Elementa arithmeticae et algebrae.

Q 10 THY 1 # OUD

ELEMENTA ARITHMETICÆ ET ALGEBRÆ

CAPUT I.

DE NUMERIS INTEGRIS

De numerorum natura, efformatione atque valore.

§. 1.

MATHESIS eſt ſcientia, quæ circa Quantitatem ſeu Magnitudinem verſatur.

2. Porro nihil *magnum* eſt, aut Quantitatem habere dicitur, niſi quod minui poteſt, & in quo partes quaſdam concipere licet; & viciſſim, quidquid minui poteſt, vel ex partibus componitur, *Quantitas* eſt.

3. Cùm res quanta menti obverſatur, partes ex quibus componitur, vel ùt diſtinctæ & ab invicem ſeparatæ repræſentantur; vel eas ùt conjunctas, unicumque quaſi totum quoddam extenſum conſtituentes, concipimus.

4. Ultimo hocce modo Quantitas à Geometris ſpectatur; prout autem partes ejus ùt diſtinctas & enumerabiles conſideramus, *Arithmeticæ* objectum eſt.

5. Cùm partes in re quapiam mentis operatione distinctas, in unam multitudinem colligimus, eas *Numerare* dicimur: hanc autem multitudinem expressuri, *Numero* utimur: porro quælibet seorsum ex dictis partibus *una* est, & vulgato nomine *Unitas* audit.

6. Unitates omnes, ex quibus numerus aliquis componitur, ùt æquales concipimus, aut saltem eodem modo denominamus; est adeo Numerus: *multitudo, quæ ex earumdem unitatum collectione oritur.*

7. Numerus, cujus unitas certam quamdam speciem exprimit, *Numerus numeratus* dici solet: quod si verò ens aliquod in genere denotet, *Numerus numerans* appellatur.

8. Cùm plures numeri eamdem unitatis speciem exprimunt, *homogenei* dicuntur; *heterogenei* verò sunt, si ad diversam unitatem referantur: sic tres Floreni & duo Floreni, numeri homogenei sunt; at tres Floreni & duo Asses, heterogenei vocantur.

9. Characteres, quibus numeros exprimimus, quosque *Cyphras* vocant, sunt novem sequentes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hæ cyphræ generali *Unitatum* nomine insigniuntur.

10. Ut verò, non solùm unitates, sed & Decades, Centenarios, Millenarios &c. indigitare possimus, valorem ipsis tribuimus localem; ita ut solitariè, vel in loco dextimo positæ, unitates simplices, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios denotent.

11. Ubi in numero quodam nullæ dantur vel unitates vel decades &c., loca vacua replemus cyphrâ 0, *Zero* dictâ, quæ per se nihil significat, sed ad hoc unum inservit, ut, quæ à dextra versus sinistram occurrunt cyphræ significativæ, determinatum habeant locum valori suo convenientem.

12. Cyphrarum igitur valor localis, initio ducto à dextris, secundùm hunc ordinem crescit:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Unitates}\\ \text{Decades}\\ \text{Centenarii}\end{array}\right\}\ \text{Simplices}$$

Unitates Decades Centenarii	Millenariorum
Unitates Decades Centenarii	Millionum
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum
Unitates Decades Centenarii	Billionum
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum
Unitates Decades Centenarii	Trillionum &c.

COROLLARIUM.

13. Ergo unitas quælibet decadem facit in ordine proximè à dextris; atque ita decem unitates in quovis ordine, unitatem valent in ordine ſiniſteriore.

14. SCHOLION. Si in numero compoſito cyphræ ſecundùm valorem ſuum localem ſumantur, eæ omnes inter ſe homogeneæ ſunt; non verò, ſi valor earum ſimplex ſpectetur : nam ex. gr. cyphra 2° loco poſita decadum, in 3° ordine centenariorum unitates ſignificat, atque adeo ad diverſas unitates referuntur; ergo heterogeneæ ſunt (§. 8).

PROBLEMA I.

Numerum ſcriptum enunciare, hoc eſt, cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.

15. RESOLUTIO I. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio à dextris facto.

II. Nota dextima classis tertiæ notetur lineolâ transversâ, apici adscribendâ; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.

III. Comma solitarium per millenarios; lineola transversa una per milliones; duæ per billiones; tres per trilliones &c : nota verò finistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur. (§ 12).

Ex. gr. Numerus sequens

3, 426″, 189, 315′, 826, 917

Ita enunciatur : tria millia, quadringenti & viginti sex billiones; centum octoginta novem millia, trecenti & quindecim milliones; octingenta viginti sex millia, nongenta & septemdecim.

COROLLARIUM.

16. Si à numero quovis unitates simplices reseces, restantium 1ª per unitates decadum; altera per decades decadum; sequens per centenariorum decades &c. enunciandæ erunt : sic si à numero 4326 notam dextimam 6 separes, reliquum per quadringentas triginta duas decades enunciandum erit.

17. SCHOLION. Uti locus, quem cyphra quælibet in numero scripto obtinet, cyphræ valorem indicat; ita quoque in numero enunciato cyphrarum valor localis, cujusque cyphræ scribendæ locum & classem determinat. Sit ex. gr. numerus *trecenta septem* : in eo occurrunt tres centenarii, nulla decas, & tres unitates simplices : scribe igitur primò 3 pro centenariis, tum 0 pro decadibus, tandem 7 pro unitatibus : erit adeo 307 numerus propositus. Quod si verò major aliquis numerus scribendus fuerit; ad classes imprimis attendatur in quas resolvi potest, eæque omnes in eadem serie continua, eo quo efferuntur ordine, à sinistra pergendo versùs dextram, in chartam conjiciantur; in classe autem qualibet, primò centenarii, tum decades, tertio loco unitates scribantur.

De numerorum integrorum Additione ac Subtractione.

18. Quantitatis datæ vel partes ad unam omnes enumerat Arithmetica; vel partibus datis novas superaddit,

aut exurgat quantitas major; vel aliquas ex datis aufert, ut restantes seorsum contempletur : ergo præter *numerationem* duplex potissimùm circa numeros institui potest operatio ; *Additio* & *Subtractio.*

19. Additio est ea operatio, qua ex duobus vel pluribus numeris datis, aliquis invenitur numerus, qui datis simul sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *Addendi*; quæsitus autem *Summa*, vel etiam quandoque *Aggregatum.*

COROLLARIUM I.

20. Cùm in Additione ex 2 vel pluribus numeris componatur unus tamquam ex partibus totum, & numerus quilibet ex iisdem unitatibus colligatur (§. 6.), omnes omnino addendi ad eamdem unitatem referri, consequenter homogenei esse debent.

COROLLARIUM II.

21. Summa ex numeris addendis, tamquam ex partibus totum, componitur : ergo cùm numeri addendi ad eamdem unitatem referantur (§. præced.), etiam summa numeris addendis homogenea est.

22. SCHOLION. Additionis signum est +, quod per *plus* efferri solet. Ita 3+4 denotat summam ex 3 atque 4, & pronunciatur 3 plus 4.

23. *Subtractio* est operatio, qua invenitur excessus, ad quem unus alterum superat. Numerus qui subducitur, *subtrahendus*; alter, ex quo subtractio fit, *minuendus*; qui denique invenitur, *differentia* item *residuum* dici consuevit.

COROLLARIUM I.

24. Est igitur minuendus subtracto & residuo simul sumtis æqualis; atque adeo eorum summa est.

COROLLARIUM II.

25. Sunt ergo minuendus, subtractus & residuum, numeri inter se homogenei (§. 20. & 21.).

26. SCHOLION. Signum Subtractionis est —, quod per *minus* exprimitur : Ex. gr. 7 — 3 denotat differentiam inter 3 & 7; pronunciatur verò 7 minùs 3.

27. Cùm numeri unicâ constant cyphrâ, facilis quidem est circa eas operatio : sic quilibet primâ fronte perspicit, quod 4 & 6 simul faciant 10; quod 4 ablata ex 6, relinquant 2 : at ubi pluribus constant notis, regulis quibusdam opus est, quæ per partes perficere doceant, quod simul & semel ac unico velut obtutu, propter arctatos nimiùm intellectûs humani limites, fieri vix posset.

PROBLEMA II.

Numeros quotcumque datos addere.

28. RESOL. I. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant.

II. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

III. Inchoetur additio à columna unitatum, & earum summa ipsis subscribatur.

IV. Quod si ea in summa decades reperiantur, eæ reserventur addendæ numerorum datorum decadibus : decadum verò summa sub decadibus collocanda.

V. Quod si rursus in ea aliquot dentur centenarii, eos cum columna centenariorum addere oportebit : atque hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuatâ, habebitur summa quæsita.

927	A
735	B
1662	

Ex. gr. sint numeri A & B addendi : numeris dispositis ut in schemate, dicatur 7 & 5 sunt 12 : collocentur 2 sub unitatibus, & 1 decas reservetur addenda columnæ decadum : itaque 1 (scilicet decas) & 2 sunt 3, & 3 sunt 6 (decades), ponantur 6 sub decadibus. Dein

9 & 7 ſunt 16 : cùm autem nihil ampliùs in addendis ſuperſit, ſcribatur hoc totum infra lineam, ita tamen, ut ſola cyphra 6, columnæ additæ correſpondeat; altera verò nota 1, uno loco magis à ſiniſtris collocetur. Ita prodit ſumma quæſita 1662.

29. Schol. Si multi fuerint numerorum addendorum ordines, expediet in tres quatuorve eos claſſes dividere, & ex ſingulis claſsibus ſingulas ſummas colligere, quæ deinde ſimul additæ, ſummam ſummarum exhibeant. Ex. gr. ſint addendi numeri A, B, C, D, E, F, G, H, I : eos in tres claſſes ſepara; tres prodibunt ſummæ partiales 520, 816, & 1060;

A	123	D	81	G	487
B	309	E	708	H	535
C	88	F	27	I	38
	520		816		1060
					816
quæ ſeorſum collectæ dabunt ſummam totalem					520
					2396

Corollarium.

30. Cùm in ſumma cujuſvis columnæ decades repertas, ad columnam proximè à ſiniſtris transferimus, toties colligimus valorem columnæ à ſiniſtris, quoties fieri poteſt, & pro unoquoque reſervamus unitatem columnæ ſiniſteriori addendam.

31. Scholion I. Non abſimili ratione numeri diverſas ſpecies exprimentes, ſimul adduntur : ex ſerie nimirum ſpeciei minoris valoris, toties colligatur valor ſpeciei proximè majoris, quoties id fieri poteſt; & pro unoquoque unitas reponatur in ſpecie proximè majore. Ex. gr. ſint expenſæ

	flor.	aſſes	quad.
Januarii	14	12	3
Februarii	35	8	1
Martii	52	15	2
Aprilis	89	7	3
erit ſumma	192	4	1

Cùm enim 4 quadrantes aſſem conficiant, in ſerie quadrantum additis 3 & 1; deinde 2 & 3, valor aſsis bis colligitur, ita ut ſuperſit quadrans, quem ſcribe ſub ſerie quadrantum. 2 autem aſſes reſervati addantur aſsibus : ſimiliter, quoniam florenus ex 20 aſsibus componitur, in ſerie aſsium ſimul cum 2 aſsibus reſervatis, valor floreni bis colligitur, relictis 4 aſsibus. Quare denuo 4 ſub ſerie aſsium ſcribantur; 2 verò floreni ad florenos transferantur. Deinceps ùt in problemate præced.

32. SCHOL. II. Si idem numerus ſibi ipſi aliquoties addendus ſit, operatione magis compendiosâ utimur, quæ nominatim *Multiplicatio* vocatur, de qua (§. 43).

PROBLEMA III.

Additionem examinare.

33. RESOL. Additio iteretur, ſed diversâ ratione, ità ut unâ vice aſcendendo, alterâ verò deſcendendo, additio perficiatur. Si utroque caſu eadem inveniatur ſumma, additio ritè peracta colligitur.

34. SCHOL. I. Rariſsimè ſiquidem contingere eſt, ut, in majoribus præſertim numeris, qui irrepſiſset ante, idem rurſus error committatur.

35. SCHOL. II. Alter quoque eſt additionis examinandæ modus: ſcilicet additorum alteruter pro libitu, vel ſi 3 pluresve fuerint, aggregatum ex omnibus, demto unico, ex ſumma omnium aufertur: quod ſi reſiduum numero non ſubtracto æqualis inveniatur, additionem rectè fuiſſe peractam colligitur.

PROBLEMA IV.

Numerum minorem ex majore ſubtrahere.

36. RESOL. I. Numerus minor ſic majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus.

II. Sub numeris ducatur linea recta, ne reſiduum cum ſubtrahendo confundatur.

III. Subtrahantur 1° unitates ex unitatibus, tum decades ex decadibus, centenarii ex centenariis &c.; & reſidua ſingula ſic infra lineam ſcribantur, ut etiam hìc homogenea homogeneis reſpondeant, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus &c. collocetur.

IV. Quod

IV. Quod ſi nota major ex minore ſubtrahenda ſit; ex ſerie proximè à ſiniſtris in dexteriorem transferatur unitas, quæ hìc valebit 10, ut ſubtractio fieri queat. Cyphra verò unitate minuta, puncto (.) notetur, ne ipſam mulctatam eſſe obliviſcamur.

V. Si in loco ſiniſteriore 0 reperiri contingat, unitas à cyphra ſignificativa proximè occurrente mutuetur: unitas verò illa in locum dexteriorem tranſlata, ibidem decadis habebit valorem: quamobrem, ubi plura 0 ſeſe inſequuntur, omnia hac ratione in novenarios mutentur, & nota minor, è qua ſubtractio fieri debebat, decade augeatur.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Ex. gr. ſi ex} & \dot{9}\dot{1}\dot{0}0\dot{4}03 \\
\text{ſubtrahas} & 4376281 \\
\hline
\text{reſiduum eſt} & 4724122
\end{array}
$$

Ita nimirum procedendum: 1 ſublatâ ex 3, manent 2 unitates, directè ſub unitatibus infra lineam ſcribendæ. 8 decades ex 0 auferri nequeunt: à centenariis itaque auferatur unitas, ad decades transferenda; hæc autem unitas valet 10 decades: ablatis itaque 8 decadibus ex 10, remanent 2 decades, loco conveniente infra lineam ſcribendæ. Centenarii 2 ex 3 relinquunt 1; 6 millenarii ex 0 ſubduci nequeunt: mutuetur igitur unitas à cyphra ſignificativa proximè occurrente, in hoc caſu centenarius millenariorum: hæc unitas in locum ſiniſteriorem delata, zero in decadem millenariorum vertet: inde, ſi unitatem in locum millenariorum transferas, habebis hìc 10 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 6 ex 10, reſidui fiunt 4 millenarii. Demtis dein 7 millenariorum decadibus ex 9, remanent 2. Quia porro unitas 6° loco mutuata fuit, & in præcedentes ſeries diſtributa, locus centenariorum millenariorum jam vacuus eſt, replendus proinde per unitatem ex cyphra 9 mutuandam: hæc autem unitas locum vacuum ad decadem elevabit : unde 3 ex 10 remanent 7 : tandem 4 ex 8, residuum est 4.

37. SCHOLION. I. Si numeri ex diversis speciebus compositi à se invicem subtrahendi fuerint; unitas mutuata, non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.

	flor.	assibus	quad.
Ex. gr. ex	48	8	2
subtrahendi sint	36	9	3
Residuum erit	11	18	3

nimirum cùm 3 quadrantes ex 2 subtrahi nequeant, mutuo unitatem ex assibus; hæc autem unitas 4 quadrantes valet : subductis adeo 3 quadrantibus ex 6, restant 3 quadrantes. Similiter cùm 9 asses ex residuis 7 auferri nequeant, ex florenis unitatem accipio, quæ 20 asses facit : unde 9 tollo ex 27, & residuum est 18. Tandem 6 ex 7 ablati relinquunt 1 florenum : 3 verò subductis ex 4, remanet pariter 1.

38. SCHOL. II. Si numerus quispiam pluries ex eodem alio subtrahi debeat, Ex. gr. 4 ex 24, prolixa nimis foret operatio, si auferrentur 4 primò ex 24, tum ex 20, dein rursus 4 ex 16, atque ita deinceps subtractio continuaretur : verùm in hoc & similibus casibus, ordinariæ subtractionis loco, aliam operationis speciem instituimus, quam *Divisionem* appellant.

PROBLEMA V.

Subtractionem examinare.

39. RESOL. Residuo addatur subtractus : quod si summa minuendo æqualis, subtractio ritè peracta conjicitur. (§. 24).

Ex. gr.	2534	minuendus
	875	subtrahendus
	1659	residuum
	2534	

COROLLARIUM I.

40. Datis ergo subtracto & residuo, minuendus determinabitur, si duos istos numeros in unam summam collegeris.

COROLLARIUM II.

41. Cùm data eſt ſumma, item alteruter ex duobus addendis; ſubduc numerum notum ex ſumma: dabit reſiduum, ipſum numerum incognitum.

COROLLARIUM III.

42. Quoniam igitur minuendus æqualis eſt ſummæ ex ſubtracto & reſiduo; ſi reſiduum ex minuendo ſubtrahas, quod remanebit, erit ipſe numerus qui ex minuendo ſubtractus fuerat.

De Numerorum integrorum Multiplicatione.

43. Unum numerum per alterum *multiplicare* nihil aliud eſt, quàm toties unum ſumere ſeu ſibi ipſi addere, quot ſunt unitates in altero.

44. Numeri dati per invicem multiplicandi, generatim *Factores* dicuntur; numerus autem ex multiplicatione reſultans, *factum* vel *productum* audit. Nominatim factorum ille, qui aliquoties ſumitur, *multiplicandi*; alter verò, per quem prior multiplicatur, *Multiplicatoris* nomine innoteſcit.

COROLLARIUM.

45. Ergo quoties unitas in multiplicatore, toties multiplicandus in producto continetur.

46. SCHOLION I. Perinde omnino eſt, uter ex factoribus in multiplicatorem, aut in multiplicandum aſſumatur; idem ſiquidem prodit factum 24, ſive 4 in 6, ſive 6 in 4 ducantur: præſtat tamen minorem numerum in multiplicatorem ſtatuere, cùm tunc productorum partialium numerus minor reperiatur.

47. SCHOL. II. Tres aut plures numeri in ſe mutuò duci dicuntur, cùm duo ex illis primùm pro libitu per invicem; dein verò factum hoc per aliquem reſtantium multiplicatur; atque ita deinceps factum quodlibet pro novo factore aſſumitur. Ex. gr. ſint hi quatuor numeri: 2, 3, 4, 5: duc inprimis 2 in 3, factum 6 duc in 4; hoc dein factum 24 multiplica per 5: prodit tandem factum 120 ex factoribus datis compoſitum. Porro idem planè reſultat productum, quovis ordine in ſe invicem

ducantur factores, ut tentanti manifestum est, & suo loco (§. 249) demonstrabitur.

48. Pro multiplicatione singularum notarum per invicem, nulla potest, nec etiam debet præscribi regula: videt enim quilibet perfacilè, factum Ex. gr. 2 in 3 esse 6; 3 per 4 producere 12 &c.: cæterùm frequentiori usu, quæ initio deest, facilitas comparabitur, singulaque numerorum simplicium producta sensim sinè sensu memoriæ insigentur: quamdiu verò infixa non sunt, ad manus sit adjecta tabella, in qua producta paullò majora exhibentur.

$3\times3=9$	$4\times3=12$	$5\times3=15$	$6\times3=18$
$3\times4=12$	$4\times4=16$	$5\times4=20$	$6\times4=24$
$3\times5=15$	$4\times5=20$	$5\times5=25$	$6\times5=30$
$3\times6=18$	$4\times6=24$	$5\times6=30$	$6\times6=36$
$3\times7=21$	$4\times7=28$	$5\times7=35$	$6\times7=42$
$3\times8=24$	$4\times8=32$	$5\times8=40$	$6\times8=48$
$3\times9=27$	$4\times9=36$	$5\times9=45$	$6\times9=54$

$7\times3=21$	$8\times3=24$	$9\times3=27$
$7\times4=28$	$8\times4=32$	$9\times4=36$
$7\times5=35$	$8\times5=40$	$9\times5=45$
$7\times6=42$	$8\times6=48$	$9\times6=54$
$7\times7=49$	$8\times7=56$	$9\times7=63$
$7\times8=56$	$8\times8=64$	$9\times8=72$
$7\times9=63$	$8\times9=72$	$9\times9=81$

49. SCHOL. Multiplicationis numerorum, hoc deinceps erit signum ($\times$), inter factores duos medio loco positum. Hoc autem signo $=$, æqualitatem indicamus.

PROBLEMA VI.

Numerum datum per alium datum multiplicare.

50. RESOL. I. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant.

II. Ducatur sub iis linea recta, ut factores à producto distinguantur.

III. Tum nota dextima, seu illa quæ unitates denotat, multiplicet unitates ipsius multiplicandi, atque productum directè sub nota multiplicante infra lineam scribatur: quod si tamen productum hoc decades aliquot contineat, hæ prædocto proximè sinisteriori annumerentur.

IV. Dein eadem nota dextima multiplicatoris multiplicet 2am notam multiplicandi seu decades, & productum infra lineam sub decadibus scribatur; nisi quod centenarii, si quos contineat, sequenti producto addendi reserventur: atque ita porro cæteræ numeri multiplicandi notæ, in eamdem multiplicatoris notam ducantur.

V. Hoc facto, restantes successivè multiplicatoris notæ, similiter multiplicatorem agant, atque per has, 1° unitates, tum decades &c. numeri superioris multiplicentur, eâ lege, ut singulâ vice decades, producto proximè sinisteriori, ùt ante, annumerentur; & productum multiplicandi per decades multiplicatoris, in loco decadum; productum multiplicandi per centenarios multiplicatoris, in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

VI. Producta partialia addantur: summa erit productum quæsitum. Vel unicum exemplum rem illustrabit.

Ex. gr. sint factores 638 & 52. Inprimis multiplicator debitè sub multiplicando scribatur: deinde primam multiplicandi notam 8 multiplica per 2, cùmque productum sit 16, scribe 6 sub 2, & decadem annumera producto 3 per 2,

638
52
1276
3190
33176

quod est 6; addito ergo 1, prodeunt 7. Pone igitur 7 juxta 6, versùs sinistram; cùmque nullæ in ultimo producto sint decades, nihil reservetur. Dein duc 6 in 2, & productum 12 integrè scribatur; ita tamen, ut sola cyphra 2, centenariis correspondeat. En primum productum partiale 1276.

Eodem modo quæratur factum ex numero multiplicando in ſiniſtram multiplicatoris notam 5 : multiplica igitur 8 per 5, & factum eſt 40 ſeu potiùs 400, cùm hìc unitates in decades ducas : ſcribe itaque 0 ſub nota multiplicante, ſive ſub decadibus, & 4 decades decadum ſeu centenarios annumera ſequenti facto ex 3 & 5, quod eſt 15; additis itaque 4 ad 15, prodeunt 19. Pone 9 ad ſiniſtram 0, & reſerva 1 : tum 6 per 5 producunt 30, & 1 reſervatum ſunt 31 : ſummam 31 in loco conveniente repone. En alterum productum partiale.

Producta hæc addantur : prodibit tandem factum totale 33176.

DEMONST. Vi operationis, 1° bis, tum quinquagies ſumuntur omnes unitates, omnes decades, & omnes centenarii numeri multiplicandi, atque adeo quinquagies & bis totus numerus multiplicandus : ergo vi operationis toties accipitur multiplicandus, quot ſunt unitates in multiplicatore : eſt igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 43). *Q. e. d.*

51. SCHOLION. Cùm una nota per alteram multiplicatur, ſemper colligitur valor columnæ ſequentis quantùm fieri poteſt, iſque producto proximè à ſiniſtris additur : eâdem prorſus ratione procedatur, ſi multiplicandus diverſas ſpecies exprimat : nimirum primò multiplicentur ſingulæ ſeorſum ſpecies per multiplicatorem ; deinde videatur quoties in producto minimæ ſpeciei contineatur valor ſpeciei proximè majoris; iſque huic ſpeciei addatur : quod ſi verò aliquid ex minima ſpecie ſuperſit, quod ad valorem alterius ſpeciei non aſcendit, hoc infra ſcribatur : tum rurſus perſpiciatur quoties in producto ſpeciei proximè majoris ſimul cum reſervatis, contineatur valor ſpeciei ſiniſterioris; omniaque porro fiant ùt ante.

COROLLARIUM I.

52. Si numero cuipiam à dextris adjicias 0, notæ omnes uno loco magìs promoventur versùs ſiniſtram, atque adeo unitates in decades, decades in centenarios, cæteræque omnes in valorem decuplum vertuntur : er-

go si numerus aliquis per 10 multiplicandus sit, unum adde o à dextris; habebis quæsitum.

Corollarium II.

53. Cum numerus aliquis multiplicatur per 20, ejus decuplum bis sumitur : ergo numerum duplicando, ipsique à dextris adjiciendo o, habebis factum ex numero illo in 20.

Corollarium III.

54. Cùm numerus aliquis quinquies sumitur, ejus dimidium accipitur decies : quod si ergo numerus aliquis par per 5 multiplicandus proponatur, cape ejus dimidium, eique à dextris adde o; & habebis quæsitum. Quod si verò numerus multiplicandus impar fuerit, tolle 1° unitatem, tum ejus dimidio adjiciatur à dextris cyphra 5.

55. Schol. Generatim, si factoribus unum vel aliquot o à dextris adhæreant, his neglectis, reliquæ notæ per se invicem multiplicentur; & producto invento eadem restituantur.

PROBLEMA VII.

Multiplicationem examinare.

56. Resol. Multiplicandus multiplicatorem agat: idem enim prodire debebit factum. (§. 46).

De Numerorum integrorum Divisione.

57. Cùm unum numerum per alterum dividimus, inquirimus quoties hic in illo contineatur. Numerus qui per alterum dividitur, *dividendus*; alter verò, per quem divisio fit, *divisor*; qui denique indicat quoties divisor in dividendo contineatur, *quotiens* vel etiam *quotus* nuncupatur.

Corollarium.

58. Ergo dividendus toties divisorem continet, quot sunt unitates in quotiente : & vicissim, toties in quotiente continetur unitas, quoties divisor in dividendo.

59. Per divisionem quoque numerum in tot partes æquales partimur, quot in divisore unitates continentur; porro unam ex istis partibus *quotus* exhibet: sic ubi ex. gr. 12 floreni per 4 dividuntur, quotiens 3 florenos facit, estque quarta pars dividendi.

COROLLARIUM I.

60. Ergo dividendus toties etiam quotum continet, quot sunt unitates in divisore: & vicissim, toties in divisore est unitas, quoties in dividendo quotus continetur; atque adeo divisor indicat, quoties in dividendo quotus contineatur.

COROLLARIUM II.

61. Cùm igitur dividendus per quotum dividitur, ipse divisor prodit.

62. SCHOL. Cùm de multiplicatione ac divisione agimus, ad numeros solùm, non ad eorum denominationem attendimus: unde si ex. gr. 4 pedum longitudo, semel per 3 pedum latitudinem, & semel per 3 aliqua in genere multiplicetur, utrimque productum 12 esse dicimus, quamvis producta illa plurimùm inter se differant: 1o siquidem casu 12 pedes quadrati, sive 12 pedum quadratorum superficies, altero autem 12 pedes secundùm solam longitudinem, sive tot pedum linea generatur.

THEOREMA I.

Factum divisoris in quotientem dat dividendum.

63. DEMONST. Dividendus toties divisorem continet, quot sunt unitates in quotiente (§. 58.): ergo cùm toties divisor accipitur, quot sunt unitates in quotiente, obtinetur dividendus: sed cùm divisor in quotientem ducitur, toties sumitur divisor, quot sunt unitates in divisore (§. 43.): ergo dum divisor per quotientem multiplicatur, prodit dividendus. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

64. Datis ergo divisore & quotiente; hi duo numeri in se invicem ducantur: emerget dividendus.

THEO-

THEOREMA II.

Si factum dividatur per factorum quemlibet, quotus dabit factorem alterum.

65. Demonst. Factorum quilibet toties in producto continetur, quoties est unitas in altero (§. 45. & 46.); ergo vicissim, numerus qui toties in producto continetur, quot sunt unitates in factorum uno, est factorum alter: atqui si productum per factorem quemlibet dividas, toties in producto sic diviso continetur quotiens, quot sunt unitates in factore dividente (§. 60.): ergo quotus ex divisione producti per factorum quemlibet prodiens, dat factorem alterum. *Q. e. d.*

Corollarium.

66. Datis ergo facto duorum numerorum, & eorum uno, obtinebis alterum, si factum per numerum datum dividas.

67. Schol. In divisionis signum, dividendus, interpositâ lineolâ horizontali, supra divisorem scribitur. Ex. gr. $\frac{12}{3}$ denotat 12 per 3 dividi. Alii inter dividendum 1° loco positum & divisorem, duplex punctum (:) interponunt, quod & nos subinde faciemus, præsertim, ubi unius fractionis per alteram divisio fuerit indicanda.

