I B vel B C, sicut B C ad C D.

Vt autem pateat demonstratio, repetantur Analyseos vestigia. Si enim per hæc ipsa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & desinendo ubi illa initium sumpsit, inventa simul erit via à dato seu concesso perveniendi ad quæsitum. In quem igitur finem binas sequentes compositiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina est, ob oculos ponere visum fuit, adhibitâ utriusque calculi interpretatione sive ad figuram relatione.

Compositio Algebraïca. — *Compositio Geometrica.*

Finis *Compositionis*.

Compositio Algebraïca.

▭ AD, CD vel ADEF

[a] & fit $ax + xx \propto$

□ DB vel DBGH.

[b] $bb - 2bx + xx$.

□ CD vel DK

Addatur utrinque xx,

▭ AC, CD

eritque[c] $ax \propto$

(□DB — □ CD vel DK) i.e.[d],

[d] ▭ CBK

$bb - 2bx$.

▭ CI, CD vel[e] ▭ CDI + □ CD

Auferatur utrinque $2bx$,

▭ AI, CD □ IB vel BC

erit[f] $ax + 2bx \propto bb$.

Compositio Geometrica.

▭ AD, CD vel ADEF

Et fit, *per 3. 2^{di}*, $ax + xx \propto$

□ DB vel DBGH.

$bb - 2bx + xx$. *per 6. 2^{di}*

□ CD vel DK

Addatur utrinque xx

▭ ACD ▭ CBK

erit, *per 16. 6^{ti}*, $ax \propto bb - 2bx$.

Id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

AC CB BK KD vel CD

ut a ad b, ita $b - 2x$ ad x.

Et, sumptis consequentium semissibus, *vide Clavium ad 22 5^{ti}*.

AC CI BK KC

ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$.

Vnde dividendo erit, *per 17 quinti*.

AI IC BC 2 CD vel CK

ut $a + 2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$.

id

a *per 3 secundi.*
b *per 6 secundi.*
c *per 5 secundi.*
d *per 1 secundi.*
e *per 3 secundi.*
f *per 17 sexti.*

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, | sive, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compositionis.*

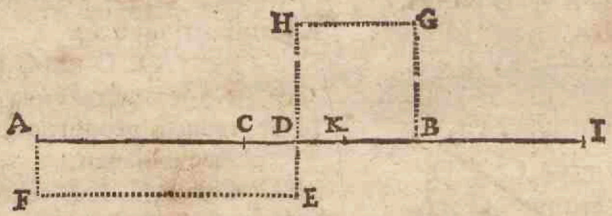
Adapertâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

Constructio.

Productâ AB ad I, donec BI sit æqualis BC. fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC seu ADEF quadrato DB seu DBGH æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione AI sit ad IB vel BC, ut BC ad
g per 17 sexti. CD: erit [g] rectangulum sub extremis AI, CD, id est, [h] re-
h per 1 secundi. ctangulum sub AC, CD unà cum rectangulo sub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus si commune aufe-



ratur rectangulum sub CI, CD: erit reliquum rectangulum sub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo sub
i per 3 secundi. CI, CD, id est, [i] rectangulo CDI unà cum quadrato CD.
k per 5 secundi. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI [k] relinquatur quadratum DB: patet dictum rectangulum ACD quadrato DB æquale esse minus quadrato CD. Hinc cum, sumendo

mendo C D & D K æquales, quadratum D B minus quadrato C D vel D K[l] æquale sit rectangulo C B K: manifestum est, si æqualibus hisce rectangulis A C D & C B K addatur commune quadratum C D vel D K, etiam totum toti æquale esse, id est, [m] rectangulum A D C seu A D E F ipsi D B quadrato seu D B G H. Quod erat faciendum.

l per 6 secundi.
m per 3 secundi.

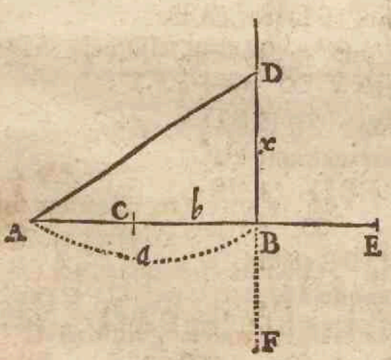
Vel sic:

Cum ex constructione sit ut A I ad I B, ita B C ad C D: erit quoque, sumptis consequentium duplis, [n] ut A I ad I C, ita B C ad 2 C D seu C K; & dividendo [o] ut A C ad C I, ita B K ad K C; id est, sumptis consequentium semissibus. [p] ut A C ad C B, ita B K ad K D vel C D. Æquale igitur est [q] rectangulum sub extremis A C, C D rectangulo sub mediis C B, B K. Quibus si addatur commune quadratum C D vel D K, erit & totum toti æquale, id est, [r] rectangulum A D C seu A D E F ipsi quadrato D B seu D B G H[s]. Quod erat faciendum.

n vide Clavium ad 22 quinti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q per 16 sexti.
r per 3 secundi.
s per 6 secundi.

PROBLEMA.

Datâ rectâ A B utcunque sectâ in C, erectâque ex ejus termino B super ipsa perpendiculari indefinitâ B D: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere A D, huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis D B, B C simul sumptis.



Series *Analyseos.*

Ponatur factum quod quæritur,
sitque A B ∞ a
C B ∞ b
& B D ∞ x: eritque
A D ∞ $b + x$.

Hinc cum angulus ad B sit rectus, erit [a] quadratum ex A D æquale binis quadratis ex A B & B D.

a per 47 primi.

Vnde

Vnde talis resultat æquatio

$$\square AD \qquad \square AB + \square BD$$

$$bb + 2bx + xx \propto aa + xx.$$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

eritque $bb + 2bx \propto aa$.

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \propto aa - bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \propto \frac{aa-bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opùs tantùm esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^{tam} proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analysi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analysis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis *Compositionis*.

Vnde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt $\square$ FD & $\square$ AD.

b *per* 47 *primi.* $\square FB + 2 \square FBD + \square BD$, vel $\square FD^{b}$. $\square AB + \square BD$, vel $\square AD^{c}$.

c *per* 4 *secundi.* Et fit $bb + 2bx + xx \propto aa + xx$.

$$\square BD$$

Rursus addatur utrinque xx,

d *per* 6 *secundi.* $\square FB + 2 \square FBD \quad \square AB^{d}$.

eritque $bb + 2bx \propto aa$.

$$\square FB \text{ vel } BC$$

Addatur utrinque bb,

$\square$ CE, BD seu $2 \square$ FBD $\square$ EAC.

e *per* 16 *sexti.* erit [e] $2bx \propto aa - bb$

id est,

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sumptâque FB æquali BC,

CE AE AC BD

Ex constructione est ut 2 b ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compositionis.*

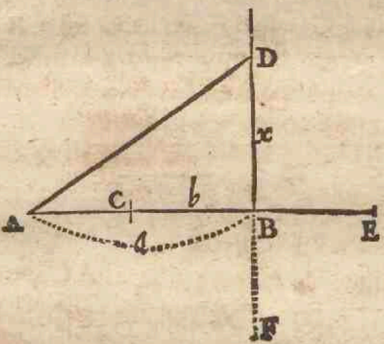
Inventâ igitur tum Constructione tum Compositione sive Demonstratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit investigata, in hunc modum construi atque componi.

Constructio.

Productâ A B ad E, ut B E sit æqualis B C: fiat ut C E ad A E, ita A C ad B D, jungaturque A D. Dico hanc ipsis D B, B C simul sumptis æqualem esse.

Demonstratio.

Etenim productâ D B ad F, ita ut B F sit æqualis B C, quoniam per constructionem C E est ad A E, sicut A C ad B D: erit [f] rectangulum sub extremis C E, B D, id est, duplum rectangulum F B D, æquale rectangulo sub mediis E A, A C. Quibus si addatur commune quadratum ex FB vel BC, erit etiam quadratum F B unà cum duplo rectangulo F B D



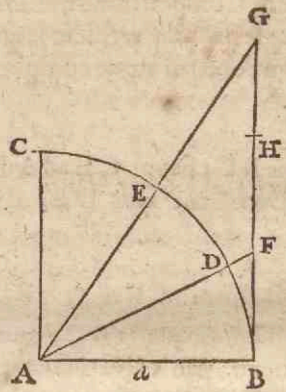
f per 16 sexti.

æquale quadrato ex A B [g]. Quibus si rursus addatur commune quadratum ex B D: erunt quoque bina quadrata ex F B, B D simul cum duplo rectangulo F B D, id est [h], quadratum totius F D, æqualia binis quadratis ex A B, B D, id est [i], æquale quadrato ex A D. Vnde & ipsæ rectæ F D & A D æquales erunt. Hinc cum F D æqualis sit ipsis D B, B C simul sumptis, erit etiam A D ipsis D B, B C simul sumptis æqualis. Quod erat faciendum.

g per 6 secundi.
h per 4 secundi.
i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli A B C sumatur arcus quilibet B D minor quàm 45 gr. cujus duplus sit B E, eorumque tangentes B F, B G: erit ut quadratum radii A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B F ad B G.



Series *Analyseos*.

Esto A B $\infty\, a$
B F $\infty\, x$
B G $\infty\, y$, eritque F G $\infty\, y - x$
& A G $\infty\, z$.

Quoniam itaque arcus B E ipsius B D duplus ponitur, ac proinde angulus B A G duplus anguli B A F: erit angulus ad A in triangulo ABG rectâ A F bifariam sectus.

a per 3 sexti.

Vnde [a] erit
ut F G ad B F, ita A G ad A B
$y - x$ — x — z / a.

b per 16 sexti.

Ideoque [b] ▭ B F, A G æquale ▭[lo] F G, A B

$$xz \;\infty\; ay - ax.$$

div. utrinque per x fit $z \;\infty\; \dfrac{ay - ax}{x}$

Hinc ductâ utrâque parte in se quadratè,

add. $\left\{ \begin{array}{l} \square\,\text{A B.}\ aa \\ \square\,\text{B G.}\ yy \end{array} \right.$ $\square$ A G, per 47 primi.

erit $zz \;\infty\; \dfrac{aayy - 2aaxy + aaxx}{xx} \;\infty\; aa + yy \;\infty\; zz.$

mult. utrinque per xx — $aayy - 2aaxy + aaxx \;\infty\; aaxx + xxyy$

toll. utrinque $aaxx$ — $aayy - 2aaxy \;\infty\; xxyy$

div. utrinque per y — $aay - 2aax \;\infty\; xxy$

add. utrinque $2aax$ — $aay \;\infty\; 2aax + xxy$

toll. utrinque xxy — $aay - xxy \;\infty\; 2aax$

div. utrinque per $aa - xx$

fit $y \;\infty\; \dfrac{2aax}{aa - xx}$.

□AB—□BF 2□AB BF BG

Hoc est, erit ut $aa - xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Vt proponebatur.

De-

Demonſtrationis ſeries eodem modo ſe habet quo Analyſeos, cum utriuſque veſtigia conſentiant, quibus ab hypotheſi ad quæſiti concluſionem perducimur. Vti hîc videre eſt.

Etenim cum [c] ſit
ut F G ad B F, ita A G ad A B:
$y-x$ —— x —— z / a

erit quoque [d]
ut □ F G ad □ B F, ita □ A G ſeu □ A B + □ B G ad □ A B
$yy-2xy+xx$ —— xx —— zz, id eſt, $aa+yy$ / aa.

& dividendo [e]
ut □ F G — □ B F vel F H,
id eſt, ▭ B G H [f] ad □ B F, ita □ B G ad □ A B
$yy-2xy$ —— xx —— yy / aa.

permutandoque [g]
ut ▭ B G H ad □ B G, vel [h] ut H G ad G B, ita □ B F ad □ A B
$y-2x$ —— y —— xx / aa.

Id eſt, invertendo & per converſionem rationis [i],
ut □ A B ad □ A B — □ B F, ita G B ad B H
aa —— $aa-xx$ —— y / $2x$.

& duplatis antecedentibus [k] convertendoque
ut □ A B — □ B F ad 2 □ A B, ita B H ad 2 G B ſeu B F ad B G [l]
$aa-xx$ —— $2aa$ —— x / y.

Quod erat oſtendendum.

Quòd ſi autem Algebræ ignaris ſive in inveniendi arte imperitis ipſa demonſtratio ſit exhibenda, poterit ea prætermiſſis jam hiſce veſtigiis ſic adhiberi.

