



# **Classificatie der tweedegraadskrommen en -oppervlakken in de niet-Euclidische meetkunde**

<https://hdl.handle.net/1874/359250>

A. qu. 192, 1942.

CLASSIFICATIE DER TWEDEGRAADS-  
KROMMEN EN -OPPERVLAKKEN IN DE  
NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE

J. K. VAN DEN BRIEL

s.  
cht

192







CLASSIFICATIE DER TWEEDEGRAADSKROMMEN  
EN -OPPERVLAKKEN IN DE NIET-EUCLIDISCHE  
MEETKUNDE



*Diss. Utrecht 1942*

# CLASSIFICATIE DER TWEEDEGRAADS- KROMMEN EN -OPPERVLAKKEN IN DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE

---

## PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR  
IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-  
UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN  
RECTOR MAGNIFICUS L. VAN VUUREN, HOOG-  
LEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN  
WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DE SE-  
NAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN  
VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE  
TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 5 OCTOBER 1942,  
DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JOHAN KEES VAN DEN BRIEL

GEBOREN TE 's-GRAVENHAGE



1942

DRUKKERIJ Fa. SCHOTANUS & JENS — UTRECHT





Promotor: Prof. Dr. J. A. BARRAU.



# EERSTE DEEL: HET PLATTE VLAK.

## EERSTE HOOFDSTUK.

### INLEIDING.

§ 1. De classificatie van de tweedegraadskrommen in het niet-Euclidische vlak is reeds behandeld door Barbarin, Klein, Coolidge en Barrau<sup>1)</sup>. De eerstgenoemde schrijver heeft gebruik gemaakt van een methode, die ons noodeloos ingewikkeld voorkomt. Geen der drie laatstgenoemde auteurs heeft zijn onderzoekingen uitgestrekt tot imaginaire en virtueele krommen, terwijl de indeeling van Barbarin zeer onvolledig is. Verder hebben Klein en Coolidge in de Hyperbolische meetkunde geen onderscheid gemaakt tusschen de tweedeelige hyperbolische parabool en de convexe eendeelige hyperbolische parabool (zie blz. 16), wat naar onze meening door de aanschouwing geboden is. Om deze redenen en omdat de in het platte vlak gebezigde methode van groot belang is voor het onderzoek in de ruimte, is het geheele probleem van de classificatie in het niet-Euclidische vlak hier nogmaals behandeld. Eerst is, in hoofdzaak volgens de door de drie laatstgenoemde auteurs gebezigde methode, een indeeling gemaakt, die alle soorten van tweedegraadskrommen van het niet-Euclidische vlak omvat. Daarna is in het Analytisch onderzoek de manier aangegeven, om, uitgaande van een willekeurige reële kwadratische vergelijking in  $x$  en  $y$ , de bijbehorende soort van kromme te vinden.

Gegeven is:  $F(xy) = 0$ , de reële kwadratische vergelijking van een tweedegraadskromme ten opzichte van een Cartesiaansch assenstelsel. Deze kromme stellen we in het vervolg steeds voor door  $K$ , en de vergelijking ervan door  $F(xy) = 0$ . Heeft de vergelijking  $F(xy) = 0$  de

<sup>1)</sup> P. Barbarin: „Etudes de Géométrie Analytique Non Euclidienne”, Mémoires Couronnés et Autres Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, Tome 60, 1900; F. Klein: „Vorlesungen über Nicht-Euclidische Geometrie”, Berlin, 1928, s. 228; J. L. Coolidge: „The Elements of Non-Euclidean Geometry”, Oxford, 1927, p. 142; J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde”, Deel I, Groningen, 1933, § 160.

rang 3, dan is  $K$  niet ontaard. De rang 2 geeft een ontbindbare vorm en dus een  $K$ , die uit 2 rechten bestaat; de rang 1 bepaalt een dubbelrechte. Op de krommen met rang 2 en 1 behoeven we hier niet verder in te gaan. Een affiene indeeling van de krommen met rang 3 verkrijgt men in de Euclidische meetkunde als volgt: men beschouwt de snijfiguur van  $K$  met de absolute figuur, hier de oneigenlijke rechte. De  $K$ , die 2 reële snijpunten met die rechte gemeen heeft noemen we hyperbool; die met 2 imaginaire snijpunten ellips en de  $K$  met 2 samengevallen snijpunten parabool. Tevens maken we bij de ellips onderscheid tusschen reële en imaginaire krommen. Geheel analoog zullen we in de niet-Euclidische meetkunde te werk gaan. De absolute figuur is daar een tweedegraadskromme, die we snijden met  $K$ , de te onderzoeken tweedegraadskromme; het is duidelijk, dat we bij dit onderzoek de verschillende gevallen van snijding van twee kegelsneden, dus de soorten van kegelsnedenbundels noodig hebben. Volledigheidshalve zullen we deze 6 bundeltypen hier even memoreeren:

- [111] : Algemeene bundel; basisfiguur: 4 verschillende punten;  $\lambda$ -vergelijking heeft 3 verschillende wortels.
- [21] : Enkelvoudige raakbundel; basisfiguur: 2 samenvallende en 2 verschillende punten;  $\lambda$ -vergelijking heeft 2 gelijke wortels.
- [(11)1]: Dubbelrakende bundel; basisfiguur: tweemaal 2 samengevallen punten;  $\lambda$ -vergelijking heeft 2 gelijke wortels.
- [3] : Osculeerende bundel; basisfiguur: 3 samengevallen en 1 verschillend punt;  $\lambda$ -vergelijking heeft 3 gelijke wortels.
- [(21)] : Hyperosculeerende bundel; basisfiguur: 4 samengevallen punten;  $\lambda$ -vergelijking heeft 3 gelijke wortels.
- [(111)]: Identische bundel; dit is het geval, als  $K$  samenvalt met de absolute kromme.

De meest algemeene groep van lineaire collineaties is de projectieve groep. We beperken ons tot de reël-projectieve groep: de transformatiematrix bevat alleen reële elementen. Het gevolg is, dat voor een collineatie van deze groep met een reël punt ook een reël punt correspondeert en met een imaginair punt een imaginair. Hetzelfde geldt natuurlijk voor rechten en krommen. Beschouwen we een figuur, bestaande uit twee tweedegraadskrommen, reël of imaginair, dan wordt dat door een collineatie uit de reël-projectieve groep weer een tweetal tweedegraadskrommen: een reële blijft reël, een imaginaire blijft imaginair. De snijfiguur van het eerste tweetal krommen bestaat uit 4 punten; dank zij het feit, dat wij ons beperkt hebben tot de reël-projectieve

groep, correspondeert met een reëel snijpunt weer een reëel snijpunt van het tweetal getransformeerde krommen enz. Nu beschouwen we de gemeenschappelijke tangenten van beide krommen; ook deze corresponderen met tangenten in de nieuwe figuur en wel reëele met reëele enz.

Het principe van ons onderzoek is nu, dat we, evenals in de Euclidische meetkunde, de tweedegraadskrommen van rang 3 in de niet-Euclidische meetkunde gaan indeelen naar de aard van hun snijfiguur met de absolute kromme. 't Zal blijken, dat deze indeeling in de niet-Euclidische meetkunde niet voldoende is; onderscheiden we de krommen niet verder, dan komen we in strijd met de aanschouwing. Om een nauwkeuriger indeeling te maken, moeten we dus een nieuw kenmerk gebruiken; na de snijfiguur van de 2 krommen zullen we de gemeenschappelijke raakfiguur van beide krommen beschouwen en onze nieuwe indeeling baseeren op de verschillende soorten van raakfiguren. Dan zal blijken, dat aan enkele voorwaarden voldaan wordt zoowel door reëele als door imaginaire krommen, waartusschen we natuurlijk onderscheid moeten maken. Zooals we boven gezien hebben, zijn al deze eigenschappen en dus deze indeelingen bestand tegen elke collineatie uit de reëel-projectieve groep en dus zeker uit een ondergroep daarvan. De voor de niet-Euclidische meetkunde belangrijke ondergroep is de  $\Omega$ -congruente groep: voor een collineatie uit deze ondergroep is de absolute kromme invariant. Bovendien is voor zoo'n collineatie in de Hyperbolische meetkunde het binnengebied (en dus ook het buitengebied) van de absolute kromme invariant, wat daar natuurlijk noodzakelijk is voor onze indeeling. 't Spreekt vanzelf, dat we in de Hyperbolische meetkunde onderscheid moeten maken tusschen twee krommen, die dezelfde soort snijfiguur en gemeenschappelijke raakfiguur met de (reëele) absolute kromme hebben, maar waarvan de ééne actueel<sup>1)</sup> is, terwijl de andere virtueel is. We zien dus, dat een indeeling, berustend op de verschillende soorten snijfiguren en gemeenschappelijke raakfiguren van een tweedegraadskromme met de absolute kromme, in de Hyperbolische meetkunde niet voldoende is; we zullen daar een nieuw kenmerk moeten gebruiken: het aantal delen waarin het actueele gebied door de kromme verdeeld wordt (bestand tegen een collineatie van de  $\Omega$ -congruente groep). Tenslotte moeten we daar twee verschillende soorten van actueele krommen op bovenstaande manier en twee verschillende soorten van virtueele krommen op nog een andere wijze van elkaar onderscheiden.

