Geometria elementaria et practica.

2

GEOMETRIA ELEMENTARIA ET PRACTICA.

LOVANII,

E TYPOGRAPHIA ACADEMICA.

M. D. CC. LXXIV.

INDEX
ELEMENTORUM GEOMETRIÆ.

DEFINITIONES PRÆMITTENDÆ. pag. 1

SECTIO I. *DE LINEIS.* 2

CAPUT I. DE NATURA LINEARUM. 2
Art. I. *De Lineis rectis.* 2
Art. II. *De Linea circulari.* 4
Art. III. *Notio aliarum quarumdam curvarum.* 12

CAP. II. DE RECTARUM PROPRIETATIBUS. 15
Art. I. *De situ lineæ rectæ ad aliam rectam, & de angulis.* 15
§. 1. *De Angulis.* 16
§. 2. *De Perpendicularibus.* 20
§. 3. *De Parallelis.* 24
Art. II. *De situ lineæ rectæ ad Circularem; & de mensura angulorum, quorum vertex non est in circuli centro.* 29
§. 1. *De situ lineæ rectæ ad Circularem.* 29
§. 2. *De mensura angulorum, quorum vertex non est in in Circuli Centro.* 35

CAP. III. DE RECTARUM PROPRIETATIBUS, DUM SPATIUM CLAUDUNT. 41
Art. I. *De Triangulis.* 42
§. 1. *De variis Triangulorum speciebus, atque proprietatibus.* 42
§. 2. *De Comparatione Triangulorum.* 52
Art. II. *De cæteris Polygonis.* 56
§. 1. *De Polygonis in Genere.* 57
§. 2. *De Polygonis Symmetricis.* 58
§. 3. *De Polygonis Regularibus.* 62
Art. III. *De Lineis Proportionalibus, & Figuris similibus.* 67
§. 1. *De Lineis proportionalibus, atque △△ similibus.* 68
§. 2. *De cæteris Figuris similibus.* 84

SECTIO II. *DE SUPERFICIEBUS.* 88

CAPUT I. DE SUPERFICIEBUS QUA MAGNITUDINIS. 88
Art. I. *De methodo generali Metiendi Superficies.* 89
Art. II. *De Ratione Arearum.* 93

CAP. II. DE PROPRIETATIBUS SUPERFICIERUM PLANARUM. 96

INDEX.

SECTIO III. *DE SOLIDIS.* 101

CAPUT I. DE GENESI SOLIDORUM; ANGULIS SOLIDIS, ATQUE POLYEDRIS. 102
Art. I. *De Genesi Solidorum.* 102
§. 1. *De Genesi Solidorum per motum rectilineum.* 102
§. 2. *De Genesi Solidorum, quæ fiunt motu circulari.* 106
Art. II. *De Angulis solidis, atque Polyëdris.* 107
§. 1. *De Angulis solidis.* 107
§. 2. *De Polyedris.* 109
Art. III. *De Solidis similibus.* 111
CAP. II. DE DIMENSIONE SOLIDORUM. 117
Art. I. *De Dimensione Superficierum Corporum, earumque Comparatione.* 117
Art. II. *De Dimensione Soliditatis Corporum, & Soliditatum Comparatione.* 129

SECTIO IV. *DE TRIGONOMETRIA PLANA.* 134

Art. I. *De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium.* 137
Art. II. *De Analysi Triangulorum.* 144

INDEX GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

SECTIO I. *DE INSTRUMENTIS GEOMETRICIS, EORUMQUE USU.* 154

SECTIO II. *DE LONGIMETRIA.* 183

SECTIO III. *DE PLANIMETRIA.* 190

Art. I. *De Agrorum Geodæsia.* 190
Art. II. *De divisione & reductione figurarum.* 204
§. 1. *De divisione & reductione Triangulorum.* 204
§. 2. *De divisione atque reductione Quadrilaterûm &c.* 209

SECTIO IV. *SOLIDOMETRIA SIVE STEREOMETRIA.* 214

CAPUT I. DE SOLIDORUM CONSTRUCTIONE ATQUE DIMENSIONE. 214
§. 1. *De Solidorum Constructione.* 214
§. 2. *De Solidorum Geodæsia.* 218
CAP. II. DE STEREOMETRIA DOLIORUM. 220

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

DEFINITIONES PRÆMITTENDÆ.

DEFINITIO I.

1. GEOMETRIA ſcientia eſt, quæ triplicem extenſionis ſpeciem, *longitudinem* ſcilicet, *latitudinem* atque *profunditatem*, conſiderat.

DEFINITIO II.

2. *Punctum* à geometris conſideratur veluti quantitas, cujus dimenſiones ſunt infinitè parvæ, & cui nulla extenſio finita tribui poteſt, definiturque à *Wolfio*; *quod quaquaverſum ſe ipſum terminat*, ſeu quod non habet terminos alios à ſe diſtinctos.

SECTIO PRIMA
DE LINEIS.
CAPUT PRIMUM
DE NATURA LINEARUM.
HYPOTHESIS.

3. CUm *punctum* à termino ad terminum moveri concipitur, *Linea* deſcribitur; quæ *Recta* eſt, ſi in nullam partem deflectat punctum in decurſu; *Curva*, ſi continua ſit deviatio, & *Mixta*, ſi partim linea deſcripta rectâ atque curvâ conſtet.

COROLLARIUM I.

4. Quamlibet igitur lineam concipere licet ùt ſeriem continuam infinitorum punctorum; & quoniam duo quæcumque puncta ſibi contigua lineam rectam conſtituant oportet; quælibet linea, ſive recta, ſive curva, ſpectari poteſt compoſita rectis infinitè parvis.

COROLLARIUM II.

5. Linea nullam habet latitudinem, neque profunditatem; ejuſque extrema, cùm ſint puncta, extenſa dici nequeunt.

6. SCHOLION. Hac, atque ſequenti ſectione, excepto cap. 2, lineas omnes in eodem plano exiſtentes ſupponimus.

ARTICULUS I.
De Lineis rectis.

Ex lineæ rectæ geneſi (3), axiomatis inſtar, aſſumere licet propoſitiones ſequentes:

7. I. Linea recta breviſſima eſt, quæ inter duo puncta duci poteſt.

Corollarium I.

8. Lineis ergo rectis diſtantiæ ſunt inquirendæ.

Corollarium II.

9. Recta AB (Tab. I. *fig. 1.*) brevior eſt rectis AC+BC; item brevior eſt curvâ AKB.

10. II. Lineæ rectæ unica eſt ſpecies, curvarum verò infinitæ poſſunt dari.

11. III. A puncto dato ad punctum datum unica recta duci poteſt.

12. IV. Bina puncta ſufficiunt, ut lineæ rectæ poſitio determinetur; at pluribus, quàm duobus, opus eſt, ut curvæ ſitus innoteſcat.

THEOREMA I.

Duæ lineæ rectæ ſeſe tantùm poſſunt interſecare in unico puncto communi.

13. Demonstratur: Si enim duo unius lineæ puncta forent alteri lineæ communia; quoniam hæc puncta alterius lineæ ſitum determinarent (12), deberet altera in priorem incidere; atqui hoc eſt contra ſuppoſitum; ergo unicum tantùm poſſunt habere punctum commune. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Datâ rectâ GI (fig. 2), *ſi punctum aliquod* G *diſtet æqualiter à punctis* A *&* B; *& inſuper aliud quoddam rectæ* GI *punctum v. g.* I, *etiam æqualiter diſtet ab* A *&* B, *quodlibet punctum lineæ* GI *diſtat æquè ab* A *ac à* B.

14. Demonstr. Ex ſuppoſito puncta G & I non deflectunt ab A plus quàm à B, neque à B plus quàm

ab A; atqui ut à G ad I recta ducatur, ſic moveri concipiendum eſt punctum G, ut, ubicumque exiſtat, etiam non deflectat ab A nec B (3); ergo ſingulum rectæ GI punctum æqualiter ab A & B diſtat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

15. Ductâ AB, quoniam O eſt punctum rectæ GI (13) eſt AO = OB.

COROLLARIUM II.

16. Si producatur recta GI (*fig.* 3), hæc tranſibit per omnia puncta æqualiter ab A & B diſſita; ſi enim foret aliquod punctum v. g. X extra lineam GI, datam aut productam, quod ab A & B æqualiter remotum foret, atque adeo eſſet AX=XB; quoniam eſt AL=LB (14), eſſet AX=XL+AL; quod fieri nequit, ſeu quod implicantiam involvit (9).

ARTICULUS II.

De Linea circulari.

HYPOTHESIS.

17. Recta BX (*fig.* 4), unâ ſui extremitate fixâ in X, alterâ B circumducatur, donec rurſus ad B redeat.

DEFINITIO I.

18. Totum ſpatium, à linea BX percurſum, *Circulus* dicitur; & punctum X, ejuſdem *Centrum* audit.

DEFINITIO II.

19. Curva BCLFB, ab extremo puncto B deſcripta, *Circumferentia* item *Peripheria* circuli appellatur.

COROLLARIUM.

20. Quoniam punctum B, omni inſtanti, à quolibet puncto peripheriæ, ad vicinum progrediens, cogatur

deflectere, tria peripheriæ puncta in eadem linea recta reperiri nequeunt; atque adeo ab eodem puncto ad eandem rectam non possunt duci tres lineæ rectæ æquales.

DEFINITIO III.

21. Peripheriæ pars quælibet, v. g. BZK (*fig.* 5), *Arcus* vocatur, & recta BK, terminata utrimque in peripheria, *Chorda* vel *Subtensa* audit; hæcque *subtendit*, seu *sustentat*, arcum BZK, item arcum BCAGK.

DEFINITIO IV.

22. Pars circuli, v. g. KZBK, comprehensa inter chordam BK & arcum subtensum, *Segmentum circuli* dicitur.

DEFINITIO V.

23. Chorda per centrum transiens, speciali nomine *Diameter* appellatur : talis est chorda AB, item CG, si X sit circuli centrum.

DEFINITIO VI.

24. Rectæ omnes, à centro ad aliquod peripheriæ punctum, ductæ, *Radii* vocantur. Tales sunt BX, XA, XG & XC, posito quòd in X sit centrum.

COROLLARIUM. I.

25. Omnes radii ejusdem circuli, vel æqualium circulorum, sunt æquales : omnia enim peripheriæ ejusdem circuli, aut æqualium circulorum puncta, à centro distant radio istius circuli.

COROLLARIUM II.

26. Diameter dupla est radio ejusdem, aut æqualis circuli.

DEFINITIO VII.

27. *Sector circuli* est pars circuli, duobus radiis AX & GX (*fig.* 5), atque arcu GS, comprehensa.

28. SCHOLION. In charta circulus deſcribitur circino; majoribus autem circulis deſcribendis, filum, funiculus aut pertica, adhibetur: unâ enim eorum extremitate, ſtylo fixâ, altera circumducitur (filum atque funiculum aptè tendendo), & cuſpide, cretâ &c. peripheria delineatur.

THEOREMA I.

Punctum interſectionis duarum diametrorum eſt centrum.

29. Si chordæ AB & GC (*fig.* 5) ſint diametri, punctum X eſt centrum.

DEMONST. Ut chorda AB, item GC ſit diameter, quælibet per centrum tranſeat oportet (23); igitur punctum illud, quod centrum dicitur, quodque unicum eſt, reperitur in ſingula ex dictis chordis; atqui duæ rectæ, ſeſe interſecantes, unicum poſſunt habere punctum commune (13); ergo punctum X eſt centrum. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Diameter peripheriam dividit in duas partes æquales, Et è converſò; ſi qua chorda peripheriam dividat in duas partes æquales, illa diameter eſt.

30. Dico 1° ſi chorda AB (*fig.* 6) diameter ſit, eſſe arcum AKB = arcui BCA.

DEMONST. Finge peripheriæ partem BCA plicari verſus alteram BKA; quoniam ſingula puncta arcûs BCA æqualiter ab X, centro circuli, diſtant, ac quælibet arcûs BKA puncta, centrumque immotum conſiſtat; nullum prioris arcûs punctum dari poterit, quin coincidat alicui puncto arcûs BKA; cùm igitur dictorum arcuum extrema fixa maneant in A & B; arcus illos coincidere, ergo & æquales eſſe, oportet. Quod eſt primum.

Dico 2^{do}, & è converſo : ſi arcus BKA ſit = arcui BCA, chordam AB eſſe diametrum.

DEMONST. Si chorda AB (*fig.* 6) non foret diameter, centrum extra eam dari, neceſſe eſſet; pone igitur centrum alibi, v. g. in O; ducta BZ erit diameter (23); ergo arcus BCZ eſſet = arcui BKAZ (30), quod eſt contra ſuppoſitum. Ergo AB diameter eſt; quod eſt alterum.

COROLLARIUM.

31. Dum duæ diametri AB & CG (*fig.* 5) ſeſe interſecant, eſt arcus BC = GA, & arcus AC = arcui GKZB : nam eſt arcus GA+AC=AC+BC (30), ergo arcus GA=BC. Similiter eſt arcus AG+AC= AG+GZB; ergo arcus AC=GZB.

32. SCHOLION. Placuit geometris peripheriam cujuſlibet circuli in 360 partes æquales (quæ *gradus* dicuntur) partiri; quia numerus 360, accuratè per plures alios, ùt per 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 18 &c. diviſibilis eſt. Quivis gradus in 60 minores partes æquales, quæ *minuta prima* vocantur; & quodlibet minutum primum in 60 *minuta ſecunda* &c. ſubdividitur. Gradus deſignantur per (°), minuta prima per (′), minuta ſecunda per (″) &c. E. G. 5°, 28′, 19″, 17‴; denotat 5 gradus, 28 minuta prima, 19 ſecunda, & 17 tertia.

THEOREMA III.

Diameter eſt omnium chordarum maxima.

33. Si chorda AB (*fig.* 7) ſit diameter, dico eam majorem eſſe chordâ CF, aut quàcumque aliâ non diametro.

DEMONST. Ad X centrum, radios CX & FX ductos imaginare; eſt CF minor CX+FX (9); atqui CX+FX=AB (26); ergo diameter eſt omnium chordarum maxima. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Chorda æqualis diametro eſt diameter.

34. Si CF (*fig.* 7) ſit æqualis diametro, dico eam eſſe diametrum.

DEMONST. Si non foret diameter, centrum extra eam eſſet (23); finge illud v. g. eſſe in X; duc radios CX, item FX; ſequeretur CF eſſe = CX + FX (26); atqui hoc implicantiam involvit (9); ergo recta CF per centrum tranſit, ſeu eſt diameter. *Q. e. d.*

THEOREMA V.

Chordæ æquales ſuſtentant arcus æquales; & è converſo: dum duo arcus ſunt æquales, chordæ quoque, à quibus ſuſtentantur, æquales ſunt.

35. Dico 1°, ſi chorda AB (*fig.* 8) ſit æqualis chordæ FC, arcum AOB eſſe = arcui FXC.

DEMONST. Concipe chordam FC cum arcu FXC tranſferri, atque ſic diſponi, ut punctum F in A, & C in B collocetur; nullum punctum arcûs FXC excedere poteſt arcum AOB (illud ipſum enim non diſtaret æqualiter à centro, ac ſingulum punctum arcûs AOB); ergo arcus FXC coincidit cum arcu AOB, & proinde ei eſt æqualis; quod eſt primum.

Dico 2do, ſi arcus FXC ſit = arcui AOB, eſſe chordam FC æqualem chordæ AB.

DEMONST. è puncto H, medio arcûs BC, diametrum HI ductam imaginare; deinde arcum HCXFI plicari; coincidet hic cum arcu HBOAI (30); & quoniam arcus HC = HB, punctum C cadet in B; ergo cùm CXF = BOA, hi duo arcus quòque coincident; ergo punctum F in A cadit, unde & chordæ AB & FC ſunt = (11); quod eſt alterum.

COROL-

COROLLARIUM.

36. Chordæ majores ſubtendunt arcus majores; & è converſo.

37. SCHOLION. Ne tamen exiſtimes, eâdem ratione chordas atque arcus ſubtenſos creſcere.

THEOREMA VI.

Dum duæ chordæ æquales ſeſe interſecant, aliqui duo arcus oppoſiti ſunt æquales; & è converſo.

38. Dico 1°, ſi chorda AB (*fig.* 9) ſit = CF, eſt arcus AC = FB, vel arcus AF = BC.

DEMONST. Nam (35) vel arcus AFB = arcui FAC, vel BCA = CBF; ergo arcus AC = FB. Vel arcus ACB = FAC, aut AFB = FBC; ergo arcus AF = BC; quod eſt primum.

Dico 2°, ſi arcus AC = FB, aut arcus AF = BC, eſt chorda AB = CF.

DEMONST. Erit arcus CA + AF = BF + FA; vel arcus AF + FB = CB + BF; ergo ſemper chordæ AB & CF ſuſtentant arcus æquales; ergo æquales ſunt (35); quod eſt ſecundum.

PROBLEMA I.

A puncto dato X (fig. 10), *ad rectam* AB, *duas rectas ducere, quarum ſingula rectæ* GH *æqualis ſit.*

39. RESOLUTIO I. Circino ſumatur intervallum lineæ GH.

II. Tum, unò pede circini fixo in X, (ſeu ex X tamquam centro) deſcribe arcum OZ, qui rectam AB ſecet in punctis O & Z (ſupponitur enim GH ſat longa); erunt rectæ XO & XZ æquales (25), &, ex conſtructione, ſingula æquatur rectæ GH.

PROBLEMA II.

Rectam AB (fig. 11) *bifariam ſecare.*

40. RESOLUTIO. Ab extremis punctis A & B, ut centris, eâdem circini aperturâ, (pro libitu, ſed majori quàm eſt medietas rectæ AB) ducantur arcus, ſeſe interſecantes in G & I; ducta GI, rectam AB bifariam ſecat.

DEMONST. Ducendæ AG, BG, AI & BI ſunt radii æqualium circulorum; ergo & illæ rectæ æquales ſunt (25); unde puncta G & I æqualiter ab A & B remota ſunt (8); ergo ductâ rectâ GI, eſt AO = OB (15). *Q. e. d.*

41. SCHOLION. Eâdem methodo rectam duxeris, cujus ſingula puncta æqualiter ab A & B diſtant.

PROBLEMA III.

Arcum AB (fig. 12) *bifariam dividere.*

42. RESOLUTIO. Ductam chordam AB Bifariam ſeces per rectam GI (40), hæc quoque arcum datum in duas partes æquales partitur.

DEMONST. Quoniam punctum L æqualiter ab A atque B diſtat (41), chordæ AL & LB ducendæ æquales ſunt; ergo arcus AL = arcui BL (35); ergo arcus ALB diviſus eſt bifariam. *Q. e. d.*

PROBLEMA IV.

Circuli dati centrum invenire.

43. RESOL. I. Duc, pro libitu, chordam AB (*fig.* 12).

II. Chordam AB bifariam feces (40) per rectam GI, quam, ad alterum usque peripheriæ punctum H, protrahas.

III Chordam LH dein bifariam feces; eritque punctum ejus medium, v. g. X, circuli centrum.

DEMONST. Quoniam ex constructione puncta G & I æqualiter à punctis A & B distant, etiam punctum L distat æqualiter ab A & B, item punctum H æqualiter ab A & B (14); est ergo chorda AL = LB, & chorda AH = HB; ergo arcus AL = LB, & arcus AH = HB (35); itaque arcus HA + AL = arcui HB + BL; ergo chorda LH dividit peripheriam in duas partes æquales, & consequenter est diameter (30); unde punctum ejus medium est circuli centrum. *Q. e. d.*

PROBLEMA V.

Per tria puncta ABC (fig. 13), (*non in eàdem rectâ constituta* (20) *circuli peripheriam ducere.*

44. RESOL. I. Rectas AB & BC ductas bifariam feces (40), per rectas GI & FL.

II. Ex puncto X, in quo fese rectæ GI & FL fecant, ad intervallum XA, ducito circulum; dico quòd ejusdem peripheria transeat quòque per puncta BC.

DEMONST. Ex constructione punctum X distat æqualiter ab A ac à B, & à B æqualiter ac à C (16); ergo distat æqualiter ab omnibus tribus; atqui singula puncta peripheriæ circuli descripti ex X ùt centro, ad intervallum XA, distant ab X æqualiter, & quidem pro rectâ XA; ergo peripheria illa per puncta BC transit. *Q. e. d.*

45. SCHOLION. Pari procedendi methodo circulus perficitur, cujus solum arcus delineatus existit: assumantur enim in eo tria puncta, pro libitu; atque per hæc circumferentia ducatur.

COROLLARIUM.

46. Ex dictis evidens est, quòd, dum tres rectæ AO, BO & CO (*fig.* 14) à peripheria ad idem commune punctum O, intra circulum, concurrentes, æquales sunt, illud punctum sit centrum: chordas enim AB & BC, bifariam divisas concipe per rectas EG & FH; transeunt hæ per punctum O (41); atqui punctum intersectionis earum est centrum (44); ergo &c.

ARTICULUS III.

Notio aliarum quarumdam curvarum.

HYPOTHESIS I.

47. Sint duæ rectæ (*fig.* 15) AB major, GI minor, tales, ut extrema cujusque æqualiter ab extremis alterius distent (atque adeo (15) sese mutuò bifariam secent); sit GX, item GZ = AO; est XO = OZ (15) (ergo AX = ZB) estque XG + GZ = AB. Finge XGZ filum tenuissimum, fixisque extremis punctis in X & Z, stylum L (quo constanter filum XGZ tenditur) circumduci per puncta AIB, donec ad G redux fuerit.

DEFINITIO I.

48. Spatium, à lineis XGZ percursum, *Ellipsis* dicitur; curva à stylo L percursa, seu delineata, *Peripheria Ellipseos*, & simpliciter, *Ellipsis* audit.

DEFINITIO II.

49. O *Centrum* ellipseos est, X item Z sunt *Foci*.

DEFINITIO III.

50. AB est *Axis major*, GI *axis minor*; ambo autem simul sumpti *axes conjugati*.

Definitio IV.

51. Linea, quæ eſt tertia proportionalis ad majorem & minorem axin, *Parameter* majoris axis dicitur; & tertia proportionalis ad minorem & majorem axin eſt *Parameter* minoris axis.

Definitio V.

52. Cæteræ rectæ omnes per centrum ellipſeos ductæ, & utrimque in peripheria ellipſis terminatæ, *Diametri ellipſis* vocantur.

Corollarium.

53. Evidens eſt ſingula peripheriæ ellipſeos puncta, v. g. K & L &c. à focis X & Z, ſimul ſumptis, diſtare tota longitudine majoris axis AB: ubivis enim ſtylus fuerit, $KX + KZ = AB$.

Hypothesis II.

54. Suppone circulum ACFG (*fig.* 16) in directionem harum litterarum, in recta AB, rotando, moveri uſque in B, dum integram circumvolutionem abſolverit, ita ut punctum A, attingens rectam AB in A, rurſus rectam AB attingat in B.

Definitio.

55. Punctum A curvam deſcripſerit ALB, quæ *Cycloïs* dicitur; eritque AB æqualis peripheriæ circuli ACFG.

Corollarium.

56. *Curvam Cycloïdalem*, vel ſimpliciter *Cycloïdem*, deſcribunt ſingula puncta peripheriæ rotæ currûs, in plano protracti.

Hypothesis III.

57. Finge rectam AB (*fig.* 17), unâ ſui extremitate fixam in A, alterâ B circumvolvi, donec ad B

redeat; atque interim punctum aliquod, ab A versus B (rectam AB semper concomitans, atque eidem insistens) æquabili motu, ita ferri versus rectæ AB extremitatem, ut hanc attingat, dum extremitas B peripheriam BCEFB absolverit.

DEFINITIO I.

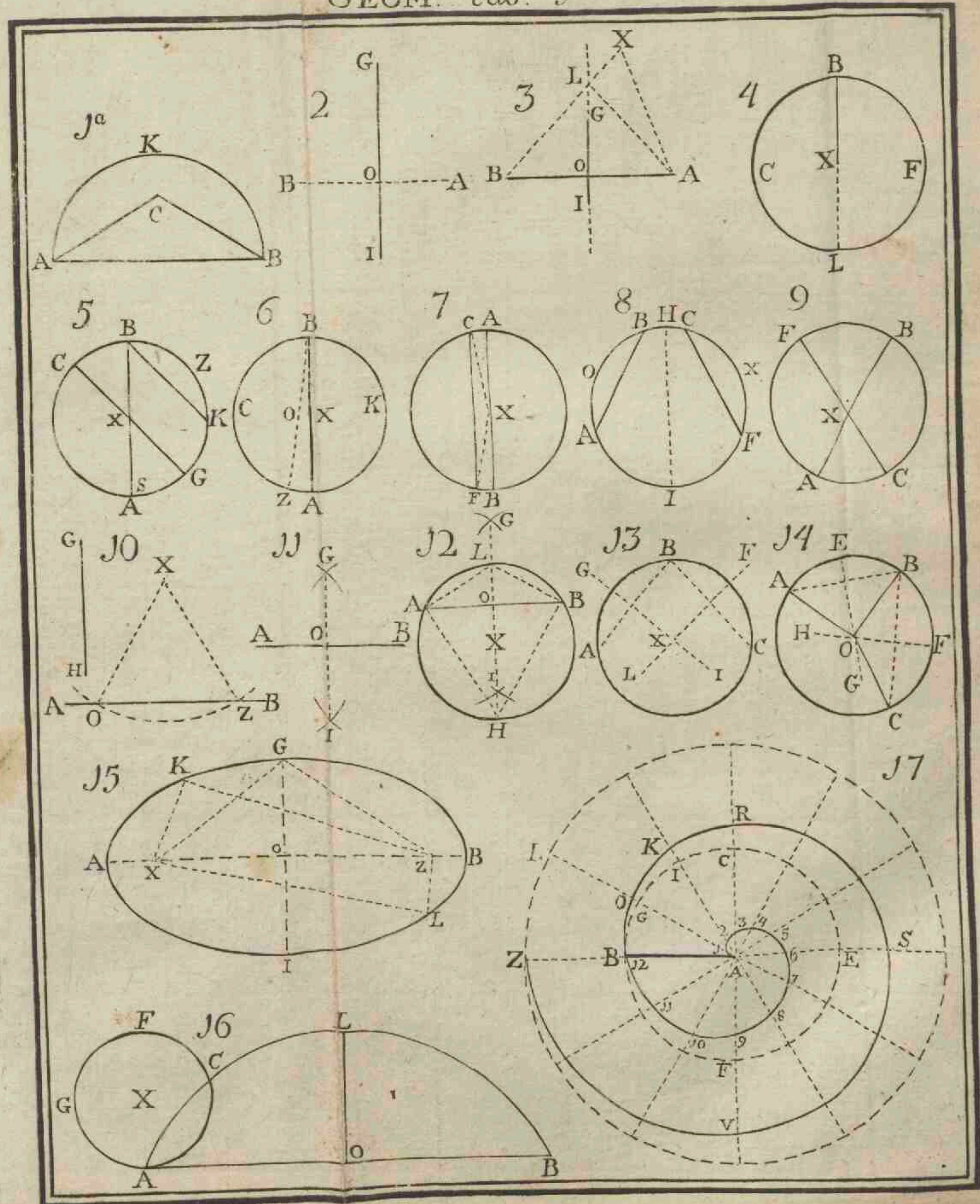
58. Curva A369B, ab isto puncto, mobili in linea AB, descripta, *prima Spiralis*, seu *Helice* audit.

DEFINITIO II.

59. *Secunda spiralis* exurgeret secundâ revolutione, si recta AZ foret duplo longior AB, atque punctum mobile, æqualiter pergeret à centro recedere; describeret enim secundam spiralem BRSVZ.

60. SCHOLION I. Ut spiralem delinees, semi-perepheriam BCE divide (pro libitu) v. g. in 6 partes æquales: ab hisce punctis, per centrum A, totidem age diametros, peripheriamque diviseris in 12 partes æquales (31): divide quoque rectam AB in 12 partes æquales; ab A, in linea AG, pone unicam divisionis AB partem; ab A, in linea AI, pone duas tales, & ita consequenter. Ab A incipiendo, puncta notata in radiis AG, AI &c., conveniente curvâ connecte, & primam spiralem delineaveris. Si rectam AB produxeris, ita ut BZ=AB, atque, circumvolvendo AZ, descripseris peripheriam, cujus AZ sit radius, producito diametros usque ad peripheriam circuli majoris concentrici; pone unicam partem rectæ AB in linea GL, v. g. à G in O; duas ab I in K &c., tum à B curvam ducito per illa puncta, donec ad Z pertigerit; eritque BRSVZ secunda spiralis.

61. SCHOLION II. Secunda, atque sequentes spirales, delineari possunt absque radiorum prolongatione: scilicet apertus circinus pro AB, uno pede posito in A & altero in B, sic moveatur, ut pes unus constanter primæ spirali insistat, alter verò semper directè centrum respiciat: etenim dum unus pes primam spiralem percurrerit, alter secundam delineaverit; & prosequendo, dum prior pes secundam percurrerit, alter tertiam notaverit.



C.H.Becker f. lov.

CAPUT II.

DE RECTARUM PROPRIETATIBUS.

ARTICULUS I.

De ſitu lineæ rectæ ad aliam rectam, & de angulis.

DEFINITIO I.

62. Cùm ſitus duarum rectarum inter ſe ſpectatur, tum neceſſariò vel versus ſe mutuò inclinant; vel nulla inclinatio ſeu tendentia unius ad alteram habetur, omniaque puncta unius æquali ubique intervallo ab altera diſtant, atque quantumvis productæ nunquam concurrunt, hocque caſu *Parallelæ* vocantur.

DEFINITIO II.

63. Dum rectæ ſe mutuò versùs tendunt, ſeu inclinantur, mutua earum inclinatio *Angulus* dicitur, ejuſque *Vertex* eſt in puncto concursûs rectarum.

DEFINITIO III.

64. Si rectæ ad aliam rectam inclinatio (productam ſi opus) utrimque ſit æqualis, ea *Perpendicularis* ad aliam dicitur: ùt AB (TAB. II. *fig.* 1) ad CF perpendicularis eſt, ſi AB non magis inclinet verſus lineam BF, quam verſus lineam BC.

DEFINITIO IV.

65. Si verò major ſit inclinatio in unam quàm aliam partem rectæ, versùs quam tendit, ùt AB (*fig.* 2) ad CF; rectæ AB & CF ad ſe mutuò *Obliquæ* audiunt.

66. SCHOLION. Contendunt nonnulli, tum folùm de angulis tractandum, ubi de lineis eſt actum, hoc ducti motivo, angulos, lineis eſſe magìs compoſitos. Admittimus quidem unicam lineam, ſolitariè ſpectatam, angulo magìs eſſe ſimplicem (hic enim neceſſariò ex inclinatione duarum rectarum enaſcitur): at plurium rectarum combinatio, aut poſitio unius ad alteram collata, profectò nihil minus habet compoſiti, quàm ipſiuſmet anguli conſideratio; imò, quoniam primus linearum inclinatarum effectus eſt angulus, iſque primùm menti illas conſideranti ſeſe offert, ideo ab angulis potiùs ordiendum duximus.

§. I.

De Angulis.

DEFINITIO I.

67. Lineæ, quarum inclinatione, aut concurſu angulus formatur, *Latera* vel *Crura* anguli dicuntur.

DEFINITIO II.

68. Omnis recta v. g. AB (*fig.* 2) alteri, non in extremo puncto occurrens, cum ea efficit duos angulos X & O, qui *Vicini* appellantur.

DEFINITIO III.

69. Dum duæ rectæ AB & FC (*fig.* 3) ſeſe interſecant, quatuor efficiuntur anguli, quorum quilibet duo oppoſiti, v. g. O & X, item G & Z, *ad Verticem oppoſiti* audiunt.

70. SCHOLION. Angulus, vel unicâ notâ deſignatur, vel tribus, quarum media anguli verticem denotat; prima cum ſecunda, unum latus, & ſecunda cum tertia alterum latus; v. g. angulus formatus per latera AB & CB (*fig.* 2), poteſt vocari angulus X, angulus ABC, item angulus CBA.

HYPOTHESIS I.

71. In recta AG (*fig.* 4) immota, aliam BX ſuperpoſitam, uno ſui extremo in X fixo, circumvolvi imaginare, donec puncto B ad G pertingente, rurſus eandem rectam conſtituant: quâ proportione recta BX ab AX removetur, eâ proportione creſcit angulus ad X.

COROL-

COROLLARIUM I.

72. Quoniam tot puncta percurrerit recta, ad CX pertingens, quot sunt puncta peripheriæ in arcu BC, ideo magnitudo anguli BXC proportionatur numero graduum arcûs BC, seu *mensuratur arcu* BC.

COROLLARIUM II.

73. Cùm ex vertice cujuslibet anguli, ùt centro, circulus, aut arcus describi possit, qui anguli crura seu latera, (producta, si opus) intersecet; quilibet angulus tot graduum est, quot graduum est arcus circuli, descripti ex ejus vertice, inter crura anguli comprehensus.

74. SCHOLION. Anguli magnitudo desumi nequit à laterum longitudine, sed ab eorumdem divergentia: sic idem manet anguli GXL valor, sive latera XG & XL longiùs producantur; eritque angulo GXF minor, licèt latus XF latere XL minus fuerit.

COROLLARIUM.

75. Duo igitur anguli æquales sunt, cùm eorum respectivè latera æqualiter à se mutuo divergunt, seu inclinant.

HYPOTHESIS II.

76. Cùm ad punctum E linea mobilis pertingit, ubi non magis in B quàm in G inclinat, linea EX *Perpendicularis* est ad lineam AG. Angulus EXA est æqualis angulo EXG suo vicino, & quisque *Rectus* audit; quoniam verò prior angulus mensuratur arcu ACE, & alter arcu GFE (72), duo illi arcus sunt æquales; cùm verò arcus AEG sit 180° (30), arcus ACE, item GFE est 90°.

COROLLARIUM I.

77. Est ergo angulus rectus 90°.

COROLLARIUM II.

78. Ad idem rectæ punctum, unica perpendicularis dari potest: nam omnis altera recta, non incidens

in rectam EX, in unam aut aliam rectæ AG partem magis inclinabit quam EX.

COROLLARIUM III.

79. Anguli omnes CXA, IXA, ſunt recto minores, & *Acuti* audiunt; anguli FXA, LXA ſunt recto majores, & *Obtuſi* compellantur.

THEOREMA I.

Duo anguli vicini ſimul faciunt 180°.

80. Dico angulos O & Z (*fig.* 5) = 180°.

DEMONST. Ex O, ùt centro, duc mediam peripheriam CGF; O menſuratur arcu CG, & Z arcu GF (72); atqui duo illi arcus = 180° (30); ergo anguli O & Z = 180°. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

81. Quilibet igitur angulus minor eſt 180° : quiſque enim angulus vicinum habet, vel haberet, producto uno ejus latere; atqui cum illo vicino ſolùm = 180°; ergo &c.

COROLLARIUM II.

82. Dum (*fig.* 3) AO ad CF perpendicularis eſt, etiam CO, item FO ad AB perpendicularis eſt : eſt enim O rectus (76), ſeu 90° (77); ergo etiam Z, X, item G eſt 90° (80).

COROLLARIUM III.

83. Omnes anguli, ſuper eadem recta conſtituti, quotquot ſunt, ſimul = 180°; ſic (*fig.* 6) anguli A, B, O & G = 180° : etenim ſi, ex eorum vertice communi X, media peripheria CKF deſcribatur, quiſque angulus menſuratur arcu intercepto inter ſua latera (72); ergo omnes ſimul menſurantur mediâ peripheriâ; atqui hæc = 180° (30); ergo & illi anguli ſimul = 180°.

COROLLARIUM IV.

84. Omnes anguli ad idem punctum, tot quot constitui possunt (*fig.* 7 & 8), simul faciunt 360° : ductâ enim, ex eorum vertice communi, ùt centro, integrâ peripheriâ, omnes illi anguli simul sumpti mensurantur totâ circuli peripheriâ (72); atqui illa est 360° (32); ergo &c.

THEOREMA II.

Anguli ad verticem oppositi sunt æquales.

85. Dico angulum O (*fig.* 3) esse æqualem X; & G = Z.

DEMONST. $O+G=180°$; & $X+G=180°$ (80); ergo est $O=X$. Pariter $X+G=180°$; & $X+Z=180°$; ergo est $Z=G$. Igitur anguli ad verticem oppositi sunt =. *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

Ad punctum B (fig. 9) *rectæ* CF, *angulum construere æqualem angulo dato* A.

86. RESOL. I. Ex A, ùt centro, intervallo arbitrario, circino describe arcum ZG;

II. Ex B, ùt centro, eâdem manente circini aperturâ, describe arcum indefinitum RL;

III. Circino sume intervallum GZ, atque illud transfer ab R in arcum RL, v. g. ab R usque in O;

IV. Duc rectam BO; dico angulum OBF esse = angulo A.

DEMONST. AG sic imponatur in CF, ut A in B, & G in R coincidant; arcus GZ incidet in arcum

RO; & quoniam, ex conſtructione, ſunt æquales, Z incidet in O; ergo AZ coincidet cum BO; ergo angulus A coincidet cum angulo OBF, & conſequenter ei eſt æqualis. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

Angulum C biſariam ſecare.

87. RESOL. I. Ex C (*fig.* 10), ut centro, ducito arcum AB;

II. Eum divide biſariam per rectam LC (42); dico C eſſe diviſum in duas partes æquales.

DEMONST. Eſt arcus AG = GB, ex conſtructione (42); atqui angulus ACG menſuratur arcu AG, & angulus BCG menſuratur arcu BG (72); ergo illi duo anguli ſunt æquales: eſt ergo C diviſus in duas partes æquales. *Q. e. d.*

§. II.

De Perpendicularibus.

THEOREMA I.

Si AB (fig. 11) *ad* FC *ſit perpendicularis, ſingula puncta rectæ* AB *diſtant æqualiter à quibuſvis duobus punctis rectæ* FC, *v. g.* Z *&* H, *hinc inde æqualiter à* B *diſſitis.*

88. DEMONST. Ex B, tamquam centro, ad intervallum BZ, mediam peripheriam ZXH deſcribe; quoniam ex ſuppoſito, eſt BZ = BH (25), peripheria per punctum H tranſeat oportet; erit arcus ZX item XH 90° (76); chorda ducenda ZX = chordæ ducendæ XH (35); proinde recta AB eſt talis, ut duo ejus puncta X & B diſtent æqualiter à Z & H; ergo ſingula puncta rectæ AB, diſtant æqualiter à Z & H (14). Quæcumque nunc puncta, hinc inde in recta CF,

æqualiter à B remota, aſſumere libet, eodem modo demonſtrabitur, ſingula rectæ AB puncta ab iis æqualiter eſſe diſſita; ergo quælibet puncta rectæ AB diſtant æqualiter à quibuſvis punctis rectæ FC, hinc inde æqualiter à B diſſitis. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Si AB (fig. 11) *ſit ad* CF *perpendicularis, &* X *diſtet æqualiter à* Z *&* H, *quodlibet punctum rectæ* AB *diſtat æqualiter à* Z *&* H, *eſtque recta* HZ *diviſa bifariam.*

89. DEMONST. Produc AB uſque in O, ita ut XB = BO; quoniam CB perpendicularis ad AO, item FB ad AO (82), eſt ZX = ZO, & XH = OH (88); ergo quodlibet punctum rectæ AO diſtat æqualiter à Z & H (14); ergo ZB = BH. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Si recta AB (fig. 11) *ſit talis, ut duo ejus puncta æqualiter diſtent à duobus punctis rectæ* CF, *v. g.* Z *&* H, *eſt* AB *ad* CF *perpendicularis.*

90. DEMONST. Singulum punctum rectæ AB diſtat æqualiter à Z & H (14); ergo eſt ZB = BH; & deſcriptâ mediâ peripheriâ ZXH ex B, ut centro, chorda ZX = chordæ XH (14); ergo arcus ZX = arcui XH (35); porro hi arcus = 180° (30); ergo erit arcus ZX 90°; jam verò angulus XBZ menſuratur arcu ZX (72); ergo ille angulus eſt 90°, & æqualis ſuo vicino; ergo AB eſt perpendicularis ad CF (76). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

91. Ergo methodo traditâ (40) recta AB perpendiculariter & biſariam ſecatur.

THEOREMA IV.

A puncto dato ad rectam datam unica duci potest perpendicularis.

92. Dico à puncto A (*fig.* 12) ad rectam CF unicam posse duci perpendicularem AB.

Demonst. Si enim duci posset alia, v. g. AX; sit ZB=BH, erit AZ=AH (88); præterea sit ZX=XO, deberet quoque AZ esse = AO (88); atqui hoc implicat (20); ergo sola AB potest esse perpendicularis ad rectam CF, per punctum A ducta, & cæteræ omnes obliquæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA V.

Perpendicularis est brevissima, quæ à puncto dato ad lineam datam duci potest.

93. Si AB (*fig.* 13) sit perpendicularis ad CF, dico eam esse breviorem quâcumque obliquâ, v. g. AO, ab A ad CF ductâ.

Demonst. Produc AB usque in aliquod punctum G, ita ut GB = BA; quoniam OB ad AG perpendicularis, est GO = AO (88); si ergo AB major esset, vel æqualis AO; & BG major, vel æqualis GO; tota AG esset major, vel = AO + OG, quod implicat (9); ergo perpendicularis AB est brevissima, quæ ab A ad rectam FC duci potest. *Q. e. d.*

Corollarium I.

94. Ergo per lineam perpendicularem distantia puncti dati à linea recta data investiganda est.

COROLLARIUM II.

95. Si qua recta ab A ad CF ducta, v. g. AB, sit brevissima, est ipsa perpendicularis ad CF.

COROLLARIUM III.

96. Inter obliquas, ab eodem puncto ad eandem rectam ductas, eæ longiores sunt, magìsque ad rectam datam inclinatæ, quæ à perpendiculari magìs recedunt; sic AH (*fig.* 12) est AO major, magìsque, quàm hæc, inclinata ad CF; unde angulus H minor est angulo AOB (74).

COROLLARIUM IV.

97. Dum à puncto A, rectæ AZ & AH, ductæ, æquales sunt; perpendicularis ab A ducenda ad CF necessariò cadit inter Z & H.

PROBLEMA I.

Ad punctum datum B (fig. 14) *rectæ* CF *erigere perpendicularem.*

98. RESOL. I. Hinc inde in recta CF sumantur duo puncta Z & H, æqualiter à B dissita (producendo rectam CF si opus; quod necessariò fieri debet, si punctum B fuerit in, vel circa rectæ CF extremum);

II. Ex Z item H, ùt centris, æquali circini aperturâ, fiant intersectiones in I;

III. Ducito rectam IB; dico rectam IB esse ad CF perpendicularem.

DEMONST. Ducenda ZI = ducendæ HI (25); &, ex constructione, est ZB = HB; ergo IB est ad CF perpendicularis (90). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

99. Eâdem itaque praxi ad punctum lineæ datæ angulum rectum, seu 90°, formabis; quem bifariam dividendo (87), angulum 45° habebis.

PROBLEMA II.

A puncto dato A (fig. 15), *extra lineam datam* CF, *ad hanc perpendicularem ducere.*

100. RESOL. I. Ex A, ùt centro, duc arcum ZH, qui rectam CF, (productam si opus) secet in duobus punctis Z & H.

II. Ex Z & H, eâdem circini aperturâ, ducito arcus sese interfecantes in K. Dico rectam AK esse perpendicularem ad CF.

DEMONST. ZA est = AH, & KZ = KH (25); ergo AK est perpendicularis ad CF (90). *Q. e. d.*

§. III.

De Parallelis.

Dum recta GH (*fig.* 16) parallelas AB & CF secat:

DEFINITIONES.

101. I. Anguli E & Z, L & R, I & S, K & P dicuntur *Correspondentes;*

102. II. Anguli I & Z, R & K, vocantur *Alterni Interni;*

103. III. Anguli P & L, S & E *Alterni Externi* audiunt;

104. IV. Angulos I & R, K & Z *Adjacentes Internos*,

105. V. Et Angulos E & P, L & S *Adjacentes Externos* appellamus.

THEORE-

THEOREMA I.

Parallelæ eidem tertiæ ſunt parallelæ inter ſe.

106. Dico 1°, ſi AF item BG (*fig.* 17) ſit parallela ad CI, eſſe AF ad BG quòque parallelam.

DEMONST. Si AF & BG non forent inter ſe parallelæ, alterutram partem versùs productæ, in aliquo puncto communi, concurrerent; atqui hoc fieri nequit: nam illud punctum concursûs diſtaret à linea CI æqualiter, ac ſingula puncta lineæ AF, item diſtaret à linea CI æqualiter, ac ſingula puncta lineæ BG; cùm AF item BG ſit parallela ad CI (62); ergo ſingula puncta lineæ AF diſtarent æqualiter à linea CI, ſicut ſingula puncta lineæ BG; deberent ergo lineæ AF & BG coincidere; quod non ſupponitur; ergo AF & BG ſunt inter ſe parallelæ. Quod eſt primum.

Dico 2°, ſi AF item CI ſit parallela ad BG, eſſe AF & CI inter ſe etiam parallelas.

DEMONST. Neque AF neque IC, quantumvis productæ, concurrent cum BG quantumvis producta (62); ergo BG, quantumvis producta, ſemper ſeparabit AF & IC, quantumvis productas; igitur AF & IC, quantumvis productæ, concurrere non poterunt; ergo parallelæ ſunt. Quod eſt ſecundum.

COROLLARIUM.

107. Dum recta alterutri ex duabus parallelis eſt parallela, eſt etiam ad alteram parallela: erunt enim duæ parallelæ eidem tertiæ (106).

THEOREMA II.

Dum recta transversa parallelas secat, anguli correspondentes sunt æquales.

108. Dico, si AB & CF (*fig.* 16) sint parallelæ, angulos correspondentes, v. g. E & Z esse æquales.

DEMONST. Finge CF, sibi constanter parallelam, ita transferri versus G, ut punctum Z describat rectam RE; dum ad E pervenerit, erit adhuc recta CF parallela ad rectam AB (107), atque adeo nullum sit ejus punctum inæqualiter ab AB dissitum (62); quoniam igitur unum ejus punctum commune habet in E, cum recta AB, incidet CF in rectam AB; ergo recta GH eandem inclinationem habet ad CF, existentem in Z, quam haberet ad eandem, constitutam in E, seu quam habet ad rectam AB; ergo est $E = Z$ (75), $I = S$, quia prioribus ad verticem respectivè opponuntur. Et quoniam $E + K = Z + P$ (80), erit $K = P$, ergo $L = R$, quia præcedentium sunt respectivè ad verticem oppositi : ergo anguli correspondentes æquales sunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

109. Alterni interni, item alterni externi sunt =.

COROLLARIUM II.

110. Adjacentes interni, item externi = 180°.

COROLLARIUM III.

111. Si OX sit perpendicularis ad AB, est ipsa etiam perpendicularis ad CF : nam $O = X$ (109); ergo, cùm, ex supposito, sit O rectus (76), est etiam X rectus; ergo &c.

112. SCHOLION I. OX brevior est omni aliâ, à puncto O ad rectam CF, aut à puncto X ad rectam AB, ducibili (93); & proinde perpendiculari parallelarum distantia est inquirenda.

113. SCHOLION II. Quoniam quælibet parallelarum puncta æqualiter ab alia distant (62), omnes perpendiculares inter easdem parallelas sunt inter se æquales.

THEOREMA III.

Si anguli correspondentes, v. g. E & Z (fig. 16), *æquales sint, rectæ* AB & CF *sunt inter se parallelæ.*

114. DEMONST. Imaginare rursùs rectam CF constanter sibi parallelam moveri, donec punctum Z attingat punctum E; quoniam E = Z, recta ZF incidet in rectam KB (75); ergo CF in AB cadet; cùm ergo CF sibi manserit parallela, est AB parallela CF, existenti immotæ in Z; ergo si anguli correspondentes æquales fuerint, rectæ AB & CF sunt inter se parallelæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

115. Idem sequitur

1° Si L = R; K = P; I = S.
2° Si I + R; K + Z; L + S; E + P = 180°.
3° Si I = Z; R = K.
4° Si L = P; E = S.
5° Si L + S; E + P; L + Z; E + R = 180°.

Nam omni casu sequitur angulum E = Z.

THEOREMA IV.

Dum recta GH (fig. 17), *tres (aut plures) parallelas* AF, BG & CI, *æqualiter à se mutuo dissitas, intersecat, est* LK = KO.

116. DEMONST. Ab O item K dimitte perpendiculares OZ & KS; erit OX etiam perpendicularis ad BG,

cum X = Z (108); attentâ parallelarum diſtantiâ æquali, eſt KS = XO; præterea, cum S = Z (ſunt enim ambo recti), linea SK eſt parallela ZI (114); eſt ergo angulus LKS = I (108); ſuppone nunc lineas SK, LK & LS (ſitu quem ad ſe mutuò habent) transferri ita, ut S in X, & K in O coincidat; quoniam angulus LKS = I, & S = X, incidet recta KL in OK, & SL in rectam XB; ergo rectæ KL & SL ſeſe quoque interſecabunt, ſeu concurrent in puncto K; coincidit ergo præcisè recta KL cum recta OK; proinde æquales ſunt. Haud difficulter nunc idem fieri perſpicies, tot quot lubet datis parallelis æqualiter à ſe mutuò diſſitis.

THEOREMA V.

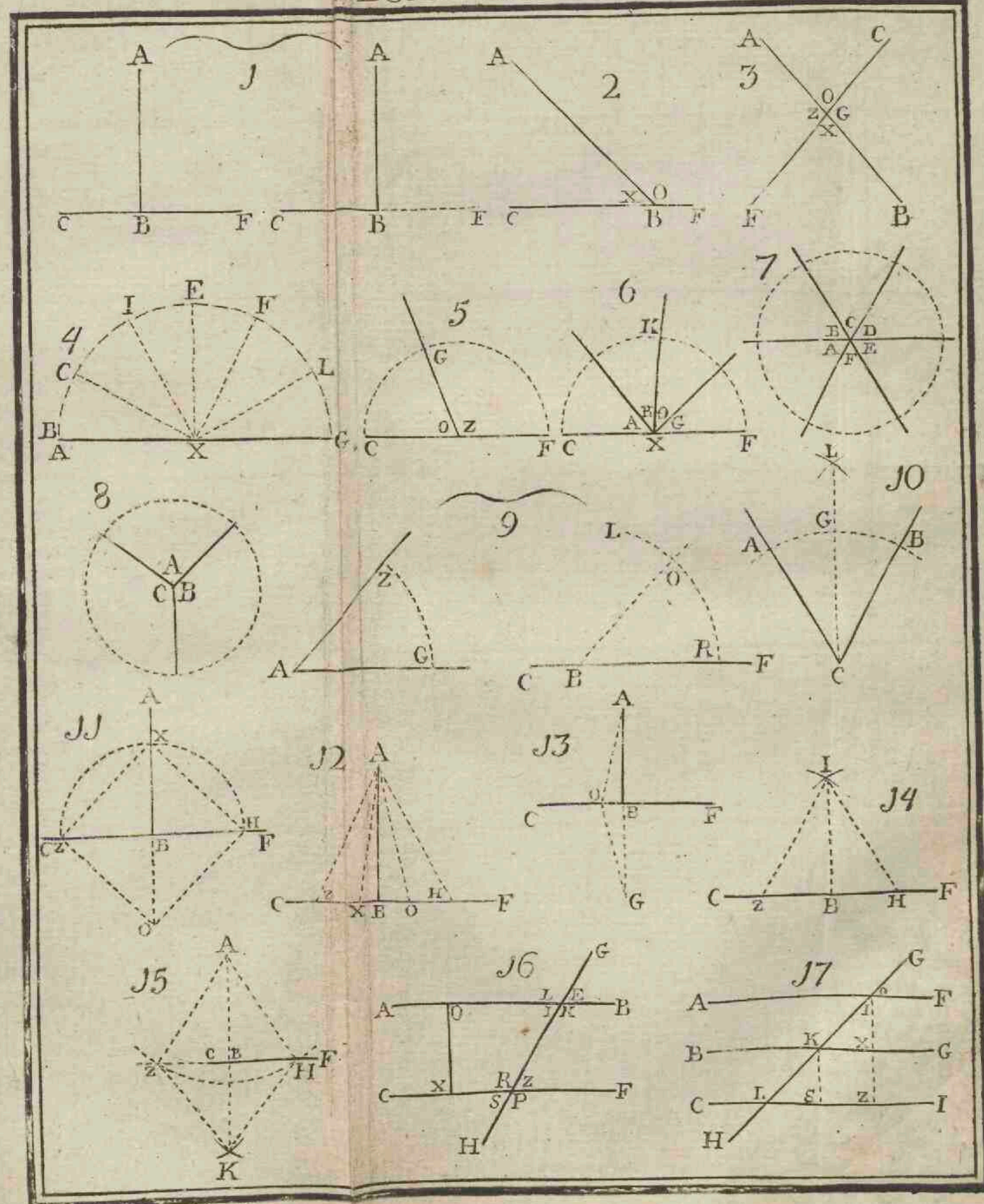
Si rectæ AF (fig. 17) BG & CI ſint inter ſe parallelæ, & ſit KL = OK, illæ parallelæ æqualiter à ſe mutuò diſtant.

117. DEMONST. Ductis perpendicularibus OZ & KS, eſt angulus LKS = I, & angulus OKG = angulo KLI (108); imaginare igitur rectas KL, LS & SK (prout ſunt inter ſe diſpoſitæ) ita collocari, ut punctum L in K, & punctum K in I conſiſtat; (atque adeo coincidat recta KL cum recta KO); angulus LKS in angulum I, & angulus KLS in angulum OKX, coincidet; (cùm reſpectivè æquales ſint, attento quod OX ſit parallela KS; & XK parallela SL); cadet ergo LS in KX, & KS in IX; ergo S in X; eſt ergo KS = OX; atqui hæ lineæ diſtantiam parallelarum metiuntur (112); ergo parallelæ AF, BG & CI diſtant æqualiter à ſe mutuò. *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

Per punctum C datum (TAB. III. fig. 1), ducere parallelam ad rectam AB.

118. RESOLUTIO I. à puncto C ad AB duc rectam (pro libitu) CO;



C.H.Becher f. Lov:

II. Ad punctum C fac angulum OCK, æqualem angulo O (86);

III. Rectam KC, prout opus, produc; erit hæc parallela AB (115).

PROBLEMA II.

Rectam AB (fig. 2) *secare in tres (pluresve pro libitu) partes æquales.*

119. RESOLUTIO I. Duc rectam BL indefinitè, quæ cum recta AB efficiat angulum quemcumque ABL;

II. In linea BL, incipiendo à B, circino sume, arbitrario intervallo, partes æquales BZ, ZH & HS.

III. Duc rectam AS, & ad hanc parallelas HX & ZO; dico rectam AB esse divisam trifariam.

DEMONST. Per punctum B duc BK parallelam AS (118); erit hæc quòque parallela cuique ex aliis parallelis (107); quoniam BZ, ZH & HS, ex constructione, sunt æquales, omnes illæ parallelæ à se mutuò æqualiter distant (117); ergo etiam partes lineæ AB, interceptæ inter illas parallelas, æquales sunt (116). *Q. e. d.*

ARTICULUS II.

De situ lineæ rectæ ad Circularem; & de mensura angulorum, quorum vertex non est in circuli centro.

§. I.

De situ lineæ rectæ ad Circularem.

DEFINITIO I.

120. *Tangens* circuli est, v. g. recta AB (*fig. 3*), quæ ita peripheriam attingit, ut eandem non interse-

cet; atque adeo, quantumvis producta, extra circulum remaneat.

DEFINITIO II.

121. *Secans* dicitur recta CGF, quæ in puncto G, ubi peripheriæ occurrit (producta si opus), eandem peripheriam secat, & aream circuli ingreditur. CG dicitur *Secans Exterior*; FG *Secans Interior.*

THEOREMA I.

Radius, vel diameter, est perpendicularis ad tangentem in puncto tangentiæ.

122. Si X (*fig.* 4) centrum, & KL tangens in K, dico XK esse perpendicularem ad KL.

DEMONST. KL sic attingit peripheriam, ut eam nullibi secet (120); ergo XK minima est, quæ ab X ad KL duci potest: (omnes enim aliæ, v. g. XZ, peripheriâ egrediuntur; ergo sunt radio XK majores) ergo XK est perpendicularis ad KL (95). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

123. Ad idem peripheriæ punctum, unica tantum tangens duci potest: nam ducto radio ad illud punctum, ille est ad tangentem perpendicularis (122); atqui ad idem rectæ punctum unica potest duci perpendicularis (92); ergo &c.

THEOREMA II.