Sumatur F H æqualis F B. Cum igitur in triangulo A B G angulus ad A rectâ A F bifariam ſectus ſit, erit [m] ut F G ad B F, ita A G ad A B. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia ſint quadrata, erit & [n] ut quadratum F G ad quadratum B F, ita quadratum A G, id eſt, *per 47 primi*, ſumma quadratorum A B, B G, ad quadratum A B. Et dividendo [o] ut quadratum F G minus quadrato B F vel F H, id eſt [p] rectangulum B G H, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; permutandoque [q] ut rectangulum B G H ad quadratum B G ſeu [r] ut H G ad G B, ita quadratum B F ad quadratum A B. Hoc eſt, in-

c *per 3 ſexti.*
d *per 16 ſexti.*
e *per 17 quinti.*
f *per 6 ſecundi.*
g *per 16 quinti.*
h *per 1 ſexti.*
i *per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.*
k *vide Clavium ad 22 quinti.*
l *per 15 quinti.*
m *per 3 ſexti.*
n *per 22 ſexti.*
o *per 17 quinti.*
p *per 6 ſecundi.*
q *per 16 quinti.*
r *per 1 ſexti.*

s per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti. t vide Clavium ad 22 quinti. u per 15 quinti.

invertendo & per conversionem rationis[s], ut quadratum A B ad quadratum A B minus quadrato B F, ita G B ad B H; & duplatis antecedentibus[t] convertendoque, ut quadratum A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B H ad duplum ipsius G B seu[u] B F ad B G. Quod erat demonstrandum.

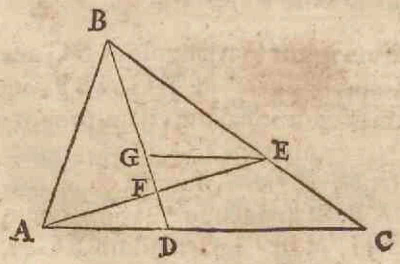
Hinc

„ Si, *Tangens cujuslibet arcûs minoris quàm 45 gr. du-*
„ *catur in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii*
„ *auferatur Tangentis quadratum; Illud productum divi-*
„ *datur per hoc residuum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Ioanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum A B C, cujus angulus ad B rectâ B D bifariam sit divisus, & ex B C abscindatur B E æqualis A B, jungaturque A E, secans B D in F: dico, si agatur E G parallela A C, occurrens ipsi B D in G, esse ut B G ad B D, ita A D ad D C, & A B ad B C; nec non D C bis esse ad excessum; quo D C superat A D, sicut B D ad D F.



Series *Analyseos.*

Esto B D ꝏ *b*
A D ꝏ *c*
D C ꝏ *y*
& D F ꝏ *z*.

Quoniam itaque triangulorum A B F, E B F anguli ad B ex hypothesi sunt æquales, nec non latera A B, B F & E B, B F, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt &[a] anguli ad F æquales, id est recti, basis-

a per 4 primi.

basisque A F basi F E æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas A C, G E anguli D A F, F E G in triangulis A F D, F G E æquales sint, ut & [c] anguli ad verticem A F D & G F E, latusque A F lateri F E, ut ostensum est: erunt quoque [d] reliqua latera A D, D F reliquis lateribus E G, G F æqualia. Hinc cum [e] propter similitudinem triangulorum B G E, B D C, B G sit ad G E, id est, A D, sicut B D ad D C; nec non B G ad B E, id est A B sicut B D ad B C: erit quoque [f] permutando B G ad B D, sicut A D ad D C, & A B ad B C. Quod est primum.

b per 29 primi.
c per 15 primi.
d per 26 primi.
e per Cor. 4 quinti.
f per 16 quinti.

Cæterum D C bis esse ad excessum, quo D C superat A D, sicut B D ad D F: ita patet.

Est enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z$ —— b —— c / y.

Ideoque [g] $\square$ B G, D C ∞ $\square^{lo}$ B D, A D.

$by - 2yz \infty bc.$

g per 16 sexti.

add. utrinque $2yz$

$by \infty 2yz + bc$

toll. utrinque bc

$by - bc \infty 2yz$

div. utrinque per $2y$

fit $\frac{by - bc}{2y} \infty z$. Hoc est, erit ut

2 D C DC—AD BD DF

$2y$ ad $y - c$, ita b ad z. Quod est secundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z$ —— b —— c / y.

erit invertendo [h]

ut D C ad A D, ita B D ad B G

y —— c —— b / $b - 2z$.

h per Cor. 4 quinti.

& per conversionem rationis [i]

ut D C ad D C — A D, ita B D ad D G

y —— $y - c$ —— b / $2z$.

i per Cor. 19 quinti.

id est, duplatis antecedentibus, [k]

ut 2 D C ad D C—AD, ita 2 BD ad DG seu B D ad DF

$2y$ —— $y - c$ —————— b / z.

k vide Clavium ad 22 quinti.

Ex his facile est, cognitis A D, D B, & D C, invenire D F.

Si enim, exempli gratiâ, A D sit 39, D B 45, & D C 325: fiat ut 2 D C 650 ad D C — A D 286, ita D B 45, ad DF $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iisdem positis, dico rectangulum A D C unà cum quadrato D B æquale esse rectangulo A B C.

Series *Analyseos.*

Esto A B ∞ a

B D ∞ b

A D ∞ c

B C ∞ x

D C ∞ y

& D F ∞ z.

Etenim cum[a] 2 ▭ B D F sit ∞ □ A D + □ D B — □ A B, id est, $2bz \;\infty\; cc + bb - aa$:

a per 13 secundi.

erit, dividendo utrinque per 2 b, $z \;\infty\; \frac{cc+bb-aa}{2b}$.

Vnde cum per antec. Theorema inventum quoq; sit $\frac{by-bc}{2y} \;\infty\; z$:

erit $\frac{cc+bb-aa}{b} \;\infty\; \frac{by-bc}{y}$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

$$ccy+bby-aay \;\infty\; bby-bbc$$

add. utrinque aay

$$ccy+bby \;\infty\; aay+bby-bbc$$

toll. utrinque bby

$$ccy \;\infty\; aay-bbc$$

add. utrinque bbc

$$ccy+bbc \;\infty\; aay$$

loco ay substit. cx

$$ccy+bbc \;\infty\; acx$$

div. utrinque per c

▭ADC + □DB ▭ABC

Et fit $cy+bb \;\infty\; ax$. Quod erat propositum.

Ex demonstratis in antec. Theoremate vel 3^tia Sexti est ut AD ad DC, ita AB ad BC

c —— y —— a / x.

ac proinde per 16 sexti ▭AD,BC ∞ ▭AB,DC

$cx \;\infty\; ay$.

Quo autem pacto in adæquatione hac resolvenda argumentandum sit, ut sequendo vestigia allatæ reductionis, quæ ob superiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca est, quæſitum Theorematis Geometricè concludatur, ſequens terminorum diſpoſitio docebit.

Ex præcedenti Theoremate eſt
ut 2 D C ad D C — A D, ita B D ad D F
$2y$ —— $y - c$ —— b / z.
ac proinde[b] 2 ▭ C D F æqual. ▭ B D C — ▭ A D B — b per 16 ſexti.
α $2yz$ ∞ $by - bc$.
Deinde[c] eſt, ut B D ad D C, ita 2 ▭ B D F ad 2 ▭ C D F. aſ- — c per 1 ſexti.
b —— y —— $2bz$ / $2yz$.
ſumptâ ſc. com. alt. 2 D F, id eſt, $2z$.
Hinc cum[d] — d per 13 ſecundi.
2 ▭ BDF æqu. □AD + □DB -- □AB, & α 2 ▭ CDF æqu. ▭ BDC -- ▭ ADB:
$2bz$ ∞ $cc + bb - aa$, & $2yz$ ∞ $by - bc$:
erit ut B D ad D C, ſeu[e] □ B D ad ▭ B D C, — e aſſumptâ com. altit. B D, id eſt, b.
bb —— by
ita □AD + □DB — □AB ad ▭ BD C — ▭ ADB.
$cc + bb - aa$ —— $by - bc$
ideoque[f] — f per 19 quinti.
& reliq. □AB — □AD ad rel. ▭ ADB, ut totum ad totum ſeu BD ad DC.
$aa - cc$ —— bc —— b / y.

Facile hîc eſſet quæſitum Propoſitionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum a y ſubſtituendo c x. Sed quoniam ſic ad ſolida aſcenditur, de quibus in poſterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem ſuam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addiſci ſolent, poterimus iiſdem ſepoſitis in quæſiti concluſionem ſic ulteriùs argumentari.

Sed ut B D eſt ad D C, ita quoque eſt[g] ▭ A D B ad ▭ A D C; — g aſſumptâ com. altit. A D ſeu c.
b —— y —— bc / cy;
& ut B D ad A D, ita quoque eſt[h] ▭ ADB ad □AD; &[i], — h aſſumptâ com. altit. A D ſeu c.
b —— c —— bc / cc
□ B D ad ▭ A D B ſeu bb ad bc. — i aſſumptâ com. altit. B D ſeu b

 Erunt

Eruntitaque □AB--□AD,▭ADB,& □AD tres magnitudines
aa — cc —— bc .... cc ab una parte;
& □ BD,▭ ADB,& ▭ ADC tres aliæ ab altera
bb .... bc —— cy parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:

k per 23 quinti.

quare etiam ex æqualitate proportionales erunt,
id eſt,□ A B — □ A D ad □ A D,ſicut□ B D ad ▭ ADC.
aa — cc —— cc —— bb / cy.

l per 18 quinti.

Et componendo [l].
□ A B ad □ A D,ſicut □ BD+▭ADC ad ▭ A D C
aa —— cc ———— bb+cy / cy.

m per 16 quinti.

Permutandoque [m]
□AB ad □BD+▭ A D C,ſicut □ A D ad ▭ A D C ſeu
aa —— bb+cy —— cc / cy.
A D ad D C, id eſt, *c* ad *y*. [n]

n per 1 ſexti. relictâ ſc. com. altit. AD ſeu *c*.

o per antec. Theorema vel 3 ſexti.

p aſſumptâ com. altit. AB ſeu *a*.

q per 9 quinti.

Sed ut A D ad D C, ita [o] eſt quoque A B ad B C, ſeu [p], □ A B
c —— y ———— a / x.
ad ▭ A B C , id eſt, *aa* ad *ax*.

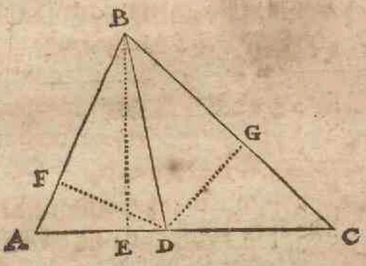
Vnde erit ut □ A B ad □ B D+▭ A D C,ita □ A B ad ▭ABC.
aa —— bb+cy —— aa / ax.

Æqualia igitur ſunt [q] □ B D + ▭ A D C & ▭ A B C.
bb+cy ∞ *ax*. Quod erat oſtendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonſtratum reperitur Prop^ne^ 20^ma^ ſecundæ partis prioris tractatus Exercitationum noſtrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantùm 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super A B, B C, perpendicularibus D F, D G, patet, ob angulum A B C rectâ B D bifariam divisum, ipsas D F & D G, ut & F B & B G *per 16 primi* esse æquales. Deinde esto etiam B E perpendicularis ad A C, sitque

A B $\infty\ a$
B D $\infty\ b$
A D $\infty\ c$
B C $\infty\ x$
D C $\infty\ y$
F B vel B G $\infty\ t$, eritque A F $\infty\ a-t$,
& G C $\infty\ x-t$.
& E D $\infty\ v$, eritque A E $\infty\ c-v$,
& E C $\infty\ y+v$.