<sup>1)</sup> Het actueele gebied in de Hyperbolische meetkunde is het binnengebied van de (reëele) absolute kromme; het virtueele gebied is het buitengebied.

We zullen de verschillende soorten van tweedegraadskrommen van rang 3, behalve door een naam, ook aangeven door een nummer; in de Elliptische meetkunde aangevuld met de letter E en in de Hyperbolische meetkunde met H. In de paragrafen, waar de krommen ingedeeld worden, staat achter de naam (die dik gedrukt is) tusschen haakjes eerst bovengenoemd nummer en daarna, als voorbeeld, de vergelijking van een kromme, welke tot die soort behoort.

---

## TWEEDE HOOFDSTUK

### ELLIPTISCHE MEETKUNDE.

#### § 2. Indeeling; rang 3.

Zonder te kort te doen aan de projectieve algemeenheid van het onderzoek, mogen we hier voor de absolute kromme de imaginaire cirkel:  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  kiezen.  $\Omega$ , waarmee we in het vervolg steeds de absolute figuur zullen aanduiden, stelt dus in de Elliptische vlakke meetkunde genoemde imaginaire cirkel voor. Om nu te onderzoeken, welke soorten van tweedegraadskrommen er in de Elliptische meetkunde bestaan, beschouwen we de snijpuntenfiguur van een  $K$  van rang 3 met  $\Omega$ . De  $\Omega$  bevat alleen imaginaire punten, dus deze snijpuntenfiguur zal geheel imaginair zijn. 't Is direct in te zien, dat slechts de volgende twee gevallen kunnen voorkomen:

- I: vier verschillende imaginaire snijpunten, die dan noodzakelijk twee aan twee toegevoegd complex zijn. Dit is een basisfiguur van het bundeltype [111].
- II: twee toegevoegd complexe snijpunten dubbelgeteld. Dit is een basisfiguur van het bundeltype [(11)1].

We zullen in het vervolg een  $K$ , die 4 verschillende imaginaire snijpunten met  $\Omega$  heeft, dus in het eerste geval verkeert, een kromme van type I noemen en een  $K$ , die in het tweede geval verkeert, van type II. Hierna gaan we een nauwkeuriger indeeling trachten te maken. Omdat  $\Omega$  geheel imaginair is, zijn al de tangenten imaginair, dus ook alle gemeenschappelijke tangenten met  $K$ . Met het kenmerk der tangenten kunnen we de krommen niet verder onderverdeelen. We moeten wel onderscheid maken tusschen een reële en een imaginaire  $K$ . Het kenmerk, dat we in de Hyperbolische vlakke meetkunde zullen gebruiken, het aantal deelen waarin de  $K$  het binnengebied van  $\Omega$  verdeelt, vervalt hier. We moeten tot het volgende besluiten: iedere reële  $K$ , die  $\Omega$  in vier verschillende punten snijdt, die dus tot type I hoort, behoort



elliptisch meetkundig tot dezelfde soort, de algemeene reële kwadratische kromme. Evenzoo behoort er tot type I een algemeene imaginaire kwadratische kromme. Beide krommen hebben een volmaakt imaginaire snijfiguur met de absolute figuur: dus de eerste soort is een **reële ellips** (E 2;  $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ ), en de tweede een **imaginaire ellips** (E 1;  $x^2 + 3y^2 + 2 = 0$ ). De Euclidische meetkunde gaf ons de volgende algemeene kwadratische krommen: imaginaire ellips, reële ellips en hyperbool; volgens dezelfde principes vinden we hier: imaginaire ellips en reële ellips.

Bij type II doet zich hetzelfde voor, weer een reële en een imaginaire kromme. Deze K is de cirkel uit de Elliptische meetkunde, die tevens afstandslijn is <sup>1)</sup>. We krijgen in de Elliptische meetkunde dus: de **reële cirkel** (E 4;  $2x^2 - y^2 - 1 = 0$ ) en de **imaginaire cirkel** (E 3;  $2x^2 + y^2 + 1 = 0$ ).

### § 3. Analytisch Onderzoek.

In de Euclidische vlakke meetkunde bestaat het volgende probleem: „Gegeven:  $F(x, y) = 0$ , reëel kwadratisch in  $x$  en  $y$ . Bepaal zonder een teekening te maken de soort van de kromme, waarvan  $F(x, y) = 0$  de vergelijking is”. De oplossing mogen we bekend veronderstellen. 't Spreekt vanzelf, dat, wil onze indeeling bruikbaar zijn, hetzelfde probleem in de Elliptische meetkunde oplosbaar moet zijn.

De methode van het analytisch onderzoek is niets anders dan een op de voet volgen van de voorafgaande beschouwingen. Gegeven: de reële kwadratische vergelijking  $F(x, y) = 0$ . Eerst bepalen we de rang van de matrix; laat deze 3 zijn. We moeten daarna onderzoeken tot welk type de K behoort, die  $F(x, y) = 0$  tot vergelijking heeft. We bundelen dus  $F$  met  $\Omega$ , stellen de  $\lambda$ -vergelijking op en bepalen de wortels hiervan. De twee mogelijkheden zijn dan:

I: 3 verschillende  $\lambda$ 's: de K is een ellips;

II: 2 gelijke en 1 verschillende  $\lambda$ : de K is een cirkel.

In beide gevallen hebben we nog te beslissen tusschen een reële en een imaginaire kromme. Vinden we van de kromme een reëel punt, m.a.w. vinden we van  $F(x, y) = 0$  een reële oplossing, dan kan de K niet imaginair zijn, is dus reëel. Vinden we geen reële oplossing, dan is K imaginair. Er is, om dit in de praktijk op te lossen, een eenvoudige methode, die altijd tot een resultaat voert: we beschouwen in  $F(x, y) = 0$  de  $y$  als parameter. De vergelijking wordt dan een vierkantsvergelijking

<sup>1)</sup> J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde”, Deel I, § 158.

in  $x$  met  $y$  als parameter. De vraag is nu: voor welke reële waarden van  $y$  heeft deze vierkantsvergelijking reële wortels? Is er geen reële waarde van  $y$ , dan is  $K$  imaginair; is er wel een reële waarde van  $y$ , dan is  $K$  reëel.

Als de rang van de matrix van  $F(xy) = 0$  twee of een is, dan moet bij rang 2 slechts bepaald worden, of het lijnenpaar reëel of imaginair is. Snijden we  $F(xy) = 0$  met een rechte niet door het dubbelpunt<sup>1)</sup> en vinden we twee reële punten, dan is het een reëel lijnenpaar. Vinden we twee imaginaire punten, dan is het een imaginair lijnenpaar.

De in deze paragraaf gebruikte methode is kort samengevat in Tabel I.

TABEL I.

Rang $F(xy) = 0$	$F - \lambda\Omega = 0$	Soort van punt:	Naam:	Nr.:
3	3 verschillende $\lambda$ 's: Type I 2 gelijke, 1 verschillende $\lambda$ : Type II	geen reëel punt	imaginaire ellips	E 1
		reëel punt	reële ellips	E 2
		geen reëel punt	imaginaire cirkel	E 3
		reëel punt	reële cirkel	E 4
2	—	geen reëel enkelvoudig punt	imaginair lijnenpaar	—
		reëel enkelvoudig punt	reëel lijnenpaar	—
1	—	—	dubbelrechte	—

<sup>1)</sup> De coördinaten hiervan worden ook in de niet-Euclidische meetkunde op de bekende manier bepaald.

## DERDE HOOFDSTUK.

### HYPERBOLISCHE MEETKUNDE.

#### § 4. Indeeeling; rang 3.

De absolute figuur zij hier de reële cirkel:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . In deze paragraaf beperken we ons tot krommen met rang 3. De verschillende soorten van snijfiguren, die zich kunnen voordoen als we  $K$  met een reële  $\Omega$  snijden, zijn:

- I : vier verschillende snijpunten; dit is de basisfiguur van het bundeltype [111];
- IIA: twee samenvallende en twee verschillende snijpunten; de basisfiguur van het bundeltype [21];
- IIB: twee maal twee samenvallende snijpunten; dit is de basisfiguur van het bundeltype [(11)1];
- IIIA: drie samenvallende en één verschillend snijpunt; de basisfiguur van het bundeltype [3];
- IIIB: vier samenvallende snijpunten; de basisfiguur van het bundeltype [(21)].