Si X (fig. 4) *Centrum sit; & angulus* XKL *rectus, est linea* KL *tangens.*

124. DEMONST. XK minor est omni aliâ ab X ad KL ducibili (93); atqui XK est radius; ergo omnes aliæ, ab X ad KL ducendæ, circulo egrediuntur, cùm sint

majores XK; ergo nullum punctum rectæ KL circuli aream ingreditur : illud enim minùs distaret à centro, quàm punctum K; ergo recta KL, peripheriæ occurrens in K, quantumvis producta, aream circuli non ingreditur; ergo est *Tangens* (120). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Si KL (fig. 4) *Tangens sit, & angulus* XKL *rectus ;* KH *est Diameter.*

125. Demonst. Si KH non transiret per centrum, radius ductus à centro ad punctum K, esset perpendicularis ad CL (122); atqui ad idem rectæ punctum unica potest duci perpendicularis (78); ergo KH coincidit in radium ductum, & consequenter etiam per centrum transit; sive est diameter (23) *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Si Diameter secet Chordam perpendiculariter ; vel Chordam non Diametrum bifariam; vel unum Chordæ arcum bifariam; prædicta omnia sequuntur. Et si qua Chorda secet alteram Chordam perpendiculariter & bifariam; vel perpendiculariter, item unum ejus arcum bifariam; vel Chordam item unum ejus arcum bifariam ; Chorda secans est Diameter, atque reliqua omnia fiunt.

126. Dico 1°, si KH (*fig.* 5) diameter sit, & O rectus; est AO = OB; arcus AR = KB, & consequenter arcus AH = HB.

Demonst. Ducti radii AX & XB sunt = (25); ducenda AK = KB; ducenda BH = HA; AO = OB (86); arcus AK = BK, & arcus AH = BH (35). Quod est primum.

Dico 2°, si KH Diameter secet chordam AB non Diametrum bifariam; esse O Rectum, & arcum AK = KB &c.

DEMONST. Ex Centro X duc radios AX & XB, hi sunt æquales (25); ergo duo puncta rectæ KH, scilicet O & X, distant æqualiter ab A & B; ergo XO perpendicularis est ad AB (90); chorda AK=KB, & chorda AH = HB (88); ergo arcus AK = KB, arcus AH = HB (35). Quod est secundum.

Cùm igitur Diameter Chordam quampiam secat bifariam; vel hæc Chorda est quòque Diameter, vel perpendiculariter secatur &c.

Dico 3°, si KH sit diameter, & arcus AK = KB; est O rectus, & AO = OB &c.

DEMONST. Ducenda AK est = KB (35); radius AX = BX (25): ergo singula puncta lineæ KH distant æqualiter ab A & B (14); & XO perpendicularis ad AB (90), AO = OB (89) &c. Quod est tertium.

Dico 4°, si O rectus, & AO = OB; est KH diameter, arcus AK = KB &c.

DEMONST. Ducenda AK = KB, & ducenda AH = HB (88); ergo arcus AK = KB, & AH = HB (35); ergo arcus KAH = arcui KBH; ergo chorda KH dividit peripheriam bifariam, proinde diameter est (30). Quod est quartum.

Dico 5°, si O rectus, & arcus AK = KB; est KH diameter, AO = OB &c.

DEMONST. Ducenda AK=KB (35); ergo AO=OB (89). Quod est quintum.

Dico 6°, si AO = OB, & arcus AK = KB; est O rectus, & KH diameter &c.

DEMONST. Ducenda chorda AK = KB (35); ergo puncta O & K distant æqualiter ab A & B; ergo O rectus (90) &c. Quod est ultimum.

THEOREMA

THEOREMA V.

Dum duæ chordæ, una chorda & altera tangens, vel duæ tangentes, inter se parallelæ sunt; intercipiuntur ab illis arcus æquales.

127. Dico 1°, si AB & CF (*fig.* 6) sint parallelæ; est arcus AC = BF.

DEMONST. Per Centrum O duc ad AB perpendicularem XI; erit hæc diameter (23), & etiam perpendicularis ad CF (111), estque arcus AX = XB; & arcus CI = FI (126); jam verò arcus XACI = XBFI (30); ergo arcus AC = BF. Quod est primum.

Dico 2°, si AB sit parallela ad tangentem KXL; est arcus AX = XB.

DEMONST. Ab O Centro, ad X punctum tangentiæ, duc radium OX, erit hic perpendicularis ad XL (122); ergo etiam est perpendicularis ad AB (111); ergo arcus AX = XB (126); quod est secundum.

Dico 3°, si KL & GH, tangentes in X & I, sint parallelæ, est arcus XACI = arcui XBFI.

DEMONST. Ab X, per Centrum O, duc rectam; erit hæc perpendicularis ad KL (122), & producta usque ad rectam GH, erit quòque ad eam perpendicularis (111); non potest recta XO producta cadere in aliud punctum quàm in I : nam si caderet v. g. in Z; ductus radius OI esset etiam perpendicularis ad GH; quod fieri nequit (92); ergo arcus XACI item XBFI est 180°, & proinde æquales sunt. Quod est ultimum.

COROLLARIUM.

128. Duæ ergo tangentes parallelæ tangunt in punctis diametraliter oppositis.

THEOREMA VI.

Si duæ chordæ, una chorda & altera tangens, aut duæ tangentes, intercipiant arcus æquales, illæ sunt inter se parallelæ.

129. Dico 1°, si arcus AC (*fig.* 6) sit = BF; chordæ AB & CF sunt parallelæ.

DEMONST. à puncto X, medio arcûs AXB, duc diametrum XI; est S rectus (126); & quoniam est arcus CAX = FBX, est etiam E rectus (126); ergo E = S; ergo rectæ AB & CF sunt inter se parallelæ (114). Quod est primum.

Dico 2°, si arcus AX sit = XB; chorda AB, & tangens XL sunt inter se parallelæ.

DEMONST. Duc diametrum XI; est angulus LXS rectus (122), item S rectus est (126); ergo lineæ AB & XL sunt parallelæ (115). Quod est secundum.

Dico 3°, si arcus XACI sit æqualis arcui XBFI; tangentes KL & GH esse inter se parallelas.

DEMONST. Erit arcus XACI item XBFI 180°; adeòque ducenda XI Diameter erit: igitur angulus GIX item LXI est rectus (122): sunt ergo duo illi anguli æquales; adeòque KL & GH sunt inter se parallelæ (115); Quod est ultimum.

THEOREMA VII.

Cujuslibet chordæ distantia à centro est æqualis medietati chordæ sustentantis arcum, qui cum arcu à priori chorda subtenso = 180°.

130. Demonst. Sit X (*fig.* 7) centrum; I rectus; recta XI distantiam chordæ AB à centro metitur (94); per centrum X duc FG diametrum parallelam ad AB; præterea duc chordam BL parallelam ad IX; erit OB = OL, & arcus BG = GL (126); arcus AF = BG (127); ergo arcus AF = GL; ergo arcus AB + BGL = 180°. Præterea est IX = BO (113); ergo XI $\frac{2}{1}$ — BL. *Q. e. d.*

PROBLEMA.

Ad punctum F (fig. 8) *peripheriæ datum tangentem ducere.*

131. Resolutio I. è centro X duc radium XF (43):

II. In puncto F erige perpendicularem FG (98): dico rectam FG esse tangentem quæsitam (124).

§. II.

De mensura angulorum, quorum vertex non est in Circuli Centro.

Definitio I.

132. Angulus *Ad Centrum* est ille, cujus vertex est in Centro Circuli.

133. Scholion: quæ sit ejus mensura, patet ex Nro 72.

Definitio II.

134. Angulus *Ad peripheriam* est ille, cujus vertex est in peripheria. Si formetur per duas chordas, ut

angulus A in *figuris* 9, 10 & 11; appellatur *Inſcriptus*: ſi verò per ſecantem exteriorem & chordam, ut angulus A *fig.* 12: vel per chordam & tangentem, ùt angulus A *fig.* 13, *Angulus Segmenti* audit.

DEFINITIO III.

135. Angulus *Excentricus* ille eſt, cujus vertex eſt intra circuli peripheriam, non tamen in centro.

DEFINITIO IV.

136. Angulus *Extra peripheriam* eſt ille, cujus vertex extra peripheriam exiſtit; ùt angulus A in *figuris* 19, 20 & 21. Tunc, ſi formetur per duas tangentes ùt *fig.* 19, *Circumſcriptus* audit; *Semi-circumſcriptus* vero, ùt *fig.* 20, ſi per tangentem AB, & ſecantem AE tranſeuntem per Centrum, efficiatur.

DEFINITIO V.

137. In *fig.* 19 arcus BGC; in *fig.* 20 arcus BGE; & in *fig.* 21 arcus FGE *Concavus anguli* A vocatur; & in qualibet ex hiſce tribus *figuris*, arcus BC *Convexus anguli* A compellatur.

THEOREMA I.

Angulus inſcriptus menſuratur medietate arcûs comprehenſi inter chordas, quibus formatur.

138. Dico angulum A (*fig.* 9, 10 & 11) menſurari $\frac{1}{2}$ arcûs BFC.

DEMONST. 1°. Vel una chordarum, putà AB (*fig.* 9) per centrum O tranſit; per O duc diametrum FL parallelam ad AC; erit arcus AL = arcui FC (127), item eſt = arcui FB (31); O = A (108); atqui O menſuratur toto arcu FB (72), ſeu $\frac{1}{2}$ arcûs CFB; ergo A menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs CFB. Quod eſt primum.

2°. Vel centrum O (*fig.* 10) inter chordas AC & AB consistit; duc diametrum AF; angulus FAC mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs CF, & angulus FAB mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs FB; igitur A, qui duobus istis angulis componitur, mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs CFB. Quod est secundum.

3°. Vel centrum O (*fig.* 11) extra utramque chordam existit; ducito AE diametrum; totus angulus CAE mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs CBE; atqui una ejusdem pars, scilicet angulus BAE mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BE; ergo altera, seu angulus CAB, mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BFC; quod est ultimum.

COROLLARIUM.

139. Ergo angulus A segmenti (*fig.* 12), per chordam & secantem exteriorem formatus, mensuratur $\frac{1}{2}$ arcuum residuorum, qui non intercipiuntur à chordis, quibus vicinus ejus, seu angulus I, efficitur: nam $A + I = 180°$ (80); ergo simul sumpti mensurantur $\frac{1}{2}$ totius peripheriæ; sed I mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GC (138); ergo A mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs CA $+ \frac{1}{2}$ arcûs AG.

THEOREMA II.

Angulus A *segmenti* (fig. 13, 14, 15), *per chordam & tangentem formatus, mensuratur* $\frac{1}{2}$ *arcûs* AOC, *sustentati ab illa chorda, tangentem versùs.*

140. DEMONST. 1°. Vel arcus AOC (*fig.* 13) = arcui AHC (seu AC diameter), est A proinde rectus, seu 90° (122): atqui $\frac{1}{2}$ arcûs AOC etiam est 90°; ergo A mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AOC. Quod est primum.

2°. Vel arcus AOC (*fig.* 14) minor est arcu AHC; à puncto C ducatur CG parallela ad AB; est arcus AHG = AOC (127); A = C (109); atqui C mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AHG (138), seu $\frac{1}{2}$ arcûs AOC; ergo A mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AOC; quod est secundum.

3°. Vel arcus AOC (*fig.* 15) major eſt arcu AHC; ductâ CG parallelâ ad AB, eſt arcus AHC = arcui AOG (127), angulus LCA = A (109); jam verò angulus LCA menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs ACG (139), ſeu $\frac{1}{2}$ arcûs AGC; ergo A menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AGC. Quod eſt ultimum.

THEOREMA III.

Angulus excentricus O (fig. 16, 17 & 18) *menſuratur* $\frac{1}{2}$ *arcûs* AF, *cui inſiſtit, & inſuper* $\frac{1}{2}$ *arcûs* BC, *cui inſiſtit angulus* X *ei ad verticem oppoſitus.*

141. DEMONST. 1°. Vel arcus AC (*fig.* 16) eſt = arcui AF; ad punctum A ducta tangens AL (131) erit parallela ad CF (129); igitur A = O (109); A verò menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs ACB (140), ſeu $\frac{1}{2}$ AF + $\frac{1}{2}$ CB; ergo & O. Quod eſt primum.

2°. Vel arcus AHC (*fig.* 17) eſt major arcu AF; duc AH parallelam ad CF; arcus HC eſt = arcui AF (127), A = O (109); A autem menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs HCB (138), ſeu $\frac{1}{2}$ arcûs AF + $\frac{1}{2}$ BC; ergo & O. Quod eſt ſecundum.

3°. Vel arcus ASF (*fig.* 18) major eſt arcu AC; ducito AS parallelam ad CF; eſt arcus AC = arcui FS (127); O = angulo ſegmenti LAB (109); porro hic angulus menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AS + $\frac{1}{2}$ arcûs ACB (139); ergo, cùm arcus AC ſit = arcui SF; A, ſeu O menſuratur $\frac{1}{2}$ arcus AS + $\frac{1}{2}$ SF + $\frac{1}{2}$ CB; quod eſt tertium.

COROLLARIUM.

142. Quoniam arcus oppoſiti inter diametros ſunt æquales (31), atque adeo angulus in centro etiam menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs, cui inſiſtit, & inſuper $\frac{1}{2}$ arcûs, cui inſiſtit angulus ei ad verticem oppoſitus; generatim ob-

tinet, angulum intra peripheriam menſurari $\frac{1}{2}$ arcûs, cui inſiſtit, & inſuper $\frac{1}{2}$ arcûs, cui inſiſtit angulus ei ad verticem oppoſitus.

THEOREMA IV.

Angulus A *extra peripheriam* (fig. 19, 20, 21) *menſuratur $\frac{1}{2}$ exceſsûs arcûs concavi ſupra convexum.*

143. DEMONST. 1°. Vel A eſt circumſcriptus (*fig.* 19): ductâ CG parallelâ ad AB, arcus BC eſt = BG (127); proinde arcus BGC, qui eſt concavus anguli A, ſuperat arcum BC, qui eſt convexus anguli A, ad arcum GC; ergo, cùm A ſit = I (108), I verò menſuretur $\frac{1}{2}$ arcûs GC (140), A etiam menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GC, qui eſt exceſſus concavi ſupra convexum. Quod eſt primum.

2°. Vel A per tangentem atque ſecantem conſtituitur (*fig.* 20); duc CG parallelam ad AB; eſt arcus BC = BG (127); ergo arcus BGE, qui eſt concavus A, ſuperat arcum BC, convexum anguli A, ad arcum GE; quoniam igitur A = I (108), & I menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GE (140); A etiam menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GE, ſeu $\frac{1}{2}$ exceſsûs concavi ſupra convexum. Quod eſt ſecundum.

3°. Vel A formatur binâ ſecante (*fig.* 21); ducito CG parallelam ad AF; eſt arcus BC = FG (127); A = I (108); atqui I menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GE (140); ergo A quòque menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs GE, qui eſt exceſſus concavi FGE ſupra convexum BC. Quod eſt ultimum.

COROLLARIUM I.

144. Angulus extra peripheriam cum $\frac{1}{2}$ ſui convexi facit $\frac{1}{2}$ ſui concavi;

COROLLARIUM II.

145. Et cum toto ſuo convexo facit $\frac{1}{2}$ aggregati ex concavo & convexo ſimul.

COROLLARIUM III.

146. Circumſcriptus cum ſuo convexo facit 180°.

COROLLARIUM IV.

147. Semicircumſcriptus facit cum ſuo convexo 90°; & è converſo; ſi quis angulus extra peripheriam, per tangentem atque ſecantem formatus, faciat cum convexo ſuo 90°, ille eſt ſemicircumſcriptus, atque adeo ejus ſecans per centrum tranſit (136).

PROBLEMA.

A puncto A (fig. 22), *extra circulum dato, tangentem ducere.*

148. Resolutio I. Ad X centrum duc rectam AX:

II. Ex ejuſdem puncto medio O deſcribe peripheriam XCAG:

III. Ducta AC erit tangens quæſita.

Demonst. Ductâ XC, angulus XCA menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AGX (138); quoniam AX diameter eſt illius circuli (23), arcus AGX eſt 180° (30), erit angulus XCA 90°; eſt ergo XC perpendicularis ad CA; ergo CA eſt tangens in puncto C (124). *Q. e. d.*

CAPUT

CAPUT III.

DE RECTARUM PROPRIETATIBUS, DUM SPATIUM CLAUDUNT.

DEFINITIO I.

149. *Figura Rectilinea* est ſpatium lineis rectis, ſeu *lateribus*, quæ in extremis punctis concurrunt, terminatum.

COROLLARIUM.

150. Quoniam quælibet duo vicina figuræ latera angulum conſtituant oportet; tot ſunt anguli, quot latera figuræ: nequeunt igitur pauciores anguli eſſe figuræ rectilineæ, quàm tres; quia tribus ad minùs lateribus opus eſt, ut ſpatium concludatur.

151. SCHOLION. Figura rectilinea etiam *Polygonum* audit, quia pluribus angulis rectilineis conſtat. Omnia latera figuræ ſimul ſumpta *Perimetrum* figuræ componunt.

DEFINITIO II.

152. Si tribus lateribus rectis figura terminetur, *Triangulum* audit; ſi quatuor, *Quadrilaterum*, ſive *Tetragonum*; ſi quinque, *Pentagonum*; ſi 6, 7, 8, 9, 10 &c. lateribus conſtet, *Hexagonum*, *Heptagonum*, *Octogonum*, *Nonagonum*, *Decagonum* &c., compellatur.

DEFINITIO III.

153. *Circulus* dicitur *Circumſcriptus Figuræ*, aut *Figura Circulo Inſcripta*, dum peripheria per verticem cujuſlibet ejus anguli tranſit.

DEFINITIO IV.

154. *Figura rectilinea* eſt *Circulo Circumſcripta*, vel *Circulus Figuræ rectilineæ Inſcriptus*, dum ſingulum figuræ latus eſt circuli tangens.

DEFINITIO V.

155. *Angulus Externus* figuræ rectilineæ eſt ille, qui vicinus eſt alicujus anguli *Interni*, formati per duo vicina figuræ latera. Ac proinde *Angulus Externus* formatur per unum figuræ latus, & vicinum latus productum.

156. SCHOLION. Hâc notâ △ *triangulum* : △△ *triangula* : □ *quadrilaterum* : □□ *quadrilatera* denotantur.

ARTICULUS I.

De Triangulis.

§. I.

De variis Triangulorum ſpeciebus, atque proprietatibus.

DEFINITIO I.

157. Ratione laterum, triangulum eſt *Æqui-laterum*, ſi habeat tria latera æqualia; ſi duo fuerint æqualia, *Iſoſceles*; & ſi nulla æqualia ſint, *Scalenum* audit.

DEFINITIO II.

158. In △ iſoſceli angulus, qui per æqualia latera formatur, *Angulus ad Verticem*, & latus ei oppoſitum, *Baſis* vocatur; duo anguli, ad hoc latus conſtituti, *Anguli ad Baſin* appellantur.

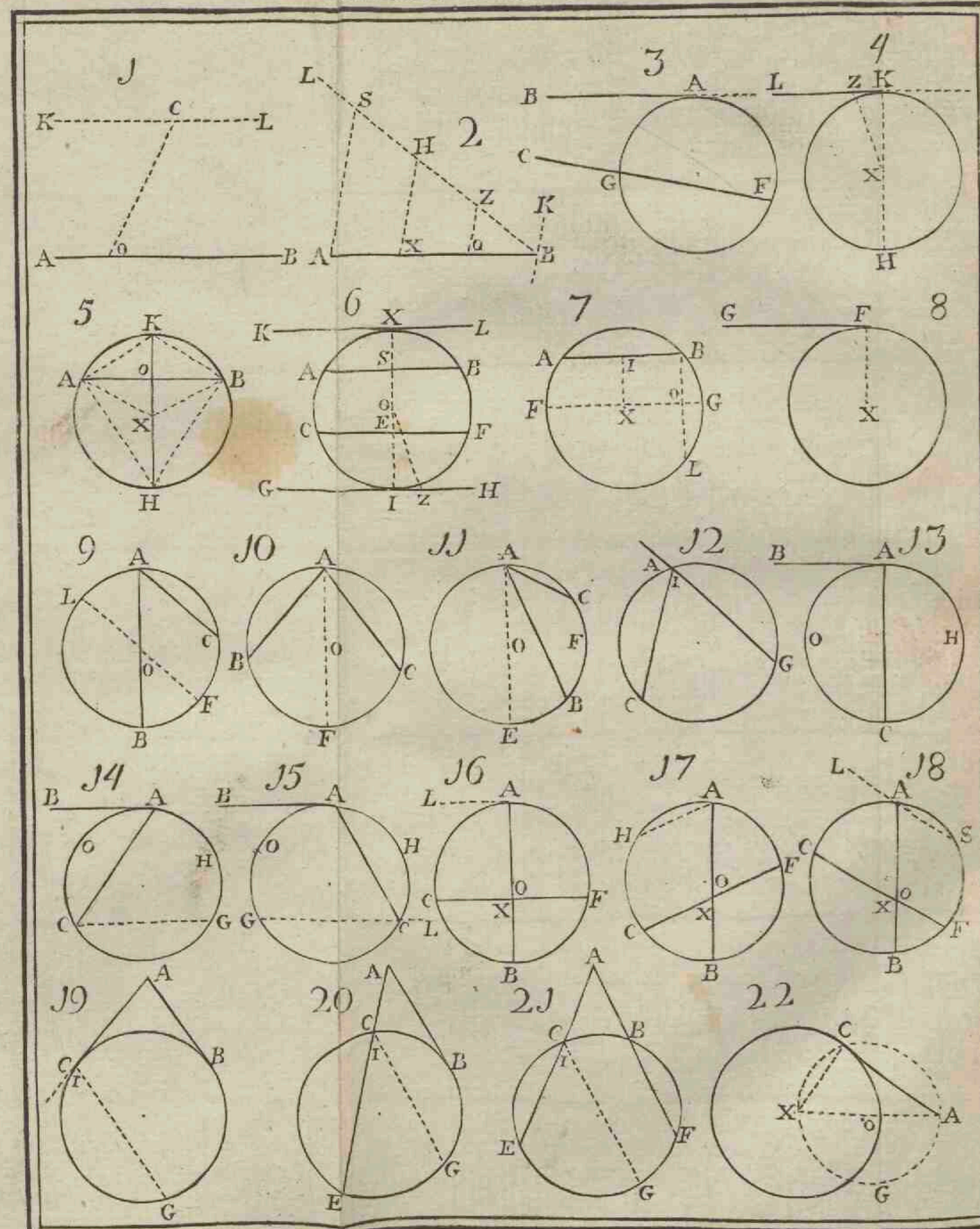
DEFINITIO III.

159. Ratione angulorum, triangulum dicitur *Æquiangulum*, ſi habeat tres angulos æquales; *Rectangulum*, vel *Orthogonum*, ſi unus trium angulorum rectus ſit; *Obtuſangulum*, ſi alterutrum angulum habeat *Obtuſum*; *Acutangulum*, ſi omnes tres acuti exiſtant.

DEFINITIO IV.

160. In △ rectangulo, latus oppoſitum angulo recto dicitur *Hypotenuſa*; reliqua duo latera *Catheti* audiunt.

GEOM: tab: 3



C.H.Becker f. lov.

DEFINITIO V.

161. *Altitudo* trianguli est perpendicularis, ducta ab uno ejus angulo ad latus oppositum (quod etiam *Basis* vocari potest); sive intrà basin cadat, sive in eandem productam.

THEOREMA I.

162 In quovis △ quælibet duo latera, simul sumpta, sunt tertio majora (9).

THEOREMA II.

Circulus cuilibet △ circumscribi potest, seu omne △ est circulo inscriptibile.

163. DEMONSTR. Trium angulorum, cujuslibet trianguli vertices, tria sunt puncta, quæ in eadem recta non constituuntur; atqui eis circumscribi potest circulus (44); ergo cuilibet △ potest circumscribi circulus. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tres anguli interni cujuslibet △ simul faciunt 180°.

164. Dico angulos A, B, C (TAB. IV. *fig.* 1) simul facere 180°.

DEMONST. Concipe triangulo ABC circumscriptum circulum; A mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BC; B $\frac{1}{2}$ arcûs AC; C $\frac{1}{2}$ arcûs AB (138); ergo anguli $A+B+C$ mensurantur $\frac{1}{2}$ totius peripheriæ; atqui medietas illa $=180°$; ergo & anguli $A+B+C$ simul faciunt 180°. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

165. Tres igitur anguli simul sumpti unius trianguli, æquivalent tribus angulis simul sumptis cujuscumque trianguli.

COROLLARIUM II.

166. In quolibet $\triangle$ unicus dari poteſt angulus rectus, aut obtuſus.

COROLLARIUM III.

167. Angulus externus $\triangle$, v. g. F (*fig.* 2) æquivalet duobus angulis $A+C$ internis, ſibi oppoſitis: nam $F+B=180°$ (80); & $B+A+C=180°$ (164); ergo $F=A+C$.

COROLLARIUM IV.

168. Duo externi, v. g. $F+K$, ſuperant A, internum utrique oppoſitum, ad $180°$: nam $F=A+C$; & $K=A+B$ (167); ergo $F+K$ ſuperat A ad $A+B+C$, qui $=180°$; ergo &c.

COROLLARIUM V.

169. Tres externi, v. g. $F+O+K$, $=360°$: etenim $B+F$; $A+O$; $C+K$ faciunt ſimul ter $180°$; atqui $A+B+C=180°$; ergo reſidui, ſeu tres externi $=$ bis $180°$, ſeu $360°$.

THEOREMA IV.

In quovis triangulo latus majus opponitur angulo majori: & è converſo; angulus major opponitur lateri majori.

170. Dico 1°, ſi A (*fig.* 1) ſit major B, eſſe latus BC majus latere AC.

DEMONST. Sit $\triangle$ ABC inſcriptum circulo; cùm A menſuretur $\frac{1}{2}$ arcûs BC, & B $\frac{1}{2}$ arcûs AC (138); erit $\frac{1}{2}$ arcûs BC major, quàm $\frac{1}{2}$ arcûs AC; ergo arcus BC eſt major arcu AC; conſequenter chorda BC major eſt chordâ AC (36); quod erat primum.

Dico 2°, si latus BC sit majus latere AC, esse angulum A majorem B.

Demonst. Est arcus BC major arcu AC (36); ergo $\frac{1}{2}$ arcûs BC major est quàm $\frac{1}{2}$ arcûs AC; porro A mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BC; & B $\frac{1}{2}$ arcûs AC; ergo A est major B. Quod erat secundum.

THEOREMA V.

In △ Isosceli, anguli ad basin sunt æquales; & è converso: si in △ duo anguli æquales sint, △ istud Isoscele est.

171. Dico 1°, si △ ABC (*fig.* 1) sit isoscele, sic ut A sit ad verticem, esse B = C.

Demonst. Est latus AB = AC (158); pone itaque △ ABC inscriptum circulo; erit arcus AB = arcui AC (35); porro B mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AC; & C mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AB (138); ergo B = C; quod erat primum.

Dico 2°, si B = C, esse △ ABC isoscele, sic ut A sit ad verticem, & latus AB = AC.

Demonst. Sit rursus △ ABC inscriptum circulo; erit arcus AC = arcui AB, quia B mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AC, & C $\frac{1}{2}$ arcûs AB (138); ergo chorda AC = chordæ AB (35); igitur △ ABC est isoscele (157); quod erat alterum.

Corollarium I.

172. △ æquilaterum est æquiangulum; & è converso: est enim úndequaque isoscele, dum habet quælibet duo latera æqualia; proinde duo quilibet anguli possunt spectari ad basin; igitur quivis duo anguli æquales sunt (171); ergo quilibet est 60° (164). Et si quilibet duo anguli æquales (seu 60°) fuerint, etiam duo quælibet latera æqualia sint oportet (171).

COROLLARIUM II.

173. In △. isosceli quisque angulorum ad basin est acutus (166).

THEOREMA VI.

Si B, *item* C (fig. 3) *sit acutus, perpendicularis, ex* A *ad* BC *ducta, cadit inter* BC; *si autem unus, v. g.* B (fig. 4), *fuerit obtusus, cadet extra* △, *in latus* CB *productum ultrà* B, *v. g. in* X.

174. DEMONST. 1ª pars. Quoniam B item C minor est 90°, B cum certa parte A = 90°; & C cum altera parte A etiam = 90°: pone itaque in duas tales partes A dividi per rectam AZ, ut angulus CAZ faciat cum angulo C 90°; quoniam Z = C + angulo CAZ (167), erit Z rectus; ergo AZ est perpendicularis ad BC (76); atqui ab A ad BC unica duci potest perpendicularis (92); ergo illa cadit intra basin BC. Quod erat primum.

DEMONST. 2ᵈᵃ pars. Non poterit perpendicularis versùs C cadere in lineam BC: nam vicinus O rectus foret; quoniam ergo B obtusus est, ex supposito, B & angulus AOB facerent plus quàm 180°; quod implicat, cùm in △ ABO tres anguli solùm = 180° (164). Neque cadere potest in B: B enim rectus foret; cadit ergo in CB productam, v. g. in X. Quod erat alterum.

THEOREMA VII.

In △ *Isosceli* ABC (fig. 5), A *sit ad verticem; si habeatur unum ex sequentibus*: 1° *vel* O *rectus*; 2° *vel* BO = OC; 3° *vel* I = X; *duo reliqua sequuntur.*

175. DEMONST. primum. O = C + X; & Z = B + I (167); porro O = Z, cùm sint ambo recti; ergo

$C+X=B+I$; jam verò, ex ſuppoſito, $B=C$ (171); ergo $I=X$; quoniam verò $AB=AC$ (158), & O rectus, eſt $BO=OC$ (89). Quod erat primum.

DEMONST. 2^{dum}. Eſt O item Z rectus (90); cùm ergo $B=C$ (171), eſt $I=X$. Quod erat ſecundum.

DEMONST. 3^{tium}. Quoniam $B=C$ (171), & ex ſuppoſito $I=X$, eſt $B+I=C+X$; porro $Z=B+I$, & $O=C+X$ (167); ergo $O=Z$; atqui $O+Z=180°$ (80); ergo O item Z eſt 90° ſeu rectus; igitur rurſus $BO=OC$. Quod erat ultimum.

THEOREMA VIII.

Si in △ ABC (fig. 5) habeantur duo ex ſequentibus : 1° O rectus : 2° $I=X$: 3° $BO=OC$; △ ABC eſt Iſoſcele, ſic ut A ſit ad verticem; & reliqua duo ſequuntur.

176. Dico 1°, ſi O rectus, & $I=X$, eſſe $AC=CB$, $B=C$, $OB=OC$ &c.

DEMONST. $Z=O$; ſed $Z=B+I$, & $O=C+X$ (167); ergo $B+I=C+X$; cùm igitur $I=X$, eſt $B=C$; ergo △ ABC eſt iſoſcele (157), A ad verticem (158); igitur $BO=OC$ (89); quod eſt primum & ſecundum.

Dico 2°, ſi O rectus, & $BO=OC$, eſſe $I=X$; $AB=AC$ &c.

DEMONST. Eſt $AB=AC$ (88); ergo △ ABC iſoſcele (157); igitur $B=C$ (171); quoniam ergo $O=Z$, eſt $I=X$. Quod eſt ſecundum & tertium.

Dico 3°, ſi $I=X$, & $BO=OC$, eſſe △ ABC iſoſcele &c.

DEMONST. △ ABC ſit circulo inſcriptum; producacatur AO uſque ad H peripheriæ punctum; I menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BH, & X $\frac{1}{2}$ arcûs CH (138); ergo, cum I = X, eſt arcus BH = HC; igitur chorda HA dividit chordam BC, item arcum BHC biſariam; proinde O eſt rectus (126). Quod eſt ſecundum & tertium.

THEOREMA IX.

In △ ſi linea, ducta ex vertice alicujus anguli, ſit æqualis cuilibet parti lateris oppoſiti; angulus ille rectus eſt. Et ſi in △ rectangulo, ex angulo recto linea ducatur ad hypotenuſam, ita ut vel iſta linea ſit æqualis alterutri parti hypotenuſæ, vel partes hypotenuſæ ſint æquales inter ſe; linea iſta eſt æqualis ſingulæ parti hypotenuſæ.

177. Dico 1°, ſi (*fig.* 6) BX ſit = AX, item = CX, B eſſe rectum.

DEMONST. Quoniam BX = CX, C = angulo XBC; & quia AX = XB, A = angulo XBA (171); ergo B = A + C; porro B + A + C = 180° (164); ergo B = 90°, ſeu rectus eſt (76). Quod erat primum.

Dico 2°, ſi B rectus ſit, & vel BX = AX, aut = CX; eſſe BX = AX, item = CX.

DEMONST. Pone BX = AX, erit △ AXB iſoſcele (157), A = angulo XBA (171); ergo angulus XBC = C (cùm B = A + C); igitur △ CXB iſoſcele, & CX = XB (171); quod erat ſecundum.

Dico 3°, ſi B rectus, & AX = CX, eſſe BX æqualem AX item CX.

DEMONST. △ ABC ſit circulo inſcriptum (*fig.* 7); quoniam B, ex ſuppoſito rectus, menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs ALC (138), erit arcus ALC 180°; ergo AC erit diameter (30); igitur X, punctum ejus medium, eſt circuli centrum; proinde BX, CX & AX ſunt æquales inter ſe (25). Quod erat ultimum.

THEO-

THEOREMA X.

Si in △, angulorum unus rectus fuerit, unus 60°, ac proinde alter 30°; latus oppositum angulo recto, est $\frac{2}{1}$ + latere opposito angulo 30°.

178. Dico, si B (*fig.* 6) sit rectus, C 60°, & A 30°, esse AC $\frac{2}{1}$ + BC.

DEMONST. Ex B ducito BX ad X, punctum medium lateris AC; erit BX = CX, item = XA (177); igitur △ CXB est isoscele (157); ergo C = angulo CBX (171); quoniam ergo C est 60°, erit quoque angulus CXB 60°, sive æqualis angulo CBX; ergo △ CXB est æquiangulum, adeoque & æquilaterum (172); est ergo BC = CX; igitur est AC $\frac{2}{1}$ + BC. *Q. e. d.*

THEOREMA XI.

In △, si sit unum latus $\frac{2}{1}$ + altero, atque insuper habeatur unum ex sequentibus:

1°. *Vel angulus, oppositus lateri duplo majori, rectus;*

2°. *Vel angulus, formatus per illa latera, 60°;*

3°. *Vel angulus, oppositus lateri duplo minori, 30°; reliqua sequuntur.*

179. Dico 1°, si (*fig.* 6) sit AC $\frac{2}{1}$ + BC, & B rectus, esse C 60°, & A 30°.

DEMONST. AX sit = XC; ducta BX est = AX, item = XC (177); ergo △ CXB est æquilaterum, ac proinde æquiangulum (172); ergo C est 60°; igitur A 30°. Quod est primum.

Dico 2°, si AC $\frac{2}{1}$ + BC, & C 60°, esse B rectum, & A 30°.

DEMONST. Sit AX = XC; erit CX = CB; ergo △ CXB isoſcele (157); angulus CXB = angulo CBX (171); quoniam verò C = 60°, duo illi anguli ſimul faciunt 120°; quiſque igitur eorum = 60°; igitur △ CXB eſt æquiangulum, ac proinde æquilaterum (172); ergo BX = CX, & proinde etiam = AX; ergo B eſt rectus (177); igitur A 30°. Quod eſt ſecundum.

Dico 3°, ſi AC $\frac{2}{1}$ + BC, & A 30°, eſſe B rectum & C 60°.

DEMONST. Imagineris à puncto C ad rectam AB duci perpendicularem; hæc ſit oportet $\frac{2}{1}$ — rectâ AC (178); igitur eſſet = CB; ergo CB eſt perpendicularis ad AB (95); proinde B rectus; C 30°. Quod eſt ultimum.

PROBLEMA I.

Super recta AB (fig. 8) *conſtruere* △ *æquilaterum.*

180. RESOLUTIO I. Circino ſume intervallum rectæ AB, atque eo mediante, ex A & B, fiant interſectiones in C:

II. Duc AC & BC, & △ ABC dat quæſitum.

181. SCHOLION. Quoniam A item B eſt 60° (172), per præcedens problema modum habes conſtruendi angulum 60°; quem ſi bifariam ſeces (87), angulum 30° obtines; atque hunc deinde in duas partes æquales dividendo, angulum 15° habebis &c.

PROBLEMA II.

Ex tribus rectis AB, CF, & GH (fig. 9) *triangulum conſtruere.*

182. RESOLUTIO I. Aſſumatur una, v. g. AB, pro baſi, aut ipſi ducatur æqualis;

II. Ex A, intervallo CF, ducatur arcus indefinitus :

III. Ex B, intervallo GH, ducatur alter arcus, qui priorem intersecet, v. g. in E :

IV. Ductis AE & BE, triangulum erit constructum.

183. SCHOLION. Si quælibet duæ ex rectis datis, tertiâ non fuerint majores, problema nequit resolvi (162).

PROBLEMA III.

Triangulo ABC (fig. 10) *dato, circulum inscribere.*

184. RESOLUTIO I. Divide B, item C bifariam (87) per rectas CX, & BX :

II. Ab X, puncto concursûs rectarum CX & BX, ad latus BC duc perpendicularem XO :

III. Ex X, ùt centro, ad intervallum XO, circulum desideratum describes.

DEMONST. Ab O ad CX demitte perpendicularem OZ, hancque produc usque in G ; quoniam angulus OCZ = GCZ, & Z rectus, △ CGO est isoscele, & OZ = ZG (176); pariter duc OI perpendicularem ad BX, eamque produc usque in H; quoniam angulus OBI = HBI, & I rectus, △ OBH est isoscele, & OI = IH (176); itaque rectæ CX & BX intersecant perpendiculariter & bifariam chordas OG & OH circuli, cui puncta H, O & G forent inscripta; quælibet ergo per centrum istius circuli transeat oportet (126)); igitur punctum X intersectionis est centrum istius circuli (29); ergo puncta H, O & G distant æqualiter ab X; sunt igitur XG, XO, & XH inter se æquales; proinde peripheria ex X, intervallo XO, descripta, transit per puncta H, O, G; præterea △ GXO est isoscele (157), ergo angulus XGO = XOG (171); sed quoniam △ COG isoscele est, angulus CGO = COG

(171); igitur angulus CGX = XOC; jam verò angulus XOC, ex constructione, rectus est; ergo etiam CGX est rectus; proinde CG est tangens (124). Simili modo demonstrabitur angulum XHB = XOB, seu rectum, & consequenter BH esse etiam tangentem. Igitur triangulo ABC circulus GHO est inscriptus (154). *Q. e. d.*

§. II.

De Comparatione Triangulorum.

DEFINITIO I.

185. *Congruere* dicuntur figuræ, dum, unâ alteri superpositâ, latera lateribus, & anguli angulis coincidunt; sive dum sese mutuò perfectè tegunt.

DEFINITIO II.

186. *Triangula Æquilatera* sunt, quorum tria latera unius sunt respectivè æqualia tribus lateribus alterius.

DEFINITIO III.

187. *Triangula Æquiangula* sunt, quorum tres anguli unius respectivè sunt æquales tribus angulis alterius.

DEFINITIO IV.

188. *Latera Homolloga* in △△ æquiangulis ea dicuntur, quæ respectivè angulis æqualibus opponuntur.

THEOREMA I.

△△ æquilatera congruunt.

189. Si (*fig.* 11) AC = *ac*; AB = *ab*; BC = *bc*, dico △ ABC esse congruum △ *abc*, atque A = *a*, B = *b*, C = *c*.

DEMONST. Superponatur latus *ab* in AB, ita ut *a* in A, adeoque (attentâ duorum illorum laterum æqualitate) *b* in B coincidat; tum ex A, intervallo AC, seu *ac*, describe arcum LCO; & ex B, intervallo BC, seu *bc*, arcum HCS, sese proinde intersecantes in C; quoniam *ac* = AC, terminabitur illa in arcu LCO; pariter, quoniam *bc* = BC, illa terminabitur in aliquo puncto arcûs HCS; porro rectæ *ab* & *bc* terminantur in extremitate sua *c*, ubi concurrunt; ergo punctum illud arcûs LCO, ubi terminatur recta *ab*, idem sit oportet cum puncto arcûs HCS, ubi terminatur recta *bc*; sive debet esse punctum C, in quod proinde cadit punctum *c*; igitur latera unius △ incidunt respectivè in latera alterius, & consequenter etiam respectivi illorum △△ anguli coincidunt; ergo △△ congruunt (185). *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Duo △△ æquiangula, & habentia unum latus homollogum æquale, sunt congrua.

190. Dico, si (*fig.* 11) A = *a*; B = *b*; & proinde C = *c*; atque præterea sit v. g. AB = *ab*; duo illa △△ esse congrua; & proinde AC = *ac*, BC = *bc*.

DEMONST. Pone *ab* in AB, ita ut *a* in A, & *b* in B cadat; quoniam *a* = A, *ac* cadet in AC; & cùm *b* = B, *bc* non potest non incidere in BC (75); ergo *ac* & *bc* concurrent in idem punctum, in quod AC & BC sibi occurrunt; seu *c* cadet in C; ergo △ ABC congruit △ *abc* (185). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Si in duobus △△ duo latera unius sint respectivè æqualia duobus lateribus alterius; & anguli, his lateribus comprehensi, æquales sint, △△ congrua sunt.

191. Dico, si (*fig.* 11) AC = *ac*; BC = *bc*, & C = *c*; △ ABC congruere cum △ *abc*.

DEMONST. Pone AC in *ac*, ut C in *c*, & A in *a* consistat; quoniam C=*c*, cadet latus CB in *cb*, & cùm sint =, coincident; ergo B cadet in *b*, & consequenter latus AB coincidet cum latere *ab*; igitur A in *a*, & B in *b* coincident; igitur △△ congrua sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Dum duo △△ habent duo latera respectivè æqualia, & utrimque unum angulum, lateribus æqualibus oppositum, æqualem; ista △△ congruunt, vel anguli oppositi restantibus lateribus æqualibus, faciunt simul 180°.

192. Dico, si (*fig.* 11) AC = *ac*; BC = *bc*, & A = *a*, △△ congruere; vel B + *b* = 180°.

DEMONST. Si AB = *ab*, △△ congruunt (189); si inæqualia sint dicta latera; pone AC in *ac*, sic ut coincidant; quoniam A = *a*, cadet AB in *ab*; tunc, si sit AB majus quàm *ab* (ùt in *fig.* 12), aut AB minus, quàm *ab* (ùt in *fig.* 13), constanter △ *b*CB erit isoscele, cùm *bc* sit = BC; ergo in *fig.* 12, erit B = vicino *b*; & in *fig.* 13, erit *b* = vicino B; igitur B + *b* = 180°. *Q. e. d.*

THEOREMA V.

Inter duo △△, quæ habent duo latera respectivè æqualia, illud quod habet majorem angulum, per illa latera constitutum, etiam majorem habet basin: & illud, quod habet majorem basin, habet quòque majorem angulum, basi isti oppositum.

193. Dico 1°, si (*fig.* 14) sit AB=KE; AC=KF; & præterea sit A major quàm K, latus BC esse majus latere EF.

DEMONST. Fiat angulus EKG æqualis A; sit AC = KG; ducatur EG; △△ ABC & KEG congruent (191); ergo BC = EG; KG = KF, ex hypothesi; igitur △ KGF isoscele (157); ergo G = angulo KFG (171); porro angulus EGF est minor G; & angulus EFG est major angulo KFG; igitur in △ EFG angulus EFG major est angulo EGF; ergo latus EG est majus EF (170); sed erat BC = EG; ergo latus BC est quòque majus latere EF. Quod erat primum.

Dico 2°, si AB = KE; AC = KF, & præterea sit BC majus EF, esse A majorem K.

DEMONST. Si A non foret major quàm K; tunc vel esset = K, atque △ ABC congrueret cum △ KEF (191); igitur esset BC = EF; quod est contra hypothesin: vel A foret minor K; itaque, juxta primam partem hujus theorematis, EF deberet esse majus quàm BC; quod rursus est contra hypothesin; igitur A est major quàm K; Quod erat alterum.

ARTICULUS II.

De cæteris Polygonis.

DEFINITIO I.

194. Polygona dicuntur *Symmetrica*, dum terminantur quibusvis lateribus oppositis æqualibus atque parallelis.

COROLLARIUM.

195. Numero ergo pari laterum, atque angulorum constant.

DEFINITIO II.

196. Polygona *Regularia* sunt, dum & omnia latera sunt æqualia, & omnes anguli æquales. Cætera polygona *Irregularia* compellantur.

DEFINITIO III.

197. Punctum æqualiter ab omnibus angulis polygoni regularis distans, *Centrum* polygoni audit. Recta quælibet ab alterutro angulo ad centrum ducta *Radius Obliquus*; & à centro ad unum latus perpendicularis, *Radius Rectus* vocatur.

DEFINITIO IV.

198. Quadrilaterum specialia sortitur nomina :

1°, vel nulla latera habet parallela, & *Trappezis* appellatur.

2°, vel duo latera tantùm parallela sunt, & *Trappezoïs* vocatur ; & utroque hoc casu est polygonum irregulare.

3°, vel singula opposita latera sunt parallela, atque *Parallelogrammum* audit. Hujus quatuor dantur species : vel enim singula latera sunt æqualia, & singuli anguli

anguli æquales (adeoque recti), & *Quadratum* appellatur; hocque casu est polygonum regulare (196): vel omnia latera quidem æqualia sunt, sed soli anguli oppositi æquales, & *Rhombus* audit. Vel sola opposita latera sunt æqualia; si tunc quatuor anguli sint recti, *Rectangulum*; si soli anguli oppositi æquales fuerint, *Rhomboïdes* vocatur; atque tribus ultimis casibus, *Symmetricum* est.

DEFINITIO V.

199. Recta in polygono quocumque, ab uno angulo ad alium ducta, *Diagonalis* vocatur.

200. SCHOLION. *Angulum Procurrentem* vocant, cujus crura extrorsum concurrunt, atque duobus rectis minor est; ut anguli A, B, F & C (*fig.* 15). *Angulum Regredientem* appellant, qui gibbosus est, & per latera introrsum concurrentia formatur; atque duobus rectis major est; talis est angulus E, facitque cum angulo C 360°. Sed de figuris, quibus anguli regredientes interveniunt, specialiter non agimus; cùm ex principiis datis, dum occurrunt, facili negotio eruantur.

§. I.

De Polygonis in Genere.

THEOREMA

Omnes anguli interni Polygoni simul faciunt toties 180°, quot sunt Polygoni latera, duobus exceptis.

201. DEMONST. Ad punctum aliquod intra polygonum, ad arbitrium, sumendum, è quolibet angulo rectas ducito, atque in tot △△ figuram resolveris, quot sunt polygoni latera; omnesque anguli, omnium illorum △△, faciunt simul toties 180°, quot sunt figuræ latera; jam verò anguli illi omnes, qui constituuntur ad idem illud punctum intra polygonum, faciunt simul bis 180° (84); reliqui ergo omnes, qui præcisè comprehenduntur per angulos polygoni, faciunt

ſimul bis 180° minus, quàm ſunt polygoni latera. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

202. Igitur in Quadrilatero anguli omnes interni faciunt ſimul bis 180°; in Pentagono ter 180°; in Hexagono quater 180° &c.

COROLLARIUM II.

203. Omnes anguli externi cujuſlibet Polygoni faciunt ſimul 360° : quilibet enim externus cum vicino ſuo, qui internus eſt, = 180° (80); tot autem vicinorum ſunt paria, quot figuræ latera; ergo omnes externi cum internis faciunt toties 180°, quot ſunt figuræ latera; atqui interni faciunt ſimul bis 180° minùs (201); ergo externi faciunt bis 180°.

§. II.

De Polygonis Symmetricis.

THEOREMA I.

In Polygono Symmetrico, quivis duo anguli directè oppoſiti ſunt æquales.

204. Si quadrilaterum ABCF (*fig.* 16), & hexagonum ABMCFG (*fig.* 17) ſymmetrica fuerint (194), dico eſſe A = C; B = F &c.

DEMONST. 1ª pars. Ductis diagonalibus AC & BF (*fig.* 16); quoniam AB parallela ad FC, eſt L = E, H = K; & quoniam AF parallela ad BC, eſt I = R, S = Z (109); igitur L + I, ſeu A, eſt = E + R, ſeu C; & H + Z, ſeu B, eſt = K + S, ſeu F. Quod erat primum.

DEMONST. 2ᵈᵃ pars. Ductis diagonalibus AC & BF (*fig.* 17), cùm AB ſit parallela ad FC, eſt L = E, H = K; & cùm AG ſit parallela ad CM, eſt I = R (109); igitur L + I, ſeu A, = E + R, ſeu C; quoniam verò BM parallela ad FG, eſt Z = S (109); ergo H + Z, ſeu B, = K + S, ſeu F; ducendo diagonalem MG, ſimili ratiocinio conſequitur M = G. Quod erat alterum.

THEOREMA II.

In Polygono ſymmetrico Diagonales omnes, ab uno ad directè oppoſitum angulum ductæ, ſeſe mutuò in eodem puncto bifariam ſecant.

205. Si polygona (*fig.* 16 & 17) ſymmetrica fuerint, dico diagonales AC, BF, MG ſeſe mutuò bifariam ſecare in O.

DEMONST. Eſt L = E; H = K (109); AB = CF (194); igitur △△ ABO & CFO congrua ſunt (190); eſt igitur AO = OC; BO = OF (185); præterea (*fig.* 17) Z = S, X = P (109); quoniam igitur eſt MB = GF, △△ MBO & FGO ſunt quòque congrua (190); ergo BF dividitur bifariam; itaque MG tranſit per O punctum medium rectæ BF; & ita porrò de diagonalibus in Octogono, Decagono &c. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

206. In polygono ſymmetrico, diagonalis quælibet, putà AC, dividit polygonum in duas partes æquales: dividit enim illud in æqualem numerum △△, quorum ſingula oppoſita congrua ſunt, proinde & æqualia.

THEOREMA III.

Omne Parallelogrammum eſt ſymmetricum.

207. Si ABCF (*fig.* 16) ſit parallelogrammum, dico illud eſſe ſymmetricum.

DEMONST. Ductâ diagonali AC, eſt L = E, R = I (109); ergo △△ ABC & AFC congruunt (190); igitur AF = BC, AB = FC. Itaque □ ABCF conſtat lateribus oppoſitis æqualibus atque parallelis; ergo ſymmetricum eſt (194). *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Quadrilaterum habens ſingulos reſpectivè oppoſitos angulos æquales; vel ſingula reſpectivè oppoſita latera æqualia, eſt ſymmetricum.

208. Dico 1°, ſi A = C (*fig.* 16), B = F; □ ABCF eſſe ſymmetricum.

DEMONST. A + B = C + F; ergo cùm quatuor dicti anguli ſimul = 360° (202); A + B = 180°; itaque AF & BC ſunt parallelæ (115); pariter A + F = B + C; igitur A + F = 180°; itaque AB & FC ſunt etiam parallelæ inter ſe (115); igitur □ ABCF eſt parallelogrammum (198); adeoque & ſymmetricum (207). Quod erat primum.

Dico 2°, ſi AB = FC, & AF = BC; □ ABCF eſſe ſymmetricum.

DEMONST. Ductâ diagonali AC, △ ABC congruit △ AFC, B = F, L = E, I = R (189); ergo AB & FC; AF & BC ſunt parallelæ (115); ergo ABCF eſt parallelogrammum (198), adeoque & ſymmetricum (207). Quod erat alterum.

THEOREMA V.

Quadrilaterum habens bina oppoſita latera æqualia & parallela, ſymmetricum eſt.

209. Dico, ſi AB & FC (*fig.* 16) ſint æqualia atque parallela, □ ABCF eſſe ſymmetricum.

DEMONST. Ductis diagonalibus AC & BF, eſt L=E (109); ergo △△ BAC & ACF congruunt (191); igitur BC = AF; B = F; R = I; jam verò, quia R = I, BC eſt parallela AF (115); ergo □ ABCF eſt parallelogrammum (198), adeoque & ſymmetricum (207). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Quadrilaterum habens duo latera oppoſita æqualia, & duo reſtantia latera parallela, eſt ſymmetricum, vel anguli oppoſiti ſimul faciunt 180°.

210. Dico, ſi AB = FC (*fig.* 16); & AF parallela BC, eſſe ABCF ſymmetricum, vel angulos A + C, item B + F = 180°.

DEMONST. Quoniam AF parallela BC, eſt S = Z (109); ergo △ FAB congruit △ FBC, vel A + C = 180° (192); ſi △△ congruant, eſt A=C, H=K; ergo AB & FC parallelæ (115); igitur □ ABCF eſt ſymmetricum (194); ſi A + C = 180°, etiam B + F = 180° : nam A + C + B + F = 360° (202); igitur ABCF eſt ſymmetricum, vel anguli oppoſiti = 180°. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

Hexagonum, Octogonum &c., quibuſvis angulis & lateribus directè oppoſitis æqualibus conſtans, ſymmetricum eſt.

211. Si (*fig.* 18) A=C, B=F, H=G; AB=CF, BH = FG, & HC = GA, dico iſtud hexagonum eſſe ſymmetricum.

DEMONST. Duc BG & HF; △ ABG congruit △ HCF (191); igitur BG = HF; proinde BGFH eſt ſymmetricum (208); ergo GF & BH ſunt parallelæ (194);

ſimiliter, duc AF & BC; △△ AGF & CHB congruent (191); ergo AF = BC; igitur AFCB eſt ſymmetricum (208); igitur AB & FC ſunt parallelæ (194); ductis AH & GC ſimili ratiocinio reperies AG parallelam HC; itaque hexagonum datum terminatur lateribus directè oppoſitis æqualibus atque parallelis; igitur ſymmetricum eſt (194). *Q. e. d.*

§. III.

De Polygonis Regularibus.

THEOREMA.

Omne Polygonum Regulare, pari laterum numero terminatum, eſt quoque ſymmetricum.

212. Propoſitionis veritas perſpicua ſit per numeros 196, & 211.

PROBLEMA I.

Polygono Regulari (fig. 19, & 20) *dato circulum circumſcribere.*

213. RESOLUTIO I. Divide A item F bifariam (87) per rectas, quæ concurrent v. g. in X.

II. Ex X, intervallo XA, duc circulum; hic efficiet quæſitum.

DEMONST. Rectas FX, EX &c. *fig.* 19. ducito, ſimileſque ductas concipe *fig.* 20; quoniam A = F (196), & ex conſtructione quiſque bifariam diviſus eſt, eſt I = K, ergo △ AXF eſt iſoſcele (171); igitur XA = XF; præterea I = H; quoniam igitur AF = FE (196), △△ XAF & XFE congruunt (191); ergo R = K; XE = XF; quoniam igitur E = F, eſt G = H; itaque △ CXE congruum △ XFE (191), conſequenter CX = XE; & ſic de cæteris. Omnia ergo puncta A, F, E, C &c. diſtant æqualiter ab X; eſt igitur X polygoni centrum (197); atque adeo circulus ex X, intervallo XA, deſcriptus, per vertices omnium angulorum polygoni tranſit; igitur huic circumſcriptus eſt ille circulus (153). *Q. e. d.*

Corollarium.

214. Binos polygoni regularis angulos bifariam ſecando per rectas, punctum concursûs earumdem dat polygoni centrum.

PROBLEMA II.

Invenire angulum Polygoni regularis.

215. Resolutio I. Divide 360 per numerum laterum polygoni:

II. Quotientem ſubtrahe ex 180; remanebit numerus graduum anguli quæſiti.

Demonst. Polygonum datum circulo inſcriptum concipe; quodlibet latus (cùm omnia ſint æqualia) æqualem peripheriæ arcum ſubtendit (35); in totidem ergo arcus æquales erit diviſa peripheria, quot ſunt polygoni latera; diviſo itaque 360° per numerum laterum, quotiens dat valorem cujuſque arcûs, ſeu $\frac{1}{2}$ duorum arcuum, qui ſuſtentantur à lateribus, quæ iſtum polygoni angulum conſtituunt; jam verò quiſque angulus polygoni regularis menſuratur $\frac{1}{2}$ omnium arcuum, exceptis duobus; ergo quotiens ille facit cum quolibet angulo 180°; quotiente ergo ſubducto ex 180, reſiduum dat valorem anguli polygoni regularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

216. Igitur quotiens ille eſt æqualis angulo formato in centro polygoni per binas rectas, è duobus vicinis angulis ductas.

PROBLEMA III.

Circulo dato Polygonum regulare inſcribere.

217. Resolutio I. Subſtrahe angulum polygoni ex 180°, reſiduum dat angulum formandum in centro (216):

II. Ejuſdem anguli crura intercipient in peripheria arcum, cujus chorda, quoties licet, peripheriæ applicetur; atque conſtructum erit polygonum deſideratum.