68. Cùm dividendus item divisor numeri simplices sunt, sive, quod idem est, si unicâ constent notâ; non majori negotio unius per alterum divisio, quàm multiplicatio peragitur: at ubi numerus compositus dividi debet, præsertim si etiam ipse divisor plures notas complectatur, non levis nascitur tironibus difficultas. Bino problemate, in hisce casibus operandi methodum subjiciemus.

PROBLEMA VIII.

Numerum compositum per alium unicâ cyphrâ constantem dividere.

69. Resol. I. Scribatur divisor sub nota dividendi sinistima, aut, si ea minor fuerit, sub proximè sequen-

te; ac inveſtigetur, quoties diviſor in nota vel notis ſupraſcriptis contineatur. Numerus hoc indicans, ponatur ad dextram dividendi, æqualitatis ſigno inter utrumque conſtituto.

II. Quotiens hic per diviſorem multiplicetur, & productum ex diviſionis membro ſubtrahatur : ſi quod fuerit reſiduum, infra ſcribatur.

III. Reſiduo, ſi quod fuerit, nota dividendi ſequens adjiciatur ; ac rurſus inveſtigetur, quoties diviſor in hoc altero diviſionis membro contineatur : quotus ſcribatur ad dextram quotientis priùs inventi. Reliqua peragantur ùt ante.

IV. Quod ſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, pro quovis membro unam notam in quotiente ponendo, quotus invenitur.

Ex. gr. ſit dividendus 732 ; diviſor 3. Diſpoſitis numeris, ùt in adjecto ſchemate, quæratur quoties 3 in 7 : continentur autem bis : ſcribe ergo 2 ad dextram dividendi ; & productum 3 per 2, ſive 6 ſubtrahe ex 7 ; reſiduo 1 adjiciatur à dextris nota ſequens dividendi, 3. Tum rurſus inquire, quoties 3 in 13 ; cùmque reperiantur contineri quater, ad dextram quotientis 2, ſcribe novum hunc quotientem 4. Per hunc porro multiplica diviſorem 3, & factum 12 ſubduc ex membro diviſionis 13. Reſiduum ſubſcribe, ipſique adjiciatur nota dividendi ſequens. Quære rurſus quoties 3 in 12 ; inveniuntur autem quater : ſcribe ergo quotum hunc 4 ad dextram præcedentis. Quod ſi rurſus ultimum huncce quotientem in multiplicatorem ducas, productumque ex ultimo operationis membro ſubtra-

```
732=244
3
2
—
6
——
13
 3
 4
——
12
12
  3
  4
 ——
 12
 ——
  0
```

has, remanet o. Atque adeo quotiens quæſitus eſt 244.

Demonst. Vi operationis, omnes ſucceſſivè dividendi partes per eumdem diviſorem dividuntur : ſed partes omnes ſimul ſumtæ ipſum dividendum adæquant : ergo vi operationis, dividendus integer per diviſorem datum dividitur. *Q. e. d.*

Sic in caſu exempli propoſiti, 1° 6 centenarii, tum 13 decades, tandem 12 unitates in tres partes æquales dividuntur.

70. Schol. I. Cùm omnes ſucceſſivè dividendi partes per diviſorem datum dividi debeant; tot quoti partiales inveniri deberent, ſive tot notas continere deberet quotus integer, quot in dividendo ſunt cyphrarum ordines : at, quoniam inutilia forent o in parte quotientis ſiniſtima; hinc pro 1° operationis membro tot notæ ſeparantur, donec ipſæ, non habitâ ratione loci, quem in dividendo occupant, integrum diviſorem contineant.

71. Schol. II. Si poſt ultimam operationem quoddam ſuperſit reſiduum, hoc ad dextram quotientis inventi ſupra diviſorem, interjectâ lineolâ, notatur : Ex. gr. 71 per 4 dividenda ſint : cùm, invento quotiente 17, finaliter 3 remaneant, erit quotus totalis $17\frac{3}{4}$. Quod ſi diviſor integer in integro dividendo non contineatur, ſive ſi diviſor dividendo major ſit; tunc pro quotiente, diviſor, interjectâ ùt ante lineâ, ſimpliciter dividendo ſubſcribitur : ùt, ſi 3 per 4 dividere oporteat; hæc expreſſio, $\frac{3}{4}$, quotientem deſignat. Porro id genus diviſionum reſidua, aut univerſim quævis expreſſio, quâ numero alteri, interpoſitâ lineâ, alter ſubjicitur, *fractiones* vel *numeri fracti* dicuntur.

PROBLEMA IX.

Numerum compoſitum per alium compoſitum, ſed minorem, dividere.

72. Resol. I. A ſiniſtris dividendi tot ſeparentur notæ, donec diviſorem contineant; hæcque primum operationis membrum conſtituent.

II. Siniſtima diviſoris nota à reliquis per *comma* ſeparetur, hæcque ſola diviſorem agat : quot verò notæ à dextris diviſoris ſeparatæ fuerint, tot quoque in quolibet diviſionis membro à dextris ſeparentur.

III. Per notam hanc diviſoris ſiniſtimam dividatur ſiniſtima, vel duæ ſiniſtimæ 1ⁱ membri dividendi: quotus autem in diviſorem integrum ducatur, & diſpiciatur, an productum ex integro diviſionis membro ſubtrahi poſſit nec ne.

IV. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur quotiens inventus ad dextram dividendi, ùt in præcedente problemate, & ſubtractio actu peragatur; reſiduumque ſub diviſionis membro ſcribatur, ipſique addatur nota ſequens dividendi, pro novo diviſionis membro.

V. Quod ſi verò productum in operationis membro non contineatur, loco quotientis ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ejus in diviſorem, ad membrum dividendum quàm proximè accedat, & ex eo auferri queat.

VI. Reſiduo, ſi quod fuerit, adjiciatur ad dextram nota ſequens dividendi, ùt in præcedente Probl.: hæcque operatio continuetur, donec omnes dividendi cyphræ diviſionem ſubiverint.

Ex. gr. ſit dividendus 7038, diviſor 34. Primum diviſionis membrum erit 70; ſeparatâ igitur notâ ſiniſtimâ, tum diviſoris, tum membri dividendi, quære quoties 3 in 7: continentur autem bis: multiplica igitur 34 per 2; & quia factum 68 ex 70 ſubtrahi poteſt, ſcribe 2 pro quotiente, & tolle 68 ex 70; reſiduo autem 2, adjiciatur nota ſequens dividendi 3; en alterum diviſionis membrum 23; in quo cùm diviſor non contineatur, loco quotientis ſcribatur o ad dextram quo-

$$\begin{array}{r}
7{,}038 = 207 \\
3{,}4 \\
\underline{2} \\
\underline{68} \\
23{,}8 \\
3{,}4 \\
\underline{7} \\
\underline{23\,8} \\
0
\end{array}$$

ti ante inventi. Huic numero 23, adjice notam ultimam 8 : summa 238 dabit ultimum operationis membrum. Cùm porro, præter notam 3, unica in divisore nota supersit, unica quoque nota à dextris hujus membri separetur, quæraturque quoties 3 in 23 contineantur : continentur autem septies : per hunc quotientem 7, multiplicetur integer divisor; & quoniam productum hoc membro divisionis æquale est, ad dextram quoti hactenus reperti scribe 7. Dico numerum inventum 207, esse quotientem quæsitum.

Corollarium I.

73. Cùm tollitur cyphra dextima cujusdam numeri, pars ejus reliqua decades importat (§. 16.). Centenarios, si tollantur duæ dextimæ &c. : sed dum numerus aliquis dividitur per 10, 100 &c., inquiritur quot decades, centenarii &c. in dividendo contineantur : ergo si una, duæ &c. notæ dextimæ resecentur, reliquæ dabunt quotientem 1° casu divisionis per 10, 2° per 100 &c. : nisi quòd, si nota resecta significativa sit, divisione peractâ remaneat, quantum per notam resectam importatur.

Corollarium II.

74. Cùm decas quælibet bis 5 faciat, numerus aliquis toties bis 5 continebit, quot in ipso dantur decades : ergo si, resectâ notâ dextimâ dividendi, reliquum duplices; numerus ille, non computatâ notâ resectâ, per 5 divisus fuerit : atque adeo, si nota dividendi dextima sit 5, cùm hæc semel insuper divisorem contineat, reliquo duplicato adde 1, habebis quotum divisionis per 5 sinè ullo residuo.

Corollarium III.

75. Si tum dividendo, tum divisori ad dextram unum vel aliquot adhæreant 0; hisque æquali numero utrimque neglectis, reliquum dividendi per restantes divi-

ſoris notas dividatur, verus exurget quotiens: denotabit enim numerus ex diviſione reſultans, quoties vel decades diviſoris in decadibus dividendi; vel centenarii in centenariis &c. contineantur. (§. 16.)

76. SCHOL. I. Cùm productum diviſoris per quotientem partialem inventum, poſt ſingulam operationem ex diviſionis membro ſubtrahitur, reſiduum, ſi quod ſit, ad valorem notæ ſequentis reducitur; atque tum circa hunc numerum nova operatio inſtituitur. Non abſimili ratione proceditur, ſi numerus diverſas ſpecies, ùt florenos, aſſes & quadrantes exprimens, per numerum numerantem dividendus ſit: nimirum floreni primùm dividantur, diviſionisque reſiduum ad aſſes reductum, aſſibus addatur; tum tota aſſium ſumma per diviſorem dividatur; atque ita porro aſſium reſiduum in quadrantes reſolvatur, & diviſio ad finem uſque continuetur.

77. SCHOL. II. Dum pars ſiniſtima cujuſque membri, per ſiniſtimam diviſoris notam dividitur, rarò verus quotiens, primâ ſtatim vice, elicitur, eò quòd ſequentes diviſoris notæ non toties ſemper in reliquis membri notis contineantur, quoties nota ejuſdem ſiniſtima in parte membri ſiniſteriore, per quotum inventum contineri oſtenditur; quod tamen omnino neceſſe eſt: unde inexercitatis moleſta eſt, per diviſorem compoſitum, diviſionis operatio. Porro tentamina inutilia ùt plurimùm evitabit, qui, priuſquam quotus ſuo loco ſcribatur atque per eum totus diviſor multiplicetur, mentaliter, duas ſaltem notas ſiniſtimas diviſoris per quotientem explorandum multiplicaverit, factumque ad correſpondentes dividendi notas comparaverit.

PROBLEMA X.

Diviſionem examinare.

78. RESOL. Quotiens per diviſorem multiplicetur; producto addatur, ſi quod à diviſione reſiduum fuerit: ſi hâc ratione prodeat dividendus, diviſio ritè peracta fuerit. (§. 63.)

Aliter

79. Ex dividendo tolle primò, ſi quod remanſerit, diviſionis reſiduum; reliquum divide per quotientem: quod ſi numerus ex hac diviſione reſultans, diviſori æqualis ſit, indicium eſt, diviſionem fuiſſe legitimè peractam. (§. 61.)

CAPUT II.

DE NUMERIS FRACTIS

De Fractionum Natura.

80. Numerus aliquis, vel ùt *totum* quoddam, in quo plures partes æquales concipimus, ſpectari poteſt; vel ùt alterius *totius* partes quaſpiam exprimens : ille *integer*; hic *fractus* vel *fractio* nuncupatur. Sic numerus 3 ſimpliciter poſitus, & ad nullum alium relatus, *integer* eſt : at ſi quis dicat 3 *quartas*, is integrum quodpiam in 4 partes æquales diviſum concipit, cujus 3 partes enunciat.

81. Porro numerus quilibet alium ſe majorem, ad quem, tamquam pars ad totum, referri poteſt; alium inſuper minorem agnoſcit, cùm numerus ex plurium unitatum collectione oriatur (§. 6.) : ergo numerus quiſcumque ſub certo reſpectu integer; ſub alio fractus dici poteſt : ſic Decas, numerus integer eſt, comparatè ad unitates, quas continet; at verò fractio erit, ſi ad centenarium, cujus aliquot partes exprimit, comparetur.

82. Unitas quoque, quamvis ipſa propriè numerus non ſit, in plures partes æquales, mentis operatione, diviſibilis eſt, quantumlibet demum exiguam quantitatis portionem denotet. Ex. gr. pes unicus in varios pollices; pollex in varias lineas &c. à geometris diviſus concipitur : dum itaque *pes* pro unitate aſſumitur, *pollex* ejus fractio eſt; *linea* verò, fractionis fractio ulterior.

COROLLARIUM.

83. Fracti ergo ab integris numeris quoad rem non differunt : ea ſola differentia eſt, quòd fracti deſignent res, quæ ſunt partes rerum ab integris numeris deſigna-

tarum; ac proinde quòd unitates fracti numeri sint relativæ; integri verò numeri unitates sint absolutæ.

84. SCHOLION. Ad hæc tirones advertere, multùm interest: causa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis & obscura videri soleat, ea est, quod priùs ad operationes fractorum ac regulas addiscendas prosiliant, quàm illorum naturam perspexerint.

85. Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri, interjectâ lineolâ, superscribitur. Eorum superior, *numerator* dicitur; quia partium ex toto acceptarum indicat numerum: inferior verò, partes, in quas integrum seu unitas divisa est, exprimit, atque adeo partium acceptarum speciem designat, ideoque *denominator* audit. Ex. gr. duæ tertiæ partes alicujus lineæ, ita scribuntur, $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3, indicat lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator verò 2, duas istiusmodi partes assignat.

COROLLARIUM.

86. Ergo fractus nihil aliud est, quàm ille partium numerus, quas acceptas esse ex toto, numerator indicat.

87. Fractio propriè dicta, unitate minor est, atque adeo per numeratorem, qui denominatore minor sit, exprimitur: attamen omnes præcisè, vel etiam plures, quàm ipsum contineat integrum, partes aliquando considerandæ se offerunt: hoc porro casu partes illæ, si ad integrum comparentur, fractionis quoque nomine veniunt: hinc fractiones aliæ unitate majores, aliæ unitati æquales sunt. Sic $\frac{4}{4}=1$: verùm hæc fractio $\frac{5}{4}$, unitatis valorem excedit.

COROLLARIUM.

88. Omnis ergo numerus ad alium quemvis sibi homogeneum relatus, fractionis instar spectari potest, cùm aliquot alterius partes enumeret: atque adeo omnis numerus integer fractioni æquivalet, cujus ipse nu-

merator eſt; unitas verò denominatorem agit: ſic numerus $3 = \frac{3}{1}$.

89. Cum fractionis numerator ipſa fractio ſit (§.86.), denominator verò partes omnes totius, atque adeo ipſum totum exprimat; conſequens planè eſt, ut quoties numerator in denominatore, toties fractus in toto; & viciſſim, quoties denominator in numeratore, toties integrum ſeu unitas in fracto contineatur.

De Fractionum Reductionibus.

90. Fractionum reductio eſt quædam earum transformatio, quam ſubeunt, ut cæteræ operationes commodiùs circa illas inſtitui poſſint.

91. Scholion. Reductio, utì & plures aliæ circa fractos operationes, arctum adeo nexum habent cum *Rationum geometricarum* theoria, ut illæ ſinè his intelligi vix queant: atque ea eſt ratio, cur varii primæ notæ mathematici ad fractiones non accedant, priuſquam tractationem de *Proportionibus* præmiſerint. Quia tamen raro contingit, ut numerorum integrorum diviſio ita peragi queat, quin quotiens fractus prodeat, circa quem novæ nonnumquam operationes inſtituendæ occurrunt; ea propter, ne quid hac in re tironem moretur, ſatius nobis viſum eſt, modum circa fractiones operandi ſubjungere, dum interim problematum demonſtrationem tantiſper differre cogimur.

PROBLEMA XI.

Numerum integrum reducere ad fractionem denominatoris dati.

92. Resol. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum: productum ſcribatur loco numeratoris. Ita reperies $3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$ &c.

PROBLEMA XII.

Fractionem datam ad alium denominatorem reducere.

93. Resol. Numerator fractionis datæ per denominatorem datum multiplicetur; factumque dividatur per

denominatorem fractionis propositæ : divisionis quotiens erit numerator quæsitus.

Ex. gr. fractio $\frac{3}{4}$ reducenda sit ad aliam, cujus denominator 12. Duc numeratorem 3 in denominatorem 12; productum 36 divide per denominatorem 4: quotiens 9, erit numerator denominatoris dati 12. Erit adeo fractio $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

94. SCHOL. Hæc fractionis datæ ad alium denominatorem reductio locum vix habet, nisi cùm denominator unus, est alterius multiplus. Porro quantitas aliqua alterius minoris *multipla* dicitur, si per hanc sinè residuo dividi possit : ita 8 est multiplum numerorum 4 & 2. Quantitas autem, cujus altera est multiplum, hujus multipli *pars aliquota* vocatur; est ita 4 pars aliquota 8. Quod si verò numerus quispiam per alterum divisus, aliquod relinquat residuum; divisor dividendi *pars aliquanta* compellatur. Sic numerus 4 est pars aliquanta 9.

PROBLEMA XIII.

Fractiones plures ad eumdem denominatorem reducere.

95. RESOL. Multiplicetur numerator, item denominator cujusvis fractionis per denominatores omnium reliquarum : habebis fractiones ad communem denominatorem reductas, & prioribus respectivè æquales.

Ex. gr. $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{4}$ reduci debeant ad communem denominatorem. Ducatur uterque terminus fractionis $\frac{1}{2}$, in 4; prodibunt $\frac{4}{8}$: tum etiam alterius tam numerator quàm denominator multiplicetur per 2; fient $\frac{6}{8}$: erunt itaque fractionum reductarum prior $\frac{4}{8}$, posterior verò $\frac{6}{8}$.

96. SCHOLION. Si denominator unius fractionis sit, aliorum denominatorum multiplus (§. 94); assumatur denominator hic pro denominatore communi, & ad eum cæteræ fractiones reducantur (§. 93), ex. gr. datæ sint hæ tres fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{12}$: quoniam 12 est multiplum 3 & 4, reducantur duæ priores ad denominatorem 12 (§. 93) ; habebis $\frac{8}{12}$, $\frac{21}{12}$, $\frac{9}{12}$.

PROBLEMA XIV.

Fractionem unitate majorem ad integra reducere.

97. Resol. Numerator per denominatorem dividatur: quotiens dabit quæsitum. Sic $\frac{9}{3}=3$. $\frac{20}{4}=5$. $\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$.

PROBLEMA XV.

Fractionem datam, ad aliam minoribus terminis expressam, reducere.

98. Resol. Quæratur numerus aliquis, per quem tam numerator, quàm denominator, exactè dividi possit; atque per hunc uterque dividatur: prodibit fractio minoribus terminis expressa. Porro expressio eò erit simplicior, quò utriusque termini divisor major fuerit: simplicissima verò, si mensuram maximam, sive maximum divisorem adhibueris.

Ex. gr. sit fractio data $\frac{24}{40}$: uterque fractionis terminus dividatur per 4; quoti 6 & 10 exhibent fractionem quæsitam, $\frac{6}{10}$. Si autem per 8 dividantur, prodit fractio $\frac{3}{5}$.

99. Scholion. Molestiùs accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quàm, iteratâ per mensuras minores sponte animadversas divisione, fractiones ad terminos minimos reducere. Cæterùm operationem hanc faciliorem experietur, qui ad sequentes numerorum proprietates animum adverterit.

1° Quivis numerus par, est multiplus binarii: quando igitur fractionis termini sunt numeri pares, semper ad eorum dimidia reduci poterunt. Ex. gr. hæc fractio $\frac{24}{64}$, reducitur ad $\frac{3}{8}$, continuâ per binarium divisione; nempe $\frac{24}{64}=\frac{12}{32}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

2° Quivis numerus terminatus in 0, per 10 & per 5 divisibilis est: itaque fractio $\frac{20}{30}$ reducitur ad $\frac{2}{3}$.

3° Quivis numerus, cujus nota dextima est 5, est multiplus 5. Hinc $\frac{15}{25}$ reduci possunt ad $\frac{3}{5}$.

4° Quivis numerus est multiplus 9, si notæ ejus omnes simplici additione in unam summam collectæ, dent numerum, qui exactè per 9 divisibilis sit: sic 108, 126, 243 sunt multipla 9.

5° Si notarum valor ſimplex, per 3, ſinè reſiduo, dividi poteſt; ipſe quoque numerus exactè per 3 diviſibilis eſt. Sic 219 per 3 diviſibilis eſſe cognoſcitur, eò quòd notæ ejus ſimul additæ, conficiant 12, qui eſt multiplus 3.

DE FRACTIONUM OPERATIONIBUS

PROBLEMA XVI.

Diverſas ejuſdem rei fractiones addere.

100. RESOL. I. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint, reducantur ad eumdem (§. 95).

II. Addantur numeratores; & ſummæ ſubſcribatur denominator communis.

Ex. gr. $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}$ (§. 95) $=\frac{17}{12}$.

Aliud. $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{96}{72}+\frac{54}{72}+\frac{12}{72}$ (§. 95) $=\frac{162}{72}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$ (§. 98 & 99).

101. SCHOLION. Si fractis adſunt numeri integri, hi in unam ſummam colligantur, illique adjùngatur ſumma fractionum. Sic $4\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}=6\frac{5}{6}$.

PROBLEMA XVII.

Fractionem datam, ex alia ejuſdem unitatis fractione data, ſubtrahere.

102. RESOL. I. Si fractiones datæ diverſos habent denominatores, reducantur ad eumdem (§. 95).

II. Numerator unius, ex numeratore alterius ſubducatur; & reſiduo denominator communis ſubſcribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (§. 98).

Aliud. $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$ (§. 95) $=\frac{1}{10}$.

103. SCHOL. I. Si fractionibus præfixi ſunt numeri integri exigui valoris, ii priùs ad fractionem adjunctam reducantur; tumque procedatur ùt in problemate præcedente (§. 102). Sic $2\frac{1}{3}-1\frac{3}{4}=\frac{7}{3}-\frac{7}{4}$ (§. 92) $=\frac{28}{12}-\frac{21}{12}$ (§. 95) $=\frac{7}{12}$.

104. SCHOL. II. Quod si verò numerus aliquis integrorum major fuerit, fractiones adjunctæ ad communem denominatorem reducantur; tumque fractio subtrahendi auferatur ex fractione minuendi, mutuatâ unitate ex minuendo, si necesse sit, ùt aliàs fieri assolet, cùm species minuendi, eam, quæ in subtrahendo sibi respondet, non continet (§. 37): integra porro ex integris, more solito, subducantur. Ex. gr. subtrahenda sint $28\frac{2}{3}$ ex $213\frac{5}{8}$: erit $213\frac{15}{24} - 28\frac{16}{24}$ (§. 95): fiat ergo $212\frac{39}{24} - 28\frac{16}{24} = 184\frac{23}{24}$.

105. SCHOL. III. In additione ac subtractione fractorum, dum eumdem obtinuimus denominatorem, nullam ampliùs circa denominatores operationem instituimus, cùm nihil aliud sint, quàm nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 85); numeratores tantùm addimus aut subtrahimus. Quoniam verò nec addi nec subtrahi possunt, nisi fuerint homogenei (§. 20); ad eumdem denominatorem sunt reducendi; & insuper ad eamdem unitates speciem referri debent: hinc ex. gr. $\frac{2}{3}$ pedis cum $\frac{1}{3}$ pollicis addi nequeunt, nisi $\frac{2}{3}$ pedis ad denominationem pollicum primò reductæ sint.

PROBLEMA XVIII.

Unam fractionem per alteram multiplicare.

106. RESOL. Ducantur numeratores per invicem; similiter & denominatores: facta constituent fractionem quæsitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (§. 98).

Aliud. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ (§. 98).

107. SCHOL. I. Si fractio per numerum integrum multiplicanda sit, solus fractionis numerator in numerum integrum datum ducatur. Sic factum ex $\frac{2}{3}$ in $4 = \frac{8}{3}$.

108. SCHOL. II. Ubi factorum alteruter, vel etiam uterque numerus *mixtus* est, seu fractionem integro adjunctam habet; reducatur 1° integrum ad fractionem ejusdem denominationis cum fractione adjuncta: hoc facto, perge ùt in probl. præcedente (§. 106). Ex. gr. $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3}$ (§. 92) $= \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ (§. 98).

109. SCHOL. III. Non mirum, quòd, ubi fractiones unitate minores sunt, factum factoribus minus resultet; cùm revera divisio sit, quæ multiplicàtio vocatur. Ex. gr. $\frac{1}{2}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$, idem est, ac dimidii dimidium invenire; quoniam si $\frac{1}{2}$ per unitatem integram multiplicaretur, ipse multiplicandus semel prodiret (§. 89 & 107).

PROBLEMA XIX.

Fractionem per aliam fractionem dividere.

110. RESOL. I. Si fractiones datæ diverſos denominatores habuerint, reducantur ad eumdem (§. 95).

II. Dein numerator dividendi dividatur per numeratorem diviſoris : prodibit quotiens quæſitus.

Ex. gr. $\frac{4}{3}$ dividendæ ſint per $\frac{2}{3}$: quotiens $= 2$. Si $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ dividere oporteat; divide $\frac{6}{8}$ per $\frac{4}{8}$ (§. 95), quotiens $= \frac{6}{4}$.

111. SCHOL. Neque verò mirum eſt, quòd fractionum quoti, numeri integri eſſe poſſint : una enim fractio alteram bis, ter &c. continere poteſt : quod ſi fiat, erit quotiens 1° caſu 2, 2° caſu 3 &c.

PROBLEMA XX.

Integrum per fractionem dividere.

112. RESOL. Integrum reſolvatur in fractionem ejuſdem denominationis cum diviſore (§. 92) : dein procedatur ùt ſupra (§. 110).

Ex. gr. ſint 3 dividenda per $\frac{2}{3}$. Dic, $3 = \frac{9}{3}$ (§. 92): tum numeratorem 9 divide per numeratorem alterum 2 : erit quotiens $= \frac{9}{2}$.

113. SCHOL. I. Eodem modo integrum ad denominatorem fractionis dividendæ reducere oportebit, ſi fractus per integrum dividendus fuerit. Sic $\frac{2}{3}$ per 2 dividendæ ſint : divide $\frac{2}{3}$ per $\frac{6}{3}$; erit quotiens $= \frac{2}{6}$ ſeu $\frac{1}{3}$ (§. 98).

114. SCHOL. II. Cùm dividendus, vel diviſor, aut uterque numerus mixtus eſt ; integrum reduc 1° ad fractionem ejuſdem denominatoris cum fractione adjuncta : reliqua porro fiant ùt in probl. (§. 110). Sic $2\frac{1}{3} : 3\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{15}{4}$ (§. 92) $= \frac{28}{12} : \frac{45}{12}$ (§. 95); atque adeo quotiens $= \frac{28}{45}$ (§. 110).

115. SCHOL. III. Hanc etiàm pro fractionum per invicem diviſione methodum aſſignare ſolent. Diviſoris termini invertan-

tur : quo facto, numeri superiores per se invicem; pariter & inferiores per se mutuò multiplicentur : erit factum quotiens quæsitus. Sic $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3}$ dividenda sit : scribe 1° $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; deinde verò $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1}$: erit quotiens $= \frac{3}{2}$.

PROBLEMA XXI.

Fractionis datæ fractionem datam invenire.

116. Resol. Prior fractio dividatur per denominatorem alterius (§. 113) : quotiens multiplicetur per 2æ fractionis numeratorem (§. 107) : factum dabit fractionem quæsitam.

Ex. gr. fractionis $\frac{3}{4}$ capiendæ sint $\frac{2}{3}$: divide 1° $\frac{3}{4}$ per 3 (§. 113); quotientem $\frac{3}{12}$ multiplica per 2; productum $\frac{6}{12}$ seu $\frac{1}{2}$ erit fractionis datæ fractio petita.

Etenim $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ bis accipienda est; atque adeo $\frac{3}{4}$ dividendo per 3, & quotum ducendo in 2, factum erit quod petebatur.

117. Schol. Fractionis datæ fractio data faciliùs obtinebitur, si fractiones illæ in se mutuò ducantur : cùm enim fractio aliqua per alteram multiplicatur, non nisi fractionis fractio sumitur (§. 109).

CAPUT III.

De Fractionibus Decimalibus.

De decimalium natura & usu.

118. Qui circa numeros integros operandi modum attentiùs consideraverit, eumque cum fractorum operationibus contulerit, haud difficulter perspiciet, quantò faciliùs in integris, quàm in fractis numeris, operationes instituantur.

119. Porro fractiones vulgares, atque adeo, quæ in ipsis occurrit, difficultatem evitare nos docuit præcla-

rum fractionum *Decimalium* inventum, quibus hodiedum, insigni prorsus compendio, utuntur Mathematici.