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\begin{cases}\square AD.\ cc\\ \square AF.\ aa-2at+tt\end{cases}\qquad \text{Subtr.}\begin{cases}bb.\ \square BD\\ tt.\ \square FB\end{cases}$$

$$\square FD.\ cc-aa+2at-tt\ \infty\ bb-tt.\ \square FD$$

dele utrinque tt, & transfer cc & aa

$$2\,\square ABF.\quad \square AB+\square BD-\square AD$$
$$2at\ \infty\ aa+bb-cc\ *$$

div. utrinque per $2a$

$$\text{fit } t\ \infty\ \frac{aa+bb-cc}{2a}.$$

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam per 3 latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\begin{cases}\square DC.\ yy\\ \square GC.\ xx-2xt+tt\end{cases}\qquad \text{Subtr.}\begin{cases}bb.\ \square BD\\ tt.\ \square BG\end{cases}$$

$$\square DG.\ yy-xx+2xt-tt\ \infty\ bb-tt.\ \square DG$$

del. utrinque tt, & transf. yy & xx

$$2\square CBG\quad \square BC+\square BD-\square DC$$

$$2xt\ \infty\ xx+bb-yy\ *$$

div. utrinque per $2x$

$$\text{fit } t\ \infty\ \frac{xx+bb-yy}{2x}.$$

Sive igitur quæratur t per 3ª latera $\triangle^{li}$ ABD, sive per 3ª latera $\triangle^{li}$ DBC, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad FB vel BG inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{aa+bb-cc}{a}\ \infty\ \frac{xx+bb-yy}{x}.$$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

$$aax+bbx-ccx\ \infty\ axx+abb-ayy$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt ab una parte habeantur

$$bbx-abb\ \infty\ axx-ayy+ccx-aax$$

div. utrinque per $x-a$

$$\text{eritque } bb\ \infty\ \frac{axx-ayy+ccx-aax}{x-a}.$$

Quæratur jam v per 3ª latera trianguli ABD

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\begin{cases}\square AB.\ aa\\ \square AE.\ cc-2cv+vv\end{cases}\qquad \text{Subtr.}\begin{cases}bb.\ \square BD\\ vv.\ \square ED\end{cases}$$

$$\square EB.\ aa-cc+2cv-vv\ \infty\ bb-vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$$2cv\ \infty\ bb+cc-aa.$$

div. utrinque per $2c$

$$\text{fit } v\ \infty\ \frac{bb+cc-aa}{2c}.$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3ª latera trianguli DBC, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi

Subtr. $\left\{ \begin{array}{l} \square BD.\,bb \\ \square ED.\,vv \end{array} \right.$ Subtr. $\left\{ \begin{array}{r} xx.\,\square BC \\ yy+2yv+vv.\,\square EC \end{array} \right.$

$\square EB.\ bb - vv \ \infty\ xx - yy - 2yv - vv.\,\square EB$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$ $\quad 2\square CDE \quad \square BC - \square DC - \square BD$

$2yv \ \infty\ xx - yy - bb$ †

div. urinque per $2y$ $\quad$ fit $v \ \infty\ \frac{xx - yy - bb}{2y}$

Quærendo itaque v per 3ª latera $\triangle^{li}$ D B C, emanat hinc Prop. 12 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa debeat adhiberi ut inveniatur E D.

Quare erit

$$\frac{bb + cc - aa}{c} \ \infty\ \frac{xx - yy - bb}{y}$$

divisо utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem $\quad bby + ccy - aay \ \infty\ cxx - cyy - cbb$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur $\quad bby + cbb \ \infty\ cxx + aay - cyy - ccy$

div. utrinque per $y + c$ $\quad$ & fit $bb \ \infty\ \frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y + c}$.

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio inter $\frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$ & $\frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y + c}$.

mult. per crucem

$$axxy - ay^3 + ccxy - aaxy + acxx - acyy + c^3x - aacx$$
$$\infty$$
$$cx^3 + aaxy - cxyy - ccxy - acxx - a^3y + acyy + accy$$

transpositis transponendis, fit

$$2acxx + cxyy + c^3x - cx^3 - aacx + 2ccxy$$
$$\infty$$
$$2aaxy + ay^3 + accy - axxy - a^3y + 2acyy$$

div. utrinque per $2ax + yy + cc - xx - aa + 2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \ \infty\ ay$. Hoc est, erit ut c ad y, ita a ad x.

ac proinde $x \ \infty\ \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \ \infty\ y$. $\quad$ Quæ tertia est Propositio libri sexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \infty \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

□ADC + □DB □ABC

id est, $bb \infty ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \infty ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile est, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quòd si autem, existente $bb \infty ax - cy$. pro x scribatur $\frac{ay}{c}$ fiet $bb \infty \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \infty aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \infty y$. Vel, resolvendo æqua-

□AB—□AD □BD AD DC

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \infty ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \infty aax - ccx$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \infty x$. Vel,

□AB—□AD

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad

□BD AB BC

bb, ita a ad x. Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus △[li] ABD inveniri possint BC & DC.

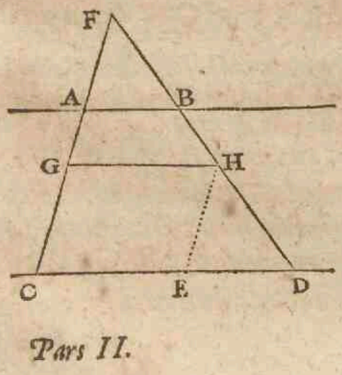
Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet, verùm etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3[tia] sexti, aliæque propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

Cæterum calculum hunc multò prolixiorem esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem

rem ipsam penitiùs inspicere atque à primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectandæ. Quæ quidem hìc refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quòd solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim; quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis A B, C D, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere F B D, quæ à positione datis abscindat rectas A B, E D, datam inter se rationem habentes A F ad C G, seu *a* ad *d*.



Series *Resolutionis*.

Ponatur factum, quod quæritur, hoc est, sit A B ad E D, ut *a* ad *d*, sitque A F ∞ *a*
C F ∞ *b*
C E ∞ *c*
& A B ∞ *x*.

Hinc ut A F ad C G, ita A B ad 4^{tam} seu E D

$$a \text{——} d \text{——} x \,/\, \frac{dx}{a}$$

Sed ex similitudine $\triangle^{lorum}$ A F B & C F D est quoque

ut A F ad A B, ita C F $\quad\overline{\text{add. C E. } c}$

$$a \text{——} x \text{——} b \,/\, \text{ad C D.} c + \frac{dx}{a}$$

Quare erit *per 16 sexti* $\square$ A F, C D $\square$ A B, C F

$$ac + dx \;\infty\; bx.$$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

eritque $ac \;\infty\; bx - dx$.

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \;\infty\; \frac{ac}{b - d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut G F ad C E, ita A F ad A B. Vt autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superiùs jam sæpiùs monstratum fuit, atque etiam hîc videre est, præmittendo priùs Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ G H parallelâ A B vel C D ac æquali C E, agatur ex F per H recta F H D, secans A B, C D in B & D: dico A B ad E D esse, sicut A F ad C G, seu a ad d.

Finis *Compositionis.*

A F C G A B E D.

Vnde *per 16 sexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

$\square$ A F, E D $\square$ C G, A B

erit similiter $af \;\infty\; dx$.

$\square$ A F, C E

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

$\square AF,CE + \square AF,ED \quad \square AF,CE + \square CG,AB.$

Quare erit etiam $ac + af \;\infty\; ac + dx.$

$\square CF, AB \quad \square AF,CE + \square CG,AB.$

Erat autem & $bx \;\infty\; ac + dx.$

$\square CF,AB \quad \square AF,CD$, seu, $\square AF,CE + \square AF,ED.$

Quare *per 16 sexti* erit $bx \;\infty\; ac + af.$

AF AB CF CD

eritque ex similitudine △lorum AFB, & CFD, ut a ad x, ita b ad $c+f$.

Esto jam ED $\infty\; f$,

$\square CF,AB \quad \square AF,CE + \square CG,AB.$

eritque $bx \;\infty\; ac + dx.$

$\square CG, AB$

Addatur utrinque dx,

$\square GF,AB$ seu $\square CF,AB - \square CG,AB \quad \square AF,CE.$

erit *per 16 sexti* $bx - dx \;\infty\; ac$

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB

Ex constructione est, ut $b - d$ ad c, ita a ad x:

Principium *Compositionis*.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstructa erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione GF est ad GH vel CE, sicut AF ad AB: erit [a] rectangulum sub extremis GF, AB æquale rectangulo sub mediis AF, CE. Quibus si addatur commune rectangulum sub CG, AB, erit [b] rectangulum sub tota CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. Porrò, quoniam ex similitudine triangulorum AFB & CFD, AF est ad AB, sicut CF ad CD: erit [c] rectangulum sub mediis CF, AB æquale rectangulo sub extremis, AF, CD. hoc est, [d] æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub AF, ED. Erat autem quoque rectangulum sub CF, AB æquale duobus

a *per 16 sexti.*
b *per 1 secundi.*
c *per 16 sexti.*
d *per 1 secundi.*

bus rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub AF, CE & sub AF, ED binis rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. A quibus si commune auferatur rectangulum sub AF, CE, erit etiam reliquum rectangulum sub AF, ED æquale reliquo rectangulo sub CG, AB.

e per 16 sexti. Vnde [e] ut AF ad CG, ita AB ad ED. Quod erat faciendum.

Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censeri possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potiùs quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hæc secundùm certas regulas reducatur resolvaturque, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterque per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraïcam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita, ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

Quæstio 44 primæ partis libri primi Exercita-

QVÆSTIO.

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 stufris, alterius 14 stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem face-

facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat? tionem nostrarum Mathematicarum.

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a,
& y cantharos secundi 14 stufr. seu b.

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c, & pretium 35 flor. vel 700 stufrorum, quo ipsum vendi debet, vocari d: erit $x + y \propto c$
& $x \propto c - y$.

Quæratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— a —————— x / facit ax. constant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— b —————— y / facit by. constant canthari secundi vini, in dolium infundendi

———— stufr.

eritque summa $ax + by \propto d$.

transf. by in alt. part.

$$ax \propto d - by$$

divid. utrinque per a

$$\text{fit } x \propto \frac{d - by}{a}.$$

Erat autem & $x \propto c - y$.

Quare erit $c - y \propto \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a

$$ac - ay \propto d - by$$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem

$$by - ay \propto d - ac$$

div. utrinque per $b - a$

& fit $y \propto \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

Quæstione hâc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. c. 80 Canth. seu, dolium
per a. 8 stufr.
fiunt ac. 640 stufr.
constat dolium plenum vino 8 stufrorum.

Subtr.
Ex d. 700 stufr. constat dolium plenum vino 8 & 14 stufrorum
ac. 640 stufr.
Relinq. $\overline{d - ac}$. 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stufr. & 14 stufrorum, quàm plenum solo vino 8 stufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 stufrorum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stufrorum, illorum loco sumptis.

stufr.
Ex b. 14
subtr. a. 8
$\overline{b - a}$. 6 stufr. — 1 — $d - ac$. 60 stufr. / facit $\frac{1d - 1ac}{b - a}$ seu 10 canth. 14 stufrorum $\infty\ y$

differentia pretii unius canthari — differentia pretii cantharorum in dolio

subtr.
c. 80 Canth. dolii
rel. $\overline{c - y}$. 70 canth. 8 stufrorum $\infty\ x$.

QVÆSTIO.

Quæstio 46 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriusque fructus 100 seu a simul pro $9\frac{1}{2}$ stufr. seu b habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu c offerantur 1 stufro seu d, & 25 pira seu e stufris 2 seu f, quæratur quanti jam constent assumpta x poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma *constant* stufr., *quanti constabunt* Poma stufr.

c ——— d ——————— x / facit $\frac{dx}{c}$. constant poma sumenda

Pira *constant* stufr., *quanti constabunt* Pira

e ——— f ——————— $a-x$ / facit. $\frac{fa-fx}{e}$. constant pira sumenda

$$\text{eritque summa } \frac{dex+cfa-cfx}{ce} \text{ stufr.} \infty\, b.$$

mult. utrinque per ce

$$dex+cfa-cfx \infty cbe$$

transf. cfa ad alt. partem

$$dex-cfx \infty cbe-cfa$$

div. utrinque per $de-cf$

$$\text{\& fit } x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}.$$

Ad fractionis hujus resolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Unde pro $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$ scribi poterit $x \infty \frac{cbe-cfa}{cg-cf}$ vel $\frac{be-fa}{g-f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be-fa}{g-f}$ scribi possit $x \infty \frac{be-eh}{g-f}$. Hinc si demum fiat, ut $g-f$ ad e, ita $b-h$ ad 4^{tam}, erit ea $\infty\, x$, quantitati quæsitæ sumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæstionis solutionem citra Algebram sequenti modo argumentandum esse inferunt

Poma stufr. Poma

c d e g

10 —— 1 —— 25 / facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 Poma.

subtr. f. 2 stufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $\overline{g-f}$. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Pira stufr. Pira Subtr.

e f a b. $9\frac{1}{2}$ stufr. constant 100 poma & pira simul

25 —— 2 —— 100 / facit h. 8 stufr. constant 100 pira

relinq. $\overline{b-h}$. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam,

qui-

quibus poma in centenario contenta cariora ſunt piris eorum loco ſumptis.

ſtufr. differ. Poma ſtufr. differ. Subtr.

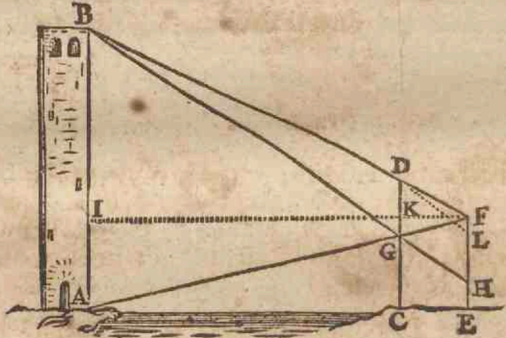
$g - f$ e $b - h$ a. 100

$\frac{1}{2}$ —— 25 —— $1\frac{1}{2}$ / facit x. 75 poma

& $a - x$. 25 pira.

PROBLEMA.

Metiri altitudinem turris A B, ut & diſtantiam A C, beneficio duorum baculorum C D, E F, datis G D ꝏ a, C E ꝏ b, & H F ꝏ c.