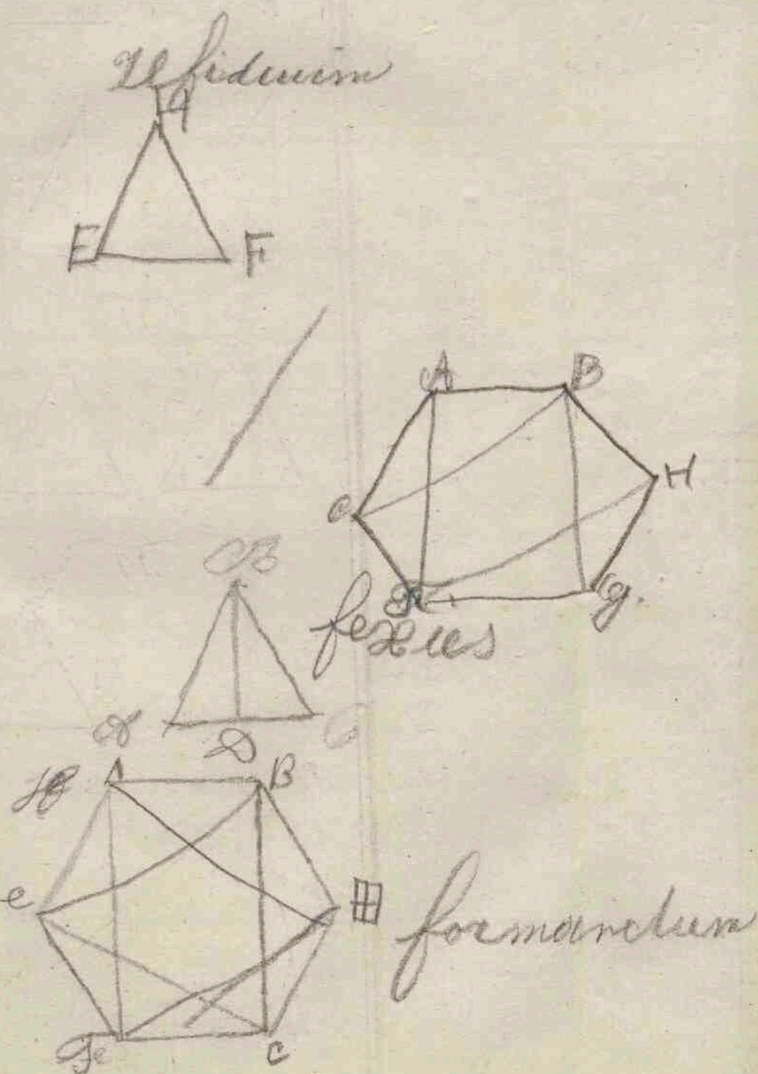
Sit E. G. conſtruendum Hexagonum regulare; quoniam quilibet ejuſdem angulus eſt 120° (215), hoc ſubducto ex 180°, reſiduum 60° dat angulum in centro X (*fig.* 20) formandum; erit itaque arcus AB 60°; chorda AB ſexies peripheriæ applicetur, atque hexagonum regulare deſcriptum erit.

218. Scholion I. Chorda ſuſtentans arcum 60° (ſeu latus hexagoni regularis inſcripti circulo) eſt æqualis radio circuli: & è converſo, ſi chorda ſit æqualis radio, ſuſtentat illa arcum 60°: primo enim caſu, cùm AX = XB, △ XAB eſt iſoſcele (157); ergo angulus XAB = angulo XBA (171); jam verò, cùm X ſit 60°, duo illi anguli faciunt 120°; igitur quilibet eorum eſt etiam 60°; eſt ergo △ XAB æquiangulum, ergo & æquilaterum (172); igitur AB = AX, ſeu radio circuli. Secundo caſu, ductis radiis AX & XB, erit △ XAB æquilaterum, ac proinde æquiangulum (172); quilibet ergo ejuſdem angulus eſt 60°; ſed X menſuratur arcu AB (72); ergo arcus AB eſt 60°.

219. Schol. II. Geometricè conſtrui poſſunt

1°. Angulus 90°, 45°, $22\frac{1}{2}$ &c.; poteſt itaque peripheria geometricè dividi in 4, 8, 16 &c. partes æquales, atque adeo polygonum regulare 4, 8, 16 &c. laterum, per Geometriam elementarem, circulo inſcribi.

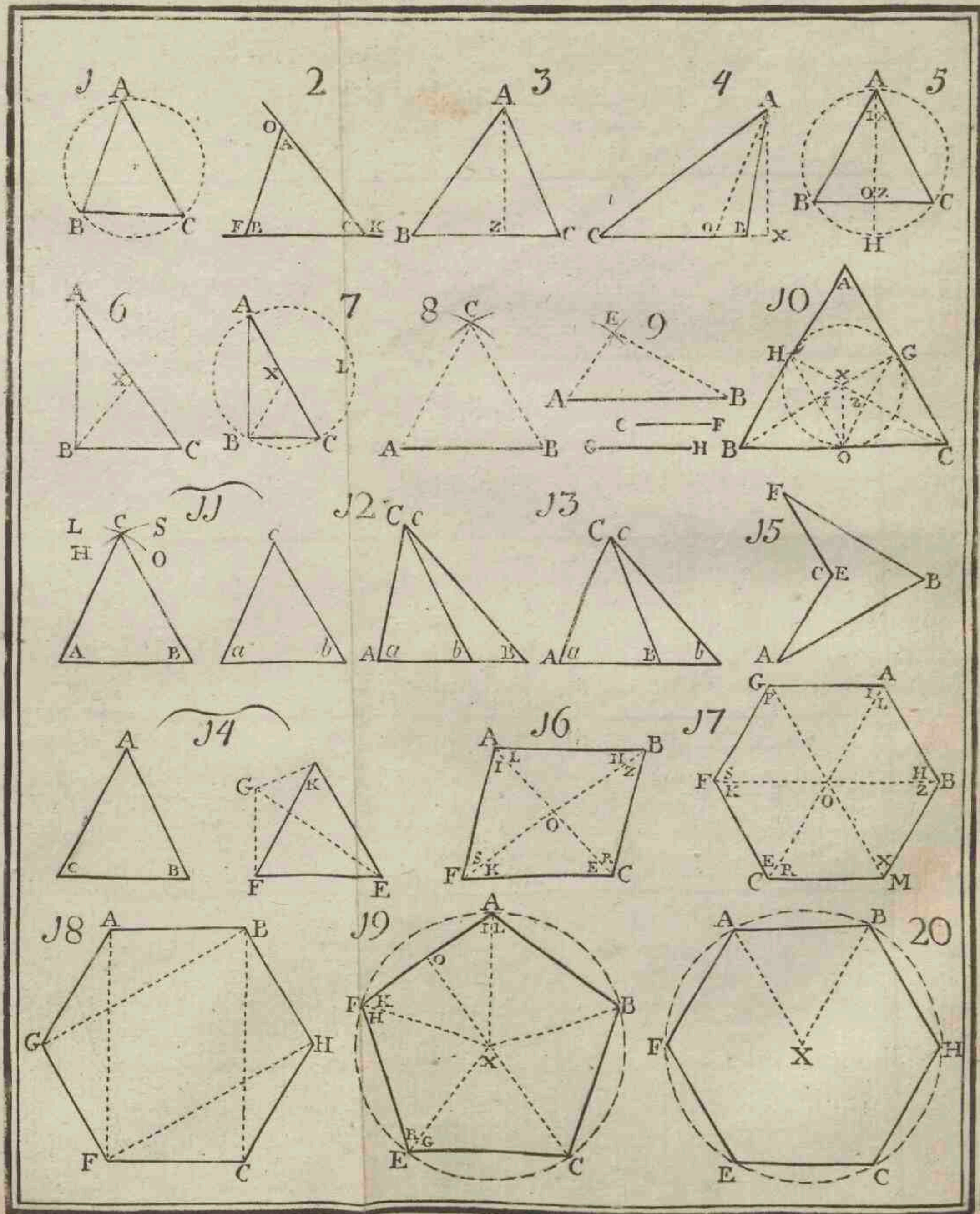
2°. Angu-



Ufidenim

fexies

formandum



G.H.Becker f: lov.

2°. Angulus 60°, 30°, 15° &c.; his mediantibus efficies polygonum 6, 12, 24, &c. laterum.

3°. Angulus 72° (de quo postea) 36°, 18° &c., quibus construere licet polygonum 5, 10, 20 &c. laterum. Pro cæteris autem, praxis communis atque mechanica adhibetur: scilicet tentando per circinum, aut *Transportorio* (de quo postea), peripheria in partes desideratas dividitur.

PROBLEMA IV.

Super data recta AB (Tab. V. fig. 1) *Polygonum regulare describere.*

220. Resolutio I. In A atque B fac angulos, quorum quisque faciat $\frac{1}{2}$ anguli polygoni:

II. Ex X, intervallo XA, circulum ducito:

III. Eidem applices, quoties fieri potest, latus AB; atque polygonum quæsitum habebis.

221. Scholion. Super data recta AB (*fig.* 2) facile est Quadratum delineare: erigendo enim in A & B perpendiculares AG & BF, sic ut quælibet sit æqualis AB, atque ducendo GF, Quadratum ABFG exurgit.

PROBLEMA V.

Polygono regulari dato circulum inscribere.

222. Resolutio I. E centro polygoni (214), ad unum latus, duc *radium rectum*:

II. Ex eodem centro, intervallo dicti *radii recti*, circulum ducito, eritque ille polygono regulari inscriptus.

Demonst. Quoniam omnia polygoni regularis latera æqualia sunt; dum polygonum est inscriptum circulo, omnia latera sunt totidem chordæ æquales, quæ proinde singulæ æqualiter à centro distant (130); igitur perpendiculares quælibet, è centro polygoni ad quodlibet latus ductæ (seu omnes *radii recti*) æquales sunt (94);

ergo peripheria, è centro polygoni ad intervallum unius ex iſtis perpendicularibus, ſeu radiis rectis, deſcripta, tranſibit per extremum cujuſlibet; atque adeo in ſingulis illis punctis tanget quodlibet polygoni latus (124); igitur circulus ille erit polygono inſcriptus (154). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

Circulo dato Polygonum regulare circumſcribere.

223. Cùm polygonum regulare circulo circumſcriptum eſt, quiſque ejus angulus, iſtius circuli eſt Circumſcriptus; tot ergo erunt arcus convexi, quot anguli circumſcripti; & quoniam omnes hi circumſcripti æquales ſunt, erunt quòque convexi ſinguli æquales. Itaque

RESOLUTIO I. Divide peripheriam in tot arcus æquales quot ſunt polygoni futura latera, v. g. quinque pro pentagono:

II. Per puncta diviſionis *a*, *b*, *c*, *e*, *f* (*fig.* 3) ducito tangentes, eaſque produc, ut ſingulæ duæ vicinæ angulos conſtituant A, B, C, E, F; eritque illud polygonum regulare, & circulo circumſcriptum.

DEMONST. In primis quilibet duo anguli ſunt æquales, cùm quilibet duo convexi æquales ſint ex conſtructione (146); præterea, quælibet duo latera æqualia habet: nam $\Delta\Delta$ *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*e* &c. ſunt iſoſcelia & congrua; quodlibet eſt iſoſcele: nam angulus A*ab* eſt = angulo A*ba*: quiſque enim menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs *ab* (140); ergo Δ *a*A*b* eſt iſoſceles (171): ſimiliter angulus B*bc* eſt = angulo B*cb*: quiſque enim menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs *bc* (140); igitur Δ *b*B*c* eſt quoque Iſoſceles, & ita porrò; ergo latus A*a* = A*b*; B*b* = B*c*; C*c* = C*e* &c.; præterea baſes omnium illorum $\Delta\Delta$ erunt inter ſe æquales (35), ſicut & anguli ad baſes illas conſtituti (imò & △△ illa ſunt omnia inter ſe æquiangula; congruunt igitur △△ quælibet (190); omnia igitur latera *a*A, A*b*, *b*B, B*c*, *c*C, C*e* &c. ſunt inter ſe æqualia; quoniam ergo bina talia latera componunt ſingulum polygoni latus, ſingula polygoni delineati latera æqualia ſint oportet. Igitur polygonum delineatum regulare eſt, & circulo circumſcriptum. *Q. e. d.*

224. SCHOLION I. Latera ejuſdem Circumſcripti, aut æqualium Circumſcriptorum, à vertice uſque ad puncta tangentiæ, æqualia ſunt.

225. SCHOLION II. Circulus ſpectari poteſt ùt polygonum regulare, cujus latera infinitè parva ſunt: etenim peripheria componitur rectis infinitè parvis (4), atque proinde inter ſe æqualibus; hæ quòque rectæ continuò, & æqualiter centrum versùs inclinant; ergo anguli omnes, quos intercipere concipiuntur ad peripheriam, ſunt quòque æquales; ergo ùt polygonum regulare circulus haberi poteſt (196).

ARTICULUS III.

De Lineis Proportionalibus, & Figuris ſimilibus.

DEFINITIO I.

226. Lineæ AF, BG, CI & EK (*fig.* 4) *proportionales* ſunt, dum prima eſt ad ſecundam, ſicuti tertia eſt ad quartam; ſive dum eſt AF:BG = CI:EK.

DEFINITIO II.

227. *Tres lineæ*, v. g. AB, CF, OG (*fig.* 5) dicuntur *proportionales*, dum prima eſt ad ſecundam, ſicuti ſecunda eſt ad tertiam; ſive ſi fuerit AB:CF = CF:OG; hocque caſu eſt CF *Media proportionalis* inter AB & OG.

DEFINITIO III.

228. Recta AC (*fig.* 6) diviſa dicitur *mediâ & extremâ ratione*, dum tota AC eſt ad partem majorem

AB, ùt AB eſt ad partem minorem BC; ſive dum eſt AC:AB = AB:BC.

DEFINITIO IV.

229. *Figuræ* quæcumque *Similes* ſunt, ſi conſtent numero laterum æquali, latera ſingula ſingulis homologis ſint proportionalia, & anguli, lateribus homologis comprehenſi, æquales.

§. I.

De Lineis proportionalibus, atque △△ *ſimilibus.*

THEOREMA I.

Si (fig. 7) AF, BG *&* CI *ſint inter ſe parallelæ; latera* OC *&* XI *dividuntur proportionaliter; ſive eſt* XK:OL = KI:LC.

230. DEMONST. Concipe lineam XK, item KI diviſas in infinitè parvas partes, inter ſe proinde æquales; & à ſingulis punctis ductas parallelas reſpectu KL & IC: in quot partes æquales diviſa fuerit XK, in totidem partes, inter ſe æquales, OL diviſa quòque erit (116); ſimiliter, in quot partes, inter ſe æquales, diviſa fuerit KI, in totidem partes, inter ſe æquales, diviſa erit LC (116); igitur eſt XK:OL = KI:LC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

231. Igitur *alternando* eſt XK:KI = OL:LC.

COROLLARIUM II.

232. In △ ABC (*fig.* 8) ſi ſit OZ parallela ad BC, eſt AZ:CZ = AO:OB; patet ducendo per A parallelam ad BC.

COROLLARIUM III.

233. Igitur in △ ABC, *componendo*, eſt AC:AZ = AB:AO.

THEOREMA II.

In △ ABC (fig. 8) *si sit* AZ:ZC = AO:OB (*seu, si* OZ *dividat latera* AC & AB *proportionaliter*), *est* OZ *parallela* BC.

234. DEMONST. Concipe AZ, & CZ divisas in partes aliquotas, æquales inter se: pariter imaginare AB divisam in tot partes aliquotas, in quot AC est divisa: tunc à Z imaginare duci parallelam respectu CB, v. g. rectam ZL; & erit AC : AZ = AB : AL (233); quoniam igitur, ex hypothesi *componendo*, est AC : AZ = AB : AO; consequitur esse AL = AO; itaque parallela illa cadit in O: igitur si ZO dividat latera AC, & AB proportionaliter, ea est parallela ad basin BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

235. Idem consequitur, si sit AC : AZ = AB : AO &c.

THEOREMA III.

Si OZ (fig. 9) *sit parallela* BC; *est* AC:AZ = BC:OZ

236. DEMONST. à puncto Z duc ZX parallelam AB; est OZ = BX (198 & 207); præterea est AC : AZ = BC : BX (233); ergo est AC : AZ = BC : OZ; *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Si (fig. 9) AC:AZ = BC:OZ, *est* OZ *parallela* BC, *vel* B + O = 180°.

237. DEMONST. Sit ZX parallela OB; est AC : AZ = BC : BX (233); ergo BX = OZ; sed OB est parallela ZX, ex constructione; ergo vel □ BOZX est symme-

tricum, quo casu B = O, OZ parallela BC; vel B + L = 180° (210); hoc igitur casu, quoniam L = O (109), B + O = 180°. *Q. e. d.*

THEOREMA V.

ΔΔ Æquiangula sunt similia, seu habent latera homologa proportionalia.

238. Si (*fig.* 10) A = *a*; B = *b*, & proinde C = *c*; est AB:*ab* = BC:*bc* = AC:*ac*.

DEMONST. Triangulo ABC imponatur Δ *abc*, ita ut *a* cadat in A, & linea *ac* in lineam AC; ac proinde, cùm *a* = A, cadet *ab* in AB; cùm ergo *b* = B, est BC parallela ad *bc* (115); habetur igitur AB:*ab* = BC:*bc* = AC:*ac* (233 & 236). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

239. Dum duæ transversæ, v. g. IK & EL (*fig.* 11) sese inter parallelas AB & CF secant, segmenta sunt proportionalia; sive est IO : OK = EO : OL : etenim I = K; L = E (109); O = X (85); adeoque ΔΔ IOE & KXL sunt æquiangula; ergo &c.

THEOREMA VI.

Dum tria latera unius Δ sunt proportionalia tribus lateribus alterius Δ; duo illa ΔΔ sunt similia.

240. Dico, si (*fig.* 12) sit AB:*ab* = BC:*bc* = AC:*ac*; esse duo illa ΔΔ similia, atque adeo A = *a*; B = *b*; C = *c* (229).

DEMONST. Sit AL = *ab*; duc LK parallelam BC; erit AB : AL = BC:LK = AC : AK (238); quoniam igitur, ex hypothesi, est AB:*ab* = BC:*bc* = AC:*ac*; &

ex constructione $ab = AL$; erit $bc = LK$, $ac = AK$; igitur $\triangle\ abc$ est æquilaterum $\triangle$ ALK; proinde congruunt (189); ergo $A = a$; $L = b$; $K = c$; sed est $L = B$, $K = C$ (108); ergo $B = b$, $C = c$; ergo $\triangle\triangle$ ABC & abc similia sunt (229). *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

Si in duobus $\triangle\triangle$ unus angulus primi sit æqualis uni angulo secundi, atque anguli illi æquales formentur per latera proportionalia; duo illa $\triangle\triangle$ similia sunt.

241. Dico (*fig.* 10), si $A = a$; & sit $AB : ab = AC : ac$; esse $B = b$, $C = c$ &c.

DEMONST. Ponatur a in A, ita ut ac cadat in AC; quoniam angulus $a = A$; cadet ab in AB (75); igitur est $AB : Ab = AC : Ac$; est ergo bc parallela BC (235); ac proinde $B = b$, $C = c$ (108); igitur $\triangle\triangle$ ABC & abc similia sunt (238). *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

Si duo $\triangle\triangle$ habeant duo latera proportionalia, & utrimque unum angulum, lateribus proportionalibus oppositum, æqualem; $\triangle\triangle$ ista similia sunt, vel anguli restantibus lateribus proportionalibus oppositi, simul faciunt 180°.

242. Dico si (*fig.* 12) sit $AC : ac = BC : bc$; & $A = a$; esse $C = c$, $B = b$; vel $B + b = 180°$.

DEMONST. Sit $AK = ac$, $AL = ab$; $\triangle$ AKL congruit cum $\triangle\ abc$ (191); igitur $LK = bc$; quoniam igitur, ex hypothesi, est $AC : ac = BC : bc$, erit $AC : AK = BC : LK$; proinde vel LK est parallela BC, vel $B + L = 180°$ (237); primo casu erit $B = L$, & $C = K$

(108); quoniam igitur $L = b$, & $K = c$, erit $B = b$, $C = c$; adeoque $\triangle$ ABC erit æquiangulum, ergo ſimile $\triangle$ *abc*. Secundo verò caſu, cùm $L = b$, $B + b$ facient 180°. *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

In $\triangle\triangle$ ſimilibus, altitudines (reſpectivè ad baſes homologas) ſunt lateribus proportionales.

243. Si (*fig.* 12, 13 & 14) ſit $A = a$, $B = b$, $C = c$, dico perpendicularem AE, ductam ex A ad BC (productam ſi opus), ſe habere ad perpendicularem *a*I, ductam ex *a* ad *bc* (productam ſi opus), ſicut AC:*ac* &c.

DEMONST. Sint B item C acuti in *fig.* 12; B obtuſus in 13; & C obtuſus in 14. Perpendiculares ex A item *a* ductæ cadent ùt in figuris (174); quoniam $C = c$; $E = I$ (ſunt enim ambo recti); erit angulus CAE = angulo *ca*I (165); ergo $\triangle$ ACE eſt æquiangulum, ergo ſimile $\triangle$ *ca*I; eſt itaque AC:*ac* = AE:*a*I (238); ſed cùm $\triangle$ ABC ſimile ſupponatur $\triangle$ *abc*, eſt AC:*ac* = AB:*ab* = BC:*bc* (238), erit igitur etiam AB:*ab* = AE:*a*I; item BC:*bc* = AE:*a*I. *Q. e. d.*

244. SCHOLION. Si v. g. ſolùm habeatur $C = c$, ſemper habebitur AC:*ac* = AE:*a*I; præterea erit BC:*bc* ſicuti perpendicularis ex B ad AC ducta, ad perpendicularem ex *b* ad *ac* ductam: at altitudines, ſeu perpendiculares illæ, non ſunt proportionales reliquis lateribus $\triangle\triangle$ ABC & *abc*, quia hæc ſimilia non ſupponuntur.

THEOREMA X.

Dum in $\triangle$ linea ducta ex vertice alicujus anguli, hunc biſariam ſecat; ea dividit baſin eadem ratione, ùt ſunt inter ſe latera, directè oppoſita baſeos partibus, & per quæ angulus ille formatur.

245. Si (*fig.* 15) ſit $I = L$, dico eſſe AC:AB = OC:OB.

DEMONST.

DEMONST. Producatur CA usque in K, ita ut AK = AB; ductâ FK, △ KAF est isoscele (157); F = K (171); sed angulus BAC, seu I + L, est = K + F (167); quoniam igitur, ex hypothesi, L = I, est F = L; proinde KB est parallela AO (115); atque adeo AC : AK seu AB = CO : OB (230). *Q. e. d.*

THEOREMA XI.

È converso: dum in △ linea ducta ex vertice alicujus anguli dividit basin in eadem ratione, ac sunt latera, quibus angulus ille formatur, & quæ directè opposita sunt baseos partibus; angulus ille bifariam est divisus.

246. Dico si (*fig.* 15) sit AC : AB = CO : OB, esse I = L.

DEMONST. Producatur rursùs CA usque in K, sitque AK = AB; ductâ KF; attento supposito, erit CA : AK = OC : OB; ergo AO parallela KB (234); igitur K = I (108); sed K = F (171), adeoque F = I; sed quoniam KB parallela AO, est F = L (109); ergo I = L. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Si (fig. 16) A *item* O *sit rectus;*

1°. △△ ACX, AXB, ACB *sunt similia:*
2°. AX *est media proportionalis inter* BX & CX:
3°. AC *est media proportionalis inter* BC & OC:
4°. AB *est media proportionalis inter* BC & XB.

247. DEMONST. 1um. B + C = 90°; ergo X = B + C, item O = B + C; jam verò X = C + I, & O = B + L (167); ergo I = B; C = L; O = X; igitur △△ ACX, AXB & ACB sunt æquiangula, ac consequenter similia (238). Quod erat primum.

DEMONST. 2^um^. Quoniam $\triangle$ ACX ſimile AXB, eſt $BX : AX = AX : CX$. Quod erat ſecundum.

DEMONSTR. 3^um^. Quia $\triangle$ ACX ſimile ACB, eſt $BC : AC = AC : OC$. Quod erat tertium.

DEMONST. 4^um^. Cùm $\triangle$ AXB ſit ſimile ACB, eſt $BC : BA = BA : XB$. Quod erat ultimum.

COROLLARIUM.

248. Si (*fig.* 17) BC ſit diameter, & O rectus; quoniam etiam eſt A rectus (menſuratur enim $\frac{1}{2}$ arcûs BC), tres medias proportionales aſſignare eſt: nempe AO inter BO & OC; AC inter BC & OC; & AB inter BC & OB.

THEOREMA XIII.

In $\triangle$ rectangulo quadratum Hypothenuſæ eſt æquale quadratis Cathetorum.

249. Dico, ſi A (*fig.* 18) rectus ſit, eſſe $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

DEMONST. Ab A ad BC demitte perpendicularem AX; cadet hæc intra baſin BC (174); igitur $AB^2 = BC \times BX$; & $AC^2 = BC \times CX$ (247); porrò $BC \times BX + BC \times CX = BC^2$; ergo $BC^2 = AB^2 + AC^2$. *Q. e. d.*

THEOREMA XIV.

È converſo: ſi in $\triangle$ quadratum unius lateris ſit æquale quadratis reſtantium laterum, angulus oppoſitus priori lateri rectus eſt.

250. Dico, ſi (*fig.* 18) ſit $BC^2 = AB^2 + AC^2$, A eſſe rectum.

Demonst. Quoniam BC, ex hypotheſi, eſt latus maximum, A eſt major quàm B, item major quàm C (170); igitur B, item C eſt acutus; itaque perpendicularis, ducta ab A ad BC, intrà baſin BC cadit (174). Quoniam X, item O rectus eſt, $AB^2 = AX^2 + XB^2$; & $AC^2 = AX^2 + CX^2$ (249); ergo $BC^2 = 2AX^2 + XB^2 + CX^2$; jam verò $BC^2 = BX^2 + CX^2 + 2CX \times BX$; ergo $2CX \times BX = 2AX^2$; igitur $CX \times BX = AX^2$; adeoque eſt $CX : AX = AX : XB$; ſed eſt $O = X$; ergo $\Delta\Delta$ COA & BAO ſimilia ſunt (241); igitur $B = I$; $C = L$; proinde $C + B = I + L$; ergo $I + L$, ſeu $A = 90°$. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

Dum binæ chordæ ſeſe in Circulo ſecant, earumdem ſegmenta ſunt reciprocè proportionalia.

251. Dico (*fig.* 19) eſſe $OC : OA = OB : OF$.

Demonst. Ductis chordis BC & AF, eſt $C = A$, $B = F$, $O = X$; igitur $\Delta\Delta$ BCO & AFO ſunt æquiangula; ergo ſimilia (238); adeoque eſt $OC : OA = OB : OF = BC : AF$. *Q. e. d.*

252. Scholion I. Si (*fig.* 19) habeatur unum ex ſequentibus: 1° $OC = OA$; 2° $BO = OF$; 3° chorda BC = chordæ AF, vel, quod idem eſt, arcus BC = arcui AF; omnia reliqua ſequuntur.

253. Scholion II. Si chorda AB ſit = chordæ CF, quoniam tunc vel arcus $AC = BF$, vel arcus $BC = AF$ (38); primo caſu erit $BO = OC$, & $OF = OA$; ſecundo caſu $OC = OA$, & $BO = OF$.

254. Scholion III. Si AB ſit diameter; & CO = uni ejus parti, v. g. OA, eſt O Centrum: nam eſt $OF = OB$ (252); igitur $CF = AB$; ergo CF etiam eſt diameter (34); atqui punctum interſectionis duarum diametrorum eſt Centrum (29); ergo &c.

THEOREMA XVI.

Tangens AB (fig. 20) *est media proportionalis inter totam secantem* BC, *& secantem exteriorem* BO.

255. DEMONST. Ductis chordis AO & BC, C mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AO (138); item angulus BAO mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AO (140); sunt ergo duo illi anguli inter se æquales. Angulus BAC mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AOC (140), item angulus BOA mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs AOC (139); hi ergo duo anguli sunt quòque inter se æquales; B præterea est communis; est ergo $\triangle$ BAC æquiangulum $\triangle$ ABO; igitur & ei simile est (238); ergo est $BC:AB = AB:BO$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

256. Si itaque foret $AB = OC$, quoniam haberetur $BC:OC = OC:BO$, recta BC divisa esset *mediâ & extremâ ratione* (228).

257. SCHOLION. Si (*fig.* 20) sit AB tangens, & arcus AKC 180°; tres mediæ proportionales habentur; in primis talis est AB inter BC & BO (255); & quia, ductis AO & AC, angulus BAC, item O rectus est, est AO media proportionalis inter BO & OC, & AC talis est inter BC & OC (247).

THEOREMA XVII.

In $\triangle$ ABC (fig. 21) *sit* B *rectus: erit rectangulum (seu productum) super* CA + AB, *& super differentia hypotenusæ* CA *& catheti* BA, *æquale* BC^2.

258. DEMONST. Ex A, ùt centro, intervallo AB, duc circulum: produc CA usque in L; erit $CL = CA + AB$; & CO erit differentia CA ad AB; igitur est CL, seu $CA + AB : BC = BC : CO$ (255): ergo $CA + AB \times CO = BC^2$. *Q. e. d.*

THEOREMA XVIII.

In figura 22 *est* AC : AL = AB : AK.

259. DEMONST. Ductis CL & BK, △△ ALC & AKB sunt æquiangula : nam C = B : quisque enim mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs KL (138); angulus ALC = angulo AKB; quia quilibet mensuratur $\frac{1}{2}$ arcûs BLKC (139); quoniam itaque A communis est, duo illa △△ sunt æquiangula, ergo & similia (238); est igitur AC:AL = AB : AK. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

In Ellipsi, quadrata Ordonnatarum (*sic audiunt perpendiculares, à peripheria ad axin quemlibet ductæ, in omni figura curvilinea*) *ad majorem axin, proportionalia sunt rectangulis super partibus correspondentibus majoris axis.*

260. TAB. VI. *fig.* 1. Sit ACBDA Ellipsis : AB axis major : CD axis minor; adeoque O in Centro rectus. G item L sint foci : RP item EI ordonnatæ : dico esse $RP^2 : AP \times PB = EI^2 : AI \times IB$.

DEMONST. Duc RL : à G per R rectam ita produc, ut RZ = RL. Ex R, intervallo RL, mediam peripheriam ZLHQ describe; sit GM = MZ; erit MR = $\frac{1}{2}$ differentiæ inter GR & RL; GQ est tota differentia, sive est $\frac{2}{1}$ + MR. Quoniam GO = OL (47), & HP = PL (126); est OP $\frac{2}{1}$ — GH; est autem GZ : GL = GH : GQ (259); & capiendo terminorum medietates, erit GM : OL = OP : MR; cùmque sit GZ = AB, assumendo medietatem majoris axis, loco GM; habebis OB : OL = OP : MR; *invertendo* OB : OP = OL : MR; *componendo* OB : OB+OP (seu AP) = OL : OL+MR; aut *invertendo* OB : OL = AP : OL+MR; ulteriùs *componendo* OB:OB+OL (seu AL) = AP : AP+OL+MR;

ſed $AP = GM + OP$; itaque eſt $OB : AL = AP : GM + OP + OL + MR$; quoniam verò $GM + MR = GR$; & $OL + OP = GP$; tandem habetur $OB : AL = AP : GR + GP$; atque in hac proportione poſtremus terminus eſt ſumma hypotenuſæ GR & catheti GP △ rectanguli GRP.

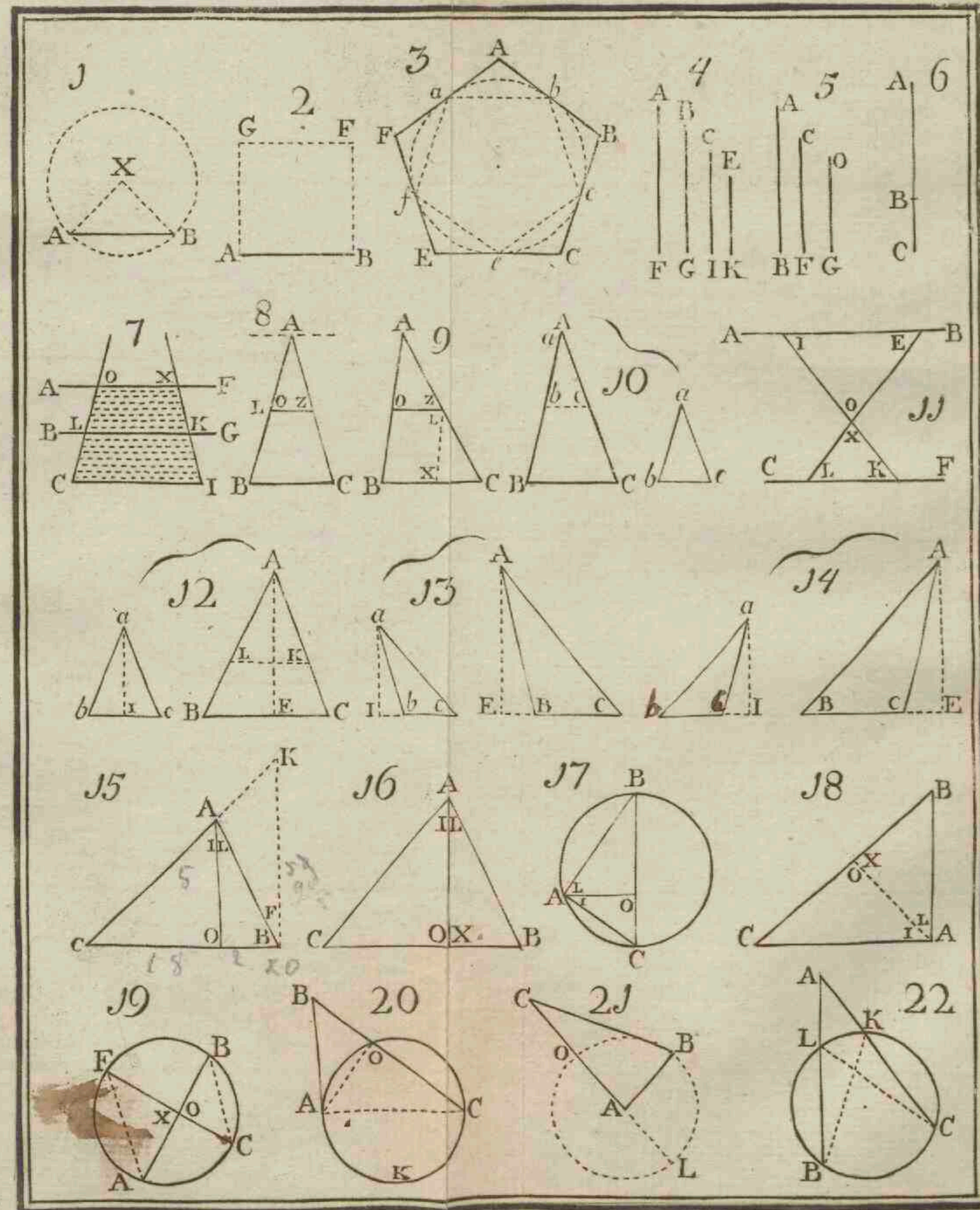
Reſumendo ſuperiorem proportionem $OB : OL = OP : MR$, habetur *dividendo* $OB : OB - OL = OP : OP - MR$; ſeu *invertendo* $OB : OP = OB - OL : OP - MR$; & ulteriùs *dividendo* $OB : OB - OP$ (ſeu PB) $= OB - OL$ (ſeu LB) $: OB - OL - OP + MR$; ſed $OB = GM$; & $-OL - OP = -PG$; igitur $OB : PB = LB : GM + MR - GP$; atque ultimus hic terminus eſt differentia hypotenuſæ GR, & catheti GP △ rectanguli GPR; hæcce differentia vocetur x, & habebitur $OB : PB = LB : x$.

Reſumatur $OB : AL = AP : GR + GP$, atque ultimus hic terminus vocetur s, quia ipſe eſt ſumma hypotenuſæ GR & Catheti GP; eritque $OB : AP = AL : s$; & *multiplicando* terminos hujus proportionis, per terminos hujus $OB : PB = LB : x$; habebitur $OB^2 : AP \times PB = AL \times LB : s \times x$; atqui ſumma hypotenuſæ & catheti GP multiplicata per earumdem differentiam eſt æqualis RP^2 (258); ergo $OB^2 : AP \times PB = AL \times LB : RP^2$; igitur eſt $RP^2 : AP \times PB = AL \times LB : OB^2$.

Si à G per E rectam agas, donec ipſa æqualis ſit ducendæ EL, atque ex E, intervallo EL, circulum ducas, ſimili ratiocinio reperies eſſe $EI^2 : AI \times IB = AL \times LB : OB^2$. Ergo eſt $RP^2 : AP \times PB = EI^2 : AI \times IB$. Et ſic de cæteris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

261. Quoniam igitur OC Ordonnata eſt, atque adeo habeatur $OC^2 : AO \times OB$, ſeu $OB^2 = AL \times LB : OB^2$; eſt $OC^2 = AL \times LB$.



C.H.Becher f: Lov:

COROLLARIUM II.

262. Ducto ex O semicirculo AKB, & productâ PR, erit PS *ordonnata* circuli, cujus AB, axis major, diameter est; eritque $PS^2 = AP \times PB$ (248); erat etiam $OC^2 = AL \times LB$ (261); igitur, cùm supra haberetur $RP^2 : AP \times PB = AL \times LB : OB^2$; habebitur $RP^2 : PS^2 = OC^2 : OB^2$; adeoque $RP : PS = OC : OB$; similiter productâ IE, erit If ordonnata majoris circuli, & $If^2 = AI \times IB$; supra verò erat $EI^2 : AI \times IB = AL \times LB : OB^2$; itaque est $EI^2 : If^2 = OC^2 : OB^2$; ac proinde $EI : If = OC : OB$; & ita de cæteris. Itaque quælibet ordonnata ellipseos ad majorem axin, est ad correspondentem ordonnatam circuli super majori axi, sicut $\frac{1}{2}$ minoris axis ad $\frac{1}{2}$ majoris; seu sicut minor axis ad majorem.

THEOREMA XX.

In Ellipsi, quadrata Ordonnatarum *ad minorem axin, sunt proportionalia rectangulis super partibus correspondentibus minoris axis.*

263. Si VN & FX sint Ordonnatæ Ellipseos ad minorem axin CD, dico esse $VN^2 : CN \times ND = FX^2 : CX \times XD$.

DEMONST. Ductâ VT ordonnatâ ad majorem axin AB, est $AO \times OB$ seu $AO^2 : CO^2 = AT \times TB : VT^2$; est autem $AT \times TB = AO^2 - TO^2$: (nam, quoniam AB dividitur æqualiter in O, & inæqualiter in T, est (arith.) $AT \times TB = AO^2 - TO^2$); igitur $AO^2 : CO^2 = AO^2 - TO^2 : VT$; & *permutando*, $AO^2 : AO^2 - TO^2 = CO^2 : VT^2$; & *dividendo* $AO^2 : AO^2 - AO^2 + TO^2 = CO^2 : CO^2 - VT^2$ (datur autem signum + quadrato TO, quia resecando AO^2, nimis fuisset sublatum, cùm solùm resecandum sit $AO^2 - TO^2$; ideoque reſtituitur TO^2, quod nimis fuiſſet ſublatum); verùm $AO^2 - AO^2$ reducitur ad *zero*; itaque habetur $AO^2 : TO^2 = CO^2 : CO^2 - VT$; at $TO^2 = VN^2$ (eſt enim □ VNOT rectangulare, adeoque ſymmetricum); & $CO^2 : CO^2 - VT^2 = CO^2 - NO^2$; præterea (arith.) $CO^2 - NO^2 = CN \times ND$ (quia CD dividitur bifariam in O, & inæqualiter in N); igitur $AO^2 : VN^2 = CO^2 : CN \times ND$; ſeu $VN^2 : CN \times ND = AO^2 : CO^2$.

Simili modo demonſtrabitur $FX^2 : CX \times XD = AO^2 : CO^2$. Igitur eſt $VN^2 : CN \times ND = FX^2 : CX \times XD$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

264. Ductâ ex O mediâ peripheriâ CYD; rectæ bN & aX, perpendiculares ad minorem axin CD, *ordonnatæ* ſunt Circuli, cujus diameter eſt minor axis; eritque $bN^2 = CN \times ND$; item $aX^2 = CX \times XD$ (248); at erat ſupra $VN^2 : CN \times ND = AO^2 : CO^2$; ergo eſt $VN^2 : bN^2 = AO^2 : CO^2$; igitur $VN : bN = AO : CO$. Pariter erat $FX^2 : CX \times XD = AO^2 : CO^2$; ergo eſt $FX^2 : aX^2 = AO^2 : CO^2$; itaque eſt $FX : aX = AO : CO$. Igitur *Ordonnatæ* quælibet Ellipſeos ad minorem axin, ſe habent ad correſpondentes *Ordonnatas* circuli ſuper minori axi, ſicut $\frac{1}{2}$ majoris axis ad $\frac{1}{2}$ minoris axis, ſive ſicut major axis ad minorem.

PROBLEMA I.

Datis tribus lineis AB, CE *&* FG (fig. 2), *invenire quartam proportionalem.*

265. RESOLUTIO I. Fiat, pro libitu, angulus X per rectas XH & XL indefinitas:

II. Sit $XO = AB$; $OS = CE$; $XI = GF$:

III. Ducatur OI, & ab S recta SK parallela ad OI: erit IK quæſita;

Etenim

Etenim quoniam OI eſt parallela ad SK, eſt XO: OS = XI : IK (230). Ergo AB : CE = FG : IK.

PROBLEMA II.

Ad rectas AB & CE (fig. 3) *datas, tertiam invenire proportionalem.*

266. RESOLUTIO I. Fiat X ùt in præcedenti:

II. Sit XO = AB; OH = CE = XL:

III. Ducatur OL; deinde HK parallela ad OL: erit LK tertia proportionalis petita: nam erit XO : OH = XL ſeu OH : LK (232). Ergo AB : CE = CE : LK.

PROBLEMA III.

Rectam AB (fig. 4) *datam ſecare eâ proportione, quâ altera* CE *data diviſa eſt.*

267. RESOLUTIO I. Ad extremum A fac angulum quemcumque, per indefinitam AR:

II. In eam transfer partes rectæ CE, ſitque AK = CL; KG = LH; GF = HE:

III. Duc rectam BF; tum à punctis G & K rectas OG & XK parallelas ad BF; eritque AB diviſa in eadem proportione, quâ AF (230), ſeu quâ CE.

PROBLEMA IV.

Inter AB & CE (fig. 5) *Mediam proportionalem invenire.*

268. RESOLUTIO I. AB & CE in eandem rectam ABE jungito:

II. Ex X, puncto medio rectæ AE, mediam peripheriam ducito :

III. In C erige perpendicularem, quam usque in punctum O peripheriæ protrahe ; & erit CO media proportionalis desiderata.

DEMONST. Duc chordas EO & AO, atque concipe integram peripheriam descriptam esse ; angulus EOA, qui mensuratur $\frac{1}{2}$ peripheriæ (138), est 90° : ergo, cùm anguli ad punctum C sint quòque recti, est CO media proportionalis inter AB & EC (247). *Q. e. d.*

PROBLEMA V.

Lineam AB (fig. 6) *datam dividere Mediâ & extremâ ratione.*

269. RESOLUTIO I. Erigatur in A perpendicularis AE, quæ sit $\frac{2}{1}$ — AB :

II. Ex E, ùt centro, intervallo EA, circulus describatur :

III. à B per E ducatur recta BEF :

IV. Sit BK = BG ; eritque AB divisa Mediâ & extremâ ratione.

DEMONST. Quoniam AB tangens est (124), habetur BF : AB = AB : BG (255) ; igitur BF — BA : BA = BA — BG : BG ; est autem BF — BA = BG = BK ; & BA — BK = AK : igitur his substitutis, erit BK : BA = AK : BK, seu *alternando* BA : BK = BK : AK ; ergo AB divisa est mediâ & extremâ ratione (228).

PROBLEMA VI.

Ad punctum A (fig. 7) *angulum* 72° *geometricè construere.*

270. RESOLUTIO I. Lineam AB divide mediâ & extremâ ratione (269) in K; sitque AK pars minor :

II. Ex A item K, intervallo æquali BK, fiant intersectiones in Z :

III. Ducatur ZA; erit A 72°.

DEMONST. Ducantur ZK item ZB : erit KZ = AZ (25), item KZ = BK, ex constructione; ergo BK, KZ & AZ sunt inter se æquales. Quoniam igitur, ex constructione, est AB : BK = BK : AK, erit etiam AB : AZ = AZ : AK; cùm itaque angulus A per latera illa proportionalia constituatur, △ BAZ & ZAK similia sunt (241); ergo K = Z; B = I; sed cùm BK = KZ, est B = L (171); ergo B = I; itaque B $\frac{2}{1}$ — angulo Z; igitur B est etiam $\frac{2}{1}$ — A (nam A = K = Z); sed anguli B + Z + A = 180° (164); ergo A est 72°. *Q. e. d.*

271. SCHOLION. Si angulum 72° bifariam feces; angulum 36° obtinebis; atque hunc bifariam dividens, habebis angulum 18° &c.

PROBLEMA VII.

Super data OX (fig. 8) *construere* △ *simile* △ ABC *dato, sumpto* OX *pro latere homologo* AB.

272. RESOLUTIO. Fiat O = A, X = B, & erit H = C (165); ergo △ XHO est æquiangulum, adeoque simile △ ABC (238).

§. II.

De cæteris Figuris ſimilibus.

THEOREMA I.

Omnia Polygona regularia ejuſdem ſpeciei (adeoque (224) & omnes circuli), ſunt Figuræ ſimiles.

273. Patet evidenter ex definitione polygoni regularis (196), & figurarum ſimilium (229).

THEOREMA II.

In Polygonis regularibus ejuſdem ſpeciei, latera ſunt radiis obliquis atque rectis proportionalia.

274. DEMONST. Sint v. g. duo Hexagona regularia A & B (*fig.* 9). È centro cujuſlibet ductis radiis obliquis, A reſolvitur in ſex △△ congrua inter ſe; ſimiliter B in totidem △△ inter ſe congrua dividitur; eritque ſingulum △ in hexagono A æquiangulum, ergo & ſimile (238), cuilibet △ in hexagono B; igitur eſt AC : BK = CO : XK. OH item XL ſit radius rectus, erit OH altitudo communis omnium △△ polygoni regularis A; & XL erit altitudo communis omnium △△ polygoni regularis B : radios autem rectos ejuſdem polygoni æquales eſſe inter ſe demonſtratum eſt (221) : atqui illæ altitudines, ſeu radii recti, proportionales ſunt lateribus polygoni (243); ergo etiam eſt AC : BK = OH : XL. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

275. Si A & B fuerint polygona regularia ejuſdem ſpeciei, perimeter polygoni A ad perimetrum polygoni B, ùt radius obliquus vel rectus A, ad radium obliquum, vel rectum B. Et è converſo.

COROLLARIUM II.

276. Certa ſumma laterum polygoni A ad eandem ſummam laterum polygoni B, ùt radius obliquus, vel rectus A, ad radium obliquum, vel rectum B. Et è converſo.

COROLLARIUM III.

277. Quoniam Circuli ſunt polygona regularia ejuſdem ſpeciei (225), peripheria circuli A (*fig.* 10) ad peripheriam circuli B, ùt radius A ad radium B; & è converſo.

COROLLARIUM IV.

278. Si arcus AC tot graduum ſit, quot graduum eſt arcus BL, arcus illi proportionales ſunt circulorum radiis. Et è converſo.

COROLLARIUM V.

279. Chordæ AC & BL, quæ arcus illos ſimiles ſubtendunt, quòque proportionales ſunt radiis illorum circulorum : & è converſo.

COROLLARIUM VI.

280. Sector AXCHA etiam ſimilis eſt ſectori BOLFB: tot enim ſunt latera in arcu AHC, quot ſunt latera in arcu BFL; concipiendo itaque, ex X & O, ad illa latera, ductos radios obliquos, quilibet ſector in æquè multa △△ ſimilia reſolvetur.

COROLLARIUM VII.

281. Et quoniam △ AXC ſimile eſt △ BOL, ſegmentum ACHA ſimile eſt ſegmento BLFB.

THEOREMA III.

Polygona quæcumque ſimilia, ſi reſolvantur in △△, per diagonales ad angulos homologos ductas, erunt △△ homologa ſimilia.

282. Si duo Pentagona (*fig.* 11) ſimilia fuerint, ita ut A = *a*, B = *b*, C = *c*, E = *e*, F = *f*; & præterea ſit AB : *ab* = BC : *bc* = CE : *ce* = EF : *ef* = FA : *fa*; ductis diagonalibus AC, *ac*, AE, *ae*; dico △ ABC ſimile △ *abc*; △ ACE ſimile △ *ace*; & △ AEF ſimile △ *aef*.

DEMONST. Quoniam B = *b*, hique anguli formantur per latera proportionalia, △△ ABC & *abc* ſunt ſimilia (241); pariter, cum anguli F & *f*, inter ſe æquales ex hypotheſi, conſtituantur per latera proportionalia, △ AFE ſimile eſt △ *afe* (241); eſt igitur angulus ACB = angulo *acb*; & angulus AEF = angulo *aef*; quoniam igitur, ex hypotheſi, eſt C = *c* & E = *e*, erit angulus ACE = angulo *ace*, & angulus AEC = angulo *aec*; adeoque angulus EAC = angulo *eac* (165); igitur △ ACE eſt æquiangulum, adeoque (238) ſimile △ *ace*. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

È converſò : ſi duo Polygona quæcumque in æquè multa △△ ſimilia reſolvi queant, Polygona ſimilia ſunt.

283. DEMONST. Propter angulos æquales △△ ſimilium, etiam anguli polygonorum æquales erunt; & quoniam latera iſtorum polygonorum ſunt quòque latera iſtorum △△ ſimilium, etiam polygonorum latera homologa proportionalia ſint oportet; igitur & ipſa polygona ſimilia ſunt (229). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

Super data recta HG (fig. 12) *construere figuram similem* ABCF, *sumpto* HG *pro latere homologo lateris* AB.

284. RESOLUTIO I. Ducatur diagonalis AC :

II. Fiat angulus HGI = BAC; item angulus IGK = CAF, ducendo GI & GK huc usque indefinitas; aut potiùs lineæ istæ occultè, v. g. plumbagine, vel cuspide, leviter exarentur.

III. Fiat H = B; atque in I, ubi recta HI occurrit diagonali GI, fiat angulus GIK = angulo ACF; & erit □ GHIK simile □ ABCF : constat enim duobus △△ æquiangulis, seu similibus, duobus △△ quadrilateri ABCF.

PROBLEMA II.

Super recta ce (fig. 11), *ùt latere homologo ad* CE, *Pentagonum construere simile* ABCEF *dato.*

285. RESOLUTIO. Ductis diagonalibus AC & AE, fac △ *cae* simile △ CAE: deinde △ *cba* simile △ CBA; & tandem △ *efa* simile △ EFA; eritque *abcef* pentagonum quæsitum (283).

SECTIO SECUNDA
DE SUPERFICIEBUS.

SPectavimus hùc usque Polygona ùt figuras, agendo de lineis atque angulis, quibus terminantur: nunc de iis agendum, 1° quâ *Magnitudinibus*, 2° quâ *Planis*.

CAPUT PRIMUM
DE SUPERFICIEBUS QUA MAGNITUDINIBUS.

DEFINITIO I.

286. *Superficies* est extensio, in qua binæ Dimensiones, Longitudo scilicet atque Latitudo considerantur; generaturque, dum Linea à termino ad terminum movetur.

COROLLARIUM.

287. Nullam proinde Profunditatem habet; neque ejus extrema extensa dici possunt in latum.

DEFINITIO II.

288. *Area* seu *Superficies Figuræ* est quantitas, quæ magnitudinem Spatii, lateribus figuræ comprehensi, exprimit.

DEFINITIO III.

289. *Altitudo* Parallelogrammi aut Trappezoïdis, est Perpendicularis, ab uno latere parallelo ad aliud demissa.

DEFINITIO IV.

290. Figuræ dicuntur habere *eandem Altitudinem*, cùm inter easdem parallelas constituta sunt, aut constitui possunt.

COROL-

COROLLARIUM.

291. Omnia igitur △△ vertice communicantia, & quorum baſes eidem rectæ inſiſtunt (ùt △△ AOC & AOB *fig.* 16 TAB. V.) eandem altitudinem habent: ductâ enim per verticem A parallelâ ad BC, inter eaſdem parallelas △△ illa conſtituta forent.

ARTICULUS I.

De methodo generali Metiendi Superficies.

HYPOTHESIS.

292. Si AB (*fig.* 13) ad BC perpendicularis, motu ſibi parallelo ita moveri concipiatur, ut punctum B rectam BC percurrat; in deſcripta Superficie ABCF rectangulari, toties eſt invenire rectam AB, quot ſunt puncta in recta BC.

COROLLARIUM I.

293. Igitur Area □ Rectangularis habetur, unum latus in aliud contiguum ducendo.

COROLLARIUM II.

294. Quoniam verò in Quadrato latera quæcumque æqualia ſunt, ducendo unum latus in ſe ipſum, Area Quadrati obtinetur.

295. SCHOL. Quemadmodùm menſuræ Linearum ſunt minores lineæ notæ, v. g. *Virga* (quæ in Brabantia = 20 pedibus); *Hexapeda* (quæ in Gallia = 6 pedibus); *Decempeda* adæquans 10 pedes &c.; quæ menſuræ inſuper ſubdividuntur in pedes, pes in pollices &c.; ita menſuræ ſuperficierum ſunt minores Superficies quadratæ cognitæ. V. g. ſi ABCF (*fig.* 14) Quadratum ſit, atque AB duos pedes æquet, erit Superficies, ſeu Area ABCF quatuor *pedum Quadratorum*: etenim ductis EG atque KL, quæ latera quadrati bifariam ſecent, exurgent quatuor minora Quadrata, lateraque ſinguli pedem æquabunt: & quoniam quilibet pes hìc ſoleat dividi in 10 partes æquales, quæ *Pollices*

audiunt, diviso quolibet latere Quadrati KBEO in 10 pollices, ductisque lineis, ùt vides, patet quemlibet pedem quadratum 100 continere pollices quadratos. Quemlibet pollicem subdividimus in 10 lineas, atque adeo quilibet pollex quadratus 100 lineas quadratas continet: igitur Pes quadratus 1000 lineas quadratas complectitur &c.

THEOREMA I.

Area Rhombi, aut Rhomboïdis ABFH (fig. 1, 2 & 3 TAB. VII.), *est æquale* □ *rectangulari* ABCG *formato super basi* AB *&* *altitudine* AG.

296. DEMONST. Inter perpendiculares AG & BC una v. g. AG cadit in F (ùt *fig.* 1), vel inter H & F (ùt *fig.* 2); vel ultrà F (ut *fig.* 3); □ ABCG, quoniam anguli quilibet oppositi æquales sunt (sunt enim recti omnes), est symmetricum (208); igitur BC=AG (194): ergo △ BCF congruit cum △ AGH (190): etenim angulus BCF est æqualis angulo AGH (sunt enim ambo recti); angulus CFB = H, cum AH sit parallela BF (108); itaque angulus CBF = angulo GAH (165); sunt igitur duo illa △△ quòque æqualia; addendo igitur singulo, in *fig.* 1 eandem partem communem AFB; & in *fig.* 2 partem AGFB, erit □ rectangulare ABCG = parallelogrammo ABFH. In figura verò 3, △△ BCF, & AGH commune habent △ GXF; ergo □ BCGX = AXFH; addendo ergo utrique △ AXB, □ rectangulare ABCG est = parallelogrammo ABFH. *Q. e. d.*

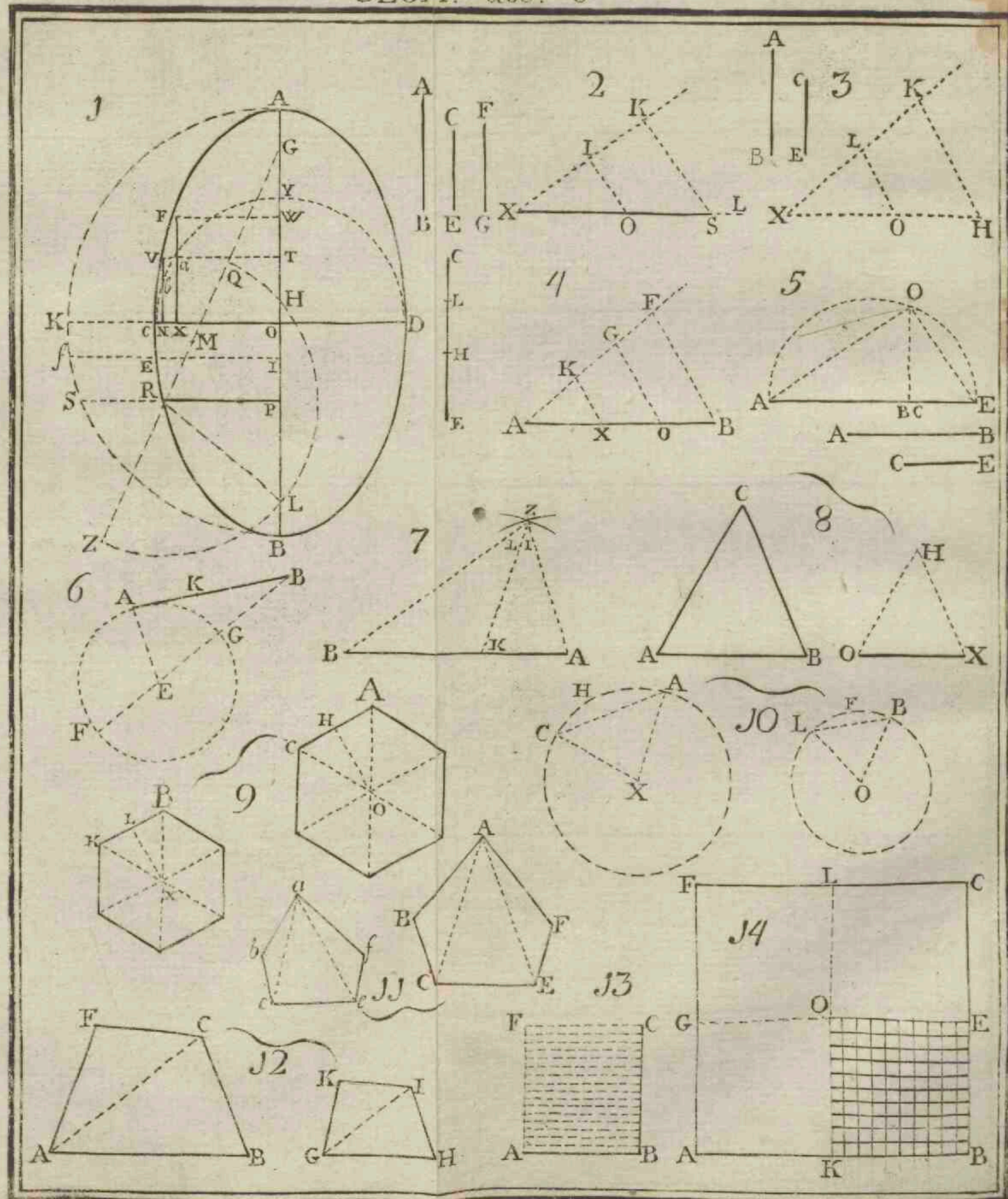
COROLLARIUM.