120. Fractiones autem *decimales* eas appellant, quæ sunt unitatis cujuspiam partes decimæ, centesimæ, millesimæ &c.; ùt $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{7}{1000}$ &c.

121. Earum usus potissimùm elucet in divisione, cùm aliquod superest residuum, quod divisorem non continet: quod si enim residuum illud ad fractionem reducatur, cujus denominator est 10, 100, 1000, &c., divisio in fractione illa diutius continuari poterit, non secus ac si in integris numeris institueretur, donec vel nullum ampliùs residuum supersit, vel certè nihil remaneat, quod aliquam mereatur considerationem; utì mox magìs elucescet.

122. Duplici porro ex capite per fractiones decimales nobis oritur operandi facilitas: primò quidem quatenus numerus quilibet nullo prorsus negotio ad decimas, centesimas, millesimas &c. reduci potest; deinde verò quòd earum denominatores omittere liceat: ipse siquidem, quem post unitates integras locum occupant, ipsarum denominationem sponte commonstrat: sicuti enim in numeris integrorum unitas quævis decadem facit in ordine proximè dexteriore, atque adeo ordo quilibet respectu ordinis sinisterioris decimas valet; ita quoque primus post unitates simplices ordo, decimarum est; alter centesimarum; tertius millesimarum &c.

123. SCHOL. Fractiones decimales generatim *scrupula* dicuntur: in specie verò *scrupula 1a*, si sint decimæ; *scrupula 2a*, si centesimæ; 3a si millesimæ &c. Earum numerator sub forma numeri integri solitariè scribitur, ac denominatoris loco signum aliquod, scrupulorum qualitatem exprimens, cyphrarum apici adjicitur. Ordinariè virgulæ (′) adhibentur: una quidem pro scrupulis *primis*, duæ pro *secundis* &c. Virgulæ itaque notæ dextimæ adjunctæ indicant, quot, præter unitatem, zeris constet fractionis denominator. Quod si fractio aliquot integra contineat, hæc, mediante puncto (.), à reliquis cyphris separantur: ita loco fractionis $\frac{3264}{1000}$ scribimus 3.2′ 6″ 4‴. Sufficiet tamen, si cyphræ ultimæ, signum conveniens, cæteris omissis, adscribatur; veluti in exemplo statim allegato, 3.264‴.

PROBLE-

PROBLEMA XXII.

Si numerus integer per alium integrum exactè dividi nequeat, in quotiente fractionem communem evitare.

124. Resol. I. Residuo divisionis adjiciatur 0, & continuetur operatio ùt ante: cyphra inde resultans, scrupula 1ª indicabit.

II. Si post hanc divisionem adhuc aliquid supersit, huic residuo rursus adjungatur 0, & ita porro, donec nihil amplius remaneat.

III. Divisione absolutâ, respiciatur quot dentur scrupulorum ordines, atque tot notarum dextimæ, adscribantur virgulæ scrupulorum indices.

Ex. gr. dividendus sit numerus 19; divisor 4. Divisione peractâ, remanebunt 3: huic residuo adde 0, atque 30 per priorem divisorem 4 divide; prodibunt 7 scrupula 1ª cum residuo 2. Hoc rursus residuum, adjuncto 0, sive 20, divide per 4. Quotiens erit 5, ita ut nihil supersit. faciet adeo quotiens 4. 75″.

COROLLARIUM.

125. Patet igitur, quomodo fractio communis ad fractionem decimalem reduci possit: nimirum numeratori adjungatur 0, tuncque per denominatorem dividatur: quod si aliquod remaneat residuum, huic aliud 0 addatur, atque ita porro divisio continuetur ùt in problemate: cæterùm quotienti tot adscribantur virgulæ, quot zeros numeratori adjunxeris.

126. Scholion. Cùm ad scrupula tertia pervenimus, ordinariè divisionem sistimus: quia, si quid remaneat, id $\frac{1}{1000}$ unitatis non adæquat, atque adeo vix ullam meretur considerationem. Quod si tamen unitas maximi esset valoris, etiam per scrupula ulteriora divisio continuanda foret.

PROBLEMA XXIII.

Fractionem decimalem integro majorem, ad integra reducere.

127. Resol. Tot à dextris reſecentur notæ, quot fractio annexas habet virgulas ſcrupulorum indices : quod reſtabit à ſiniſtris, integra deſignabit.

Ex. gr. ſit hæc fractio 24023‴ : cùm tres ipſi adſcriptæ ſint virgulæ, ſcrupula 3a indicantes; totidem cyphræ à dextris ſeparentur. Reliquum, 24 integra dabit : valebit itaque fractio propoſita : 24. 023‴.

De Operationibus Arithmeticis circa decimales.

128. Operationes Arithmeticæ in fractionibus decimalibus nihil diverſi habent ab iis, quæ in numeris integris inſtituuntur, niſi quòd, peractâ operatione, conveniens cyphræ dextræ ſignum ſit adſcribendum.

PROBLEMA XXIV.

Fractiones decimales addere, vel à ſe invicem ſubtrahere.

129. Resol. I. Notæ ejuſdem ordinis ſub ſe invicem ſcribantur, id eſt, unitates integræ ſub unitatibus integris, ut aliàs fieri ſolet; deinde ſcrupula 1a ſub ſcrupulis 1is, & ita porro.

II. Summæ adjiciatur à dextris ſignum fractionum additarum; reſiduo autem ſignum minuendi.

III. Quoad operationis modum, regulæ aliàs præſcriptæ obſerventur (§. 28 & 36).

Ex. gr. addenda ſint	23. 245‴
	8. 090
erit ſumma	31. 335‴
Sit minuendus	6. 3864⁗
ſubtrahendus	2. 8720
reſiduum =	3. 5144⁗

130. Schol. Si minuendus & ſubtrahendus non æquè multos ſcrupulorum ordines contineant, illi, qui ſcrupulis minùs ſubdiviſis conſtat, tot adjiciantur o à dextris, donec ſcrupula ejuſdem denominationis contineat cum altero, ex. gr. ſi ex $29''$ ſubtrahi debeant $183'''$; mutentur $29''$ in $290'''$, & ex his numerus $183'''$ ſubtrahatur.

PROBLEMA XXV.

Fractiones Decimales per ſe invicem multiplicare.

131. Resol. Multiplicator, more ordinario, ſub multiplicando ſcribatur: idem, qui in multiplicatione communi, inter producta partialia ſervetur ordo (§. 50): tandem producto totali adjiciatur ſumma virgularum multiplicatoris & multiplicandi.

Ex. gr.

$$\begin{array}{r} 3.27'' \\ 16'' \\ \hline 1962 \\ 327 \\ \hline 5232'''' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.97'' \\ 13' \\ \hline 891 \\ 297 \\ \hline 3861''' \end{array}$$

Demonst. Per ipſam inprimis operationem, fractionum numeratores in ſe invicem ducuntur. Deinde cùm fractionis denominator ſemper ſit unitas cum aliquot o, horum factum etiam unitas eſt, ſed cum tot o, quot in factoribus ſimul reperiuntur (§. 55): atqui virgularum numerus, factorum cuilibet adjunctus, indicat quot zeris conſtet ejuſdem denominator (§. 123): ergo producto totali ſummam virgularum adjiciendo, ſignificatur qualis ſit denominator producti. *Q. e. d.*

132. Schol. Cùm fractio decimalis plures ſcrupulorum ordines continet, uti ſæpe in producto fractionum per invicem evenit; una alterave nota à dextris, ſinè ſenſibili ejus diminutione, negligi poterit. At, ſi neglectarum prima quinarium excedit, ultima earum, quæ retinentur, unitate augenda erit. Sic in priori exemplo, neglectâ cyphrâ 8, nota altera 1 unitate augeatur: erit $522'''$ productum prope verum. In altero autem exemplo, ſi duos poſtremos ſcrupulorum ordines negligere libuerit, ut

pauciores supersint, atque hâc ratione facilior evadat operatio; loco 38', dic 39', quoniam notarum neglectarum prima, quinario major est.

PROBLEMA XXVI.

Fractionem decimalem per decimalem dividere.

133. RESOL. Dividendus, more integrorum, per divisorem dividatur: sed quotienti adjiciatur excessus virgularum dividendi supra virgulas divisoris.

Ex. gr. sit dividendus 5. 44'' : divisor 1. 6', divide 544 per 16, quotienti 34 adjice virgulam unam: erit quotiens = 3. 4'.

DEMONST. Dividendus est factum divisoris in quotientem (§. 63), atque adeo virgulæ dividendi, sunt summa virgularum divisoris & quotientis (§. 131): ergo virgulas divisoris ex virgulis dividendi subtrahendo, residuum dat virgulas quotienti adscribendas. *Q. e. d.*

134. SCHOL. Si dividendus pares aut pauciores, quàm ipse divisor, virgulas annexas habeat; numero dividendo aliquot adjiciantur 0 pro libitu, donec numerus decimalium in dividendo paullò major evadat, quàm in divisore, ut & ipse quotiens decimalibus constare possit. Ex. gr. si 44'' dividenda per 8'''; adjice duos zeros ad dextram dividendi, tuncque 4400'''' divide per 8''': quotiens reperietur = 550' sive 55. 0'.

CAPUT IV.

DE FRACTIONIBUS SEXAGESIMALIBUS.

135. Variæ occurrunt in Mathesi res, quæ in 60 partes æquales dividi & subdividi concipiuntur: sic gradus in 60 minuta; quodlibet minutum in 60 minuta secunda &c. dividitur. Similem planè in horis divisionem ac subdivisionem admiserunt Mathematici. Partes has, *fractiones sexagesimales* appellant.

136. Schol. Pars gradûs, uel & horæ ſexageſima, *minutum primum* dicitur; pars ſexageſima minuti primi, *minutum ſecundum*, & ita deinceps. Porro minutorum iidem ſunt indices, qui ſcrupulorum in fractionibus decimalibus.

PROBLEMA XXVII.

Fractiones ſexageſimales addere.

137. Resol. I. Fractiones ejuſdem denominationis ſupra ſe invicem ſcribantur.

II. Dein, initio à parte dextima facto, colligatur ſumma omnium fractionum ad iſtum ordinem pertinentium.

III. Quod ſi ſumma denominatorem communem ſeu 60 excedat; dividatur per eum; reſiduum infra columnam ſcribatur; quotiens verò addatur ordini ſexageſimalium proximè ſequenti.

$$\begin{array}{lrrrr} \text{Ex. gr.} & 35. & 24' & 32'' & 16''' \\ & 8. & 46 & 55 & 47 \\ \hline & 44. & 11' & 28'' & 3''' \end{array}$$

Nimirum minuta 3ª primò in unam colligantur ſummam, quæ in caſu poſito eſt $63'''$; quibus ope diviſionis per 60, ad ordinem ſiniſteriorem reductis, quotiens eſt 1 cum reſiduo 3 : igitur ſub columna additorum ſcribantur $3'''$, & quotiens $1''$ addatur ordini proximè ſequenti. Hic autem ordo, ſimul cum reſervato, continet $88''$: porro $88'' = 1'\ 28''$: ſcribatur ergo rurſus reſiduum hoc $28''$, & quotiens $1'$ reſervetur ; atque eodem modo continuetur operatio, donec ad integra perventum fuerit.

PROBLEMA XXVIII.

Fractiones ſexageſimales ab invicem ſubtrahere.

138. Resol. I. Subtrahendus ita infra minuendum ſcribatur, ut & ordines & notæ homogeneæ ſibi cor-

respondeant : operatio porro, ùt aliàs, instituatur, facto à dextris initio.

II. Si ordo aliquis minuendi, ordinem sibi respondentem non contineat ; mutuetur unitas ex ordine sequente, qui inde unitate minor erit, alter verò auctus ad 60.

Ex. gr. sit minuendus	17.	15′	23″
subtrahendus	9.	34	56
erit residuum	7.	40′	27″

139. SCHOLION. Patet, nihil hic fieri aliud, quàm quod supra (§. 37), cùm de additione ac subtractione in numeris diversas species exprimentibus ageremus, faciendum præcepimus : unde & necesse haud fuisset de hisce fractionibus quidquam specialiter dicere, nisi alia quædam in sexagesimalium multiplicatione ac divisione per invicem, occurreret difficultas; licèt & hæ operationes magnam cum decimalibus affinitatem habeant, uti manifestum erit in exemplis.

PROBLEMA XXIX.

Fractiones sexagesimales per invicem multiplicare.

140. RESOL. I. Numeris debitè supra se invicem scriptis, quivis ordo multiplicandi in quemvis ordinem multiplicatoris ducatur; & singulo producto addatur summa virgularum utriusque ordinis per invicem multiplicati.

II. Deinde ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri potest, & tot speciei proximè majori addantur unitates, quoties sexagenarius abjectus fuit. Res patebit in exemplo.

Sint per invicem multiplicandæ hæ duæ fractiones

	3.	12′	24″	
		2.	7′	
	21′	84″	168‴	
6.	24	48		
6.	45′	132″	168‴	= 6. 47′ 14″ 48‴

PROBLEMA XXX.

Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales dividere.

141. Resol. I. Tot à ſiniſtris dividendi ſeparentur ſpecies, quot ſpeciebus conſtat ipſe diviſor.

II. Quod ſi ſpecies maxima dividendi, ſpeciem maximam diviſoris non contineat, illa reducatur ad ſpeciem proximè minorem, & una ſpecies ampliùs pro 1° operationis membro aſſumatur.

III. Tum ſpecies maxima dividendi dividatur per ſpeciem maximam diviſoris, & quotienti aſſignetur pro indice, exceſſus virgularum dividendi ſupra virgulas diviſoris, ſi detur : aliàs quotiens hic integra continebit.

IV. Quotiens inventus ducatur in integrum diviſorem; factum ex parte dividendi ſeparata ſubtrahatur; reſiduo, ſi quod fuerit, adjiciatur ſpecies dividendi ſequens.

V. Species rurſus maxima reſidui dividatur per ſpeciem maximam diviſoris; omniaque reliqua fiant ùt ante.

Exemplum ſequens rem elucidabit. Sit dividendus 1. $13' \; 12'' \; 48'''$: diviſor $24' \; 5''$.

$$
\begin{array}{llllll}
1. & 13' & 12'' & 48''' = 3. \; 2' \; 24'' & & \\
 & 24' & 5'' & & & \\
 & & 3. & & & \\
\hline
 & 72' & 15'' & & & \\
\hline
 & & 57'' & 48''' & & \\
 & & 24' & 5'' & & \\
 & & & 2' & & \\
\hline
 & & 48'' & 10''' & & \\
\hline
 & & 9'' & 38''' = & 578''' & \\
 & & & & 24' & 5'' \\
 & & & & & 24'' \\
\hline
 & & & & 576''' & 120'''' = 578'''' \\
\end{array}
$$

Quoniam ſpecies ſiniſtima dividendi, ſpeciem ſiniſtimam diviſoris non continet, 1 integrum reſolve in minuta 1^a, ipſiſque adde minuta 1^a columnæ ſequentis, atque tum demum divide $73'$ per $24'$ diviſoris: quotientem 3 ſcribe in loco conſueto; dein per hunc quotientem multiplica integrum diviſorem, productumque $72'\ 15''$ tolle ex membro dividendo; erit reſiduum $57''$. Huic addatur ordo ſequens, $48'''$: tum quære, quoties 24 in 57: continentur autem bis: & quia virgularum exceſſus eſt ad unam, erit quotiens hâc vice $= 2'$. Per hunc porro quotientem multiplicato diviſore, exurgit factum $48''\ 10'''$, quod ſubductum ex membro dividendo ſeu ex $57''\ 48'''$, relinquit $9''\ 38'''$. Cùm ergo 9, rurſus 24 non contineant, illa reducantur ad minuta 3^a, & tandem $578'''$ dividantur per $24'$: erit ultimus hic quotiens $= 24''$: eſt igitur quotiens totalis $= 3.\ 2'\ 24''$.

142. SCHOL. Fractionum ſexageſimalium multiplicatio ac diviſio locum habere vix poteſt, niſi cùm de menſuris longitudinis & latitudinis agitur: non enim concipimus ens aliquod determinatæ ſpeciei generari, dum ex. gr. minuta longitudinis per minuta temporis, vel minuta temporis per ſe invicem multiplicantur aut dividuntur; at bene, cùm minuta longitudinis in minuta latitudinis ducuntur; tunc ſiquidem minuta in utramque hanc dimenſionem extenſa prodeunt.

CAPUT V.

DE ALGEBRA.

De calculi litteralis natura.

143. Cùm cyphris quantitatem aliquam exprimimus, jam prævié tot in ea partes diſtinctas concepimus, quot ſignificandis unitatibus cyphræ inſtitutæ ſunt; vel equidem ad tot diſtinctarum partium ideam nobis ingerendam adhibentur: illis igitur ſolùm uti licet, cùm, quantitas

quantitas determinatum partium numerum continet. Quod ſi quantitates omnimodè indeterminatæ indicari debeant, ſignis indifferentibus & nil quidquam determinantibus eæ exprimendæ erunt. Litteris porro Alphabeti A, B, C, D &c. eaſdem indigitamus.

144. Schol. Cyphrarum valor pendet à loco, quem in numero obtinent; unde dum quis in cyphris operatur, non ad cyphras tantùm attendere, ſed curare inſuper debet, ut eæ locum valori ſuo convenientem occupent. Hoc autem commodi habet calculus litteralis, quem *Algebram* item *Arithmeticam ſpecioſam* vocant, ut ad litterarum locum attendi non debeat: non mutatur enim valor $A+B$, etiamſi B primum, A verò ſecundum locum teneat: igitur $A+B=B+A$. Interim tamen utile erit, ut idem ſemper inter litteras ſervetur ordo: is porro ſit, qui eſt ipſius Alphabeti, ita ut A 1°, B 2°, C 3° &c. loco collocetur.

145. Cùm litteræ nihil determinent, una eademque littera ad quamcumque quantitatem deſignandam aſſumi poterit: attamen in eadem quæſtione diverſæ quantitates diverſis litteris exprimendæ ſunt, niſi cùm eas ſibi æquales eſſe conſtiterit.

146. Quantitas alia *poſitiva* dicitur, quæ nihilo major eſt, atque hoc ſigno + afficitur: quæ autem nihilo minor eſt, hoc ſignum — præfixum habet, & *privativa* audit.

147. Schol. Quantitas privativa debitorum inſtar eſt, quibus quis erga alium obſtrictus manet: minùs ſiquidem is poſſidet, quàm qui nullum omnino debitum haberet. Eſt itaque quantitas privativa: quantitatis veræ defectus; conſequenter non quantitas vera.

Corollarium I.

148. Non tollitur quantitas privativa, niſi per quantitatem poſitivam cujus eſt defectus; atque adeo cùm tollitur quantitas privativa, additur quantitas poſitiva; & viciſſim, in quantùm poſitivi quidpiam additur, in tantùm quantitas privativa minuitur.

COROLLARIUM II.

149. Ergo quantitates, quarum una positiva, altera privativa est, se mutuò destruunt pro ea parte, quæ utrique communis est; atque adeo $-A+A=0$. $-7+3=-4$. $-5+6=+1$.

150. SCHOLION. Quantitas nullo signo affecta, positiva censetur. Sic $A=+A$.

151. Quantitas *complexa* est, quæ ex pluribus quantitatibus, signo + junctis vel signo — separatis, componitur. Ex. gr. $A+B$; item $A+B-C$. Si quantitas aliqua nulli alteri sive per signum +, sive per signum — connectatur, ea *incomplexa* vocatur.

152. SCHOL. Quantitas incomplexa *monomium*; complexa verò generatim *polynomium* dicitur : in specie autem *binomium* vocatur, si duobus; *trinomium*, si tribus &c. *terminis* sive partibus constet.

153. Cyphra termino cuipiam præfixa, termini hujus *coefficiens* audit : sic hæc quantitas, $2A+3B$ duos coefficientes habet, nimirum 3 & 2, significantque A bis, B verò ter sumi.

154. SCHOLION. Termini, quem nullus coefficiens præcedit, coefficiens est unitas. V. gr. $A=1A$.

155. Numerus alicui quantitati litterali supernè adscriptus, quantitatis illius *exponens* dicitur : Ex gr. in A^3 exponens est 3, significat verò quantitatem A per se ipsam multiplicari & toties multiplicationem ingredi, quot unitates exponens continet : ingens igitur inter exponentem & coefficientem est discrimen : nam $3A$ ponitur loco $A+A+A$; at verò A^3 substituitur pro $A\times A\times A$.

156. SCHOL. Terminus qui nullo exponente afficitur, pro exponente habet unitatem. Ex. gr. $A=A^1$.

157. Termini quantitatis complexæ iisdem constantes litteris, *similes* dicuntur, quamvis & coefficientes

& signa diversa habeant: sic quantitas 2AB+BC —2BC duos terminos similes continet, +BC scilicet, & —2BC.

De Operationibus Algebraicis.

PROBLEMA XXXI.

Quantitates, tam eodem quàm diversis signis affectas, addere.

158. Resol. Eæ omnes in eadem serie continua scribantur; sed unicuique suum præfigatur signum.

Ex. gr. summa ex A & B & —C =A+B—C

ex A+B & C—D colligitur A+B+C—D.

159. Scholion. Cùm expressio aliqua terminos similes continet, ea ad simpliciorem formam reducenda erit; pro quo sequentes serventur regulæ.

Prima. Termini similes eodem signo affecti, semel tantummodo scribantur; ipsis suum præfigatur signum; coefficiens verò sit summa ex coefficientibus omnium horum terminorum: sic loco A+B+2B, scribe A+3B. Loco A+3A—2B—4B+C, sit 4A—6B+C.

Secunda. Termini similes diversis signis affecti & habentes coefficientes æquales, penitus omittantur (§. 149): ut si sit 2A+B—B, scribatur solùm 2A.

Tertia. Si terminorum similium diversis signis affectorum coefficientes inæquales fuerint; coefficiens minor ex majore subtrahatur, & differentia cum signo majori præfigatur (§. 149). Sic ex A—2B+3B fit A+B. Loco 2A—4A—3B+C+B, scribe —2A—2B+C.

PROBLEMA XXXII.

Quantitates, tam eodem quàm diversis signis affectas, à se invicem subtrahere.

160. Resol. In eadem serie continua cum quantitate minuenda, scribatur ea, quæ ex altera auferri de-

bet, mutato interim ſigno — in + (§. 148), & viciſſim: quantitas quæ prodit, erit reſiduum.

Ex. gr. ſit quantitas minuenda A; ſubtrahenda B: reſiduum $= A - B$.

Differentia inter $A - 2B + 3C$ & $-A + 3B - 2C$ $= A - 2B + 3C + A - 3B + 2C$: & factâ reductione, $= 2A - 5B + 5C$ (§. 159).

THEOREMA III.

Si quantitas poſitiva per poſitivam multiplicetur, quantitas poſitiva prodit.

161. Ex. gr. ſit $+A$ & $+B$: dico factum ex A in B eſſe quantitatem poſitivam.

DEMONST. Cùm A faciat plus quàm nihil (§. 146), productum faciet aliquoties B (§. 43): ſed B etiam quantitas poſitiva eſt: ergo productum nihilo majus eſt; atque adeo ex facto A in B, quantitas poſitiva prodit (§. 146). *Q. e. d.*

162. SCHOLION. Cùm quantitates per litteras deſignatæ, in ſe invicem ducendæ ſunt, factores ſimpliciter, nullo interpoſito ſigno, juxta ſe invicem ponuntur. Sic $A \times B = AB$.

THEOREMA IV.

Si factorum unus quantitas poſitiva eſt, alter verò quantitas privativa; factum quantitas privativa eſt.

163. Ex. gr. ſit $+A$ & $-B$: dico factum ex A in B eſſe quantitatem privativam $-AB$.

DEMONST. Cùm A ſit major nihilo (§. 146), productum faciet aliquoties B (§. 43): ſed ex hypotheſi, B quantitas privativa eſt; ergo productum aliquoties quantitatem privativam ſive defectum continet : proinde factum quantitatis poſitivæ in privativam, quantitas privativa eſt (§. 146). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

Si quantitas privativa per privativam multiplicatur, productum poſitivum prodit.

164. DEMONST. Sit $A = +3$, B verò quantitas privativa : ſi tum A per B multiplicetur, productum faciet $-3B$ (§. 163) : ſit dein $A = -3$; erit jam A 6 minor quàm ante (§. 160) : ergo prius productum diminuetur ad ſexies B (§. 45) ſeu ad $-6B$: ſed dum $-6B$ ex $-3B$ aufertur, reſiduum eſt $+3B$ (§. 160): ergo ſi quantitas privativa per privativam multiplicetur, productum poſitivum prodit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

165. Ergo in multiplicatione, eadem ſigna efficiunt $+$; diverſa verò $-$.

PROBLEMA XXXIII.

Quantitates complexas, tam eodem quàm diverſis ſignis affectas, in ſe invicem ducere.

166. RESOL. Omnia hìc fiant ùt in multiplicatione per cyphras, niſi quòd ſervanda ſit hæc regula : eadem ſigna efficiunt $+$, diverſa $-$. Nimirum quærantur primò producta partialia ſingulorum terminorum multiplicatoris per terminos ſingulos multiplicandi : dein hæc in unam ſummam colligantur pro facto totali.

Ex. gr.
$$\begin{array}{r} A+B \\ C+D \\ \hline +AD+BD \\ +AC+BC \\ \hline +AC+AD+BC+BD \end{array}$$

Exemplum aliud

$$\begin{array}{r} A - B + C \\ A + B - D \\ \hline AA - AB + AC \\ + AB - BB + BC \\ - AD + BD - CD \\ \hline \end{array}$$

product. totale $AA + AB - AB + AC - AD - BB + BC + BD - CD$

reductione factâ, $= AA + AC - AD - BB + BC + BD - CD$.

167. SCHOLION. Dum quantitatum complexarum multiplicatio indicanda solùm est; factores in eadem serie ponuntur, inter utrumque tamen interposito signo $\times$: & ne fortè quantitas hæc pro summa sumatur ab iis, qui inter hoc multiplicationis & additionis signum $+$, discrimen non animadverterunt, linea superducitur : hunc in modum $\overline{A+B} \times \overline{2C-D}$ indicat $A+B$ debere duci in $2C-D$. Alii singulos factores parentheseos signis includunt, ùt $(A+B)(2C-D)$.

PROBLEMA XXXIV.

Diversos coefficientes producti, ad unicum coefficientem reducere.

168. RESOL. Multiplicentur coefficientes per invicem; productum erit coefficiens quæsitus. Sic $3A2B = 6AB$.

DEMONST. $3A = A + A + A$; ergo factum ter A in $B = 3AB$: sed $2B = B + B$: ergo factum 3A in 2B facit bis 3AB, seu 6AB. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

Diversos exponentes producti ad unicum reducere, si exponentes illi eidem litteræ affixi fuerint.

169. RESOL. Littera semel tantùm conservetur pro facto, sed ipsi pro exponente detur summa exponentium ejusdem litteræ : sic $A^2A^3 = A^5$.

DEMONST. $A^2 = AA$ (§. 155), & $A^3 = AAA$; ergo $A^2A^3 = AA \times AAA$ seu $= AAAAA$, proinde A^5 (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Quantitas positiva per positivam divisa, quotientem positivum;

2° Privativa per positivam, quotientem privativum;

3° Privativa per privativam, quotientem positivum exhibet.

170. DEMONST. Dividendus est factum divisoris in quotientem (§. 63); sed quantitas positiva non nisi per alteram positivam dat productum positivum (§. 163): ergo cùm divisor, ex hypothesi, sit quantitas positiva, ipse etiam quotiens quantitas positiva erit. *Quod erat primum.*

Quantitas positiva per solam privativam generat quantitatem privativam (§. 161): ergo si divisor quantitas positiva fuerit, quotiens privativus sit oportet. *Quod erat alterum.*

Quantitas privativa non nisi per positivam producit quantitatem privativam (§. 164): ergo si divisor quantitas privativa sit, quantitas positiva prodit. *Quod erat* 3^{um}.

COROLLARIUM.

171 Ergo quotiens ex duobus terminis eodem signo affectis, semper positivus est: ex terminis verò contraria signa habentibus, privativus.

172. SCHOL. I. Divisionis algebraicæ signum erit, si quantitati dividendæ, interpositâ lineâ, divisor subscribatur: sic $\frac{A+B}{A}$ denotat quantitatem A+B per A divisam esse; atque generatim divisionis quotientem indicat.

173. SCHOL. II. Cùm quantitas incomplexa per aliam incomplexam dividitur, sola operatio quæ institui potest, in eo fere consistit, ut expressio ad simplicissimam formam reducatur; ea porro

reductio circa coefficientes solùm & exponentes versatur: quo autem modo instituenda, dicetur statim. Pro polynomiorum divisione speciales regulæ præscribentur postea (§. 174).