Wederom zullen we in het vervolg spreken van een  $K$  van type IIB e.d.

De snijfiguur van een  $K$  van type I met  $\Omega$  kan de volgende mogelijkheden vertoonen:

- a. 4 imaginaire snijpunten: de  $K$  is een ellips;
- b. 4 reële snijpunten: de  $K$  is een hyperbool;
- c. 2 imaginaire en 2 reële snijpunten.

De eerste twee gevallen moeten we gaan onderverdeelen.

Twee tweedegraadskrommen hebben 4 gemeenschappelijke tangenten. We beschouwen dus eerst een  $K$ , die  $\Omega$  in 4 imaginaire punten snijdt en er 4 imaginaire tangenten mee gemeen heeft<sup>1)</sup>. De eene kromme

<sup>1)</sup> Alle mogelijke standen van twee tweedegraadskrommen worden behandeld in: J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde”, Deel I, §§ 117, 118, 125, 126 en 128.

ligt dan geheel in het binnengebied van de andere. Beschouwen we de eerste als absolute kromme, dan is  $K$  virtueel; we noemen hem **virtueele omhullende ellips**. ( $H 2$ ;  $2x^2 + y^2 - 5 = 0$ ). Nemen we de tweede kromme als absolute figuur, dan is  $K$  een actueele kromme, de **actueele ellips** ( $H 3$ ;  $4x^2 + 5y^2 - 1 = 0$ ). We moeten echter bedenken dat aan deze voorwaarden: 4 imaginaire snijpunten en 4 imaginaire gemeenschappelijke tangenten met  $\Omega$ , ook voldoet een imaginaire kromme, de **imaginaire ellips**. ( $H 1$ ;  $x^2 + 2y^2 + 2 = 0$ ). Vervolgens de kromme, die  $\Omega$  in 4 imaginaire punten snijdt en er 4 reële tangenten mee gemeen heeft; dit is een virtueele kromme, de **virtueele** (niet omhullende) **ellips**, ( $H 4$ ;  $x^2 - y^2 - 7 = 0$ ). Er zijn dus in de Hyperbolische meetkunde de volgende soorten van ellipsen: één soort imaginaire, één soort actueele en twee soorten virtueele.

Op dezelfde manier handelen we met het geval van de 4 reële snijpunten. De  $K$ , die  $\Omega$  snijdt in 4 reële punten en er 4 imaginaire tangenten mee gemeen heeft, is de **concave hyperbool** ( $H 5$ ;  $7x^2 - y^2 - 1 = 0$ ). Beschouwen we alleen het actueele gebied, dan heeft deze kromme één buitengebied en twee binnengebieden. De kromme, die  $\Omega$  snijdt in 4 reële punten en er 4 reële tangenten mee gemeen heeft, is de **convexe hyperbool** ( $H 6$ ;  $5x^2 + y^2 - 2 = 0$ ). Deze  $K$  verdeelt het actueele gebied in twee buitengebieden en één binnengebied. Beide krommen hebben een virtueel deel. In de Hyperbolische meetkunde zijn er dus twee soorten hyperbolen.

De derde mogelijkheid was: 2 imaginaire en 2 reële snijpunten; dan zijn ook 2 der gemeenschappelijke tangenten reëel en de andere 2 imaginair. Dit geval is dus niet verder onder te verdeelen. De kromme is de **semihyperbool** ( $H 7$ ;  $y^2 + 2x - 1 = 0$ ). Zij is niet met een analoog geval in de Euclidische meetkunde te vergelijken, want de snijfiguur met de absolute figuur is half reëel en half imaginair.

De snijfiguur bij type IIA bestaat, behalve uit het gemeenschappelijke raakpunt van  $K$  en  $\Omega$ , dat noodzakelijk reëel is, nog uit 2 enkelvoudige snijpunten, die reëel of toegevoegd complex kunnen zijn.

Eerst het geval van de twee enkelvoudige imaginaire snijpunten. Er zijn dan weer twee mogelijkheden: de gemeenschappelijke enkelvoudige tangenten zijn imaginair of die twee tangenten zijn reëel. De reël-projectief algemeene figuur van het eerste geval is twee tweedegraads-krommen, die elkaar in één punt raken, verder geen punten gemeen hebben en waarvan de ééne verder geheel in het binnengebied van de andere ligt. Beschouwen we de tweede kromme als absolute figuur, dan

is  $K$  actueel: de **actueele elliptische parabool** (H 9;  $x^2 + 2y^2 - x = 0$ ).  
 Vatten we de eerste kromme als absolute figuur op, dan is  $K$  virtueel:  
 de **virtueele omhullende elliptische parabool** (H 8;  $2x^2 + y^2 + x - 3 = 0$ ).  
 Zijn de gemeenschappelijke enkelvoudige tangenten reëel, dan is de  
 kromme een **virtueele** (niet omhullende) **elliptische parabool**. (H 10;  
 $y^2 - x + 1 = 0$ ).

Tenslotte het geval van de reëele enkelvoudige snijpunten; wederom  
 nemen we de realiteit van de gemeenschappelijke tangenten met  $\Omega$  als  
 nieuw kenmerk: de dubbeltellende tangent is zeker reëel, dan kunnen  
 de twee enkelvoudige gemeenschappelijke tangenten nog imaginair zijn.  
 We zullen de kromme, die hieraan voldoet, de **concave eendeelige hyper-**  
**bolische parabool** (H 11;  $x^2 - y^2 - x = 0$ ) noemen.

Het andere geval: 2 reëele enkelvoudige gemeenschappelijke tangenten,  
 geeft aanleiding tot een moeilijkheid. We zullen dit hier nog even toe-  
 lichten, omdat zoiets zich natuurlijk ook voordoet in de ruimte.

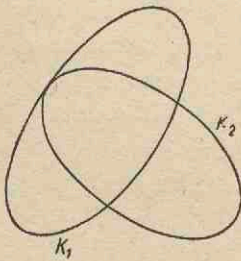


Fig. 1.

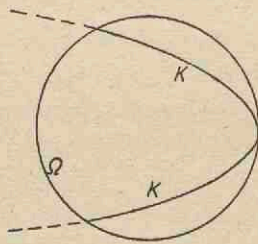


Fig. 2.

Tweedeelige hyperbolische  
 parabool (H 13).

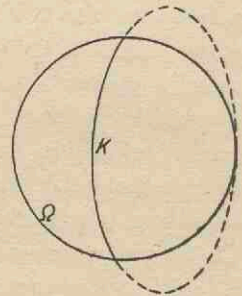


Fig. 3.

Convexe eendeelige hyper-  
 bolische parabool (H 12).

De reëel-projectief meetkundige figuur van dit geval is twee reëele tweede-  
 graadskrommen in bovenstaande stand: Fig. 1. Nu maakt het ook hier  
 een wezenlijk verschil, welke kromme we als absolute figuur beschouwen.  
 Is dit  $K_1$ , dan wordt  $K_2$  een kromme met 2 actueele deelen (Fig. 2).  
 Beschouwen we  $K_2$  als absolute figuur, dan wordt  $K_1$  een kromme met  
 één actueel deel (Fig. 3). We kunnen deze beide krommen niet tot één  
 soort rekenen, want dat is geheel in strijd met de aanschouwing. Voor  
 dit speciale geval moeten we de nauwkeuriger indeeling toepassen, die  
 gebruik maakt van het aantal deelen, waarin het actueele gebied door  
 de kromme wordt verdeeld. Voor de eerste kromme (Fig. 2) is dat  
 aantal deelen 3; voor de tweede (Fig. 3) is het 2. We noemen die eerste

kromme: **tweedeelige hyperbolische parabool** (H 13;  $2y^2 + x - 1 = 0$ ) en de tweede: **convexe eendeelige hyperbolische parabool** (H 12;  $3x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ ). Bij deze indeeling der parabolen kan nog het volgende opgemerkt worden: beschouwen we alleen het actueele gebied, dan lijkt het of de concave eendeelige- en de convexe eendeelige- hyperbolische parabool en zelfs de semihyperbool tot één soort behooren. Iets dergelijks komt echter in de Euclidische meetkunde ook voor: beperkt men zich tot een klein deel der kromme, dan lijkt het ook of ellips, hyperbool en parabool tot dezelfde soort behooren. Evenals men hier een affien onderscheid maakt, beschouwt men in de Hyperbolische meetkunde genoemde krommen als verschillend.

Resumeerend zijn er dus in de Hyperbolische meetkunde vier soorten reële parabolen, en bovendien nog twee virtueele soorten.