297. Igitur ducendo basin AB in altitudinem AG, prodit area ABFH (293).

THEOREMA II.

Area △ *est æqualis dimidio facti baseos in altitudinem.*

298. Dico aream △ ABC (*fig.* 4) esse $\frac{1}{2}$ — producto basis BC per perpendicularem AO.



C.H.Becher f: Lov:

DEMONST. Duc AF parallelam CB, & BF parallelam ad AC, erit ACBF parallelogrammum (198) $\frac{2}{1}$ + △ ABC (206); atqui area ACBF eſt = facto baſeos AB in perpendicularem v. g. AO (297); ergo area △ ABC = $\frac{1}{2}$ BC × AO. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Area Trappezoïdis eſt $\frac{2}{1}$ — facto altitudinis in baſes parallelas.

299. Si fuerit ABCG (*fig.* 5) trappezoïs, ſic ut AG & BC ſint parallelæ, ſitque GO v. g. ejuſdem altitudo : area illius erit = $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AG × GO.

DEMONST. Ductâ diagonali BG, area △ BCG = $\frac{1}{2}$ BC × GO; & area △ BAG = $\frac{1}{2}$ AG × GO (298); ergo area utriuſque △ ſimul, ſeu ABCG = $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AG × GO. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Area Polygoni regularis eſt = $\frac{1}{2}$ producti Radii recti per Perimetrum figuræ.

300. DEMONST. È Centro Polygoni concipe ad angulum quemlibet Polygoni ductos radios obliquos; in totidem △△ fuerit reſolutum polygonum, quot ſunt ejuſdem latera; eritque area cujuſque △ $\frac{1}{2}$ facti baſeos in altitudinem; jam verò altitudo omnium △△ eſt = radio recto (patet ex demonſtratione ad numerum 222); igitur omnium △△, ſeu polygoni area, eſt = $\frac{1}{2}$ producti omnium laterum per radium rectum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

301. Quoniam igitur Circulus polygonum eſt regulare (225), atque ejuſdem radius rectus ab obliquo

haud differt; eſt area Circuli $= \frac{1}{2}$ facti peripheriæ in radium.

302. SCHOLION I. Circuli omnes inter ſe ſimiles ſunt (273); ſunt ergo peripheriæ omnes radiis ſeu diametris ſuis proportionales; hoc eſt, quæ eſt ratio unius circuli ad radium aut diametrum ſuam, eadem ſit oportet circuli cujuſcumque ad radium aut diametrum ſuam. Quæ verò ea ſit, exactè hùc uſque non innotuit: propè verùm tamen, rationem peripheriæ ad diametrum ſtatuit *Archimedes* 22 : 7. exactiùs alii 314 : 100; aut in majoribus circulis, ubi de minimis curandum eſt, 31416 : 10000. de quibus poſtea.

303. SCHOLION II. Dum dicitur *Circuli Quadraturam adinventam hùc uſque non eſſe;* hoc unicè vult, determinatam non eſſe in numeris proportionem inter peripheriam & diametrum; neque lineam rectam aſſignari poſſe, quæ ſit peripheriæ Circuli dati æqualis: ſi enim ea probari poſſit, quærendo mediam proportionalem inter peripheriam & $\frac{1}{2}$ radii, & ſuper ea formando Quadratum, erit hoc Circulo dato æquale.

THEOREMA V.

Area Sectoris eſt $= \frac{1}{2}$ producti arcûs ſectoris per $\frac{1}{2}$ radii.

304. DEMONST. Concipe Sectoris arcum diviſum in infinitas partes æquales, & è circuli Centro ad has partes radios ductos; in infinitè parva △△ ſectorem diviſeris: omnium illorum △△ baſis erit arcus ſectoris, communis verò altitudo erit circuli radius; atqui cujuſque △ area eſt $= \frac{1}{2}$ producti baſeos per altitudinem; ergo omnium area, quæ & ſectoris area eſt, $= \frac{1}{2}$ producti arcûs ſectoris per radium. *Q. e. d.*

PROBLEMA.

Circuli Segmentum ABKA (fig. 6) *inquirere.*

305. RESOLUTIO I. Inquire aream ſectoris AXBKA:

II. Dein aream △ AXB, hancque ſubducito ex area ſectoris, reſiduum eſt area ſegmenti.

ARTICULUS II.

De Ratione Arearum.

THEOREMA I.

Quarumcumque figurarum Areæ ſunt inter ſe in ratione compoſita dimenſionum è quarum facto prodeunt.

306. V. G. triangulum A eſt ad triangulum B, ſicuti $\frac{1}{2}$ producti baſeos A per altitudinem A, eſt ad $\frac{1}{2}$ producti baſeos B per altitudinem B; & conſequenter ſicuti factum baſeos A in altitudinem A, eſt ad factum baſeos B in altitudinem B.

COROLLARIUM I.

307. Igitur △△ ejuſdem altitudinis ſunt ſicuti baſes.

COROLLARIUM II.

308. △△ habentia eandem baſin, vel æquales baſes, ſunt ùt altitudines.

COROLLARIUM III.

309. Parallelogramma æqualis altitudinis & baſis, æqualia ſunt.

COROLLARIUM IV.

310. Parallelogramma æqualis altitudinis ſunt ùt baſes; & ſi fuerint æqualis baſeos, ſunt ùt altitudines.

COROLLARIUM V.

311. Si binæ dimenſiones, è quarum facto figuræ area prodit, ſint *reciprocè proportionales*, areæ æquales ſunt. V. G. ſi in duobus △△, aut duobus parallelogrammis, baſis primi ſit ad baſin ſecundi, ùt altitudo

ſecundi ad altitudinem primi; quoniam quatuor illi termini ſunt proportionales; eſt factum primi in ultimum = facto ſecundi in tertium; jam verò primum factum dat duplum areæ primi trianguli, aut ſemel aream primi parallelogrammi; & ſecundum factum dat duplum areæ ſecundi trianguli, aut ſemel aream ſecundi parallelogrammi; ergo &c.

PROBLEMA II.

△△ habentia unum angulum æqualem, ſunt inter ſe in ratione compoſita laterum angulos iſtos æquales conſtituentium.

312. Dico, ſi (*fig.* 7) $X = C$; $\triangle\ ABC : \triangle\ OZX = AC \times BC : OX \times XZ$.

DEMONST. Sint v. g. AI & OK altitudines △△; erit $AC : OX = AI : OK$ (244); igitur $CB \times AC : XZ \times OX = CB \times AI : XZ \times OK$; jam verò $CB \times AI =$ bis areæ ABC; & $XZ \times OK =$ bis areæ OZX; ergo bis $\triangle$ ABC : bis $\triangle$ $OZX = CB \times AC : XZ \times OX$; igitur $\triangle$ ABC : $\triangle$ $OZX = CB \times AC : XZ \times OX$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

313. Dum igitur duo Parallelogramma habent unum angulum æqualem, quoniam ea ſunt inter ſe, ſicut △△ in quæ dividerentur ductis diagonalibus ex reſtantibus angulis, Parallelogramma illa erunt inter ſe ùt rectangula, ſeu producta, laterum angulos iſtos æquales reſpectivè conſtituentium.

COROLLARIUM II.

314. Si itaque duo △△ aut parallelogramma habeant unum angulum æqualem, formatum per latera *reciproca*, ea = ſunt. V. G. ſi ſit (*fig.* 7) $X = C$; & $AC : OX = XZ : CB$, erunt △△ æqualia : erit enim $AC \times CB = OX \times XZ$ (312).

THEOREMA III.

ΔΔ ſimilia ſunt inter ſe in ratione duplicata (ſeu ùt quadrata) laterum homologorum.

315. Si (*fig.* 8) ſit $A = a$, $B = b$, $C = c$; dico $\Delta\ ABC : abc = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$.

DEMONST. Quoniam $A = a$, $\Delta\ ABC : \Delta\ abc = AB \times AC : ab \times ac$ (312); ſed quoniam $AB : AC = ab : ac$ (238), eſt $AB \times AC : ab \times ac = AB \times AB : ab \times ab$; igitur $\Delta\ ABC : \Delta\ abc = AB^2 : ab^2$; ſed propter ΔΔ ſimilia eſt $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$. Ergo ΔΔ ſimilia ſunt inter ſe ùt quadrata laterum homologorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

316. Quæcumque figuræ ſimiles in æqualem numerum ΔΔ ſimilium reſolvi poſſunt (282), lateraque ſingula perimetri homologa (quæ omnia inter ſe ſunt in eadem ratione) erunt baſes atque latera homologa illorum ΔΔ; igitur quæcumque figuræ ſimiles ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum homologorum.

COROLLARIUM II.

317. Et quoniam Circuli omnes ſimiles ſunt, atque in iis dimenſiones homologæ ſunt Peripheria, Diameter item Radius; Circuli omnes ſunt inter ſe ùt quadrata peripheriarum, diametrorum, aut radiorum; imò etiam ùt quadrata arcuum ſimilium, aut chordarum eoſdem ſubtendentium : illi enim ſunt proportionales peripheriis, hæ verò circulorum radiis.

CAPUT II.

DE PROPRIETATIBUS SUPERFICIERUM PLANARUM.

318. Lineas omnes, ùt in eodem Plano constitutas, hùc usque suppositum fuit, uti præmonuimus (6); nunc agendum de situ quocumque Lineæ aut Plani, ad superficiem planam.

HYPOTHESIS I.

319. Concipe rectam BC (*fig.* 9) liberè in aëre pendulam, ad quam XA perpendicularis sit, circa se ipsam, ùt axi, ita moveri, ut puncta B & C situm nullatenus mutent: recta AX describet superficiem planam AGKLA, eritque recta BC *ad* illud *Planum Perpendicularis*.

COROLLARIUM I.

320. Dum igitur recta, v. g. BX, perpendicularis est ad planum quoddam datum, ea quòque perpendicularis est ad rectam quamlibet in plano ductam per X. Et è converso: si qua recta, v. g. BX sit perpendicularis ad rectas omnes, in plano per X ductas, erit recta BX *ad planum perpendicularis*.

COROLLARIUM II.

321. In eodem plani puncto, unica potest erigi; & à puncto extra planum dato, ad planum unica demitti perpendicularis.

COROLLARIUM III.

322. Perpendicularis brevissima est, quæ à puncto dato ad planum datum demitti potest; atque adeo puncti à plano distantia, perpendiculari investiganda est.

COROL-

Corollarium IV.

323. Omnes perpendiculares ad idem planum ſunt inter ſe parallelæ: concipe enim per eorumdem extrema in plano rectam trajici; erunt anguli correſpondentes (cùm recti ſint) æquales.

Corollarium V.

324. Rectæ cujuſcumque in plano ductæ, nequit pars una eſſe in plano, pars altera infra aut ſupra: ſi duo igitur ejuſdem rectæ puncta fuerint in plano, tota recta in plano erit; quoniam duo illa puncta illius rectæ ſitum determinant (12).

Theorema I.

Tria puncta, v. g. A, B, C (fig. 10), *quæ non conſiſtunt in eadem recta, Plani ſitum determinant.*

325. Demonst. Puncta illa rectis AB, BC & CA connectantur; tum finge rectam AB per ſingula puncta rectarum BC & AC moveri; cùm ad C pervenerit, Aream ſeu Planum trianguli ABC luſtraverit; eruntque rectæ illæ omnes, adeoque & tota ſuperficies △ ABC, eidem plano, quo continentur puncta A, B & C, inſiſtentes; immo in quemcumque ſenſum rectas illas protraxeris, eidem plano conſtanter inſiſtant oportet (324); igitur tria puncta non in directum poſita, plani ſitum determinant. *Q. e. d.*

Corollarium I.

326. Si verò in eadem recta conſiſterent, plani ſitus non innoteſceret: tunc enim per tria illa puncta poſſet recta trajici, atque ſecundùm hanc ſupponi aliud planum attingere; jam verò poſſet alteri plano ſic eſſe contiguum ſub inclinatione quacumque; ergo ejuſdem ſitus minimè determinaretur.

COROLLARIUM II.

327. Tria puncta, quæ non consistunt in eadem linea recta, nequeunt esse diversis planis communia : si enim forent diversis planis communia; quoniam cujusque plani situm determinarent (325), deberet cujusque plani positio eadem esse, atque incidere cum positione alterius; quod est contrà hypothesin.

COROLLARIUM III.

328. Ergo intersectio duorum planorum est linea recta : intersectio enim puncta erunt diversis planis communia; atqui puncta illa non possunt non esse in eadem recta (327); ergo &c.

THEOREMA II.

Duæ rectæ quæcumque, sese intersecantes, sunt in eodem Plano.

329. Dico rectas AC & BF (*fig.* 11) esse in eodem plano.

DEMONST. Per puncta A, B & F determinatur situs plani, per tria illa puncta ducti (325); quoniam verò puncta F & B futura sunt in isto plano, tota recta FB in eo quòque erit (324); ergo & punctum O erit in eodem plano; igitur AC & BF sunt in eodem plano (325). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS II.

330. Sit Planum ABRL (*fig.* 12), atque huic aliud FCHG ita superimpositum, ut cum ABCF, in initio, coincidat (immò, quoniam profunditate plana destituantur (287), unum & idem constituant planum ABCF). Punctis C & F manentibus immotis, seu super recta CF ut axi, planum superius volvi finge, donec ad oppositam partem CRLF pertingat, atque cum eo coincidat.

COROLLARIUM I.

331. Vicini anguli, per planum mobile & immobile formati, faciunt ſimul 180°.

COROLLARIUM II.

332. Angulum rectum, ſeu 90°, plana conſtituent, ſive erit unum ad aliud *perpendiculare*, dum planum mobile ita diſpoſitum fuerit, ut non magis in AB, quàm in RL propendeat; ſeu dum punctum H mediam peripheriam deſcripſerit.

COROLLARIUM III.

333. Dum bina plana ſeſe interſecant, anguli ad verticem oppoſiti æquales ſunt.

COROLLARIUM IV.

334. Omnes anguli ad eandem rectam ejuſdem plani, tot quot conſtitui poſſunt per diverſa plana, faciunt ſimul 360°.

THEOREMA III.

Si duo Plana ſint inter ſe parallela, Perpendicularis ad unum, eſt quòque talis ad aliud; & ſi qua recta ad duo Plana ſit Perpendicularis, Plana illa inter ſe parallela ſunt.

335. DEMONST. 1ª pars. Ut duo plana ſint inter ſe parallela, ea ubique æqualiter à ſeſe mutuo diſtent oportet, & quantumvis producta concurrere nequeunt; rectæ igitur omnes in uno plano ductæ, nunquam poterunt concurrere cum ulla recta, in altero plano ducta: pone igitur duci rectas, in eandem directionem, per perpendicularis extrema, erunt illæ inter ſe parallelæ; atque adeo anguli adjacentes interni facient ſimul 180° (110); quoniam itaque recta illa angulum 90° con-

ſtituat cum quibuſvis rectis in uno plano per ejus extremum ductis (320), conſtituet quòque angulum 90°, ſeu rectum, cum quibuſvis rectis, in altero plano ductis, per aliud iſtius rectæ extremum, & parallelis reſpectu rectarum prioris plani; igitur perpendicularis illa erit quòque talis ad aliud planum (320). Quod eſt primum.

DEMONST. 2da pars. Recta illa erit perpendicularis ad rectas quaſlibet, in quovis plano per ejus extrema trajectas (320); concipe igitur, hinc inde, duci per extrema illa tot lineas, quot opus eſt, ut utrumque planum tegatur; oppoſitæ quælibet duæ, in eandem directionem ductæ, erunt inter ſe parallelæ (115); ergo & illa plana, quantumvis producta, nunquam concurrent; igitur parallela ſunt. Quod eſt ſecundum.

THEOREMA IV.

336. *Perpendiculares quælibet, inter duo Plana parallela ductæ, æquales ſunt.*

THEOREMA V.

337. *Tria, vel plura Plana parallela ſecant eandem rectam in partes proportionales diſtantiæ ſuæ à ſe mutuo.*

COROLLARIUM.

338. Dum igitur diverſas rectas interſecant, partes interceptæ inter plana parallela proportionales ſunt inter ſe.

THEOREMA VI.

339. *Si duo Plana parallela ſecent idem tertium, anguli correſpondentes æquales ſunt. Adjacentes = 180° &c. cæteraque fiunt, ùt in lineis parallelis, quæ concipiuntur duci, hinc inde, per extrema rectæ, ab uno ad aliud Planum ductæ.*

SECTIO TERTIA

DE SOLIDIS.

DEFINITIO I.

340. *Corpus*, ſive *Solidum*, extenſum eſt, tribus dimenſionibus, *Longitudine*, *Latitudine*, atque *Profunditate* præditum.

DEFINITIO II.

341. *Angulus ſolidus* is eſt, qui componitur pluribus quàm duobus angulis planis, in eodem plano non conſiſtentibus, ad idem tamen punctum, ſeu *Verticem* conſtitutis.

342. SCHOLION. Duo anguli plani *Mucronem*, ſeu *Apicem*, ſive *Angulum ſolidum* conſtituere nequeunt; at neceſſariò ſpatium aliquod circa verticem relinquent vacuum, quod tertio plano occludendum eſt; tribus adeoque ad minùs angulis planis opus eſt, ad conſtituendum angulum ſolidum.

DEFINITIO III.

343. Duo anguli ſolidi æquales ſunt, dum inter ſe invicem poſiti congruunt.

COROLLARIUM.

344. Atque adeo angulis planis, & multitudine, & magnitudine æqualibus, ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent.

345. SCHOLION. De angulis ſolidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo eſt ratiocinandum, ac de angulis planis, qui ex linearum concurſu, ſeu inclinatione ortum ducunt.

DEFINITIO IV.

346. Solida ſuperficiebus planis terminata *Polyëdra* compellantur: atque, pro ùt vel 4, 5, 6 &c. planis

concluduntur, *Tetraëdrum*, *Pentaëdrum*, *Hexaëdrum* &c. indigitantur.

DEFINITIO V.

347. *Polyëdra Regularia* ſunt ſolida, quorum omnes anguli ſunt æquales, atque polygonis regularibus & congruis terminantur.

DEFINITIO VI.

348. *Baſis ſolidi* eſt ſuperficies, cui ſolidum inſiſtere concipitur.

DEFINITIO VII.

349. *Altitudo* Corporis eſt Perpendicularis à vertice Corporis ad baſin (productam, ſi opus) demiſſa.

CAPUT PRIMUM.

DE GENESI SOLIDORUM; ANGULIS SOLIDIS, ATQUE POLYEDRIS.

ARTICULUS I.

De Geneſi Solidorum.

350. Duplici modo generari Solida concipimus : 1° per motum rectilineum plani ſibi ſemper paralleli : 2° per motum rotationis figuræ ſuper recta quadam ùt *Axi*.

§. I.

De Geneſi Solidorum per motum rectilineum.

HYPOTHESIS.

351. Si figura quæcumque plana AB (*fig.* 13, 14, 15, 16, 17, 18 &c.), conſtanter ſibi manens parallela,

juxta ductum rectæ BC (quæ *Directrix* audit) moveatur; *Corpus*, seu *Solidum*, exurgit, quod *Prisma* vocatur, si *Basis* AB rectilinea fuerit (ut in *fig.* 13, 14, 15 & 16); *Cylindrus* verò, si *Basis* AB Circulus sit (ut in *fig.* 17 & 18).

352. SCHOLION. Superficies plana KL, quæ ad alteram AB parallela est & congrua, etiam *Basis* Corporis compellatur.

COROLLARIUM.

353. Non solùm oppositæ Bases in Prismate atque Cylindro, modò progenitis, congruæ sunt; sed & sectiones quæcumque parallelæ ad basin, congruæ basibus sint oportet.

DEFINITIO I.

354. *Prisma* itaque est *Corpus*, seu *Solidum*, basibus rectilineis, congruis & parallelis, & lateraliter Parallelogrammis terminatum.

DEFINITIO II.

355. *Cylindrus* Corpus est, terminatum binâ basi circulari parallelâ & congruâ, & lateraliter convexitate circulari, cujus diametri, basi parallelæ, ubique diametro basis æquales sunt; sic ut linea, per omnium diametrorum Centra transiens, quæ *Axis* vocatur, recta fuerit.

356. SCHOLION. Cylindrum spectare licet instar *Prismatis infinitanguli*: etenim, cùm circulus haberi possit tamquàm polygonum regulare infinitis lateribus rectis constans; tali modo peripheriam cujusque basis concipiendo divisam, atque à singulis punctis peripheriæ unius ad singula correspondentia puncta alterius, rectas mente ducendo, Corpus exurget basibus rectilineis congruis & parallelis, & lateraliter parallelogrammis terminatum; licet ergo illud appellare prisma infinitangulum (354).

DEFINITIO III.

357. Prisma dicitur *Rectum*, item Cylindrus *Rectus* audit, dum linea directrix ad basin est *Perpendicularis*;

Obliqua verò vocantur illa Corpora, si fuerit linea *directrix* ad basin obliqua.

DEFINITIO IV.

358. Prisma, à Basi sua, specialia sortitur nomina: dicitur enim *Prisma Triangulare*, si basis fuerit △; *Quadrangulare* si fuerit □; *Pentagonale* si fuerit Pentagonum &c.

DEFINITIO V.

359. Vocatur *Parallelepipedum*, si basin habuerit Parallelogrammum; & tunc si fuerit basis rectangularis, atque prisma *Rectum* sit, *Parallelepipedum Rectangulum* audit.

DEFINITIO VI.

360. Si fuerit basis Quadratum, & Prisma rectum; & præterea linea *directrix* (quæ hic æqualis est prismatis *Altitudini*), fuerit æqualis lateri Baseos; nomine speciali *Cubus*, vel *Hexaëdrum* indigitatur.

HYPOTHESIS II.

361. Si figura quæcumque plana AC, seu Rectilinea, seu Circularis (*fig.* 19, 20, 21 & 22), sibi semper parallela, ita moveatur juxta ductum rectæ BX (ad punctum X, medium figuræ, perpendiculariter aut obliquè demissæ), ut punctum illud figuræ, constanter rectæ BX insistat; & præterea singulo progressuum instanti latera figuræ decrescant tali progressione arithmeticâ, ut, cùm figura ad B pervenerit, eadem latera puncti instar evanuerint; Solidum figurâ rectilineâ progenitum *Pyramis*, & basi circulari prodiens, *Conus* compellatur.

COROLLARIUM.

362. Ubivis ergo Pyramidem, vel Conum, sectione parallela ad basin, secari singas; erunt sectiones figuræ basi similes.

DEFI-

DEFINITIO I.

363. *Pyramis* adeò corpus eſt in cuſpidem deſinens, cujus baſis eſt Figura Rectilinea, Plana verò lateralia totidem △△ quot ſunt baſeos latera (*fig.* 19 & 20).

DEFINITIO II.

364. *Conus* eſt ſolidum in cuſpidem quòque deſinens, pro baſi Circulum habens; lateraliter verò convexitatis circularis Diametris, baſi parallelis, continuò decreſcentibus proportione arithmeticâ; ut & præterea linea, per diametrorum Centra tranſiens, recta fuerit (*fig.* 21 & 22).

365. SCHOLION. Conum pro Pyramide, cujus baſis figura eſt rectilinea infinitè parvis lateribus conſtans, ſpectari poteſt: etenim à vertice ad ſingula peripheriæ baſeos puncta rectas concipiendo ductas, *Pyramidem infinitangulam* habebis.

DEFINITIO III.

366. Recta BX (*fig.* 21 & 22), à Vertice ad Coni centrum ducta, Coni *Axis* audit; atque, proùt ad baſin fuerit perpendicularis, vel obliqua, *Conus Rectus*, aut *Obliquus*, dicitur.

DEFINITIO IV.

367. *Pyramis*, à baſi, quæ △, □, vel Pentagonum &c. fuerit, *Triangularis*, *Quadrangularis*, *Pentagonalis* &c. denominatur.

HYPOTHESIS III.

368. Si in Pyramidis, aut Coni, geneſi, Plani motus ſiſtatur, priuſquàm ad verticem pertingat, ſeu antequàm baſeos latera evaneſcant, *Pyramis truncata* vocatur Corpus progenitum, ſi fuerit baſis figura rectilinea, ùt ACHG (*fig.* 1 TAB. VIII); *Conus* verò *truncatus*, ſi baſis circularis exiſtat; ùt ACHG (*fig.* 2): quod autem Solidum formari concipitur præter dic-

tum Corpus truncatum, motu ad verticem usque protracto, dicitur *Pyramis abscissa*, ùt BHG (*fig.* 1), vel *Conus abscissus*, ùt BHG (*fig.* 2).

§. II.

De Genesi Solidorum quæ fiunt motu Circulari.

HYPOTHESIS I.

369. Quadrilaterum rectangulare ABXO (*fig.* 3), super XO, ùt axi, rotetur: rectæ XB, OA, & quæcumque intermediæ, prioribus parallelæ, erunt radii Circulorum æqualium & parallelorum, formabiturque *Cylindrus rectus*, cujus *Axis* est XO (355, & 357).

HYPOTHESIS II.

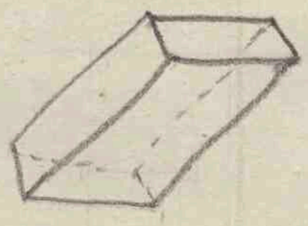
370. Si △ ABC (*fig.* 4), in quo A rectus est, super uno Cathetorum v. g. AC, ùt axi, gyretur, exurget *Conus rectus* (364 & 366). Hypothenusa BC, (quæ est æqualis cuilibet rectæ, à vertice Coni recti ad aliquod peripheriæ basis punctum ductæ), *Latus Coni recti* vocatur.

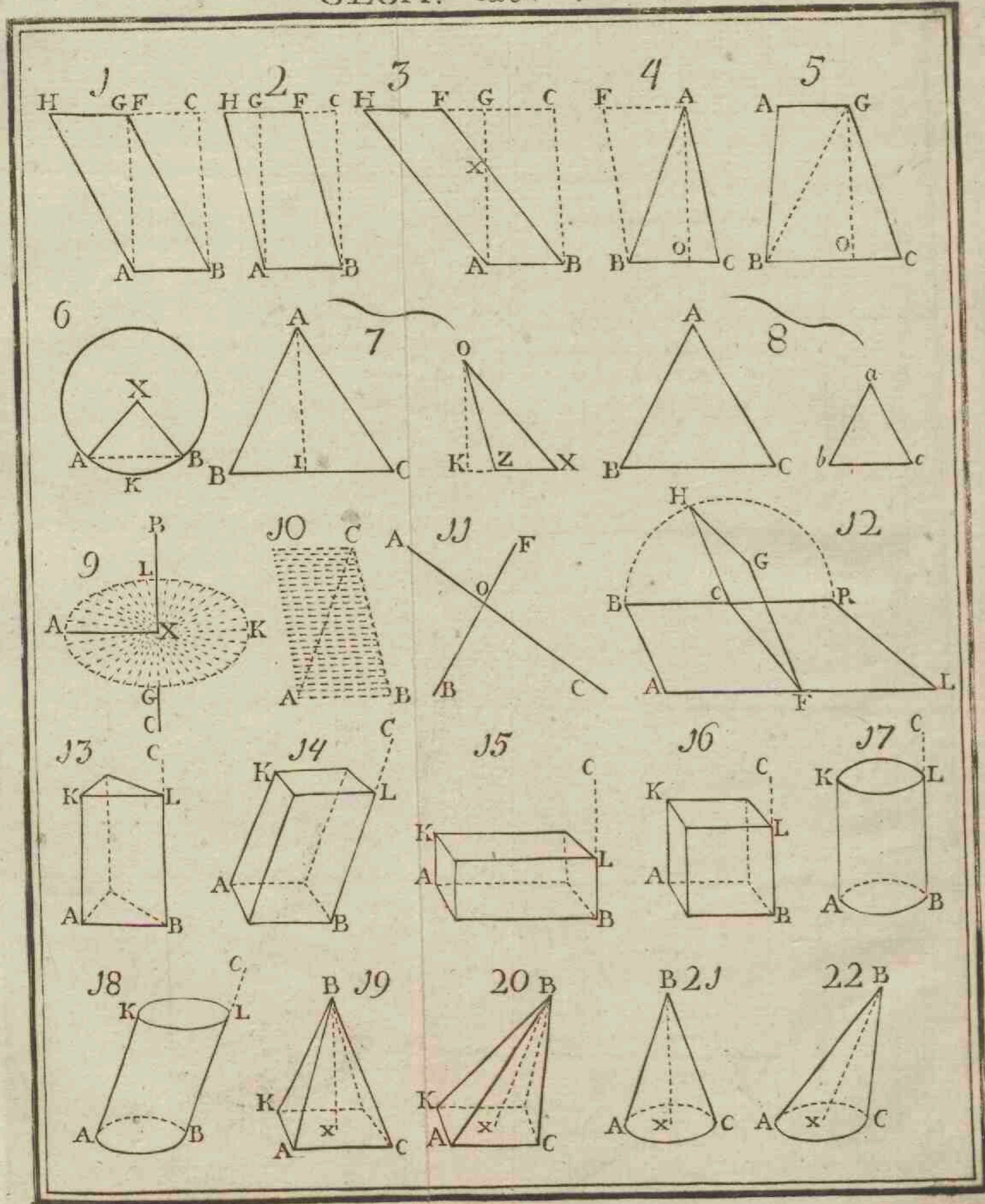
HYPOTHESIS III.

371. Si Trappezoïs rectangularis ABKX (*fig.* 5), in qua A item X rectus est, super AX circumvolvatur, *Conus truncatus* enascitur. Et productis AX & BK usque in L, ubi concurrunt (supposito quòd latus XK sit latere AB minus); circumvolutione △ rectanguli LXK, formatum concipe *Conum abscissum* (368). KB *Coni truncati Latus* compellatur.

HYPOTHESIS IV.

372. Medium Circulum ACB (*fig.* 6) super Diametro sua AB, ùt axi, circumvolvi finge, gignitur Corpus, quod *Globus* vel *Sphæra* audit.





C. I. Becker f. Lov.

Definitio I.

373. *Sphæra* itaque Corpus eſt, cujus ſingula ſuperficiei puncta, æqualiter diſtant à puncto quodam medio, v. g. X, quod *Centrum* Sphæræ dicitur.

Definitio II.

374. Recta AB, ſuper qua circumvolutio facta ponitur, *Axis* ſphæræ audit.

Definitio III.

375. Rectæ omnes, utrimque in ſphæræ ſuperficie terminatæ, & per ſphæræ Centrum trajectæ, *Diametri* ſphæræ compellantur.

Corollarium I.

376. Igitur omnes ejuſdem ſphæræ, aut æqualium ſphærarum Diametri, inter ſe æquales ſint oportet.

Corollarium II.

377. Quælibet Diameter ſphæræ haberi poteſt pro Axi ejuſdem : ſuper ea enim factâ revolutione medii circuli, in cujus plano fuerit illa diameter, eadem ſemper ſphæra prodit.

ARTICULUS II.

De Angulis ſolidis atque Polyëdris.

§. I.

De Angulis ſolidis.

THEOREMA I.

Maximus angulorum planorum, quibus componitur angulus ſolidus, minor eſt ſummâ reliquorum.

378. Dico angulum CAB (*fig.* 7) eſſe minorem angulo CAG + angulo BAG.

DEMONST. Concipe planum CAG, item BAG plicari ita, ut cadant in planum CAB; si foret angulus CAB æqualis duobus aliis simul sumptis, deberent plana CAG & BAG ita tegere planum CAB, ut per rectam AG sese contingerent; si verò foret angulus CAB major reliquis duobus, plana CAG & BAG ita inciderent in planum CAB, ut tertius angulus planus mediaret; utrumque autem implicat: etenim hôc posito, quoniam elevatione planorum CAG & BAG super AC & AB manentibus immotis, ea à sese separari necesse est, non possent per AG sese mutuò contingere. Ergo angulus CAB minor est reliquis, quibuscum angulum A solidum constituit. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Summa omnium angulorum planorum, quibus idem angulus solidus formatur, minor est 360°.

379. Dico angulos planos CAB, CAG & BAG (*fig.* 7) facere simul minùs quàm 360°.

DEMONST. Planum CAG super AC, & planum BAG super AB, ùt axibus, ita rotetur, ut in eodem plano expandantur (ùt *fig.* 8); tali casu separatione planorum novum angulum GAG suboriri necesse est; atqui ille solùm facit 360° cum tribus angulis planis, quibus solidus componebatur (84); ergo &c. Tot quot lubet suppositis angulis planis, quibus componitur angulus solidus; duobus à se mutuo separatis, reliquis omnibus adhuc sibi contiguis, omnia eorumdem plana expansa finge in plano communi: accedet semper novus quidam angulus, qui cum præfatis tantùm faciat 360° (84); igitur anguli plani constituentes angulum solidum faciunt minùs quàm 360°. *Q. e. d.*

§. II.

De Polyëdris.

THEOREMA I.

Quatuor ſaltem opus eſt Planis, ut Polyëdrum conſtituatur.

380. Demonst. Tribus, ad minùs, planis opus eſt, ut unicus angulus ſolidus efformetur (342); atqui tria illa plana, cùm à ſe mutuò divergant, ſpatium cavum anguli nequeunt obtegere, & ita huc uſque non habetur completum ſolidum, ſed ſuperficies tantùm; igitur unum prætereà ſuperaddendum eſt planum, ut ſpatium undique claudatur, atque ita Polyëdro profunditas accedat, quo Corpus compleatur. *Q. e. d.*

Corollarium.

381. Igitur Polyëdrum pauciores nequit habere angulos, quàm quatuor: tria enim plana unicum angulum ſolidum formantia, ſpatium triangulare vacuum relinquent, quod ubi plano triangulari clauditur, tres prætereà enaſcuntur anguli ſolidi.

THEOREMA II.

Quinque ſolùm dari poſſunt Polyëdra Regularia; tria, quorum plana ſunt △△ æquilatera; unum, cujus plana ſunt quadrata; & unum Pentagonis terminatum.

382. Demonst. Anguli plani, quibus angulus Polyëdri componitur, omnes inter ſe æquales ſunt (347), faciuntque minùs quàm 360° (379); & quoniam tres, ùt minimùm, requiruntur; perſpicuum fit, quinque tantùm modis, angulum ſolidum efformari poſſe Polygonis regularibus ejuſdem ſpeciei:

1° tribus ΔΔ æquilateris; atque tunc angulus ſolidus erit 180° (cùm quiſque angulus planus, quo formatur ſit 60°); addendo itaque quartum Δ æquilaterum, prioribus congruum, quo ſpatium, à tribus aliis relictum, concludatur, habebitur Tetraëdrum.

2° Quatuor anguli triangulorum æquiangulorum, Vertice juncti, efficient angulum ſolidum 240° : atque octo talia ΔΔ conjuncta, efficient ſolidum octo planorum ſeu Octaëdrum.

3° Quinque ΔΔ æquilatera, apice juncta, efficiunt angulum ſolidum 300°; & ſuperaddendo quindecim alia, prioribus congrua, ut ſpatium reliquum occludatur, Polyëdrum enaſcitur 20 conſtans ΔΔ æquilateris, quod *Icoſaëdrum* audit. Non poteſt autem fieri angulus ſolidus ex pluribus quàm ex quinque ΔΔ æquiangulis : ſex enim adæquant 360°, & plures quàm ſex numerum iſtum excedunt; quod fieri nequit (379).

4° Angulus Quadrati eſt 90°; tres tales juncti angulum ſolidum componunt 270° : atque ſuperaddendo tria prioribus congrua fit *Hexaëdrum*. Quatuor autem tales anguli angulum ſolidum componere nequeunt : ſumma enim eſt 360°; quod implicat (379).

5°. Angulus Pentagoni regularis eſt 108°; tres juncti efficiunt angulum ſolidum 324°; & tunc è duodecim pentagonis regularibus & congruis fieri poteſt *Dodecaëdrum*. Quoniam quatuor Pentagoni regularis anguli = 432° : ex iis angulus ſolidus fieri nequit (379); ergo nec corpus aliquod. Cætera polygona regularia nequeunt adhiberi : tres enim eorumdem anguli, vel faciunt ſimul 360°, ùt in Hexagono regulari; vel faciunt plus quàm 360°, ùt in ſequentibus omnibus. Igitur quinque ſolùm dari queunt Polyëdra regularia, ſcilicet *Cubus*, *Tetraëdrum*, *Octaëdrum*, *Dodecaëdrum* & *Icoſaëdrum*. *Q. e. d.*

ARTICULUS III.

De Solidis similibus.

DEFINITIO I.

383. *Solida similia* sunt, quæ figuris similibus æquè multis, eodemque modo dispositis, terminantur.

COROLLARIUM I.

384. Igitur quilibet anguli homologi, in Corporibus similibus, æquales sunt.

COROLLARIUM II.

385. Corpora quæcumque Regularia ejusdem speciei similia sunt.

THEOREMA I.

Sphæræ omnes inter se similes sunt.

386. DEMONST. Omnis semicirculus est alteri similis; sed quælibet sphæra prodit semicirculo super diametro, ùt axi, gyrato, (372); terminatur itaque quælibet sphæra superficie simili & eodem modo dispositâ; tali nempè, ut singula puncta superficiei cujusque à Centro suo distent radio sphæricitatis sphæræ. Ergo sphæræ omnes inter se similes sunt (383).

THEOREMA II.

Prisma rectum alteri simile est, cùm, præter bases similes, altitudines sunt proportionales lateribus homologis baseos. È converso : si Prismata recta similia fuerint; altitudines sunt proportionales lateribus homologis basium.

387. DEMONST. 1ª pars. Attentis basibus similibus, & cùm Prismata recta ponantur; plana lateralia cujus-

que prismatis erunt quadrilatera rectangularia; & altitudines sunt æquales rectangulorum istorum lateribus; itaque quadrilatera illa rectangularia homologa erunt similia (229); igitur prismata similia sunt (283). Quod erat primum.

DEMONST. 2ª pars. Quoniam parallelogramma lateralia unius debent esse similia parallelogrammis lateralibus homologis alterius (383); latera unius debent esse ad latera alterius, sicut latera homologa baseos unius ad homologa latera baseos alterius (229); jam verò in Prismate recto, latus singulum plani lateralis est æquale altitudini; ergo altitudines sunt ùt latera basis homologa. Quod erat secundum.

COROLLARIUM.

388. Quoniam in Cylindris quibuscumque rectis, bases constanter similes existunt, atque illos spectare licet, ùt prismata recta; Cylindri quilibet recti similes erunt, dum Peripheriæ, vel Diametri basium, sunt ùt altitudines, seu axes Cylindrorum. Et è converso: in Cylindris rectis similibus, axes sunt ùt Peripheriæ, aut Diametri basium.

THEOREMA III.

Prismata obliqua similia sunt, cùm ad bases similes æqualiter inclinantur, & præterea latera Parallelogrammorum lateralium, vel altitudines, sunt proportionalia lateribus homologis basium. Et è converso: Prismata similia ad bases similes æqualiter inclinantur; latera Parallelogrammorum lateralium, item altitudines, sunt proportionalia lateribus homologis basium.

389. Dico 1° si in Prismatibus (*fig.* 9), æqualiter inclinatis, sint bases similes, & præterea sit AB : *ab* : AH = *ah*; vel AB : *ab* = altit. HI : altit. *hi*; Prismata similia esse. DEMONST.

Demonst. 1ª pars. Quoniam plana lateralia in ſingulo priſmate ſunt parallelogramma (354) æqualiter inclinata (atque adeò angulus BAH = angulo *bah* &c.), parallelogramma homologa erunt æquiangula; quoniam itaque, ex hypotheſi, conſtant lateribus proportionalibus, erunt & ſimilia (229); igitur priſmata illa ſimilia quòque erunt (383): quod eſt primum primæ partis.

Si verò AB : *ab* = altit. HI : altit. *hi*; ductis AI & *ai*, erit angulus I, item *i* rectus (320): angulus IAH = *iah*, propter æqualem priſmatum inclinationem; igitur △ IAH æquiangulum & ſimile △ *iah*; ergo eſt IH : *ih* = AH : *ah*; ſed, ex hypotheſi, eſt AB : *ab* = IH : *ih*; igitur eſt AB : *ab* = AH : *Ah*. Quod eſt alterum primæ partis.

Dico 2°, ſi bina illa Priſmata ſimilia fuerint; æqualiter ea inclinari ad baſes ſimiles; latera, item altitudines eſſe proportionalia lateribus baſium homologis.

Demonst. Non ſolùm baſes ſimiles, ſed & parallelogramma lateralia ſimilia ſint oportet (383); eſt adeò AB : *ab* = AH : *ah*; anguli quòque ſolidi A & *a* æquales ſunt (384); æqualiter itaque priſmata illa ad baſes inclinantur; ductis igitur perpendicularibus HI & *hi* ad ſubjectas baſes, & deinde rectas AI & *ai*, erit angulus IAH = *iah*; ſed eſt I = *i*, utpote recti (320); igitur △△ IAH & *iah* ſimilia ſunt; ergo eſt AH : *ah* = IH : *ih*; ſed erat AB : *ab* = AH : *ah*; itaque eſt etiam AB : *ab* = IH : *ih*. Proinde priſmata ſimilia non ſolùm ad baſes ſimiles æqualiter inclinantur ſed & latera parallelogrammorum lateralium, item altitudines priſmatum, ſunt proportionalia lateribus homologis baſium. Quod erat ſecundum.

COROLLARIUM.

390. Bases in Cylindris inclinatis sunt quòque Circuli, ac proinde inter se similes (273), & quoniam Cylindri ut Prismata censeri possunt (356); Cylindri quicumque obliqui similes sunt, dum eorum axes ab bases æqualiter inclinati, sunt Diametris basium proportionales. Et è converso : in Cylindris obliquis similibus, axes, æqualiter inclinati ad bases, sunt basium Diametris proportionales.

THEOREMA IV.

Pyramides similes sunt, si constent basibus similibus, altitudines sint proportionales lateribus homologis basium; atque insuper cadant in puncta basium homologa. E converso : in Pyramidibus similibus, altitudines sunt proportionales lateribus homologis basium, caduntque in puncta similia earumdem.

391. Dico 1°. Si (*fig.* 10 & 11) ACK sit similis *ack*; altitudo BI : *alt. bi* = AC : *ac*; atque altitudines illæ ceciderint in basium puncta similia (hoc est, ab angulis homologis proportionaliter ad latera homologa, distantia); Pyramides illas esse similes inter se.

DEMONST. ductis AI & *ai*; anguli I & *i* sunt recti (320); & quoniam puncta I & *i* sunt similia basium; est AC : *ac* = AI : *ai*; cùm itaque, ex hypothesi, sit AC : *ac* = BI : *bi*; erit AI : *ai* = BI : *bi*; jam verò I = *i* : ergo △△ AIB & *aib* sunt similia; igitur est BI : *bi* = BA : *ba*; ergo est AC : *ac* = BA : *ba*. Ductis CI, *ci*; KI & *ki*, patebit △△ CIB & *cib*; △△ KIB & *kib*, esse inter se similia; adeoque singula latera △△ lateralium Pyramidis ACKB proportionalia sunt homologis lateribus △△ lateralium Pyramidis *ackb*; sunt ergo Pyramides illæ inter se similes (383). Quod erat primum.

Dico 2°. Si Pyramides prædictæ similes fuerint; est alt. BI : *alt. bi* = AC : *ac* &c.; atque I & *i* sunt puncta basium similia.

DEMONST. Propter Pyramidum similitudinem, est angulus solidus A = *a*; atque adeo AB & *ab* æqualiter inclinantur ad suas respectivè bases; ergo angulus IAB = *iab*; sed I = *i* (utpote recti); ergo △△ IAB & *iab* sunt similia; igitur est IB : *ib* = AB : *ab*; sed etiam est AC : *ac* = AB : *ab*; itaque est AC : *ac* = BI : *bi* = AI : *ai*. Ductis CI, *ci*; KI, *ki*; intellectu est facile △△ CIB & *cib*; △△ KIB & *kib*, inter se esse similia; atque adeo puncta I & *i*, proportionaliter ad homologa basium latera, distare ab angulis basium C, *c*; K, *k*; igitur altitudines in Pyramidibus similibus sunt proportionales lateribus homologis basium, caduntque in basium puncta similia. Quod erat alterum.

COROLLARIUM I.

392. Coni spectantur ùt Pyramides; & quoniam bases eorum, utpote Circuli, semper similes sunt; quando Coni similes sunt, altitudines (qui & axes sunt in Conis rectis), item rectæ quæcumque, ad homologa puncta peripheriæ basium ductæ, proportionales sunt basium Diametris.

COROLLARIUM II.

393. In Conis obliquis similibus (*fig.* 12), axes BX & *bx* sunt quòque proportionales Diametris basium: nam, attentâ Conorum æquali inclinatione; est angulus BXC = *bxc*; angulus BCX = *bcx*; ergo △△ BCX & *bcx* similia sunt; igitur est BC : *bc* = BX : *bx*; verùm, ex hypothesi, est BC : *bc* = AC : *ac*; ergo est BX : *bx* = AC : *ac*.

COROLLARIUM. III.

394. In Conis, si altitudines, basium Diametris proportionales, cadant in puncta basium similia (producta si opus); aut axes æqualiter ad bases inclinati, sint Diametris basium proportionales, Coni similes sint oportet.

THEOREMA V.

In Pyramide truncata, abscissa est similis Pyramidi ex abscissa & truncata compositæ.

395. DEMONST. Sit ACK (*fig.* 13) basis major, EFI basis minor Pyramidis truncatæ: productis lateribus, ut vides, prodit Pyramis integra ACKB, composita ex truncata & abscissa EFIB; basis abscissæ similis est majori basi truncatæ (353); & quoniam latera basis minoris, seu FE, IE & IF sunt parallela lateribus homologis AC, AK & KC; △△ lateralia abscissæ, nempè BFE, BIE & BIF, similia sunt △△ BCA, BKA & BKC Pyramidis integræ. Igitur abscissa similis est Pyramidi constanti abscissâ & truncatâ simul (383). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

396. Conus abscissus est similis Cono ex abscisso & truncato simul.

COROLLARIUM II.

397. Pyramidis abscissæ, aut Coni abscissi, altitudo est ad altitudinem abscissi & truncati simul, sicuti dimensiones homologæ basium &c.

CAPUT II.

De Dimensione Solidorum.

ARTICULUS I.

De Dimensione Superficierum Corporum, earumque Comparatione.

PROBLEMA I.

Superficiem Polyëdri regularis inquirere.

398. Resolutio. Unica ejus superficies inquiratur, atque hæc toties sumatur, quot sunt Polyëdri facies; & summa dabit quæsitum.

Corollarium.

399. Ergo in Cubo capiatur sexies quadratum unius lateris. Inquirendo aream unici △ lateralis in Tetraëdro, eamque quadruplicando, habetur superficies istius Polyëdri regularis &c.

PROBLEMA II.

Superficiem Prismatis recti invenire.

400. Resolutio I. Area basis inquiratur, atque hæc duplicetur:

II. Perimeter baseos ducatur in latus alicujus Parallelogrammi lateralis, non spectans ad basin, seu in altitudinem; & prodit superficies omnium Parallelogrammorum lateralium; huic igitur summæ addendo duplum unius basis, summa finalis dabit totalem Prismatis recti superficiem. Etenim ex genesi Prismatis (351) manifestum evadit, toties basis

Perimetrum reperiri in Parallelogrammis lateralibus, quot sunt puncta in Linea *directrice*; hæc autem æqualis est singulo lateri Parallelogrammorum rectangulorum lateralium, Prismatis recti altitudinem constituenti.

PROBLEMA III.

Cylindri recti superficiem inquirere.

401. RESOLUTIO. Peripheria basis ducatur in axin & radium basis; factum dabit quæsitum.

DEMONST. Ex Cylindri genesi (351) patet, in superficie convexa toties reperiri Peripheriam baseos, quot sunt puncta in Linea *directrice*, quæ hic æquatur axi Cylindri; itaque ducendo Peripheriam basis in axin, prodit superficies convexa; Peripheriam verò ducendo in Radium, prodit area utriusque basis; ergo ducendo Peripheriam basis in axin & radium, factum æquatur superficiei totali Cylindri. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

402. Erit igitur convexa ad utramque planam simul sumptam, sicut altitudo, seu axis Cylindri, ad radium basis.

PROBLEMA IV.

Pyramidis invenire superficiem.

403. RESOLUTIO. Inquirantur sigillatim areæ, basis & △△ lateralium; addantur in unam summam; atque hæc erit integra Pyramidis superficies.

PROBLEMA V.

Metiri superficiem Coni recti.

404. RESOLUTIO. Peripheria baseos ducatur in latus & radium basis Coni; dimidium facti integram Coni recti dabit superficiem.

Demonst. Sit Conus rectus ABC (*fig.* 14); mente ducantur infinitæ rectæ à vertice ad singula peripheriæ basis puncta; atque convexam superficiem diviseris in infinita △△, quorum omnium bases æquantur peripheriæ basis; & altitudo = lateri BA Coni; atque adeo, ducendo peripheriam in latus BA Coni, dimidium facti æquatur superficiei omnium △△, seu superficiei Coni convexæ; atqui peripheriam ducendo in radium basis, dimidium facti est æquale areæ basis (301); ergo peripheriam ducendo in latus, & radium basis Coni recti, dimidium facti integram dat ejusdem superficiem. *Q. e. d.*

Corollarium.

405. Igitur in Cono recto, convexa superficies est ad planam; ut latus Coni ad radium basis.

PROBLEMA VI.

Pyramidis truncatæ inquirere superficiem.

406. Resolutio I. Utriusque basis (quæ similes sunt (395), seseque habent ut quadrata laterum homologorum) quære superficies:

II. Dein cujusque superficiei lateralis (quæ Trappezoïdes sunt) aream determines; omnes in unam colligantur summam; eritque hæc totalis superficies quæsita.

PROBLEMA VII.

Coni truncati investigare superficiem.

407. Resolutio. Adde peripheriam minoris atque majoris basis in unam summam; hanc ducito in latus Coni. Peripheriam basis minoris multiplices per radium minoris basis; & peripheriam majoris

basis per radium majoris basis; tria illa facta in unam summam colligantur, & ejus dimidium dabit quod quæritur.

DEMONST. A singulo puncto peripheriæ minoris basis GH (*fig.* 2) ad correspondens punctum majoris AC, rectas duci concipe; atque convexam Coni truncati superficiem diviseris in infinitas parvas Trappezoïdes, inter easdem parallelas (quarum nempe altitudo est = AG), consistentes; quoniam ergo omnium illarum Trappezoïdum latera parallela, peripheriæ minori & majori æquentur; superficies Coni truncati convexa æquatur dimidio facti utriusque peripheriæ in latus AG Coni truncati. Basis verò minoris area æquatur dimidio facti peripheriæ suæ in radium suum; & majoris baseos area = dimidio facti peripheriæ majoris in radium suum; ergo $\frac{1}{2}$ trium factorum dabit superficiem integram Coni truncati. *Q. e. d.*

THEOREMA I.

Si Conus obliquus (fig. 15) *secetur Plano perpendiculari ad Planum trianguli* ABC, *cujus latera sunt*, AB *minimum*, BC *maximum Coni latus*, *& Diameter* AC *baseos; atque ab eodem triangulo auferatur aliud* $\triangle$ BFE *simile priori*, *sed situ contrario* (*seu* sectione subcontrariâ), *ita ut angulus* BFE = *angulo* BAC; *angulus* BEF = BCA; *erit sectio* EKFLE *Circulus.*

408. DEMONST. Per punctum G, arbitrariè desumptum in communi sectione EF plani secantis EKF & trianguli ABC, ducatur ad diametrum AC parallela HI, atque per hanc finge duci sectionem basi parallelam, erit hæc, v. g. HKI, Circulus (362); communis sectio planorum EKF & HKI est recta KG (328), quæ & perpendicularis est ad $\triangle$ ABC, cùm communis sit duobus planis ad ABC perpendicularibus, ex hypo-

hypothesi; est ergo KG perpendicularis ad HI item EF (320); & quoniam quodlibet ex $\Delta\Delta$ BEF & BHI, simile est Δ ABC; erunt ea inter se similia; angulus BEF = BIH &c.; igitur $\Delta\Delta$ EHG & IFG sunt æquiangula: est ergo GH : GE = GF : GI; igitur GE × GF = GH × GI, seu = GK^2. Ergo sectio EKF talibus constat ordonnatis, quæ singulæ sunt mediæ proportionales inter partes diametri; jam verò hæc est Circuli proprietas (248); ergo EKFLE Circulus sit oportet. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

Si Conus quiscumque (fig. 16) secetur plano perpendiculari ad planum trianguli ABC, *formati per minimum latus* AB *& maximum* BC *in Cono obliquo, & per axin transeuntis; atque à triangulo* ABC *resecetur aliud ei dissimile* BEF; *erit Sectio* ENFM *Ellipsis.*

409. DEMONST. Conum ABCD secari fingas plano; quod, transiens inter extrema E, F rectæ EF (quæ *Diameter Sectionis* audit) parallelum sit ad basin ADC, ut ità habeatur sectio circularis GLHM, cujus diameter GH, quæ communis est sectio plani resecantis & Δ ABC, parallela erit ad basin ADC. Prætereà Conum ABCD alio plano perpendiculari ad Δ ABC, cujus diameter sit IK, secari concipe. Prior sectio rectam efficit LM, & altera NO, atque singula perpendiculariter & bifariam dividitur ab EF; sunt igitur LM & NO *ordonnatæ* ad EF axin curvæ ENFME. His præmissis: in $\Delta\Delta$ GPE & IRE similibus, erit GP : IR = EP : ER; & in $\Delta\Delta$ similibus HPF & KRF, habebitur HP : KR = FP : FR; igitur terminos prioris analogiæ *multiplicando* per terminos posterioris homologos; erit GP × HP : IR × KR = EP × FP : ER × FR; in qua, in locum duorum primorum GP × HP & IR × KR, *substituendo* PL^2 & RN^2, quæ iis æquan-

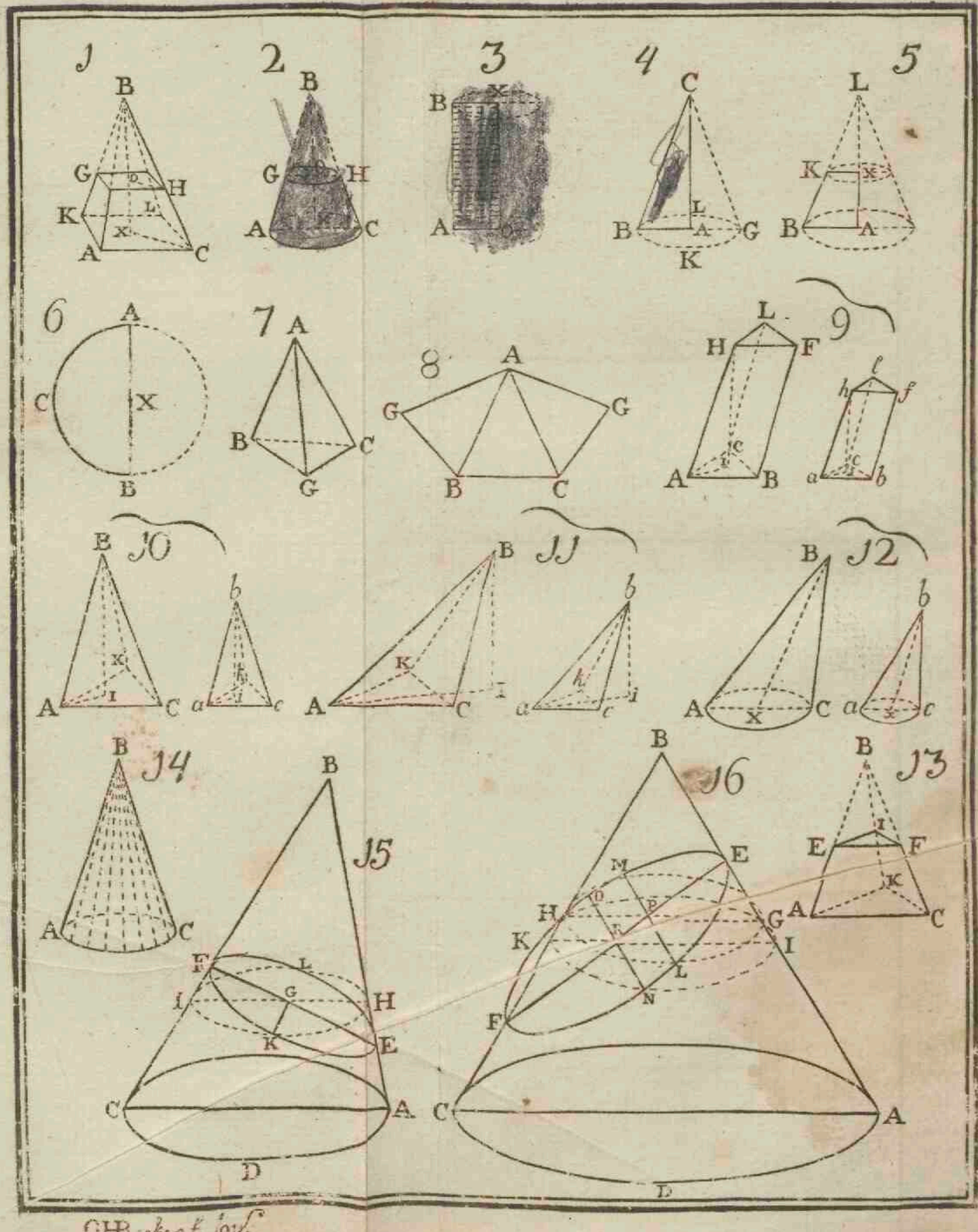
tur (248), sequitur $PL^2 : RN^2 = EP \times FP : ER \times FR$; unde ENFH Ellipsis est (260). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Si Cylindrus rectus secetur plano ad basin inclinato; erit sectio Ellipsis, cujus minor axis Diametro basis Cylindri æquetur.