Eſto A C ꝏ x,

& A B ꝏ y.

Series *Analyſeos*.

Ductâ I F parallelâ A E, erit propter ſimilitudinem △rum A B F & G D F

ut A B ad I F vel A E, ita G D ad K F vel C E.

y —— $x + b$ —— a / b.

Ac proinde per 16 ſexti

by ꝏ $ax + ab$.

Eodem modo, erit propter ſimilitudinem △rum B D G & B F H

ut B D ad B F, ſive I K ad I F

hoc eſt, A C ad A E, ita G D ad H F.

x —— $x + b$ —— a / c.

Adeo-

Adeoque per 16 sexti

$$cx \infty ax + ab.$$

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \infty ab$.

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \infty \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Iam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia erit $by \infty cx$. Hoc est, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod si autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \infty \frac{abc}{c-a}$.

Vbi, si utrinque dividatur per b, invenietur $y \infty \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ H L æquali G D, junctaque D K, fiat ut $c - a$ ad a, hoc est, ut F L ad L H, sive F D ad D B, sive etiam F G ad G A, ita E C seu b ad C A seu x; & ita quoque F H seu c ad A B seu y.

Cujus demonstratio ex 2^da^ & 4^ta^ sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam D L ipsi B H parallelam secare proportionaliter rectas B F, F H, perinde ac D C, quæ ipsi A B est parallela, secat rectas A F, A E; ut & rectam F E eidem A B parallelam, facientem △^la^ similia G F H & G A B.

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

Esto G D $\infty a \infty$ 24

C E $\infty b \infty$ 30

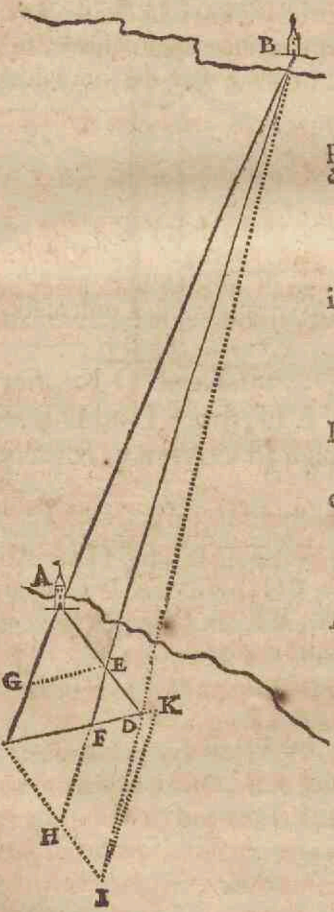
& H F $\infty c \infty$ 25

Vt F L ad L H
seu F D ad D B,
sive etiam F G ad G A,

$$1 \text{ —— } 24, \text{ ita} \left\{ \begin{array}{l} EC.\ 30 \\ FH.\ 25 \end{array} \right\} \text{ad} \left\{ \begin{array}{l} CA.\ 720. \\ AB.\ 600. \end{array} \right. \text{digit.}$$

PROBLEMA.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis $CA \infty a$, $AD \infty b$, $CD \infty c$, $AE \infty d$, & $CF \infty e$.



Esto $AB \infty x$.

Series *Analyseos*.

Ductâ GE parallelâ CD, fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ ADC & AEG,

ut A D ad D C, ita A E ad E G

$$b \text{ —— } c \text{ —— } d / \frac{cd}{b}:$$

itemque

ut A D ad A C, ita A E ad A G.

$$b \text{ —— } a \text{ —— } d / \frac{a}{b}.$$

Hinc propter similia

$\triangle^{la}$ CBF & GBE

erit ut

CF ad CB, ita GE add. A B. x

$$e \text{ — } a+x \text{ — } \frac{cd}{b} / \text{ad } GB.\ \frac{ad+bx}{b}$$

Ac proinde per 16 sexti erit

$\square$ CF, GB æquale $\square$ CB, GE

$$\frac{ade+bex}{b} \infty \frac{acd+cdx}{b}.$$

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade + bex \infty acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ sunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

fietque $bex - cdx \propto acd - ade$.

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

eritque $x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}$.

Iam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem resolvatur, simulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæsitam lineam A B seu x ex datis quàm brevissimè inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hisce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur esse d, ipsaque se ter prodat, ubi reliquæ non nisi bis offenduntur, faciendum est, ad deprimendas dimensiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem si fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$ seu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Vbi si demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam}: erit ipsa $\propto x$, hoc est, $\propto$ quæsitæ lineæ A B. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium seu proportionum inveniri posse, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus investiganda foret, si nullum in resolvenda hac fractione fieret discrimen.

Vbi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas esse resolubilem, quæ singulæ sicut præcedentes non præter unam dimensionem agnoscunt sive omnino simplices existunt. Nimirum considerando in duobus terminis reperiri cd, & in singulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, si planum cd in aliud transmutetur, cujus unum latus sit e, litera e sic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti possit. Ac proinde si statuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ scribi possit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Vnde si rursus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea $\propto x$, lineæ quæsitæ A B. Quæ quidem animadversio, cum in abstracto fiat nullâ factâ calculi relatione sive restrictione ad figuræ lineas, luculenter ostendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perspicientes hujus Geometriæ Methodum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixiùs explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsiti finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b, hoc est, ut A E ad A D sive C H ad C I, ita C F seu e ad C K seu f. Deinde fiat ut $f-c$ ad $c-e$, hoc est, ut K D ad D F sive I D ad D B, ita C A seu a ad A B seu x.

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hîc exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cùm præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Vnde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundùm superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

Esto

pedum

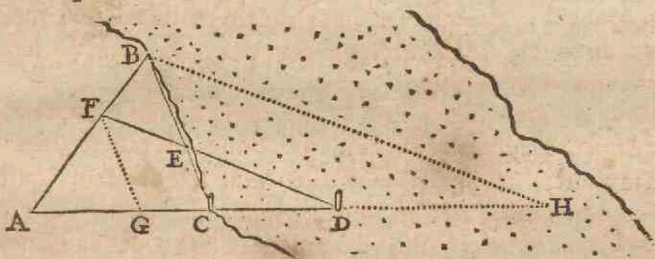
Esto CA ∞ a ∞ 450
AD ∞ b ∞ 390
CD ∞ c ∞ 420
AE ∞ d ∞ 225
& CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
Vt AE ad AD,
sive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{5}$

CD. 420
subtr. CD. 420 subtr. CF. 252 ped.
Deinde, ut DK. $16\frac{4}{5}$ ad FD. 168, ita CA. 450 / ad AB. 4500.
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG
a —— b —— x / $\frac{bx}{a}$.

 Item.

Itemque

ut A B ad A C, ita A F ad A G $\quad$ A C $\quad$ G C

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$. quæ ſubducta ex c, relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.

Hinc propter ſimilia $\triangle^{la}$ C E D & G F D erit

ut E C ad C D, ita F G $\quad$ add. C D. d

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad G D. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per 16 ſexti

$\square$ E C, G D $\quad$ $\square$ CD, FG

$$\frac{dae+cae-cex}{a} \propto \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae+cae-cex \propto dbx$$

add. utrinque cex

$$dae+cae \propto dbx+cex$$

div. utrinque per $db+ce$

& fit $\frac{dae+cae}{db+ce} \propto x$.

Ad reſolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur f: eritque $fe \propto db$, adeoque $x \propto \frac{dae+cae}{fe+ce}$ ſeu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a, ita $d+c$ ad x. Quod ipſum docet, ut ex datis lineis inveſtigetur quæſita linea A F, ducendam eſſe ex B lineam B H ipſi F E D parallelam, donec occurrat productæ A C D in H. Cum enim ſtatuendum ſit ut e ad d, hoc eſt, ut C E ad C D, ita b ſeu C B ad 4^{tam} f: patet hanc fore ipſam C H. Ac proinde ſi porrò fiat ut $f+c$ ad a, hoc eſt, ut A H ad A B, ita $d+c$ ſeu A D ad x: manifeſtum eſt inveniri hinc quantitatem quæſitæ lineæ A F; ita ut hîc ſicut in duobus præcedentibus Problematis demonſtratio ex ſola proportionalium applicatione per ſe perſpicua ſit.

Quòd ſi autem quis alio operandi modo aut etiam eodem ſed aliarum linearum ductu quæſitam lineam A F invenire deſideret, obſervare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata ſunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliiſve, non parvi uſus exiſtat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludoſis à certo puncto

puncto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hic explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius A C à C usque ad D definienda esse recta C D, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque A B C, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur A B, B C, A C, & C E, sitque, ex. gr., A B ∞ a ∞ 15, B C ∞ b ∞ 13, A C ∞ c ∞ 14, & C E ∞ e ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ C D ∞ d ∞ 10 quærere longitudinem lineæ A F, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

```
CE    CD    CB                                Add.
 5 —— 10 —— 13/ad CH. 26                     AC. 14
            add. AC. 14        AB            CD. 10
                 AH.40 ——————  15 ——————  AD.24/ad AF. 9.
```

Hinc si ab A versùs B in recta A B mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius A C progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius F E, recta C D tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura. qualis requirebatur.

Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adeat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

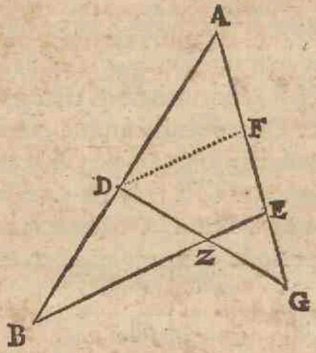
PROBLEMA,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata XI[mi] *Capitis* I[mi] *libri Almagesti* PTOLEMÆI *inventa fuerint seu inveniri possint.*

In rectas A B, A G ductis utcunque rectis B E, D G, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio G D ad D Z,

ut

ut a ad b, nec non ratio Z B ad B E, ut c ad d: oporteatque invenire rationem G A ad A E.



Series *Analyseos*.

Esto G D $\infty\ a$
D Z $\infty\ b$, eritque Z G $\infty\ a - b$
B Z $\infty\ c$
B E $\infty\ d$, eritque Z E $\infty\ d - c$
A G $\infty\ x$
& A E $\infty\ y$, eritque E G $\infty\ x - y$.

Ductâ D F parallelâ B E, erit per 2 sexti

ut G Z ad Z D, ita G E Ex A E. y
$a - b$ —— b —— $x - y$ / ad E F. $\dfrac{bx - by}{a - b}$ } subtr.

rel. A F. $\dfrac{ay - bx}{a - b}$.

Tum fiat propter similia $\triangle^{la}$ G Z E & G D F
ut G Z ad Z E, ita G D
$a - b$ — $d - c$ —— a / ad D F. $\dfrac{ad - ac}{a - b}$.

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine $\triangle^{lorum}$ D A F & B A E
ut D F ad A F, ita B E ad A E
$\dfrac{ad - ac}{a - b}$ — $\dfrac{ay - bx}{a - b}$ —— d / y

Et fit per 16 sexti
$$\frac{ady - acy}{a - b} \infty \frac{ady - bdx}{a - b}.$$

Hoc est, omisso communi denominatore $a - b$
erit $ady - acy \infty ady - bdx$.

Vnde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde translatis, ut signo + adficiantur
habebitur $bdx \infty acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur
ut x ad y, ita ac ad bd.

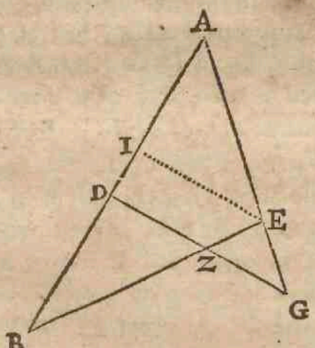
Quod

Quod ipſum docet, rationem quæſitam G A ad A E ſeu x ad y eſſe compoſitam ex ratione G D ad D Z ſeu a ad b, & ex ratione Z B ad B E ſeu c ad d, id eſt, rationem G A ad A E per 23 ſexti eſſe eandem, quàm rectanguli ſub G D, B Z ſeu ac ad rectangulum ſub B E, D Z ſeu bd. Atque ita conſtat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit ſeu inveniri poſſit. Id autem ex Rheinoldi verſione ita ſonat.

In duas rectas lineas A B & A G deductæ duæ rectæ ”
lineæ B E & G D ſecent ſe mutuò in puncto Z. Dico ”
quòd ratio G A ad A E compoſita eſt ex ratione G D ad ”
D Z, & ex ratione Z B ad B E. ”

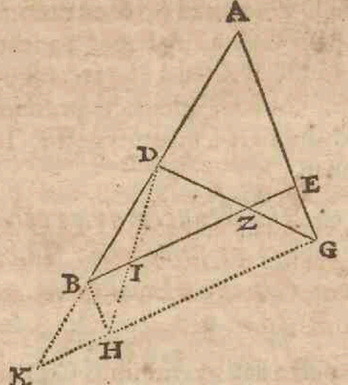
Hinc poſtquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipſius G A ad A E, utpote quæ ex datis hiſce rationibus eſt compoſita: haud inutile fuerit, ſi ulteriùs hîc oſtendam, quibus datis lineis hæc quæſita ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem ſi inventa ratio ac ad bd ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri poteſt, ſumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæſita ratio in ſimpliciſſimis terminis.