De snijfiguur bij type IIB bestaat uit 2 punten, waarin K aan  $\Omega$  raakt; die raking kan plaats hebben in twee reële of in twee imaginaire punten. Bij krommen, die  $\Omega$  in twee imaginaire punten raken, zijn ook de gemeenschappelijke tangenten imaginair. Hier zijn de drie mogelijkheden:

- imaginaire kromme,
- geheel actueele kromme,
- geheel virtueele kromme.

De eerste noemen we **imaginaire cirkel** (H 14;  $3x^2 + 2y^2 + 4x + 2 = 0$ ). De tweede is de cirkel der Hyperbolische meetkunde, die we hier **actueele cirkel** (H 16;  $5x^2 + 4y^2 + 4x = 0$ ) noemen. De derde is de **virtueele cirkel** (H 15;  $y^2 - 4x - 5 = 0$ ).

Zijn beide raakpunten van K en  $\Omega$  reëel, dan zijn noodzakelijk de beide gemeenschappelijke tangenten ook reëel. Er zijn hier dan twee mogelijkheden: de K ligt op de twee raakpunten na geheel in het actueele gebied of de K is virtueel. We herkennen in het eerste geval de afstandslijn, die we hier **actueele afstandslijn** (H 19;  $2x^2 + y^2 - 1 = 0$ ) moeten noemen. Het andere geval geeft aanleiding tot twee mogelijkheden, de K is in beide gevallen virtueel, ligt dus in het buitengebied van  $\Omega$ , maar nu kan  $\Omega$  nog in het buiten- of in het binnengebied van K liggen. De eerste kromme noemen we een **virtueele** (niet omhullende) **afstandslijn** (H 18;  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ ) en de tweede een **virtueele omhullende afstandslijn** (H 17;  $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ ).

Tot type IIB behooren dus de actueele krommen: cirkel en afstandslijn, die geen van beide een overeenkomstige soort in de Euclidische meetkunde hebben; terwijl dit type ook nog de imaginaire cirkel, de virtueele cirkel, de virtueele afstandslijn en de virtueele omhullende afstandslijn bevat.

De snijfiguur bij type IIIA is altijd geheel reëel, evenals de gemeenschappelijke tangenten van  $K$  en  $\Omega$ . Ook het aantal deelen, waarin het actueele gebied wordt verdeeld door alle krommen van dit type, is steeds hetzelfde; er is in dit type dus één soort  $K$ : de **osculeerende parabool** ( $H\ 20$ ;  $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$ ), waarvan in de Euclidische meetkunde geen overeenkomstige soort bestaat.

TABEL II.

Euclidische meetkunde	Elliptische meetkunde	Hyperbolische meetkunde
imaginaire ellips	imaginaire ellips	imaginaire ellips
reëele ellips	reëele ellips	actueele ellips virtueele omhullende ellips virtueele (niet omhullende) ellips
hyperbool	—	concave hyperbool convexe hyperbool
—	—	semihyperbool
parabool	—	actueele elliptische parabool virtueele omhullende elliptische parabool virtueele (niet omhullende) elliptische parabool concave eendeelige hyperbolische parabool convexe eendeelige hyperbolische parabool tweedeelige hyperbolische parabool
—	imaginaire cirkel	imaginaire cirkel
—	reëele cirkel	actueele cirkel virtueele cirkel actueele afstandslijn virtueele (niet omhullende) afstandslijn virtueele omhullende afstandslijn
—	—	osculeerende parabool
—	—	actueele grenscirkel virtueele grenscirkel

Tenslotte type IIIB, ook daar zijn snijfiguur en gemeenschappelijke raakfiguur altijd geheel reëel. Hier doen zich wederom twee gevallen voor: actueele en virtueele kromme. De actueele is de horicykel van

Lobatchewsky, dus hier **actueele grenscirkel** ( $H 22; 2x^2 + y^2 - 2x = 0$ ). De virtueele is de **virtueele grenscirkel** ( $H 21; y^2 + 2x - 2 = 0$ ).

In totaal heeft men in de Hyperbolische meetkunde dus 12 actueele, 8 virtueele en 2 imaginaire soorten tweedegraadskrommen. We hebben ze met de verschillende soorten in de Euclidische- en Elliptische meetkunde verzameld in een tabel (Tabel II). Naast elkaar staan daar de overeenkomstige soorten in de drie verschillende meetkundes.

### § 5. Analytisch onderzoek; rang 3.

Evenals in de Euclidische- en Elliptische meetkunde moet ook hier een rekenmethode uitgewerkt worden, om, zonder de  $K$  te teekenen, te bepalen tot welke soort zij behoort. Er is dus gegeven een kwadratische vergelijking in  $x$  en  $y$ :  $F(xy) = 0$  en nu moeten we onderzoeken van wat voor soort kromme in de Hyperbolische meetkunde  $F(xy) = 0$  de vergelijking is. Allereerst onderzoeken we de rang; het geval, dat deze twee of één is, zullen we later bespreken, we beperken ons voorloopig tot vergelijkingen met rang 3. We bundelen nu  $F(xy)$  met  $\Omega$ :  $F(xy) - \lambda \Omega = 0$  en bepalen de wortels van de  $\lambda$ -vergelijking. Hier kunnen zich de volgende gevallen voordoen:

IA: 3 verschillende, reële wortels;

IB: 3 verschillende wortels: 1 reël, 2 toegevoegd complex;

II : 2 gelijke wortels, 1 verschillend;

III : 3 gelijke wortels.

't Is duidelijk, dat deze indeeling, wat de cijfers betreft, overeenstemt met die van blz. 14. Van een bundel tweedegraadskrommen, waarvan de  $\lambda$ -vergelijking 3 reële verschillende wortels heeft, bestaat de basisfiguur uit 4 verschillende imaginaire of 4 verschillende reële punten. Heeft een  $\lambda$ -vergelijking 2 complexe wortels, dan is de basisfiguur van de vorm: 2 reële en 2 imaginaire punten. Het blijkt dus, dat de gevallen a. en b. van blz. 14 tot type IA behooren en dat geval c. hetzelfde is als type IB.

Vinden we, dat een  $K$  tot type IA behoort, dan is de volgende stap het berekenen van de 4 gemeenschappelijke oplossingen van:  $F(xy) = 0$  en  $\Omega = 0$ . We hebben gezien, dat zich dan slechts kunnen voordoen: 4 imaginaire of 4 reële oplossingen. Vervolgens stellen we de klassevergelijkingen van  $K$  en  $\Omega$  op en gaan hiervan de gemeenschappelijke oplossingen bepalen; ook hier kunnen slechts voorkomen: 4 imaginaire of 4 reële oplossingen.



In het geval, dat we beide keeren 4 imaginaire oplossingen vinden, behoort K tot één der volgende soorten:

imaginaire ellips,  
actueele ellips,  
virtueele omhullende ellips.

Om uit deze drie mogelijkheden te beslissen wat voor soort kromme  $F(xy) = 0$  voorstelt, gaan we evenals in de Elliptische meetkunde te werk: we zoeken een reëel punt ervan. We beschouwen in  $F(xy) = 0$  de  $y$  als parameter en bepalen, voor welke reële  $y$  de vergelijking  $F(xy) = 0$  een reële oplossing heeft. Is er geen reële  $y$ , dan is K een imaginaire ellips. Is er wel een reële  $y: y_0$ , dan bepalen we één der bijbehorende  $x$ -waarden:  $x_0$ . Als nu:  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ , dan stelt  $F(xy) = 0$  een actueele ellips voor; als:  $x_0^2 + y_0^2 > 1$ , dan is het een virtueele omhullende ellips. Het bewijs hiervan is triviaal: we hebben in het bovenstaande een reëel punt van K bepaald, coördinaten:  $\{x_0; y_0\}$ . Als nu:  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ , dan is dat reële punt actueel; dus K is actueel, in dit geval een actueele ellips. Als:  $x_0^2 + y_0^2 > 1$ , dan ligt het reële punt buiten  $\Omega$ ; de K is de virtueele omhullende ellips.

Vinden we 4 imaginaire oplossingen van de graadvergelijkingen en 4 reële oplossingen van de klassevergelijkingen, dan is K een virtueele ellips (H 4).

Vier reële oplossingen van de graadvergelijkingen en 4 imaginaire van de klassevergelijkingen bepalen de concave hyperbool en beide keeren 4 reële oplossingen is het geval bij de convexe hyperbool.

Een K van type IB is, zooals we op blz. 15 gezien hebben, altijd een semihyperbool.

Tot type II behooren de gevallen IIA en IIB van blz. 14. Deze twee kunnen we onderscheiden door de Segrenotatie te bepalen; omdat dit echter een langdurig werk kan zijn, passen we een andere manier toe. We schrijven de vergelijking op van het exemplaar uit de bundel behorende bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking en bepalen daarvan de rang. Is die rang 2, dan is het type IIA; is die rang 1, dan is het type IIB.