410. Si Cylindrus rectus ABCD (TAB. 9 *fig.* 1) (cujus basis est circulus AEBL, & axis recta TN, ad eandem basin perpendicularis), secetur plano GICK, inclinato ad basin; dico sectionem GICK esse Ellipsin, cujus minor axis æqualis sit Diametro AB baseos.

DEMONST. Imaginare plano rectangulari ABCD, transeunte per C punctum supremum, & G infimum sectionis, atque per axin TN, Cylindrum secari; ejusdem plani intersectio, communis cum sectione GICK, est recta GC, quæ curvæ GICK longitudinem repræsentat; atque producta, cum diametro BA producta concurrit in S, qui erit angulus inclinationis plani secantis GICK ad basin Cylindri. Ducantur, ad arbitrium, in plano GICK, rectæ IK, HQ perpendiculares ad CG; & in superficie convexa Cylindri, rectæ HE & IF ad basin AEBL perpendiculares demittantur; denique in plano Circuli AEBL, per puncta E & F, agantur rectæ ER & FL perpendiculares ad diametrum AB, quæ eas bifariam secabit in punctis P & N. His præmissis: rectæ IK & FL, quoniam perpendiculares sunt ad idem planum SBC, parallelæ sunt inter se (323); sunt quòque inter se æquales: quia IKLF est Parallelogrammum. Pariter æquales & parallelæ sunt HQ & ER, cùm HQRE sit etiam Parallelogrammum: nam terminatur lateribus oppositis parallelis. Rectæ IM & FN inter se sunt æquales, utpote perpendiculares inter parallelas TN & IF; igitur KM & LN sunt quòque æquales; & quia FN = NL (sunt enim ra-



C.H.Becker f. iov.

tii baſeos), eſt IM = KM. Similiter oſtenditur, eſſe inter ſe æquales EP, PR, HQ, OQ; itaque recta CG eſt axis reſpectu Ordonnatarum IK & HQ, inter ſe parallelarum: erit itaque CG axis major, & IK axis minor, ſuppoſito puncto M medio majoris axis, proùt in figura eſt; igitur minor Axis æquatur Diametro baſis. Quoniam bina plana HQRE & IKLF inter ſe parallela ſunt, item communes interſectiones OP & MN; rectæ AB & CG dividuntur proportionaliter ab iſtis planis; erit ergo $GO \times OC : GM \times MC = AP \times PB : AN \times NB$: ſed (248) $AP \times PB = PE^2 = OH^2$; & $AN \times NB = NF^2 = MI^2$; igitur *ſubſtituendo* eſt $GO \times OC : GM \times MC = OH^2 : MI^2$; & ſic de cæteris Ordonnatis quæ ducerentur in ſectione GICK; ergo ſectio illa Ellipſis eſt (260). *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

Ellipſis eſt æqualis Circulo, cujus Diameter eſt media proportionalis inter axes Ellipſis.

411. DEMONST. Concipe è Centro Ellipſeos duos Circulos deſcribi concentricos; unum, cujus idem ſit radius cum radio majoris axis, & alterum, cujus idem ſit radius cum minoris axis radio: demonſtratum fuit (262) omnes Ordonnatas majoris Circuli eſſe ad correſpondentes Ordonnatas Ellipſeos, ſicuti major axis ad minorem; igitur Circulus ſuper majori axi ſe habet ad Ellipſin, ſicut major axis ad minorem. Similiter demonſtratum fuit (264) omnes Ordonnatas Ellipſeos ſe habere ad correſpondentes Ordonnatas Circuli ſuper minori axi, etiam ſicut major axis ad minorem; itaque Ellipſis ſe habet ad Circulum ſuper minori axi, etiam ſicut major axis ad minorem; & conſequenter Ellipſis eſt media proportionalis inter duos illos Circulos; atque adeo eſt æqualis Circulo, cujus Diameter eſt media proportionalis inter majorem & minorem axin. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

412. Ut igitur Ellipſeos area determinetur; quæratur recta, media proportionalis inter axes Ellipſeos; Circuli, cujus illa diameter foret, inveſtigetur area; atque hæc dabit quæſitum.

COROLLARIUM II.

413. Ellipſis ſe habet ad Circulum quemcumque, ſicuti rectangulum ſub axibus ſuis ad quadratum Diametri Circuli dati.

COROLLARIUM III.

414. Ellipſes ſeſe habent inter ſe, ùt rectangula ſub ſuis reſpectivè axibus.

PROBLEMA.

Metiri ſuperficiem Cylindri recti AGCL (fig. 2) *truncati per planum ad baſin inclinatum.*

415. RESOLUTIO I. Baſis AL Ellipſis (410), eſt ad planam GC, ùt axis AL ad GC diametrum; quærantur eorum areæ, atque addantur in primam ſummam.

II. Peripheriam baſeos GC duc in AG + LC; & $\frac{1}{2}$ facti dabit convexam; quâ primæ ſummæ additâ prodibit totalis Cylindri ſuperficies.

Etenim ſit LO parallela GC: peripheriâ baſeos in OG + LC ductâ, habetur bis ſuperficies convexa Cylindri GOLC; & ducendo eandem peripheriam in AO, habetur bis ſuperficies convexa partis AOL; ergo &c.

THEOREMA V.

Sphæræ ſuperficies æquatur rectangulo ſuper Diametro & Peripheriâ Circuli ſphæræ maximi.

416. DEMONST. Sint F, B (*fig.* 3) Circumſcripti æquales: LT, TF & BE ſint æquales inter ſe; erit TE parallela FB (129). Sit LC parallela FB ſeu TE; erit BE = EC (230); igitur, cùm FT = BE (224), rectæ LT, TF, CE & EB æquales ſunt inter ſe; & quoniam angulus L = angulo FTE, & C = angulo BET (108), atque angulus FTE = BET, eſt L = C: igitur FBCL eſt Trappezoïs iſoſcelis. Sit X Centrum; ductâ AX, erunt I & O recti. Si media Trappezoïs ABCO circumvolvatur ſuper AO, ùt axi (ſeu ſi Trappezoïs LFBC ſuper axi AO mediam revolutionem abſolvat), ſuperficies convexa Coni truncati, qui generatur, æquatur rectangulo ſuper AO & peripheriâ ATRSEA: nam eſt AI = IO (117); ductâ FH perpendiculari ad LO, erit FH = AO; ductâ ES, △ LHF ſimile eſt △ TES; eſt enim angulus HLF = FTE (108), qui eſt = S (quiſque enim menſuratur $\frac{1}{2}$ arcûs EAT); H = angulo TES (ſunt enim ambo recti); igitur LF : FH ſeu AO = TS : TE : ſed Peripheriæ ſunt inter ſe, ùt Diametri; ergo LF : AO = Circulus ſuper TS : Circulum ſuper TE; adeoque rectangulum ſuper LF & Peripheriâ Circuli ſuper TE = rectangulo ſuper AO & Peripheriâ Circuli ſuper TS, ſeu Peripheriâ ATRSEA: atqui primum rectangulum æquatur ſuperficiei convexæ Coni truncati, progeniti revolutione ABCO: nam ſuperficies illa = rectangulo ſuper AO & $\frac{1}{2}$ aggregati ex Peripheriis Circulorum, quorum FB & LC ſunt reſpectivè Diametri (407); jam autem, cùm TE ſit media arithmeticè proportionalis inter FB & LC (nam in quantum TE ſuperat FB, in tantum LC ſuperat TE); Peripheria Circuli

ſuper TE eſt æqualis $\frac{1}{2}$ Peripheriarum Circulorum, quorum Diametri ſunt FB & LC. Ergo factum AO in Peripheriam ATRSEA æquatur ſuperficiei convexæ Coni truncati, præfatâ revolutione prodeuntis.

Concipe (*fig.* 4) Trappezoïdes continuari, ita ut LP, PG, CM, MH, tangentes in P & M, æquales ſint omnes inter ſe: ductis PS diametro, PM & MS, item LK perpendiculari ad GH &c. Simili modo, quo ante, demonſtrabis, per revolutionem Trappezoïdis OCHV, formari Conum truncatum, cujus convexa ſuperficies, cùm æquetur rectangulo ſuper GL & Peripheriâ Circuli ſuper PM), eadem quòque æquabitur rectangulo ſuper perpendiculari OV, & Peripheria APRSMA Circuli maximi ejuſdem. Quoniam ergo in media Sphæræ ſuperficie infinitas tales licet concipere Trappezoïdes, quarum omnium ſuperficies convexæ ſimul conſtituunt Sphæræ mediam ſuperficiem; atque earumdem ſuperficies æquatur facto Peripheriæ maximæ per perpendiculares (ſeu *Sagittas*) interceptas, ſive per Radium Sphæræ: media Sphæræ ſuperficies habetur ducendo Radium in Peripheriam Circuli maximi; ergo tota Sphæræ ſuperficies prodit ex facto Diametri in Peripheriam Circuli maximi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

417. Ergo Sphæræ ſuperficies eſt $\frac{4}{1}$ + areâ Circuli ſuper Diametro, quæ æqualis foret Diametro Sphæræ (301).

THEOREMA VI.

Si Sphæra plano quomodocumque ſecetur, ſectio communis Circulus exiſtit.

418. Dico, ſi Sphæra (*fig.* 5) ſecetur Plano per AFBI tranſmiſſo, ſectionem AFBI eſſe Circulum.

DEMONST. Si Planum ſecans per Centrum Sphæræ tranſeat, manifeſtum eſt ſectionem fore Circulum: omnes enim rectæ à Centro Sphæræ ad Peripheriam ſectionis ductæ, erunt radii Sphæræ, exiſtentes in eodem plano, & inter ſe æquales; ergo Peripheria erit curva in omni ſuî puncto æqualiter diſtans à puncto quodam medio; igitur Circulus erit ſectio. Si non tranſeat per Centrum ſectio, proùt in figura: ad planum ſecans, è Centro, ducatur perpendicularis XO; & ab O ad ſingula Peripheriæ ſectionis puncta quotcumque rectæ v. g. FO, OI, OA &c., quibus occurrant radii XF, XI, XA &c.; anguli XOF, XOI, XOA &c. omnes recti ſunt (320): ergo $FX^2 = XO^2 + OF^2$. $XI^2 = XO^2 + IO^2$. $AX^2 = XO^2 + OA^2$ &c.: ſed $XF^2 = XI^2 = AX^2$ &c. Ergo $XO^2 + OF^2 = XO^2 + IO^2 = XO^2 + OA^2$ &c.; igitur $OF^2 = IO^2 = OA^2$ &c. Ergo $OF = IO = OA$; & ita de cæteris rectis, ductis à Peripheria BFAI ad punctum O: ergo Peripheria illa talis eſt, ut omnia ejus puncta æqualiter diſtent à puncto quodam medio O; igitur Circulus eſt ſectio. *Q. e. d.*

HYPOTHESIS I.

419. Si ſit CO (*fig.* 6) perpendicularis ad AB Diametrum, facta revolutione AOC ſuper AO, exurgit Sphæræ Segmentum; eritque AO ejuſdem *altitudo*, ſeu *ſagitta*; & LC Diameter baſeos, quæ Circulus eſt.

PROBLEMA I.

Metiri ſuperficiem Segmenti Sphæræ.

420. RESOLUTIO I. Multiplicetur ſagitta AO (*fig.* 6) per Peripheriam Circuli maximi, & factum erit ſuperficies convexa (ùt evidenter patet ex prima parte demonſtrationis ad numerum 416).

II. Deinde quære aream Circuli, cujus LC chorda ſegmenti Diameter eſt: hâc ſummâ priori adjectâ, habebitur totalis ſegmenti ſuperficies.

HYPOTHESIS II.

421. Si ſint CO item FX perpendiculares ad AB Diametrum, factâ circumvolutione COXFC, pars Sphæræ progenita *Zona* audit.

PROBLEMA II.

Zonæ ſuperficiem inquirere.

422. RESOLUTIO I. Convexam dabit factum *ſagittæ* OX in Peripheriam Circuli maximi (ùt manifeſtum fit ex ſecunda parte demonſtrationis ad numerum 416).

II. Inquire præterea areas Circulorum, quorum OC & XF radii exiſtunt; priori adjectæ ſimul dabunt totalem Zonæ ſuperficiem.

COROLLARIUM.

423. Itaque tam ſuperficies convexæ Segmentorum, quàm ſuperficies convexæ Zonarum, ſe habent ad integram Sphæræ ſuperficiem, ùt ſagitta ad Diametrum.

424. SCHOLION. Nonnunquam Segmentum Sphæræ *Zonam* compellant: apud Geographos enim globi terraquei ſuperficies, Circulis polaribus comprehenſa, *Zona frigida* audit.

THEOREMA VII.

Quorumcumque Corporum ſimilium ſuperficies, ſive integræ, ſive partes homologæ, ſunt inter ſe, ùt quadrata dimenſionum homologarum.

425. DEMONST. Integræ enim ſuperficies, ſive partiales homologæ, ſunt aggregatum ex æquè multis figuris

guris ſimilibus, quæ ſingulæ ſunt ùt quadrata laterum homologorum; ſed in Solidis ſimilibus (ùt ex demonſtratis conſtat) tres ſolidi dimenſiones proportionales ſunt; ergo aggregata ex omnibus, vel ex partibus homologis, cùm æquè multis figuris ſimilibus conſtent, ſunt quòque ùt quadrata dimenſionum homologarum, nempè longitudinum, altitudinum, aut latitudinum. *Q. e. d.*

ARTICULUS II.

De Dimenſione Soliditatis Corporum, & Soliditatum Comparatione.

THEOREMA I.

Priſmatis item Cylindri Soliditas æquatur facto baſeos in altitudinem.

426. DEMONSTR. Priſmatis atque Cylindri geneſi (351) manifeſtum eſt, toties baſin ſibi ſuperpoſitam reperiri in ſpatio percurſo à baſi, quot ſunt puncta in altitudine; ergo dictorum Corporum prodit ſoliditas ducendo baſin in altitudinem. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

427. Cubi adeò ſoliditas æquatur Cubo unius lateris.

COROLLARIUM II.

428. Priſmata vel Cylindri æqualis baſis & altitudinis, æquantur inter ſe.

PROBLEMA I.

Cylindri recti AGCL (fig. 2), *truncati per planum ad baſin inclinatum, inveſtigare ſoliditatem.*

429. RESOLUTIO. Baſin GC duc in maximam AG & minimam LC Cylindri altitudinem, & medietas facti dat Cylindri ſoliditatem.

DEMONST. Ductâ OL parallelâ GC, & concipiendo Cylindrum AOLB rectum absolvi : basi GC ductâ in OG + LC, factum æquatur bis soliditati Cylindri GOLC; & basin GC ducendo in AO, factum dat Cylindrum AOLB, seu bis medium Cylindrum AOL; ergo basi GC ductâ in AG + LC, factum dat bis soliditatem Cylindri truncati per planum ad basin inclinatum. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

Cylindri recti (fig. 7), truncati per planum FEKL, *axi* OX *parallelum, inquirere soliditatem.*

430. RESOLUTIO. Baseos segmenti LCK inventa area (305) ducatur in altitudinem Cylindri; quod prodit est soliditas Cylindri truncati BCKLFE.

COROLLARIUM.

431. Igitur ambo Cylindri truncati, in quos dividitur Cylindrus AGCB sectione præfatâ, sunt inter se ùt basium segmenta KLC & KLG.

THEOREMA II.

Pyramides habentes bases æquales, & eandem altitudinem sunt æquales.

432. DEMONST. Cùm sint æquè altæ, possunt dividi in æquè multa plana basi parallela; & cùm bases æquales sint, Plana basi parallela, sibi correspondentia in utraque Pyramide, eâdem proportione decrescunt; adeoque quæcumque Plana in utraque, sibi correspondentia, erunt æqualia; ergo summa omnium Planorum, primam Pyramidem constituentium, æqualis erit summæ omnium Planorum, quibus secunda Pyramis componitur : ergo Pyramides illæ æquales sunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

433. Quoniam ergo Coni quicumque ùt Pyramides infinitangulæ ſpectantur (365); ſunt ii quòque æquales, cùm æquali baſi, & altitudine conſtant.

THEOREMA III.

Priſma triangulare in tres Pyramides æquales dividi poteſt.

434. Detur triangulare Priſma (*fig.* 8): ſecetur plano ab AB ducto per diagonales AF & BF, eritque ABCF Pyramis prima. Reliqua deinde pars dividatur plano ab A per diagonales AF & AE trajecto; atque enaſcuntur binæ aliæ Pyramides KFEA & ABEF. Dico tres illas Pyramides eſſe æquales.

DEMONST. In primis priores duæ, ſcilicet ABCF & KFEA, inter ſe æquantur: baſis enim primæ ABC eſt æqualis baſi ſecundæ KFE; & altitudo primæ CF æqualis eſt altitudini ſecundæ AK: Pyramides ergo illæ æquales ſunt (432). Secunda Pyramis KFEA æqualis eſt tertiæ ABEF: ſit enim baſis ſecundæ AKE, & baſis tertiæ ABE; erunt baſes illæ æquales (206); utriuſque Pyramidis vertex erit in F, atque communis earum altitudo erit perpendicularis ab F ad baſin AKEB demiſſa; habebunt adeò Pyramides prædictæ baſes æquales, & eandem altitudinem; ſunt ergo illæ duæ etiam inter ſe æquales (432); adeoque omnes tres æquales ſunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

435. Pyramis triangularis eſt tertia pars Priſmatis, ſuper eadem baſi & altitudine.

COROLLARIUM II.

436. Et quoniam Priſma quodvis in triangularia reſolvi poteſt; quælibet Pyramis eſt pars tertia Priſmatis, ejuſdem baſis atque altitudinis.

COROLLARIUM III.

437. Conus pro Pyramide infinitangula, & Cylindrus pro Priſmate infinitangulo habentur; eſt adeò Conus pars tertia Cylindri, æqualis ſecum baſis & altitudinis.

PROBLEMA III.

Pyramidis truncatæ, vel Coni truncati ſoliditatem inquirere.

438. RESOLUTIO. Determinatâ ratione altitudinis Corporis abſciſſi ad truncati (397); quære primò ſoliditatem Pyramidis, aut Coni totalis, conſtantis abſciſſo & truncato ſimul: deinde ſoliditatem ſolius abſciſſi: hanc ſubtrahendo à priori; quod ſupereſt, dabit ſoliditatem truncati.

THEOREMA IV.

Sphæræ ſoliditas æquatur facto ſuperficiei Sphæræ in tertiam Radii partem.

439. DEMONST. Concipiatur Sphæræ ſuperficies reſoluta in infinitè parvas ſuperficies planas, v. g. triangulares, quadrangulares, aut mixtim; & è Centro, ad latera cuncta planulorum, duci rectas: evidens eſt Sphæram conſtare ex innumeris Pyramidibus, in Centro coeuntibus, quarum altitudo eſt Radius Sphæræ; atque adeò omnes illæ Pyramides eandem altitudinem habent; cujuſque autem Pyramidis ſoliditas æquatur

facto baſeos in tertiam altitudinis, ſeu Radii, partem (436); omnium ergo, ſive ipſiuſmet Sphæræ, ſoliditas, æquatur facto omnium baſium, ſeu ſuperficiei Sphæræ, in tertiam Radii partem. *Q. e. d.*

Corollarium.

440. Quoniam igitur Sphæræ ſuperficies eſt $\frac{4}{1}$ + areâ Circuli maximi; prodit etiam Sphæræ ſoliditas ducendo aream Circuli maximi in $\frac{2}{3}$ Diametri.

PROBLEMA IV.

Sectoris Sphæræ ſoliditatem metiri.

441. Dum Sector Circuli AXB (*fig.* 9), ſuper uno Radiorum, v. g. AX, ùt axi, gyratur, Sphæræ Sector prodit; ſic ut ejus baſis ſit Sphæræ ſuperficies convexa ſegmenti, cujus AO (ductâ BO perpendiculari ad AX) Sagitta exiſtit.

Resolutio. Multiplicatâ AO per Circulum Sphæræ maximum, productum æquatur ſuperficiei convexæ iſtius ſegmenti (420): hanc dein ducito in tertiam Radii Sphæræ partem, & prodibit ſoliditas. Ex dictis (439) demonſtratio patet.

Corollarium.

442. Eſt ergo Sphæræ Sector ad Sphæram integram, ùt Sagitta Segmenti baſeos Sectoris, ad Sphæræ Diametrum.

PROBLEMA V.

Segmenti Sphæræ ſoliditatem inquirere.

443. Resolutio I. Quære ſoliditatem Sectoris, cujus ſuperficies convexa ſegmenti foret baſis: ponamuſque BL (*fig.* 9) Diametrum fore ejuſdem ſegmenti; X Centrum ſit & O rectus.

II. Inquire deinde ſoliditatem Coni recti, cujus BL eſſet Diameter baſis, & OX altitudo: hancque ſubtrahendo ex ſoliditate Sectoris, quod reliquum eſt, ſegmenti dat ſoliditatem.

THEOREMA V.

444. *Solida quæcumque ſe habent inter ſe in ratione compoſita ſuperficiei & altitudinis, quarum facto prodeunt.*

COROLLARIUM.

445. Quoniam itaque in Corporibus quibuſcumque ſimilibus, dimenſiones ſingulæ homologæ ſunt proportionales, atque adeò ſuperficies illæ ſunt ut quadrata, v. g. altitudinum; ducendo ſuperficies illas in altitudines reſpectivas, aut earumdem partes; facta (quæ æquantur dictorum Corporum ſoliditatibus) erunt inter ſe, ùt quadrata altitudinum, in altitudines ducta; hoc eſt, in *ratione triplicata*, ſeu *ùt Cubi altitudinum*, aut laterum homologorum.

SECTIO QUARTA

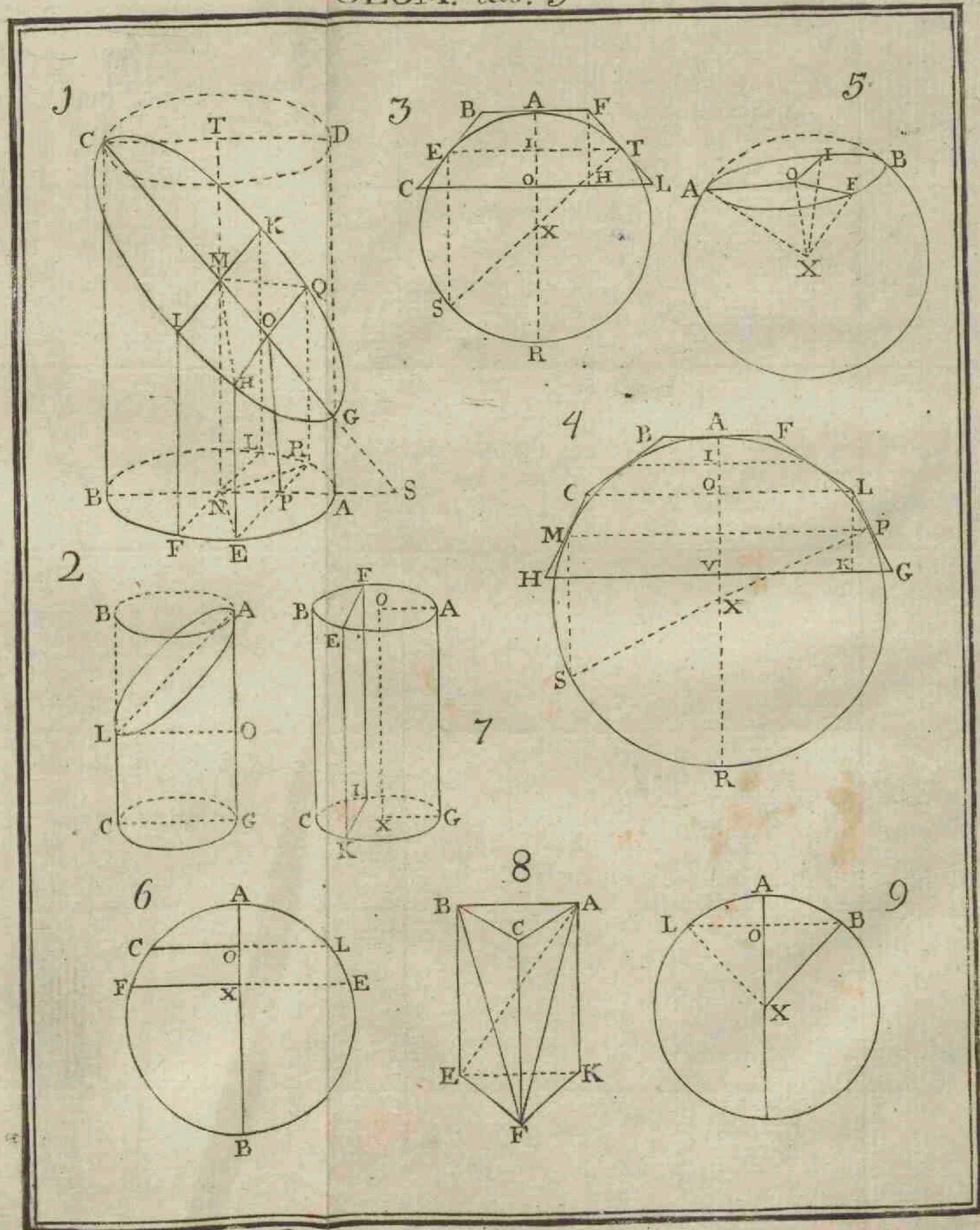
DE TRIGONOMETRIA PLANA.

DEFINITIO I.

446. *Trigonometria Plana* (ut à Sphærica, quæ de △△, per trium Circulorum arcus formatis, differit, diſtinguatur) eſt ſcientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

DEFINITIO II.

447. *Sinus rectus* arcûs, vel anguli, qui eo arcu menſuratur, eſt recta, ducta ab extremitate arcûs, &



C.H.Becker f. lov.

perpendicularis ad Diametrum, seu radium. Vocatur etiam simpliciter *Sinus*. E. G. (*fig.* 1 TAB. X.) sint B, O, F & X recti (adeòque I in Centro): OG est *Sinus* arcûs BG, item anguli I; GX est *Sinus* arcûs GF, item anguli L.

COROLLARIUM I.

448. Est adeò Sinus rectus arcûs vel anguli, dimidia pars chordæ, sustentantis arcum duplum arcûs, vel anguli, cujus Sinus rectus dicitur.

COROLLARIUM II.

449. Idem est Sinus arcûs, ejusque complementi ad 180°. Item idem est Sinus anguli, ejusque Vicini: & ita, posito Centro in K; perpendicularis GO est æquè benè *Sinus* arcûs GFE, quàm arcus BG; item æquè est Sinus anguli GKE, quàm anguli I: nam GO est recta perpendicularis ad Diametrum, ducta æquè benè ab extremitate arcûs EFG, quo mensuratur Vicinus anguli I, quàm ab extremitate arcûs BG, quo mensuratur I.

DEFINITIO III.

450. Recta BO, quæ pars est radii, intercepti inter Sinum rectum & Peripheriam, dicitur *Sinus Versus* ejusdem arcûs BG, item anguli I.

DEFINITIO IV.

451. *Cosinus* arcûs BG, vel anguli I, est recta GX, quæ est *Sinus* arcûs GF, vel anguli L, qui prioris arcûs, vel anguli, Complementum est ad 90°. Estque *Cosinus* ille æqualis rectæ OI, seu parti radii, interceptæ inter OG Sinum rectum, & Centrum. Vocatur etiam *Sinus Complementi*.

COROLLARIUM.

452. Arcûs vel anguli dati *Sinus Versus* est semper excessus radii supra *Cosinum*. Et è converso: *Cosinus* semper est excessus radii supra *Sinum Versum*.

DEFINITIO V.

453. *Sinus totus* est Radius BI, seu Sinus quadrantis BGE, ac proinde anguli recti, seu 90°.

DEFINITIO VI.

454. *Tangens* arcûs BG, vel anguli I, est recta, occurrens perpendiculariter radio IB, terminata ab una parte in B, & ab altera parte in puncto, ubi occurrit rectæ, è Centro per aliud arcûs extremum ductæ; adeoque in figura est AB. AL dicitur *Secans* arcûs BG, vel anguli I. CF *Cotangens* arcûs BG, item anguli I; CL verò eorumdem *Cosecans* audit.

COROLLARIUM I.

455. Arcus, aut angulus 90° nullam habet Tangentem, neque Secantem : posito enim arcu FHE, aut angulo K 90° : nulla recta, ad radium KE in puncto E perpendicularis, concurrere poterit cum KF aut KR, in quamcumque partem producantur.

COROLLARIUM II.

456. Pro cæteris autem arcubus, aut angulis, eadem est Tangens, eademque Secans arcûs, ejusque complementi ad 180°; aut anguli, ejusque Vicini : nam recta, v. g. AB, occurrens perpendiculariter radio BI, & concurrens cum recta, è Centro per G aut S ducta, æquè benè ducitur à B, extremitate arcûs SRB, quàm à B, extremitate arcûs GB. Deinde Tangens per B trajecta, cum diametro SG alterutram partem versùs producta, tantùm concurrere potest versùs unicam determinationem; igitur AB est Tangens arcûs BG item arcûs BRS, ejus Complementi ad 180°; item est Tangens anguli I, ejusque Vicini, seu anguli BIS. Idem est de Secante AI.

ARTI-

ARTICULUS I.

De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium.

THEOREMA I.

Sinus arcuum similium ad Radios suos eandem rationem habent.

457. DEMONST. Chordæ arcuum similium ad Radios eandem rationem habent (279); sed Sinus sunt chordarum dimidia (448); ergo Sinus illi ad Radios eandem rationem habent. *Q. e. d.*

458. SCHOLION. In Tabulis *Sinuum* & *Tangentium* ordinariis, Radius, seu Sinus totus, concipitur in 10,000,000 partes æquales divisus; & ultra has fractiones, in determinando Sinuum & Tangentium quantitate, non descenditur. *Secantibus* non utimur, cùm omnia Trigonometriæ Problemata absque illarum ope resolvi possint.

COROLLARIUM.

459. Chorda sustentans arcum 60° est $=$ Radio (218), seu Sinui toti: Sinus ergo anguli $30^\circ = 5,000,000$.

PROBLEMA I.

Dato Sinu GO (fig. 1); *invenire Cosinum* GX, *& Sinum versum* BO.

460. RESOLUTIO I. Ex quadrato GL Radii, seu Sinûs totius, subtrahatur quadratum Sinûs GO:

II. È residuo extrahatur radix quadrata, quæ dabit Cosinum GX:

III. Cosinus GX subtrahatur ex Sinu toto, & residuum erit Sinus versus BO.

Etenim, cùm □ GOLX fit rectangulare, eft $GX = OL$; fed $GL^2 = GO^2 + OL^2$ feu GX^2; ergo &c. E. G. fit $GI = 10,000,000$; $GO = 5,000,000$; invenietur $GX = 8660254$, Sinus 60°.

PROBLEMA II.

Dato Sinu GO *arcûs* BG; *invenire Sinum arcûs dimidii* $= \frac{1}{2}$ BG.

461. RESOLUTIO I. Quæratur per præcedens problema Sinus verfus BO:

II. Ex $GO^2 + OB^2$, $=$ chordæ GB^2, radix quadrata trahatur: erit hæc æqualis ducendæ BG; adeoque ejus dimidium dabit quæfitum.

PROBLEMA III.

Dato Sinu KG *arcûs* KF (fig. 2) *invenire Sinum* KE *arcûs dupli* KB.

462. RESOLUTIO I. Quære Sinum GX Complementi (460):

II. Deinde ad BX, GX & BK quære quartum proportionalem (arith.); atque hic inventus dabit KE.

Nam △△ BGX & BKE funt æquiangula, ergo fimilia; eft adeò $BX : GX = BK : KE$; ergo &c.

PROBLEMA IV.

Datis Sinibus FG (fig. 3) *&* DE, *arcuum* FA *&* DA, *quorum differentia* DF 45′ *major non eft; invenire Sinum quemcumque intermedium* IL.

463. RESOLUTIO I. Ad DF, IF & differentiam inter GF DE & IL, quæratur quartus numerus proportionalis (arith.):

II. Hic inventus addatur Sinui minori FG; eritque ſumma Sinus IL.

DEMONST. Cùm arcus DF & FI paucorum ſolùm ſint minutorum, pro rectis, citra errorem ſenſibilem haberi poterunt. Porrò FG, IL & DE parallelæ ſunt; ſi igitur ex F ad DE demittatur perpendicularis FH; erit HE = FG = KL: adeoque DH eſt differentia datorum Sinuum FG & DE: ob parallelas autem, eſt DF : IF = DH : IK; jam verò IK + FG = IL; ergo quartum proportionalem addendo minori Sinui dato, prodit Sinus IL deſideratus. *Q. e. d.*

PROBLEMA V.

Datis Sinibus BD *&* FE (fig. 4) *duorum arcuum quorumcumque* AB *&* AF; *invenire Sinum arcûs ſemidifferentiæ eorumdem.*

464. RESOLUTIO I. Sinus minor BD ſubtrahatur ex majore FE, relinquetur differentia = FK:

II. Ex datis Sinibus BD & FE, inveniantur Coſinus BI & FH (460) = DC & EC:

III. Coſinus minor FH ſubtrahatur è majore BI; erit BK differentia:

IV. Ex $BK^2 + FK^2$ extracta radix dat chordam BF, cujus dimidium dat Sinum quæſitum.

PROBLEMA VI.

Invenire Sinum 45°.

465. RESOLUTIO. Ex dimidio quadrati Sinûs totius extracta radix dat petitum.

Sit enim angulus L (*fig.* 1) 45°; erit etiam angulus IGX = 45°. Ergo GX = XL; ſed $GL^2 = GX^2 + LX^2$, ſeu $2GX^2$; ergo &c. Factâ operatione reperitur ſinus $45° = 7071068$.

PROBLEMA VII.

Invenire Sinum anguli 18°.

466. RESOLUTIO. Sinum totum divide mediâ & extremâ ratione, & dimidium numeri majoris dabit quæſitum.

DEMONST. Sit I (*fig.* 5) in Centro 36°; fiat BO = chordæ BA: quoniam I = angulo OBI, eſt OI = OB = AB. △△ ABO & AIB ſunt æquiangula, ergo ſimilia; erit adeò AI : AB = AB : AO; igitur cum AB = OI; eſt AI : OI = OI : AO; itaque AI diviſa eſt mediâ & extremâ ratione (228), & OI = AB eſt ejuſdem pars major (nam in △ AOB, cum angulus AOB ſit major angulo ABO, eſt AB (170) major quàm AO); ergo chorda AB ſuſtentans arcum 36°, cujus dimidium = ſinui 18°, eſt æqualis majori parti Sinûs totalis, diviſi mediâ & extremâ ratione. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

467. Invento Sinu 18°, reperitur Sinus 36° per problema tertium (462).

468. SCHOLION. Ut datum numerum dividas mediâ & extremâ ratione: ſumito quinies quadratum ejus dimidii: ex illo quadrato extrahe radicem quadratam: ex hac radice inventa ſubtrahe numerum datum; reſiduum & radix illa erunt partes quæſitæ. Manifeſta fit methodus per Problema V. (269): etenim cùm ibidem AE $\frac{2}{1}$ — BA; $BE^2 = 5AE^2$; igitur radix BE^2 dabit BE; AE ſubtractâ ex BE, reliquum BG = BK dividet AB mediâ & extremâ ratione.

PROBLEMA VIII.

Dato Sinu FG (fig. 3) *unius minuti, seu* 60″; *invenire Sinum unius, vel aliquot secundorum* MN.

469. RESOLUTIO. Ad AF, FG & AM quære quartum proportionalem, ille dabit quod quæritur.

DEMONST. Arcus AM & AF perexigui sunt, atque adeò AMF pro recta haberi potest citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus Sinus exprimimus, assignabilem; quare cùm sit MN ipsi FG parallela; erit $AF : FG = AM : MN$. *Q. e. d.*

470. SCHOLION. Eâdem ratione, si fuerit opus, inveniri potest Sinus aliquot scrupulorum tertiorum.

PROBLEMA IX.

Datis Sinibus 30° (459); 15° (461); 45° (465); & 36° (467); *Canonem omnium Sinuum construere, nonnisi unico minuto, aut denis secundis, immò unico secundo inter se differentibus.*

471. RESOLUTIO I. Ex Sinu 36°, & 18°, inveniantur Sinus 9°; 4° 30′; 2° 15′ (461). Sinus 54°; 72°; 81°; 85° 30′; 87° 45′ (460). Sinus 27°; 13° 30′; 6° 45′; 40° 30′; 20° 15′; 42° 45′ (461); inde Sinus 63°; 76° 30′; 83° 15′; 49° 30′; 69° 45′; 47° 15′ (460) : ulterius Sinus 31° 30′; 15° 45′; 38° 15′; 24° 45′ (461) : hinc Sinus 58° 30′; 74° 15′; 51° 45′; 65° 15′ (460) : denique Sinus 29° 15′ (461), & ejus Cosinus 60° 45′ (460).

II. Ex Sinu 45° inveniantur Sinus 22° 30′; 11° 15′ (461); 67° 30′; 78° 45′ (460); 33° 45′ (461); 56° 15′ (460).

III. Ex Sinu 30°, & Sinu 54°, inveniatur Sinus 12° (464).

IV. Ex Sinu 12°, inveniantur Sinus 6°; 3°; 1° 30′; 45′ (461); Sinus 78°; 84°; 87°; 88° 30′; 89° 15′ (460): porro Sinus 39°; 19° 30′; 9° 45′; 42°; 21°; 10° 30′; 5° 15′; 43° 30′; 21° 45′; 44° 15′ (461): ulterius Sinus 51°; 70° 30′; 80° 15′; 48°; 69°; 79° 30′; 84° 45′; 46° 30′; 68° 15′; 45° 45′ (460): inde Sinus 25° 30′; 12° 45′; 35° 15′; 24°; 34° 30′; 17° 15′; 39° 45′; 23° 15′ (461): hinc Sinus 64° 30′; 77° 15′; 54° 45′; 66°; 55° 30′; 72° 45′; 50° 15′; 66° 45′ (460): hinc porro Sinus 32° 15′; 33°; 16° 30′; 8° 15; 27° 45′ (461): inde ulterius Sinus 57° 45′; 57°; 73° 30′; 81° 45′; 62° 15′ (460): porro Sinus 28° 30′; 14° 15′; 36° 45′ (461); & horum Cosinus 61° 30′; 75° 45′; 53° 45′ (460): denique Sinus 30° 45′ (461), & ejus Cosinus 59° 15′ (460).

V. Ex Sinu 15° inveniantur 7° 30′; & 3° 45′ (461): hinc Sinus 75°; 82° 30′; 86° 15′ (460): inde 37° 30′; 18° 45′; 41° 15′ (461), & horum Cosinus 52° 30′; 71° 15′; 48° 45′ (460): denique Sinus 26° 15′ (461), & ejus Cosinus 63° 45′ (460).

VI. Quod si Sinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120; & differentiam inter duos immediatè sibi mutuò succedentes 45′ deprehendes: inveniantur ergo Sinus intermedii per Problema IV. (463).

VII. Tandem Sinus scrupulorum secundorum, ab 1 usque ad 60, inveniantur per Problema præcedens (469): ita Canon Sinuum erit constructus.

PROBLEMA X.

Dato Sinu GO (fig. 1) *arcûs* BG; *invenire Tangentem* AB, *& Secantem* AI *ejusdem arcûs.*

472. RESOLUTIO. Quoniam est AB parallela ad GO, dicatur: ùt Cosinus GX = OI ad Sinum GO; ita

BI, ſeu Sinus totus, ad Tangentem AB. Item ut Coſinus GX = OI ad BI, ſeu ad Sinum totum; ita GL, ſeu Sinus totus, ad Secantem AI.

473. SCHOLION I. Conſtructo igitur Canone Sinuum, haud difficilis eſt conſtructio Canonis Tangentium, atque Secantium.

474. SCHOLION II. In uſu ordinario Canonis Sinuum atque Tangentium, ſolent omitti duæ dextimæ Cyphræ, quæ notâ ab aliis ſeparantur; iiſdem tamen utendum eſt, cùm calculus exactior deſideratur.

475. SCHOLION III. Quoniam Sinus & Tangentes ſunt numeri prolixi, qui multiplicationem, & diviſionem in Trigonometria permoleſtas reddunt; ideo Geometræ certos numeros excogitarunt, qui loco vulgarium, non ſine inſigni calculi compendio, poſſunt adhiberi; quia multiplicationem in additionem; & diviſionem in ſubtractionem convertunt. Dicuntur *Logarithmi*, & non ſolùm pro omnibus Sinibus & Tangentibus; Verùm etiam pro numeris naturalibus ab 1 uſque ad 1000, nonnunquam ultra, in Tabulis Sinuum & Tangentium vulgaribus extant.

PROBLEMA XI.

Invenire Sinûs cujuſcumque dati Logarithmum.

476. RESOLUTIO. Ut Logarithmi eo accuratiores inveniantur, aſſumendi ſunt Sinus ad radium 10000000000 conſtructi. Mulctantur nempe Sinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cùm adeò Sinus ſint numeri 10 ùt plurimùm notis conſtantes, in Canone autem Logarithmorum, qui proſtat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non aſcendunt; Logarithmi eorum inveniuntur per Problema Arithmetices. Utendum verò eſt Canone Logarithmorum majore.

Ex. Gr. ſit inveniendus Logarithmus Sinûs 23°, qui apud PITISCUM eſt 3907311284. Reſectis, versùs ſiniſtram, quinque notis 39073, ipſis reſpondens Logarithmus eſt 4.5918768; conſequenter Logarithmus numeri 3907300000 eſt 9.5918768. Differentia tabularis eſt 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111, ita notæ residuæ Sinûs dati 11284, ad numerum quartum proportionalem 12 : qui si addatur Logarithmo 9.5918768, prodit Logarithmus quæsitus 9.5918780; qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XII.

Dato Logarithmo Sinûs & Cosinûs; invenire Logarithmum Tangentis.

477. RESOLUTIO I. Logarithmus Sinûs addatur Logarithmo Sinûs totius :

II. A summa subtrahatur Logarithmus Cosinûs; & residuum est Logarithmus Tangentis.

Ex. Gr. inveniri debet Logarithmus Tangentis 23°.

Addantur	Log. Sin. 23°	=	9.5918780
	Log. Sin. tot	=	10.0000000
	à summa	=	19.5918780
	subtrahatur Log. Cos.	=	9.9640261
	relinquitur Log. Tang.	=	9.6278519

ARTICULUS II.

De Analysi Triangulorum.

THEOREMA I.

In △ rectangulo unus Cathetorum est ad alium, sicut Sinus totus ad Tangentem anguli, huic alteri Cathetorum oppositi.

478. Si sit A rectus (*fig.* 8) est AC : AB = Sin. tot. : tang. C. Item est AB : AC = Sin. tot. : tang. B.

DEMONST. Ex C, intervallo CB, duc Circulum vel arcum : produc CA usque in L; ad punctum L fiat tangens

tangens LK; producatur CB, donec concurrat cum tangente LK; cùm KL sit parallela AB, erit AC : AB = LC : LK; jam verò LC est radius Circuli, seu sinus totus; & LK est Tangens : ergo AC : AB = sin. tot. : tang. C. Si ex B, intervallo BC, arcum ducas; productâ BA, donec concurrat cum tangente ad punctum C erectâ; evidens fiet esse AB : AC = BC seu sin. tot : tang. B. *Q. e. d.*

THEOREMA II.

In omni △, v. g. ABC (fig. 9), *latera sunt ùt Sinus oppositorum angulorum.*

479. DEMONST. Cùm enim omne triangulum Circulo inscriptibile sit; erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum; consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (448) : sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (138); ergo ùt latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B; ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A; ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

In △ (fig. 10) si A *formetur lateribus* AC *&* AB *inæqualibus; atque perpendicularis ab* A *ad* BC *ducta, v. g.* AO, *intrà basin* BC *cadat : est* BC *ad* AC + AB, *sicut differentia inter* AC *&* AB *ad differentiam inter segmenta* CO *&* OB.

480. DEMONST. Ponamus AC majorem quàm AB; erit etiam CO major quàm OB : nam $AC^2 = AO^2 + CO^2$; & $AB^2 = AO^2 + OB^2$; quoniam itaque AC^2 est majus AB^2; erit $AO^2 + CO^2$ majus $AO^2 + OB^2$; igitur CO^2 est majus OB^2; ergo CO est major quàm OB. His præmissis : ex A, ùt Centro, intervallo late-

ris AB minoris, describe Circulum; & produc FA usque in peripheriæ punctum E; est CE = CA + AB; BO = OL (126); ergo CL est differentia CO ad OB; & CF est differentia CA ad AB : jam verò est BC : CE, seu AC + AB = FC : CL (259). *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

In △ (fig. 11) *si* A *formetur lateribus* AC *&* AB *inæqualibus; atque perpendicularis ex* A *ad* BC *demissa, intrà basin* BC *cadat : est* AC + AB *ad* FC *differentiam, sicut* Tangens *medietatis angulorum* B + C (*prædictis lateribus oppositorum*), *est ad* Tangentem *medietatis differentiæ angulorum* B *&* C.

481. DEMONST. Ponamus latus AB brevius esse AC. Ex puncto A, ùt Centro, intervallo AB Circulum describe : produc FA usque in E : ducatur EB; & FK parallela ad EB : insuper duc FB : tunc ex F, ùt Centro, intervallo FB, duc arcum BG; & ex B, ùt Centro, etiam ad intervallum BF, ducito arcum FI. CE est = AC + AB. FC est differentia inter AC & AB. Chorda BE est *Tangens* medietatis angulorum B + C : nam, cùm F sit Centrum arcûs BG, & angulus FBE rectus (mensuratur enim $\frac{1}{2}$ arcûs FRE); erit EB Tangens Circuli, cujus BF est radius (124); item est *Tangens* anguli EFB; jam verò hic angulus æquatur dimidio angulorum B + C : etenim, quia AF = AB, est angulus AFB = angulo ABF; item angulus AFB est æqualis angulis C, & FBC simul sumptis (167). FK est *Tangens* medietatis differentiæ inter B & C : nam FK est *Tangens* anguli FBK; B enim est Centrum arcûs FI; & quoniam, ex constructione FK parallela ad EB, atque adeò angulus KFB = angulo EBF (109), qui rectus est; erit etiam KFB rectus; ergo KF est Tangens arcûs FI (124), item anguli FBC; jam verò B superat C ad

bis angulum FBC : nam angulus ABF = angulo AFB = angulis C & FBC. Igitur cùm FK parallela ad EB, eſt CE ſeu AC + AB : FC = EB : FK. *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

In △ rectangulo, ambobus Cathetis AB & AC (fig. 12) notis; invenire Hypothenuſam, & angulos acutos B & C.

482. RESOLUTIO I. Ex $AB^2 + AC^2$ radix extracta dat hypothenuſam BC.

II. Inferatur (478)

ùt latus AB,

ad latus AC :

ita ſinus totus,

ad tangentem anguli B.

Ex. gr. ſit AB 79 pedum, AC 54 pedum; per Sinus atque Tangentes ſic operare :

$$AB = 79,$$
$$AC = 54:$$
$$\text{Sin. tot.} = 100000,$$

ducto ſecundo, ſeu AC = 54; in tertium = 100000; factum 5400000 dividatur per primum, ſeu per 79; & quotus 68354 dat tangentem anguli B; cui in Canone tangentium reſpondet quàm proximè 34° 21′ : hoc ſubtracto ex 90°, reſiduum 55° 39′ dat proximè angulum C.

Per Logarithmos verò ſinuum & tangentium facilius operaberis modo ſequenti. Logarithmum ſecundi, ſeu numeri 54, & Logarithm. ſinûs totalis adde in unam ſummam; ex qua ſubtrahe Logarith. primi 79;

& residuum dabit Logarith. tangentis B : ùt patet in schemate adjecto :

Log. AB - - - - - -	1.8976271
Log. AC - - - -	1.7323938
Log. sin. tot. - -	10.0000000
Log. AC+Log. sin. tot.	11.7323938
Log. tang. B - -	9.8347667,

cui in Canone respondent etiam quàm proximè $34^\circ\ 21'$.

483. SCHOLION. Dicitur *quàm proximè* : quia numeri 68354 in Canone tangentium; & 9.8347667 in Canone Logarithmorum tangentium non exactè reperiuntur; atque adeò ultra $34^\circ\ 21'$ minuta aliquot inferiora, seu scrupula secunda &c. aderunt. Si itaque præter scrupula prima, ulteriùs secunda desideres; sequenti invenientur methodo.

484. 1° Operando per Canonem sinuum & tangentium : à tangente v. g. 68354 subtrahe tabulæ proximè minorem 68343, & notetur differentia 11. Similiter proximè minorem 68343, subtrahe ex proximè majore 68386, & notetur differentia 43; atque dicito : 43 dant $60''$, quot dabunt 11? & invenies $15''$; erit ergo B $34^\circ\ 21'\ 15''$; & quoniam adhuc datur, operatione finitâ, residuum; adesse scrupula tertia colliges; at negligi possunt in communi praxi; si tamen ea exoptes; facile ex dictis reperies tertia, ùt invenisti secunda &c.

485. 2° Si resolutionem trianguli instituas per Logarith. sinuum aut tangentium; eodem modo, ùt mox, procedes; v. g. in casu dato; à Logarithmo tangentis B 9.8347667, subtrahe tabulæ proximè minorem 9.8346961, & notetur differentia 706. Similiter Logarithmum proximè minorem 9.8346961 subtrahe ex proximè majore 9.8349673, & notetur differentia 2712; atque dicito : 2712 dant $60''$, quot dabunt 706? & etiam invenies $15''$ &c.

PROBLEMA II.

Datis duobus angulis A & C (fig. 13), *unà cum latere* AB; *invenire latus* BC.

486. RESOLUTIO. Inferatur (479)
ùt ſinus anguli C,
ad latus ſibi oppoſitum AB :
ita ſinus anguli A,
ad latus ſibi oppoſitum BC.

Ex. gr. ſit $C = 48° \, 35'$; $A = 57° \, 29'$; $AB = 74$ pedibus. Per Logarithmos ita operamur :

Log. Sin. C - - - - 9.8750142
Log. AB - - - 1.8692317
Log. Sin. A - - - - 9.9259487
ſumma - - 11.7951804
Log. BC - - - 1.9201662, cui in Tabulis proximè reſpondent 83'.

487. SCHOLION. Quod ſi 83 pedibus non contentus, etiam digitos, ſeu pollices, deſideres; evolve eundem Logarithmum BC, ſub Characteriſtica 2 poſt 830 : & Logarit. 832 quàm proximè ad eum accedere deprehendes; adeoque, præter 83 pedes, adhuc 2 digitos eſſe. Si porrò Lineas deſideres; quære eundem Logarit. denuò ſub Characteriſtica 3 poſt 8320; & ipſi quàm proximè Logarit. 8321 reſpondentem reperies; proinde fore latus BC 8°, 3', 2'', 1'''. Hoc pacto ſemper ratio inſtituenda eſt, quando Logarithmus, ſub ſua Characteriſtica, non accuratus reperitur.

PROBLEMA III.

Datis lateribus AB & BC (fig. 13), *unà cum angulo* C, *uni eorum oppoſito; invenire angulos reliquos.*

488. RESOLUTIO. Inferatur (479) :
ùt latus unum AB,
ad ſinum anguli dati ſibi oppoſiti C :

ita latus alterum BC,

ad ſinum anguli quæſiti, ſibi oppoſiti, A.

Ex. gr. ſit AB = 82′; BC = 95′; C = 64° 33′. Calculum ità inſtitues :

Logar. AB - - - - -	1.9138138
Logar. Sin. C. - -	9.9556688
Logar. BC - - - - -	1.9777236
ſumma - -	11.8333924
Logar. Sin. A - -	9.7195786,

cui in Tabulis proximè reſpondent 31° 37′

489. SCHOLION I. Nota tamen, per præcedens Problema determinari ſolùm A, aut ejus Vicinum : ponamus enim in $\triangle$ *abc* determinatos eſſe angulos, atque latera : ſi foret C = *c*; BC = *bc*; & AB = *ab*; tantùm inferri poteſt A = *a*, vel A = Vicino *a* (192).

490. SCHOLION II. Nonnunquam verò A ex adjunctis determinari : putà ſi fuerit C rectus, aut obtuſus (166); vel ſi fuerit C acutus, & latus AB majus latere BC : nam A non poterit eſſe rectus, aut obtuſus, cùm C deberet eſſe ipſo major (170).

491. SCHOLION III. Ut invenias B : ſubtractis A + C ex 180°, reſiduum dabit quæſitum; ùt patet ex adjuncto ſchemate; in quo ponitur A 55° 40′ 39″; C 64° 33′.

A =	55°	40′	39″
C =	64°	33′	0
A + C =	120°	13′	39″
A + C + B =	179°	59′	60″
B =	59°	46′	21″.

PROBLEMA IV.

Datis duobus Trianguli lateribus inæqualibus AC & BC (fig. 13), *cum angulo intercepto* C; *invenire angulos reliquos.*

Ponuntur AC & BC inæqualia : aliàs, cùm foret A = B, facillimè innoteſcerent abſque Trigonometria.

492. RESOLUTIO I. Inferatur (481)

ùt $AC + CB$,
ad differentiam eorumdem :
ità Tangens semisummæ angulorum A & B,
ad Tangentem semidifferentiæ eorumdem.

II. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus B, datorum laterum majori AC oppositus. Eadem à semisumma subtrahatur, remanebit angulus A.

Ex. gr. sit $AC = 75'$; $BC = 58'$; $C = 108° 24'$. Calculus ita instituetur :

$$\begin{array}{r} AC = 75' \\ BC = 58' \\ \hline AC+BC = 133' \end{array} \qquad \begin{array}{r} AC = 75' \\ BC = 58' \\ \hline AC-BC = 17' \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+B+C = 179° \; 60' \\ C = 108° \; 24' \\ \hline A+B = 71° \; 36' \\ \frac{1}{2} A+B = 35° \; 48' \end{array}$$

Log. $AC + BC$ - - - - -	2.1238516
Log. $AC - BC$ - - -	1.2304489
Log. Tang. $\frac{1}{2} A+B$ - - -	9.8580694
summa - -	11.0885183

Log. Tang. $\frac{1}{2} A-B$ - - 8.9646667, cui in Tabulis proximè respondent $5° \; 17'$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} A + B = 35° \; 48' \\ \frac{1}{2} A - B = 5° \; 17' \\ \hline B = 41° \; 5' \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{2} A + B = 35° \; 48' \\ \frac{1}{2} A - B = 5° \; 17' \\ \hline A = 30° \; 31' \end{array}$$

PROBLEMA V.