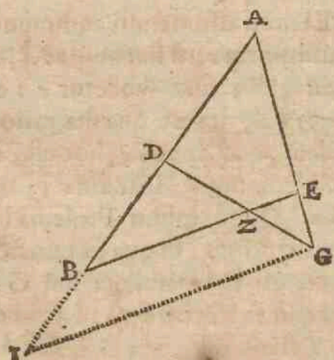
Etenim aſſumendo communem altitudinem c, ſi fiat ut c ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur e: erit ce ∞ bd, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ ac ad ce, hoc eſt, rejectâ communi altitudine c, ut a ad e. Quod ipſum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta eſt E I parallela ipſi G D. Si enim in ea fiat ut c ad d, id eſt, ut Z B ad B E, ita D Z ſeu b ad 4^{tam} e, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I ſeu a ad e quæſitam rationem manifeſtet, eandem quippe quæ eſt ipſius G A ad A E. Vt patet ex 4^{ta} ſexti, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E.

Sic etiam aſſumendo communem altitudinem a, ſi fiat ut a ad b,



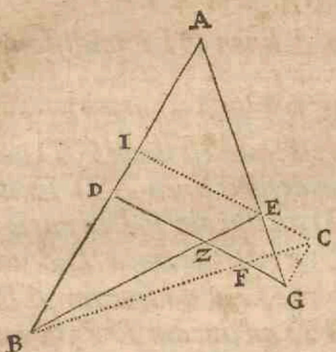
hoc eſt, ut D G ad D Z, ita H G vel B E ſeu *d* ad 4^{tam}, quæ vocetur *f*: erit ea ∞ Z I. Et fit *af* ∞ *bd*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *ac* ad *af*, hoc eſt, rejectâ *a* communi altitudine, eadem quæ *c* ad *f* ſeu B Z ad Z I. Hanc autem eandem eſſe, quam ipſius G A ad A E, ita patet.

Productis namque A B, G H donec coëant in K, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ B D Z, K D G, lineamque D H ſimiliter in utroque ductam, ut B Z ad Z I, ita K G ad G H ſeu B E. Vt autem K G ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ K A G & B A E, quoque G A ad A E. Quare etiam B Z ad Z I erit, ut G A ad A E. Vnde liquet, ſi *a* pro communi altitudine ſumatur, ducendam eſſe ex G rectam G H ipſi B E parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipſi A G parallelæ in H: eritque, junctâ H D, B Z ad Z I ratio quæſita.



Haud ſecus, ſi aſſumatur communis altitudo *b*, fiatque ut *b* ad *a*, hoc eſt, ut Z D ad D G, ita B Z ſeu *c* ad 4^{tam}, quæ vocetur *g*: erit ea ∞ I G. Et fit *bg* ∞ *ac*, ita ut quæſita ratio G A ad A E eadem ſit, quæ *bg* ad *bd*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *b*, eadem quæ *g* ad *d* ſeu I G ad B E. ut patet ex ſimilitudine $\triangle^{\text{rum}}$ I A G & B A E. Quod ipſum arguit, ſumendo *b* pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G I ipſi B E parallelam, donec occurrat productæ A B in I, ut habeatur ratio quæſita I G ad B E.

Nec

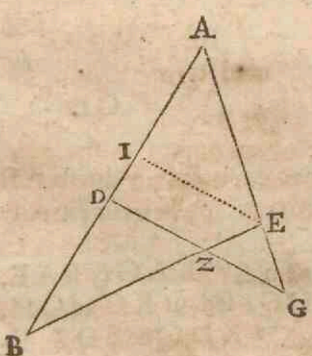


Nec aliter fit, si, assumptâ communi altitudine *d*, fiat ut *d* ad *c*, hoc est, ut B E ad B Z, ita G D vel I C seu *a* ad 4^tam^, quæ vocetur *h*: erit ea ∞ D F. Et fit *dh* ∞ *ac*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *dh* ad *bd*, hoc est, rejectâ communi altitudine *d*, eadem quæ *h* ad *b* seu D F ad D Z.

Hanc autem eandem esse, quam G A ad A E, ita patet.

Est enim, propter similitudinem △^rum^ B D F & B I C, lineamque B E in utroque similiter ductam, ut D F ad D Z ita C I seu D G ad I E. Vt autem D G ad I E, ita est, propter similitudinem △^rum^ D A G & I A E, G A ad A E. Quocirca & D F ad D Z erit, ut G A ad A E. Atque ita liquet, sumendo *d* pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam G C ipsi B A parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi D G parallelæ in C, rationem quæsitam esse D F ad D Z.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hîc subjungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hîc adhibere atque patefacere.



Vt supra est
ZB BE DZ IE
c——*d*——*b* / *e*
& *ce* ∞ *bd*.

Ratio
GA ad AE
ac .... *bd*
vel *ac* .... *ce*
seu GD EI
a .... *e*
DZ BE
med. term. *b* *d*.
ZB
c

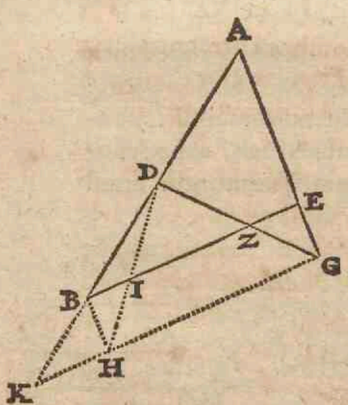
 De-

Demonſtratio PTOLEMÆI.

„ *Ducatur enim per punctum E linea E I æquidiſtans*
„ *lineæ G D.*

„ *Quoniam igitur lineæ G D & E I ſunt æquidiſtantes,*
„ *ratio lineæ G A ad A E eadem eſt, quæ eſt lineæ G D ad*
„ *lineam E I. Adſumatur autem deforis linea Z D. Erit*
„ *igitur compoſita ratio lineæ G D ad lineam E I ex ratio-*
„ *ne lineæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ D Z ad*
„ *lineam E I. Quare & ratio lineæ G A ad lineam A E*
„ *compoſita eſt ex ratione lineæ G D ad lineam D Z, & ex*
„ *ratione lineæ D Z ad lineam E I. Eſt autem & ratio*
„ *lineæ D Z ad E I eadem rationi lineæ Z B ad lineam*
„ *B E, cum æquidiſtantes ſint lineæ E I & Z D. Ratio igi-*
„ *tur lineæ G A ad lineam A E compoſita eſt ex ratione li-*
„ *neæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ Z B ad li-*
„ *neam B E. Quod erat demonſtrandum.*

Aliter.



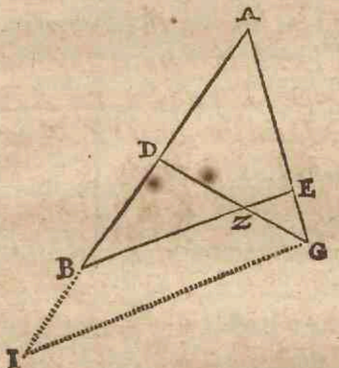
Vt ſupra eſt — Ratio
GD DZ BE vel HG ZI — GA ad AE
a—*b*——*d* / *f* — *ac* ...... *bd*
& *af* ∞ *bd*. — vel *ac* ...... *af*
BZ ZI
ſeu *c* ...... *f*
BE vel HG DZ
med. term. *d*. *b*.
GD
a.

Ductâ G K parallelâ ipſi B E, donec occurrat productæ A B in K, agatur B H æquidiſtans A G, occurrens ipſi K G in H, jungaturque H D, ſecans B E in I.

Quoniam itaque, propter ſimilitudinem Δ^{rum} K A G & B A E, G A eſt ad A E, ſicut K G ad B E vel H G; ſed ut K G ad G H, ita quoque eſt, propter ſimilitudinem Δ^{rum} K D G & B D Z, lineamque D H in utroque ſimiliter ductam, B Z ad Z I. Quare etiam

etiam erit G A ad A E, ſicut B Z ad Z I. Hinc aſſumpta forinſecus lineâ B E, quoniam ratio B Z ad Z I compoſita eſt ex ratione B Z ad B E, & ex ratione B E vel H G ad Z I, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ H D G & I D Z, ex G D ad D Z: erit perinde ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione G D ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Adhuc aliter.

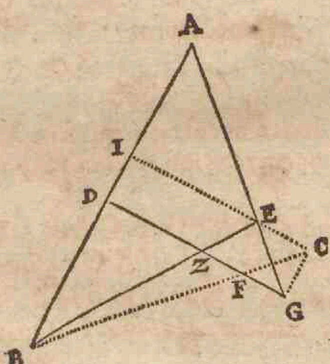


Vt ſupra eſt
DZ GD BZ IG
b——*a*——*c* / *g*
& *bg* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *bg* ...... *bd*
IG BE
ſeu *g* ...... *d*
GD BZ
a *c* med. ter.
DZ
b

Etenim ductâ G I parallelâ B E, uſque dum occurrat productæ A B in I: erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ I A G & B A E, ut G A ad A E, ita I G ad B E. Hinc cum, aſſumptâ forinſecus rectâ B Z, ratio ipſius I G ad B E compoſita ſit ex ratione I G ad B Z, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ I D G & B D Z, ex G D ad D Z, & ex ratione B Z ad B E: erit pariter ratio G A ad A E ex iiſdem rationibus compoſita. Quod erat oſtendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Vt ſupra eſt
BE BZ GD DF
d — *c* — *a* / *h*
& *dh* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac .... *bd*
vel *dh* .... *bd*
DF DZ
ſeu *h* .... *b*
BZ
c DG vel IC
a med. ter.
BE
d.

 Ductâ

Ductâ G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectæ I E C ipsi D G parallelæ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2do PTOLEMÆI Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

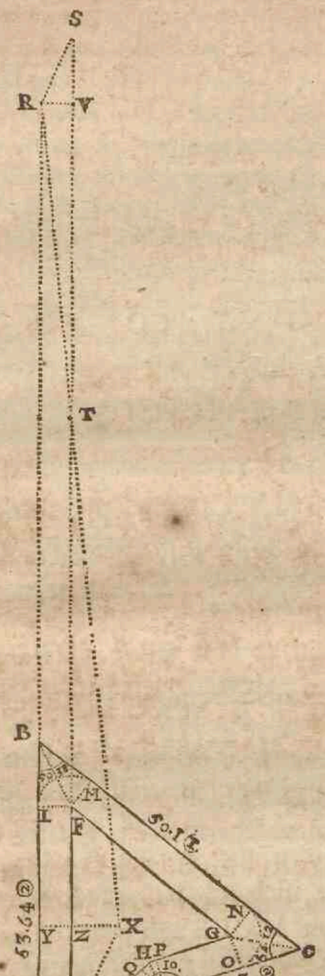
Vnde constat, præsuppositâ Algebræ cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cujusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebræ sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

PROBLEMA.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem resecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo dissitis.

Junctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata,



drata, quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per* 47 *primi Elementorum* ſunt æqualia, erunt & ipſa inter ſe æqualia. Eſt autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia ſint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per* 8 *primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam diviſus. Haud ſecus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam diviſos eſſe.

Series *Analyſeos.*

Eſto A B ∞ *a*
B C ∞ *b*
C D ∞ *c*
D A ∞ *d*
& E I, F L, F M, G N, G O,
D P, D Q, vel E K ∞ *x*.

Iam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum ſemiſſes dati ſint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hoſce conſtitutorum data quoque ratio laterum.