174. SCHOL. III. Non loquimur de eo casu, quo divisor & dividendus penes solos coefficientes discrepant; neque de dividendo, quod factum sit, divisor autem factorum unus: enimvero ex iis quæ aliàs diximus (§. 65), res adeo clara est, ut superfluum foret, dictis de casibus quidquam superaddere: sic $\frac{3A}{A} = 3$ (§. 65) $\frac{AB}{A} = B$. $\frac{ABC}{BC} = A$ (§. 162).

PROBLEMA XXXVI.

Duorum terminorum per invicem divisorum coefficientes, in quantùm fieri potest, reducere.

175. RESOL. Si alter per alterum exactè dividi potest, uterque omittatur; & in loco majoris substituatur quotiens inventus. Si divisio sinè residuo fieri nequeat, nulla circa coefficientes fiat mutatio. Si tandem coefficientes æquales sint, uterque deleatur.

Ex. gr. si quantitas 6AB dividenda sit per 3B: divide 1° coefficientem dividendi per 3, & omisso utroque coefficiente, substitue in dividendo quotientem inventum 2; tandem divide 2AB per B: erit quotiens $= 2A$.

Aliud: quantitas 4ABC dividi debeat per 2BD: erit quotiens $= \frac{2ABC}{BD}$.

Aliud: $\frac{5ABC}{5AC} = B$.

PROBLEMA XXXVII.

Duorum terminorum per invicem divisorum, exponentes reducere.

176. RESOL. I. Si eadem littera tam in dividendo, quàm in divisore occurrat cum diversis exponentibus, ea

ea illic omittatur, ubi minorem habet exponentem; & siquidem nulla alia in illo termino adsit littera, ejus loco ponatur 1 : in altero verò termino, majoris exponentis loco, adscribatur exponentium differentia.

II. Si ejusdem litteræ exponentes utrimque æquales sint, littera in utroque termino omittatur : sed, deficientibus aliis litteris, unitas substituatur.

Ex. gr. sit quantitas AB^3C dividenda per B^2C^3. Quoniam in divisore quantitas B minore exponente affecta est, quàm in dividendo; contra verò quantitas C minorem in dividendo, quàm in divisore exponentem habet; relinquatur B in solo dividendo, C autem in divisore, cum suorum respectivè exponentium differentia : erit adeo quotiens $= \frac{AB}{C^2}$.

Aliud. Sit $\frac{AB^3}{B}$: erit quotiens $= \frac{AB^2}{1}$; etenim est $\frac{AB^3}{B} = \frac{AB^3}{1B^1}$ (§. 154 & 156) : igitur, retentâ in solo dividendo litterâ B cum exponentium differentia, remanebit $\frac{AB^2}{1}$.

Aliud. Sit $\frac{A^3}{A^3B}$: erit quotiens $= \frac{1}{B}$. Quantitas quippe dividenda A^3, $= 1A^3$ (§. 154) : omissâ ergo utrimque litterâ A cum suo exponente, nil restabit præter $\frac{1}{B}$.

Aliud. Sit $\frac{AB^2}{ABC}$: erit quotiens $= \frac{B}{C}$.

177. SCHOL. I. Cæterùm id observetur, ut, si ambo divisionis termini eodem signo affecti fuerint, quotiens positivus sit; privativus verò, si diversis. Porro si quotiens privativus prodeat, signum ipsi lineæ terminis interpositæ præfigitur : ùt $\frac{4A^2B}{-AB^3} = -\frac{4A}{B^2}$. Si quotiens positivus est, nullum ipsi præmittitur signum.

178. SCHOL. II. Hæc duo quidem poſtrema problemata, ex rationum geometricarum theoria, luculenter admodum demonſtrari poſſunt : ſed res illa nondum matura eſt : quapropter hactenus ſufficiat modum, quo reductiones faciendæ ſunt, ſubindicaſſe.

PROBLEMA XXXVIII.

Quantitates complexas per invicem dividere.

179. RESOL. I. Diſpoſitis terminis ſecundùm ordinem Alphabeticum, dividatur primus terminus per 1um terminum diviſoris; quotiens ducatur in totum diviſorem; productum auferatur ex integro dividendo; reſiduumque ſubſcribatur.

II. Tum rurſus 1us reſiduorum terminus dividatur per 1um terminum diviſoris : cætera porro fiant ùt in priore operatione.

Exempli gratiâ dividenda ſit hæc quantitas : $AA-AC+2AD+2A-BB+BC-2BD+2B-2C+4D$ per $A-B+2$.

$$\begin{array}{ll}
\underline{AA-AC+2AD+2A-BB+BC-2BD+2B-2C+4D} & \\
A-B+2 & \\
\underline{AA-AB+2A} & \\
+AB-AC+2AD-BB+BC-2BD+2B-2C+4D & \\
A-B+2 & \\
\underline{+AB-BB+2B} & \\
-AC+2AD+BC-2BD-2C+4D & \\
A-B+2 & \\
\underline{-AC+BC-2C} & \\
+2AD-2BD+4D & \\
A-B+2 & \Big\{ =A+B-C+2D \\
+2AD-2BD+4D &
\end{array}$$

Diſpoſitis omnibus ùt in adjecto ſchemate, inquiratur quis ex primo dividendi termino AA per primum terminum divisoris A, exurgat quotiens : reperitur autem A. Collocetur ergo A in loco quotientis, ac per eumdem multiplicato divisore $A-B+2$, factum $AA-AB+2A$ auferatur ex dividendo; residuum $+AB-AC+2AD-BB+BC-2BD+2B-2C+4D$ subscribatur. Tum rursus primus hujus residui terminus $+AB$ dividatur per A; prodibit altera quotientis pars $+B$. Per hunc pariter quotum multiplicetur divisor $A-B+2$, atque productum $+AB-BB+2B$ tollatur ex præfato residuo : supererit $-AC+2AD+BC-2BD-2C+4D$. Pariformiter hoc residuum per eumdem divisorem dividatur, inquirendo quis ex $-AC$ per $+A$ exurgat quotiens : hoc quotiente, $-C$, ducto in $A-B+2$, factum $-AC+BC-2C$ ex $-AC+2AD+BC-2BD-2C+4D$ subducatur : residuum porro $2AD-2BD+4D$ per A divisum, dabit postremam quotientis partem $+2D$, quâ in divisorem ductâ, atque facto ex $2AD-2BD+4D$ sublato, nullum amplius reperietur residuum : est igitur quotiens totalis $= A+B-C+2D$.

180. SCHOL. I. Igitur in polynomiorum divisione, eadem prorsus est procedendi ratio ac in numeris (§. 72); at rarò hic invenitur exactus quotiens. Ipsam interim operationem instituere juvat, ut, si non omnino exactus, saltem aliquis quotiens elici possit; & non nisi pars aliqua dividendi per modum fractionis supra divisorem scribenda supersit. Porro quandonam polynomium unum per alterum exactè dividi queat, ipse usus docebit.

181. SCHOL. II. Si dividendus oriatur ex quantitatibus integris in se invicem ductis, tunc ipse per unamquamque ex illis exactè dividi poterit. Hoc autem casu expeditior erit divisio sequenti modo instituta. Inprimis quæratur quibus litteris, in divisore non reperiendis, juncta sit prima littera dividendi, illæque cum congruis coefficientibus, exponentibus & signis ponantur pro quotiente. Deinde examinetur in quibus terminis dividendi junctus sit secundus terminus divisoris cum litteris, nec in divisore nec in quotiente jam invento occurrentibus; hæque litteræ pro altera quotientis parte scribantur; atque ita deinceps. Quotiens hâc viâ inventus ducatur in divisorem, factumque subducatur ex dividendo. Quod si aliquid remaneat, illud ad dextram quotientes sub forma fractionis more solito notetur.

Sic in superiore exemplo (§. 179), primus terminus divisoris $+A$ jungitur cum A in 1° termino dividendi; cum C in 2°, cum 2D in 3°: eatenus quotiens est $A-C+2D$. Tum secundus terminus divisoris $-B$ jungitur cum B; unde quotiens eatenus est $+B$: hâc ratione quotus tandem totalis prodit $A+B-C+2D$. Quod si verò quotiens hic in dividendum ducatur, invenitur ipse dividendus.

PROBLEMA XXXIX.

Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.

182. RESOL. Omnia hìc fiant ùt in Arithmetica communi (§. 100. & 102).

Ex. gr. sint fractiones addendæ $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$: reductæ ad eamdem denominationem, erunt $\frac{AC}{BC}$ & $\frac{BB}{BC}$ (§. 95): ergo summa $= \frac{AC+BB}{BC}$ (§. 100).

Similiter sit fractio $\frac{A}{B}$ subtrahenda ex $\frac{B}{C}$: reductæ, erunt $\frac{AC}{BC}$ & $\frac{BB}{BC}$, ùt ante: ergo differentia $= \frac{BB-AC}{BC}$ (§. 160).

PROBLEMA XL.

Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.

183. RESOL. Denuo hìc omnia fiant ùt in Arithmetica communi (§. 106 & 110).

Ex. gr. sint fractiones se mutuò multiplicaturæ, $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$: erit factum $= \frac{AB}{BC}$ (§. 106).

Sint fractiones se mutuò divisuræ, $\frac{AB}{BC}$ & $\frac{A}{B}$: erit quotus $= \frac{ABB}{ABC}$ (§. 110), ergo $= \frac{B}{C}$ (§. 176).

184. Schol. Cùm quantitas fracta in integram ducenda fuerit; vel fracta per integram, aut viciſſim, integra per fractam dividenda; eodem rurſus modo procedendum erit ùt in Arithmetica numerorum (§. 107, 112 & 113) : ſic factum ex A in $\frac{C}{D} = \frac{AC}{D}$. Quotus èx $\frac{C}{D}$ per $A = \frac{C}{AD}$. Quotus ex A per $\frac{C}{D} = \frac{AD}{C}$.

CAPUT VI.

De Numerorum quadratorum et cubicorum Genesi et Analysi.

185. Cùm numerus aliquis per ſeipſum multiplicatur, factum *numerus quadratus*; ipſe autem hujus intuitu *radix quadrata* audit. Sic numerus 4, quadratus eſt; ejus verò radix quadrata 2, quatenus hic in ſeipſum ductus, numerum 4 gignit.

186. Scholion. Numerus quilibet quadratus duas dimenſiones repræſentat, in longum ſcilicet & latum; ejus verò radix unicam, vel in longum tantùm vel in latum tantùm : hæc igitur lineæ rectæ æquiparatur; ille ſuperficiei quadratæ, cujus latera ipſi radici æquantur.

187. Si numerus quadratus per ſuam radicem multiplicetur, productum *numerus cubicus* ſeu *cubus*; radix verò ejus intuitu *radix cubica* nuncupatur. Ita ſi numerus 2 in ſeipſum ducatur, prodit quadratum 4; quod ſi dein quadratum hoc per 2 multiplices, generatur cubus 8:

188. Scholion. Perſpicuum eſt, iſtiuſmodi multiplicationem in infinitum continuari poſſe. Porro facta inde genita, generali *potentiarum* aut *dignitatum* nomine inſigniri ſolent. Ipſa radix dignitas prima; ejus quadratum ſecunda; cubus tertia; quadratum quadrati quarta potentia vocatur, atque ita conſequenter.

189. *Exponens* dignitatis, eſt numerus indicans quota illa ſit. Ita exponens quadrati eſt 2, cubi 3 &c. Radicis lateri dextro jungi ſolet. Ex. gr. ſi A fuerit radix, erunt potentiæ ipſam ſequentes, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 &c.

190. Quantitatem *ad dignitatem desideratam evehere*, idem est, ac invenire factum ex ipsa, aliquoties per seipsam multiplicata. Ex. gr. 2 ad dignitatem 3^{am} evehitur, si factores 2, 2, 2 in invicem ducantur.

PROBLEMA XLI.

Quantitatem Algebraïcam monomiam ad dignitatem datam elevare.

191. Resol. Omnibus ejus litteris exponens dignitatis datæ adscribatur : ita factum erit quod petebatur.

Ex. gr. tertia dignitas quantitatis $AB = A^3B^3$: etenim factores ejus sunt AB, AB, AB; igitur factum = ABABAB (§. 162) sive AAABBB (§. 47) atque adeo $= A^3B^3$ (§. 155).

192. Schol. I. Eodem planè modo procedendum erit, si fractio quædam algebraïca ad dignitatem quampiam evehenda sit : nimirum omnibus litteris utriusque termini idem exponens adscribatur : quod si verò terminus aliquis coefficientem sibi præfixum habeat, is etiam ad dignitatem datam elevetur. Sic cubus hujus fractionis, $\frac{2AB}{3CD} = \frac{8A^3B^3}{27C^3D^3}$: est enim $\overline{\frac{2AB}{3CD} \times \frac{2AB}{3CD}} = \frac{4AABB}{9CCDD}$, & $\overline{\frac{4AABB}{9CCDD}} \times \frac{2AB}{3CD} = \frac{8A^3B^3}{27C^3D^3}$ (§. 106).

193. Schol. II. Si litteræ quædam quantitatis elevandæ, jam præviè exponentem habeant, hic per exponentem dignitatis datæ multiplicetur. Ex. gr. cubus $A^2B^3 = A^6B^9$: generaliter verò quantitatis v. g. A^2B^3 potentia m, est $A^{2m}B^{3m}$.

THEOREMA VII.

Quadratum radicis binomiæ componitur ex quadrato partis $1^{æ}$; ex bis facto $1^{æ}$ in 2^{am}; & ex quadrato partis $2^{æ}$.

194. Demonst. Quadratum prodit, si radix in seipsam ducatur : hoc porro dum fit, uterque radicis binomiæ terminus per unam 1^{o}, tum per alteram radi-

cis partem multiplicatur : quare productum componi inprimis debet ex facto partis 1ᵃᵉ in seipsam; id est, ex quadrato partis 1ᵃᵉ : 2° ex facto partis 1ᵃᵉ in 2ᵃᵐ : 3° ex facto partis 2ᵃᵉ in 1ᵃᵐ : & 4° ex facto partis 2ᵃᵉ in seipsam; hoc est, ex quadrato partis 2ᵃᵉ. *Q. e. d.*

195. SCHOL. Res elucescet in casu singulari. Sit ex. gr. radix binomia $A+B$. Erit quadratum ejus $AA+AB+AB+BB$, sive $AA+2AB+BB$. Et si fiat quadratum ex $A-B$, illud faciet $AA-2AB+BB$.

$$\begin{array}{r} A+B \\ A+B \\ \hline AA+AB \\ +AB+BB \\ \hline AA+2AB+BB. \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-B \\ A-B \\ \hline AA-AB \\ -AB+BB \\ \hline AA-2AB+BB \end{array}$$

COROLLARIUM I.

196. Ergo quadratum summæ ex duabus quantitatibus quibusvis, superat aggregatum ex quadratis earumdem, ad bis productum unius per alteram.

COROLLARIUM II.

197. Cùm radix binomia numerus est, pars ejus dextra inter unitates; sinistra inter decades locum obtinet : igitur quadratum partis dextræ, in loco dextimo; factum ex unius duplo in alteram, in 2°; quadratum denique partis sinistræ, in 3° loco terminari debet.

198. SCHOL. Scilicet partis dextræ quadratum, unitates continet; decades per unitates producunt decades; quadratum verò decadum centenarios exhibet : porro unitates locum dextimum; decades secundum; centenarii tertium locum obtinent (§. 12). Id patet in quadrato radicis binomiæ 12, in quo quadratum notæ dextræ, in loco dextimo. Factum ex 2 unitatibus in decadem, item decadis in 2 unitates, in loco 2°; quadratum tandem decadis, in 3° loco scriptum reperis.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

COROLLARIUM III.

199. Quadratum numeri cujuſcumque ex quadratis ſingularum partium, & factis ex duplo partis cujuſlibet in omnes ipsâ ſiniſteriores, componitur.

200. SCHOL. Id patefiet in exemplo. Sit radix 1264 : nota dexterior à reliquis ſeparetur : prodibit radix binomia, cujus pars una 1260, altera verò 4. Hujus binomii quadratum componetur ex quadratis ſingularum partium, & bis producto 126 ſive 1260 per 4 (§. 194). Sed quadratum 1260 æquatur quadratis partium 1200 & 60, & inſuper bis facto unius in alteram : quadratum ergo numeri 1264 facit hactenus quadratum 4 ſive 16; bis factum 4 in 1260 ſive 10080; quadratum 60, ſeu 3600; bis factum 1200 in 60 ſive 144000, & inſuper quadratum 1200 : ſed hoc æquivalet quadrato 200 ſive 40000; bis facto 1000 in 200 ſive 400000, & præterea quadrato 1000 : ergo quadratum numeri 1264 componitur ex quadratis ſingularum partium & factis ex duplo partis cujuſlibet in omnes ipsâ ſiniſteriores.

16	Quadratum partis 4æ.
5040 5040	Facta partis 4æ in ſiniſteriores.
3600	Quadratum partis 3æ.
72000 72000	Facta partis 3æ in ſiniſteriores.
40000	Quadratum partis 2æ.
200000 200000	Facta partis 2æ in primam.
1000000	Quadratum partis 1æ.
1597696	Quadratum numeri 1264.

201. SCHOL. II. Interdum ſatis eſt, ſi polynomium ad dignitatem quampiam elevatum eſſe indicetur : hoc porro caſu, omnibus ejus terminis linea continua ſuperducatur, illiuſque extremitati dexteriori exponens dignitatis datæ adjungatur. Sic ut indicetur binomium AA+B ad quadratum elevari, ſcribatur $\overline{AA+B}^2$.

202. Ex dignitate data *radicem extrahere*, eſt quærere numerum, qui aliquoties in ſeipſum ductus, datam potentiam generat. Sic ex numero 9 radicem quadratam

dratam extrahimus, cùm quærimus numerum, qui per ſeipſum multiplicatus, numerum hunc 9 producit.

203. SCHOLION. Quadratorum dumtaxat & cuborum analyſim hìc tradere intendimus. Porro radices quadratas & cubicas extracturus, omnium numerorum ſimplicium ſive cyphrarum quadrata & cubos apprimè noviſſe debet, quos ex ſequenti tabula diſcet.

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadr.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

PROBLEMA XLII.

Ex numero quocumque dato radicem quadratam extrahere.

204. RESOL. I. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi cuilibet aſſignando, initio à dextris facto. Quot verò fuerint claſſes in numero propoſito, tot notis conſtabit radix.

II. In tabula radicum quæratur numerus quadratus, ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis vel eodem proximè minor, atque ex ipſo ſubtrahatur. Ejus verò radix ad dextram, quotientis inſtar, ſcribatur.

III. Reſiduo, ſi quod fuerit, adjiciatur membrum ſequens: hocque notâ ſuâ dextimâ truncatum, per radicis inventæ duplum dividatur: quotiens per ſeipſum item per diviſorem multiplicetur, productumque ex integro operationis membro ſubducatur; ac reſiduo, ſi quod fuerit, membrum ſequens adjiciatur. Quotiens interim ad dextram radicis antea inventæ collocetur.

IV. Quod ſi operatio in reliquis membris eâdem ratione continuetur, prodibit radix quæſita.

Ex. gr. propositus sit numerus 1156. Hic in duas inprimis classes distribuatur. Tum in tabula radicum quære numerum quadratum, membro sinistimo 11 proximè minorem; est autem ille 9, cujus radix 3 scribatur ad dextram numeri propositi. Porro numerum quadratum 9 ex 11 subtrahe, ac residuo 2 adscribe classem sequentem. Hoc 2^um operationis membrum notâ dextimâ truncatum, sive 25, divide per duplum radicis inventæ, sive per 6; & quotientem, tum per seipsum tum per divisorem, atque adeo per 64, multiplica; cùmque productum ipsum operationis membrum adæquet, quotiens inventus legitimus est, numerusque propositus perfectè quadratus; radix verò totalis 34.

$$\begin{array}{r l}
11'56 & \sqrt[2]{} = 34 \\
\underline{9} & \\
\underline{256} & \\
\underline{6} & \\
64 & \\
\underline{4} & \\
256 &
\end{array}$$

DEMONST. Quadratum numeri cujuscumque componitur inprimis ex quadratis singularum cyphrarum (§. 199); porro quadratum unitatum in 1°, quadratum decadum in 3°, quadratum centenariorum in 5° loco terminatur &c. : ergo ita numerus propositus dividendus, ut in 1°, in 3°, in 5° &c. loco unum operationis membrum terminetur. In membro autem sinistimo quadratum notæ sinistimæ radicis reperitur; illius proinde radix quadrata quærenda; cùmque numerus quadratus proximè minor, in propositi numeri membro sinistimo contentus, sit 9, radix istius membri est 3, atque residuum 2 : manent igitur ex numero proposito 256 : hæc porro continent factum ex duplo radicis inventæ in cyphram alteram inveniendam, & insuper quadratum partis inveniendæ : sed factum ex duplo radicis inventæ in cyphram inveniendam, in decadibus terminatur (§. 197) : dividenda igitur 25 per 6, sive 250 per 60. Quod si porro quotiens inventus 4 per seipsum item per divisorem 6 seu 60 multiplicetur, patet productum istud & ultimæ hujus cyphræ quadratum, & factum ex duplo cyphræ 1æ in 2am exhibere: cùm ergo productum hoc, operationis ultimum membrum adæquet, habetur radix quæsita 34. *Q. e. d.*

205. SCHOL. I. Difficilior evadit operatio, quo magis à membro finitimo receditur, quoniam major continuò divisor fit, atque adeo majora producta prodeunt. Porro, si numerum propositum perfectè quadratum esse constiterit, operationem ultimam, quæ cæteroquin omnium difficillima foret, evitare poteris, si ad ultimam numeri quadrati notam animum adverteris: quadratum enim cyphræ ultimo loco inveniendæ, ipsum numerum quadratum terminat (§. 197): ex numerorum autem simplicium quadratis (§. 203) constat, in quam cyphram cujuslibet quadratum desinat: sic cyphrarum dumtaxat 2 & 8 quadratum terminatur in 4: igitur, si numeri cujusdam quadrati nota dextima fuerit 4, ultima radicis nota 2 vel 8 esse intelligitur. Cæterùm utra ex his duabus assumi debeat, nullo negotio detegitur.

206. SCHOL. II. Cùm ex polynomio Algebraico radix quadrata extrahenda est, eodem prorsus modo, tironi potissimùm, procedendum erit: at oppidò raró contingit, ut ex eo perfecta radix haberi possit. Hinc plerumque satis est, si radicis extractio indicetur. Est autem signum radicale sequens ($\surd$), cui in vertice jungitur exponens dignitatis: Ex gr. $\sqrt[2]{A+B}$ denotat radicem secundam sive quadratam ex $A+B$. Idem porro faciendum erit, si quantitas quæcumque non sit reapse potentia radicis quæ quæritur.

PROBLEMA XLIII.

Numeri, qui quadratus non est, radicem prope veram invenire.

207. RESOL. Numero proposito, 2, 4, 6 &c. dextrorsum adjungantur 0, & operatio continuetur. Istâ ratione prodibit radix in fractionibus decimalibus prope vera.

Ex. gr. sit extrahenda radix quadrata ex numero 2: ipsi ad dextram adjiciantur quatuor 0: prodibit radix 1.41″ quæ à vera non deficiet uno scrupulo 2° sive $\frac{1}{100}$.

208. SCHOL. Si radix quadrata fractionis cujuspiam quærenda est, ea ex singulis fractionis terminis, numeratore scilicet & denominatore extrahenda erit: ita radix quadrata $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$. $\sqrt[2]{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$.

THEOREMA VIII.

Cubus radicis binomiæ componitur ex cubo partis 1ᵃ; ex facto tripli quadrati partis 1ᵃ in 2ᵃᵐ; ex facto tripli partis 1ᵃ in quadratum 2ᵃ; & ex cubo partis 2ᵃ.

209. DEMONST. In exemplo singulari. Sit radix binomia $A+B$: quadratum ejus erit $AA+2AB+BB$ (§. 194): ergo illius cubus est factum ex $AA+2AB+BB$ in $A+B$ (§. 187): sed factum hoc $=A^3+2AAB+ABB+AAB+2ABB+B^3$: igitur, factâ reductione (§. 158), cubus binomii $A+B$, $=A^3+3AAB+3ABB+B^3$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

210. Cùm radix binomia numerus est, pars ejus dextra inter unitates; sinistra inter decades locum obtinet: igitur cubus partis dextræ in loco dextimo; factum ex triplo partis sinistræ in quadratum dextræ, in 2°; factum ex triplo quadrati partis sinistræ in dextram, in 3°; cubus tandem partis sinistræ, in 4° loco terminatur.

PROBLEMA XLIV.

Ex numero dato radicem cubicam extrahere.

211. RESOL. I. Numerus propositus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio à dextris facto. Quot verò fuerint classes in numero proposito, tot notis constare debebit radix.

II. In tabula radicum quæratur numerus cubicus, ei, qui classem sinistimam occupat, vel æqualis vel eodem proximè minor, atque ex ipſo ſubtrahatur. Ejus verò radix ad dextram, quotientis more, ſcribatur.

III. Reſiduo, ſi quod fuerit, adjiciatur claſſis ſequens pro novo operationis membro. Tum accipiatur triplum quadrati radicis inventæ, atque per hoc dividatur præfatum membrum duabus cyphris dextimis truncatum: quotus erit pars 2ª radicis.

IV. Diviſor ducatur in quotum, productumque alicubi ſeparatim notetur. Infra hoc, uno loco magis à dextris, terminetur factum radicis in quadratum triplum quotientis jam inventi: tandem fiat hujus quotientis cubus, iſque ſub factis præcedentibus ita ſcribatur, ut uno loco magis à dextris terminetur (§. 210): porro tria hæc facta in unam ſummam colligantur, eaque ex operationis membro ſubducatur.

V. Quod ſi operatio per reliquas claſſes juxta regulam tertiam & quartam continuetur, prodibit radix quæſita.

Ex. gr. extrahenda ſit radix cubica ex 74088. Diviſo hoc numero in duas claſſes, poſt tres primas cyphras interpoſitâ lineolâ, quæratur radix cubica primi membri à ſiniſtris; eſt autem proximè 4: ſcribatur itaque 4 à latere, & ejus cubus 64 ſubtrahatur è 74; erit reſiduum 10. Huic reſiduo ad dextram adſcribatur membrum alterum numeri dati; habebitur numerus 10088 pro 2° operationis membro. Accipiatur radicis inventæ quadratum triplum, atque per 48 dividatur 100; erit quotiens 2. Quotus hic priori radicis parti jungatur, ſimulque in diviſorem ducatur: quadratum etiam triplum hujus quotientis per radicem

$$
\begin{array}{lr}
74'088 & \sqrt[3]{\ } = 42 \\
\underline{64} & \\
100'88 & 16 \\
 & \underline{3} \\
 & 48 \\
 & \underline{2} \\
 & 96 \\
 & 48 \\
 & \underline{8} \\
 & 10088
\end{array}
$$

4 multiplicetur : hæc 2 producta ſimul cum quotientis cubo, eo modo quo in ſchemate, ſibi invicem ſubſcripta, in unam ſummam colligantur; quæ cùm æqualis ſit operationis membro, nec alia in numero propoſito ſuperſit claſſis, erit radix cubica ex 74088 accuratè 42.

212. SCHOL. I. Quoniam cubus partis dextimæ in loco dextimo numeri cubici terminatur (§. 210); cubus verò ex. gr. 3 in 7, cubus 4 in 4, cubus 5 in 5 deſinit &c. : patet, ultimam numeri cubici cyphram, dextimam radicis notam determinare.

213. SCHOL. II. Si numerus aliquis cubicus non eſt, ex eo perfecta radix haberi nequit : radix tamen prope vera obtinebitur, ſi numero propoſito aliquot zerorum ternaria à dextris adſcribantur, atque operatio continuetur. Ex. gr. ſit extrahenda radix cubica ex numero 6 : ipſi ad dextram adjiciantur duo zerorum ternaria, ita ut fiat 6.000000'''''' : ex hoc demum numero invenietur radix cubica 1.81'', quæ à vera non deficiet uno ſcrupulo 2° ſive $\frac{1}{100}$.

214. SCHOL. III. Radix cubica fractionis cujuſdam cubicæ ex ſingulis fractionis terminis educenda eſt. Quod ſi cubica non ſit, ſolummodo indicanda erit (§. 206). Idem faciendum, ſi ex quantitate algebraïca non cubica, radix extrahenda fuerit.

PROBLEMA XLV.

Ex monomio Algebraïco radicem quamcumque extrahere.

215. RESOL. I. Singularum litterarum exponentes dividantur per exponentem dignitatis, cujus radix quæritur : ſi quotiens numerus integer eſt, extractio radicis perfecta erit. Quod ſi verò fractio fuerit, radicis extractio ſolummodo indicanda erit.

II. Si monomio coefficiens aliquis præfixus ſit, ex hoc quoque juxta regulas pro numeris præſcriptas radix petita extrahatur.