Dus eerst de rang 2; wederom bepalen we de gemeenschappelijke oplossingen van:  $F(xy) = 0$  en  $\Omega = 0$ , hier is nu steeds een dubbele oplossing, terwijl de andere 2 of imaginair of reëel zijn. Daarna stellen we de klassevergelijkingen van  $\Omega$  en K op en berekenen de gemeenschappelijke oplossingen van beide, ook hier is steeds een dubbele,

reële, oplossing, terwijl de andere 2 of imaginair of reël zijn. Eerst het geval: beide keeren imaginaire oplossingen; de  $K$  kan zijn virtueel of actueel, waartusschen we op de bekende manier beslissen met het zoeken van een reël punt. Ligt dat punt binnen  $\Omega$ , dan is  $K$  een actuele elliptische parabool, ligt het buiten  $\Omega$ , dan een virtueele omhullende elliptische parabool<sup>1)</sup>. Hebben de graadvergelijkingen imaginaire en de klassevergelijkingen reële enkelvoudige oplossingen, dan is de kromme een virtueele elliptische parabool (H 10). Zijn die van de graadvergelijkingen reël en van de klassevergelijkingen imaginair, dan is  $K$  een concave eendeelige hyperbolische parabool. Tenslotte het geval: beide keeren reële oplossingen, dan is de kromme een convexe eendeelige-

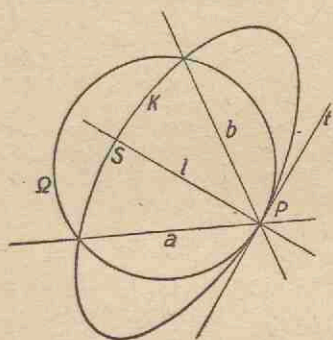


Fig. 4.

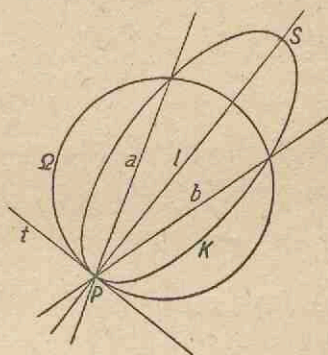


Fig. 5.

of een tweedeelige hyperbolische parabool. Het kenmerk, dat we op blz. 16 gebruikten om beide soorten krommen te onderscheiden, is niet analytisch vast te leggen, zoodat we naar een andere methode moeten omzien. We hebben reeds de vergelijking van het exemplaar (een ontaard exemplaar) uit de bundel, behoorende bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking. Ontbinding hiervan levert de vergelijkingen van de beide lijnen  $a$  en  $b$  (Fig. 4 en 5), ieder gaande door het raakpunt  $P$  en een enkelvoudig snijpunt. De vergelijking van de dubbeltellende tangent  $t$  is ook eenvoudig te vinden: deze gaat natuurlijk ook door  $P$ . We bepalen nu de straal  $l$  door  $P$ , die harmonisch ligt met  $t$  ten opzichte van  $a$  en  $b$ . Deze straal  $l$  snijden we met  $K$ , snijpunt  $S: \{x_1; y_1\}$ . In Fig. 4 ligt dat snijpunt  $S$  binnen  $\Omega$  en is dus:  $x_1^2 + y_1^2 < 1$ , de  $K$  is een convexe eendeelige hyperbolische parabool. In Fig. 5 ligt  $S$  buiten  $\Omega$ , is dus:  $x_1^2 + y_1^2 > 1$ , de  $K$  is een tweedeelige hyperbolische parabool.

<sup>1)</sup> Ligt het op  $\Omega$ , dan nemen we een ander reël punt.

Het bepalen van de harmonische straal  $l$  is invariant voor een collineatie uit de reëel-projectieve groep, terwijl de eigenschap van het punt  $S$  ten opzichte van  $\Omega$  invariant is voor een collineatie uit de  $\Omega$ -congruente groep.

TABEL III.

$F - \lambda \Omega = 0$ Soort van wortels:	Rang exemplaar correspond. met meerv. $\lambda$ -wortel:	Soort van snijpunten:	Soort van gemeensch. enkelvoud. tangenten:	Reëel punt: $\{x_0; y_0\}$	Naam:	Nr.:	
3 verschillende reële: Type IA	—	4 imag.	4 imaginaire	geen	imaginaire ellips	H 1	
				$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele omhullende ellips	H 2	
		4 reële	4 reële	4 imaginaire	—	actueele ellips	H 3
					$x_0^2 + y_0^2 < 1$	virtueele ellips	H 4
					—	concave hyperbool	H 5
					—	convexe hyperbool	H 6
3 verschillende: 2 imag., 1 reël: Type IB. 2 gelijk, 1 verschillend	2: Type II A	1 dubbele reële, 2 imag.	2 imaginaire	—	semihyperbool	H 7	
				$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele omhullende elliptische parabool	H 8	
			$x_0^2 + y_0^2 < 1$	actueele elliptische parabool	H 9		
			$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele elliptische parabool	H 10		
			—	concave eendeelige hyperbolische parabool	H 11		
			—	convexe eendeelige hyperbolische parabool (zie blz. 21)	H 12		
		2: Type II B	2 imag.	—	geen	imaginaire cirkel	H 14
					$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele cirkel	H 15
			2 reële	—	$x_0^2 + y_0^2 < 1$	actueele cirkel	H 16
					$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele omhullende afstandslijn (zie blz. 23)	H 17
					$x_0^2 + y_0^2 < 1$	virtueele afstandslijn (zie blz. 23)	H 18
					—	actueele afstandslijn osculerende parabool	H 19
3 gelijke	2: Type III A	—	—	$x_0^2 + y_0^2 > 1$	virtueele grenscirkel	H 20	
	1: Type III B	—	—	$x_0^2 + y_0^2 < 1$	actueele grenscirkel	H 22	

Bij het type IIB bepalen we weer de oplossingen van:  $F(xy) = 0$  en  $\Omega = 0$ ; die kunnen zijn: 2 imaginaire, ieder dubbelgeteld of 2 reële dubbelgeteld. Het eerste geval bevat de soorten: imaginaire cirkel, actueele cirkel of virtueele cirkel, waaruit we op de bekende manier kiezen met de methode: een reël punt van de kromme opzoeken. Zijn er twee reële oplossingen, dan kan de K zijn: actueele afstandslijn of virtueel, waarin we beslissen door een reël punt van de kromme te zoeken. Tusschen de twee soorten van virtueele krommen kiezen we door de raaklijnen door de oorsprong van het coördinatenstelsel aan K te berekenen; zijn deze reël, dan is K een virtueele afstandslijn (H 18); zijn ze imaginair, dan een virtueele omhullende afstandslijn.

Het laatste geval van blz. 19 bevat de typen IIIA en IIIB van blz. 14. We bepalen wederom de rang van het exemplaar behoorende bij de  $\lambda$ -wortel. Is deze rang: 2, dan is het type IIIA en is de kromme een osculeerende parabool.

Als de rang 1 is (dus type IIIB), dan is de kromme een actueele of een virtueele grenscirkel, waartusschen men op de bekende manier kiest.

In Tabel III is een samenvatting van het Analytisch onderzoek gegeven.

### § 6. Krommen met rang 2 en 1.

Laat de rang van de vergelijking  $F(xy) = 0$  twee zijn, dan is K een lijnenpaar: reël of imaginair. Om hierin te beslissen snijden we  $F(xy) = 0$  met een rechte niet door het dubbelpunt en bepalen de oplossingen. Zijn deze beide reël, dan is het een reël lijnenpaar; in het toegevoegd complexe geval is K een imaginair lijnenpaar.

Bij een imaginair lijnenpaar kan het snijpunt zijn: actueel, virtueel of een punt van  $\Omega$ . Ook bij een reël lijnenpaar kunnen we de volgende gevallen onderscheiden:

1. snijpunt actueel;
2. snijpunt op  $\Omega$ ;
3. snijpunt virtueel.

In het tweede geval kan nog één der lijnen raken aan  $\Omega$ . In het derde geval kunnen de rechten  $\Omega$  reël snijden, niet reël snijden of raken. In totaal kan een reël lijnenpaar 9 verschillende standen hebben ten opzichte van  $\Omega$ . Tot welk geval een bepaald reël lijnenpaar behoort, kunnen we onderzoeken door het snijpunt der lijnen te bepalen; daarna zoonoodig  $F(xy) = 0$  te ontbinden en van iedere lijn afzonderlijk de Euclidische afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel te

berekenen. Dit geschiedt door de coördinaten:  $\{0; 0; 1\}$  te substitueeren in de op nul herleide normaalvergelijking van de lijn. Vindt men  $d < 1$ , dan is de lijn actueel; als  $d = 1$ , dan raakt de lijn aan  $\Omega$  en voor  $d > 1$  is de lijn geheel virtueel.