Pona-

Ponatur itaque E I ad I A vel E K ad K A esse, ut e ad f
FL ad L B vel F M ad M B, ut e ad g
G N ad N C vel G O ad O C, ut e ad h
& D P ad P H vel D Q ad Q H, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$
FL vel F M LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$
GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x / ad $\frac{hx}{e}$
DP vel D Q PH vel H Q
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$

Additis jam A I, A K, L B, B M, N C, C O, si ipsarum summa $\frac{2fx + 2gx + 2hx}{e}$ auferatur ex $a + b + c + d$, summa laterum A B, B C, C D, & D A, relinquetur $a + b + c + d \frac{- 2fx - 2gx - 2hx}{e}$, summa rectarum I L, M N, O D, & D K, id est, ipsarum E F, F G, G P, & Q E. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum P H, H Q, erit $a + b + c + d \frac{- 2fx - 2gx - 2hx + 2ix}{e}$ summa laterum internorum E F, F G, G H, & H E. Porrò quoniam portio abscindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi potest, cujus duo latera sunt parallela, fit ut si A B, B C, C D, & D A in rectam lineam A R junctim collocentur, ut & E F, F G, G H, & H E in rectam lineam E T, trapezium A R T E ipsi portioni abscindendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo scilicet latera parallela A R & E T, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudinem E I seu x, habebitur æquatio inter $ax + bx + cx + dx \frac{- fxx - gxx - hxx + ixx}{e}$ & k, id est, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \propto \frac{aex + bex + cex + dex}{f + g + h - i} - \frac{ke}{f + g + h - i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæſitâ E I manifeſtè majorem, idcirco meritò hîc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis E I vel E K, F L vel F M, G N vel G O, & D P vel D Q deſcriptis circulis rectæ A I vel A K, L B vel B M, N C vel C O, & P H vel H Q tangentes ſunt complementorum ſemiſſium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, ſi *e* pro radio ſumatur, ipſæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes deſignent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum ſit, à quibus hujuſmodi portio reſecari debet: haud difficulter poterimus, ſi angulos A, B, C, ſimilesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujuſce generis exiſtunt, atque præter æquationis conſtitutionem ſpectemus inſuper, quænam ad illam reſolvendam ſive ad quæſitam latitudinem ex ea obtinendam ſint facienda, regulam inde generalem formare, quæ ſic ſe habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur ſumma per radium 100000, productumque dividatur per ſummam tangentium, angulorum qui ſemiſſium datorum ſunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes ſunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni exiſtunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abſcindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam ſummam vel differentiam tangentium, & fit ſecundum inventum. Quo ſubducto à quadrato ſemiſſis primi inventi, ſi reliqui radix ab eodem ſemiſſe auferatur, relinquetur latitudo quæſita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propoſitum ſolvendum ſit, ipſius veritas ex ſequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm eſt aliena, manifeſta fiet; ſi modò ibidem conſideraverimus, completo parallelogrammo A R S E, productisque A E, R T donec coëant in X, rectam S T, duplum ſupra dictæ ſummæ vel differentiæ tangentium referre, atque demiſſis perpendicularibus R V & X Y rectam S T ad R V, ob ſimilitudinem triangulorum S T R & A R X, eam habere rationem, quam A R habet ad X Y.

Angul.
A. 50. 0′ Add.
semissis. 25.0′, ejus Tang. Compl.
B. 50.38′ A I vel A K est 214451
semissis. 25.19, ejus Tang. Compl.
C. 54.12′ L B vel B M est 211392
semissis. 27. 6, ejus Tang. Compl.
N C vel C O est 195417
D. 205.10′ 621260 } subtr.
semissis. 102.35, ejus Tang. Compl.
P H vel H Q est 22322
differentia 598938

Add.		
A B.	53	64
B C.	50	1
C D.	21	07
2 Rad. R V. D A.	24	8

partes S T. 1197876—100000—AR. 149,61 (2)
multipl.
A R. 14961 (2)
ad X Y. 1249 (2).
134649
59844
29922
14961
product. 1868|6289 (4)

Vt △ A R X seu ½ XY, AR ad □ X Y seu X Y, X Y, vel, relicta communi altitudine X Y ut ½ A R ad X Y, sive etiam, propter simil. △^{rum} S T R & A R X ut ½ S T ad R V, ita

semissis seu triang. A R X. 934|3144 (4)
subtr. part. resec. seu trap. A R T E. 600
598938—100000—rel. triang. E T X. 334|3144 (4)/ad □ X Z. 55|81|78 (4)
eritque X Z. 7|4|7 (2).

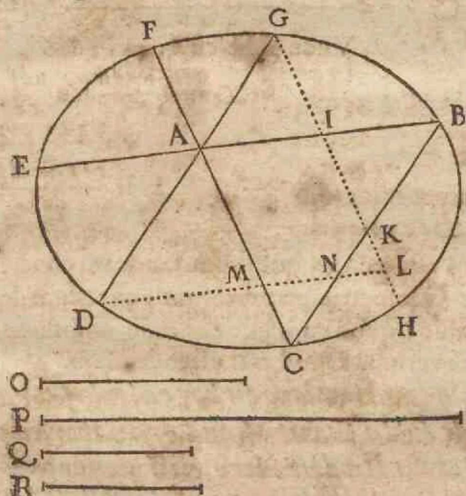
Hinc subducta X Z seu 747 (2) ex X Y seu 1249 (2), relinquetur 502 (2) pro Y Z latitudine quæsita portionis abscindendæ.

Cæterùm cum non absimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abscindi possit, aut etiam quæ ipsius figuræ certam partem sive partes contineat, lineis quibusdam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem æquali intervallo distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, præsertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectantes jam sæpiùs in Lectionibus nostris Publicis abundè pertractaveriverimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Problematis pag. 372 ut concessum supponitur.

Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaque post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè resoluto corroborâssem: visum fuit calculum è quo eandem resolutionem tunc deprompsi hîc in medium afferre, ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ob oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370 ulteriùs sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.



Assumpto quæsito ut vero, hoc est, C A esse ad A F, sicut C B ad A G ducatur porrò D L parallela A B, secans C A, C B in M & N, ac occurrens ipsi G H in L, ponaturque D A $\infty\, y$.

Deinde calculus sic procedat

Ex assumptione est

CA AF CB AG

c — d — b / ad $\frac{db}{c} \infty\, z$.

Ex similitudine △lorum B A C & A I G est

BC CA AG GI

b — c — $\frac{db}{c}$ / ad d. Vnde IK erit $\infty\, c - d$. pro qua brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione G I inveniri æqualem F A, item-

itemque

CA AB GI IA

$c - a - d$ / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

1* Ex similitudine $\triangle^{rum}$ CAB & KIB est

AE. e

EI. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

$c - a - f$ / ad IB. $\frac{af}{c}$

*2

□EIB. $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

$a - e - b$ / ad $\frac{eb}{a} \propto y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3^{tii} Conicorum Apollonii, proportionalia sunt

□FAC □GKH □DAG □CKB

$dc - cx - yz - bz - zz$

seu, rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK

FA KH DA KB

$d - x - y - b - z$

hoc est, restitutis valoribus ipsarum y & z

$d - x - \frac{cb}{a} - \frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

Vnde KH seu x, per 16. 6^{ti},

fit $\propto \frac{acd-add}{ce}$ seu $\frac{adf}{ce}$

add. IK. f.

IH. $\frac{cef+adf}{ce}$

Denique ex natura Ellipsis, per 17. 3^{tii} Conicorum Apollonii,

□GIH est ad □FAC.

Seu, propter rectas GI, FA, supra æquales,

IH ad AC, ut □EIB ad □EAB.

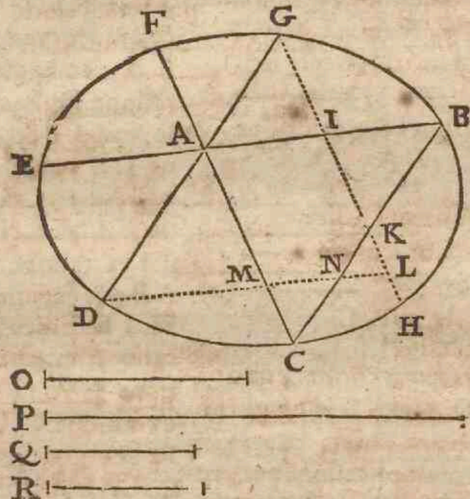
$\frac{cef+adf}{ce} - c - \frac{ceaf+adaf}{cc} - ea$

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \propto ace+aad$.

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenerimus, quæsitum illud, quod cum hoc concesso omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supradicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hîc ulteriùs ita disponere, dictamque resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuivis sedulò hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat. Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas conficiendi, sub-

subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unicè studuisse videntur, quò sua inventa eorumque demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione

CA AF CB AG

c —— d —— b / ad $\frac{db}{c} \infty z$

Et permutando per 16. 5

CA CB AF AG

c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$

Ex similitudine Δ^{rum} BAC, AIG

BC CA AG GI

b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5

CA CB GI AG

c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$

Quoniam igitur supponitur C A esse ad A F, sicut C B ad A G; erit etiam permutando C A ad CB. sicut A F ad A G.

Iam quia, ex similitudine Δ^{rum} BAC & AIG, B C est ad C A, sicut A G ad GI; & convertendo C A ad C B, sicut G I ad A G: erit A F per 9. 5^ti^ ipsi GI æqualis. Eodem modo æquales erunt E A & DM.

Quia hîc ex assumptione reperitur G I exprimi per eandem quantitatem quam A F, colligitur inde ipsas æquales esse. Haud secus æquales erunt E A & D M.

Ex

Ex hypothesi

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3^{tii} Conicorum Apollonii

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc — cx — yz — bz — zz

H.e., rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK,

FA KH DA KB

d — x — y — b — z

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

ceb ——— afb

. KH ce ——— af

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Porrò cum ex natura Ellipsis ▭ FAC sit ad ▭GKH, seu, propter rectarum AC, GK æqualitatem, FA ad KH, sicut ▭ DAG ad ▭CKB, h.e., propter æqualitatem rectarum AG, CK, ut DA ad KB; & quidem ratio DA ad KB, composita sit ex ratione DA ad CB seu EA ad AB, & ex ratione CB ad KB seu CA ad IK: erit quoque ratio FA ad KH composita ex ratione EA ad AB, & ex ratione CA ad IK. Ideoque cum ratio composita ex ratione EA ad AB, & ex ratione CA ad IK, sit ea, quam habet ▭CAE ad ▭KI,AB: erit similiter ratio ipsius FA ad KH ea, quam habet ▭ CAE ad ▭KI, AB.

Iam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius DA ad KB in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgo fit) omnino sit Algebraïca: calculum hîc apponam è quo ipsæ DA & KB resultant.

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

c — f — b / ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

e — a

CA IK

23.6. c — f

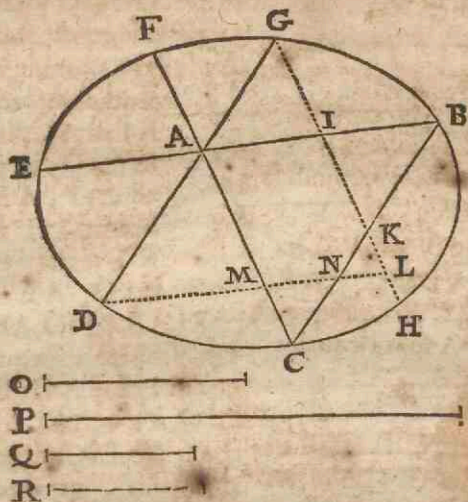
▭CAE ▭KI,AB

ce — af

Vbi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus BC ipsis AD & KB præcedat, quod ratio ipsius AD ad KB, per hujus BC interpositionem, sit composita ex ratione AD ad BC seu EA ad AB, hoc est, e ad a, & ex ratione BC ad KB seu CA ad IK, hoc est, c ad f. Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23. 6, sit eadem rationi, quam habet ▭CAE ad ▭KI,AB, seu ce ad af: erit quoque

que

que ratio ipsius F A ad K H seu d ad x eadem, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B, seu ce ad af.



Ad comparandam I H cum A C, quia, inventâ K H ∞ $\frac{adf}{ce}$, ad K H addi priùs debet I K ∞ f, ut habeatur I H ∞ $\frac{cef + adf}{ce}$, sed hoc pacto ratio ipsius I H ad A C non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsivi priùs rationem ipsius I H ad I K; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius I H ad A C, ut sequitur.

Esto K I ad F A, K H
f ——— d x
ut O ad C A.
3* $\frac{cef}{d}$ ——— c
Mult. per A E. e . . . . e
hoc est, ut ▭ O, A E ad ▭ C A E ▭ K I, A B
per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ——— ce . . . . . . af

Vnde ex æquo & per compositionem rationis conversam erit
Vt K I + K H seu I H ad K I,
$f + x$ ——— f
sic ▭ O, AE + ▭ KI, A B ad ▭ O, AE.
$\frac{cef}{d} + af$ ——— $\frac{cef}{d}$

Esto jam KI ad F A, sicut linea O ad C A. Vnde, assumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad F A, sicut ▭ sub O & A E ad ▭ C A E. Erat autem F A ad K H, sicut ▭ C A E ad ▭ K I, A B. Quare ex æquo erit ut K I ad K H, sic ▭ O, A E ad ▭ K I, A B; & per compositionem rationis conversam K I + K H seu I H ad K I, sicut ▭ O, A E + ▭ K I, A B, ad ▭ O, A E.

Sit

IH Sit KI ad AC, ut O ad P. 4*

$f+x$ . . . . f —— c

$\frac{cf}{d}$ —— $\frac{cc}{d}$

Mult. per AE. e . . . . e

hoc est,

□O,AE+□KI,AB ut □O,AE ad □P,AE

$\frac{cef+adf}{d}$ . . . . $\frac{cef}{d}$ —— $\frac{cce}{d}$

Vnde ex æquo erit ut IH ad AC, ita □O,AE+□KI,AB ad □P,AE.