Ex. gr. extrahenda ſit radix quadrata ex $4A^6B^4$: quære 1° radicem quadratam coefficientis 4; eſt autem

2 : tum divide utrumque exponentem quantitatis propositæ per exponentem dignitatis cujus radix quæritur, sive per 2 : prodibit tandem $\sqrt[2]{2A^3B^2}$.

Demonst. Exponens, quo litteræ quantitatis cujuspiam ad certam dignitatem elevatæ afficiuntur, componitur ex exponente litterarum radicis ducto in exponentem dignitatis, ad quam monomium evectum est (§. 193) : igitur exponentes litterarum quantitatis propositæ dividendo per exponentem dignitatis, cujus radix quæritur, quotiens exponentem litterarum radicis exhibebit. *Quod erat unum.*

Deinde, cùm quantitas aliqua ad dignitatem quampiam evehitur, ad eamdem quoque elevatur coefficiens quantitatis datæ (§. 192); atque adeo coefficiens quantitatis, ad certam dignitatem elevatæ, est ejusdem potentiæ cum quantitate, cujus est coefficiens : ergo ex coefficiente monomii dati radicem petitam extrahendo, radicis coefficientem obtinebis. *Quod erat alterum.*

Corollarium.

216. Ergo ex quantitate aliqua, cujus exponens est 5, vel 7, vel 11 &c.; & generaliter talis, qui nec respectu 2, nec respectu 3 est multiplus; neque radix quadrata neque cubica extrahi potest.

217. Scholion. Radix quinta, septima, undecima &c. ex quantitate aliqua numerica ad talem dignitatem elevata simili modo extrahitur, quo quadratam & cubicam inquisivimus : eam tamen operationem magis magisque difficilem evadere, quo radix altior extrahenda est, nemo non videt. Sed quoniam raró admodùm tironi obtingit radices illas extrahendi necessitas, ideo theoriæ ipsarum non immorabimur : qui ad sublimioris matheseos scientiam pedem promovere cupit, is inter alia consulere poterit Elementorum Mathematicorum viri summi *Christiani Wolfii* Tom. I.

CAPUT VII.

DE ÆQUATIONE SIMPLICI.

218. Dum, poſitis quibuſdam conditionibus, quantitatis cujuſpiam incognitæ valor determinari petitur, *Problema* ſeu *Quæſtio proponi* dicitur : ùt, cùm quæritur qualem ætatem pater habeat, ſi hic 24 annis ſenior ſit filio; ætas verò utriuſque ſimul 64 annos adæquet.

219. In omni problemate quantitas aliqua cuidam alteri æqualis occurrit : quod ſi autem quantitates illæ terminis algebraïcis exprimantur, *Æquatio conſtrui* dicitur.

COROLLARIUM I.

220 Eſt igitur æquatio : duarum quantitatum æqualium ſub diverſis terminis expreſſio. Ex. gr. $a+x=b-c$.

COROLLARIUM II.

221. Omnis æquatio conditionem exprimit, ſub qua una quantitas alteri æqualis pronunciatur.

222. SCHOL. Quævis æquatio ex duobus membris componitur. Termini, qui à ſiniſtra parte ſigni æqualitatis poſiti ſunt, *primum*; qui verò dextram partem occupant, *ſecundum* æquationis *membrum* conſtituunt.

223. *Problema ſolvere*, eſt invenire valorem ſingularum quantitatum incognitarum, quas problema complectitur; aut oſtendere, conditiones ejus contradictionem involvere.

224. Quoniam quantitatis incognitæ valor determinari nequit, niſi aliqua ejus ad quantitatem quampiam cognitam relatio innoteſcat; manifeſtum omnino eſt, problema determinari non poſſe, niſi quantitates quædam

quædam cognitæ, quas *datas* appellant, æquationem ingrediantur.

225. Schol. Quantitates datæ, primis alphabeti litteris a, b, c, d &c.; incognitæ postremis, x, y, z designari solent, ut ex æquationis inspectione, quæ quantitates inquiri debeant, illico discerni possit. Quantitates æquales, uti & æqualium partes, eâdem litterâ indigitantur. Primæ litteræ denominationis quantitatum datarum, utiliter quandoque adhiberi poterunt.

226. Æquatio dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis, sive, si inter quantitates incognitas nulla ad dignitatem quampiam evecta sit. Ex. gr. $a+b=x$.

227. *Analysis* est ars ita æquationes datas invertendi ac immutandi, ut nova prodeat æquatio, cujus unum membrum solis quantitatibus cognitis, alterum verò unicâ quantitate incognitâ constet.

228. Schol. Cùm æquationes, quæ ad problematis propositionem fiunt, conditionem contineant, quâ positâ, & non aliàs, quantitas incognita detegenda est (§. 221); patet, primam operam in eo ponendam esse, ut, quàm potest accuratissimè atque nitidissimè, æquationes construantur.

229. Æquationum resolutio, *substitutione* atque operationum Arithmeticarum ope perficitur. Porro reductionis modi sequentibus nituntur principiis.

Axioma I.

230. Quæ æqualia sunt eidem tertio, sunt quoque inter se æqualia.

Axioma II.

231. Quæ æqualia sunt, ea sibi mutuò, salvâ quantitate, substitui possunt.

Corollarium.

232. Sint igitur hæ duæ æquationes : $b=a+x$, & $y=x+b$: non mutabitur æqualitas, si loco b in 2ª

æquatione ponatur $a+x$; atque adeo fieri poterit hæc nova æquatio : $y=a+2x$.

233. SCHOLION. En modum æquationes resolvendi per *substitutionem*.

AXIOMA III.

234. Si æqualibus idem tertium addas, aggregata æqualia erunt.

COROLLARIUM I.

235. Cùm quantitas quædam privativa tollitur, tunc additur quantitas positiva cujus est defectus (§. 148): ergo si in uno æquationis membro quantitas aliqua privativa deleatur, illaque in altero membro cum signo + scribatur, non mutabitur æqualitas.

COROLLARIUM II.

236. Sit igitur hæc æquatio : $a-b=x$: erit quoque $a=b+x$.

AXIOMA IV.

237. Si ex æqualibus idem tertium auferas, residua erunt æqualia.

COROLLARIUM I.

238. Si ergo in uno æquationis membro quantitas aliqua positiva deleatur, illaque in altero membro cum signo — scribatur, non tollitur æqualitas.

COROLLARIUM II.

239. Sit itaque hæc æquatio : $a+x=b$: erit etiam $a=b-x$.

240. SCHOL. Reductio duobus hisce modis instituta, per *transpositionem* fieri dicitur. Utroque enim casu terminus ex uno æquationis membro in aliud transfertur.

AXIOMA V.

241. Si æqualibus æqualia addas, aggregata sunt æqualia.

Corollarium I.

242. Ergo cùm duæ aut plures æquationes simul adduntur, subsistere pergit æqualitas.

Corollarium II.

243. Igitur ex his duabus æquationibus, $x+2y=20$; & $2x+y=22$; formari potest hæc nova æquatio : $3x+3y=42$. Similiter hæ : $x+y-z=10$, & $y+z-x=20$; dant hanc : $x+y-z+y+z-x=30$; atque adeo, reductione factâ ad simplicissimam formam (§. 159), $2y=30$.

Axioma VI.

244. Si ex æqualibus æqualia tollas, residua sunt æqualia.

Corollarium I.

245. Ergo cùm una æquatio ex altera aufertur, non mutatur æqualitas.

Corollarium II.

246. Sint igitur hæ æquationes : $x+2y=45$, & $2x+3y=75$: erit etiam $2x+3y-x-2y=75-45$, seu $x+y=30$ (§. 159); & hanc deinde ex prima subtrahendo, fit $y=15$.

Axioma VII.

247. Si æqualia per idem tertium multiplices, facta prodeunt æqualia.

Corollarium I.

248. Quod si igitur utrumque æquationis membrum per eamdem quantitatem multiplicetur, æqualitas non mutatur.

COROLLARIUM II.

249. Sit ergo hæc æquatio : $\frac{a}{x} = 6$: multiplicato utroque membro per x, erit $a = 6x$. Item si $a + \frac{b}{x} = dx$; formari poterit hæc æquatio: $ax + b = dxx$.

250. SCHOL. In hoc axiomate fundatur, quòd, si tres aut plures quantitates per se mutuò multiplicentur, idem planè resultet productum, quovis ordine in se invicem ducantur factores (§. 47). Sint enim ex. gr. tres factores A, B & C. Quoniam $AB = BA$ (§. 46); erit $C \times AB = C \times BA$, & $AB \times C = BA \times C$ (§. 247). Porro est $C \times AB = AB \times C$ (§. 47) : ergo $CAB = CBA = ABC = BAC$ (§. 162 & 230) : Sed quia $CB = BC$; est $A \times CB = A \times BC$, item $BC \times A = CB \times A$ (§. 247) : igitur $CAB = CBA = ABC = BAC = ABC = BCA$, hoc est, factum idem producitur, quocumque ordine factores in se invicem ducantur.

AXIOMA VIII.

251. Si æqualia per idem tertium dividas, quoti æquales erunt.

COROLLARIUM I.

252. Ergo si utrumque æquationis membrum per eamdem quantitatem dividatur, inter quotientes æqualitas non mutatur.

COROLLARIUM II.

253. Sit igitur hæc æquatio : $ax - bc = ad + c$: utrumque ejus membrum dividendo ex. gr. per a, prodibit hæc æquatio : $x - \frac{bc}{a} = d + \frac{c}{a}$.

254. SCHOL. Cùm ex problematis conditionibus una vel plures æquationes constructæ sunt; eæ modis propemodùm infinitis inverti atque immutari possunt, ita ut novæ semper ac novæ æquationes prodeant : ex illis autem aliquæ ad problematis resolutionem neutiquam ; aliæ plus, aliæ minùs conducunt. In quas porro æquationes, ex omnibus possibilibus, æquatio prima resolvi debeat, ipse quæstionis status potius, quàm regulæ ullæ speciales, operantem edocebit ; maximè si longior usus & exercitatio accesserint. Nos igitur exemplis solùm nonnullis rem ipsam declarabimus.

PROBLEMA XLVI.

Datâ summâ duarum quantitatum x & $y=100$; datâ insuper inter ipsas differentiâ $=30$, sic ut x major y; x item y invenire.

255. RESOL. Ex problematis conditionibus hæ primò æquationes construantur: $x+y=100$. Et $x=y+30$. Hoc facto, quantitati x in prima æquatione substituatur $y+30$: obtinebitur hæc æquatio, $y+y+30$, sive $2y+30=100$ (§. 230). Deinde tollatur utrimque numerus 30; prodibit tandem per *transpositionem* hæc æquatio: $2y=100-30$ (§. 237), sive $2y=70$; atque adeo membrum utrumque dividendo per 2, erit $y=35$ (§. 252): sed $x=y+30$ ex hypothesi; ergo $x=35+30$ seu $=65$.

$$\begin{aligned} x+y&=100\\ x&=y+30\\ 2y+30&=100\\ 2y&=100-30\\ y&=35. \end{aligned}$$

COROLLARIUM.

256. Cùm $x=y+30$ ex hypothesi, proinde $y=x-30$; erit $2x=x+y+30$, & $2y=x+y-30$; ergo $x=\frac{x+y+30}{2}$, & $y=\frac{x+y-30}{2}$: igitur, si duo numeri inæquales fuerint, est major inter illos æqualis medietati summæ auctæ ad dimidium differentiæ; minor verò, summæ dimidiæ demptâ medietate differentiæ.

207. SCHOL. I. En alium resolutionis modum. Quoniam $x+y=100$, erit $x=100-y$ (§ 237): igitur cùm $x=y+30$, fiet per *substitutionem*, $100-y=y+30$. Deinde per *transpositionem*, $100=2y+30$ (§ 235): tollendo itaque utrimque 30, fiet tandem ùt ante, $100-30=2y$ (§. 237), adeoque $2y=70$.

358. SCHOL. II. Magis expedire videtur, ut in initio quantitates datæ per numeros potius, quàm per litteras indicentur: cùm enim numeri magis distinctam quantitatis ideam menti ingenerent, quàm litteræ; tiro Arithmeticus analysin institutu-

rus, quantitates datas ab incognitis meliùs discernet, atque adeo quantitatum quæsitarum ad datas comparationem faciliùs absolvet.

PROBLEMA XLVII.

Invenire numerum, cujus partes aliquotæ, qualescumque & quotcumque simul sumptæ, ipsum superant numero dato.

259. RESOL. Partes illæ, cùm ad communem denominatorem reductæ fuerint (§. 95), in unam summam colligantur; atque ex ea auferatur numerus quæsitus. Residuum æquivalebit numero dato.

Ex. gr. sit hæc æquatio: $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=x+55$. Erit $\frac{46}{24}x$ seu $\frac{23}{12}x=x+55$: ergo $\frac{23}{12}x-x$, seu $\frac{11}{12}x=55$ (§. 237): proinde utrumque æquationis membrum dividendo per 11, erit $\frac{1}{12}x$ sive $\frac{x}{12}=5$ (§. 251): igitur $x=12\times5$ seu $=60$ (§. 63 & 247).

COROLLARIUM.

260. Ex his facile est colligere, quomodo procedendum sit, si diversarum alicujus numeri fractionum summa, unam vel plures alias ejusdem numeri partes aliquotas simul sumptas, numero dato superet; ùt si $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}x+\frac{1}{5}x+26$: nimirum fiat inprimis $\frac{30}{60}x+\frac{40}{60}x=\frac{45}{60}x+\frac{12}{60}x+26$ (§. 95 & 96): tum $\frac{70}{60}x=\frac{57}{60}x+26$ (§. 100): ergo $\frac{70-57}{60}x=26$ (§. 237), sive $\frac{13}{60}x=26$: igitur $\frac{1}{60}x$ sive $\frac{x}{60}=\frac{26}{13}$ (§. 251) seu $=2$; atque adeo $x=60\times2$, sive 120.

PROBLEMA XLVIII.

Datâ summâ duorum numerorum x & $y=72$; datâ insuper summâ ex $\frac{2}{3}x$ & $\frac{3}{5}y=45$; x item y invenire.

261. RESOL. Per conditiones problematis fiant primò hæ duæ æquationes: $x+y=72$; & $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=45$.

His ita constitutis, utrumque secundæ æquationis membrum ducatur in factum ex fractionum denominatoribus; prodibit nova æquatio $\frac{30}{3}x+\frac{45}{5}y=45\times15$ (§. 107 & 248), sive $10x+9y=675$ (§. 97). Deinde prima æquatio multiplicetur per 10: erit $10x+10y=720$: ex hac tandem æquatione præcedentem subtrahe; habebis $y=45$ (§. 244): sed $x=72-y$ (§. 238): ergo $x=72-45$ (§. 231), adeoque $x=27$.

262. SCHOL. En methodum generalem, æquationem quamvis à fractionibus liberandi: attamen non minùs prona quandoque est problematis resolutio, si utrumque æquationis membrum per unius solummodo fractionis denominatorem multiplicetur. Sic in exemplo mox posito, secunda æquatio $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=45$ ducatur in 3, nascetur hæc æquatio; $\frac{6}{3}x+\frac{9}{5}y$ sive $2x+\frac{9}{5}y=135$: quod si tum primam æquationem $x+y=72$ per 2 multiplices, prodit $2x+2y=144$; ex qua præcedens ablata relinquit hanc: $\frac{1}{5}y$ seu $\frac{y}{5}=9$, ergo $y=9\times5$, atque adeo $=45$.

PROBLEMA XLIX.

Dum $\frac{2}{3}x$ auferuntur ex $\frac{3}{4}y$, residuum est 11; $\frac{2}{3}y$ verò superant $\frac{1}{4}x$ ad 18: numeros x & y invenire.

263. RESOL. Ex problematis conditionibus, est $\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}y-11$; & $\frac{2}{3}y=\frac{1}{4}x+18$; ergo $\frac{1}{4}x=\frac{2}{3}y-18$ (§. 238): tum multiplicetur 1ª æquatio per 3, secunda verò per 8; vertetur prima in hanc: $\frac{6}{3}x$ sive $2x=\frac{9}{4}y-33$; secunda autem in hanc: $\frac{8}{4}x$ seu $2x=\frac{16}{3}y-144$ (§. 248): ergo $\frac{9}{4}y-33=\frac{16}{3}y-144$ (§. 230): igitur $\frac{9}{4}y=\frac{16}{3}y-111$ sive $\frac{16}{3}y=\frac{9}{4}y+111$ (§. 235): ergo $\frac{16}{3}y-\frac{9}{4}y$, sive $\frac{64-27}{12}y=111$; sunt adeo $\frac{37}{12}y=111$; igitur $\frac{1}{12}y$ sive $\frac{y}{12}=\frac{111}{37}$ seu $=3$, proinde $y=12\times3$ seu $y=36$; itaque $\frac{9}{4}y=81$: sed $2x=\frac{9}{4}y-33$; ergo $2x=81-33$ sive $2x=48$.

CAPUT VIII.

DE ÆQUATIONE QUADRATICA.

264. Æquatio *quadratica* dicitur, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit. Ut $x^2 = a^2 + b^2$. *Cubica*, si ad tres; ut $x^3 = a^3 + b$ &c.

265. SCHOL. De æquatione cubica aut dignitatum superiorum in his elementis non agemus, quoniam ea pro tironibus solùm conscribere suscepimus.

THEOREMA IX.

Si A *major* B, *quadratum* A *superat quadratum* B *ad productum differentiæ inter* A & B *per aggregatum ex* A & B.

266. DEMONST. Cùm A sit major B ex hypothesi, A componitur ex B & parte aliâ, quæ vocetur P; erit adeo $A = B + P$: itaque $AA = BB + 2BP + PP$ (§. 194); unde $AA - BB = 2BP + PP$: sed $A + B = 2B + P$; ergo $2BP + PP = AP + BP$: igitur $AA - BB = AP + BP$. *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

Datâ summâ duarum quantitatum, item differentiâ inter quadrata earumdem, invenire numeros.

267. RESOL. Differentia inter quadrata dividatur per summam datam; quotiens dabit differentiam inter numeros : cùm itaque eorum insuper summa innotescat ex hypothesi, facilè uterque numerus determinabitur (§. 256).

Ex. gr. Sit $x + y = 20$; & $x^2 - y^2 = 80$: erit $x - y = 4$: ergo $x = 12$ (§. 256).

PROBLEMA

PROBLEMA LI.

Datâ differentiâ inter duos numeros, item datâ differentia inter quadrata eorumdem; ipsos numeros invenire.

268. Resol. Differentia inter quadrata dividatur per differentiam inter numeros, quotiens dabit eorumdem summam; atque ita facili negotio ipsi numeri deteguntur.

Ex. gr. sit $x^2-y^2=80$; & $x-y=4$: erit $x+y=20$; atque adeo $y=8$ (§. 256).

THEOREMA X.

Si A sit major B; quadratum A cum quadrato B superat quadratum differentiæ inter A & B, ad bis factum ex A in B.

269. Demonst. Sit $A=B+P$: erit $AA=BB+2BP+PP$ (§. 193), atque adeo $AA+BB=2B^2+2BP+PP$; ergo $AA+BB-PP=2B^2+2BP$, sive $=2B\times B+P$: sed $A=B+P$ ex hypoth. : ergo $AA+BB-PP=2AB$. *Q. e. d.*

THEOREMA XI.

Quadratum summæ ex 2 numeris inæqualibus, facit quater productum unius per alterum, & insuper quadratum differentiæ inter eosdem.

270. Demonst. Quadratum summæ ex duobus numeris facit quadratum cujusque & insuper bis productum unius per alterum (§. 193) : sed, si numeri inæquales sint, quadratum unius cum quadrato alterius superat bis factum unius numeri in alterum, ad qua-

dratum differentiæ inter illos (§. 266): ergo quadratum summæ ex 2 numeris inæqualibus facit quater productum unius per alterum, & insuper quadratum differentiæ inter eosdem. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

271. Quoniam factum ex $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ quadratum medietatis summæ ex duobus numeris inæqualibus, superat productum unius per alterum ad quadratum semidifferentiæ.

PROBLEMA LII.

Datâ summâ duorum numerorum & eorum facto, ipsos numeros invenire.

272. RESOL. Factum quadruplicetur, atque ex quadrato summæ subducatur; residuum dabit quadratum differentiæ (§. 270): hujus porro radix ipsam differentiam inter numeros exhibebit.

Ex. gr. sit $x+y=20$; & $xy=96$: erit $\overline{x+y}^2=400$, & $4xy=384$: ergo quadratum differentiæ inter x & $y=16$, atque adeo differentia 4; igitur unus $=8$, alter $=12$.

273. Aliter: sumatur quadratum summæ dimidiæ, atque ex hoc auferatur factum unius in alterum; residuum dabit quadratum semidifferentiæ (§. 271).

PROBLEMA LIII.

Datâ summâ duorum numerorum, item summâ quadratorum eorumdem, ipsos numeros invenire.

274. RESOL. Summa quadratorum ex quadrato summæ auferatur, residuum dabit bis productum unius numeri per alterum (§. 194). Quod si ergo resi-

duum hoc duplicatum ex quadrato ſummæ auferas: quod remanet, erit quadratum differentiæ inter numeros quæſitos (§. 270).

Ex. gr. ſit $x+y=20$; & $xx+yy=208$: erit $2xy=192$, ergo $4xy=384$: ſed $\overline{x+y}^2=400$: igitur quadratum differentiæ inter x & $y=16$.

PROBLEMA LIV.

Datâ differentiâ inter duos numeros & facto eorumdem, ipſos numeros invenire.

275. RESOL. Facto unius numeri per alterum quadruplicato addatur quadratum differentiæ; prodibit quadratum ſummæ ex numeris quæſitis (§. 270); ex quo proinde ſi radicem extrahas, habebis ſummam ex numeris quæſitis.

Ex. gr. ſit $x-y=4$; & $xy=96$: erit $4xy=384$, & $\overline{x-y}^2=16$: itaque $\overline{x+y}^2=400$: igitur $x+y=20$.

PROBLEMA LV.

Datâ differentiâ inter duos numeros, item ſummâ quadratorum eorumdem; ipſos numeros invenire.

276. RESOL. Quadratum differentiæ ex ſumma quadratorum tollatur; reſiduum erit bis factum unius numeri in alterum (§. 269) : dein reſiduum hoc ſummæ quadratorum addatur, obtinebitur quater productum unius per alterum & inſuper quadratum differentiæ (§. eod.); atque adeo quadratum ſummæ ex numeris quæſitis (§. 270).

Ex. gr. ſit $x-y=6$; & $x^2+y^2=218$: erit $2xy=182$: ergo x^2+y^2+2xy ſive $\overline{x+y}^2=400$. Proinde $x+y=20$, atque ita $2y=14$.

PROBLEMA LVI.

Dato facto unius numeri in alterum, & insuper summâ quadratorum eorumdem; ipsos numeros invenire.

277. RESOL. Factum duplicetur, atque auferatur ex summa quadratorum: residuum dabit quadratum differentiæ inter numeros quæsitos (§. 269). Porro, invento hujus radice, procedatur ùt in probl. 54°.

Ex. gr. sit $xy = 90$, & $x^2 + y^2 = 261$: erit quadratum differentiæ inter x & $y = 81$: ergo $4xy +$ quadrato differentiæ, sive $\overline{x+y}^2 = 441$, consequenter $x+y = 21$.

PROBLEMA LVII.

Invenire numerum, qui cum suo quadrato facit numerum datum.

278. RESOL. Sit numerus quæsitus x; numerus datus 156: erit per conditionem problematis $xx + x$ sive $x \times x + 1 = 156$: ergo $4x^2 + 4x + 1^2 = 625$: sed $4x^2 + 4x + 1^2 = \overline{2x+1}^2$ (§. 270): ergo $2x + 1 = \sqrt[2]{625}$ seu $= 25$.

279. SCHOL. Si in hac æquatione $x^2 + x = 156$, secundum terminum x seu $1x$ pro bis facto $\frac{1}{2}$ in x spectes, erit $x^2 + x + \frac{1}{2}^2 = \overline{x+\frac{1}{2}}^2$ (§. 194): ergo si cuilibet æquationis membro addas $\frac{1}{4}$, quodlibet quadratum erit. Generatim, si unum æquationis membrum quantitatem quamdam quadratam incognitam contineat, cum facto insuper radicis ejusdem in quantitatem aliquam cognitam; tunc quadratum dimidii quantitatis cognitæ utrique æquationis membro adjiciatur: ita *compleri* dicitur quadratum membri, quod priùs quadratum non erat.

CAPUT IX.

DE RATIONE AC PROPORTIONE QUANTITATUM.

280. Quævis duæ quantitates homogeneæ ita comparatæ ſunt, ut una alteram ejuſve partem aliquoties contineat. Ea porro homogeneorum relatio, eſt id quod *rationem* appellant.

COROLLARIUM I.

281. In fractione numerator & denominator ad eamdem unitatem referuntur; ſuntque adeo quantitates homogeneæ (§. 8): ergo numeratorem inter & denominatorem *ratio* intercedit.

COROLLARIUM II.

282. Quoties fractionis numerator in denominatore, toties fractus in integro continetur (§. 89): ergo eſt fractus ad integrum ſeu ad unitatem, ut numerator ad denominatorem.

COROLLARIUM III.

283. Quoties unitas in multiplicatore, toties multiplicandus in producto continetur (§. 45): eſt igitur multiplicandus ad productum, ùt unitas ad multiplicatorem.

COROLLARIUM IV.

284. Quoniam dividendus eſt factum diviſoris in quotientem; erit diviſor ad dividendum, ùt unitas ad quotientem (§. præced.).

285. SCHOL. In omni ratione duæ quantitates interveniant neceſſe eſt: hæ porro quantitates, rationis *termini* dicuntur. Nominatim autem *antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *conſequens* verò, ad quem prior comparatur.

286. Numerus exprimens quoties consequens in antecedente contineatur, rationis *exponens* audit. Est igitur exponens rationis : quotiens qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit.

COROLLARIUM.

287. Est fractus ad integrum, ùt numerator ad denominatorem (§. 282) : sit ergo numerator antecedens, denominator verò consequens rationis : erit exposita ratio fracti ad integrum. Sic si $A = \frac{2}{3}B$, erit A ad B, ùt 2 ad 3.

288. SCHOL. Divisionis signum est duplex punctum (:) inter dividendum & divisorem collocatum (§. 67) : ratio igitur commodè indicabitur, si signum illud inter antecedentem & consequentem statuatur medium : sic si rationis antecedens A, consequens B; ratio ipsius A ad B commodè indicatur per A : B.

289. Si terminus minor sit pars aliquota majoris (§. 94), ratio majoris ad minorem *multiplex*; minoris verò ad majorem *submultiplex* dicitur. Speciatim in 1° casu *dupla* vocatur, si exponens 2; *tripla*, si exponens 3 &c. In altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; subtripla, si $\frac{1}{3}$ &c. : ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam; contra verò 2 ad 6, est in ratione subtripla; facit enim binarius tertiam senarii partem.

290. SCHOL. Cùm numerus minor est pars aliquanta majoris (§ 94), nec rationi majoris ad minorem, nec minoris ad majorem speciale nomen tribuemus; veriti ne nominum varietas, distinctionis loco, confusionem pariat.

291. *Rationes eædem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eamdem relationem habent, sive quarum antecedentes per suos consequentes divisi, dant quotientes seu exponentes æquales. Rationes eædem etiam *similes* dicuntur.

292. Rationum duarum identitas, *proportio* audit : & hinc 4 duarum rationum æqualium termini, *proportionales* vocantur.

293. Schol. Cùm proportio nihil aliud sit, quàm rationum identitas seu æqualitas (§. præced.); illa commodè indicabitur, si inter utrumque ejus membrum, æqualitatis signum = interponatur. Sit ex. gr. A ad B, ùt C ad D : exprimetur ea proportio hoc modo : $A:B=C:D$.

294. Proportio *continua* est, si consequens 1æ rationis idem sit cum antecedente 2æ; ùt si $A:B=B:C$. *Discreta* verò ea est, in qua consequens 1æ diversus est ab antecedente 2æ; qualis est in numeris 3, 6, 4, 8; vel etiam si $A:B=C:D$.

295. Schol. In proportione continua terminus qui consequentis primæ & antecedentis secundæ rationis vices gerit, *medius proportionalis*; in discreta verò primus & quartus *extremi*; secundus autem & tertius *medii proportionales* dicuntur.

296. *Ratio composita* dicitur, quam habet productum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus, ad productum ex earumdem consequentibus : ita 24 ad 48 est in ratione composita 2 ad 8 & 6 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus &c. rationibus similibus componitur : ita $48:3$ est ratio duplicata $4:1$ & $12:3$.

297. *Partes similes* dicuntur eæ, quæ ad sua respectivè tota eamdem rationem habent : sic $\frac{1}{3}$ A & $\frac{1}{3}$ B sunt partes similes quantitatum A & B.

Axioma.