Datis tribus Trianguli lateribus; invenire angulos.

493. RESOLUTIO I. Ponamus BC (*fig.* 14) non esse minimum trianguli latus; adeoque A non erit minor quàm B, neque minor quàm C (170); itaque B item C erit acutus; & perpendicularis AO, ex A ad BC demissa, cadet intrà basin BC (174). Si

fuerit AC = AB; erit CO = OB; B = C &c. Resolvatur igitur △ AOB per Problema III. (488).

II. Si AC & AB inæqualia ſint, fueritque AC majus quàm AB; erit CO majus quàm OB. Sit CF differentia inter AC & AB: & CL ſit differentia inter CO & OB.

Inferatur (480)
ùt BC,
ad ſummam AB + AC:
ità CF differentia AB, & AC,
ad CL, differentiam inter BO & CO.

Ex. gr. ſit AB = 36′; AC = 45′; BC = 40′. Calculus ita ſubducitur:

AB = 36′	AC = 45′
AC = 45′	AB = 36′
AB + AC = 81′	FC = 9′

Log. BC - - - - - -	1.6020600
Log. AB+AC - -	1.9084850
Log. FC - - - - - -	0.9542425
ſumma - - -	2.8627275
Log. LC - - -	1.2606675, cui in Tabulis

proximè reſpondent 18′. Quod ſi ulteriùs quæſiveris (487), invenies tandem LC = 1822‴:

BC = 4000‴	OL = 1089‴
LC = 1822‴	LC = 1822‴
BL = 2178‴	OC = 2911‴
BO = 1089‴	

Log. AB - - - - - -	3.5563025
Log. Sin. tot. - -	10.0000000
Log. OB - - - - - -	3.0370279
Log. Sin. BAO - -	9.4807254, ad quem in

Tabulis

Tabulis quàm proximè accedit Logarith. 17° 36′; adeoque angulus B = 72° 24′.

Log. AC - - - - - - - 3.6532125
Log. Sin. tot. - - 10.0000000
Log. OC - - - - - - - 3.4640422

Log. Sin. CAO - - 9.8108297, cui in Tabulis quàm proximè respondet Logarith. 40° 19′; adeoque angulus C = 49° 41′.

Ergo in Triangulo ABC, A = 57° 55′; B = 72° 24′; C = 49° 41′.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

SECTIO PRIMA

DE INSTRUMENTIS GEOMETRICIS, EORUMQUE USU.

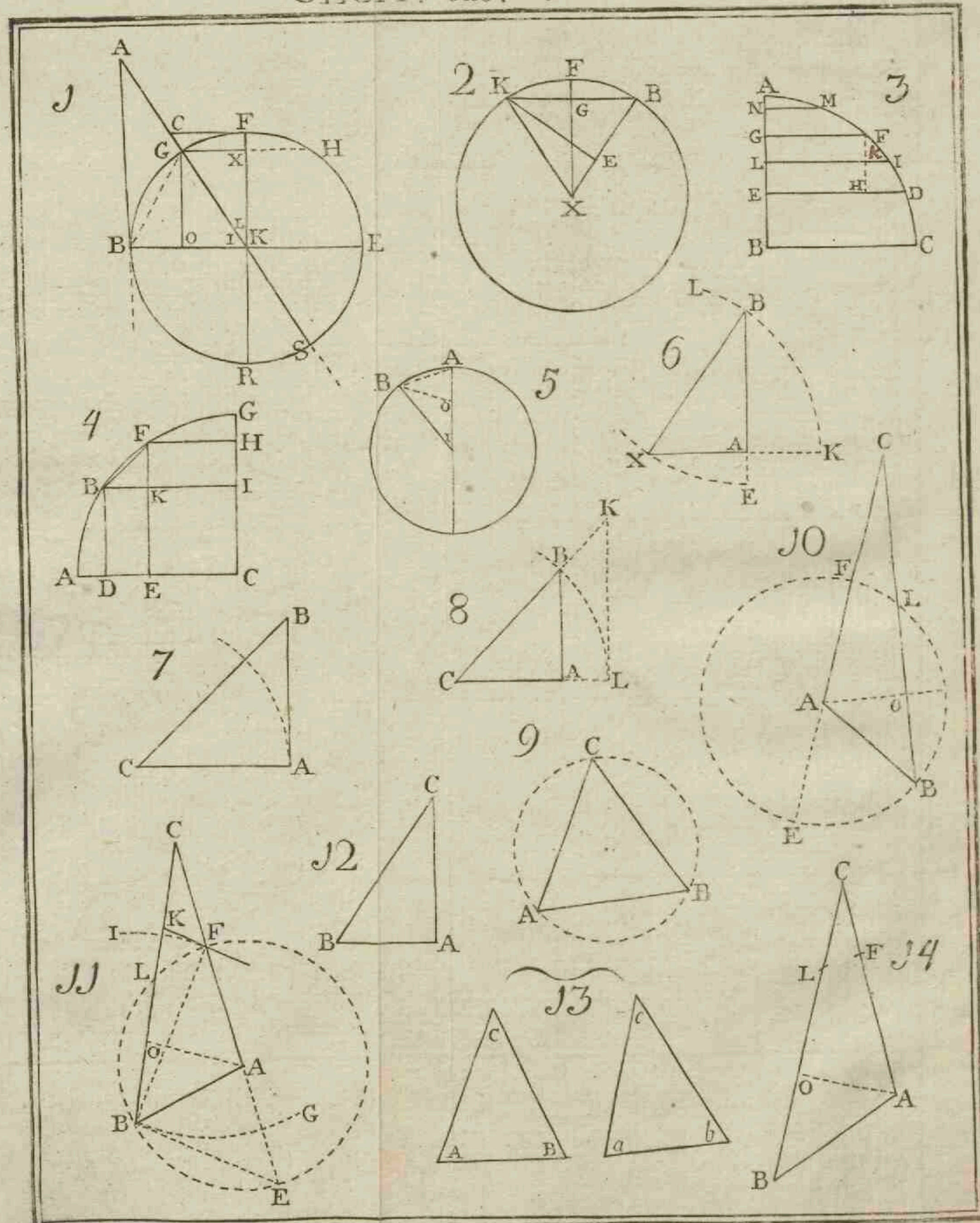
PROBLEMA I.

A puncto dato ad punctum datum lineam rectam ducere.

494. RESOLUTIO I. in charta: Rea exarari solet Calamo, Plumbagine, aut Stylo ferreo vel æneo, juxta Regulam, ad puncta data, applicatam.

II. In ligno vel saxo:
Recta delineatur etiam sine Regula; si filum, cretâ vel cerussâ libutum, punctis datis apprimatur, & mediis digitis prehensum sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In Campo:
Præstò sint baculi plures, quatuor aut quinque pedibus elti; quorum summitati muccinium, aut folium chartæ albæ sit alligatum, ut è longinquo vi-



C.H.Becker f. lov.

deri queant. In quolibet ducendæ rectæ extremo perpendiculariter baculus unus defigatur; tum, oculo applicato ad eorum alterutrum, visus in alterum dirigatur; dum interim minister alios, prout necesse fuerit, intermedios, in directionem lineæ visualis, ita figat (eidem manu signum dando, num à sinistra, aut dextra divergant) ut oculo in unum directo, cæteri non appareant.

495. SCHOLION I. Regulæ ex Orichalco, aut argento paratæ, facilè chartam nigrant; iis ergo præferantur, quæ ex ligno duriori, putà Ebenino, elaboratæ sunt.

496. SCHOLION II. Num Regula exacta sit examinatur; si juxta eam Recta ducatur, & deinde invertatur Regula, ductæque lineæ rursus applicetur, atque tunc altera linea ducta priori accuratè coincidat.

497. SCHOLION III. Ducendis in charta Lineis, pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur. Atramentum Sinicum communi est quòque præferendum.

PROBLEMA II.

Scalam geometricam construere.

498. RESOLUTIO PRIMA.

1. Ducatur recta AF (*fig.* 1 TAB. XI), & in eam transferantur partes 10 æquales B1, 12, 23, 34, &c.: intervallum verò 10 partium = AB ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.

2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa.

3. Per puncta divisionum, 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ ad AF.

4. In ultimam CD transferantur partes 10, partibus ipsius AB æquales.

5. Tandem puncta 10 & 9; 9 & 8; 8 & 7 &c., lineis transversis C9, 98 &c. connectantur.

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B1, 12, 23, 34 &c. pedes; 99 digitum unum; 88 digitos duos; 77 tres; 66 quatuor &c. Et si fuerit AB virga; B1, 12 &c. fore scrupula prima; 99; &c. scrupula secunda &c.

DEMONSTR. $B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10}$ AB, per constructionem; sed pes est decempedæ pars decima; cùm ergo AB sit decempéda, per hypothesin; erunt B1, 12, 23 &c. pedes. Quod erat unum.

Porro quia 99 est parallela ipsi A9, per constructionem; $C9 : CA = 99 : A9$; sed $C9 = \frac{1}{10}$ CA, per constructionem; ergo $99 = \frac{1}{10}$ A9. Quare, cùm A9 sit pes; erit 99 digitus. Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. Quod erat secundum.

Ex dictis perspectu facile est; posito AB quâcumque quantitate integrâ, v. g. virgâ &c.; esse B1, 12 &c. scrupula prima; 99; 88 &c. scrupula secunda. Quod erat tertium.

COROLLARIUM.

499. Si ergo Circini crus unum collocatur in I, & alterum in K; erit intervallum $IK = 1^{\circ}\ 4'\ 5''$; & ita porro.

500. RESOLUTIO SECUNDA.

1. Duc AL (*fig.* 2): eamque in 10 partes æquales partire:

2. AF æquivaleat $\frac{1}{10}$ AL: ducque LF:

3. Dein à punctis, 9, 8, 7 &c. ducito 9X, cæterasque, sic ut singula sit parallela ad AF:

4. Producatur pro libitu AL, in qua, tot quot opus erit, notentur partes LC, CB &c. æquales AL.

Erunt adeò BC, CL, LA partes integræ; L1, 12, 23 &c. scrupula prima; 9X, & cæteræ parallelæ erunt scrupula secunda.

COROLLARIUM.

501. Si igitur oporteat habere $2° 6' 9''$; Circini crus unum ponatur in B & alterum in 6; hocque intervallum transferatur in rectam, in charta ductam; cui deinde adjungas Circini intervallum à 9 in X.

PROBLEMA III.

Catenam parare, Lineis in Campo metiendis aptam.

502. RESOLUTIO I. Quoniam in Brabantia ſolet adhiberi menſura 20 pedum, quæ *Virga* audit; ideo 20 fila ferrea connectantur annulis (ùt videre eſt in *figura* 3), ſic ut à medio cujuſvis annuli ad Centrum vicini pes unus detur. Extremitatibus Catenæ, utrimque, manubrium AB aptatur, atque ab hoc, ad centrum uſque vicini annuli pes quòque habetur. Ut autem decimalium praxi inſerviat: annuli C, F, G &c. ferrei ſint, & minores intermediis annulis cupreis 1, 2, 3 &c.; atque ita B1, 12, 23 &c., ſive intervallum duorum quorumlibet annulorum cupreorum vicinorum, $\frac{1}{10}$ virgæ, ſive ſcrupulum primum dabit. Intervallum duorum pedum extremorum dividatur in 10 partes æquales: ad ſcrupula ſecunda erit quòque parata Catena.

503. SCHOLION I. Manubrium AB, quale etiam habetur ad alterum catenæ extremum, ſemi-circulo, cujus Diameter æqualis ſit Diametro Baculorum pedalium (de quibus problemate ſequenti) eſt inflexum in ſuì medio: notabilis enim ſurreperet error, ſi baculorum craſſitiei negligeretur ratio.

504. SCHOLION II. Cyphræ, à dextimis *puncto* ſegregatæ, denotant Virgas, ſi iis menſura inſtituatur: dextimæ verò, poſt notam poſitæ, ſcrupula ſuo ordine deſignant. Ex. gr. 8.564 deſignantur 8 virgæ, 5 ſcrupula prima (ſeu pollices 10), 6 ſcrupula ſecunda (ſive lineas 12), & 4 tertia &c.

505. SCHOLION III. Menſuræ longitudo, ejuſdemque partitio, non eadem eſt ubivis gentium: varias menſurarum ſpecies re-

præsentat Tabella sequens in particulis istiusmodi, qualium pes Rhenanus, & Romanus antiquus, est 1000.

506. Pes Rhenanus	1000	Namurc. & Mont.	930
Romanus antiq.	1000	Leodii Sti Lamb.	927
Dordracenus	1050	Lovan. Antverp. Brab.	909
Parisinus	1036	Amstelodamensis	904
Londinensis	968	Mechliniensis	890
Middelburgensis	960	Bruxellensis	878
Danus Communis	934	Gandensis	877

COROLLARIUM.

507. Faciunt ergo 878 pedes Lovanienses, 909 Bruxellenses; seu 28 pedes Lovanienses quam proximè faciunt 29 Bruxellenses &c.

508. SCHOLION. Leuca Brabantica complectitur 20000 pedes Brabanticos, sive 1000 Virgas. Milliare Belgicum, seu Leuca itineris, communiter 1500 pedum Rhenolandicorum æstimatur. Passus Geometricus facit 5 pedes; Passus verò Communis $2 + \frac{1}{2}$ pedes æquat.

PROBLEMA IV.

Lineam rectam datam metiri.

509. RESOLUTIO I. in charta :
ope Circini, cujus crura ad lineæ datæ intervallum aperiantur, & dein scalæ geometricæ applicentur.

510. RESOLUTIO II. in Campo :
Ad manum sint deni aliquot baculi pedales (uti figura 4 exhibet), ferreâ cuspide muniti, quos minister deferat omnes : præcedat hic, unâ manu Catenam trahens, insequente, cum altero Catenæ extremo, ipso Geometrâ, qui scrupulosè caveat ne aut intorqueantur fila aut annuli catenæ, vel à recto tramite declinetur. Applicato uno Catenæ extremo ad initium lineæ mensurandæ; intra semi-Circulum manubrii oppositi figat minister unum è

baculis pedalibus; quem, ultra progrediens, ibidem relinquat; huic applicet Geometra ſemi-Circulum manubrii, dum interim ſecundum baculum miniſter terræ infigit. Baculi hi omnes à Geometra recolligendi, eorumque numero patebit virgarum numerus; quem, cum ſcrupulis, ſi quæ fuerint, finità operatione, in charta notabit.

PROBLEMA V.

Num objectum quodpiam, E. G baculus, murus &c., perpendiculariter erectum ſit, explorare.

511. RESOLUTIO I. Detur Cubus ligneus A (*fig.* 5), cujus latus ſingulum, pollicem unum æquat:

II. Funiculo, mobili per foramen congruum, in medio cubi factum, pendeat Cylindrus æneus B, 2 vel 3 pollicibus longus, & pollice latus.

III. Cubi latus applicetur ad baculum, vel parietem, foramine ejuſdem deorſum ſpectante: quoniam perpendiculum iſtud conſtanter ad horizontem perpendiculariter deſcendit, ejuſdem funiculus debebit ubique ad objectum explorandum eſſe parallelus; atque adeò ſic diſponi Cylindrus, ut neque ab eo divergat, neque innitatur eidem.

PROBLEMA VI.

Planum quodcumque examinare, num horizonti parallelum ſit.

512. RESOLUTIO I. Si fuerit mediocris extenſionis, Ex. Gr. tabulæ, muri, horologia ſolaria &c.; ſolent uti inſtrumentis exhibitis fig. 6 & 7, in quibus perpendiculum (ſeu globulus, ſive Cylindrus, plumbeus aut æneus, è tenui filo pendet), juxta lineam

perpendicularem ad BC basin, liberè pendet. Basis BC in varios sensus plano explorando applicetur: non enim erit hoc horizonti parallelum, nisi constanter perpendiculi filum exaratæ lineæ, ad basin BC perpendiculari, respondeat.

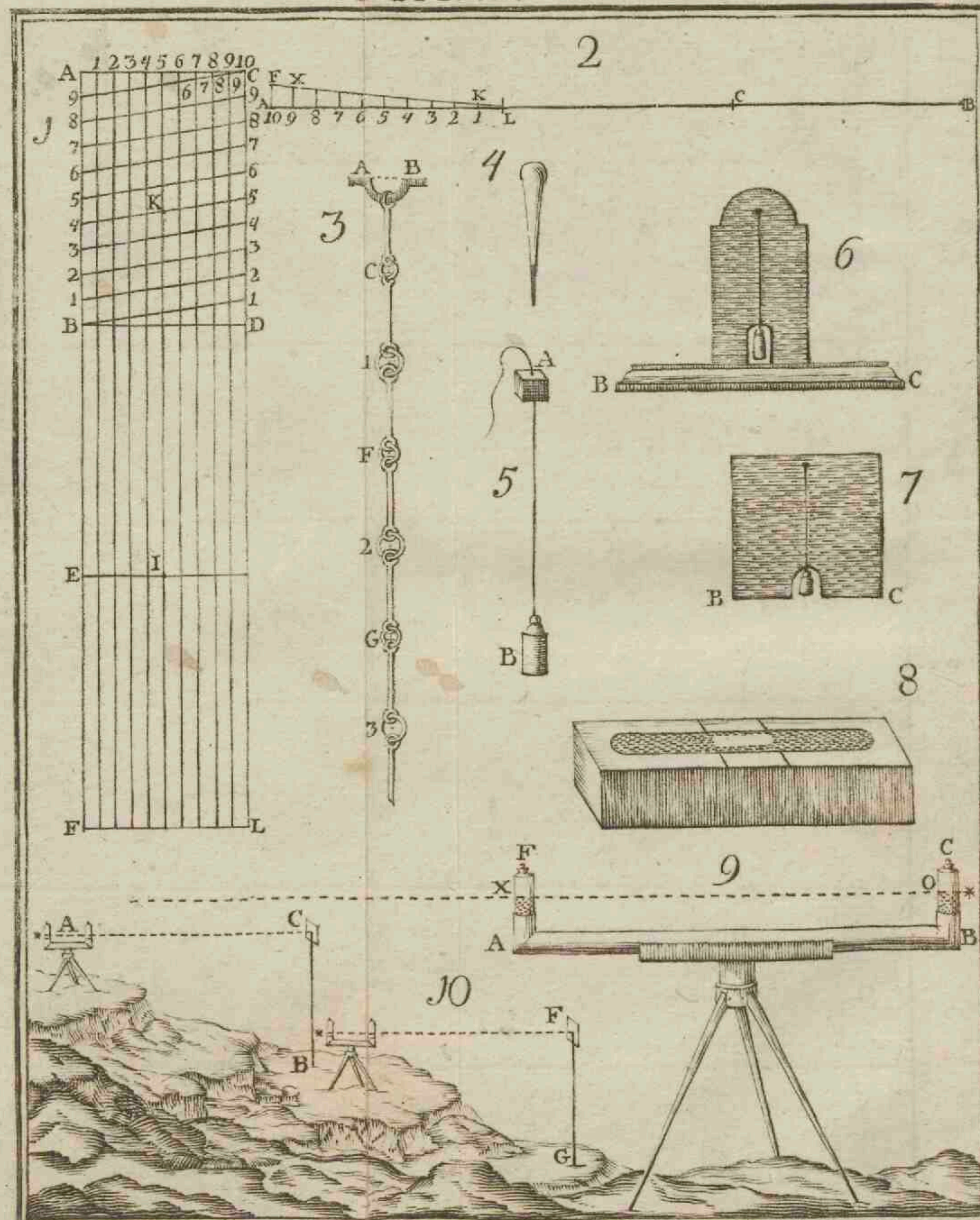
513. SCHOLION. Perutile quòque est parallelepipedum ligneum (*fig.* 8) pede longum; cui Cylindrus Vitreus, spiritu vini, exceptâ majori aëris bullâ, repletus, supernè & parallelè affigitur: bulla enim medium tubi non occupabit, nisi dum & tubus & parallelepipedum in plano requieverint horizonti parallelo.

514. RESOLUTIO II. Si verò Campi plaga sit libellanda: utuntur Geometræ instrumento, exhibito *fig.* 9. Lagenæ Cylindriacæ AF & BC, diametri saltem unius pollicis, è vitro limpidissimo conflatæ, per siphonem AB ex Cupro, aut ferri laminis stannatis, compositum, 7 aut 8 pedibus longum, atque tripedali sustentaculo innixum, communicant. Infunditur aqua limpida, donec ea ad mediam lagenularum altitudinem assurgat. Quoniam in brachiis siphonis liquor sese ad libellam constanter componit; perspicuum fit, radium visualem OX horizonti fore parallelum: atque adeo facile innotescit differentia, si qua detur, inter plagam datam, & horisontale planum.

515. SCHOLION I. Si fuerit montis proclivitas, aut longior quædam horizontis plaga, examinanda: diversis vicibus operatio peragitur: ad hoc præstò sint perticæ nonnullæ, 10 aut 20 pedibus altæ. Collocato instrumento libellatorio in montis cacumine A (*fig.* 10), pertica BC jubeatur ita defigi perpendiculariter in montis declivi, ut radius visualis, per lagenas trajectus, incurrat in perticæ extremum (aut notetur punctum ejusdem in quod dirigitur). Dein transferatur instrumentum ad secundam stationem, ad eum scilicet locum, ubi prima pertica BC fuerat erecta; atque collimetur in perticam GF; & ita porro. Probè tamen sciendum, altitudinis instrumenti rationem negligendam non esse.

516. SCHOLION II. Si operationem similem ad oppositam montis declivitatem instituas, innotescet quæ differentia sit inter planities monti contiguas.

PROBLEMA



C.I.Becker f: lov.

PROBLEMA VII.

Instrumentum Goniometricum, *seu* Graphometrum *construere*.

517. RESOLUTIO I. Ex orichalco, magnitudinis arbitrariæ, parari solent : quæ tamen majoris diametri sunt, præstant. Exhibetur *fig.* 1 TAB. XII.

II. X Centrum est, per quod trajiciatur recta FH; peripheria semi-Circuli dividitur exactissimè in 180°.

III. Regula KL, in Centro X mobilis est; in ejus medio recta KL delineatur, quæ per Centrum X transeat.

IV. In F, H, K & L, perpendiculariter eriguntur *Dioptræ*, seu *Pinnulæ*, in quibus *rima*, ad instrumentum quòque perpendicularis, exactè respondeat diametris AB & KL.

V. Intrà instrumenti aream collocari potest *Pixis nautica*, sic ut ejusdem linea meridiana coincidat cum radio designante 90°. In Rosâ notanda est *linea declinationis*; hæc autem hodiedum in Brabantia est circiter 18°, occidentem versus.

VI. Figitur Graphometrum æneo globulo intrà excavata segmenta PG, ut cochleâ Q, pro libitu, plùs minusve presîâ, Graphometro situs quiscumque detur, atque firmetur : utque tantò consistat firmius, sustentaculo tripedali totum innititur.

VII. Ut graduum quòque minuta, ex. gr. à 5′ ad 5′, dignoscere valeas : sic procedes.

Sit (*fig.* 2) X Centrum Graphometri (cujus pars solùm exarata est); OX linea media Regulæ mobilis : BR peripheriæ pars. In regula mobili, juxta peripheriam Graphometri (initio sumpto ab O, per quod transit OX radius, qui & trajicitur per regulæ pinnulas), fit arcus OE item OG 13°; quemlibet autem arcum divide in 12° tantum, ut vides; ut sic quisque gradus regulæ faciat 1° 5′. Pone igitur lineam OX, cui respondet linea visionis, per dioptras trajecta, non coincidere cum aliquo gradu peripheriæ Graphometri, sed ultra eum, ex. gr. 20° vagari. Attentè inquire, cui gradui peripheriæ respondeat gradus quidam Sectoris OE; ponamusque reperiri 8vum sectoris gradum, 12mo peripheriæ coincidentem; erit adeò angulus BXO 12° peripheriæ, & prætereà 8 graduum sectoris: quoniam ergo gradus quilibet sectoris faciat unum gradum, & quinque minuta peripheriæ Graphometri; octo illi sectoris gradus facient 8° 40′ peripheriæ Graphometri; erit adeo angulus BXO 20° 40′. Itaque dignosces graduum quantitatem, numerando in peripheria Graphometri, quot gradus integri comprehendantur, atque in figura 20°; tum numeres in sectore, quotus ejus gradus respondeat alicui peripheriæ gradui, & toties adde 5′.

518. SCHOLION I. Si libuerit graduum minuta singula prima determinare; majoris diametri sit oportet Graphometrum: sumanturque tunc in sectore Regulæ mobilis 61 gradus peripheriæ, arcumque illum Regulæ mobilis divide in 60°.

519. SCHOLION II. Haud difficile est, ex dictis, intelligere, quo pacto pars quælibet divisionis cujuscumque (ex. gr. scalæ, Barometris, aut Thermometris affixæ), pro arbitrio dividi queat in minores particulas: etenim juxta gradus instrumenti fixos, adjungatur Regula mobilis, in quam v. g. 11 gradus transferas; eorumque intervallum in 10 partes æquales partiaris; hocque pacto $\frac{1}{10}$ cujusque gradûs dignoscere poteris &c. Regula hæc mobilis, instrumento cuicumque affixa, *Nonius* compellatur.

PROBLEMA VIII.

Transportorium *construere.*

520. RESOLUTIO I. Detur lamina ex orichalco AXBCA (*fig.* 3) pro Centro sit Cuspis X. Diameter AB:

circiter 3 pollicum ſit. Peripheria accuratè in 180° gradus dividatur. Area inſtrumenti excavanda eſt, ut conſpici queat debita linearum, & verticis anguli ad Centrum, applicatio.

521. SCHOLION. Conficitur quòque ex cornu lamina pellucida: & quoniam per illud facile tranſparent exaratæ lineæ, non eſt opus excavatione: immo & hoc Tranſportorium orichalceo in eo præſtat, quod chartam minimè maculet.

PROBLEMA IX.

Angulum datum metiri.

522. RESOLUTIO I. in charta:
Tranſportorii Centrum, ſeu cuſpis X, ad anguli verticem applicetur; radiuſque inſtrumenti coincidat alterutri cruri anguli dati; tum videatur, per quem peripheriæ gradum crus aliud (productum ſi opus) tranſeat, v. g. in ſigura LX; atque peripheriæ arcus, inter B, & rectam LX comprehenſus, deſignabit valorem anguli dati.

523. II. alio modo:
Sit arcus AL (*fig.* 4) pars ſexta peripheriæ Circuli, atque adeò graduum 60. In partes ſex primò dividatur; ſexta autem pars prima AB, in 10 gradus ſubdividatur; notenturque partes; ut exhibetur in figura.

524. Ut anguli dati X (*fig.* 5) valor inquiratur per hunc arcum: Circino capiatur arcûs intervallum AL (eſt hoc æquale radio Circuli, cujus arcus AL pars exiſtit (218); unoque pede in X fixo, altero deſcribatur arcus indefinitus ZR (productis antea cruribus XK & XC, ſi opus): ſumatur Circino intervallum ZO, atque illud transferatur ad arcum AL, qui valorem dabit arcûs OZ, adeoque & anguli centralis X.

525. SCHOLION. Si fuerit arcus ZO major 60 gradibus; primò applicetur arcui ZR, arcûs AL totum intervallum, ex. gr. à

Z in L; & deinde inquiratur, quot gradus complectatur pars residua LO: hac addita cum 60° in unam summam, quantitas anguli X obtinetur.

526. III. in Campo:

Graphometrum figatur, seu disponatur ita, ut ejus Centrum anguli mensurandi Vertici respondeat. Signa ponantur in extremis rectarum, angulum datum constituentium. Disponatur sic Graphometrum, ut per dioptras Diametri HF (*fig.* 1) linea visualis occurrat signorum uni: dein Regulam KO mobilem (toto cæteroquin instrumento fixo) sic dirige, ut per dioptras KO radium visualem trajiciens, aliud signum positum detegas: in peripheria, anguli dati valorem reperies.

527. SCHOLION I. Si in Campo angulum datum metiri non liceat; Verticalis, aut ejusdem Vicinus investigetur.

528. SCHOL. II. Certus evades te omnes angulos exactè dimensum esse, si, finitâ operatione, Vicinos quòque metiaris; hisque prioribus additis, summa quorumlibet Vicinorum 180 adæquet.

529. SCHOL. III. Inquirendis angulis regredientibus, aut procurrentibus murorum &c. inservit instrumentum exhibitum fig. 6: constat regulis AB & BC circa áxin, seu centrum B, pro libitu aperibilibus.

530. SCHOL. IV. Anguli A (*fig.* 7) valor quòque inquiritur ope Trigonometriæ: scilicet ab A in X sume partes æquales, pro libitu, v. g. 100: ab A in Z v. g. 80 tales; deinde inquire quot tales inveniantur à Z in X; atque resolve △ per Problema V. (493).

PROBLEMA X.

Data quantitate anguli; ipsum describere.

531. RESOLUTIO I. in charta.

Ducatur recta XE (*fig.* 3). In X (puncto ubi formari petitur angulus) ponatur Centrum Transportorii, ita ut radius ejus cum recta XE coincidat: numerentur gradus à B versùs C; & ad gradum ultimum ex. gr. 45°, notetur cuſpide punctum in charta. Recta, ab X per illud punctum ducta, v. g. XL, angulum deſideratum formabit.

532. II. alio modo :
Ducatur recta XZ (*fig.* 5); deinde ex X, ùt centro, intervallo arcûs AL (*fig.* 4), fiat arcus indefinitus ZR; tum in arcu AL totidem ſumantur gradus, quot complectetur formandus angulus; atque illi ab Z v. g. in O, transferantur; ab X per O recta ducatur, efficietque quod quæritur.

533. III. in Campo :
Collocetur Graphometrum ita, ut radius ejus, ſeu Diameter, lateri dato formandi anguli reſpondeat : Regula mobilis ad gradum datum promoveatur : baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat; hæcque deſideratum efficiet angulum.

534. SCHOLION I. Angulum rectum in charta, aut quovis alio minori plano dato, ducimus *Normâ* : componitur hæc binis Regulis ex ligno, orichalco &c. ad angulum rectum (*fig.* 8) junctis.

535. SCHOL. II. Num Norma accurata ſit probatur, ſi eo mediante formetur angulus A (*fig.* 7) : dein ſumantur in latere AB partes æquales 4, ab A in X; & ab A in Z tales tres; niſi à Z in X, 5 talium partium diſtantia inveniatur, rectus haud erit angulus A, adeoque nec *Normæ* crura ad angulum rectum juncta fuerint.

COROLLARIUM.

536. Facile igitur, ſive in charta, ſive in Campo, angulum rectum conſtruxeris; ſi ex tribus rectis, quarum una 3, altera 4, & tertia 5 partes æquales facit, triangulum conſtruxeris. Circino illud efficies in charta, & funiculis in agro.

PROBLEMA XI.

A puncto Z (fig. 1 TAB. XIII.), extra rectam AB dato, ad illam ducere rectam, quæ cum ea angulum O determinati valoris efficiat.

537. RESOLUTIO I. Duc rectam pro libitu ZL; atque anguli L quantitas investigetur:

II. Angulum L cum formando, adde in unam summam: hæc subtrahatur ex 180; residuum dat valorem anguli in Z formandi. Erit ergo angulus O desideratus.

538. SCHOLION. Ut in Campo Geometræ à puncto dato C (*fig.* 2) ad rectam AB perpendicularem ducant: Regulam Graphometri mobilem disponunt ad angulum rectum; atque procedentes cum instrumento in linea AB, sic ut Diameter ejus lineæ AB coincidat (quod experiuntur sæpius per dioptras collineando), tam diu progrediuntur, dum per dioptras Regulæ mobilis, visus occurrat signo in C constituto.

PROBLEMA XII.

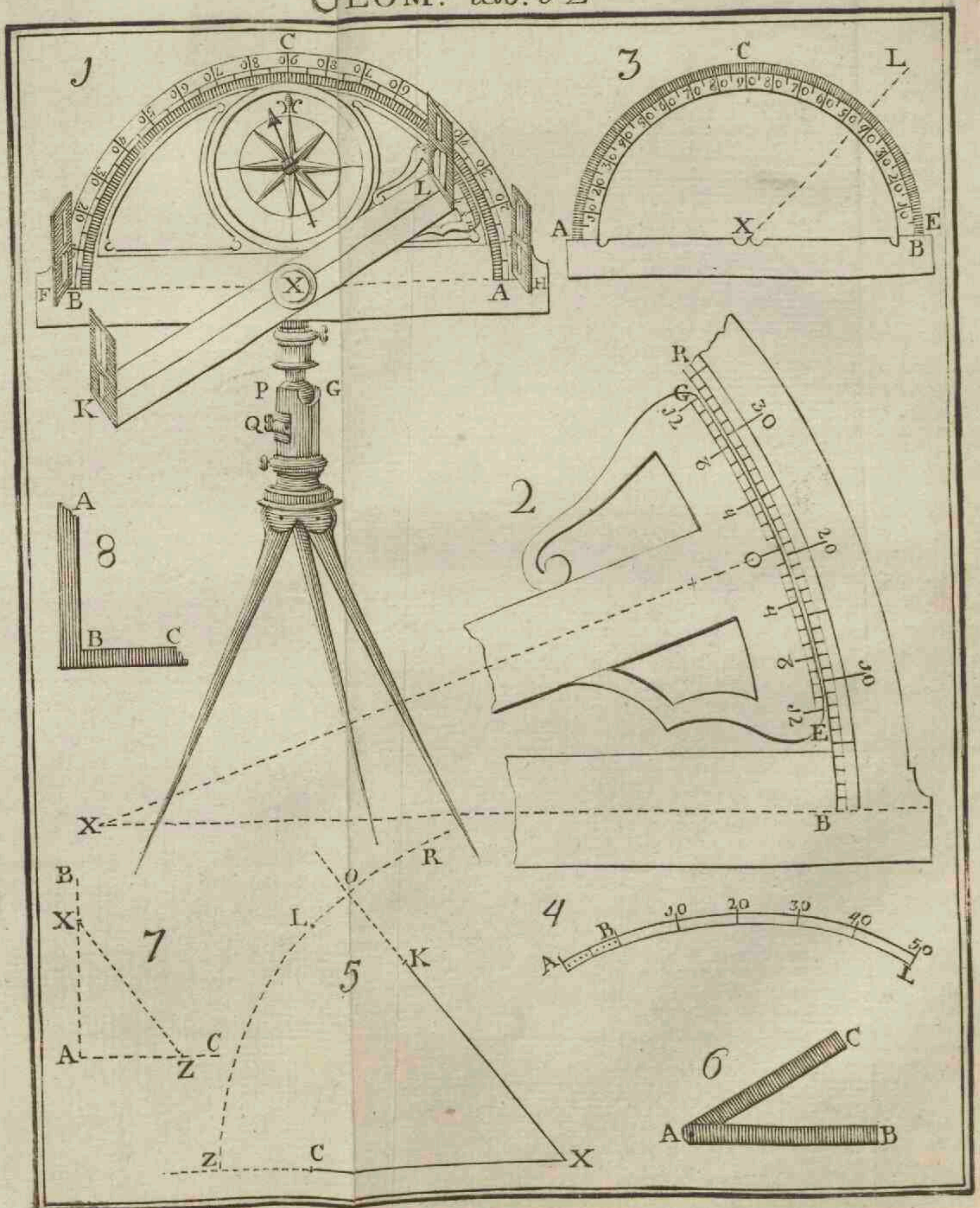
Per punctum C (fig. 3), ad datam rectam AB, parallelam ducere.

539. RESOLUTIO I. Ducatur recta CO, pro libitu efficiens cum AB angulum O.

II. Fiat angulus OCZ = O: & recta CZ, prout necesse fuerit, utrimque protrahatur: eritque ZL parallela ad AB (115).

540. SCHOLION. In charta nonnunquam utuntur *Parallelismo* (*fig.* 4): est autem instrumentum ex duabus regulis IL & CD paratum: retinaculis EF & GH æqualibus, sic ut EG sit æqualis FH, in punctis E, F, H, G mobilibus, conjunguntur. Quoniam in □ GEFH latera quælibet opposita constanter æqualia sunt, quocumque modo regulæ ad sese mutuò admoventur, □ GEFH semper parallelogrammum erit (208); atque adeo GE & HF constanter parallelæ sint oportet (198); ergo & re-

GEOM: tab: 12



C.H.Becker f: lov:

gularum IL & CD latera inter ſe quòque parallela erunt (106). Ut igitur hujus *Parallelismi* ope, per punctum C datum, parallelam agas ad datam AB : Regulæ latus unum applices ad rectam AB, alterius verò Regulæ latus ad punctum C adducas; & juxta hujus ductum, per C rectam agas; eritque hæc priori AB parallela.

PROBLEMA XIII.

Circinum proportionalem construere.

541. RESOLUTIO I. Binæ Regulæ (*fig.* 5 & 6) ex orichalco, AF & VD, medio circiter pollice latæ, pede verò medio longæ, in Centro X ità conjunguntur, ut inſtar Circini (non tamen nimiâ facilitate aut moleſtiâ) moveri queant : immò & in eadem recta diſpoſitæ, Regulæ pedalis vices habeant. Fig. 5 exhibet ſuperficiem Circini proportionalis ab una parte, fig. 6. verò oppoſitam.

II. X Centrum motûs quàm poteſt accuratiſſimè determinetur : niſi enim ad hoc rectæ omnes (duabus ultimis exceptis) tendant, totus inſtrumenti uſus claudicat, & hallucinatur.

542. III. Ducantur primò rectæ duæ LX; atque ſingula in 200 v. g. partes æquales dividatur : inſervient autem rectarum diviſioni, aut earumdem determinandæ rationi; vocantur *Lineæ partium æqualium.*

543. IV. Secundò, rectas ducito PX, quæ proportionibus quadratis rectarum determinandis propriæ ſint; has autem modo partieris ſequenti. Sit XI $\frac{8}{1}$ — PX : erit adeo PX^2 $\frac{64}{1}$ + XI^2 : fiat EK (*fig.* 7) = PX. EH $\frac{8}{1}$ — EK, ſit perpendicularis ad EK; ſit EI = EH; erit adeo $HI^2 = 2EI^2$: fiat E2 = HI; H2 ſit = E3; H3 = E4 &c. Ità fiet, ut recta EK dividatur taliter, ut EI^2 ſit $\frac{2}{1}$ — $E2^2$; $\frac{3}{1}$ — $E3^2$; $\frac{4}{1}$ — $E4^2$ &c. $\frac{64}{1}$ — EK^2. Transferendo autem haſce partes ad rectas EP (*fig.* 5), *Planorum Linea* erit conſtructa.

544. SCHOLION. Mechanici divisionem hanc perficere solent ope tabellæ sequentis, posito PX æquare partes 1000. Porrò inveniri hæ possunt Analogiâ, cujus primus terminus sit maximum latus, ex. gr. 64; secundus verò homologum illud latus, quod quæritur, v. g. 5 pro plano quintuplo minimi; tertius autem terminus sit quadratum numeri partium lateris maximi, quod hic = 1000000; Radix quadrata quarti termini 78155, quàm proximè dabit 279 partes pro latere homologo plani quintupli.

1	125	17	515	33	718	49	875
2	177	18	530	34	729	50	884
3	216	19	545	35	739	51	892
4	250	20	559	36	750	52	901
5	279	21	573	37	760	53	910
6	306	22	586	38	770	54	918
7	330	23	599	39	780	55	927
8	353	24	612	40	790	56	935
9	375	25	625	41	800	57	944
10	395	26	637	42	810	58	952
11	414	27	650	43	819	59	960
12	433	28	661	44	829	60	968
13	450	29	673	45	839	61	976
14	467	30	684	46	848	62	984
15	484	31	696	47	857	63	992
16	500	32	707	48	866	64	1000

545. V. Juxta *Planorum Lineam* reperiri solet *Polygonorum Linea* RX, Polygonis regularibus, à Quadrato ad Dodecagonum inclusivè, construendis adinventa. Assumatur RX pro latere Quadrati inscripti Circulo: atque in 1000 partes divisum ponatur: Tabellâ adjectâ innotescunt partes assumendæ X5 pro Pentagono; X6 pro Hexagono &c.; eas autem facili negotio eruere liceat è Sinuum Tabula.

Quadratum

Quadratum	1000
Pentagonum	831
Hexagonum	707
Heptagonum	613
Octogonum	540
Enneagonum	484
Decagonum	437
Endecagonum	398
Dodecagonum	366

546. VI. Ex adverſo, ad oppoſitam Circini oram, in ſuperficie delineantur *Chordarum*, *Solidorum*, atque *Metallorum* Lineæ. Primò pro Chordis : ducantur rectæ CX : deinde ducatur in charta, vel potiùs in tabula ænea, recta illi æqualis, quæ aſſumatur pro Diametro ſemi-Circuli, cujus Peripheria dividatur exactè in 180°. Circino capiatur intervallum ab extremitate Diametri, ad ſingulum ex gradibus, ad uſque 180 ; quodlibet autem in Circino proportionali transferatur ab X, in rectam XC ; notenturque partes per quinos, aut denos ſingulos gradus : habebuntur adeò notatæ 180 Chordæ, quarum prima ſubtendit unum gradum, ultima verò 180° Circuli, cujùs Diameter æquatur rectæ datæ, quæ aſſumpta fuerit pro Diametro ſemi-Circuli diviſi in 180°.

547. VII. *Chordarum Lineæ* proxima eſſe ſolet *Solidorum Linea* SX ; talis autem hæc eſt, ut SX^3 ſit $\frac{64}{1} + X1^3$. Porro ut facili methodo medias diviſionum particulas determines, Tabella ſequens detur. Ponitur XS partium 1000 ; erit adeo $X1 = 250$. Quod ſi quæſiveris, quot partes ſimiles complectatur

X5, pro latere homologo Solidi ex. gr. quintuplo majoris quàm eſt minimum X1 : hanc inſtitues Analogiam, in qua primus terminus ſit maximum ſolidum (atque adeò hic 64); ſecundus ſit ſolidum ſimile, cujus quæritur latus homologum 5; tertius verò ſit Cubus numeri partium lateris maximi, ſeu hic 1000000000; quartus autem invenietur 78125000; cujus $\sqrt[3]{} = 427$, quàm proximè dabit latus homologum Solidi quintupli. Et ità de cæteris.

1	250	17	643	33	802	49	914
2	315	18	655	34	810	50	921
3	360	19	667	35	818	51	927
4	397	20	678	36	825	52	933
5	427	21	689	37	833	53	939
6	454	22	700	38	840	54	945
7	478	23	711	39	848	55	951
8	500	24	721	40	855	56	956
9	520	25	731	41	862	57	962
10	538	26	740	42	869	58	967
11	556	27	750	43	876	59	973
12	572	28	759	44	882	60	978
13	588	29	768	45	889	61	984
14	602	30	777	46	896	62	989
15	616	31	785	47	902	63	995
16	630	32	794	48	908	64	1000

548. Sequitur *Linea Metallorum* MX. Sex Metalla numerantur, chymiciſque characteribus indigitantur : nempe Aurum ☉ : Plumbum ♄ : Argentum ☾ : Cuprum ♀ : Ferrum ♂ : Stannum ♃.

Quoniam duorum Solidorum pondera ſunt in ratione compoſita gravitatis ſpecificæ & Voluminis : conſequens eſt primò; ſi fuerint ejuſdem Voluminis, pondera eſſe in eadem ratione, quâ ſunt gravitates ſpecificæ: ſecundò, ſi fuerint ejuſdem gravitatis ſpecificæ, fore pondera ùt Volumina: tertiò, ſi ſint pondera æqualia, fore gravitates ſpecificas in ratione inverſa Voluminum. Quod ſi ergo cognita ſit ratio inter gravitates ſpecificas & pondera, & præterea datum ſit Volumen unius; facilè innoteſcit alterius Volumen; cùm proportionis quartus ſit terminus. Ex. gr. quæritur Volumen ſolidi ex Ferro, ejuſdem ponderis cum Solido ex Stanno, cujus notum eſſe ponitur Volumen, vel Diameter, quæ ſit 1000 partium: demus ſpecificas eorum gravitates eſſe ùt 558 libræ ad 516 libras cum 2 unciis. Fiat hæc analogia: ùt 558 libr. ad 516 libr. + 2 uncias, ita cubus 1000, ad cubum Diametri Solidi ferrei; quæ, radice cubica extracta, invenietur 974 quàm proximè.

549. Tabella ſequens ſiniſtima indicat gravitates ſpecificas; immo quot libras & uncias pes cubicus cujuſque Metalli adæquet in menſura & pondere gallicanis: dextima verò indicat rationem laterum homologorum, ſeu Diametrorum in Sphæris; poſita Diametro Metalli leviſſimi, ſeu Stanni, 1000 partium; dum Solida, ex iis compoſita, æqualis ſunt ponderis.

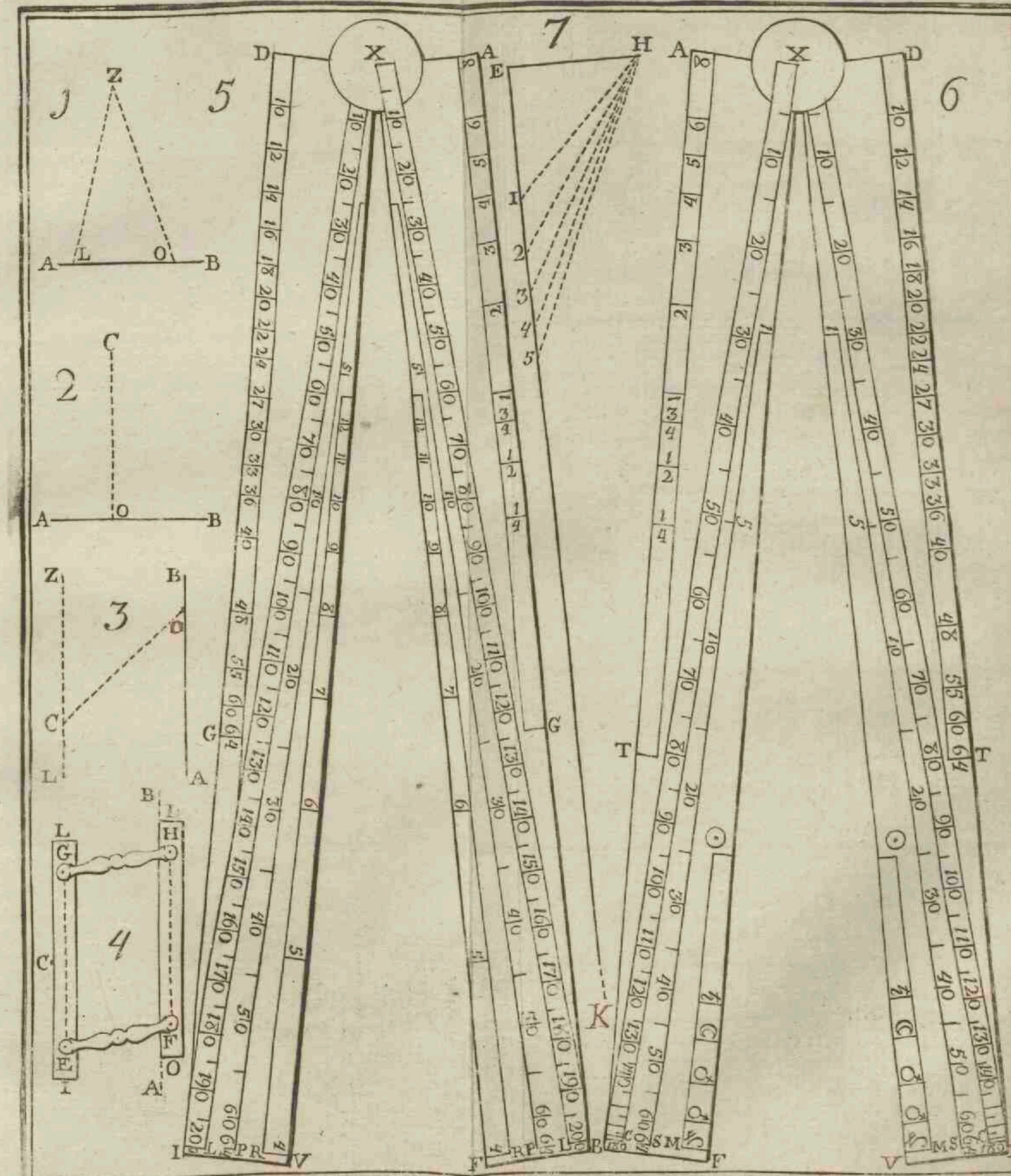
	libr.	unc.		
Aurum	1326.	4	Aurum	730
Plumbum	802.	2	Plumbum	863
Argentum	720.	12	Argentum	895
Cuprum	627.	12	Cuprum	937
Ferrum	558.	0	Ferrum	974
Stannum	516.	2	Stannum	1000

Sit itaque linea MX = 1000. ♂X = 974. ♀X = 937. ☾X = 895. ♄X = 863. ☉X = 730: erit ritè conſtructa *Metallorum Linea*.

550. IX. Ad Oram Regulæ extimam GD & GA recta ducitur, in qua partes notantur, quibus innotescunt pondera Globorum Tormentorum bellicorum: quoniam enim experientia habet globum ferreum Diametri 3 pollicum Parisinorum ponderare libras 4 Gallicas; intervallum 3 talium pollicum ponatur à 4 in 4 in *Linea Solidorum* XS; atque manentibus ità apertis Circini cruribus, reliqua intervalla ab 1 in 1; à 2 in 2; à 3 in 3 &c. à 64 in 64, transferantur à G in rectam GD. Intervalla autem, quæ rectâ GD majora fuerint, notentur omnia in recta quâdam, ductâ in charta; tum apertis omninò Circini cruribus, ita ut regulæ ambæ unicam rectam GDAG constituant, perge à G eadem notare. Si dein Circini crura ita coarctes, ut intervallum globi unius libræ à ♃ in ♃ constituatur in *Linea Solidorum*; intervallum ab 1 in 1, dat globum $\frac{1}{4}$; à 2 in 2 globum $\frac{1}{2}$; & à 3 in 3 globum $\frac{3}{4}$ libr.; intervalla hæc quòque notentur in linea GD: & *Linea Globorum* constructa erit.

551. X. Ad oppositam Regulæ Oram TADT recta ducitur, in quam transferuntur Tormentorum bellicorum Diametri cavitatis. Rectæ hujus partitio facilè absolvitur ope *Lineæ Globorum*: ut enim Globus in cavitate Tormenti Cylindrica movendi facilitatem habeat (sic tamen ut plus æquò haud vacillet); solent Diametrum cavitatis Cylindricæ ita assumere, ut ea Globorum Diametrum excedat, unâ scilicet lineâ, pro Globo 6 libr.; duas lineas pro 12 libr.; tres aut quatuor pro 24 libr. &c.: transferantur igitur in lineam TADT (eodem modo, quo in præcedenti) partes *Lineæ Globorum*, sic ut quælibet pars, proportione jam dictâ, major efficiatur.

Nunc aliqua proponemus Problemata de usu Circini proportionalis.



C.H.Becker f. lov.

PROBLEMA XIV.

Rectam AB (fig. 1 TAB. XIV.) *datam, in quotcumque partes æquales dividere.*

552. RESOLUTIO. Circino, cujus crura acuminata sunt, accipiatur rectæ AB intervallum; tum Circini proportionalis cruribus apertis, prioris Circini crura applicentur, hinc inde, in *Linea partium æqualium* XL, in tali numero (potiùs majori quàm minori), qui dividi possit exactè per numerum partium, in quas recta AB est dividenda. Ex. gr. si dividi petatur in 7 partes æquales? Ponatur intervallum AB à 70 in 70: tum manentibus ità fixis Circini proportionalis cruribus, Circino acuminato sumatur intervallum à 10 in 10; atque hoc septies continebitur in recta AB.

553. SCHOLION. Quòd si recta AB data longior fuerit, ut vel eam non caperet Circini intercarpedo, vel saltem angulus crurum Circini nimiùm obtusus efficeretur: operaberis per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ aut $\frac{1}{4}$ rectæ datæ, quam partem proportionatè divides ad partes, quas deberet continere; hasque dein transferes ad integram rectam AB.

PROBLEMA XV.

Rectâ AB *datâ, alteram invenire, quæ sit ad eam in ratione data.*

Ex. gr. sit invenienda linea quæ $\frac{1}{7}+$, vel $\frac{1}{6}$ minor sit quàm recta AB.

554. RESOLUTIO. Primo casu applicetur intervallum rectæ AB à 140 in 140; & Circino acuminato invenies quæsitum intervallum à 160 in 160. Secundo casu verò intervallum AB ponatur à 120 in 120, & à 100 in 100 reperies quod quæritur.

PROBLEMA XVI.

Ad datas rectas AB, CD, EF (fig. 2), *quartam quærere proportionalem.*

555. RESOLUTIO. AB item CD utrimque applicentur ab X, in *Linea* XL *partium æqualium* (quo innotescet earumdem ratio): sitque XK item XO = AB; XG item XH = CD: tum ita aperiantur Circini proportionalis crura, ut intervallum KO sit æquale EF; eritque GH quæsita. Si foret prima rectarum major secundâ, v. g. si darentur *ab*, *cd*, *ef*: fiat XK item XO = *cd*: XG item XH = *ab*: sed tunc fieri debet GH = *ef*: dabitque quartam KO.

PROBLEMA XVII.

Ad rectas AB & CD (fig. 3) *datas, tertiam quærere proportionalem.*

556. RESOLUTIO. Adjiciatur tertia linea EF, quæ sit æqualis CD: atque ad rectas AB, CD, EF, quære quartam proportionalem; & hæc quæsitam dabit.

PROBLEMA XVIII.

Ad datum latus AB *invenire latus aliquod homologum in data ratione.*

Ex. gr. quærendum est latus homologum, cujus quadratum sit ad quadratum lateris AB ut 11 ad 13, vel ut 19 ad 15 &c.

557. RESOLUTIO. Primo casu applicetur intervallum AB in *Linea Planorum* XP à 13 in 13: Circino acuminato capiatur distantia ab 11 in 11, atque hæc dabit primum quæsitum. Secundo casu ponatur AB

à 19 in 19 : & distantia 15 à 15 est secundum petitum.

PROBLEMA XIX.

Inquirere Planorum similium datorum rationem.

Ex. gr. inquirenda est ratio △△ ABC & *abc* (*fig.* 4) similium.

558. RESOLUTIO. Circino acuminato sumatur intervallum *bc*, hocque applicetur *Lineæ Planorum* XP in partibus æqualibus, Ex. gr. à 12 ad 12; tenta dein quibus partibus, æqualiter ab X dissitis, queat applicari intervallum BC; ponamusque reperiri ab 18 ad 18; erit adeò △ ABC ad △ *abc* ùt 18 ad 12: etenim $BX^2 : bX^2 = BC^2 : bc^2$; sed $BX^2 : bX^2 = 18 : 12$ (attentâ *Lineæ Planorum* constructione); ergo $BC^2 : bc^2 = 18 : 12$ &c.

PROBLEMA XX.

Circini proportionalis crura ita aperire, ut Lineæ Planorum *efficiant angulum rectum in* X.

559. RESOLUTIO. Circino acuminato sume in *Lineâ Planorum* (*fig.* 5), ab X, partes aliquot pro libitu, ex. gr. = 40 : dein sic aperiantur ejusdem crura, ut intervallum istud = 40, possit poni à 20 in 20, v. g. à K in L; sive sit KX item XL = 20, KL verò 40 ex illis partibus : quoniam enim $KL^2 = KX^2 + LX^2$, erit angulus KXL rectus.

PROBLEMA XXI.

Duobus Planis similibus datis, tertium construere prioribus simile, & iisdem simul sumptis æquale.

Latus homologum primi plani (v. g. trianguli) sit AB (*fig.* 6) : secundi verò sit CF.

560. RESOLUTIO. Circini proportionalis *Lineæ Planorum* ad angulum rectum disponantur. Ponatur AB ab X in K; & CF ab X in L; erit intervallum KL æquale lateri, super quo factum planum (v. g. triangulum) simile uni ex duobus datis, æquale hoc erit iisdem simul sumptis: nam $KL^2 = KX^2 + XL^2$, seu $= AB^2 + CF^2$; quoniam igitur plana similia sunt ut quadrata laterum homologorum, planum simile super latere homologo KL æquabitur duobus planis similibus simul sumptis super KX & XL.

PROBLEMA XXII.

Circulo dato Polygonum regulare inscribere.

561. RESOLUTIO. Circuli dati Radius applicetur *Lineæ Polygonum* XR à 6 in 6: atque tali manente Circini proportionalis apertura: capiatur intervallum à 5 in 5 pro Pentagono; à 7 in 7 pro Heptagono; ab 8 in 8 pro Octogono &c. Illudque, quoties poterit, peripheriæ applicetur; totidemque chordæ ductæ efficient quod quæritur.

Ex. gr. ponamus Circulo dato (*fig.* 7) inscribendum esse Nonagonum. *Lineæ Polygonorum* XR, radius OL circuli dati applicetur à 6 in 6; dico intervallum à 9 in 9 fore latus Nonagoni formandi.