Sed ut IH ad AC, ita quoque est propter rectas IG & FA supra æquales mult. per IG . . . . . . FA

per 1.6. □GIH ad □FAC, hoc est, per 17.3[tii] Conic. Apoll., ut □EIB ad □EAB

Quocirca erit ut □O,AE+□KI,AB ad □P,AE, ita □EIB ad □EAB.

Deinde sit ut KI ad AC, ita O ad P. Vnde, assumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad AC, sicut □O,AE ad □P,AE. Sed ut IH ad KI, ita est □O,AE+□KI,AB ad □O,AE. Quapropter ex æquo erit ut IH ad AC, sic □O,AE+□KI,AB ad □P,AE. Cum verò rursus, ut ante, □GIH sit ad □FAC, sicut □EIB ad □EAB; & quidem IG & AF, ut supra, æquales sint ostensæ: erit quoque IH ad AC, sicut □EIB ad □EAB. Vt autem IH ad AC, sic quoque erat □O; AE+□KI,AB ad □P,AE. Quocirca erit ut □O,AE+□KI,AB ad □P,AE ita □EIB ad □EAB.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q

e —— a —— f / $\frac{af}{e}$. 5*

eritque per 16.6. □KI,AB ∞ □Q,AE. Adeoque ut

□O,AE+□KI,AB, seu Q,AE ad □P,AE, hoc est, rejectâ communi altitudine AE,

ut O+Q ad P, sic □EIB ad □EAB.

$\frac{cf}{d}+\frac{af}{e}$ —— $\frac{cc}{d}$ —— $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ —— ea

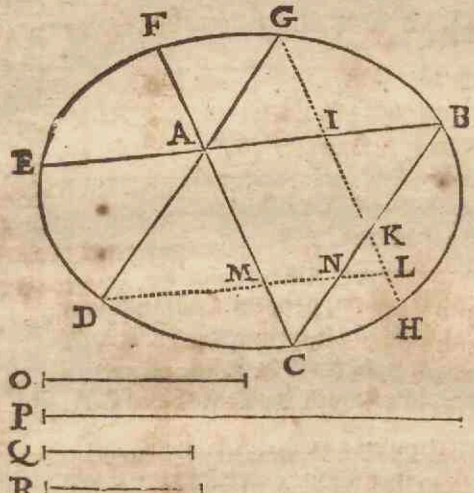
Fiat jam ut AE ad AB, ita KI ad Q: eritque □KI,AB æquale □Q,AE. Hinc ut □O,AE plus □KI,AB seu Q,AE, ad □P,AE, hoc est, destruendo communem altitudinem AE, ut O+Q ad P, sic □EIB ad □EAB.

Explicita itaque est ratio, quam habet □GIH ad □FAC, quippe ostensa est eadem quæ ipsius IH ad AC, seu O+Q ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter ▭ EIB & ▭ EAB.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^{or} dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem absolvatur.



EI seu EA + AI   EA

$\frac{ce+ad}{c}$ ——— e

23.6   IB   AB

$\frac{af}{c}$ ——— a

▭ EIB seu ▭ sub EA + AI in IB   ▭ EAB

$\frac{ceaf+adaf}{cc}$ ——— ea

Vt EI seu EA + AI est ad EA,

$\frac{ce+ad}{c}$ ——— e

Mult. per CA. c c

sic ▭ EA, CA + ▭ AI, CA est ad ▭ CAE.

$ce+ad$ ce

Vel, si pro ▭ EA, CA, propter similitudinem Δ^{rum} CAB & AMD, ubi CA est ad AB,

Porrò quoniam ratio ▭^{li} EIB ad ▭ EAB composita est ex ratione EI seu EA + AI ad EA, & ex ratione IB ad AB; & quidem EA + AI ad EA, si com-

ſicut A M ad MD ſeu E A ſcribatur ▭B A M,
ſicut ▭ B A M + ▭ C A I ad ▭ B A M.
Vel rurſus, ſi pro ▭C A I, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B A C & A I G, ſcribatur ▭ B A, G I, ſicut ▭ B A M + ▭ B A, G I ad ▭ B A M,

Vide ſupra ad notam 1 *

hoc eſt, relictâ communi altitudine B A, ſicut A M + G I, hoc eſt, G L ad A M.

Vt I B eſt ad A B,

$\frac{af}{c}$ ——— a

Mult. per C A

c c

ita ▭I B, C A eſt ad ▭ C A B.

af ——— ca

Vel, ſi pro ▭I B, C A, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ C A B & K I B, ſcribatur ▭ K I, A B, ſic ▭ K I, A B, ad ▭ C A B, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſicut K I ad C A.

Vide ſupra ad notam 2 *

communis aſſumatur altitudo C A, ſit ſicut ▭CAE, ſeu B A M, + ▭C A I ſeu B A, G I ad ▭C A E ſeu B A M, hoc eſt, relinquendo communem altitudinem B A, ſicut A M + G I ſeu G L ad AM; at verò I B ad A B, ſicut ▭I B, C A ſeu K I, A B ad ▭ C A B, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A B, ſicut K I ad C A: Erit quoque ratio ▭^{li} E I B ad ▭E A B, hoc eſt, ipſius O + Q ad P, compoſita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Conſtat igitur, rationem ▭^{li} E I B ad ▭E A B ſeu ipſius O + Q ad P eſſe compoſitam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Iam quia ſuperior ratio ipſius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipſi ductæ ſunt, reſpondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, ſi cum ratione G L ad A M, aut K I ad C A confertur, ex his compoſitam eſſe, quemadmodum ex aſſumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

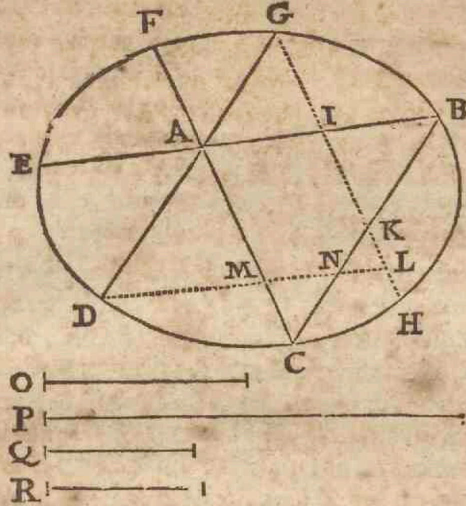
K I ad Q, ſic F A ad R.

f —— $\frac{af}{c}$ —— d/ $\frac{ad}{c}$. 6*

eritque, per 16. 6^{ti},

▭K I, R ꝏ ▭ Q, F A.

Denique fiat ut K I ad Q, ſic F A ad R: eritque ▭K I, R æquale ▭ Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Vt O + Q est ad P,

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$

Mult. per FA. d. . . . . . d

ad P, assumendo communem altitudinem FA, sit sicut ▭ O, FA seu KI, CA, + ▭lo Q, FA seu KI,

sic ▭ O, FA seu KI, CA, + ▭ Q, FA seu KI, R est ad ▭ P, FA seu □ CA.

Vide supra ad notam 3 *

$cf + \frac{daf}{e}$ ——————— cc

Cur ▭ P, FA sit ∞ ▭ CA, ita concluditur

3 * Est namque KI ad FA, ut O ad CA;

f —— d —— $\frac{cf}{d}$ —— c

& convertendo

FA ad KI, CA

d —— f c

ut CA ad O. P

c —— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$

Vnde ex æquo erit

ut FA ad CA, ita CA ad P.*

d —— c —— c —— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17. 6ti, ▭ P, FA ∞ □ CA.

Vide supra ad notam 4*.

Rad ▭ P, FA seu □ CA: Erit ratio composita ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA eadem rationi ▭li KI, CA + ▭ KI, R ad □ CA, hoc est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA. Ideoque si communis auferatur

	KI	CA
	f ————	c
23.6.	CA + R	CA
	$c+\frac{ad}{e}$ ————	c
	□KI,CA + □KI,R	□CA
	$cf+\frac{daf}{e}$ ————	cc

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA + R ad CA hoc est, erit GL ad AM, ut CA + R ad CA. Quod verum esse deinceps sic ostenditur.

Hinc cum ratio □^{li} GIH ad □ FAC sive ipsius IH ad AC eadem sit ostensa quæ ipsius O + Q ad P, & hæc rursus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA; at verò ratio □^{li} EIB ad □ EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: sequitur, si ratio □^{li} GIH ad □ FAC (quemadmodum suppositum fuit) eadem sit rationi □^{li} EIB ad □ EAB, rationem compositam ex KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA debere quoque eandem esse rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, si utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA + R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per se evidens sit, superest ut ipsum sequenti argumentatione resolvamus atque penitus manifestum reddamus.

Ex similitudine △^{lorum} ABC & MDA est
AB AC MD seu AE MA seu IL
a —— c ———— e / ad $\frac{ce}{a}$. Vnde GL fit ꝏ $d+\frac{ce}{a}$.

Ex similitudine △^{lorum} ABC & IAG est
BA AC AI IG seu AF
a —— c —— $\frac{ad}{c}$ —— d

Ac proinde, per 16.6^{ti}, □ BAF ꝏ □ CAI.
Ex similitudine △^{lorum} GLD & AMD est
GL ad AM,
$d+\frac{ce}{a}$ —— $\frac{ce}{a}$

Quoniam enim, propter similitudinem triangulorum GLD & AMD, est ut GL ad AM ita DL seu EI ad

DM

ſicut D L ſeu E I ad D M ſeu E A ;

$e + \frac{ad}{c}$ ——— e

mult. per C A. c c

Vel per 1. 2di ſicut ▭ E I, C A ſeu C A E + C A I ſeu AE, R ad ▭ CAE.

$ce + ad$ ——— ce

hoc eſt, relictâ communi altitudine A E ſicut C A + R ad C A.

D M ſeu E A ; ut autem E I ad E A, ita, aſſumptâ communi altitudine C A, ▭ E I, C A ſeu C A E plus ▭ C A I ſeu A E, R eſt ad ▭ C A E : Erit ut G L ad A M, ita ▭ C A E + ▭ R, A E ad ▭ C A E, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A E, ſic C A + R ad C A.

Ex conſtructione eſt

Vide ſupra ad notam 6 *

KI Q FA R

f — $\frac{af}{e}$ — d / $\frac{ad}{c}$

itemque AE AB KI Q

Vide ſupra ad notam 5 *

e — a — f / $\frac{af}{e}$

Ideoque AE AB FA R

per 11. 5ti. e — a — d — $\frac{ad}{c}$

Ac proinde per 16. 6ti, ▭ B A F ∞ ▭ A E, R.

Hinc cum ▭ B A F etiam ſit ∞ ▭ C A I, erit ſimiliter ▭ A E, R ∞ ▭ C A I.

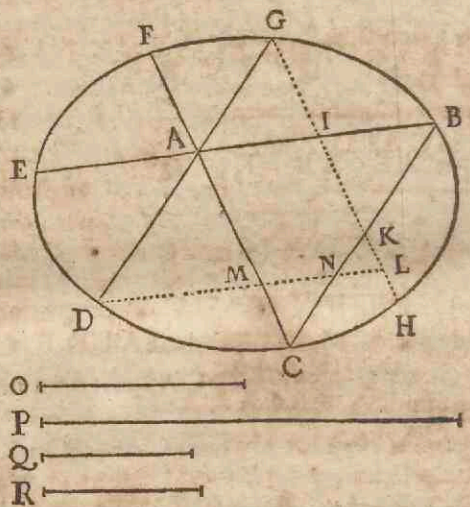
Patet itaque G L eſſe ad A M, ſicut C A + R ad C A. Vt erat propoſitum.

Quare cum hoc pacto, aſſumentes quæſitum tanquam verum, per reſolutionem Geometricam devenerimus ad verum conceſſum : ſequitur, quæſitum illud, quod cum conceſſo iſto omnimodè connectitur, verum eſſe. hoc eſt, umbram baculi C, quæ tranſibat per A, tranſiiſſe ſimiliter per B. Quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem, quæ Reſolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad ſolutionem Problematis pag. 372 ut conceſſum ſuppoſitum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis ſtatuunt ex falſis etiam poſſe verum concludi, reſolutio hæc ad quæſiti oſtenſionem incerta videri poteſt : placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à conceſſis ad quæſita, prout ad hoc me inſtigavit præſtantiſſimus ac unde-

undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematis discipulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filûm calculi sequitur, qualis extat pag. 370 & 371, at eodem nonnihil hîc immutato; ut appareat passim artificium, quo singula Geometricè explicari queant.



Positâ, ut ante, A D ∞ *y*

erit ut B A ad A E, ita B C ad A D

a —— *e* —— *b*/ ad *y* seu $\frac{be}{a}$.

ac proinde per 16. 6ti

□ B A, A D, □ B C, A E

a *ay* ∞ *be*.