298. Si $A:B=C:D$; erit etiam $C:D=A:B$.

THEOREMA XII.

Rationes similes eidem 3æ, sunt similes inter se.

299. Demonst. Rationes similes sunt, quarum exponentes æquales sunt (§. 291) : ergo si duæ rationes eidem 3æ similes, earum exponentes hujus exponenti æquales : sed quæ æqualia eidem 3°, ea sunt æqualia inter se ; igitur si duæ rationes eidem 3æ similes, ea-

rum exponentes æquales ſunt; atque adeo rationes ſimiles eidem 3æ, ſunt ſimiles inter ſe. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Ergo rationes ſimilibus ſimiles, ſunt etiam inter ſe ſimiles.

THEOREMA XIII.

Quæ æqualia ſunt, ad idem 3um eamdem rationem habent.

301. DEMONST. Sit $A=B$: dico eſſe $A:C=B:C$. Nam A & B diviſa per idem 3um C, dant quotientes æquales (§. 251): ſed rationes, quarum antecedentes per ſuos conſequentes diviſi, dant quotientes æquales, eædem ſunt (§. 291): ergo eſt $A:C=B:C$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Ergo æqualium ad æqualia eadem eſt ratio; atque adeo ſi $A=B$, & $C=D$, erit $A:C=B:D$.

THEOREMA XIV.

Si fuerit $A:B=C:D$; *erit etiam* invertendo $B:A=D:C$.

303. DEMONST. A per B & C per D diviſa, dant quotientes æquales ex hypotheſi: ſit igitur quotiens Q: erit $B:A=1:Q$; & $D:C=1:Q$ (§. 284): ergo rationes B ad A & D ad C ſunt ſimiles eidem 3æ; ſunt itaque ſimiles inter ſe (§. 299) igitur $B:A=D:C$. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

Partes ſimiles ſunt inter ſe, ut tota quorum ſunt partes.

304. DEMONST. Quoties totum majus T continet totum minus *t*, toties pars quælibet quantitatis T continet

tinet partem ſimilem ipſius t : ſic $\frac{6}{12}=\frac{5}{10}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ &c. : ergo partes ſimiles ſunt inter ſe, ùt tota quorum ſunt partes. *Q. e. d.*

Corollarium.

505. Ergo tota ſunt inter ſe, ùt partes ſimiles eorumdem (§. 296).

Theorema XVI.

Si A:B=C:D; *erit etiam* A:C=B:D.

306. Demonst. Si antecedentes A & C, conſequentibus B & D minores fuerint, eorum partes ſimiles ſunt (§. 297) : erunt igitur ùt tota (§. 304), atque adeo ùt conſequentes : ergo A:C=B:D.

Si verò antecedentes A & C, conſequentibus B & D majores fuerint; A & C tota ſunt, B verò & D partes ſimiles eorum : ſed tota ſunt inter ſe, ùt partes ſimiles eorumdem (§. 305) : ergo A:C=B:D. *Q. e. d.*

Corollarium I.

307. Eſt multiplicandus ad productum, ùt unitas ad multiplicatorem (§. 283) : ergo eſt etiam multiplicandus ad unitatem, ùt productum ad multiplicatorem (§. præced.), & productum ad multiplicatorem, ùt multiplicandus ad unitatem (§. 297).

Corollarium II.

308. Quoniam diviſor ad dividendum, ùt unitas ad quotientem (§. 284) : erit quoque diviſor ad unitatem, ùt dividendus ad quotientem (§. 306); itaque *invertendo* : quotiens ad dividendum, ùt unitas ad diviſorem (§. 303).

309. Schol. Cùm quis antecedentem primæ ad antecedentem ſecundæ, & conſequentem primæ ad conſequentem ſecundæ ra-

tionis comparat, terminos *alternat* : atque hinc novæ hocce modo ex rationibus datis proportionis deductio, *alternando* fieri dicitur.

THEOREMA XVII.

Quæ ad idem 3^{um} eamdem rationem habent, ea æqualia sunt.

310. DEMONST. Sit $A:C=B:C$: dico esse $A=B$. Nam $A:B=C:C$ (§. 306) : sed $C=C$: ergo $A=B$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

311. Si $A:B=A:C$, erit quoque $A:A=B:C$ (§. 306); atque adeo $B=C$.

COROLLARIUM II.

312. Ergo, quæ ad æqualia eamdem rationem habent, æqualia sunt : & vicissim, ad quæ æqualia eamdem rationem habent, ea itidem æqualia sunt.

COROLLARIUM III.

313. Fractionis denominator integrum exprimit (§. 85) : ergo ejusdem integri fractiones, quarum numeratores ad suos respectivè denominatores eamdem rationem habent, inter se æquales sunt.

THEOREMA XVIII.

Si quantitates quascumque, ex. gr. A & B, per eamdem 3^{am} C multiplices; facta AC & BC sunt inter se ùt A & B.

314. DEMONST. Est $AC:A=C:I$, & $BC:B=C:I$ (§. 307) : igitur rationes $AC:A$ & $BC:B$ eædem eidem $3^{æ}$, adeoque æquales inter se (§. 297) ; sive $AC:A=BC:B$: ergo etiam *alternando* $AC:BC=A:B$ (§. 306). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

315. Ergo, cùm uterque fractionis datæ terminus per eamdem 3^{am} quantitatem multiplicatur, eadem manet ratio numeratoris producti ad ejusdem denominatorem, quæ est numeratorem inter & denominatorem fractionis multiplicatæ.

COROLLARIUM II.

316. Ejusdem numeri fractiones, quarum numeratores ad suos respectivè denominatores eamdem rationem habent, inter se æquales sunt (§. 313): igitur, dum fractio-nis uterque terminus ~~aliqua~~ per eamdem 3^{am} quantitatem multiplicatur, fractio, quæ prodit, priori æqualis est.

317. SCHOL. I. En tandem demonstrationem problematis de reductione plurium fractionum ad eumdem denominatorem (§. 95).

318. SCHOL. II. Cùm numerus quilibet integer fractioni æquivaleat, cujus ipse numerator est, unitas verò denominatorem agit (§. 88): patet quoque ratio problematis de reductione numeri integri ad fractionem denominatoris dati (§. 92).

THEOREMA XIX.

Si A & B per idem C dividas, erunt quotientes directè ùt dividendi.

319. DEMONST. Sit $\frac{A}{C} = D$, & $\frac{B}{C} = E$: dico esse $D:E = A:B$. Erit enim $CD = A$, & $CE = B$ (§. 63): ergo $CD:CE = A:B$ (§. 302): sed $CD:CE = D:E$ (§. 314): ergo etiam $D:E = A:B$ (§. 299). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

320. Igitur, si numeratorem item denominatorem fractionis per eumdem 3^{um} numerum dividas, erit quotus, qui prodit, priori fractioni æqualis.

321. SCHOL. I. Habes hìc itaque demonstratum problema de reductione fractionis datæ ad aliam minoribus terminis expressam (§. 98).

322. SCHOL. II. Modus duorum terminorum Algebraicorum per invicem diviſorum coefficientes & exponentes reducendi (§. 175 & 176), in præced. quoque problemate fundatur: ille enim in eo conſiſtit, ut uterque terminus per eamdem tertiam quantitatem utrique communem dividatur: patet porro, quotos in ea directè eſſe ratione, quæ inter dividendum & diviſorem intercedit (§. 319): quod ſi igitur quotientem quantitatis dividendæ, per eum, qui ex diviſione diviſoris per illam tertiam emergit, dividas; prodit quotus quæſito æqualis (§. 291). Ex. gr. dividenda ſit quantitas 4ABC per 2BD: diviſâ quantitate utrâque per 2, erit primus quotiens $= 2ABC$, alter $= BD$: eſt autem $4ABC : 2BD = 2ABC : BD$ (§. 319); ergo $\frac{4ABC}{2BD} = \frac{2ABC}{BD}$. Pariter ſit AB^3C ſive ABBBC dividenda per B^2C^3 ſeu per BBCCC: ſi utramque dividas per B^2C ſive per BBC, communem menſuram maximam; erit primus quotiens $= AB$, ſecundus verò $= CC$ ſive C^2 (§. 65 & 160): eſt porro $AB^3C : B^2C^3 = AB : C^2$: ergo $\frac{AB^3C}{B^2C^3} = \frac{AB}{C^2}$.

THEOREMA XX.

Si rationum ſimilium $A:B=C:D$ *antecedentes per idem* 3^{um} *dividas; erunt quotientes* $F:G=B:D$.

323. DEMONST. Quia $A:B=C:D$ ex *hypotheſi*, erit quoque *alternando*, $A:C=B:D$ (§. 306): ſed $F:G = A:C$ (§. 319): ergo etiam $F:G=B:D$ (§. 299). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

324. Ergo, ſi rationum ſimilium $A:B=C:D$ conſequentes per idem 3^{um} dividas, erunt quotientes $F:G = A:C$.

COROLLARIUM II.

325. Igitur, ſi rationum ſimilium $A:B=C:D$ antecedentes per idem E, & conſequentes per idem F dividas, quoti eamdem inter ſe rationem habebunt.

THEOREMA XXI.

Si rationum similium A:B=C:D *antecedentes per idem* E *multiplices; erit* AE:CE=B:D.

326. Demonst. Nam AE:CE=A:C (§. 314): sed quoniam A:B=C:D ex *hypothesi*, est quoque *alternando*, A:C=B:D (§. 306): ergo AE:CE=B:D (§. 299). *Q. e. d.*

Corollarium I.

327. Similiter, si rationum æqualium A:B=C:D consequentes per idem E multiplices, erunt facta BE:DE=A:C.

Corollarium II.

328. Ergo, si rationum similium A:B=C:D antecedentes per idem E, consequentes verò per idem F multiplices, erunt facta AE:BF=CE:DF. Erit siquidem AE:CE=B:D (§. 326): sed B:D=BF:DF (Coroll. præced.): ergo AE:CE=BF:DF (§. 299).

THEOREMA XXII.

Si fuerint quotcumque rationes similes; erit aggregatum ex antecedentibus ad aggregatum ex consequentibus, ùt antecedens cujusvis rationis ad suum consequentem.

329. Ex. gr. si A:B=C:D. Dico esse A+C:B+D =A:B.

Demonst. Sit enim $A=\frac{1}{2}B$, $C=\frac{1}{2}D$: erit $A+C=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D$: ergo A+C:B+D=A:B. *Q. e. d.*

Corollarium. I.

330. Cùm A:B=C:D; est etiam *alternando*, A:C =B:D; ergo A+B : C+D=A:C, sive aggregatum

ex terminis $1^{æ}$ rationis ad aggregatum ex terminis $2^{æ}$, ut antecedens $1^{æ}$ ad antecedentem $2^{æ}$.

COROLLARIUM II.

331. Quoniam $A+B:C+D=A:C$ (§. præced.); erit etiam *alternando*, $A+B:A=C+D:C$; five aggregatum ex terminis $1^{æ}$ rationis ad antecedentem $1^{æ}$, ut aggregatum ex terminis $2^{æ}$ ad antecedentem $2^{æ}$.

COROLLARIUM III.

332. Quia $A+C:B+D=A:B$ (§. 329) erit quoque $A+C:A=B+D:B$; five uti aggregatum ex antecedentibus ad antecedentem $1^{æ}$ rationis, ita aggregatum ex consequentibus ad consequentem $1^{æ}$.

333. SCHOL. Cùm quis ex rationibus similibus, ex. gr. $A:B=C:D$, uno ex hisce modis novam proportionem eruit, *componendo* concludere dicitur.

THEOREMA XXIII.

Si fuerit ùt totum $A+C$ *ad totum* $B+D$, *ita ablatum* C *ad ablatum* D; *erit etiam reliquum* A *ad reliquum* B, *ùt totum* $A+C$ *ad totum* $B+D$.

334. Ex. gr. Sit $A+C$ duplum $B+D$, & C duplum D: dico esse A duplum ipsius B, five $A=2B$.

DEMONST. Ex *hypothesi* est $A+C=2B+2D$: sed $A+C-C=A$, & $2B+2D-2D=2B$; ergo $A=2B$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

335. Ergo, si $A+C:B+D=C:D$; erit etiam $A:B=C:D$ (§. 299).

THEOREMA XXIV.

In rationibus similibus, differentia terminorum 1ª rationis est ad differentiam terminorum 2ª, ùt 1us antecedens ad 2um antecedentem.

336. Ex. gr. sit $A:B=C:D$, sed A major B, & C major D: dico esse $A-B:C-D=A:C$.

DEMONST. Cùm A major B ex *hypothesi*; faciet A ipsum B & partem aliam, quæ vocetur P; similiter C faciet D & partem aliam, quæ dicatur Q: erit adeo $A=B+P$, & $C=D+Q$: ergo cùm $A:B=C:D$, ex *hypothesi*, erit $B+P:B=D+Q:D$; igitur *alternando*, $B+P:D+Q=B:D$: ergo etiam $B+P:D+Q=P:Q$ (§. 334): consequenter $P:Q=B+P:D+Q$, atque adeo $P:Q$ sive $A-B:C-D=A:C$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

337. Ergo est etiam $P:A=Q:C$ (§. 306), sive uti differentia inter terminos 1æ rationis ad 1um antecedentem, ita differentia inter terminos 2æ rationis ad 2um antecedentem.

COROLLARIUM II.

338. Si $A:B=C:D$, est etiam *alternando*, $A:C=B:D$: ergo, cùm P differentia inter A & B, sit ad Q differentiam inter C & D, ùt A ad C (§. 336); est differentia antecedentium ad differentiam consequentium, ùt antecedens quilibet ad suum consequentem.

339. SCHOL. I. Quotiescumque ex proportione data, per theorema præcedens, novæ rationes æquales deducuntur, conclusio *dividendo* fieri dicitur.

340. SCHOL. II. Ex iis, quæ jam dicta sunt, perspicuum est, ex 4 quantitatibus proportionalibus datis, ex. gr. $A:B=C:D$,

ſolâ terminorum *inverſione* atque *alternatione*, 7 alia rationum æqualium paria deduci poſſe: nimirum

$A:B=C:D$	$B:A=D:C$
$A:C=B:D$	$C:A=D:B$
$C:D=A:B$	$D:C=B:A$
$B:D=A:C$	$D:B=C:A$

Componendo verò & *dividendo* ſequentes erui poterunt proportiones.

$A+B:A=C+D:C$	$A+B:B=C+D:D$
$A+C:A=B+D:B$	$A+C:C=B+D:D$
$A-B:A=C-D:C$	$A-B:B=C-D:D$
$A-C:A=B-D:B$	$A-C:C=B-D:D$

Octo porro poſtremæ alternari rurſus & inverti, atque deinde novâ denuo ratione componi ac dividi poterunt, adeo ut facilè quiſque perſpexerit, ex unica proportione infinitas propemodum rationes æquales deduci poſſe.

CAPUT X.

DE REGULIS PROPORTIONUM.

THEOREMA XXV.

Si fuerint 4 quantitates proportionales, factum extremarum æquivalet facto mediarum.

341. DEMONST. Sit $A:B=C:D$; erit $AD:BC=CD:DC$ (§. 328): ſed $CD=DC$ (§. 46): ergo $AD=BC$ (§. 312). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVI.

Si $AD=BC$: *erit* $A:B=C:D$.

342. DEMONST. Eſt $CA:DA=C:D$ (§. 314); ſed DA ſeu $AD=BC$ ex hypotheſi: ergo CA ſeu $AC:BC=C:D$: igitur, cùm etiam $AC:BC=A:B$ (§. 314), erit quoque $A:B=C:D$ (§. 299). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

343. Ergo, si idem numerus A per duos alios B & C dividatur, erit ùt 1us divisor B ad 2um C, ita 2us quotiens y ad 1um x : est enim $Bx = A$ item $Cy = A$ (§. 63), atque adeo $Bx = Cy$, ergo $B : C = y : x$.

344. SCHOL. Cùm 4 numeri eo ordine proportionem constituunt, quo eos efferre solemus aut quo naturaliter sese offerunt, tunc *directè* proportionales dicuntur : sic, si $A : B = C : D$, est C ad D in ratione directa A ad B. At, si $A : B = D : C$, erit C ad D in ratione *inversa* seu *reciproca* A ad B; atque ita, dum idem numerus per duos alios dividitur, sunt quotientes in ratione reciproca divisorum.

PROBLEMA LVIII.

Datis tribus numeris 2, 6, 3, quartum proportionalem invenire.

345. RESOL. Secundus 6 ducatur in 3um 3; productum 18 dividatur per primum 2 : quotus 9 erit quartus quæsitus.

DEMONST. Factum ex 2° in tertium æquivalet producto primi per quartum (§. 341) : ergo factum 18 dividendo per primum 2, quotus 9 est terminus 4us (§. 65). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

346. Eâdem ratione, datis duobus terminis extremis proportionis cujuspiam, item uno ex mediis, restantem invenies : duc nimirum extremos in invicem, atque productum divide per medium datum : quotus terminum quæsitum exhibebit.

COROLLARIUM II.

347. Duarum fractionum æqualium numeratores eamdem ad suos denominatores rationem habent (§.

313) : dividendo igitur factum ex numeratore 1æ in denominatorem 2æ, per denominatorem 1æ ; numerator 2æ prodit (§. 93).

COROLLARIUM III.

348. Datâ igitur ratione inter A & x, dato insuper valore A ; duc valorem A in exponentem x, factum verò divide per exponentem A : erit quotus inde prodiens valor ipsius x. Ex. gr. sit $A:x=3:2$, & $A=24$ flor. : multiplica 24 per 2, productumque 48 divide per 3 : quotiens 16 flor. dabit valorem quantitatis x.

349. SCHOL. I. Cùm $A:x=3:2$, & $A=24$ florenis ; erunt etiam 24 flor. ad 3, ùt valor ipsius x desideratus ad 2 (§. 306) : ergo 24 floreni divisi per 3, & valor x per 2, dant quotientes æquales (§. 291) : cùm igitur divisor in quotientem ductus producat dividendum (§. 63) ; divide 24 flor. per 3, & dein quotum 8 flor. multiplica per quantitatis x exponentem 2 ; prodibunt rursus 16 floreni, valor ipsius x. Quoniam verò operatio hæc in minoribus numeris exercetur, facilior est, atque adeo præcedenti haud rarò præferenda.

350. SCHOL. II. Resolutio hujus problematis, vulgò *regula trium* appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Porro ob summam, quam in vita communi præstat, utilitatem, etiam *regula aurea* vocatur. Facilè autem apparet, hâc regulâ nusquam esse utendum, nisi dum de numerorum datorum proportione constiterit.

PROBLEMA LIX.

Datis summis, ex. gr. 1000 & 1500 floren., collatis à Joanne & Petro in societate; dato insuper communi lucro 500 floren.; invenire lucrum cujusque.

351. RESOL. & DEMONST. Joannes lucratus fuerit 200, Petrus 300 florenos. Sunt enim lucra in ratione directa collatorum, sive est ùt summa Joannis ad summam Petri, ita lucrum Joannis ad lucrum Petri : ergo aggregatum ex summis ad summam Joannis, ùt

aggregatum ex lucris ad lucrum Joannis (§. 331): sed aggregatum ex summis = 2500, & aggregatum ex lucris = 500 ex hypothesi; erit ergo hæc proportio:

$$2500 : 1000 = 500 : \text{lucrum Joannis}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \hline 500000 \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ \hline 200 \text{ lucrum Joannis} \end{array} \right. \end{array}$$

item hæc:

$$2500 : 1500 = 500 : \text{lucrum Petri}$$

$$\begin{array}{r} 1500 \\ \hline 750000 \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ \hline 300 \text{ lucrum Petri.} \end{array} \right. \end{array}$$

352. SCHOL. I. Regula, quæ hocce casu applicatur, *regula societatis* vocari consuevit.

353. SCHOL. II. Insigni subinde compendio locus datur. Nimirum, cùm præsertim numeri dati majores sunt, ii per communem mensuram maximam dividantur; & quoti, qui etiam rationis inter numeros datos exponentes sunt, in ipsorum loca surrogentur. Sic in superiori problemate, est summa Joannis ad summam Petri ùt 2:3; ergo aggregatum ex summis ad summam Joannis ùt 5:2; sed ùt illud ad hanc, ita aggregatum ex lucris ad lucrum Joannis (§. 331): ergo erit 5:2 = 500 floreni : lucrum Joannis. Item 5:3 = 500 floreni : lucrum Petri.

354. SCHOL. III. Methodus hæc *practica Italica*, vel etiam *regula falsæ positionis* audit. Docet autem ex numeris quibusdam fictis, attamen qui ipsis desideratis proportionales sint, veram numerorum quæsitorum quantitatem invenire. Numerorum fictorum unitates, *supposita* vocabimus, ut eas à veris distinguamus. Sic, quia lucrum Joannis (sch. præc.) est ad lucrum Petri ùt 2:3, lucra ipsorum simul sumpta 5 *supposita* facere dicimus: cùm igitur simul faciant 500 florenos; 5 supposita = 500 florenis; atque adeo 1 suppositum = 100 florenis: sed lucrum Joannis duobus, lucrum Petri tribus suppositis æquale est; ergo Joannes 200, Petrus verò 300 florenos lucratus fuerit.

PROBLEMA LX.

Datis duabus aut pluribus rationibus, rationem ex ipsis compositam invenire.

355. RESOL. Antecedentes rationum datarum in se invicem ducantur; pariter & consequentes : facta dabunt rationem ex rationibus datis compositam (§. 296).

Ex. gr. sint rationes 2 : 3 & 4 : 5 : erit ratio ex ipsis composita 8 : 15.

356. SCHOL. Quantitas aliqua in ratione composita aliarum esse cognoscitur, si illa eò major evadat, quò aliæ majores fuerint; & vicissim eò minor, quò aliæ minores : atque hoc unicum est rationis compositæ criterion. Ex. gr., quoniam quò plures sunt operarii, quò tempus laboris longius, quò celeritas ipsorum major, eò quoque majus absolvunt opus; ideo opera quælibet in ratione composita sunt operariorum, temporis, celeritatis &c.

PROBLEMA LXI.

Si 36 operarii tempore 20 dierum absolvunt opus quodpiam : quanto tempore, cæteris paribus, idem opus perfecissent 15 operarii.

357. RESOL. & DEMONST. 48 diebus. Sunt enim opera in ratione composita operariorum & temporum : cùm igitur idem sit utrobique opus, est factum ex prioribus operariis & eorum tempore, æquale facto ex posterioribus operariis & tempore quæsito (§. 355) : ergo, si primum factum dividas per posteriores operarios, quotiens 48 dat tempus quæsitum (§. 65).

COROLLARIUM.

358. Ergo, si diversi operarii idem aliquod opus vel opera æqualia absolvant; sunt illi, si cætera paria esse ponas, in ratione reciproca temporum, quæ impendunt (§. 342 & 344).

PROBLEMA LXII.

Datâ ratione inter ſummas collatas in ſocietate, item inter tempora quibus illæ manent expoſitæ; invenire rationem inter lucra.

359. Resol. & Demonst. Multiplicetur ſumma quælibet per ſuum tempus; quæ eſt ratio inter facta, talis quoque erit inter lucra. Sunt etenim lucra in ratione compoſita ſummarum & temporum.

Ex. gr. ſit ſumma Joannis ad ſummam Petri ùt 3 : 2; maneat ſumma Joannis 4, ſumma Petri 5 annis in ſocietate: erit lucrum Joannis ad lucrum Petri ùt 12 : 10, ſive ùt 6 : 5.

$$\begin{array}{c} 3 : 2 \\ \underline{4 : 5} \\ 12 : 10 \end{array}$$

PROBLEMA LXIII.

Datâ ratione inter ſummas & inter lucra, invenire rationem inter tempora.

360. Resol. Ducatur lucrum primi in ſummam 2^{i}, & lucrum 2^{i} in ſummam primi: ùt primum factum ad 2^{um}, ita tempus primi ad tempus ſecundi.

Ex. gr. ſit ſumma Joannis ad ſummam Petri ùt 3 : 2; lucrum ejus ad lucrum Petri ùt 4 : 3; erit tempus Joannis ad tempus Petri ùt 8 : 9.

$$\begin{array}{c} 3 : 2 \\ \underline{4 : 3} \\ 8 : 9 \end{array}$$

Demonst. Dicatur ſumma Joannis A, ſumma Petri B; tempus Joannis x, tempus Petri y: erit lucrum Joannis ad lucum Petri ùt $Ax : By$ (§. præc.): ergo factum ex lucro Joannis in ſummam Petri $= ABx$; factum verò ex lucro Petri in ſummam Joannis $= ABy$: atqui $ABx : ABy = x : y$ (§. 314): ergo, ſi lucrum primi ducatur in ſummam ſecundi, & lucrum ſecundi in ſummam primi, erunt facta in ratione directa temporum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

361. Ergo, datâ ratione inter tempora item inter lucra Joannis & Petri, duc lucrum Joannis in tempus Petri, & lucrum Petri in tempus Joannis : erit ùt primum factum ad secundum, ita summa Joannis ad summam Petri : erit siquidem primum factum $= Axy$, secundum autem $= Byx$: sed $Axy : Byx = A : B$ (§. 314) : proinde primum factum ad secundum, ùt summa Joannis ad summam Petri.

PROBLEMA LXIV.

20 Operarii tempore 18 dierum, singulis diebus 8 horis laborantes, absolvunt opus quodpiam : quot diebus, cæteris paribus, $\frac{2}{3}$ ejusdem operis perficerent 16 operarii, quàvis die 12 horis laborantes?

362. RESOL. & DEMONST. 10 diebus. Sunt enim opera directè in ratione composita antecedentium & consequentium, (§. 356), sive est primum opus ad secundum, ùt factum ex antecedentibus ad factum ex consequentibus : sed priores operarii ad posteriores ùt $5:4$, diætæ ad diætas ùt $2:3$; ergo, cùm dies priorum sint 18, erit factum ex antecedentibus $= 180$; atque adeo, cùm primum opus ad 2um ùt $3:2$, erit factum ex consequentibus $= 120$: dividantur itaque 120 per 4×3 sive per 12; quotus 10 dabit numerum dierum, qui quæritur.

$$\begin{array}{rl}
5 & : 4 \\
2 & : 3 \\
18 & \\
\hline
180 & \\
3 & : 2 \\
\hline
360 & \left\{ \frac{3}{120} \left\{ \frac{12}{10} \right. \right.
\end{array}$$

363. SCHOL. Per hanc procedendi methodum tres tandem numeri prodeunt, ex quibus per regulam trium quartus proportionalis eruitur.

PROBLEMA LXV.

Si 10 homines tempore 4 annorum consumunt 120 mensuras tritici: quot mensuris indigebunt 15 homines tempore 3 annorum?

364. RESOL. & DEMONST. 135 Mensuris. Sunt quippe annonæ consumptæ in ratione composita consumentium & temporum (§. 356): sed consumentes sunt ùt 2 : 3, tempora verò ùt 4 : 3; ergo annona data ad quæsitam ùt 8 : 9 : sed data = 120 mensuris: igitur per regulam trium invenitur quæsita = 135.

$$\begin{array}{r} 2 : 3 \\ \underline{4 : 3} \\ 8 : 9 \\ \underline{120} \\ 1080 \left\{ \dfrac{8}{135} \right. \end{array}$$

PROBLEMA LXVI.

Datâ quantitate vini generosi & vini vilioris: dato insuper pretio unius poculi vini cujuslibet; determinare pretium poculi mixti.

365. RESOL. Multiplicetur quantitas quælibet per pretium unius poculi: factorum summa dividatur per aggregatum ex quantitatibus commixtis: quotus dabit pretium poculi mixti.

Ex. gr. data sint pocula

generosioris	12	vilioris	8	
pretium 1 poc.	18		13	asses
	96		104	
	12			
pretium gen.	216	asses		
pret. vilioris	104			
pret. miscelæ	320	$\left\{ \dfrac{20}{16} \right.$	pocula / asses pret. poc. mixti.	

PROBLEMA LXVII.

Dato pretio argenti purioris, item pretio argenti minùs puri; invenire in qua proportione miſceri debeant, ut obtineatur argentum pretii cujuſdam medii dati.

366. RESOL. Quæratur differentia inter pretium ſummum & pretium medium; item differentia inter hoc & pretium infimum: erit utì prior differentia ad ſecundam, ita quantitas deſumenda ex argento minùs puro, ad quantitatem argenti purioris.