Bij de rang 1 is de dubbelrechte altijd reëel. Men heeft dus slechts de vergelijking van de enkelvoudige lijn te nemen en de  $d$  te bepalen. De dubbelrechte kan nog zijn:

1. actueel;
2. geheel virtueel;
3. een raaklijn van  $\Omega$ ;

waartusschen men ook op bovenstaande manier kiest.

---

## TWEEDE DEEL: DE RUIMTE.

### VIERDE HOOFDSTUK.

#### INLEIDING.

§ 7. Een indeeling van de verschillende soorten van tweedegraadsoppervlakken in de niet-Euclidische meetkunde, die slechts gebaseerd is op meetkundige kenmerken, is tot nu toe niet gepubliceerd. Wel zijn er eenige verhandelingen <sup>1)</sup> verschenen over die classificatie, maar deze berusten of op de vergelijking van het oppervlak of op andere algebraïsche eigenschappen. Een zuiver meetkundige behandeling, die noodzakelijk een uitbreiding in de ruimte is van de manier, die we in het platte vlak gebruikten en die moet berusten op een beschouwing van de verschillende soorten van snijfiguren en gemeenschappelijke raakfiguren van  $\Omega$  en het oppervlak, en die tevens stelselmatig en algemeen geldend is, dus waarbij bewezen wordt, dat er niet meer soorten van oppervlakken kunnen zijn, zal hier worden ontwikkeld. Op deze manier vinden we ook alle mogelijke soorten van imaginaire en virtuele oppervlakken en van oppervlakken met rang 3, die in de bovengenoemde publicaties slechts bij uitzondering voorkomen. De meetkundige indeeling maakt het ons verder mogelijk in de Hyperbolische meetkunde twee oppervlakken, die slechts verschillen in het aantal deelen, waarin ze het actueele gebied verdeelen, te onderscheiden. Ten slotte is weer in het Analytisch onderzoek een methode aangegeven, om, uitgaande van de vergelijking, de soort van het oppervlak te bepalen.

<sup>1)</sup> P. Barbarin: „Etudes de Géométrie Analytique Non Euclidienne”, Mémoires Couronnés et Autres Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, Tome 60, 1900; J. L. Coolidge: „The Elements of Non-Euclidean Geometry”, p. 154, en: „Quadric Surfaces in Hyperbolic Space”, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 4 (1903), p. 161; T. J. Bromwich: „The Classification of Quadrics”, Transactions etc., Volume 6 (1905); J. Pierpont: „Classification of Quadrics in Hyperbolic Space”, American Journal of Mathematics XLIX (1927), p. 143.

Zie voor een indeeling van de omwentelingsoppervlakken: „De Omwentelingsoppervlakken of Cylinders van den tweeden graad der niet-Euclidische Ruimte”, van J. A. Barrau; Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam, Verslag van de gewone vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeling, Deel XIX, blz 1426.

Gegeven is een reële kwadratische vergelijking in  $x$ ,  $y$  en  $z$  van een tweedegraadsoppervlak. De vergelijking stellen we voor door  $F(xyz) = 0$  en het oppervlak door  $O$ . Het oppervlak en de matrix der vergelijking hebben een rang. In het algemeene geval is deze 4. Is de rang 3, dan bevat het  $O$  één dubbelpunt, een punt dat geconjugeerd is ten opzichte van het oppervlak met alle punten van de ruimte. Als de rang 2 is, dan bevat het  $O$  een lijn van zulke punten, is ontaard in twee vlakken; bij rang 1 is er een vlak van dubbelpunten, het  $O$  is een dubbelvlak. Een nauwkeuriger indeeling berust op de verschillende standen, die een  $O$  kan innemen ten opzichte van een bepaalde figuur: de absolute figuur. In de Euclidische meetkunde is deze het oneigenlijke vlak, het vlak waarmee de meetkundige ruimte wordt aangevuld om haar in overeenstemming te brengen met de stekkundige ruimte; de indeeling heet er affien. Een  $O$  van rang 4, dat de absolute figuur snijdt volgens een imaginaire tweedegraadskromme, is hier een ellipsoïde; een  $O$ , dat de absolute figuur snijdt volgens een reële tweedegraadskromme, is een hyperboloïde en is de snijkromme ontaard, dan is het  $O$  een paraboloid. Is in de Euclidische meetkunde bij een  $O$  van rang 3 het dubbelpunt een punt van de absolute figuur, dan noemen we het  $O$  een cylinder; is het geen punt van de absolute figuur, dan is het  $O$  een kegel. De indeeling naar de signatuur is als volgt: een  $O$  van rang 4 met signatuur 4 is imaginair, met signatuur 2 is het reëel en heeft 2 imaginaire regelscharen, met signatuur 0 is het reëel en heeft 2 reële regelscharen. Een  $O$  van rang 3 en signatuur 3 is imaginair, met signatuur 1: reëel. Een vlakkenpaar kan zijn imaginair of reëel en een dubbelvlak is altijd reëel. In de niet-Euclidische meetkunde is de absolute figuur een tweedegraadsoppervlak. Daar zal de overeenkomstige indeeling berusten op de verschillende standen, die twee tweedegraadsoppervlakken ten opzichte van elkaar kunnen innemen. We zullen dus 13 typen van oppervlakkenbundels moeten onderzoeken<sup>1)</sup> en daarop onze indeeling baseeren. Zouden we ons tot deze indeeling beperken, dan zouden we in conflict komen met de aanschouwing en moesten we twee oppervlakken, die geheel verschillend van vorm zijn, tot dezelfde soort rekenen. In het platte vlak deed zich dat geval ook voor en daar gebruikten we de gemeenschappelijke raakfiguur van  $K$  en  $\Omega$ . We zullen hier de gemeenschappelijke torsus van  $O$  en  $\Omega$ , beide als klassefiguur beschouwd, gaan onderzoeken. Hier treedt dan het volgende probleem op: twee

<sup>1)</sup> De Identische bundel is van geen belang (hij levert slechts  $\Omega$  zelf) en de Singuliere bundel is onbruikbaar. Zie voor alle in het vervolg gebruikte eigenschappen van bundels en scharen: J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde”, Deel II, blz. 246 en vlg.

graadoppervlakken  $O_1$  en  $O_2$  (waarvan  $O_1$  de signatuur 2 heeft) snijden elkaar volgens een bepaalde snijkromme; deze zelfde oppervlakken beschouwen we als klasseoppervlakken. Welke soorten van torsus kunnen deze beide oppervlakken dan gemeen hebben? <sup>1)</sup> Aangehouden zal worden, dat in de eerste plaats twee graadoppervlakken, die een bundel met zekere Segrenotatie vormen, als klasseoppervlakken beschouwd een schaar met dezelfde Segrenotatie vormen. Verder zal dan bewezen worden, dat het ondertype, waartoe bovengenoemde bundel behoort, de ondertypen bepaalt waartoe de schaar kan behooren, terwijl deze ook afhankelijk zijn van de signatuur van  $O_2$ . De mogelijke combinaties van bundelondertype en schaarondertype bepalen dan de verschillende soorten van oppervlakken in de niet-Euclidische meetkunde. In de Elliptische meetkunde zal dit onderzoek vrij eenvoudig zijn, terwijl in de Hyperbolische meetkunde zal blijken, dat we het aantal deelen, waarin  $O$  het actueele gebied verdeelt, als een nieuw kenmerk moeten gebruiken, hetgeen zelfs in vier gevallen nog niet voldoende is.

In de niet-Euclidische meetkunde zullen we alle oppervlakken van rang 3, kegels noemen. De naam cylinder is te nauw verbonden met de omwentelingsoppervlakken, dan dat we deze hier, zonder verwarring te stichten, kunnen gebruiken. Een kegel in de niet-Euclidische meetkunde, wiens top op het absolute oppervlak ligt, noemen we parallelkegel. De indeeling van de kegels berust eveneens op de verschillende gevallen van oppervlakkenbundels. In de Elliptische meetkunde zijn we slechts in staat ze verder in te deelen in reële en imaginaire kegels. Voor de indeeling van de kegels in de Hyperbolische meetkunde maken we gebruik van eigenschappen van deze kegels ten opzichte van  $\Omega$ . In de eerste plaats onderscheiden we kegels met actueele top, met virtueele top en met top op  $\Omega$ . Vervolgens gebruiken we de realiteit van de gemeenschappelijke raakvlakken van de kegel en  $\Omega$  als een indeelingskenmerk. De klassevergelijking van een kegel is een kwadratische vergelijking in  $u$ ,  $v$  en  $w$ , gecombineerd met een lineaire vergelijking in dezelfde coördinaten. Het aantal gemeenschappelijke oplossingen van deze beide vergelijkingen en de klassevergelijking van  $\Omega$  is 4. Er zijn dus 4 gemeenschappelijke raakvlakken van  $\Omega$  en een kegel. Tenslotte moeten we één keer het aantal deelen, waarin het actueele gebied door de kegel wordt verdeeld, als kenmerk gebruiken.