Ex natura Ellipsis per 17 Conicorum Apollonii

A D. *y* K B. *b* — *z*

A G. *z* AG vel CK *z*

est □ D A G. $\overline{yz}$ ad □ CKB. $\overline{bz - zz}$,

F A. *d* K H. *x*

A C. *c*. AC vel KG. *c*

ut □ F A C. $\overline{cd}$ ad □ GKH. $\overline{cx}$.

Quoniam igitur ex hypothesi est B A ad A E, sicut B C ad A D: erit □lum sub extremis B A, A D æquale □lo sub mediis B C, A E. Deinde quoniam ex natura Ellipsis est, ut □ D A G ad □ CKB, sive, rejectâ communi altitudine A G vel C K, ut D A ad K B, ita □ F A C ad

AG AC

id est, rejectis communibus altitudinibus z & c, erit ut D A ad K B, ita F A ad K H

y—b—z—d/ ad x.

BA

sive, assumendo communem altitudinem a, ut ▭BA,AD seu ▭BC,AE ad ▭BA.KB, ita FA ad KH

α ay vel be—ab—az—d/ ad x. δ

ad ▭ GKH, id est, relictâ communi altitudine A C vel G K, ita F A ad K H; & quidem D A ad K B, si B A pro communi altitudine sumatur, sit sicut ▭BA,AD seu α B C, A E ad ▭B A,K B: erit ut ▭B C,A E ad ▭ B A,K B, ita F A ad K H.

Esto jam K I ∞ f.

eritque propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B C A & B K I

ut B C ad C A, ita B K ad K I

b—c—b—z / ad f seu $\frac{cb-cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti.

add. H K. x

mult. H I. $\overline{f+x}$ ▭BC.KI, ▭CA,BK

per I G. h ζ bf ∞ $cb-cz$

Deinde sit I G ∞ h.

▭GIH. $\overline{fh+hx}$

eritque propt. simil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I

ut B C ad C A, ita A G ad G I

b—c—z / ad h seu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

▭BC,IG ▭CA,AG

β bh ∞ cz.

Similiter esto A I ∞ k.

eritque propter simil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I

ut B C ad B A, ita A G ad A I

b—a—z / ad k seu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

add. A E. e

mult. E I. $\overline{k+e}$ ▭BC,AI ▭BA,AG

per I B. l ε bk ∞ az.

▭E I B. $\overline{kl+el}$

Sit item I B ∞ l.

eritque propter simil. $\triangle^{rum}$ B C A & B K I

Porrò cum ex similitudine $\triangle^{rum}$ B C A & B K I, B C sit ad C A, sicut B K ad K I: erit ▭ sub B C, K I æquale ▭lo sub C A, B K. Eâdem ratione cum B C sit ad B A, sicut B K ad B I: erit ▭ sub B C, B I æquale ▭lo sub B A, B K.

Haud secus cum similia sint $\triangle^{la}$ B C A & A G I, ac idcirco B C ad C A, sicut A G ad G I: erit ▭ sub B C, G I æquale ▭lo sub C A, A G. Similiter cum B C sit ad

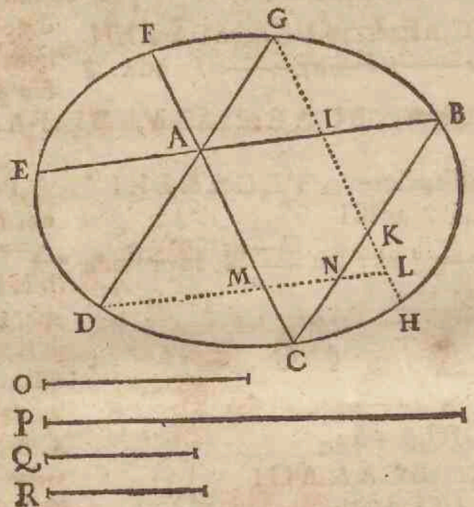
ut

ut B C ad B A, ita B K ad B I

b —— a —— $b-z$, ad l seu $\frac{ab - az}{b}$. ac proinde per 15. 6ti

▭ BC, BI ▭ BA, BK

γ $bl \infty ab - az$.



Ex natura Ellipsis per 17. 3tii Conic. Apollonii est ▭ F A C ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B

cd —— $bf + bx$ —— ae, ad $kl + el$.

Est autem per 23. 6ti ratio ▭li F A C ad ▭ G I H

cd —— $bf + bx$

composita ex ratione F A ad I H seu I K + K H, &

d —— $f + x$

ex ratione C A ad G I, id est, assumendo commu-

c —— b

B C

nem altitudinem b, ex ratione ▭li

β

B C, C A ad ▭ B C, G I vel ▭ C A, A G, sive, reje-

bc —— bb seu cz

C A

ctâ communi altitudine c, ex ratione B C ad A G.

b —— z.

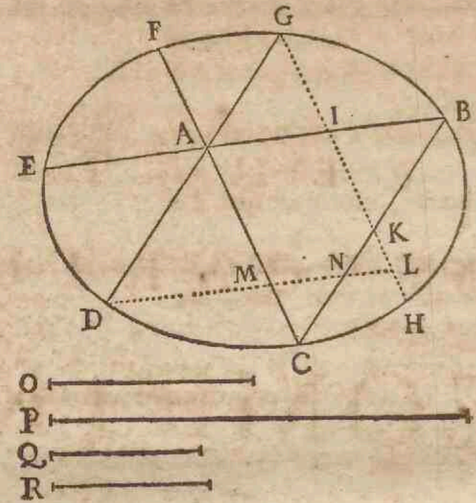
B A, sicut A G ad A I: erit pariter ▭ sub B C, A I æquale ▭lo sub A B, A G.

Iam verò, quia ex natura Ellipsis ▭ F A C est ad ▭ GIH, ut ▭ EAB ad ▭ EIB; & quidem ratio ▭li F A C ad ▭ G I H composita sit ex ratione F A ad I H seu I K + K H, & ex ratione C A ad G I, id est, assumendo communem altitudinem B C, ex ratione ▭li B C, C A ad ▭ B C, G I vel β ▭ C A, A G, sive etiam, re-

Simi-

Similiter ratio □li E A B ad □ E I B composita est
$ae - kl + el$
ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.
$e - l$ $a - k + e$.
Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi
$e - l$ b
altitudine sumatur, eadem est quæ □li
γ
B C, E A ad □ B C, I B seu □ B A, B K, hoc est, ea-
$be - bl$ vel $ab - az$
dem quæ δ F A ad K H.
$d - x$
Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitu-
$a - k + e$ b
dine sumatur, eadem, quæ □li A B, B C ad □ B C, E I
$ab - bk + be$
ε α
vel □ BC, AI, id est, BA, AG, + □ BC, EA vel □ BA,
sive $az + ay$,
A D, hoc est, relictâ communi altitudine A B, seu a,
eadem quæ B C ad A G + A D.
$b - z + y$.
Erit igitur ratio composita ex ratione
F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,
$d - f + x$ $b - z$
per 23. 6ti, ratio □li F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G,
$bd - fz + xz$
eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,
$d - x$
& ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6ti,
$b - z + y$
eadem rationi, quam habet
□ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.
$bd - xz + xy$.

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio □li E A B ad □ E I B composita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi altitudine sumatur, est sicut □ B C, E A ad □ B C, I B seu γ □ B A, B K, quæ eadem ostensa est δ rationi F A ad K H; sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitudine sumatur, ut □ A B, B C, ad □ B C, E I, id est, ad □ B C, A I vel ε B A, A G, + □ B C, E A vel α □ B A, A D, sive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23. 6ti, ratio □li F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D. id est, per 23. 6ti, eadem rationi, quam habet □ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.



Hinc cum
▭FA,BC, sit ad ▭IK,AG+▭KH,AG, sicut idem ▭FA,BC ad
bd ——— *fz+xz* ——— *bd/*
▭KH, AG+▭KH, AD: erit, per 9. 5ti,
ad *xz+xy*:

▭IK,AG+▭KH,AG æq. ▭KH,AG+▭KH,AD.
fz+xz ∞ *xz+xy*.

Vnde, dempto utrinque communi ▭lo KH, AG,
xz
erit quoque reliq. ▭IK, AG æquale reliquo ▭lo
fz
KH, AD
xy

Ac proinde, per 16. 6ti,
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— *x* —— *y/* ad *z*.

Hinc cum ▭ FA, BC ad ▭ IK, AG+▭KH, AG eandem habeat rationem, quam idem ▭ FA, BC ad ▭ KH, AG +▭ KH, AD: erit ▭ IK, AG +▭ KH, AG æquale ▭lo KH, AG+▭lo KH, AD. A quibus si commune auferatur ▭ KH, AG, erit quoque reliquum ▭ IK, AG æquale reliquo ▭lo KH, AD. Vnde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Sed

BC
Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſ. comm. altit. *b*,
f —— *x*

ζ
▭IK,BC vel▭CA,BK ad▭KH,BC.
bf *cb*—*cz* ——— *bx*.

AB
At DA ad AG,ita aſſ. comm.alt. *a*, eſt ▭DA,AB
y —— *z* *ay*

α'
vel▭BC,AE ad▭AG,AB.
be ——— *az*.

Quare erit ut
▭CA,BK ad▭KH,BC,ita▭BC,AEad▭AG,AB.
cb—*cz* —— *bx* ——— *be* / ad *az*.

δ BC
Cum autem ſupra ſit FA ad KH,i.e.,aſſ.comm.alt.*b*,
d —— *x* ·
▭FA,BCad▭KH,BC,ſicut▭AE,BCad▭KB,BA,
bd ——— *bx* ———— *be* / ad *ab*—*az*,
hoc eſt, convertendo
▭KH,BCad▭FA,BC,ſicut▭KB,BAad▭AE,BC:
bx ——— *bd* ——— *ab*—*az* / ad *be*:
Erunt▭CA,BK ▭KH,BC ▭FA,BC tres magnitudines ab una parte,
cb—*cz*——*bx*....... *bd*
&▭KB,BA ▭AE,BC ▭AG,AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:
ab—*az*..... *be*——— *az*

Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭IK, BC vel ζ▭CA, BK ad ▭KH, BC. At ſicut DA ad AG, ita, aſſumptâ communi altitudine AB, ▭DA, AB vel α▭BC, AE ad ▭AG, AB. Quare erit ut▭CA,BK ad ▭KH, BC, ita ▭BC,AE ad▭AG, AB. Cum autem ſupra ſit δ, ut FA ad KH, ſive, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭FA, BC ad▭KH, BC, ita▭AE, BC ad ▭KB, BA; id eſt, convertendo, ▭KH, BC ad ▭FA, BC, ſicut ▭KB, BA ad▭AE, BC: erunt ▭CA, BK, ▭KH, BC, & ▭FA, BC 3 magnitudines ab una parte, & ▭KB BA, ▭AE, BC, & ▭AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata.

Quare etiam per 23. 5^{ti} ex æqualitate proportionales erunt

id eſt, □ C A, B K ad □ F A, B C, ſicut □ K B, B A
$cb - cz$ ——— bd ——— $ab - az$

ad □ A G, B A, ſeu, rej. com. alt. a, ut K B ad A G.
——— az . . . . $b - z$ ——— z.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando ſc. tum extremos tum medios terminos, oſtendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò perveniſſe, ubi $cbz - czz$ æquatur $bbd - bdz$.

Denique ut inveniatur A G ſeu z, quoniam ſumendo C A ſeu c pro communi altitudine,

K B eſt ad A G, ſicut □ C A, K B ad □ C A, A G:
$b - z$ —— z ——— $cb - cz$ / ad cz:

erit ut

□ C A, B K ad □ F A, B C, ita □ C A, K B ad □ C A, A G.
$cb - cz$ ——— bd ——— $cb - cz$ / ad cz.

Hinc cum □ C A, B K ad □ F A, B C & ad □ C A, A G
$cb - cz$ bd cz

eandem habeat rationem, erit per 9. 5^{ti},

□ F A, B C. æq. □^{lo} C A, A G.
bd ∞ cz.

Vnde per 16. 6^{ti} erit,

ut C A ad A F, ita B C ad A G.
c —— d —— b / ad z.

Quod erat propoſitum.

Vnde & ipſæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut □ C A, B K ad □ F A, B C, ita □ K B, B A ad □ A G, B A, id eſt, relictâ communi altitudine B A, ita K B ad A G. Denique, quoniam, aſſumptâ communi altitudine C A, K B eſt ad A G, ſicut □ C A, K B ad □ C A, A G: erit ut □ C A, B K ad □ F A, B C, ita □ C A, K B ad □ C A, A G. Quocirca cum □ C A, B K ad □ F A, B C & ad □ C A, A G eandem habeat rationem, erit □ F A, B C æquale □^{lo} C A, A G; ac proinde C A ad A F, ſicut B C ad A G. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.