Ex. gr. valeat una uncia argenti purioris 42 florenos, uncia alterius 37 florenos; uncia autem miſcelæ 40 florenos: erit argentum purius ad minùs purum, ùt 3 : 2.

$$\begin{array}{ccc} 42 & 40 & 37 \\ 3 & & 2 \end{array}$$

DEMONST. Quantitas capienda ex argento puriori vocetur x, minùs purum dicatur y; erit miſcela $=x+y$. Pretium medium ſit a, ſummum vocetur $a+p$, infimum verò $a-q$: erit pretium totale $=ax+ay$ (§. 365): ſed pretium argenti purioris admixti $=ax+px$, alterius autem $=ay-qy$: ergo $ax+ay=ax+ay+px-qy$: igitur $px-qy=o$, atque adeo $px=qy$: eſt itaque $x:y=q:p$ (§. 342). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

367. Dato itaque pretio ex. gr. unius menſuræ vini, facilè invenies quantitatem aquæ commiſcendæ, ut una menſura miſcelæ, dato alio pretio minore, vendi queat: cùm enim aquæ pretium nullum ſit, erit vinum ad aquam, ùt pretium unius menſuræ mixtæ ad differentiam inter pretium vini puri & pretium miſcelæ.

368. SCHOL. I. Docet igitur hæc regula res diversi pretii ita commiscere, ut miscela prodeat pretii medii pro arbitrio assignati; & vulgò *regula alligationis* audit.

369. SCHOL. II. Cùm plura quàm duo dantur pretia præter pretium miscelæ; tunc quælibet species majoris pretii, eo, quo dictum est, modo (§. 366), successivè comparetur pro arbitrio ad speciem aliquam viliorem, donec singulæ saltem alligentur semel. Ex. gr. unum poculum vini A constet 4, unum ex B 8, ex C 11, ex D 14 assibus: ex quatuor illis speciebus conficienda sit miscela, cujus unum poculum valeat 10 asses. His positis, comparetur unum pretium majus & unum minus cum pretio miscelæ, v. g. B. & C; tum fiat comparatio pretiorum A & D cum eodem: invenientur pro A 4, B 1, C 2, D 6: ergo quatuor illæ species simul faciunt 13 supposita: prodibit igitur miscela quæsita, si $\frac{4}{13}$ ejusdem capiantur ex A, $\frac{1}{13}$ ex B, $\frac{2}{13}$ ex C & $\frac{6}{13}$ ex D.

species	A	B		C	D
pretia	4	8	10	11	14
differentiæ	4	1		2	6

370. SCHOL. III. Quamdiu sola diversarum specierum pretia & pretium miscelæ innotescunt, & præterea nihil; problema *indeterminatum* est, sive plures solutiones admittit: sic in exemplo mox posito, quoniam miscelæ pretium $=4A+8B+11C+14D$, item $=10A+10B+10C+10D$; miscela debitè facta erit, quotiescumque $4B+7C+10D=6A+6B+6C+6D$; atque adeo dum $C+4D=6A+2B$. Id porro modis innumeris possibile esse, facilè perspicitur. Quod si ergo problema determinatum cupias, alia quæpiam conditio adjiciatur necesse est, ut in subjuncto casu.

PROBLEMA LXVIII.

Sint viri, mulieres & infantes in toto 13, simul expendentes 156 asses. Vir quilibet expendit 18, mulier 15, infans 10 asses. Determinare quot dentur viri, quot mulieres & quot infantes, posito quod numerus infantium viros superet ad 7.

371. RESOL. & DEMONST. Viri 2, mulieres 2, infantes 9. Numerus virorum dicatur x, mulierum y,

infantium z. Erunt expensæ virorum $= 18x$ ex hypothesi, mulierum $= 15y$, infantium $= 10z$; igitur $18x + 15y + 10z = 156$: sed, cum $x + y + z = 13$; erit $10x + 10y + 10z = 130$; ergo $8x + 5y = 26$ (§. 245); sed $5x + 5y + 5z = 65$, sive $8x + 5y + 5z = 3x + 65$ (§. 233): ergo $5z = 3x + 39$; itaque, cùm $5z = 5x + 35$ ex hypothesi, erit $3x + 39 = 5x + 35$; atque adeo $2x = 4$. *Q. e. d.*

CAPUT XI.

DE PROGRESSIONE GEOMETRICA.

372. *Progressio geometrica* est series quantitatum juxta eamdem rationem crescentium vel decrescentium. Ex. gr. 1. 2. 4. 8. 16 : vel 81. 27. 9. 3. 1. Est adeo progressio geometrica nihil aliud, quàm proportio continua (§. 294).

373. SCHOL. Cùm progressionem geometricam indigitare voluerimus, terminos omnes consecutivè scribemus, solo inter quosvis duos puncto (.) interposito; atque seriei hoc signum ($\div\div$) præponemus. Ex. gr. $\div\div$ A. B. C. D. E. F. &c.

374. *Denominator* progressionis, est quotus ex divisione termini majoris per immediatè minorem emergens.

COROLLARIUM I.

375. Major ergo terminus prodit, minore in denominatorem ducto (§. 63) : minor verò habetur, majore per denominatorem diviso (§. 65).

COROLLARIUM II.

376. Ergo in progressione geometrica crescente, est factum primi termini per denominatorem unitate mulctatum, æquale excessui secundi termini supra primum; atque adeo est excessus secundi termini supra primum

ad primum, ùt denominator unitate mulctatus ad unitatem (§. 342).

COROLLARIUM III.

377. Quod si denominator vocetur q; poterit progressio quælibet, cujus terminus minimus est a, reduci ad hanc : $a. aq. aqq. aqqq. aqqqq.$ &c. sive $aq^0. aq^1. aq^2. aq^3. aq^4.$ &c. (§. 155).

378. SCHOL. Progressionis terminum minimum deinceps vocabimus *primum*, & ab eo loca terminorum numerabimus.

THEOREMA XXVII.

In progressione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum, ab extremis æqualiter distantium; itemque quadrato medii, si numerus terminorum sit impar.

379. Ex. gr. sit $\div\div a. b. c. d. e. f. g.$: dico esse $ag = bf = ce = dd$.

DEMONST. Quoniam omnes sunt continuè proportionales, manifestum fit, esse $a:b = f:g$; ergo $ag = bf$ (§. 341). Pari ratione, cùm $b:c = e:f$; est $bf = ce$; igitur $ag = ce$. Sic etiam, quia $c:d = d:e$, est $ce = dd$; proinde $ag = dd$. Q. e. d.

380. SCHOL. Id manifestum evadit in exemplo oculari : sit v. g. hæc progressio :

$$\begin{array}{ccccccc} a. & aq^1. & aq^2. & aq^3. & aq^4. & aq^5. & aq^6. \\ & & & aq^3 & aq^2 & aq^1 & a \\ \hline & & & aaq^6 & aaq^6 & aaq^6 & aaq^6 \end{array}$$

patet productum extremorum aaq^6 esse æquale producto secundi aq^1 per penultimum aq^5, item æquale facto tertii aq^2 in antepenultimum aq^4; uti & quadrato medii aq^3.

PROBLEMA LXIX.

Datis duobus numeris, ex. gr. 2 & 32, medium proportionalem invenire.

381. RESOL. & DEMONST. Ducatur datorum unus in alterum : ex producto 64 extrahatur radix quadrata : dabit hæc medium proportionalem quæsitum : est enim factum extremorum æquale quadrato medii (§. 378.)

THEOREMA XXVIII.

Si fuerint 3 quantitates continuè proportionales A, B, C, *erit prima* A *ad tertiam* C, *ùt quadratum* 1*æ* A *ad quadratum* 2*æ* B.

382. DEMONST. Est $AA:AC=A:C$ (§. 314) : sed, cùm $A:B=B:C$ ex *hypothesi*, est $AC=BB$ (§. 379) : ergo est $AA:BB=A:C$, sive $A:C=AA:BB$. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

Si fuerint quatuor quantitates continuè proportionales, A, B, C, D; *erit prima* A *ad quartam* D, *ùt cubus* 1*æ* A *ad cubum* 2*æ* B.

383. DEMONST. Est $A^3:A^2D=A:D$ (§. 314) : sed, quoniam $A:B=C:D$ ex *hypothesi*, erit etiam *alternando* $A:C=B:D$: ergo, cum $A:C=A^2:B^2$ (§. præced.); erit $A^2:B^2=B:D$: igitur $A^2D=B^3$ (§. 379); ergo $A^3:B^3=A:D$ (§. 230), sive $A:D=A^3:B^3$. *Q. e. d.*

384. SCHOL. Eodem modo demonstrari poterit, quòd sit prima A ad quintam E, ùt A^4 ad B^4; & generatim, quod in quacumque quantitatum continuè proportionalium serie, sit prima ad ultimam, in ratione tantuplicata primæ ad secundam, quantus est numerum terminorum diminutus ad unitatem.

THEOREMA XXX.

Terminus quilibet progressionis geometricæ æquatur facto ex primo termino in denominatorem ad eam dignitatem elevato, quantus est numerus terminorum ipsum præcedentium.

385. Demonst. Posito quod primus progressionis terminus sit a, denominator verò q, progresso hoc modo exprimi poterit : $a. aq^1. aq^2. aq^3. aq^4, aq^5$ &c. (§. 377) : atqui in hoc exemplo patet sextum terminum aq^5 esse æqualem facto ex primo a in denominatorem q ad quintam dignitatem evectum ; & ita de omnibus aliis : ergo terminus quilibet æquatur facto &c. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXX.

Dato primo termino, item progressionis denominatore, invenire quemlibet terminum.

386. Resol. Denominator ad tantam dignitatem elevetur, quantus est numerus terminorum, qui terminum quæsitum præcedunt : tum multiplicetur per primum terminum datum : factum dabit terminum desideratum.

Ex. gr. si ponas Joannem 1° die lucrari 2 asses, 2° 4, & ita consequenter in ratione dupla, & quæras quantum 6° die lucretur ? Eleva denominatorem 2 ad quintam dignitatem, quæ faciet 32 : duc dein 32 in 1um terminum 2; dabit factum 64 lucrum sextæ diei petitum.

Alio modo.

387. Formetur progressio datæ similis, cujus primus terminus sit unitas; eaque usque ad locum datum continuetur : tum ultimus hujus progressionis terminus

ducatur in primum prioris; productum dabit terminum quæsitum. Erit siquidem primus terminus in una ad ultimum ejusdem, ut primus alterius, ad ejus terminum ultimum.

388. SCHOL. Cùm datis primo termino & denominatore, terminus aliquis remotior petitur, ex. gr. vigesimus; inquiratur 1° quintus: ejus quadratum divisum per primum, dabit nonum: hujus quadratum rursus dividatur per primum; quotus æquivalebit decimoseptimo: ab hoc porro continuetur progressio usque ad vigesimum qui quæritur.

THEOREMA XXXI.

In progressione geometrica, ùt excessus 2^{i} termini supra 1^{um} se habet ad primum, ita excessus ultimi supra primum ad summam omnium terminorum ultimum præcedentium.

389. Ex. gr. sit ∺ A. B. C. D &c. Dico esse $B-A:A=D-A:A+B+C$.

DEMONST. Poterit namque progressio ista resolvi in sequentes proportiones: $A:B=B:C=C:D$; sed est $A:B=A+B+C:B+C+D$ (§. 329); ergo *invertendo* est $B:A=B+C+D:A+B+C$; igitur *dividendo* est $B-A:A=B+C+D-A-B-C:A+B+C$ (§. 337): sed $B+C+D-A-B-C=D-A$: ergo $B-A:A$ $D-A:A+B+C$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

390. Excessus secundi supra primum se habet ad primum, ùt denominator unitate mulctatus ad unitatem (§. 376); igitur ùt denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita excessus ultimi supra primum ad summam terminorum ultimum præcedentium.

COROLLARIUM II.

391. Ergo excessus ultimi supra primum æquatur facto ex denominatore unitate mulctato in summam terminorum ultimum præcedentium (§. 341).

COROLLARIUM III.

392. Igitur denominator per ſummam terminorum ultimum præcedentium producit ſummam progreſſionis, dempto termino minimo.

COROLLARIUM IV.

393. In progreſſione in infinitum decreſcente, minimus terminus eſt infinitè parvus : ergo in illa, ùt denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita maximus ad reliquam infinitorum ſummam.

PROBLEMA LXXI.

Datis duobus extremis terminis progreſſionis geometricæ, item denominatore; invenire ſummam progreſſionis.

394. RESOL. Tollatur primus ex ultimo; reſiduum dividatur per denominatorem unitate mulctatum : quotus dabit ſummam terminorum præcedentium ultimum (§. 391). Quod ſi ergo huic ipſum ultimum addas, exurgit totalis ſumma progreſſionis.

Ex. gr. ſit progreſſio tripla, cujus primus terminus 2, ultimus autem 4374. Divide 4372 per 2; quotus 2186 dabit ſummam terminorum ultimum præcedentium; atque adeo tota progreſſionis ſumma eſt 6560.

PROBLEMA LXXII.

Datis minimo termino, denominatore, item numero terminorum; invenire ſummam progreſſionis.

395. RESOL. Quære 1° terminum ultimum per problema 70^{um}; tum perge ùt in problemate præcedente.

Ex. gr. ſit progreſſio tripla 11 terminorum, cujus primus terminus eſt 1 : invenietur ultimus terminus = 59049 (§. 386) : tum divide 59048 per 2; quotus 29524 addatur termino ultimo : numerus ex additione reſultans 88573 dabit integram progreſſionis ſummam.

PROBLEMA LXXIII.

Dato denominatore, ſummâ progreſſionis, item maximo termino, invenire terminum minimum.

396. Resol. Tollatur terminus maximus ex ſumma progreſſionis; reſiduum multiplicetur per denominatorem unitate mulctatum; productum auferatur ex termino maximo : prodibit tandem terminus minimus.

Ex. gr. ſit denominator 3; ultimus terminus 2916; ſumma autem progreſſionis 4368. Auferantur 2916 ex 4368; reſiduum 1452 multiplicetur per 2; factum 2904 auferatur ex ultimo termino 2916 : reſtabit terminus minimus 12.

Demonst. Dum maximus terminus aufertur ex ſumma progreſſionis, remanet ſumma terminorum ultimum præcedentium : ſed ſumma hæc per denominatorem unitate mulctatum producit exceſſum ultimi ſupra primum (§. 391) : ergo productum hoc tollendo ex termino maximo, emerget terminus minimus. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXIV.

Datis minimo termino, denominatore & ſummâ progreſſionis; invenire terminum maximum.

397. Resol. Tollatur terminus minimus ex ſumma progreſſionis; reſiduum dividatur per denominatorem: dabit

dabit quotus summam terminorum præcedentium ultimum : quod si ergo summam hanc ex summa totali auferas; prodit terminus maximus.

Ex. gr. sit primus terminus 3, denominator 4, summa verò progressionis 4095. Tolle ex hac summa primum terminum 3; residuum 4092 divide per 4; quotum 1023 aufer ex 4095 : quæ restabunt 3072 dabunt terminum maximum.

DEMONST. Summa progressionis, demto minimo termino, æquatur facto denominatoris in summam terminorum ultimum præcedentium (§. 392) : quod si ergo minimum terminum ex summa progressionis auferas, & residuum per denominatorem dividas, prodit summa terminorum ultimum præcedentium : hunc igitur quotientem ex totali summa auferendo, relinquitur terminus maximus. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXV.

Datis primo & ultimo terminis, item summâ progressionis; invenire denominatorem.

398. RESOL. Auferatur primus terminus ex ultimo; ultimus verò ex summa progressionis : primum residuum dividatur per secundum : dabit quotiens denominatorem unitate mulctatum.

Ex. gr. sit primus terminus 3, ultimus 2187; progressionis autem summa 3279. Aufer inprimis 3 ex 2187; tum 2187 ex 3279 : primum residuum 2184 divide per secundum 1092 : quotiens 2 erit denominator unitate mulctatus, atque adeo denominator est 3.

DEMONST. Est quippe primum residuum æquale facto denominatoris unitate mulctati per summam terminorum ultimum præcedentium (§. 391) : ergo residuum hoc dividendo per summam terminorum, demto maximo, prodit denominator unitate mulctatus: sed, si terminus maximus auferatur ex summa progressionis, remanet summa terminorum ultimum præcedentium: ergo primum residuum dividendo per secundum, emergit denominator unitate mulctatus. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXVI.

Datis numero terminorum, denominatore, & summâ progressionis; invenire primum terminum.

399. RESOL. Formetur progressio similis, cujus primus terminus sit 1, eaque usque ad terminum datum continuetur: quæratur hujus progressionis summa (§. 394): erit, uti hæc summa ad summam datam, ita primus hujus progressionis terminus 1 ad primum terminum progressionis propositæ: igitur summam progressionis propositæ dividendo per summam progressionis formatæ, quotus dabit primum terminum quæsitum.

Ex. gr. sit progressio 6 terminorum, ejus summa 1456, denominator verò 3. Divide 1456 per summam progressionis similem sex terminorum, cujus primus terminus sit unitas, sive per 364: & quoniam quotus est 4; dico primum terminum quæsitum esse 4.

PROBLEMA LXXVII.

Datis maximo termino, numero terminorum & denominatore; invenire minimum terminum.

400. RESOL. Elevetur denominator ad eam dignitatem, quantus est numerus terminorum maximum præcedentium: per denominatorem ita elevatum dividatur terminus maximus: erit quotus, ipsius progressionis datæ terminus minimus (§. 384).

Ex. gr. ſit progreſſio ſeptem terminorum dupla, cujus ultimus terminus ſit 192. Elevetur denominator 2 ad ſextam potentiam, atque per 64 dividatur ultimus terminus 192 : quotiens 3 erit minimus terminus progreſſionis propoſitæ.

401. SCHOL. Si formetur progreſſio ſimilis, cujus primus terminus ſit unitas, atque ad ultimum uſque terminum continuetur : erit, ùt ultimus hujus progreſſionis terminus ad ultimum progreſſionis datæ, ita primus ejuſdem terminus unitas, ad primum terminum quæſitum : ergo ultimum progreſſionis datæ terminum dividendo per alterius terminum maximum, quotus dabit terminum minimum progreſſionis quæſitum (§. 344).

PROBLEMA LXXVIII.

Datis primo & ultimo terminis, item numero terminorum; invenire denominatorem.

402. RESOL. Dividatur maximus terminus per minimum : ex quotiente extrahatur radix ejuſdem ordinis cum dignitate exponentis termini maximi : ea dabit denominatorem quæſitum.

Ex. gr. ſit primus terminus 3, ultimus 81, numerus verò terminorum 4. Divide 81 per 3; quotientis radix tertia, ſeu cubica, dabit denominatorem 3.

DEMONST. Terminus maximus exurgit ex primo termino multiplicato per denominatorem ad eam dignitatem elevatum, quantus eſt numerus terminorum ultimum præcedentium (§. 384), in caſu poſito per denominatoris cubum : ergo maximum dividendo per minimum, prodit denominatoris cubus; cujus proinde radix cubica denominatorem exhibet. *Q. e. d.*

403. SCHOL. Quoniam radicum ſuperiorum extractio operoſiſſima & tædii plena; plurimùm paſſim faceſſeret negotii, problematis hujus reſolutio : at verò operationem levem reddidit felix Logarithmorum inventum, quorum uſum brevi exponemus.

CAPUT XII.

DE RATIONE AC PROGRESSIONE ARITHMETICA.

404. Cùm quatuor quantitates hujuſmodi ſunt, ut eadem inter duas primas, quæ inter duas ſequentes, detur differentia; eæ *æquidifferentes* atque *Arithmeticè proportionales* audiunt.

405. *Continuè æquidifferentes* vocantur, ſi ſecunda ad eumdem exceſſum primam ſuperet, ad quem tertia excedit ſecundam; vel etiam, ſi prima ſecundam, & ſecunda tertiam ad eamdem differentiam excedat. Sic continuè æquidifferentes ſunt numeri 2, 4, 6, &c.; ſimiliter numeri 11, 7, 3. Numeri verò 2, 5, 7, 10, *diſcretim æquidifferentes* nuncupantur.

406. *Progreſſio Arithmetica* eſt ſeries quantitatum ſecundùm eamdem differentiam creſcentium vel decreſcentium. Ita progreſſionem *creſcentem* conſtituunt numeri 1, 3, 6, 9, 12, 15, &c.; *decreſcentem* verò numeri 23, 19, 15, 11, 7, 3.

407. SCHOL. Quantitates continuè æquidifferentes, progreſſionis *termini* compellantur. Porro terminus quilibet reſpectu ſequentis, *antecedens*; reſpectu præcedentis, *conſequens* dicitur: qui verò à duobus aliis æqualiter diſtat, *medius proportionalis* appellatur.

COROLLARIUM I.

408. In progreſſione creſcente terminus quilibet eſt aggregatum ex præcedente & differentia: in decreſcente verò, eſt aggregatum ex ſequente & differentia.

COROLLARIUM II.

409. Quod ſi ergo differentia vocetur d, primus verò terminus dicatur a; poterit progreſſio quævis Arith-

metica generatim exprimi hoc modo. $\div a.\ a\pm d.\ a\pm 2d.$ $a\pm 3d.\ a\pm 4d.\ a\pm 5d$ &c.

410. Schol. Signum $(\pm)$, inter quosvis duos seriei terminos positum, *plus vel minùs* significat, atque adeo progressioni generatim indigitandæ accommodum est : quod autem seriei præfigitur $(\div)$, pro progressionis arithmeticæ signo adhibetur.

THEOREMA XXXII.

Si fuerint quatuor quantitates arithmeticè proportionales; aggregatum ex extremis æquatur summæ ex mediis.

411. Ex. gr. sit $a.\ b : x . y.$ dico esse $a+y=b+x.$

Demonst. Si termini crescant, est $b=a+d$, & $y=x+d$ (§. 408) : ergo proportio data reducibilis ad hanc : $a.\ a+d : x.\ x+d:$ atqui in hac, aggregatum ex extremis $a+x+d$ manifestè æquale est aggregato ex mediis $a+d+x$: igitur, si quatuor quantitates secundùm proportionem arithmeticam crescant, aggregatum ex extremis æquatur summæ ex mediis. *Q. e. d.*

Eodem modo procedit demonstratio, si consequentes termini, fuerint antecedentibus minores.

Corollarium.

412. Si a, b, c fuerint continuè proportionales, est $a.\ b : b.\ c$: ergo $a+c=2b$; sive aggregatum ex extremis est duplum medii proportionalis.

THEOREMA XXXIII.

Si quantitates a & b inæquales fuerint, & $a+y=b+x$; erit $a.\ b : x.\ y.$

413. Demonst. Sit inprimis a major b; erit $a=b+d$: erit igitur hæc æquatio, $b+y+d=b+x$: ergo, si utrimque ipsum b auferas, prodibit $y+d=x$.

Sit jam a minor b; erit $b=a+d$: habebitur ergo hæc æquatio; $a+y=a+x+d$: quod si igitur utrimque ipsum a tollas, remanebit $y=x+d$. Ergo omni casu $a.\, b : x.\, y$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

414. Si duæ quantitates inæquales a & b ex eadem tertia c auferantur; erit $a.\, b : c-b.\, c-a$: est etenim $c-a+a$, item $c-b+b=c$; igitur $c-a+a=c-b+b$ (§. 230), atque adeo $c-b.\, c-a : a.\, b$, proinde $a.\, b : c-b.\, c-a$.

PROBLEMA LXXIX.

Inter duos numeros 7 & 25, medium arithmeticè proportionalem invenire.

415. RESOL. I. Addantur numeri dati.

II. Summæ capiatur dimidium; erit 16 numerus quæsitus (§. 412).

PROBLEMA LXXX.

Datis tribus numeris 4, 7, 13; quartum proportionalem invenire.

416. RESOL. I. Numerus secundus 7, addatur tertio 13.

II. Ex summa 20 auferatur primus numerus 4 : residuum 16, erit quartus quæsitus (§. 411).

THEOREMA XXXIV.

In omni progressione arithmetica crescente, terminus quilibet primum ad toties differentiam superat, quot termini ipsum præcedunt.

417. DEMONST. Progressio quævis arithmetica crescens exprimi potest hoc modo : $\div a.\, a+d.\, a+2d.\, a+3d.$

$a + 4d . a + 5d$ &c. (§. 409): atqui in illa manifeftum eft, terminum quemvis facere primum & toties differentiam, quot funt termini ipfo minores: ergo in omni progreffione arithmetica crefcente, terminus quilibet primum ad toties differentiam fuperat, quot termini ipfum præcedunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

418. Omnis progreffio decrefcens congruè hoc modo exprimitur: $a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$ &c. (§. 408): ergo in progreffione decrefcente terminus quilibet ultimum ad toties differentiam fuperat, quot termini ipfum fequuntur.

COROLLARIUM II.

419. Generatim in quavis progreffione arithmetica terminus quilibet componitur ex minimo & toties differentia, quot funt termini ipfo minores.

COROLLARIUM III.

420. Igitur terminus maximus facit minimum, & infuper factum ex differentia in numerum terminorum unitate mulctatum.

PROBLEMA LXXXI.

Dato primo progreffionis crefcentis termino, datâ infuper differentia progreffionis; quemlibet terminum invenire.

421. RESOL. I. Differentia multiplicetur per numerum terminorum terminum petitum præcedentium.

II. Producto addatur primus terminus: prodibit terminus quæfitus (§. 417).

Ex. gr. fit primus terminus 7, differentia 6: quoniam nonum terminum præcedunt octo ipfo minores, nonum terminum obtinebis, si differentiam 6 per 8 multiplices, atque producto 48 addas primum terminum 7.

PROBLEMA LXXXII.

Inter duos numeros datos, plures medios proportionales inserere.

422. RESOL. I. Auferatur minor ex majore.

II. Residuum dividatur per numerum inserendorum auctum ad unitatem. Erit quotus, differentia progressionis quæsitæ.

Ex. gr. inserendi sint quatuor medii proportionales inter numeros 6 & 21. Sublatis 6 ex 21, atque residuo 15 diviso per 5; quotiens 3 dabit differentiam progressionis formandæ. Numeri ergo inserendi erunt 9, 12, 15 & 18.

DEMONST. Insertis inter utrumque numerum datum aliquot mediis proportionalibus pro arbitrio, exurgit progressio, cujus terminus maximus ille, qui inter numeros datos est major: hic igitur tot habebit in progressione formanda terminos minores, quantus est numerus inserendorum auctus ad unitatem: sed in progressione arithmetica maximus minimum superat ad toties differentiam, quot sunt termini ipso minores (§. 420): ergo differentiâ inter numeros datos divisâ per numerum terminorum inserendorum auctum ad unitatem, prodit differentia progressionis formandæ. *Q. e. d.*

THEOREMA

THEOREMA XXXV.

In progressione arithmetica, summa termini primi & ultimi æqualis est summæ quorumlibet mediorum ab extremis æquidistantium; item medii duplo, si numerus terminorum sit impar.

423. DEMONST. Omnis progressio arithmetica hoc modo exprimi potest: $a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d.$ &c. (§. 409).

$$\begin{array}{ccccc} a. & a \pm d. & a \pm 2d. & a \pm 3d. & a \pm 4d. \\ & & a \pm 2d & a \pm d & a \\ \hline & & 2a \pm 4d & 2a \pm 4d & 2a \pm 4d \end{array}$$

in hac porro progressione patet, summam ex primo termino a & quinto $a \pm 4d$ esse æqualem summæ ex secundo & quarto; item æquivalere duplo termini tertii, qui medius est: ergo patet propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

Cùm numerus terminorum est par, summa progressionis æquatur facto aggregati ex terminis extremis in numeri terminorum dimidium.

424. DEMONST. Summa extremorum æquivalet aggregato ex quibuslibet mediis ab extremis æqualiter distantibus (theor. præced.): ergo, cùm numerus terminorum est par, progressio ex tot aggregatis extremorum summæ æqualibus componitur, quot unitates continet numeri terminorum dimidium; atque adeo aggregatum ex extremis per numeri terminorum dimidium, progressionis summam producit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

425. Productum numeri terminorum per dimidium aggregati ex primo & ultimo, æquivalet facto ex sum-

ma extremorum in numeri terminorum dimidium (§. 341): ergo ſumma progreſſionis quoque obtinetur, ſi dimidium ſummæ ex 1° & ultimo per numerum terminorum multiplicetur.

COROLLARIUM II.

426. Si numerus terminorum ſit impar, medius proportionalis æquivalet dimidio aggregati ex terminis extremis (§. 423): ergo, ſi numerus terminorum impar fuerit, ſumma progreſſionis æquatur facto ex numero terminorum per medium proportionalem.

COROLLARIUM III.

427. Ergo, ſi ſumma progreſſionis dividatur per numerum terminorum, quoti duplum dabit aggregatum ex 1° & ultimo. Si verò per dimidium numeri terminorum dividatur, aggregatum ex extremis prodit.

COROLLARIUM IV.

428. E contrario, ſi ſummam progreſſionis per medium proportionalem, vel per medietatem aggregati ex 1° & ultimo, dividas; numerus terminorum obtinebitur. Hujus verò numeri dimidium; ſi progreſſionis ſumma per aggregatum ex extremis dividatur.

THEOREMA XXXVII.

Si minimus terminus ſit unitas, & differentia progreſſionis 2; eſt ſumma progreſſionis æqualis quadrato numeri terminorum.