Over de projectieve algemeenheid van deze indeeling van opper-

<sup>1)</sup> Dit onderzoek is in het platte vlak reeds gedaan: J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde” Deel I, § 117 en vlg.



vlakken van rang 4 en 3 kunnen we, na hetgeen bij het platte vlak gezegd is, kort zijn. We beperken ons namelijk weer tot collineatie's uit de  $\Omega$ -congruente groep, (een ondergroep van de reëel-projectieve groep in de ruimte), waarvoor de heele indeeling invariant blijft.

De verschillende soorten van oppervlakken zullen we aanduiden met E of H en twee cijfers, één Romeinsch voor het type en één Arabisch. De kegels komen in nummering achter de oppervlakken met rang 4 van het zelfde type. Achter iedere naam is wederom, als voorbeeld, de vergelijking (t.o.v. een Cartesiaansch assenstelsel) gegeven van een oppervlak, behoorende tot die bepaalde soort. Bovendien is in eenige gevallen de vorm van zoo'n oppervlak door een schetsmatige teekening verduidelijkt.

§ 8. Bij het analytisch onderzoek zullen we weer een reëel punt van O moeten zoeken. Gegeven is dus:  $F(xyz) = 0$  (kwadratisch in  $x$ ,  $y$  en  $z$ ). We moeten van deze vergelijking een reëele oplossing bepalen, met andere woorden: we moeten een reëele  $x$ ,  $y$  en  $z$  zoeken, die voldoen aan  $F(xyz) = 0$ . Hiervoor rangschikken we de vergelijking naar machten van  $x$ :

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1)$$

De  $A$  is een constante,  $B$  een lineaire uitdrukking in  $y$  en  $z$  en  $C$  een kwadratische uitdrukking in  $y$  en  $z$ . Willen de beide wortels van  $x$ , die aan deze vergelijking voldoen, reëel zijn, dan moet:

$$B^2 - 4AC > 0$$

Uitgewerkt schrijven we dit als:  $P \equiv ay^2 + by + c > 0$ , waarin  $a$  een constante,  $b$  een lineaire uitdrukking en  $c$  een kwadratische uitdrukking in  $z$  is. De vraag is nu: voor welke reëele waarden van  $y$  is  $P > 0$ ?

We onderstellen eerst:  $a > 0$ . In dit geval zijn er altijd reëele waarden van  $y$  waarvoor  $P > 0$ . Kiezen we dus een willekeurig reëele waarde van  $z$ :  $z_0$ , dan zijn  $a$ ,  $b$  en  $c$  bekend. Als nu:  $b^2 - 4ac > 0$ , dan is voor:  $y < y_1$  en  $y > y_2$  ( $y_1$  en  $y_2$  zijn de wortels van de vergelijking  $P = 0$ ;  $y_1 < y_2$ ):  $P > 0$ , terwijl bij:  $b^2 - 4ac < 0$  voor alle reëele waarden van  $y$ :  $P > 0$  is. Er is dus steeds een reëele waarde van  $y$ :  $y_0$  waarvoor  $P > 0$ . We substitueeren nu  $y_0$  en  $z_0$  in (1) en berekenen de bijbehorende waarden van  $x$ ; één ervan zij  $x_0$ . Nu is  $\{x_0; y_0; z_0\}$  een reëel punt van O.

Het andere geval is:  $a < 0$ , dan zijn er alleen maar reëele waarden van  $y$  waarvoor  $P > 0$ , als:  $b^2 - 4ac > 0$ . Dit schrijven we aldus:

$$Q \equiv b^2 - 4ac \equiv az^2 + \beta z + \gamma > 0. \quad (a, \beta \text{ en } \gamma \text{ zijn constanten})$$

We bepalen voor welke reële  $z$ :  $Q > 0$  is; laat een reële  $z$ -waarde die hieraan voldoet:  $z_0$  zijn. Bestaat er geen reële waarde, dan heeft  $O$  geen reële punten. Met behulp van  $z_0$  berekenen we de bijbehorende waarden van  $a$ ,  $b$  en  $c$ . De vorm  $P$  is dan bekend en we kunnen de reële waarden van  $y$  berekenen waarvoor  $P > 0$ . Laat zoo'n waarde  $y_0$  zijn, dan substitueeren we  $y_0$  en  $z_0$  in (1) en vinden een reële waarde van  $x$ :  $x_0$ . Dan is weer  $\{x_0; y_0; z_0\}$  een reëel punt van  $O$ .

Om de vergelijking van een raakvlak van  $O$  te vinden kan men aldus redeneeren: we snijden  $F(xyz) = 0$  met het vlak  $z = m$ , dan is de vergelijking van de snijkromme in het vlak  $z = m$ :  $F(xym) = 0$  ( $m =$  parameter). Nu moet die kromme ontaard zijn, dus de determinant van  $F(xym) = 0$  moet nul zijn; dat geeft een vierkantsvergelijking in  $m$ ; zijn de wortels reëel, dan zijn de 2 raakvlakken:  $z = m_1$  en  $z = m_2$ . Vindt men geen reële  $m$ -waarden, dan doet men hetzelfde met het vlak  $y = n$  of met  $x = 1$ . Mochten alle drie de gevallen falen, dan kan men op de boven behandelde manier een reële oplossing van de klassevergelijking van  $O$  bepalen.

## VIJFDE HOOFDSTUK.

### ELLIPTISCHE MEETKUNDE.

#### § 9. **Indeeling; rang 4.**

De absolute figuur zij hier de imaginaire bol:  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ . We snijden nu een  $O$  van rang 4 met  $\Omega$  en beschouwen de snijfiguur. Omdat  $\Omega$  alleen imaginaire punten bevat, zal die snijfiguur geheel imaginair zijn. Van de 13 typen van tweedegraadsoppervlakkenbundels zijn dus in de Elliptische meetkunde slechts die voor ons doel van belang, welke een geheel imaginaire basisfiguur hebben. Dat zijn de volgende:

- I : bundeltype  $[[1111]]$ , ondertype 1; de basisfiguur is een imaginaire vierdegraadskromme;
- IIA: bundeltype  $[[11]11]$ , ondertype 3; de basisfiguur bestaat uit 2 imaginaire tweedegraadskrommen in reële vlakken;
- IIB: bundeltype  $[(11)11]$ , ondertype 5; de basisfiguur bestaat uit 2 imaginaire tweedegraadskrommen in 2 toegevoegd complexe vlakken;
- III : bundeltype  $[[111]1]$ , ondertype 1; de basisfiguur is een imaginaire kromme van de tweede graad dubbelgeteld;
- IV : bundeltype  $[[11](11)]$ , ondertype 1; de basisfiguur bestaat uit 2 tweedegraadskrommen beide ontaard in toegevoegd complexe rechten.

Dit geeft dus vier typen van oppervlakken in de Elliptische meetkunde. We zullen ook hier spreken van een  $O$  van type IIA e.d. als een  $O$  de absolute figuur snijdt volgens de basisfiguur van bundeltype  $[[11]11]$ , ondertype 3.

De snijfiguur van een  $O$  van type I met  $\Omega$  is algemeen en volmaakt imaginair: dit type bevat dus de ellipsoïden van de Elliptische meetkunde.

We moeten eerst bewijzen, dat 2 graadoppervlakken, die een imaginaire vierdegraadskromme gemeen hebben, als klasseoppervlakken beschouwd een algemeene biquadratische torsus gemeen hebben. De graadoppervlakken in vergelijking gebracht op hun gemeenschappelijk reël poolviervlak als grondviervlak zijn:

$$\Omega: \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0$$

$$\text{en } O: \sum_{i=1}^4 a_i x_i^2 = 0$$

De klassevergelijkingen van deze oppervlakken zijn:  $\sum_{i=1}^4 u_i^2 = 0$  en  $\sum_{i=1}^4 \frac{u_i^2}{a_i} = 0$ , en deze beide klasseoppervlakken vormen een algemeene

schaar. Vervolgens is direct in te zien, dat van de 4 ondertypen van de algemeene schaar slechts ondertype 1 kan voorkomen:  $\Omega$  heeft alleen imaginaire raakvlakken, de gemeenschappelijke torsus moet dus bestaan uit imaginaire vlakken. De eenige mogelijke combinatie is: bundel-ondertype 1 en schaarondertype 1. Beide bevatten exemplaren van alle drie de signaturen, we zien dus, dat er in de Elliptische meetkunde drie soorten algemeene tweedegraadsoppervlakken zijn: een imaginair  $O$ , een reëel  $O$  met imaginaire regelscharen en een reëel  $O$  met reële regelscharen. We noemen ze resp.: **imaginaire ellipsoïde** (EI1;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4 = 0$ ), **reële nietrechtlijnige ellipsoïde** (EI2;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4 = 0$ ) en **rechtlijnige ellipsoïde** (EI3;  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ ).