DEMONST. Est $X6 : X9 = 66 : 99$; quoniam ergo X9 est æquale lateri Nonagoni regularis, cujus radius obliquus foret æqualis X6 (ex constructione *Lineæ Polygonorum*); consequens est rectam à 9 in 9 fore etiam æqualem lateri Nonagoni regularis inscripti circulo, cujus radius æquatur rectæ à 6 in 6. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

Super data AB (fig. 8) *Polygonum regulare describere.*

562. RESOLUTIO. Intervallum AB *Polygonorum Lineis* applicetur, ad numerum utrimque æqualem nu-

mero

mero laterum, quibus Polygonum construendum constare oportet. Capiatur Circino acuminato intervallum à 6 in 6, atque eo, ex A & B, fiant intersectiones in O; eritque O centrum Circuli describendi, cujus peripheriæ, quoties fieri potest, applicetur chorda AB.

Ex. gr. describendum est Nonagonum. In præcedenti figura sit 99 = AB : dico intervallum à 6 in 6 fore Circuli describendi Radium.

Demonst. Erit X9 : X6 = 99 : 66; quoniam igitur X9 est æquale lateri Nonagoni regularis inscripti Circulo, cujus radius est æqualis X6 (ex constructione *Lineæ Polygonorum*); erit recta à 9 in 9 æqualis lateri Nonagoni regularis, inscripti Circulo, cujus radius æquatur rectæ à 6 in 6. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

In peripheria Circuli dati, pro libitu graduum quantitatem assumere.

Sit ex. gr. in Circulo dato (*fig.* 9) arcus 50° determinandus.

563. Resolutio. OF Circuli radius transferatur ad *Lineam Chordarum* à 60 in 60 v. g. KR. Tum Circino acuminato capiatur intervallum à 50 in 50 v. g. LE, quæ, applicata peripheriæ, arcum 50° subtendet. Nam est XL : XK = LE : KR; & quoniam XL = chordæ arcûs 50° in Circulo, cujus radius = XK; erit LE = chordæ arcûs 50° in Circulo, cujus radius = KR.

Corollarium.

564. Facilè hinc methodus habetur anguli dati valorem inquirendi; aut valoris dati angulum formandi. Ex. gr. inquirendus est valor anguli B (*fig.* 10):

ex B deſcribatur arcus KL. BK ponatur in *Lineæ Chordarum* à 60 in 60; quære dein, cui numero, hinc indè æquali, congruat intervallum KL; atque ille anguli B quantitatem deſignabit. Si verò ad punctum A (*fig.* 11) conſtruendus ſit angulus v. g. 70° : ex A fiat arcus indefinitus OZ. AZ ponatur à 60 in 60 : Circino acuminato capiatur intervallum à 70 in 70; ponatur hoc à Z in arcum ZO, v. g. à Z in F; & recta AF efficiet angulum 70°.

PROBLEMA XXV.

Solido dato, ex. gr. Pyramide, cujus altitudo aut homologum aliquod latus ſit = rectæ AB; invenire altitudinem, aut latus homologum, Pyramidis ſimilis, quæ ad datam Pyramidem ſit in ratione data. Ex. gr. $\frac{3}{1}$ + vel $\frac{1}{5}$ minor.

565. RESOLUTIO. Primo caſu intervallum AB ponatur in *Linea Solidorum* XS, v. g. à 20 in 20 : & intervallum à 60 in 60 dabit altitudinem, ſeu latus homologum quæſitum. Secundo verò caſu intervallum AB ponatur v. g. à 50 in 50 *Lineæ Solidorum*; & diſtantia 40 à 40 erit = lateri homologo deſiderato.

PROBLEMA XXVI.

Solidorum ſimilium rationem inquirere.

Ex. gr. AB & CD (*fig.* 12) ſupponantur latera homologa datorum Solidorum ſimilium.

566. RESOLUTIO. Intervallum minoris AB ponatur in *Linea Solidorum*, hinc indè in æquali diſtantia à Centro X; atque Circini proportionalis crura ſic fixa retineantur : tum Circino acuminato capiatur CD, atque exploretur, quibus partibus *Lineæ Solidorum*, hinc indè à Centro X æqualiter diſſitis, intercipiatur : prior numerus & poſterior rationem indicabunt.

Ex. gr. si fuerit AB applicata à 26 in 26; CD verò reperiatur à 38 in 38; erit primum Solidum ad secundum ut 26 : 38.

PROBLEMA XXVII.

Invenire Diametrum Sphæræ, ex. gr. ex Auro, æqualis ponderis cum Sphæra v. g. ex Argento, cujus Diameter data sit.

567. RESOLUTIO. Sumatur intervallum Diametri datæ; atque ponatur in *Linea Metallorum* ab ☾ in ☾ : distantia ab ☉ in ☉ erit Diameter quæsita Sphæræ aureæ.

DEMONST. Ex constructione *Lineæ Metallorum*, distantiæ ab X Centro ad usque Characteres chymicos cujusque Metalli, æquantur Diametris Solidorum similium pondere æqualium, compositorum ex illis Metallis; & quoniam intervalla, quæ Metallis illis respondent, sunt in eadem ratione ac Diametri præfatæ : consequens omnino est, eadem intervalla esse quòque æqualia Diametris Solidorum similium, pondere æqualium, è Metallis istis compositorum. Est itaque intervallum ab ☉ in ☉ Diameter quæsita in casu posito. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXVIII.

Invenire specificæ gravitatis rationem Metallorum, ex. gr. Auri & Argenti.

568. RESOLUTIO. In *Linea Metallorum* capiatur Diameter Argenti ab X usque ☾ ; atque hæc transferatur ad *Lineam Solidorum* , v. g. à 50 in 50 : dein invariatâ Circini proportionalis aperturâ, Circino acuminato capta Diameter Auri in *Linea Metallorum*, ab X in ☉, applicetur hinc indè æquali numero par-

tium *Lineæ Solidorum* : quod in caſu fiet fere à 27 ad 27; igitur gravitas ſpecifica Argenti eſt ad gravitatem ſpecificam Auri, fere ùt 27 ad 50.

DEMONST. Per conſtructionem *Lineæ Metallorum* perſpicuum eſt, ſpecificas Metallorum gravitates eſſe in ratione reciproca Cuborum Diametrorum ſuarum, quæ in *Linea Metallorum* notatæ fuerint : & quoniam Diametri iſtæ in caſu applicatæ ſunt *Lineæ Solidorum* aperturæ; nempe Argenti à 50 ad 50, ſeu ab A in B (*fig.* 13), atque hinc reperiretur Auri Diameter à 27 in 27 quàm proximè, ſeu ab F in L; evidens omnino eſt, ob △△ ſimilia ABX & LFX, eſſe $AB^3 : LF^3 = BX^3 : FX^3$; porro cubi intervallorum AB & LF, quæ Diametri ſunt Argenti atque Auri, in ratione inverſa indicant proportionem gravitatum ſpecificarum : igitur 50^{mum} & 27^{mum} ſolidum denotant quòque, in ratione inverſa, gravitates eorumdem ſpecificas; & conſequenter Argenti ad Auri = 27 : 50.

369. SCHOLION. Quoniam Metallorum Diametri, in *Linea Metallorum* notatæ, ita longæ ſunt, ut multùm Circini crura aperiri oporteat, ad earumdem intervalla ponenda in *Lineam Solidorum* : operari liceat per earumdem mediam, aut tertiam partem. Immò & facilius, ſi pro libitu, datâ Circini cruribus aperturâ, capiatur, ex. gr. in caſu dato, intervallum ab ☾ in ☾, hocque in charta notetur : dein intervallum ab ⊙ in ⊙ transferatur in *Lineam Solidorum* à 27 in 27 (etenim quæ ratio datur Diametrorum iſtorum Solidorum in *Linea Metallorum*, talis ſit oportet inter intervalla ☾ in ☾, & ⊙ in ⊙) : tum, invariatâ Circini aperturâ, inquiratur, cui numero reſpondeat intervallum ab ☾ in ☾; atque reperies proximè à 50 in 50 &c.

PROBLEMA XXIX.

Solidi, ex. gr. ex Stanno, pondere dato = 36 libr.; invenire pondus Solidi ex Argento, ejuſdem cum priori Voluminis.

570. RESOLUTIO. Circini proportionalis cruribus, pro libitu, apertis, capiatur primò intervallum à ♃ in

♃, hocque notetur. Dein intervallum ab ☾ in ☾ ponatur in *Linea Solidorum* à 36 in 36; atque ita fixis Circini cruribus, videatur, cui numero *Lineæ Solidorum* congruat intervallum ab ☾ in ☾, prius notatum; invenies autem à 50 in 50. Igitur ſi ſit Stannum 36 libr. ejuſdem Voluminis cum Argento, ponderabit hoc 50 libr.

PROBLEMA XXX.

Notis Diametris, ſeu lateribus homologis Solidorum ſimilium, ex. gr. Globorum Stanni & Argenti; invenire rationem eorumdem ponderum.

571. RESOLUTIO. Diameter Globi ſtannei applicetur à ♃ in ♃; moxque capiatur intervallum ab ☾ in ☾; quod ſi hoc fuerit majus vel minus Diametro Globi, ſeu Sphæræ ex Argento; erit quòque Globus argenteus majoris, vel minoris ponderis quàm Globus ſtanneus: etenim ex conſtructione *Lineæ Metallorum*, Globi illi pondere æquales forent, ſi argentei Diameter congrueret intervallo ab ☾ in ☾; ſi igitur inquiratur, quibus partibus reſpondeat intervallum iſtud ab ☾ in ☾ in *Linea Solidorum*; rationes ponderum innoteſcunt.

PROBLEMA XXXI.

Sphæræ, ex. gr. Cupreæ, Diametro atque Pondere 10 libr. datis; invenire Diametrum Sphæræ Aureæ 15 libr.

572. RESOLUTIO. Quæratur Diameter Sphæræ aureæ, æqualis cupreæ, per Problema XXVII. (567); Diameter iſthæc applicetur à 10 in 10 in *Linea Solidorum*: intercarpedine à 15 in 15, quæſita prodibit Diameter.

373. SCHOLION. Porro ut Diametri cavitatum quarumcumque, aut convexitatum sive soliditatum, mensurentur: fiat Circinus (*fig.* 14); cujus X sit Centrum motûs: bina crura AX & BX curva, opposita sint & in æquali à centro distantia, cruribus CF & FX; ita ut in primis AXF & BXC rectam constituant; præterea sint AX, BX, CX & FX inter se æquales: quoniam enim △△ AXB & CXF congrua sunt; si cruribus curvis capiatur Diameter convexitatis = AB; erit FC eidem æqualis; vel si brachiis rectis capiatur Diameter cavitatis = FC; intervallum AB eidem æquatur.

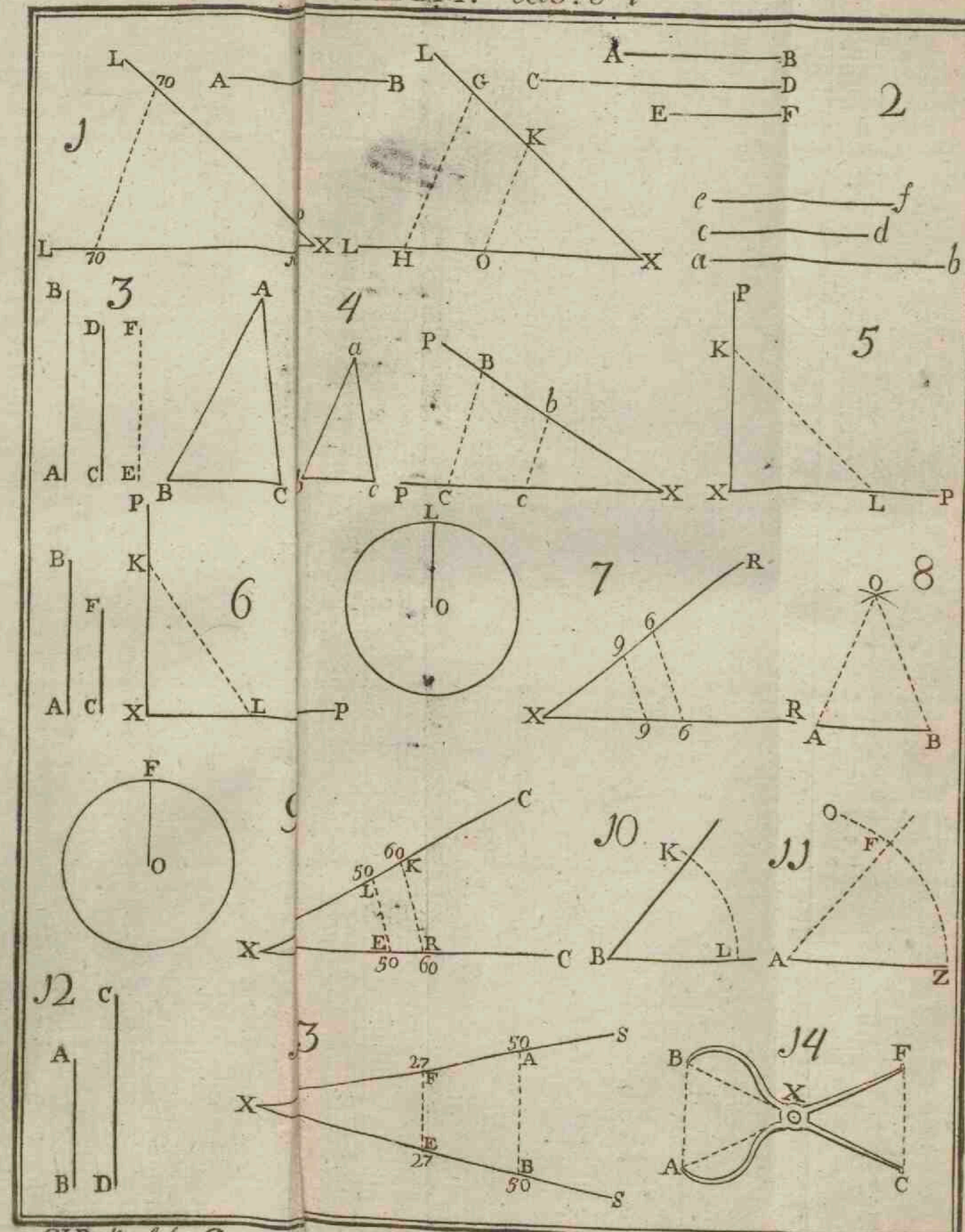
PROBLEMA XXXII.

Mensulam Geometricam (*quæ & Instrumentum universale dicitur*) *construere.*

574. RESOLUTIO I. Fiat Tabula rectangularis ABCD (*fig.* 1 TAB. XV.) 16 pollices longa, 12 verò lata. Partis mediæ rectangularis EFGH superficies, medio pollice circiter, circumjacente altior est, ut ei aptari queat rectangulum, seu *Quadrum* amovibile, contentum lateribus AB, EF; BC, FG; CD, GH; DA & HE; paraturque hoc è ligno buccino, atque ita applicatur, ut idem efficiat planum cum superficie media. Quadrum porrò istud ideo est amovibile, ut, dùm chartâ tegitur rectangulum EFGH, inflexis ejusdem limbis infra quadrum, ea expansa retineatur.

II. Latus AD item BC dividitur in 200 v. g. partes æquales; AB item CD in 150, prioribus æquales. Divisio hæc Scalam quòque subministrabit.

III. Ex puncto X, medio FG, ducatur media Circuli Peripheria FLG; quam exactè in 180° partiaris: hosque gradus transfer in latera FE, EH, & HG; scilicet Regula, constanter applicata ad X centrum, per quemlibet gradum peripheriæ ducatur, & juxta eam lineolæ seu gradus, eorumque numeri notentur in limbo FEHG. Operatione finitâ deleantur cha-



C.H.Becker f. lov.

racteres ducti intrà aream rectanguli EFGH. Divisio limbi FEHG quòque facillimè absolvitur, sic disposito Transportorio, ut ejusdem Centrum respondeat puncto X; Diameter verò incidat in rectam FG per X ductam. Regula dein, ab X per singulos gradus trajecta, indicabit in limbo FEHG transferendos gradus.

IV. Fiat Regula ex orichalco (*fig.* 2), quæ sit diagonali BD Mensulæ longior; in ejusdem extremis ad perpendiculum affixæ sunt Pinnulæ visoriæ KR, quarum Rima exactè respondeat rectæ OZ, ductæ juxta latus unum Regulæ. In hac Regula, Scala, atque mensuræ variæ exarari solent.

V. Foramen acu fiat in O, quod punctum, rectæ, per rimas pinnularum trajectæ, exactè respondeat: ut, positâ in B aut X Acu, quæ per O trajiciatur, circa eam moveatur Dioptra KR.

VI. Mensula tripedali sustentaculo, ùt *Graphometrum fig.* 1 Tab. XII., innititur, situi cuicumque propria.

575. Scholion. Manifestum in primis est *Mensulam* præfatam *Graphometri* vices habere, si Regula, seu Dioptra KR, per foramen O transmittendo acum, figatur in X. Multiplicem seu *universalem* ejusdem usum ex sequentibus colligere liceat.

SECTIO SECUNDA

DE LONGIMETRIA.

PROBLEMA I.

Metiri distantiam duorum objectorum BC, *ex* A *quidem sed non à sese mutuo, accessorum.*

576. Resolutio I. Commodam elige stationem A: à B item C per A rectas age, ita ut sit BA = AL

& CA = AZ; erit ZL = BC : sunt enim ΔΔ ABC & ALZ congrua (191).

577. II. alio modo. Fiat CF æqualis & parallela BG: erit FG = BC.

578. III. Vel facto Δ ABC : duc OX parallelam ad BC : erit AO : AC = OX : BC; quoniam ergo metiri licet AO, AC & OX, facilè innotescit BC.

579. IV. Vel rectæ AC & AB ductæ, item angulus A, mensurentur : ope Trigonometriæ primò invenies angulos ACB & ABC, & deinde rectam BC.

580. V. Ductis AB & AC, iisque mensuratis, inquiratur valor anguli A : Transportorio fiat in charta angulus *a* = A : sit *ab* in partibus scalæ = AB : *ac* in talibus partibus = AC : Circino captum intervallum *bc*, atque scalæ applicatum, dabit numerum mensuræ = BC. Etenim ΔΔ ABC & *abc* similia sunt.

581. VI. Mensulâ Geometricâ (*fig.* 4) commodè dispositâ, ducantur juxta Dioptram, collineando in B & C, rectæ AF & AG indefinitæ : AC item AB mensurentur : fiat A*b*, in partibus Scalæ, æqualis AB; & A*c* = AC : erit *bc* ducta, in partibus Scalæ, æqualis BC.

PROBLEMA II.

Invenire distantiam duorum objectorum AC (fig. 5), *quorum unum tantùm est accessibile.*

582. RESOLUTIO I. Statione in B electâ; investigetur quantitas anguli B, mediante Graphometro; dein inquiratur quòque valor anguli BAC; quoniam latus AB notum est, determinabis AC per Trigonometriæ Problema II. (486).

583. II.

583. II. Vel in charta ducatur ab = AB in partibus ſcalæ; fiat a = A; b = B : erit ac = AC in partibus ſcalæ.

584. III. Vel collocetur primò Menſula Geometrica in O (*fig.* 6), eamque ſic diſpone, ut recta, ſecundum unum ejus latus partium æqualium ducta, in A tendat : menſuretur AO, ſitque aO ei æqualis in ſcalæ partibus; per Dioptram collineans ab O in C, ducito indefinitam OZ; tunc tranſlata Menſula ſic conſtituatur in A, ut idem latus Ao incidat in AO; tum ab A Dioptrâ directâ in C, ducatur Ac: eritque hæc, in partibus Scalæ, æqualis AC : eſt enim △ ACO ſimile △ Aco.

585. SCHOLION. Si oporteat fluminis (*fig.* 7) latitudinem determinare : ducatur primò in ripa BC, parallela ad littus; ad quam fiat perpendicularis OK (538) : tunc inveſtigetur anguli B valor; & reſolve △ OBK vel per Trigonometriam, vel in charta formando △ obk ſimile △ OBK, ſic ut ob in partibus ſcalæ æquetur OB : vel fiat Z = B, producaturque KO, donec concurrat cum ZL : nam hoc caſu △△ KOB & LOZ ſunt congrua; atque adeo eſt KO = OL.

PROBLEMA III.

Invenire diſtantiam duorum objectorum AB (fig. 1 TAB. XVI.) *inacceſſorum.*

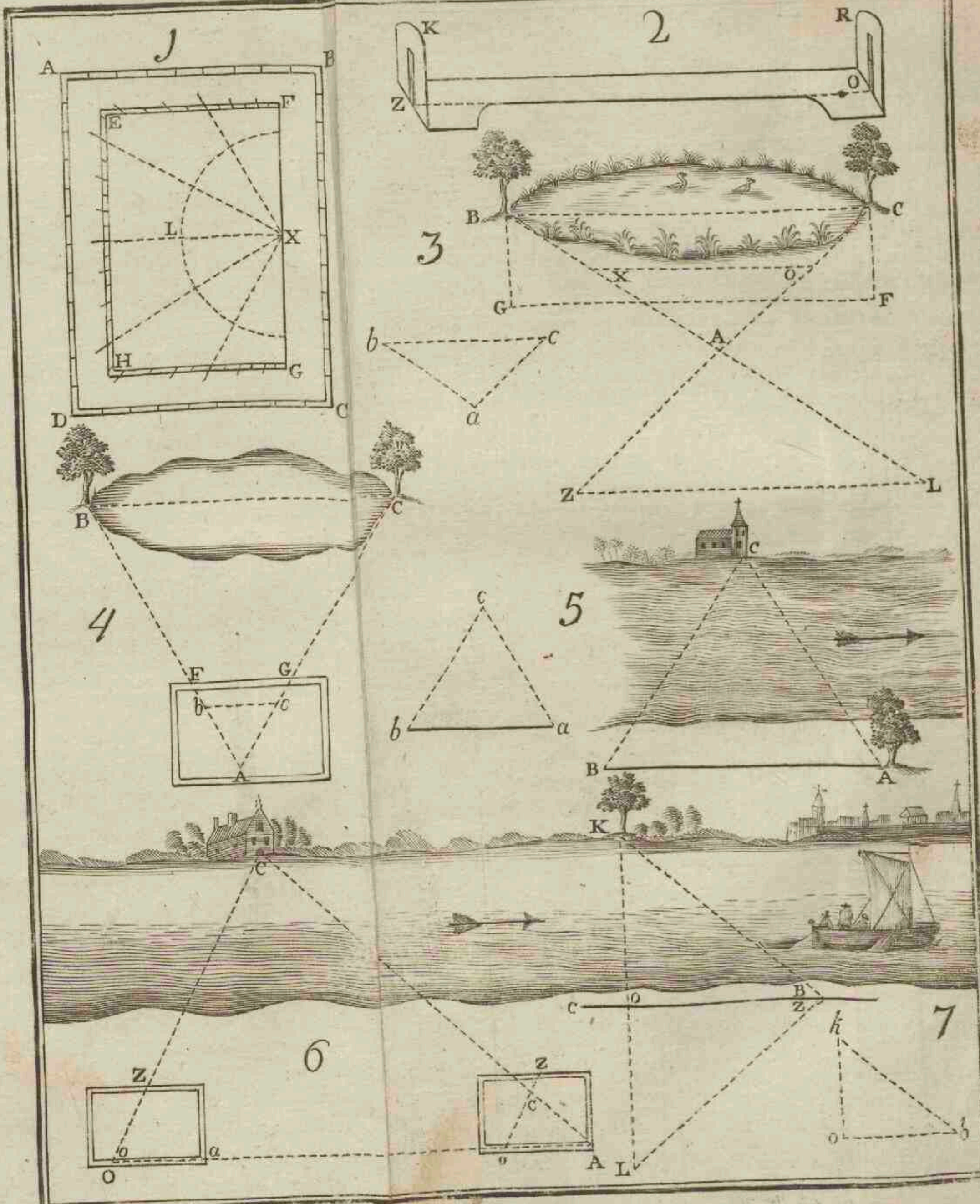
586. RESOLUTIO I. Ducatur CF Baſis notabilis, reſpectivè ad objectorum diſtantiam tum à ſeſe mutuo, tum ab obſervatore; ponamuſque FC = 150 virg. Inveſtigentur primò in C, mediante Graphometro quantitates angulorum FCB & FCA, hique notentur : in F inquirantur anguli AFC & CFB. In △ FCB per Trigon. invenies BC; & in △ CFA determinabis AC : noſces adeò in △ ACB latera AC & BC cum angulo intercepto ACB : innoteſcet ergo AB per Problema IV. (492).

587. II. Ductâ FC ùt in præcedenti, iisdemque mensuratis angulis: in charta ducatur $cf = 150$ partibus scalæ: fiant $c = C$; $f = F$; angulus $fca =$ FCA; angulus $cfb =$ CFB: $\triangle$ afc erit simile $\triangle$ AFC; $\triangle$ bcf simile $\triangle$ BCF; est adeò FC : fc = AC : ac; item est FC : fc = BC : bc : adeòque est AC : ac = BC : bc; verum angulus BCA = bca: ergo $\triangle\triangle$ ABC & abc similia sunt: itaque ab in partibus scalæ est = AB.

588. III. Ductâ FC (*fig.* 2) 150 v. g. virgarum; Mensula Geometrica primò collocetur in F, ita ut unum ejus latus coincidat rectæ FC: deinde collineando ab F in A & B, ducantur FZ & FX. Transferatur indè Mensula in C, atque ita disponatur, ut latus Cf incidat in rectam FC, punctumque C immineat puncto c limbi, distanti ab f 150 partibus scalæ; sive sit $fc = 150$ partibus scalæ. Tum à C collineando in A & B ducantur rectæ, quæ occurrant rectis fZ & fX in a & b; eritque $\triangle$ FAC simile $\triangle$ fac : $\triangle$ FBC simile $\triangle$ fbc : adeoque ductâ ab; $\triangle$ ABC est simile $\triangle$ abc, ùt in præcedenti demonstratum fuit: igitur est ab, in partibus Scalæ, æqualis AB.

COROLLARIUM.

589. Quoniom igitur est angulus CAB = cab, est ab ducta parallela ad AB; atque adeo si ad ab applicetur Dioptra, atque in ejus directionem recta protrahatur, erit hæc parallela ad AB. Igitur hic habes modum ad AB inaccessam ducendi parallelam. Si verò ea per punctum datum, v. g. C, ducenda sit: in Mensula duc primò per c parallelam ad ab; dein applicetur Dioptra ad istam parallelam, rectamque protrahes in ejus directionem.



C.H.Becker f. lov.

PROBLEMA IV.

Metiri altitudinem accessibilem AL (fig. 3)

590. Resolutio I. Disposito speculo plano horizontaliter in I (aut ibidem fossulâ unius alteriusve pedis quadrati factâ, quæ & aquâ repleatur), ita retrocede, dum turris extremum per radium reflexum IE incurrat in oculum: quoniam est angulus AIL = EIF (optic.); L verò = F; $\triangle\triangle$ ALI & EFI similia sunt; est adeo FI : EF = IL : AL.

591. II. Baculus DZ perpendiculariter sit erectus; humi decumbentis sic moveatur oculus, donec per Z visu trajecto extremitas A prospiciatur: erit enim DH : DZ = LH : LA.

592. III. Lucente sole erigatur ad perpendiculum baculus RS; SG sit umbra baculi, LM verò umbra turris: erit GS : SR = ML : LA.

593. IV. Mensula Geometrica sic disponatur, ut unum ejus latus BC ad horizontem sit perpendiculare; electâ commodâ statione, per Dioptram, in B acu fixam, collineetur in A, notetur CO; erit OC : BC = OK : KA; huic addatur OP = KL.

594. V. Graphometro (*fig.* 4) in C itá disposito, ut diameter ejus horizonti parallela sit; planum verò ad eundem perpendiculare. Per Dioptram collineetur in A; notetur angulus AXK, mensureturque LC = KX. Quoniam K rectus; per Trigon. invenies AK, cui adde XC = KL.

595. VI. Vel investigato angulo KXA, mensuratâque basi KX = LC: ducito in charta *kx*, in partibus scalæ, æqualem LC; fiat *x* = angulo AXK; *k* rectus sit; erit *ak*, in partibus scalæ, æqualis AK; huic adde XC &c.

PROBLEMA V.

Metiri altitudinem AL (fig 4) *inaccessam; dato impedimento inter* LC *aut* LT.

596. RESOLUTIO I. Eligantur stationes commodæ C & H, tanto à sese intervallo dissitæ, ut, debitè disposito Graphometro, anguli AXK & ABK notabiliter differant. Primò resolve △ BXA (486), ut ità habeas AX: dein △ rectangulum AKX (482), quo prodit AK: huic addatur XC = KL.

597. II. Ut in præcedenti, ex C & H inquiratur valor angulorum AXK & ABK, mensureturque CH. In charta ducatur *bx*, in partibus scalæ, = BX = CH. Fiant *b* = angulo ABX; & angulus *bxa* = angulo BXA: producatur *bx*, & ab *a* ad eam demittatur perpendicularis *a*R: erit hæc, in scalæ particulis, æqualis AK &c.

598. III. Mensulâ Geometricâ primò debitè collocatâ in F, ducatur FE; dein translatâ in T, sumatur punctum G, sic ut *f*G in scalæ partibus sit = FG: à G collineando in A, ducatur GO; ab O demittatur OI perpendicularis ad *f*G, seu ad latus inferius mensulæ; eritque OI, in partibus scalæ, æqualis AK &c.

599. SCHOLION I. Si oportuerit montis inquirere altitudinem; quoniam ad perpendicularem, è vertice ad basin montis ductam, accedi nequit; è duplici statione operatio peragatur.

600 SCHOLION II. Si altitudo quæpiam supra alteram constituta sit inquirenda; primò quæratur altitudo utriusque simul; dein solius inferioris; subtractâ hac ex utraque, relinquetur quæsita.

PROBLEMA VI.

Ex una altitudine XK (fig. 1 TAB. XVII.), *alteram* AL *inquirere.*

601. RESOLUTIO. Perpendiculum XK demissum dabit altitudinem primam: Graphometro, cujus diameter

deorsum perpendiculariter spectet, inquiratur quantitas anguli KXL, item anguli LXA. Primò resolvatur △ rectangulum XLK (482); quo notum erit latus LX; in △ ALX erunt quòque noti tres anguli (etenim est angulus ALK rectus; subtracto igitur angulo XLK ex 90°, residuum erit angulus ALX); resolvatur adeo △ ALX (486).

PROBLEMA VII.

Nubis L (fig. 2) *altitudinem metiri.*

602. Resolutio I. Quoniam nubes notabiliter à terra distant promiscuè, situmque continuò mutant: bina Graphometra in F atque E, stationibus debitè dissitis, sint ita disposita, ut eorum diametri horizonti parallelæ, atque instrumenti planum deorsum perpendiculariter convertantur: præstò sint observatores duo, in F unus, atque alter in E: dato sibi signo, eodem instanti quisque collineet in medium nubis punctum; atque exactè notet angulum: primò resolvatur △ ABL (486); ut nota habeas latera AL & BL: dein perpendicularem LX invenies per Problema V. (493): huic addatur XZ=AE.

603. II. Vel assumpta basi FE, omnibusque ùt ante peractis, ducatur in charta *ab*, in partibus scalæ, = AB: fiat *a* = angulo LAB; & *b* = angulo LBA; ducta perpendicularis *lx*, in partibus scalæ, est æqualis perpendiculari LX &c.

SECTIO TERTIA

DE PLANIMETRIA.

ARTICULUS I.

De Agrorum Geodæsia.

604. *Bonnarium* æquatur quadrato, cujus latus singulum 20 est *Virgarum*, atque adeò 400 virgas quadratas complectitur. *Jugerum* est quarta pars *Bonnarii*, ac proinde = 100 virgas quadratas.

605. Modum dimetiendi agros triangulares atque quadrangulares, ex dictis (Articulo 1, qui incipit ad N^{rum} 292) haud difficulter colliges.

PROBLEMA I.

Agri pentagonalis ABCEF (fig 3) *aream inquirere.*

606. RESOLUTIO I. Agri mensurandi, ante omnia, obambules perimetrum, rudique calamo ejusdem in charta figuram delinees.

II. Considerentur præcipuè anguli A & E maximè dissiti, ad quos recta AE ducenda per medium agri trajiciatur; recta hæc *Fundamentalis* audit.

III. Tum Graphometro procedens in fundamentali linea, ab hac ad quemlibet è restantibus angulis perpendiculares ducito; quas rectas omnes in figura, rudi calamo delineatâ, annotes, simul cum mensuræ quantitate, ùt in figura videre est : eritque ager divisus in quatuor △△ rectangula, & trapezoïdem rectangularem; itaque cujusque seorsum inquiratur area; addanturque omnes in unam summam : erit hæc agri valor : ut ex adjecto patet ſchemate.

$$\begin{array}{lcl} \triangle\ AOB & = & 6.4 \\ \triangle\ AXF & = & 25.08 \\ \triangle\ FXE & = & 8.55 \\ \triangle\ EIC & = & 3.8 \\ \text{trap. } BOIC & = & 25.74 \\ \hline \text{ſumma} & = & 69.57 \end{array}$$

continet adeò ager 69 virgas; 5 prima, & 7 ſecunda.

PROBLEMA II.

Menſurati agri figuram ſimilem in charta delineare.

607. RESOLUTIO. Ducatur *ae*, in ſcalæ partibus, æqualis fundamentali lineæ AE; ſive hæc faciat è ſcala 11.8; ex quibus $ao = 3.2$; $ox = 5.6$; $xi = 1$; $ie = 2$. erigantur perpendiculares, $ob = 4$; $xf = 5.7$; $ic = 3.8$: demum connectantur rectis extrema perpendicularium; eritque *abcefa* menſurati agri figura ſimilis. Solet autem juxta eam delineari ſcala, quæ deſcriptioni inſerviit; ut ejuſdem beneficio, & laterum valor, atque totius figuræ menſura queat dignoſci.

608. SCHOLION. In medio lineæ fundamentalis Pyxide nauticâ diſpoſitâ, inquiri atque notari ſolet, quam plagam latus ſingulum reſpiciat. Inquirat quòque ſcrupulosè Geometra, idque annotet, qui ſint ad menſuratum agrum domini vicini.

PROBLEMA III.

Agrum menſurare (fig. 4) *curvis atque irregularibus lateribus terminatum.*

609. RESOLUTIO. Per curva latera, ab A in B collineando, nonnulli rectam trajiciunt, quæ ad cenſuram Geometræ, ab agro demat moraliter in una, quod eidem ab altera parte addit. Per O ducatur

LR parallela ad AB. Juxta curva latera AL & BR ducantur IX & BZ perpendiculares ad AB: ad rectas IX, LR & BZ (ut videre est in figura) tot ab agri Perimetro ducantur perpendiculares, ut ejusdem partes interceptæ à rectis lineis parùm differant; resolverisque figuram in rectangulum BIXZ, plurimas trappezoïdes rectangulares, nonnullaque ΔΔ rectangula; quorum omnium area, in unam summam collecta, agri valorem dabit.

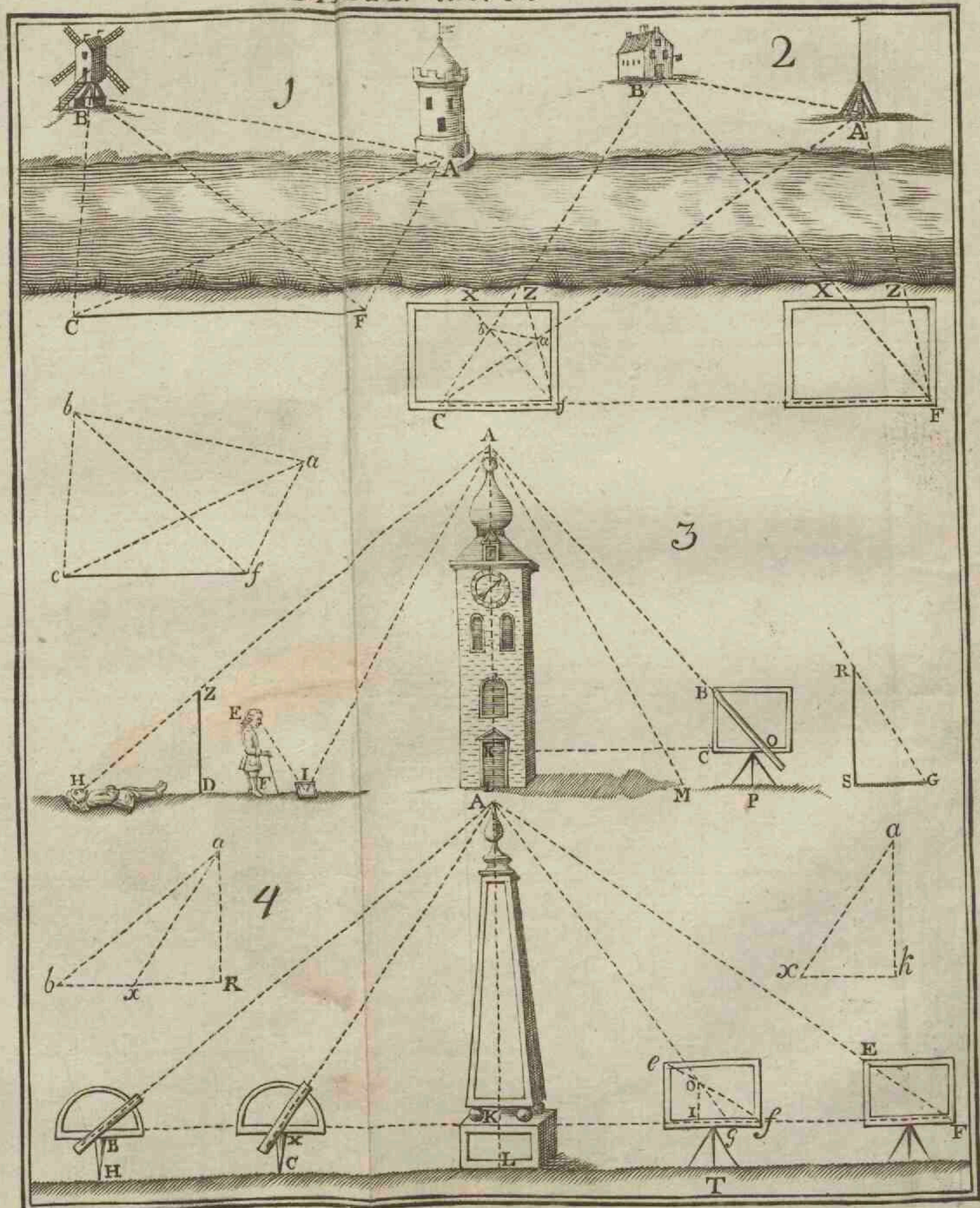
610. SCHOLION I. Cavebit sibi Geometra, ne nimiùm confidat censuræ, atque ità facilè à vero turpiter aberret; quà propter tutiùs operabitur ducendo juxta latus irregulare rectam v. g. RL, ad quam perpendiculares plurimas demittat; quàm si ducat rectam AB per irregularia latera; ea enim vix unquam, nequidem moraliter, æquam efficiet divisionem.

611. SCHOLION II. Si sylva, lacus vel ager inundatus sive arboribus consitus, mensurandus sit: constitues circa agrum rectangulum, aut trapezoïdem rectangularem; atque ex ejus lateribus, ad omnes & singulos agri mensurandi angulos, perpendiculares egrediantur, quæ excessum, quo circumscriptum quadrangulum majus est quàm campi area, in triangula & trapezoïdes rectangulares secabunt: quorum singulorum areæ, si in unam summam redigantur, & summa collecta ab eodem rectangulo aut trapezoïde rectangulari auferatur; residuum æquatur areæ campi mensurandi. Ex. gr. detur stagnum ABCEFG (fig. 5); includatur hoc intrà rectangulum HIKL; hujusque aream determines; ducito dein à quolibet stagni angulo perpendiculares ad latus rectanguli adjacens, ùt vides; cujuslibet trapezoïdis rectangularis inquire aream; in unam summam redigantur; subtrahatur hæc ex area rectanguli HIKL: reliquum erit area stagni.

612. SCHOLION III. Ut stagni figura similis in chartam projiciatur: fiat figura similis rectangulo HIKL; debitisque in punctis erigantur perpendiculares, similes iis quæ in stagni mensura fuerint ductæ; extrema perpendicularium rectis connectantur; eritque stagni figura similis delineata.

613. SCHOLION IV. Si agri aut campi undique inaccessi, cujus anguli tamen singuli eminus conspicui sunt, fuerit inquirenda area, aut delineanda figura: operaberis modo tradito 587 & 588: quemadmodum enim ibidem primò ex F, & dein ex C in A atque B collineatum fuerit, sic in hoc casu collineetur primò ex F & dein ex C, baseos assumptæ extremis, in quemlibet agri aut campi angulum: descriptaque figura in partibus scalæ inquiratur, exurget agri aut campi quæsiti area.

PROBLEMA



C. H. Becker f. lov.

PROBLEMA IV.

Agrum (fig. 6) metiri, ex notis basi AC, & perpendiculari in AC, non productam, demissa: quæ, si fuerit à B ducta, extra basin in O v. g., cadet.

614. RESOLUTIO I. Per B agatur recta BL parallela ad AC: ab aliquo puncto, v. g. A, rectæ AC, ducatur AZ perpendicularis ad AC; erit hæc æqualis BO: igitur ducatur AC in AZ, medietas facti dabit aream △ ABC.

615. II. Si verò nullus detur extra agrum egressus: in puncto quodam, v. g. A, rectæ AC, erigatur ad hanc perpendicularis AX: quoniam hæc est parallela ad BO, erit XC : BC = AX : BO &c.

PROBLEMA V.

Ex data Circuli Diametro, Peripheriam prope veram invenire: vel ex data Peripheria, Diametrum; atque indè ejusdem Circuli aream concludere.

616. RESOLUTIO I. Utamur proportione tertio loco consignata (302); atque pro prima parte dicatur: ùt 10000 ad 31416; sic Diameter data ad quartum numerum; qui erit Peripheria quæsita.

Pro secunda verò parte dicendum: ùt 31416 ad 10000; sic Peripheria data ad quartum numerum; eritque hic inventus Diameter petita.

II. Diametro atque Peripheriâ cognitis, una in quartam partem alterius ducatur; factum æquatur Circuli areæ quæsitæ.

PROBLEMA VI.

Ex area Circuli data, ejuſdem Diametrum atque Peripheriam reperire.

617. RESOLUTIO. Eſt area Circuli ad quadratum Diametri in proportione Archimedis = 11 : 14. Poſitâ ratione Diametri ad Peripheriam = 100 : 314; erit area Circuli ad quadratum Diametri = 785 : 1000. In majori verò proportione allegata (302); erit area Circuli ad quadratum Diametri = 7854 : 10000; igitur aſſumendo ex prædictis alterutram v. g. ſecundam, dicito: uti 785 ad 1000; ſic area data ad quartum; qui erit quadratum Diametri quæſitæ. Inventâ Diametro, Peripheriam determinabis per præcedens problema.

PROBLEMA VII.

Datum Circuli Sectorem dimetiri.

618. RESOLUTIO. Radium Circuli duc in ſemiſſem arcûs Sectoris; factum dat quæſitum (304).

PROBLEMA VIII.

Tabulam conſtruere 500 Segmentorum Semi-Circuli, reſpondentium totidem Sagittis ab 1 ad 500 accreſcentibus.

619. RESOLUTIO I. X (*fig.* 7) in Centro rectus, ſit æqualis O: quoniam KX (ex hypotheſi) = 500, atque adeo KF diameter = 1000; erit area ſemicirculi LKZ = 392700. Primò invenietur AO: nempe ex $AX^2 = 250000$ ſubtrahendo OX^2; extracta $\sqrt[2]{}$ ex reſiduo dat $AO = \frac{1}{2}$ AB. Porro angulos A & OXA invenies per Trigon. (482).

II. Nunc notus erit arcus AK Sectoris KXA; atque adeo ejusdem ratio ad circuli quadrantem KXZAK, qui in casu = 196350, innotescit.

III. AB basis, & perpendicularis OX, quòque notæ sunt; innotescit adeò area △ AXB; subtrahatur hæc ex area Sectoris AKBX; remanebit area Segmenti, cujus KO Sagitta datur.

Ex. gr. sit KO = 1; erit OX = 499 : hujus quadratum = 249001 : subtrahatur hoc ex $AX^2 = 250000$; ex residuo = 999 $\sqrt{}$ proximè dabit 3.16 pro AO : quoniam igitur OX = 499, erit area △ ABX = 15768. Angulus AXK, in Canone majori, invenietur quàm proximè facere $3°, 37', 25''$: sive $13045''$; arcus porro quadrantis KAZ = $324000''$: itaque dicatur : ùt $324000''$ ad $13045''$; sic 196350 ad quartum, seu Sectorem KXA; qui reperietur = 7904.5 erit igitur totus Sector AKBXA = 15809 : ex hoc subtractâ areâ △ ABX = 15768, residuum = 41 dabit Segmentum AKB. Et ità de cæteris.

TABULA

620. *500 Segmentorum Semi Circuli.*

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
1	41	31	7212	61	19721
2	116	32	7566	62	20195
3	221	33	7915	63	20676
4	340	34	8273	64	21181
5	472	35	8640	65	21654
6	620	36	8990	66	22151
7	782	37	9358	67	22650
8	954	38	9723	68	23158
9	1137	39	10123	69	23669
10	1328	40	10533	70	24171
11	1537	41	10937	71	24673
12	1753	42	11332	72	25201
13	1973	43	11736	73	25715
14	2198	44	12144	74	26235
15	2440	45	12562	75	26758
16	2666	46	12971	76	27288
17	2945	47	13388	77	27818
18	3201	48	13823	78	28358
19	3474	49	14253	79	28899
20	3748	50	14678	80	29446
21	4034	51	15099	81	29981
22	4326	52	15568	82	30536
23	4624	53	16009	83	31074
24	4927	54	16455	84	31638
25	5236	55	16919	85	32186
26	5550	56	17376	86	32741
27	5877	57	17842	87	33319
28	6197	58	18296	88	33880
29	6528	59	18770	89	34448
30	6866	60	19236	90	35016

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
91	35590	126	57331	161	81826
92	36170	127	57983	162	82581
93	36754	128	58660	163	83309
94	37313	129	59334	164	84074
95	37906	130	59996	165	84802
96	38502	131	60665	166	85539
97	39101	132	61336	167	86253
98	39689	133	62042	168	87044
99	40287	134	62720	169	87795
100	40873	135	63397	170	88537
101	41488	136	64080	171	89293
102	42084	137	64766	172	90048
103	42682	138	65472	173	90784
104	43309	139	66150	174	91550
105	43915	140	66845	175	92316
106	44522	141	67542	176	93096
107	45138	142	68212	177	93856
108	45753	143	68898	178	94622
109	46375	144	69604	179	95389
110	46999	145	70333	180	96177
111	47625	146	71048	181	96903
112	48258	147	71730	182	97661
113	48894	148	72450	183	98439
114	49532	149	73174	184	99217
115	50176	150	73862	185	999[illegible]
116	50823	151	74594	186	100783
117	51461	152	75360	187	101570
118	52096	153	76039	188	102317
119	52754	154	76759	189	103107
120	53398	155	77475	190	103902
121	54050	156	78210	191	104709
122	54683	157	78919	192	105496
123	55348	158	79668	193	106251
124	56001	159	80384	194	107056
125	56680	160	81101	195	107861

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
196	108624	231	137412	266	167561
197	109436	232	138138	267	168458
198	110209	233	138977	268	169300
199	111056	234	139867	269	170203
200	111835	235	140708	270	171107
201	112608	236	141553	271	172007
202	1134[illegible]0	237	142397	272	172855
203	114255	238	143234	273	173771
204	115035	239	144092	274	174670
205	115876	240	144944	275	175523
206	116650	241	145795	276	176433
207	117492	242	146650	277	177335
208	118269	243	147505	278	178202
209	119109	244	148365	279	179116
210	119895	245	149224	280	180033
211	120696	246	150086	281	180895
212	121539	247	150948	282	181816
213	122341	248	151813	283	182738
214	123198	249	152681	284	183602
215	123991	250	153548	285	184527
216	124796	251	154419	286	185453
217	125764	252	155290	287	186321
218	126460	253	156166	288	187260
219	127270	254	157039	289	188123
220	128133	255	157915	290	189055
221	128948	256	158738	291	190087
222	129764	257	159622	292	190863
223	130584	258	160508	293	191798
224	131453	259	161391	294	192676
225	132276	260	162226	295	193615
226	133100	261	163102	296	194497
227	133928	262	163992	297	195438
228	134806	263	164871	298	196337
229	135658	264	165774	299	197266
230	136469	265	166667	300	198162

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
301	199099	336	231680	371	265152
302	199978	337	232608	372	266111
303	200939	338	233601	373	267071
304	201829	339	234630	374	268037
305	202664	340	235461	375	268991
306	203674	341	236421	376	269953
307	204630	342	237389	377	270984
308	205524	343	238322	378	271929
309	206482	344	239256	379	272912
310	207379	345	240184	380	273876
311	208257	346	241194	381	274911
312	209241	347	242129	382	275808
313	210141	348	243067	383	276775
314	211106	349	244007	384	277692
315	212009	350	245021	385	278711
316	212915	351	245953	386	279679
317	213874	352	246895	387	280649
318	214790	353	247828	388	281619
319	215761	354	248781	389	282590
320	216670	355	249724	390	283562
321	217579	356	250737	391	284535
322	218555	357	251684	392	285574
323	219500	358	252631	393	286552
324	220381	359	253578	394	287526
325	221367	360	254526	395	288500
326	222273	361	255544	396	289476
327	223187	362	256493	397	290453
328	224172	363	257444	398	291430
329	225091	364	258397	399	292408
330	226010	365	259350	400	293385
331	226976	366	260304	401	294366
332	227917	367	261264	402	295340
333	228840	368	262282	403	296325
334	229831	369	263238	404	297305
335	230755	370	264194	405	298287

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
406	299269	441	333822	476	368701
407	300251	442	334807	477	369694
408	301234	443	335662	478	370687
409	302217	444	336523	479	371680
410	303202	445	337564	480	372673
411	304186	446	338606	481	373081
412	305171	447	339800	482	374689
413	306157	448	340806	483	375697
414	307143	449	341796	484	376705
415	308130	450	342786	485	377713
416	309117	451	343777	486	378707
417	310105	452	344769	487	379701
418	311094	453	345764	488	380695
419	312082	454	346759	489	381689
420	313072	455	347755	490	382684
421	314063	456	348751	491	383687
422	315053	457	349749	492	384690
423	315973	458	350747	493	385693
424	316964	459	351745	494	386696
425	317956	460	352744	495	387700
426	318947	461	353738	496	388700
427	319941	462	354733	497	389700
428	320933	463	355728	498	390700
429	321927	464	356723	499	391700
430	322921	465	357718	500	392700
431	323915	466	358718		
432	324910	467	359718		
433	325905	468	360709		
434	326901	469	361710		
435	327896	470	362721		
436	328893	471	363718		
437	329890	472	364715		
438	330887	473	365712		
439	331884	474	366710		
440	332850	475	367708		

PROBLEMA

PROBLEMA IX.

Ope præcedentis Tabulæ aliam construere, posito integro Circulo = 1000; eoque diviso in Segmenta 100, totidemque Sagittas, quæ crescant ùt numeri naturales 1, 2, 3 &c.

621. RESOLUTIO I. Quoniam istius Circuli, cujus area ponitur facere 1000, radius erit divisus in 50 partes æquales; evidens est, Sagittas 1, 2, 3 &c. respondere Sagittis 10, 20, 30 &c. Tabulæ præcedentis.

II. Area Circuli præcedentis Tabulæ integra ponitur esse 785400; dices itaque: ùt 785400 ad 1000 (sive ùt 7854 ad 10); ità Segmenta præcedentis Tabulæ, correspondentia numeris 10, 20, 30 &c. sese habent ad Segmenta Tabulæ construendæ, 1, 2, 3 &c. Instituto calculo, exurgit pro Segmento Sagittæ 1, proximè 1.69. Solent autem scrupula secunda negligi in praxi ordinaria; nisi 5 secunda excedant, ùt in casu, atque tunc augeri solet unitate cyphra proximè sinistima, quæ loco 6 erit 7. Scribendum itaque pro primo Segmento 1.7. Simili modo invenies, Segmentum 3748, Sagittæ 20 præcedentis Tabulæ, dare pro Sagitta 2 sequentis Tabulæ, 4.77; pro quo itaque scribes 4.8 : & ità de cæteris.

III. Inventis 50 prioribus Segmentis, cætera subtractione innotescent : ex. gr. subtracto Segmento Sagittæ 49, quod facit 487.2, ex area totius Circuli, seu ex 1000, reliquum 512.8 dat Segmentum Sagittæ 51. Subtracto 474.5 Segmento Sagittæ 48, ex 1000 : reliquum 525.5 dat Segmentum Sagittæ 52. &c.

TABULA

622. *100 Segmentorum Circuli, cujus area supponitur = 1000.*

Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.	Sag.	Segm.
1	1.7	26	206.6	51	512.8	76	815.5
2	4.8	27	217.9	52	525.5	77	826.3
3	8.7	28	229.2	53	538.2	78	836.9
4	13.4	29	240.7	54	550.9	79	847.3
5	18.7	30	252.3	55	563.5	80	857.6
6	24.5	31	264.0	56	576.2	81	867.7
7	30.8	32	275.9	57	588.8	82	877.5
8	37.5	33	287.8	58	601.4	83	887.3
9	44.6	34	299.8	59	614.0	84	896.7
10	52.0	35	312.0	60	626.4	85	906.0
11	59.8	36	324.1	61	639.0	86	914.9
12	68.0	37	336.4	62	651.3	87	923.6
13	76.4	38	348.7	63	663.6	88	932.0
14	85.1	39	361.0	64	675.9	89	940.2
15	94.0	40	373.6	65	688.0	90	948.0
16	103.3	41	386.0	66	700.2	91	955.4
17	112.7	42	398.6	67	712.2	92	962.5
18	122.5	43	411.2	68	724.1	93	969.2
19	132.3	44	423.8	69	736.0	94	975.5
20	142.4	45	436.5	70	747.7	95	981.3
21	152.7	46	449.1	71	759.3	96	986.6
22	163.1	47	461.8	72	770.8	97	991.3
23	173.7	48	474.5	73	782.1	98	995.2
24	184.5	49	487.2	74	793.4	99	998.3
25	195.5	50	500.0	75	804.5	100	1000.0

PROBLEMA X.

Diametro atque Sagittâ notis; Circuli inquirere Segmentum.

Ex. gr. Diameter = Virg. 34.6. Sagitta verò Segmenti = Virg. 23.6

623. RESOLUTIO I. Circuli area determinetur; eritque proximè Virg 940.

II. Dicatur: Diameter = 34.6 dat Sagittam 23.6; quid dabit Diameter Tabulæ = 100 pro Sagitta ſimili? Proximè reperietur 68.2; cui proxima eſt Sagitta 68; eique reſpondet Segmentum 724.1.

III. Dein dicatur: Circulus Tabulæ = 1000 pro Segmento dat 724.1; quid dabit Circulus continens Virg. 940 pro Segmento ſimili? Invenietur pro quæſito Segmento 680.654.

624. SCHOLION. Quod ſi proximior ad verum acceſſus deſideretur, ideo quod Sagitta data, = 68.2, ſuperet Sagittam Tabulæ, = 68, ad 2 ſcrupula prima, ſive ad $\frac{2}{10}$: ſubtrahatur Segmentum = 724.1, è proximè ſequenti = 736.0; reſidui = 11.9, capiantur $\frac{2}{10}$, quæ proximè = 2.4: hocque addatur priori Segmento = 724.1; eritque ſumma Segmenti propè verum 726.5. Tum denuò dicatur: Circulus Tabulæ = 1000, pro Segmento dat 726.5: quid dabit Circulus continens Virg. 940, pro Segmento ſimili? Exurget 682.91 pro Segmento quæſito. Atque ità differentia ad inventum, per problema, Segmentum, eſt 2.256, quam in praxi non ſolent magni facere.

ARTICULUS II.

De divisione & reductione figurarum.

§. I.

de divisione & reductione Triangulorum.

PROBLEMA I.

Dividere △ ABC (fig. 8) *in partes quascumque, ex. gr. in duas, quarum una* $= \frac{2}{3}$ *alterius.*

625. RESOLUTIO. BC basis dividatur in 5 partes æquales; è quibus OB = 3; atque adeo OC = 2 : ductâ AO, erit △ AOC $= \frac{2}{3}$ △ AOB (307).

PROBLEMA II.

Ab agro ABC (fig. 9) *resecare quantitatem Virgarum datam : ex. gr.* = 45, *per rectam ab* A *ductam; etiamsi totius agri valor haud notus sit.*

626. RESOLUTIO. Ab A ad BC agatur perpendicularis AO : mensuretur hæc; ponamusque eam in Virgis = 3.6. Duplum quantitatis resecandæ = 90, dividatur per AO = 3.6 : quotus = Virg. 25, dat basin BZ sumendam : ductâ adcò AZ, habetur △ AZB = Virg. 45.