429. DEMONST. Minimus terminus dicatur a, maximus y, numerus terminorum n, ſumma progreſſionis s. Quoniam differentia 2; eſt $y=2n-2+a$ (§. 420), ergo $y+a=2n-2+2a$: ſed $2a=2$ ex hypotheſi; igitur $y+a=2n$, ſive $\frac{y+a}{2}=n$: ſed $\frac{y+a}{2}\times n=s$ (§. 425); ergo $n^2=s$. *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXXIII.

Datis minimo termino, differentiâ & numero terminorum; invenire terminum maximum.

430. Resol. I. Multiplicetur numerus terminorum unitate mulctatus per differentiam.

II. Producto addatur minimus : habebitur terminus quæsitus (§. 420).

Ex. gr. sit progressio 12 terminorum, cujus terminus minimus 5, & differentia 3 : erit terminus maximus $=33+5$, atque adeo æqualis 38.

PROBLEMA LXXXIV.

Datis termino maximo, differentiâ & numero terminorum; invenire terminum minimum.

431. Resol. I. Numerus terminorum unitate minutus ducatur in differentiam.

II. Factum auferatur ex maximo. Residuum dabit terminum minimum (§. 420).

Ex. gr. sit progressio 10 terminorum, cujus terminus maximus 74, & differentia 8. Erit terminus minimus $=74-9\times8$, sive $=2$.

PROBLEMA LXXXV.

Datis primo & ultimo terminis, item numero terminorum; invenire differentiam progressionis.

432. Resol. I. Auferatur minimus ex maximo.

II. Residuum dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum : erit quotiens differentia quæsita (§. 420).

Ex. gr. fit primus terminus 6, ultimus 34; numerus verò terminorum 8. Tolle 6 ex 34; residuum 28 divide per 7; quotiens 4 dat progressionis differentiam.

PROBLEMA LXXXVI.

Datis primo & ultimo terminis, item differentiâ; invenire numerum terminorum.

433. RESOL. I. Tolle rursus minimum ex maximo.

II. Residuum divide per differentiam: quoto adde unitatem: habebis numerum terminorum quæsitum (§. 420).

Ex. gr. sit primus terminus 12, ultimus 110, differentia verò 7. Aufer 12 ex 110; residuum 98 divide per 7, quotus auctus ad unitatem, sive 15, dabit numerum terminorum.

PROBLEMA LXXXVII.

Datis minimo & maximo terminis, & insuper summâ progressionis; invenire numerum terminorum.

434. RESOL. I. Dividatur summa progressionis per aggregatum ex minimo & maximo.

II. Quotiens duplicetur. Emergit numerus terminorum quæsitus (§. 428).

Ex. gr. sit primus terminus 8, ultimus 99, & summa progressionis 428. Divide 428 per summam extremorum 107: quotiens 4 erit medietas numeri terminorum, atque ita numerus terminorum quæsitus est 8.

435. SCHOL. Si aggregatum ex extremis fit numerus par; cape illius dimidium, atque per hoc divide summam progressionis; quotus dabit numerum terminorum (§. 428).

PROBLEMA LXXXVIII.

Datis duobus terminis extremis, item numero terminorum; invenire ſummam progreſſionis.

436. RESOL. I. Termini extremi addantur.

II. Summa ducatur in dimidium numeri terminorum, ſi hic fuerit par; vel medietas aggregati ex primo & ultimo multiplicetur per integrum numerum terminorum: prodibit utroque caſu ſumma progreſſionis (§. 424 & 425).

Ex. gr. ſi primus terminus 7, ultimus 52, & numerus terminorum 10: ſumma ex extremis 59 multiplicetur per 5: productum 295 erit ſumma progreſſionis quæſita.

COROLLARIUM.

437. Datis differentiâ, numero terminorum, & uno ex extremis; quæratur extremorum alter (§. 430 & 431): ita tandem, datis differentiâ, numero terminorum & uno ex extremis, inveniri poterit ſumma progreſſionis.

PROBLEMA LXXXIX.

Datâ ſummâ progreſſionis, numero terminorum, & inſuper minimo vel maximo termino; invenire differentiam.

438. RESOL. I. Summa progreſſionis dividatur per numerum terminorum; & quotiens duplicatus dabit aggregatum ex minimo & maximo (§. 427).

II. Ex hoc aggregato tollatur terminus datus; reſiduum erit extremorum alter.

III. Perge deinceps ùt in problemate 85 (§. 432).

Ex. gr. ſit numerus terminorum 15, primus terminus 17, & ſumma progreſſionis 1515. Divide 1515 per 15; quotum duplica; ex 202 tolle 17; prodit terminus maximus 185: differentiam porro hunc inter & primum, ſeu 168, divide per 14: quotus 12 dabit tandem differentiam progreſſionis.

PROBLEMA XC.

Datâ ſummâ progreſſionis, numero terminorum & differentiâ; invenire & maximum & minimum terminum.

439. RESOL. I. Summa progreſſionis dividatur per numerum terminorum: quoti duplum dabit aggregatum ex primo & ultimo (§. 427).

II. Quæratur exceſſus maximi ſupra minimum (§. 420).

III. Exceſſus hic auferatur ex aggregato ex duobus terminis extremis: reſiduum dabit termini minimi duplum.

Ex. gr. ſit ſumma progreſſionis 231, numerus terminorum 7, & differentia 8. Divide primò 231 per 7; quotiens 33 duplicatus dabit aggregatum ex primo & ultimo: differentiam inter extremos, ſive 48, tolle ex 66, reſiduum 18 erit duplum termini minimi, atque adeo minimus 9; ergo maximus 57.

440. SCHOL. Cùm numerus terminorum eſt par, reſolutio & facilior & brevior erit, ſi ſumma progreſſionis per numeri terminorum dimidium dividatur: ita ſiquidem unicâ operatione, eâque per diviſorem minorem inſtitutâ, ſtatim ad ſummam extremorum devenitur (§. 427).

PROBLEMA XCI.

Datis minimo termino 3, differentiâ 2, item ſummâ progreſſionis 224; maximum terminum, item numerum terminorum invenire.

441. RESOL. & DEMONST. Numerus terminorum dicatur *n*: quoniam differentia progreſſionis 2 ex hy-

pothesi; erit excessus maximi supra minimum $=2n-2$ (§. 417); ergo, cùm terminus minimus 3, erit terminus maximus $=2n+1$; atque adeo aggregatum ex primo & ultimo $=2n+4$: quoniam igitur progressionis summa 224 ex hypothesi; est $n+2\times n=224$ (§. 425). Ergo $\overline{n+1}^2=225$ (§. 275), proinde $n+1=\sqrt[2]{225}$, seu $=15$: est adeo numerus terminorum 14, & maximus terminus 29.

PROBLEMA XCII.

Datis maximo termino 36, differentiâ 3, item summâ progressionis 225; invenire terminum minimum & numerum terminorum.

442. Resol. & Demonst. Sit numerus terminorum n, minimus terminus x, maximus a: quoniam differentia progressionis 3 ex hypothesi; erit $a=3n-3+x$ (§. 420): ergo, cùm terminus maximus $=36$, est $3n+x=39$; atque adeo $a+x+3n=75$: sed, cùm progressionis summa $=225$ ex hypothesi, est $a+x\times\frac{1}{2}n=225$ (§. 424): ergo $a+x\times 3n=1350$; proinde $4a+4x\times 3n=5400$; sed $\overline{a+x+3n}^2=5625$: ergo differentia inter $a+x$ & $3n=\sqrt[2]{225}$, sive $=15$ (§. 273): igitur $a+x=30$ vel 45: sed $a=36$ ex hypothesi, ergo $x=9$, n verò $=10$.

CAPUT XIII.

De Logarithmis.

443. Quoniam progressio quævis geometrica hoc modo exprimi potest: a, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, &c. (§. 377); perspicuum omnino est, exponentes dignitatum ipsius denominatoris, æquidifferentium seriem sive progressionem arithmeticam constituere.

444. Porro exponentes illi ſunt id, quod terminorum *Logarithmos* vocant. Quia verò primus progreſſionis geometricæ terminus ex denominatore non componitur, ideo logarithmus ejus eſt o. Hæc patent in ſequenti ſchemate.

prog. geom.	1.	2	4	8	16	32	64	128
	a	aq^1	aq^2	aq^3	aq^4	aq^5	aq^6	aq^7
Logarithm.	0	1	2	3	4	5	6	7

445. SCHOL. Logarithmi hanc inſignem præſtant utilitatem, ut ipſos in Tabula inventos addendo, vel ab invicem ſubtrahendo, facili prorſus negotio numerorum quorumvis, quorum ſunt Logarithmi, facta & quoti detegantur; ut deinceps manifeſtum fiet.

THEOREMA XXXVII.

In progreſſione geometrica cujus primus terminus eſt unitas, eſt logarithmus facti quorumvis terminorum æqualis aggregato ex logarithmis factorum.

446. DEMONST. Si primus terminus ſit unitas, hoc modo exprimi poterit progreſſio : $1 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 . q^6 . q^7$ &c. : porro exponens facti quorumvis ex hiſce terminis eſt æquale aggregato ex exponentibus factorum (§. 169) : atqui exponentes dignitatum ipſius denominatoris ſunt ipſi terminorum logarithmi (§. 444) : ergo logarithmus eſt æqualis aggregato ex logarithmis factorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

447. Ergo aggregatum ex logarithmis duorum vel plurium terminorum progreſſionis geometricæ cujuſcumque ab unitate incipientis, dat logarithmum facti iſtorum terminorum in ſe invicem ductorum.

PROBLEMA

PROBLEMA XCIII.

Unum terminum progressionis geometricæ ab unitate incipientis, logarithmorum ope, per alterum multiplicare.

448. Resol. I. Logarithmi factorum simul addantur: erit summa logarithmus facti (§. præced.)

II. Inter terminos progressionis geometricæ datæ quæratur ille, cui correspondet logarithmus inventus: habebis factum quod quæritur.

Ex. gr. sit hæc

prog.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187
logar.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7

Quoniam numeri 27 logarithmus est 3, numeri verò 81 logarithmus 4, atque adeo simul sumti faciunt 7; præfati numeri 27 & 81, in se invicem ducti, producent 2187, quod ex hujus numeri logarithmo 7 colligitur.

THEOREMA XXXVIII.

In progressione geometrica cujus primus terminus est unitas, est logarithmus quoti unius termini per alterum minorem divisi, æqualis differentiæ inter logarithmos divisoris & dividendi.

449. Demonst. Sit primus terminus 1: erit $\div\!\div$ 1. q^1. q^2. q^3. q^4. q^5. q^6 &c.: porro in hac progressione, quotus termini cujuslibet per alterum minorem divisi, pro exponente habet exponentium differentiam (§. 176): cùm igitur exponentes sint ipsi terminorum logarithmi (§. 444), erit logarithmus quoti æqualis differentiæ inter logarithmos divisoris & dividendi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

450. Ergo, ſi primus progreſſionis terminus ſit unitas, differentia inter logarithmos duorum terminorum dabit logarithmum quoti ex diviſione majoris per minorem emergentis.

PROBLEMA XCIV.

Logarithmorum adminiculo invenire quotum ex diviſione unius termini progreſſionis geometricæ ab unitate incipientis, per alterum minorem emergentem.

451. RESOL. I. Auferatur logarithmus diviſoris ex logarithmo dividendi : dabit reſiduum logarithmum quoti (§. præced.)

II. Quæratur terminus progreſſionis datæ, cui logarithmus inventus correſpondet : erit ille quotus deſideratus.

Ex. gr. in ſuperiore progreſſione (§. 448), differentia inter logarithmos numerorum 243 & 2187 eſt 2 : quia igitur inter progreſſionis datæ terminos, logarithmo 2 reſpondet numerus 9; erit hic, quotus ex diviſione 2187 per 243 reſultans.

452. SCHOL. Logarithmi uſum non habent, niſi cùm per invicem multiplicandi vel dividendi ſunt progreſſionis cujuſpiam geometricæ termini : ut igitur quorumcumque numerorum, etiam intermediorum, multiplicationi ac diviſioni facilitandæ inſervire poſſent, oportuit progreſſionem quamdam condere, inter cujus terminos numeri quivis cenſeri queant. Talis porro eſt, quam in logarithmorum tabulis reperire eſt, cujus primus terminus unitas logarithmum habet 0.0000000; numeri verò 10 logarithmus 1.0000000; centenarii logarithmus 2.0000000. &c. : cùm enim progreſſio illa geometrica quàm lentiſſimè progrediatur, utpote in qua inter unitatem & decadem ſunt 9999999 medii proportionales, nulla erit ſenſibilis inter quoſvis duos illius terminos contiguos differentia, atque adeo omnes numeri inter extremos iſtius progreſſionis terminos intercepti, tamquam ipſius termini haberi poterunt : ſi quæ verò detur differentia, ea erit adeo exigua, ut citra ullum erroris periculum negligi queat.

PROBLEMA XCV.

Datis tribus numeris, per logarithmos invenire quartum proportionalem.

453. Resol. I. Logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii.

II. Ab aggregato ſubtrahatur logarithmus primi. Reſiduum erit logarithmus quarti quæſiti.

Ex. gr. ſint numeri dati 9. 234. & 17.

logarithmus	234	=	2.3692159
logarithmus	17	=	1.2304489
aggregatum		=	3.5996648
logarithmus	9	=	0.9542425
logarith. quæſitus			2.6454223

cui in tabulis reſpondet numerus 442.

Demonst. Cùm productum extremorum æquale ſit producto mediorum (§. 341), erit aggregatum ex logarithmis mediorum æquale aggregato ex logarithmis extremorum (§. 447): ergo, ſi logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii, atque ex ſumma ſubtrahatur logarithmus primi, reſtabit logarithmus quarti. *Q. e. d.*

PROBLEMA XCVI.

Numerum datum, logarithmorum ope, ad dignitatem datam elevare.

454. Resol. Quæratur in tabula logarithmus numeri dati, iſque multiplicetur per exponentem dignitatis datæ: prodibit logarithmus numeri ad dignitatem datam elevati.

Ex. gr. ſit numerus 4 ad dignitatem ſextam evehendus.

logarithmus	4 =	0. 6020600
exponens dignitatis	=	6
logar. dignitatis		3. 6123600

cui in tabulis reſpondet quàm proximè numerus 4096.

DEMONST. Numerus aliquis ad dignitatem datam evehitur, cùm toties factorem agit, quot unitatibus conſtat exponens dignitatis datæ : ſed logarithmus facti eſt æqualis logarithmis factorum ſimul ſumtis (§. 446) : ergo logarithmum numeri dati per exponentem dignitatis datæ multiplicando, prodit logarithmus numeri ad dignitatem datam elevati. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

455. Quoniam ultimus progreſſionis geometricæ terminus componitur ex primo termino & denominatore ad eam dignitatem elevato, quantus eſt numerus terminorum ipſum præcedentium (§. 386), atque adeo cujus exponens eſt æqualis numero terminorum unitate mulctato; logarithmus ultimi termini obtinebitur, ſi logarithmus denominatoris ducatur in numerum terminorum unitate mulctatum, & facto addatur logarithmus primi termini.

Ex. gr. ſit primus progreſſionis terminus 3, denominator autem ſit 5 : ut inveniatur ſextus terminus, logarithmum numeri 5, ſive 0.6989700 multiplica per 5; producto 3.4948500 adde logarithmum primi termini 3, ſive 0.4771213 : ſumma 3.9719713 dabit logarithmum ſexti termini, cui in tabulis reſpondet numerus 9375.

PROBLEMA XCVII.

Ex numero dato radicem quamcumque extrahere.

456. Resol. Logarithmus numeri dati dividatur per exponentem radicis quæſitæ : erit quotiens logarithmus radicis.

Ex. gr. extrahenda ſit $\sqrt[13]{}$ ex 8192 : hujus logarithmus 3.9133899 dividatur per 13, quotiens 0.3010299 erit radicis logarithmus, cui in tabulis quàm proximè correſpondet numerus 2; eſt adeo $\sqrt[13]{} = 2$.

Demonst. Numerus datus eſt ipſa dignitas intuitu radicis quæſitæ : ergo logarithmus numeri dati eſt productum logarithmi radicis per ejus exponentem (§. 454) : igitur logarithmum numeri dati dividendo per exponentem radicis, erit quotiens logarithmus ipſius radicis. *Q. e. d.*

Corollarium I.

457. Logarithmus cujuſvis termini progreſſionis geometricæ, eſt æqualis aggregato ex logarithmo primi termini & facto logarithmi denominatoris per numerum terminorum unitate mulctatum (§. 455) : ergo logarithmum primi termini auferendo ex logarithmo termini dati, & reſiduum dividendo per numerum terminorum unitate mulctatum, prodit logarithmus denominatoris, atque adeo ipſe denominator.

Ex. gr. ſit progreſſio, cujus primus terminus eſt 2, ſeptimus verò 8144: erit hujus logarithmus 3.9108378, logarithmus autem numeri 2 eſt 0.3010300 : hic ex illo auferatur; reſiduum 3.6098078 dividatur per 6; quotiens 0.6016346 erit logarithmus denominatoris, cui in tabulis quàm proximè reſpondet numerus 4; unde denominator eſt 4.

COROLLARIUM II.

458. Quoniam productum extremorum æquivalet quadrato medii geometricè proportionalis (§. 378); erit logarithmus quadrati medii proportionalis, idem cum logarithmo producti extremorum, sive æqualis summæ ex logarithmis extremorum (§. 446): ergo logarithmus medii proportionalis æquatur dimidio summæ ex logarithmis extremorum.

459. SCHOL. Ex hactenus dictis haud difficulter intelligitur, quâ ratione ac methodo logarithmorum tabula constructa fuerit: si enim, uti ab aliquibus factum est, unitati tribuatur logarithmus 0.0000000, decadi verò 1.0000000; erit inprimis medii proportionalis inter unitatem & decadem logarithmus 0.5000000 (§. præced.): quod si dein novi continuò inter quosvis duos terminos medii proportionales quærantur, atque ipsis assignetur pro logarithmo dimidium summæ ex logarithmis terminorum, inter quos sunt medii: tandem logarithmorum canon constructus erit.

CAPUT ULTIMUM.

DE COMBINATIONIBUS ET PERMUTATIONIBUS.

Hoc capite, quod ad progressiones quædam quasi appendix est, Arithmeticam concludemus.

460. *Combinatio* est modus inveniendi quot diversi ex. gr. litterarum binarii, ternarii, quaternarii &c., sub dato litterarum numero contineantur.

THEOREMA XXXIX.

Binarii sub certo numero contenti, æquantur summæ ex numero proximè minore, & binariis sub eo comprehensis.

461. DEMONST. Quivis v. g. litterarum numerus continet inprimis binarios omnes, qui comprehendun-

tur ſub litterarum numero proximè minore, ùt per ſe patet : ſed nova littera, quam numerus datus complectitur, combinari inſuper poteſt cum qualibet præcedentium, ùt etiam manifeſtum eſt; atque adeo iſtâ ratione tot novi accedunt binarii, quot litteras continet numerus proximè minor : ergo binarii ſub certo numero contenti, æquantur ſummæ ex numero proximè minore, & binariis ſub eo comprehenſis. *Q. e. d.*

PROBLEMA XCVIII.

Dato quopiam ex. gr. litterarum numero, invenire quot diverſi litterarum binarii ſub numero dato contineantur.

462. Resol. I. Addatur binarius unicus in duabus litteris contentus, ipſi binario litterarum numero.

III. Summa inventa 3 addatur numero litterarum ſequenti.

III. Quod ſi hanc additionem ſic porro continues uſque ad numerum datum; prodibunt tandem omnes binarii quæſiti.

Ex. gr. ſint 8 litteræ diverſæ : duæ conſtituent binarium unicum : tres continebunt $2+1$, ſive 3 binarios; 4 litteræ facient $3+3$, ſive binarios 6 : pro determinandis binariis ſub numero 5 contentis, adde 4 & 6; pro binariis 6 litterarum, addantur 5 & 10 : pro 7 litteris fiat $6+15=21$; tandem 8 litteræ inveniuntur continere $7+21$, ſive 28 litterarum binarios.

litteræ	*binarii*
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28

THEOREMA XL.

Ternarii ſub certo numero contenti, æquantur ſummæ ex binariis & ternariis comprehenſis ſub numero proximè minore.

463. DEMONST. Quivis litterarum ex. gr. numerus omnes inprimis continet ternarios numeri proximè minoris: ſed inſuper littera adjecta, combinata cum omnibus binariis numeri præcedentis, tot novos ternarios conſtituit, quot ſub numero præcedente ſunt binarii: ergo quivis litterarum aliarumve rerum numerus tot continet ternarios, quot ſunt binarii & ternarii ſimul ſub numero minore comprehenſi. *Q. e. d.*

464. SCHOLION. Facilè quiſque jam perſpiciet, eâdem ratione demonſtrari poſſe, quaternarios cujuſque numeri conſtare ex ternariis & quaternariis; quinarios ex quaternariis & quinariis; ſenarios ex quinariis & ſenariis numeri proximè minoris, atque ita de cæteris. Tabella ſequens exhibet omnes binarios, ternarios &c. ſub 10 v. g. litteris comprehenſos.

litteræ	binarii,	ternarii,	quaternarii,	quinarii,	ſenarii,	ſeptenarii,	octonarii,	novenarii,	denarii
1									
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	70	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

PROBLEMA XCIX.

Dato quopiam ex. gr. litterarum numero, invenire quot diverſi ternarii ſub eo contineantur.

465. RESOL. I. Addatur inprimis trium litterarum ternarius unicus cum binariis ſub tribus litteris comprehenſis.

II. Et

II. Et ita porro binarii & ternarii cujusque numeri addantur pro ternariis numeri unitate majoris, donec ad numerum datum perveniatur.

466. *Permutatio*, est modus inveniendi omnes diversas combinationes possibiles, quas res aliquæ accipere possunt, non mutato earum numero.

THEOREMA XLI.

Res quælibet tot permutationes subire possunt, quantum est factum permutationum possibilium in numero proximè minore, per rerum numerum datum.

467. Ex gr. sint quædam litteræ Alphabeti A, B, C, D, E &c. : dico quasvis duas posse permutari bis; tres posse sexies; quatuor admittere permutationes 24; quinque autem litteras permutationes subire posse 120 &c.

Demonst. Perspicuum inprimis est, duas ex illis, ex. gr. A & B, bis posse permutari, quâlibet semel ultimum, semel primum locum occupante : igitur, si tres dentur litteræ, earum quâlibet semel ultimum locum occupante, poterunt duæ reliquæ bis permutari; atque adeo tres litteræ permutari poterunt sexies. Similiter, si 4 fiant litteræ, earum unâ ultimum tenente locum, poterunt tres reliquæ sexies mutare locum : cùm igitur quælibet ex 4 litteris datis semel occupare possit locum ultimum, eæ admittere poterunt permutationes quater sex, seu 24. Porro eodem planè modo ostendi poterit, 5 litteras 120; 6 litteras 720 &c. permutationes subire posse : atque proinde omni casu permutationes quarumcumque rerum possibiles, æquare factum permutationum possibilium in numero proximè minore, per rerum numerum datum. *Q. e. d.*

Corollarium I.

468. Productum unitatis per binarium dat permutationes, quas duæ res subire possunt : factum hoc in 3,

dat permutationes trium rerum, & ita consequenter (§. præced.): ergo, si, quot sunt res permutandæ, totidem ponantur numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5 &c.; hi inter se multiplicati producunt numerum permutationum, quas res datæ subire possunt. Ex. gr. $1\times2=2$. $2\times3=6$ $6\times4=24$. $24\times5=120$. $120\times6=720$ &c.

COROLLARIUM II.

469. Binarius rerum numerus duas, ternarius 6, quaternarius 24 &c. permutationes subire possunt (§. 467): ergo, si binarios sub dato litterarum numero contentos per 2, ternarios per 6, quaternarios per 24 &c. multiplices; exhibebitur 1° casu quot diversa vocabula ex duabus, 2° casu quot vocabula ex 3 &c. inter litteras datas componi possint.

470. SCHOL. Si quis methodo hactenus traditâ investigare voluerit combinationes omnes earumque permutationes, quæ circa 24 Alphabeti litteras institui possunt; deprehendet numerum vocabulorum, quæ ex 24 Alphabeti litteris efformari possunt, omnem imaginationis vim excedere, atque esse propemodùm infinitum.

THEOREMA XLII.

Si numerus quivis, ex. gr. litterarum, in alium unitate minorem ducatur, prodeunt omnes binarii sub numero dato contenti, secundùm omnes eorum permutationes possibiles.

471. DEMONST. Si primam litteram successivè combines cum singula sequentium; tum 2am cum sequentium singula, & ita deinceps, donec penultima cum ultima combinetur; progressio Arithmetica formatur tot terminorum, quot sunt litteræ datæ, demtâ unicâ: ejus porro terminus maximus tot binarios valet, quot numerus datus unitate mulctatus continet litteras; minimus autem terminus binarium unicum facit: igitur aggregatum ex terminis extremis, ipsum numerum da-

tum adæquat : ſed aggregatum ex extremis per numerum terminorum producit ſummæ progreſſionis duplum (§. 424), atque adeo binarios omnes ſecundùm duplicem immutationem, quam quiſque ſubire poteſt : ergo, ſi numerus quivis litterarum, aliarumve rerum, in alium unitate minorem ducatur, prodeunt omnes binarii ſub numero dato contenti, ſecundùm omnes eorum permutationes poſſibiles. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

472. Ergo, ſi datus rerum numerus in alium unitate minorem ducatur, & factum dividatur per 2; quotus exprimet omnes binarios ſub numero dato comprehenſos.

THEOREMA XLIII.

Si quidam rerum numerus per alium unitate minorem multiplicetur, atque factum hoc ducatur in alium duabus unitatibus minorem; prodeunt omnes ternarii ſub numero dato contenti, ſecundùm omnes eorum permutationes poſſibiles.

473. DEMONST. Si binarii omnes quovis modo poſſibili permutati, cum ſingula ex rebus reſtantibus combinetur, prodeunt omnes ternarii ſub numero dato contenti, cum omnibus eorum permutationibus poſſibilibus, ùt paullò attentiùs meditanti manifeſtum ſit : ergo, cùm numerus binariorum ſecundùm omnes eorum permutationes poſſibiles ſit æqualis producto numeri dati per alium unitate minorem (§. 471); & rerum poſt binarium reſtantium numerus, duabus unitatibus à numero dato deficiat; obtinebis ternarios omnes ſecundùm quamvis eorum permutationem poſſibilem, ſi numerum datum primò multiplices per alium unitate minorem, & dein factum hoc ducas in numerum duabus unitatibus à numero dato deficientem. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

474. Quoniam ſex ſunt permutationes poſſibiles in quolibet ternario (§. 467); ſi factum numeri dati in alium unitate minorem, ducas in tertium numerum duabus unitatibus minorem, atque ultimum hoc productum per 6 dividas; emergit numerus ternariorum ſub numero dato contentorum.

475. SCHOL. Quæ jam dicta ſunt, demonſtrationem exhibent regulæ, ſecundùm quam ſequens problema reſolvi debet.

PROBLEMA C.

Dato certo rerum numero, invenire quot binarios, ternarios, quaternarios &c. contineat, non conſtructâ combinationum Tabulâ.

476. RESOL. I. Fiant duæ progreſſiones arithmeticæ decreſcentes ad unitatem, tot terminorum, quot unitatibus conſtat numerus, ſecundùm quem combinatio facienda proponitur.

II. Terminus maximus unius progreſſionis ſit numerus rerum datus; alterius verò ſit numerus, ſecundùm quem res datæ combinandæ ſunt.

III. Termini cujuſque progreſſionis in ſe invicem ducantur.

IV. Factum terminorum progreſſionis majoris dividatur per factum terminorum alterius.

Quotus exhibebit quot combinationes ſecundùm numerum datum ſint poſſibiles.

Ex. gr. ſint 10 litteræ combinandæ in ternarios. Formatis duabus progreſſionibus, ùt in adjecto ſchemate; factum 720 dividatur per factum terminorum alterius progreſſionis, ſive per 6;

$$\begin{array}{l} 10\times9\times8=720 \\ 3\times2\times1=6 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 6 \\ \hline 120 \end{array}\right.$$

quotus 120 dabit omnes ternarios ſub 10 litteris contentos.

DEMONST. Primum factum dat omnes ternarios ſub 10 litteris comprehenſos, ſecundùm omnem eorum permutationem poſſibilem (§. 473) : alterum autem productum exhibet immutationes omnes, quas ternarius litterarum numerus ſubire valet (§. 468) : ergo, primum factum dividendo per ſecundum, prodeunt omnes litterarum ternarii ſub 10 comprehenſi (§. 474). *Q. e. d.*

FINIS.

Vid. & approbavit

FRANC. JACQUES dic JACOBI
S. T. L. Ap. Reg. Lib. per
Germ. Infer. Viſ. & Cenſor.

ORDO CAPITUM.