PROBLEMA III.

Dividere △ ABC (fig. 10) *bifariam, per rectam ex* F *ductam.*

627. RESOLUTIO I. Si foret CF = AF, evidens est, ductam BF quæsitam dare partitionem.

II. Si verò fuerit CF, v. g. minor quàm AF : sumatur AI = CI : ducatur FB : dein ab I ducatur IG parallela ad FB; ducta FG dividet △ ABC bifariam.

DEMONST. △△ BGF & BFI eandem habent basin BF, eandemque altitudinem (cùm consistant inter easdem parallelas) : sunt ergo ea inter se æqualia : atqui △ CBF + △ BFI erat æquale $\frac{1}{2}$ △ ABC : ergo etiam △ CBF + △ BFG, seu □ CBGF facit $\frac{1}{2}$ △ ABC, sive æquatur △ AFG. *Q. e. d.*

PROBLEMA IV.

Ab agro ABC (fig. 11) *quantitatem Virgarum, v. g.* = 60, *abscindere per rectam ab* O *ductam.*

628. RESOLUTIO I. Ab O ad AB ducito perpendicularem, atque per eam divide quantitatem Virg. resecandam : quotus dabit $\frac{1}{2}$ baseos sumendæ ab A in recta AB.

II. Quod si fuerit recta AB minor quàm duplum quoti : ductâ OB, inquire aream △ AOB : hanc subtrahe ex quantitate resecanda : residuum divide per perpendicularem ab O ad BC demissam : quotus dabit $\frac{1}{2}$ baseos à B in latere BC sumendæ; ad quod punctum recta ab O ducta efficiet desideratam agri divisionem.

PROBLEMA V.

Dividere △ ABC (fig. 12) *in tres v. g. partes æquales, per rectas, basi* BC *parallelas.*

629. RESOLUTIO I. Inter AC & $\frac{1}{3}$ ejusdem quæratur media proportionalis = AF : ducatur FG parallela ad CB : quoniam est $AC^2 = 3\ AF^2$; △ ABC = 3 △ AFG.

II. Dein inter AC & $\frac{2}{3}$ ejusdem quæratur media proportionalis = AH : ducatur HL parallela ad CB : quoniam est $AC^2 = \frac{3}{2} AH^2$; erit △ ABC = $\frac{3}{2}$ △ AHL : igitur △ AFG = □ GFHL = □ LHCB.

PROBLEMA VI.

Dividere △ ABC (fig. 1 TAB. XVIII.) *in tres partes æquales, per rectas ab* O *ductas.*

630. RESOLUTIO. Trifariam dividatur BC in punctis Z & X : ducatur AO, & à Z item X agantur XL & ZK parallelæ ad AO : ductæ OK & OL desideratam efficient divisionem.

DEMONST. Ductâ AZ, △ AZB, sive △ BZK + △ AKZ = $\frac{1}{3}$ △ ABC : porrò △ AKZ = △ ZKO (habent enim eandem basin KZ eandemque altitudinem) : ergo △ BZK + △ OZK, seu △ BKO, = $\frac{1}{3}$ △ ABC. Similiter, ductâ AX, demonstratur, △ CLO facere $\frac{1}{3}$ △ ABC. Igitur □ AKOL facit quòque $\frac{1}{3}$ △ ABC : atque adeò tres illæ partes inter se æquantur. *Q. e. d.*

631. SCHOLION. Si fuerit in agro operandum : poteris primò totum agrum mensurare : atque prosequeris ùt dictum est problemate III. (626).

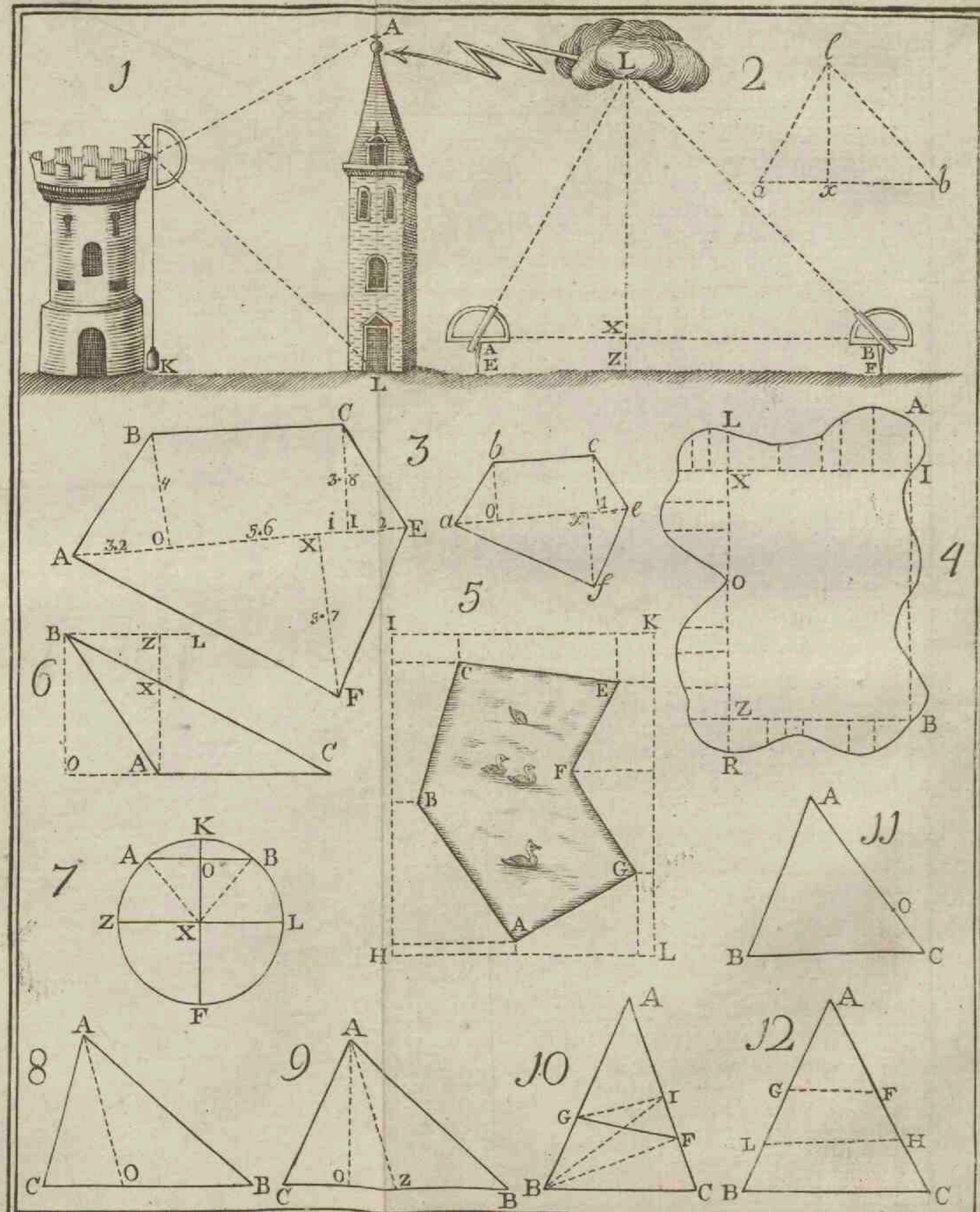
PROBLEMA VII.

A puncto F (fig. 2) *intrà aream* △ ABC *dato, illud dividere in tres v. g. partes æquales.*

632. RESOLUTIO I. Faciat CO bis BO : ducatur FO, sitque AZ parallela ad FO : ductis AF & FZ erit □ AFZB = $\frac{1}{3}$ △ ABC.

DEMONST. Si duceretur AO, △ AOB erit = $\frac{1}{3}$ △ ABC : porrò propter parallelas FO & AZ, △ AFZ est = △ AOZ : igitur □ AFZB etiam est = $\frac{1}{3}$ △ ABC. *Q. e. d.*

GEOM: tab: 17



C.H.Becker f: lov.

II. Dein dividatur AZ bifariam in X : ducatur CF : & ab X agatur XL parallela ad FC : ductâ LF, erit quòque $\triangle$ LFA $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ ABC.

DEMONST. Ductâ CX, $\triangle$ CXA $=$ $\triangle$ CXZ ; sive $\triangle$ LXA $+$ $\triangle$ CLX $=$ $\triangle$ CXA $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ ACZ : verùm, attentis paral. CF & LX, $\triangle\triangle$ CLX & LFX æqualia sunt; ergo $\square$ ALFX $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ ACZ : at, ductâ FX, $\triangle$ FXA $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ AFZ : ergo $\triangle$ AFL $= \frac{1}{2}$ $\square$ ACZF : atque adeò $\triangle$ AFL $=$ $\square$ CLFZ. Quælibet igitur pars æquatur quòque tertiæ parti totius Trianguli. *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

Dividere $\triangle$ ABC (fig. 3) *in tres partes æquales per rectas è quolibet angulo ductas, & intrà aream, ex. gr., in* X, *concurrentes.*

633. RESOLUTIO. Sit CZ $= \frac{1}{2}$ BZ : fiat ZL parallela ad AC : sit X punctum medium rectæ ZL : dico rectas AX, BX & CX efficere divisionem petitam.

DEMONST. $\triangle$ ACZ $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ ABC : sed, attentis parallelis AC & ZL, $\triangle$ ACX est $=$ $\triangle$ ACZ; ergo $\triangle$ ACX æquatur parti tertiæ $\triangle$ ABC. Quoniam ZX $=$ XL, rectæque AC & ZL parallelæ sunt; $\triangle$ CXZ $=$ $\triangle$ AXL ; & $\triangle$ BZX $=$ $\triangle$ BXL : igitur $\triangle$ CXZ $+$ $\triangle$ BZX, seu $\triangle$ CXB, est $=$ $\triangle$ ALX $+$ $\triangle$ BXL, sive $\triangle$ AXB : ergo rectæ AX, BX atque CX dividunt $\triangle$ ABC in tres partes æquales. *Q. e. d.*

PROBLEMA IX.

Posito, B *item* C *acutos esse ; dividere* $\triangle$ ABC (fig. 4) *bifariam, per rectam, quæ perpendicularis sit ad basin* BC.

634. RESOLUTIO. Ducatur AL perpendicularis ad BC : tum inter $\frac{1}{2}$ BC & partem majorem lineæ BC, v. g.

BL, quæratur media proportionalis = BO : in puncto O erigatur perpendicularis OF; hæcque dividet △ ABC bifariam.

DEMONST. △△ BLA & BOF similia sunt : igitur est BL : LA = BO : OF : si itaque duobus primis terminis detur communis altitudo BC; & duobus posterioribus detur communis altitudo BO; habebitur BC × BL : BC × AL = BO^2 : BO × OF ; in qua analogia patet, quòd, cùm BC × BL = $2BO^2$; debeat quòque BC × AL = 2BO × OF : igitur $\frac{1}{2}$ BC × AL, = △ ABC, æquatur bis medietati BO × OF = △ BOF. *Q. e. d.*

PROBLEMA X.

Reducere Triangulum ad Quadratum.

635. RESOLUTIO. Capiantur Trianguli dati basis & altitudo : inter unam & medietatem alterius quæratur media proportionalis : Quadratum super hac formatum erit æquale isti △ dato.

PROBLEMA XI.

Triangulum datum ABC (fig. 5) *reducere ad Parallelogrammum sub angulo, v. g.* 60°, *dato.*

636. RESOLUTIO. Per A duc indefinitam, quæ sit parallela ad BC : in B fiat angulus CBG = angulo dato, adeoque in casu = 60° : à puncto O, medio basis BC, ducatur OF parallela ad BG : eritque BOFG parallelogrammum sub angulo 60°; & æquale △ ABC. Nam △ ABC & Parall. BOFG habent eandem altitudinem : porrò area △ ABC est æqualis facto altitudinis in $\frac{1}{2}$ BC = OB; & area BOFG est æqualis facto altitudinis in BO : ergo &c.

§. II.

§. II.

De divisione atque reductione Quadrilaterûm &c.

PROBLEMA I.

Dividere Parallelogrammum ABCF (fig. 6) *in tres partes æquales.*

637. RESOLUTIO. Bina latera parallela, ex. gr. BC & AF, dividantur in tres partes æquales in punctis O, Z, X, G: ductæ OX & ZG divident Parallelogrammum datum in tria Parallelogramma minora & æqualia.

PROBLEMA II.

Dividere Parallelogrammum (fig. 7) *in tres partes æquales, per rectas, quarum unica ab angulo* A *ducitur.*

638. RESOLUTIO. Sit CZ $= \frac{1}{2}$ ZB: ducatur AZ: fiat ZG parallela ad CF; eritque divisio peracta.

PROBLEMA III.

Dividere Parallelogrammum (fig. 8) *trifariam, per rectas, quarum una à puncto* G *proficiscitur.*

639. RESOLUTIO I. Fiat BO item AX $= \frac{1}{3}$ BC: OX ducta efficiet Parallelogrammum XOCF $= \frac{1}{3}$ ABCF.

II. Sit FL = OG: GL ducta dividet parallelogrammum XOCF bifariam; adeoque in tres partes æquales divisum erit Parallelogrammum ABCF.

PROBLEMA IV.

Dividere Parallelogrammum (fig. 9) *trifariam, per rectas ab uno angulo, ex. gr.* F, *ductas.*

640. RESOLUTIO. Sit CO = 2BO; AI = 2BI: ductæ FO & FI partitionem desideratam efficient.

DEMONST. Ductâ BF, $\triangle$ ABF $=$ $\triangle$ BCF, seu quodlibet eorum $= \frac{1}{2}$ Parallelogrammi ABCF : porrò $\triangle$ AIF $= 2$ $\triangle$ BIF : ergo $\triangle$ AIF $= \frac{1}{3}$ Parallelogrammi ABCF. Similiter $\triangle$ COF $= 2$ $\triangle$ FOB : ergo $\triangle$ COF quòque $= \frac{1}{3}$ Parallelogrammi ABCF : igitur rectæ FO & FI figuram datam trifariam partiuntur. *Q. e. d.*

PROBLEMA V.

Dividere Parallelogrammum (fig. 10) *trifariam, per rectas à puncto* G *ductas.*

641. RESOLUTIO I. Capiatur BO $= \frac{1}{3}$ BC : fiat OX parallela AB : sit LX $=$ OG : ducta GL habebitur trapezoïs GBAL $= \frac{1}{3}$ Parallelogrammi dati : nam $\triangle\triangle$ GOI & LXI congrua sunt, atque adeo æqualia inter se : at OBAX dat $\frac{1}{3}$ Parallelogrammi ABCF; ergo & GBAL $= \frac{1}{3}$ ABCF.

II. Dein capiatur HL $= \frac{1}{2}$ FL $+ \frac{1}{2}$ CG : eritque GLH $=$ trapezoïdi CGHF.

PROBLEMA VI.

Trapezoïdem ABCF (fig. 11) *trifariam partiri.*

642. RESOLUTIO. Latera parallela AF & BC trifariam divide : rectæ ad opposita divisionum puncta ductæ efficient quod quæritur.

PROBLEMA VII.

Quadrilaterum quodcumque ABCF (fig. 12) *reducere ad Triangulum, retentis lateribus* AF *atque* CF.

643. RESOLUTIO. Ducatur AC : per B ad AC ducatur parallela donec concurrat cum FC producta, in G : ductâ AG, erit $\triangle$ AGF $=$ Quadrilatero dato.

DEMONST. △ ACB & △ ACG inter easdem parallelas consistunt, habentque eandem basin AC; sunt ea ergo æqualia: porro □ ABCF constat △ AFC + △ ABC: sed △ ABC = △ AGC; ergo △ AFC + △ AGC, seu △ AGF est = □ ABCF. *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

Dividere Trapezim (fig. 12) *bifariam, per rectam ex* A *ductam.*

644. RESOLUTIO I. Per præcedens Problema reduc Trapezim datam ad △ AFG.

II. Deinde FG bifariam divide v. g. in O: AO ducta resolvet Problema.

645 SCHOLION. Quod si punctum O, medium rectæ GF, extra latus CF repertum fuerit, ut in fig. 13; ducatur AO: ad rectas AI, IO & CI quære quartam proportionalem = IL: ducta AL divisionem efficiet propositam: nam △ AOF = $\frac{1}{2}$ □ ABCF: at △ OCI = △ AIL (314): ergo □ AFCL = △ AFO = $\frac{1}{2}$ □ ABCF.

PROBLEMA IX.

Dividere Trapezim (fig. 14) *bifariam, per rectam ab* O, *puncto medio rectæ* CF, *ductam.*

646. RESOLUTIO. Ab A ducatur AL parallela ad FC (quod si hæc areâ figuræ egrederetur, ea esset à B ducenda): sit AX = LX: ducatur OB, ad quam ab X ducatur parallela XK: ducta OK figuram secabit bifariam.

DEMONST. Ductis OX atque BX: trapezoïs LXOC = trapezoïdi XAFO: △ BLX = △ LXA: ergo □ LXOC + △ BLX, seu △ BCO + △ BXO, est = $\frac{1}{2}$ □ ABCF: sed, attentis parallelis KX & BO, eâdemque basi BO, △ BXO = △ BKO : ergo △ BCO + △ BKO, seu □ BKOC = $\frac{1}{2}$ □ ABCF; igitur KO ducta trapezim datam bifariam partitur. *Q. e. d.*

PROBLEMA X.

Dividere Trapezim (fig. 15) *bifariam, per rectam ab X ductam.*

647. RESOLUTIO. Resolvatur Trapezis data in △ AGF: hujus capiatur dimidium per △ AOF : ducatur XA : dein OL parallela ad XA : ultimò XL : hæcque dividet □ ABCF in duas partes æquales.

DEMONST. △ AOF, seu △ FAX + △ OXA, est = $\frac{1}{2}$ □ ABCF : attentis verò OL atque AX parallelis, eâdemque basi AX, △ OXA = △ LAX : igitur △ FAX + △ LAX, seu □ LAFX, = $\frac{1}{2}$ □ ABCF; sive est = □ LBCX. *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

Figuræ cuicumque datæ similem in quavis data ratione construere.

Ex. gr. quæ sit alterâ quintupla; vel quæ faciat $\frac{4}{5}$ alterius.

648. RESOLUTIO. Assumatur figuræ datæ latus quodpiam pro homologo : tunc primo casu, inter latus illud & quinquies idem latus, quæratur media proportionalis : super hac, ùt homologo latere, fiat figura similis; eritque hæc quintupla figuræ datæ. Secundo casu verò, inter latus assumtum & $\frac{4}{5}$ ejusdem, quæratur media proportionalis; super ea formata figura similis, faciet $\frac{4}{5}$ figuræ datæ.

PROBLEMA XII.

Agrum (fig. 16) bifariam dividere.

649. RESOLUTIO I. In primis totius agri menſura perficiatur, per rectam fundamentalem HZ, ad quam è quolibet angulo, ùt in figura videre eſt, perpendiculares demittantur; ponamuſque totalem agri valorem = Virg. 5248; atque adeo Bonnaria 13, & 48 Virgas quadratas.

II. Circa agri medietatem, rectam conſtitue CG, quæ propoſitum agrum ſecundùm latitudinem ejus, in duas dividit partes qualeſcumque A & B, ad æſtimationem invicem æquales; quarum ſingularum, ex præſcripta menſurandi methodo, area inquiratur: pars A contineat Virgas quadratas 2592; pars verò B habeat Virgas quadratas 2656, quarum differentia = 64, ſecundùm quam pars B excedit partem A, cujus dimidium = 32, addendum erit ipſi A, & idem à parte B auferendum, & ſic æquæles erunt; quod id ipſum in ſequentem modum perficietur:

III. Longitudinem lineæ CG, agri nimirum latitudinem complectentem, menſura, quæ, ex. gr. longa ſit Virg. 46.8; conſtat itaque, ſi à CG linea conſtituatur parallela versùs B, diſtans unâ Virgâ, fiet Parallelogrammum Virg. 46.8 (pro tantilla enim altitudine, ſeu diſtantia parallelarum, obliquitas FG ad CO contemni poteſt in praxi): at deſideratur Parallelogrammum = 32 Virg.: porrò in hunc modum, per regulam proportionis, invenies dicendo: Virg. 46.8 acquiruntur, quando ad diſtantiam 1 Virgæ lineam removeo: quot Virgis aut pedibus &c. eadem erit removenda, ut acquiram Virgas 32? Producuntur ex regula proportionis 0.68. Quare ſi linea OF conſtituatur parallela ad CG, diſtans ab hac, versùs B, 0.68; dividet ea agrum propoſitum in duas partes æquales.

SECTIO QUARTA

SOLIDOMETRIA SIVE STEREOMETRIA

CAPUT I.

DE SOLIDORUM CONSTRUCTIONE ATQUE DIMENSIONE.

§. I.

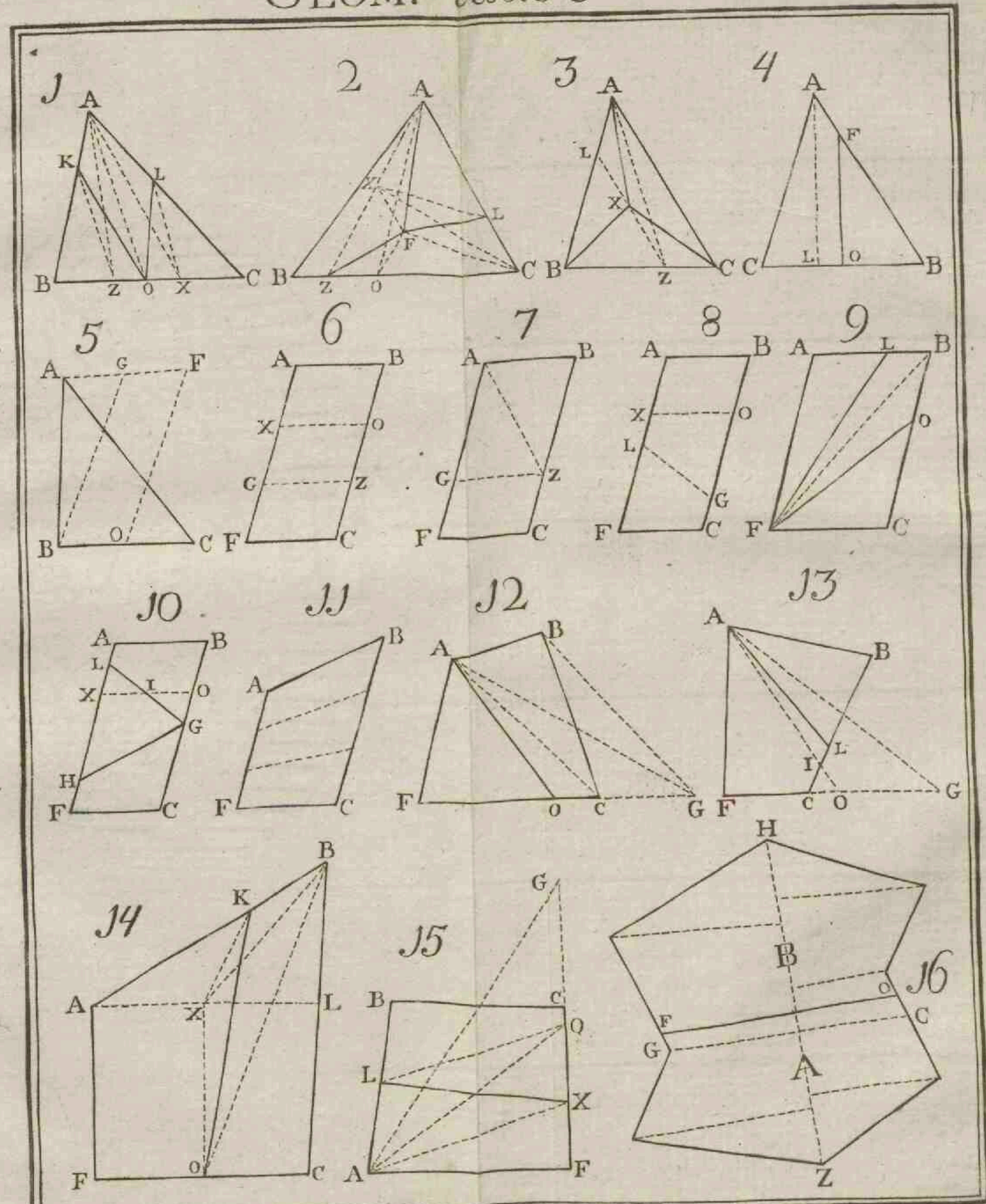
De Solidorum Constructione.

650. Modus repræsentandi, seu delineandi, in plano Corpora Geometrica, ex iis quæ in *Perspectiva* traduntur, facile eruitur: verum non solet hic in rigore attendi ad *Punctum principale* seu *visus*: qua de causa in Cubi vel Parallelepipedi delineatione (*fig.* 1 TAB. XIX.); fiat primò ABCF quadratum vel rectangulum; dein GHIK Quadratum vel rectangulum priori congruum; anguli, ut vides, rectis connectantur, eritque Cubi vel Parallelepipedi delineatio peracta &c.

PROBLEMA I.

Rete describere, ex quo Cubus construi possit.

651. RESOLUTIO. In rectam AB (*fig.* 2) latus Cubi quater transferatur; atque super ea quatuor quadrata efficiantur; unum hinc inde quadratum quoque fiat super IL & MK: tum debitè plicentur quadrata contigua quadrato IKML, tegaturque pars superior quadrato ODBN; superficies singulæ glutine nectantur; eritque Cubus constructus.



C.H. Becker f. Lov.

PROBLEMA II.

Rete describere, ex quo Parallelepipedum construi potest.

652. RESOLUTIO. Fiat HEFI rectangulum congruum basi Parallelepipedi construendi: sint EA, BH, HN, IO, IK, FG, FM, EL æquales altitudini Parallelepipedi; ductisque AB, NO, KG & LM compleantur rectangula: sint GC, & KD æquales HI: quo fiet rectangulum CGKD congruum basi HEFI; denique plicentur rectangula contigua basi, parsque superior occludatur rectangulo CGKD; glutine firmentur, eritque constructum Parallelepipedum.

PROBLEMA III.

Rete pro Prismate describere.

653. RESOLUTIO. Construatur basis Prismatis, ex. gr., pro triangulari Δ KBD (*fig.* 4): continuetur BD in A & E donec fiat AB = BK, & DE = DK: Super AB, BD & DE construantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æquetur: tandem fiat super GH Δ GIH ipsi BKD congruum: hisce partibus debitè junctis, glutineque fixis, constructum erit Prisma triangulare. Nec absimili modo multangulare quodcumque construetur.

PROBLEMA IV.

Rete pro Cylindro describere.

654. RESOLUTIO. Eadem diametro describantur circuli AB & CD (*fig.* 5). BC sit = altitudini Cylindri; super qua construatur rectangulum BCFE, ita ut CD sit peripheriæ Circuli CD, æqualis &c.

PROBLEMA V.

Rete pro Pyramide describere.

Sit ex. gr. construenda Pyramis triangularis, cujus basis sit △ DCF (*fig. 6*).

655. RESOLUTIO. Radio AB describatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC; ED = DF; CB = CF; ducanturque rectæ AB, AC, AD & AE : tum plicatis, debitèque junctis hisce triangulis, constructa erit Pyramis.

PROBLEMA VI.

Rete pro Cono recto describere.

656. RESOLUTIO. Pro basi, ex Centro X (*fig. 7*) describatur Circulus, & diameter producatur in C, donec AC lateri Coni æqualis fiat. Quæratur ad AC & AX, in numeris, atque 360°, numerus quartus proportionalis. Radio CA, ex centro C, describatur arcus DE, & ope Transportorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE, numero graduum invento æqualis. Erit Sector CDE, cum circulo AB, rete pro Cono recto.

DEMONST. Erit AC ad AX, sicut 360 ad quartum numerum = angulo C; seu sicut peripheria Circuli, cujus AC est radius, ad arcum DAE : sed est AC ad AX, sicut peripheria Circuli, cujus AC est radius, ad peripheriam Circuli, cujus AX est radius; seu ad peripheriam baseos AB. Ergo arcus DAE = peripheriæ baseos AB. Igitur sic plicando DCE, ut DAE coincidat in peripheriam basis AB, & latus CD lateri CE contiguum sit; glutineque nexis iisdem, constructus erit Conus rectus. *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

657. Quod si ex A in F transferatur latus Coni truncati, & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcûs GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quæratur, & inde Diameter Circuli IF determinetur; habebitur rete pro Cono truncato. Est enim CDBAE rete pro Cono integro; CGFIH pro Cono abscisso: ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA VII.

Rete pro Tetraëdro describere.

658. RESOLUTIO. Construatur △ æquilaterum DEF (*fig.* 8): super singulo ejus latere construantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD. Ex hoc reti Tetraëdrum construi potest.

COROLLARIUM.

659. Quod si BC (*fig.* 9) continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in resolutione Problematis, construantur △△ æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI: ex reti Octaëdrum construi poterit.

PROBLEMA VIII.

Rete pro Icosaëdro describere.

660. RESOLUTIO. Construatur △ æquilaterum ABC (*fig.* 10): in basi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD. Per C agatur ipsi AB parallela CE, & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G &c. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L &c. Ex hoc reti construi potest Icosaëdrum.

PROBLEMA IX.

Rete pro Dodecaëdro deſcribere.

661. RESOLUTIO. Deſcribatur Pentagonum regulare ABCDE (*fig.* 1 TAB. XX.): ſuper quovis ejus latere fiant quoque Pentagona congrua ipſi ABCDE. Ad K aliud fiat S etiam cæteris congruum; atque huic ſimiliter congruum jungatur R: & ſuper quovis hujus reſiduo latere delineentur ſimiliter prioribus congrua; ut videre eſt in figura.

662. SCHOLION. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compactâ. Delineata exſcindantur, reſectâ chartâ ſuperfluâ juxta eorum perimetros. Exſciſſa agglutinentur chartæ coloratæ: hujus ſuperfluum ita reſecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum videre eſt in figura 8. Singula retium intra perimetrum lineamenta, ex gr. EF, FD & DE (*fig.* 8) in rete Tetraëdri, ſcalpello profundiùs imprimantur, ut commodè complicari queant latera perimetri ſolidi. Denique retia complicata marginum ope conglutinentur.

§. II.

De Solidorum Geodæſia.

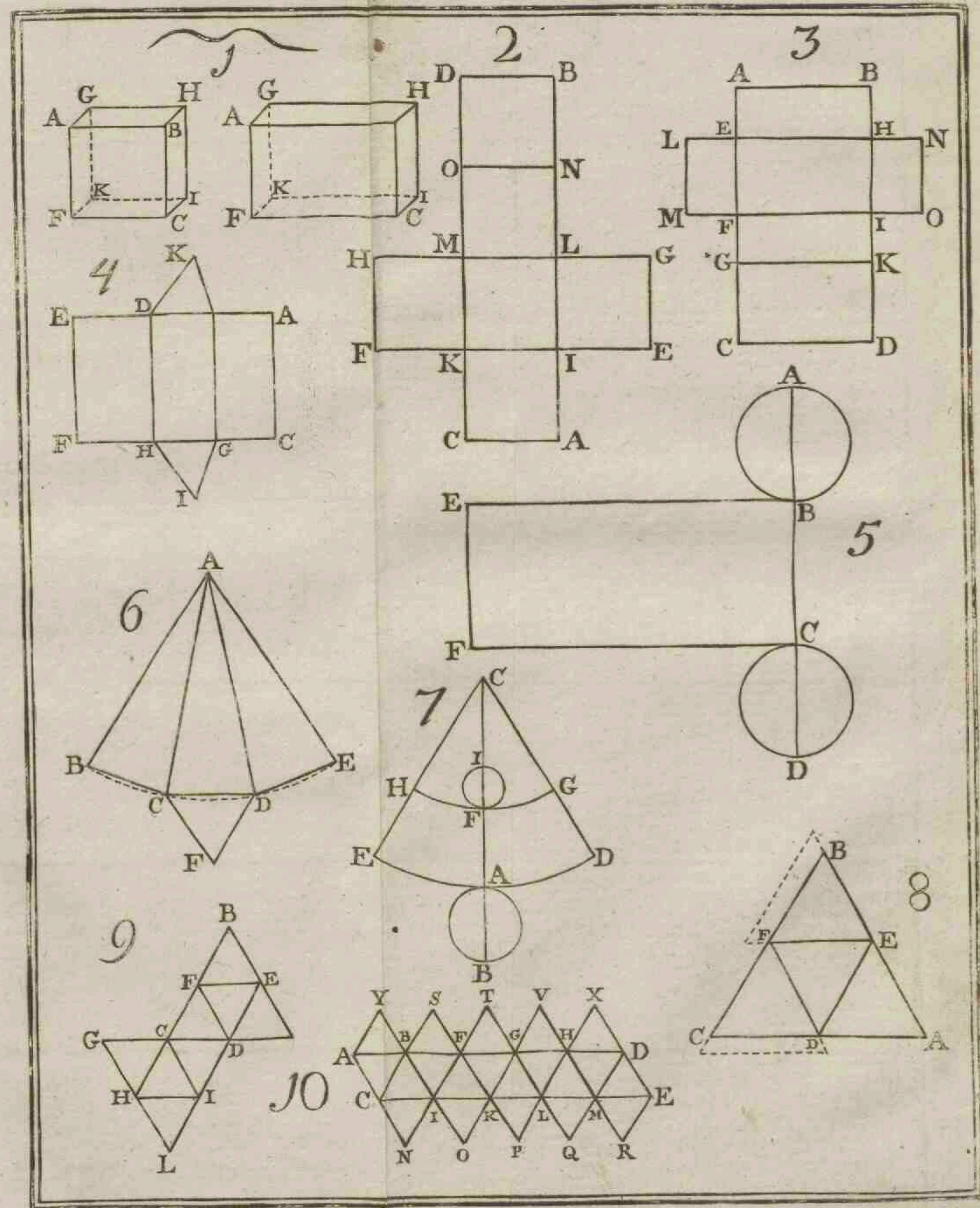
Præter ea, quæ habentur Articulo II. ad N^{rum} 426, hic quædam addemus.

PROBLEMA I.

Metiri Soliditatem quinque Corporum regularium.

663. RESOLUTIO. Sumendo Cubum unius lateris prodit Cubi ſoliditas (427): Tetraëdrum Pyramis eſt: Octaëdrum Pyramis geminata: Icoſaëdrum verò ex 20 Pyramidibus triangularibus; Dodecaëdrum ex 12 quinquangularibus conſtat, quarum baſes in ſuperficie Icoſaëdri & Dodecaëdri ſunt, vertices in Centro coëunt: horum ergo ſoliditas habetur ducendo baſes in tertiam altitudinis partem.

GEOM: tab: 19



C.H.Becker f. lov.

PROBLEMA II.

Corporis irregularis cujuscumque soliditatem invenire.

664. RESOLUTIO. Immittatur corpus Parallelepipedo cavo, eique aqua, aut arena (ne madesiat) superfundatur; & altitudo aquæ, seu arenæ notetur. Corpore extracto observetur denuò aquæ, aut arenæ complanatæ altitudo; inquiratur soliditas Parallelepipedi, primò usque ad primam notam: deinde partis residuæ, seu Corpore extracto: hâc subtractâ ex priori; residuum æquatur soliditati Corporis immersi.

665. SCHOLION. Quod si Corpus in Parallelepipedo istiusmodi commodè deponi nequeat, ex. gr., si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur: Prisma quadrangulare, aut Parallelepipedum, circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ùt ante.

PROBLEMA III.

Invenire soliditatem Corporis cavi.

666. RESOLUTIO. Si Corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, resolutio eadem est quæ Problematis præcedentis. Si Corpus cavum fuerit Parallelepipedum, Prisma, Cylindrus, Sphæra, Pyramis, vel Conus; soliditas primùm totius Corporis, cavitate inclusâ; deinde cavitatis, quæ eandem cum Corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas, inveniatur: hac enim ex ista subtractâ, relinquitur soliditas Corporis cavi.

PROBLEMA IV.

Invenire Cubum dato Corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem; vel qui sit ad hoc in data quacumque ratione, ex. gr. ùt 3 ad 1, vel ùt 1 ad 4.

667. RESOLUTIO. Investigetur soliditas Corporis per Problemata tradita. Ex ea vel ejus multiplo, aut

ſubmultiplo deſiderato, ex. gr., triplo, aut ſubquadruplo, extrahatur radix cubica, quæ erit latus Cubi deſiderati.

CAPUT II.

DE STEREOMETRIA DOLIORUM.

668. In Stereometria Doliorum famoſa eſt menſura apud Belgas nota vulgari idiomate *een aeme*, *une aime*, continetque pocula 96; hujus pars quarta, vulgò *een virendeel*, *une quartelette*, 24 pocula æquat. *Punctum* vulgò *een ſchreve*, *un point*, quatuor comprehendit pocula. Ut verò inveniatur, quot pollices cubicos poculum datum capiat: detur Epiſtomium in ſuperiori parte aheni; impleatur hoc aquâ, donec effluere incipiat per Epiſtomium. Parallelepipedum ligneum, longum 3, latum 2 pollicibus, altum verò pro arbitrio, & ut neceſſe fuerit, colore oleoſo aut vernice pictum (ut aquæ in poros impediatur ingreſſus), lento motu, perpendiculariter in aquam demittatur, donec effluens, per Epiſtomium, aqua, poculum exactum, quo recipitur, adimpleat. Altitudo, ad quam demerſum fuerit Parallelepipedum, ducatur in baſin Parallelepipedi, quæ in caſu = 6 poll. quadr.; factumque dabit pollices cubicos, quos tenet Poculum. Quoniam verò Lovanii ad 10 poll. deprehenditur mergi, Lovanienſe Poculum conſtat 60 pollicibus cubicis.

PROBLEMA I.

Virgulam Pithometricam Cylindricam *conſtruere.*

669. RESOLUTIO I. Sit vas cylindricum ABDE (*fig.* 2), cui infundatur menſura una, quâ ad fluida menſuranda utimur; ſitque FG liquoris libella, OX altitudo = GE. Ducatur HL = ED diametro Vaſis: H7 indefinita, ſit perpendicularis ad HL: ſumatur H1

$= HL : H2$ fiat $= L1 : L2 = H3$ &c. erit H2 diameter vasis, duas mensuras capientis, sed ejusdem altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. H3 diameter Vasis, capientis tres mensuras &c. In unum Virgulæ latus ZP transferantur divisiones inventæ H1, H2, H3, H4 &c. : in alterum verò latus KR contiguum, altitudo uni mensuræ æqualis, ex. gr. $KI = OX$, quoties fieri potest.

670. II. Easdem mensuras expeditè per Tabellam radicum quadratarum inscribes, ut sequitur : sit Diameter mensuræ $AB = P1 = 1000$: erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata erit P2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix quadrata extrahatur, prodibunt P3, P4, P5, &c. quem in usum constructa est Tabula sequens.

671.

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DEMONST. Cylindri eandem altitudinem habentes ſunt inter ſe ut quadrata Diametrorum (444): ergo quadratum Diametri vaſis duas, tres, quatuor &c. menſuras capientis, eſt duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vaſis, menſuram nonniſi unam capientis. Quare, ſi inde radices extrahantur, habebuntur in reſolutione ſecunda Diametri ipſæ. Quoniam verò in prima reſolutionis parte AB Diameter vaſis aſſumitur æqualis HL = H1; erit ipſius L1 quadratum duplum, quadratum ipſius L2 triplum, quadratum ipſius L3 quadruplum &c. quadrati ipſius H1. Unde patet eſſe rectas H2, H3, H4 &c. diametros vaſorum quæſitas. Quod ſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis Cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat vas Cylindricum, eandem cum iſto baſin, ſed altitudinem illius habens, quod unam menſuram capit. Quare ſi porro, ope alterius diviſionis in Virgula factæ, inveſtiges quoties altitudo unius menſuræ in altitudine vaſis dati contineatur, & per hunc numerum diametrum modò inventam multiplices; prodibit numerus menſurarum cavitatem vaſis dati adimplentium. *Q. e. d.*

672. SCHOLION. Ut autem partes decimales menſuræ integræ determinentur; manente eâdem vaſis altitudine: ponatur Diameter unius menſuræ = 1, ſeu 1000 partium decimalium; erit ejus quadratum 1000000; cujus pars decima = 100000: indè extracta radix quadrata = 316 continet partes decimales diametri unius menſuræ, quæ conveniunt diametro Cylindri decimam menſuræ partem continentis, ejuſdem tamen cum Cylindro, integram menſuram capiente, altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, nempe 200000, radix extrahatur, prodit diameter baſis, duas decimas unius menſuræ capientis 447; & ita porro. Quod ſi quadrato diametri unius menſuræ 1000000, adjicias partem decimam 100000, & ex ſumma extrahas radicem quadratam 1.049; erit ea diameter vaſis, quæ capit $1\frac{1}{10}$ menſuræ.

Ratio perſpicua fit per demonſtrationem Problematis præſentis. Atque ſic patet, quomodo Virgula pithometrica accuratiùs conſtrui poſſit, ut intervalla inter menſuras integras ſubdividantur in partes decimales.

TABULA

673. *Diametrorum pro mensuris integris & earum partibus decimalibus.*

		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.376
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

674. SCHOLION. Aſſumere ſolent Virgam 4 pedibus longam; unumque ejus latus in partes 4, ſeu pedes, dividitur: pes quilibet in 10 pollices: & quiſque pollex in 10 lineas ſubdividitur: atque ita diviſum erit hocce latus in 400 partes æquales.

PROBLEMA II.

Invenire capacitatem Dolii cylindrici (fig. 3).

675. RESOLUTIO I. Inprimis explorare eam licet pedali menſurâ: nimirùm menſuretur diameter interior Cylindri, atque indè concludatur area baſeos: hæc inventa ducatur in Cylindri longitudinem: factum dividatur per 60; quotus dabit quantitatem poculorum.

At expeditior communiorque eſt modus ſequens.

II. Latere PZ (*fig.* 2) Virgæ Pithometricæ cylindricæ, capiatur diameter interior OI Dolii: dein latere KR Virgæ, inquiratur Dolii longitudo interior: unâ in alteram ductâ, factum dabit numerum menſurarum, quas capit Dolium.

676. SCHOLION I. Tabulæ, ex quibus Dolia conſtrui ſolent, ultra fundum prominent: menſuretur utrimque hæc prominentia, atque notetur cretâ in ipſa ſuperficie Dolii in A & B (*fig.* 2): diſtantia hæc AB præterea minuenda eſt ad craſſitiem baſium circularium: porro craſſities illa haberi ſolet æqualis tabularum craſſitiei, prout ea ad orificium O capi poteſt.

677. SCHOLION II. Quod ſi baſis alterutra non fuerit exactè circularis, capiatur major atque minor ejuſdem diameter: medietas utriuſque ſimul collectæ pro vera aſſumatur.

PROBLEMA III.

Inquirere ſoliditatem Dolii (fig. 4).

678. RESOLUTIO. Latere PZ Virgæ cylindricæ capiantur primò Diametri interiores baſium BC & AF: medietas utriuſque habeatur pro vera diametro baſeos

ſeos circularis lateralis. Dein eâdem Virgâ capiatur major diameter interior OP, per orificium ventris: addatur hæc in unam ſummam cum diametro minori vera: medietas dabit *æquatam Diametrum* FK = OX, Cylindri KLCF; cui aſſimilari poteſt Dolium; licèt hoc in rigore non ita ſit. Dein latere KR, partium æqualium Virgæ, inquire Dolii longitudinem internam, modo quo ſupra dictum eſt (676): longitudo hæc ducatur in Diametrum æquatam, factumque dabit numerum menſurarum, quas continet Dolium.

679. SCHOLION. Vulgaris illa vaſorum vinariorum ſtereometria, inquit *Metius*, quæ per hanc Cylindraceam perticam, ex ſola multiplicatione æquatæ Diametri in altitudinem perficitur, fraudulenta eſt, & in defectu ſemper peccat, præſertim quando nimis ventricoſum exiſtit vas, & Diametri valde ſunt inæquales. Quare, qui cujuſvis generis Dolia, quantæcunque Diametrorum inæqualitatis, per perticam, ſeu Virgam Cylindraceam, verè & accuratè metiri velit, correctionem neceſſariò adhibere debet ùt ſequitur. Proponatur Dolium menſurandum, cujus baſeos Diameter decuſſatim accepta incidat in partes inæquales, ad punctum I (*fig.* 5). Altera baſeos diameter cadat in K: unde punctum medium L erit æquata extremarum baſium Diameter, quod incidat in 8.2. Vaſis Diameter, ad orificium & medietatem accepta, incidat in M, partem = 13.3. Inter notulas L & M comprehenduntur partes latitudinum inæquales = 5.1; quorum dimidium = 2.55, ſi addatur minori diametro = 8.2; fiet æquatio numerorum = 10.75; vel utramque diametrum ſimul adde, fiunt 21.5, quarum dimidium dabit eandem numerorum æquationem = 10.75. Porro per circinum accipe inter L & M notulas, punctum medium O, deſignans in pertica diametrum vaſis æquatam = 10.6, quæ ſemper minor erit æquatione numerorum, & deficit in hoc exemplo 0.15; cujus pars tertia = 0.05 adjiciatur æquatæ diametro: fiet vera & conicè correcta vaſis diameter = 10.65. Hanc tandem in longitudinem vaſis, per partes longitudinis perticæ æquales acceptam, multiplicato, quæ quidem longitudo (demptâ lignearum baſium & marginum abundantiâ, ùt ſupra docuimus) ſit 15.4; fiet Dolii capacitas quæſita = $164\frac{1}{100}$.

Quod ſi abſque ſcrupuloſa hac correctione, ex vaſis longitudine = 15.4, & æquata vaſis diametro = 10.6, ſtereometriam abſolvas; invenies per eorundem numerorum multiplicationem pro vaſis ejuſdem capacitate 163.24, quæ à vera deficit una ferè menſura, ſuper qua fuerit Virga conſtructa.

PROBLEMA IV.

Conſtruere Virgam pithometricam Cubicam; *ſeu* Diagonalem.

680. RESOLUTIO I. Cùm vaſa, pro quibus Virga hæc paratur, debeant, moraliter ſaltem, eſſe ſimilia: quod obtinet, dum inter Diametrum æquatam atque longitudinem eadem moraliter reperitur ratio. In Doliis auſtriacis ſervatur hæc maximè commendanda: tertiâ nimirùm parte longitudinis tabularum deſcribitur circulus orbium lignearum ſeu baſium.

II. Quoniam, experientiâ teſte, fabricatâ hacce Virgâ ſuper Cylindro, cujus longitudo ad æquatam diametrum ſeſe habet ut 6 ad 5: ea adhibetur, abſque errore notabili in quibuſcumque Doliis, niſi in iis longitudo non faciat $\frac{12}{11}$ majoris æquatæ Diametri; vel ſi longitudo $\frac{12}{7}$ majoris æquatæ Diametri complectatur; aut ſi Diameter ventris $\frac{3}{2}$ faciat Diametri baſium. Quod ſi reperiatur hoc ita eſſe: Dolii capacitas inveſtigetur Virgâ pithometricâ quadratâ.

III. Sit Cylindrus *olcx* (*fig.* 6) talis, ut *ol* altitudo ſit ad *cl* diametrum baſeos, ut 3 ad 5: contineatque vas illud Cylindricum menſuram unam, ex. gr., *unum Punctum.* Virga Gc tranſverſim in Cylindro diſponatur, noteturque in puncto O numerus 1. Quoniam Cylindri ſimiles ſunt quòque ùt cubi diagonalium: ut invenias notam 2 pro diagonali *c*2, determinante *puncta* 2: pone $oc = 1000$: ſume ejus cubum: ex eodem duplicato extracta $\sqrt[3]{}$ dabit 1259 pro *c*2. Ut habeatur Diagonalis Cylindri 3 *punctorum*: triplicetur cubus 1000; extracta $\sqrt[3]{}$ dabit 1442 pro *c*3; &c.

681. SCHOLION. Conſtructioni Virgæ pithometricæ *Cubicæ*, ſeu *Diagonalis*, inſerviat Tabula ſequens :

Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

PROBLEMA V.

Inquirere quantitatem fluidi in Dolio non pleno.

682. RESOLUTIO I. Dolium, libellæ beneficio, ita conſtituatur, ut axis ejus ſit horizonti parallelus; ne ſcilicet fluidum in una Dolii parte altius ſit quàm in altera. Ejuſque capacitas inquiratur.

II. Tum Virgâ pedali inquiratur Dolii æquata Diameter. Noteturque altitudo liquoris reſidui ſub Diametro ventris : ex hac altitudine ſubtrahatur $\frac{1}{4}$ differentiæ majorem inter & minorem Dolii Diametrum : reliquum dabit veram Sagittam Segmenti Dolii, Cylindricè consideratì. Inquiratur area istius Segmenti; hæc inventa ducatur in Dolii longitudinem : factum dabit quantitatem fluidi residui.

Ex. gr. Dolii capacitas sit 190 poculorum : Diameter ventris = 330 : altitudo liquoris residui, seu pars virgæ madida, = 117 : cujusque basis Diameter = 310 : ità operare :

Æquata Diameter Dolii = 320 : vera Sagitta madida = 112 : primò itaque dicito : 320 dat 112; quid dabit Diameter 100 tabulæ (622)? Invenietur tabulæ Sag. 35 : cujus Segm. = 312.00.

Dein perge dicendo : Circulus tabulæ = 1000 dat Segmentum 312.00; quid dabunt 190 pocula? Reperientur 59.28 pro residuo.

683. SCHOLION. Porro ut faciliori atque promptiori methodo (licet non æquè tutà, nisi fuerint Dolia similia ei, quod constructioni Virgæ inserviit) quantitas liquoris in Dolio non pleno investigetur, duo sequentia ex *Wolfio*, pro Coronide, sint Problemata.

PROBLEMA VI.

Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.

684. RESOLUTIO I. Assumatur Dolium aquâ plenum, cujus capacitas jam cognita est : numerus mensurarum ex. gr. per 20, aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.

II. Dolio collocato, ùt in præcedenti : Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.

III. Eâ quantitate fluidi ex Dolio emissâ, quæ numero mensurarum per divisionem, paulò ante N^ro^ 1 invento, respondet; in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.

IV. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi, in Dolio contenti, respondens.

V. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas; ex. gr. in 200 aut plures.

Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

PROBLEMA VII.

Ope præcedentis Virgæ, determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.

685. RESOLUTIO I. Investigetur capacitas totius Dolii.

II. Eo, ùt ante, debitè disposito, Virga, per Problema præcedens parata, per orificium Dolii O (*fig.* 4) intrudatur, donec fundum in P attingat.

III. Eâ rursus extractâ, notetur quot partes in facie partium æqualium vino madidæ sint.

IV. Hinc inferatur: ùt numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie, profunditati totius Dolii OP respondentium, ad numerum similium partium, altitudini fluidi PG convenientium; ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem inveniendum.

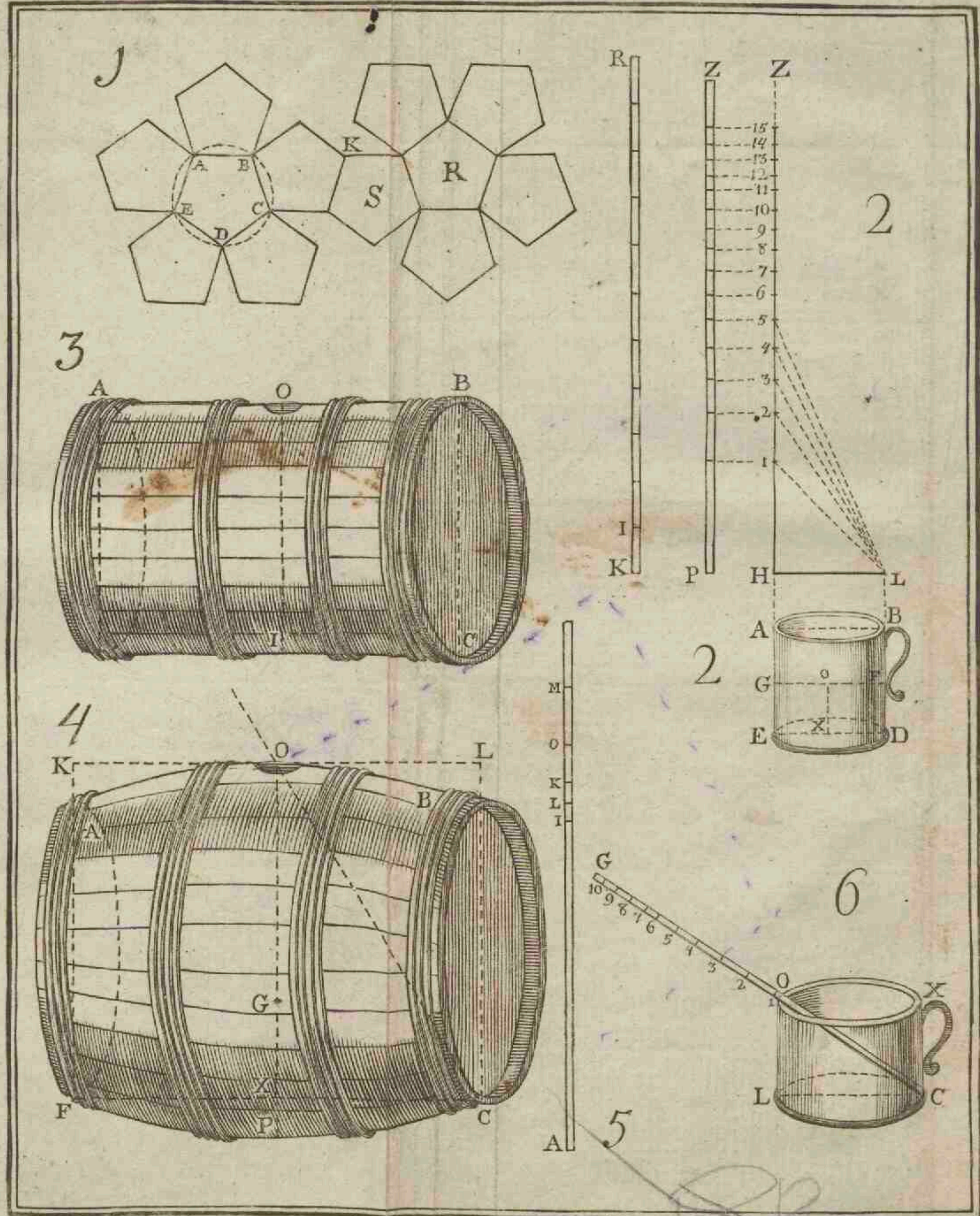
V. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt.

Ex. gr. ſit OP = 160; PG = 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, = 120; capacitas denique Dolii 128 menſurarum. Circino captum intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, tranſlatus in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, indicet $\frac{4}{20}$ ſeu $\frac{1}{5}$. Quod ſi itaque 128 per 5 dividas, quotus = $25\frac{3}{5}$ indicabit numerum menſurarum fluidi in Dolio reſidui.

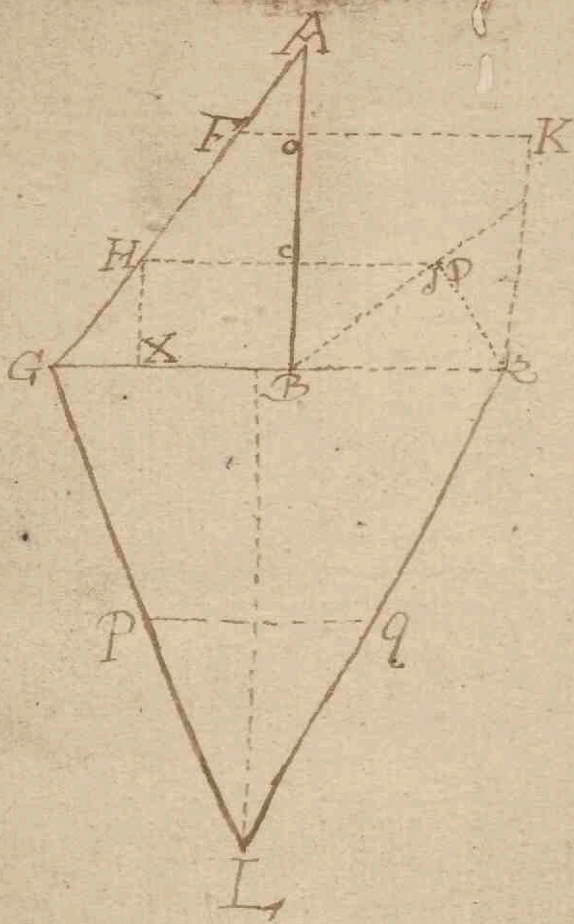
F I N I S.

Vid. F. JACOBI A. R. L. C.

XC = bekend
OC = "
dus OX = door de stelling van
Pythagoras ook bekend, immers
quadraat van hypotenusa is gelijk
aan quadraat van XC en OX.
quadraat van XC = a dan
is " van OX = quadr. OC – quadr
XC = b. En dit is middellijn
van cilinder F.K.L.C.



C.H.Becker f. lov.


A
F
K
H
X
G
B
P
q
L