De oppervlakken van type II snijden  $\Omega$  volgens 2 tweedegraads-krommen, zijn dus omwentelingsoppervlakken. Zoowel in een bundel van ondertype 3 als van ondertype 5 van het bundeltype [(11)11] hebben de oppervlakken oneindig veel gemeenschappelijke reële poolviervlakken. Met één zoo'n poolviervlak als grondviervlak zijn de vergelijkingen van  $\Omega$  en  $O$  resp.:  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$  en  $ax^2 + ay^2 + bz^2 + ct^2 = 0$  ( $a, b$  en  $c$  reëel). Nu heeft  $O$  de signatuur 4 als:  $a > 0, b > 0, c > 0$ ; de signatuur 2 als:  $a > 0, b > 0, c < 0$ ; de signatuur 0 als:  $a > 0, b < 0, c < 0$ .

Stellen we van  $\Omega$  en  $O$  de klassevergelijking op en bepalen we, na scharing het type der schaar, dan is dat: [(11)11]. Verder is duidelijk, dat van dit schaar-type slechts de beide ondertypen 3 en 5 kunnen voorkomen. De voor ons doel belangrijke kenmerken van de bundel- en schaar-typen zijn:

Bundelondertype 3: de bundel bevat een reëel vlakkenpaar.

„ 5: de bundel bevat een toegevoegd complex vlakkenpaar.

Schaarondertype 3: de schaar bevat een reëel puntenpaar.

„ 5: de schaar bevat een toegevoegd complex puntenpaar.

Het vlakkenpaar uit de bundel heeft tot vergelijking:  $z^2 = \frac{a-c}{b-a} t^2$

en het puntenpaar uit de schaar:  $w^2 = \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{b}{c} s^2$ .

Als nu:  $\frac{a-c}{b-a} > 0$ , dan is het een bundel van ondertype 3; de bijbehorende schaar is van ondertype 3, als  $b$  en  $c$  hetzelfde teeken hebben: dus als  $O$  de signatuur 4 heeft (signatuur 0 is bij bundelondertype 3 niet mogelijk). Hebben  $b$  en  $c$  verschillend teeken, signatuur 2, dan is de schaar van ondertype 5. Als:  $\frac{a-c}{b-a} < 0$ , dan is het een bundel van ondertype 5. Voor  $b$  en  $c$  hetzelfde teeken ( $s=4$  en  $s=0$ ) is de schaar van ondertype 5, terwijl in het geval  $s=2$ , de schaar van ondertype 3 is. Het resultaat is, dat als een  $O$  van een bepaalde signatuur, tegelijk met  $\Omega$  een bundel en een schaar van type  $[(11)11]$  vormt, slechts de volgende combinaties van signaturen en ondertypen mogelijk zijn:

Bundelondertype 3.	$s=4$ .	Schaarondertype 3.
	$s=2$ .	" 5.
Bundelondertype 5.	$s=4$ .	" 5.
	$s=2$ .	" 3.
	$s=0$ .	" 5.

Het type IIA bevat dus imaginaire oppervlakken en reële met imaginaire regelscharen. We noemen de beide soorten resp.: **imaginaire omwentelingsellipsoïde (1ste soort)** (EII 1;  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2 = 0$ ) en **reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (1ste soort)** (EII 2;  $3x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ ). Het type IIB bevat drie soorten van oppervlakken, die we noemen: **imaginaire omwentelingsellipsoïde (2de soort)** (EII 3;  $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 1 = 0$ ), **reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (2de soort)**<sup>1)</sup> (EII 4;  $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4 = 0$ ) en **rechtlijnige omwentelingsellipsoïde** (EII 5;  $x^2 + 3y^2 - z^2 - 1 = 0$ ).

De Elliptische meetkunde heeft dus vijf soorten van omwentelingsellipsoïden: 2 soorten imaginaire, 2 soorten nietrechtlijnige en 1 soort rechtlijnige.

Een bundel van type  $[(111)1]$ , ondertype 1 is een bundelschaar: alle

<sup>1)</sup> Bij Barrau (Versl. Afd. Nat. Kon. Ac. v. Wet., XIX, blz. 1431) worden de reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïden van de 1ste soort en die van de 2de soort resp. genoemd: afgeplatte — en verlengde — omwentelingsellipsoïden.

oppervlakken van de bundel behooren ook tot een schaar; er is dus maar één combinatie mogelijk. De basisfiguur van dit ondertype is een dubbeltellende imaginaire tweedegraadskromme in een reëel vlak  $V$ . De bundelvergelijking is:  $\Omega - \lambda V^2 = 0$ . We herkennen hierin <sup>1)</sup> de definitie van een oppervlak, dat in de Elliptische meetkunde reeds lang bekend is: het afstandsoppervlak, tevens bol. Het bundelondertype bevat exemplaren van de signaturen 4 en 2, de soorten van oppervlakken van type III zijn dus: **imaginaire bol** (EIII 1;  $2x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ) en **reëele bol** (EIII 2;  $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$ ).

Ook het bundeltype [(11)(11)], ondertype 1 bepaalt een bundelschaar. De snijfiguur van  $O$  en  $\Omega$  bestaat uit twee ontaarde tweedegraadskrommen, die dus liggen in twee raakvlakken van  $\Omega$ . Als die vlakken  $V_1$  en  $V_2$  zijn, is de vergelijking van de bundel:  $\Omega - \lambda V_1 V_2 = 0$ . Ook hier herkennen we <sup>1)</sup> een bekend oppervlak: de cirkelcylinder. In een bundel van dit ondertype komen voor oppervlakken met de signaturen 4 en 0. Het type IV bevat dus de volgende soorten: **imaginaire cirkelcylinder** (EIV 1;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 1 = 0$ ) en **rechtlijnige cirkelcylinder** (EIV 2;  $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ ). We moeten ons goed realiseren, dat deze oppervlakken de rang 4 hebben en niet vergeleken kunnen worden met de cilindervlakken uit de Euclidische meetkunde.

Resumeerend hebben we in de Elliptische meetkunde 12 soorten kwadratische oppervlakken met rang 4: drie soorten ellipsoïden, vijf soorten omwentelingsellipsoïden, twee soorten afstandsoppervlakken en twee soorten cirkelcilindervlakken. Van deze 12 soorten zijn er 5 imaginair, 4 zijn nietrechtlijnige- en 3 zijn rechtlijnige oppervlakken.

### § 10. Kegels en ontaarding.

Kegels zijn kwadratische oppervlakken van rang 3. We merken volledigheidshalve op, dat de top van een kegel met reëele vergelijking reëel is. Nu bevat in de Elliptische meetkunde de absolute figuur slechts imaginaire punten, zoodat er hier geen parallelkegels bestaan.

We moeten, om de verschillende soorten van kegels op te sporen, de ontaardingsgevallen in de bundels beschouwen en trachten deze analytisch zoo ver mogelijk van elkaar te onderscheiden. Hiervoor zijn de ligging van de top t.o.v.  $\Omega$  en de gemeenschappelijke raakvlakken van  $O$  en  $\Omega$  onbruikbaar, daar deze laatste altijd imaginair zijn. We kunnen dus slechts een indeeling maken naar: reëele en imaginaire kegels.

<sup>1)</sup> J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde“, Deel II, blz. 337.

Een bundel van type [1111], ondertype 1 bevat als ontaarde exemplaren: 2 reële en 2 imaginaire kegels. Er zijn dus in type I twee soorten kegels: een **imaginaire algemeene kegel** (EI4;  $y^2 + 2z^2 + 3 = 0$ ) en een **reële algemeene kegel** (EI5;  $x^2 - z^2 - 2 = 0$ ).

De kegels van een bundel van type [(11) 11], ondertype 3 zijn beide imaginair. Het type IIA bevat één soort kegel: de **imaginaire omwentelingskegel (1ste soort)** (EII6;  $2y^2 + z^2 + 1 = 0$ ).

In een bundel van het ondertype 5 van hetzelfde bundeltype bevinden zich een reële en een imaginaire kegel. De namen van de soorten van kegels behorende tot type IIB zijn: **imaginaire omwentelingskegel (2de soort)** (EII7;  $x^2 + 2z^2 + 2 = 0$ ) en **reële omwentelingskegel** (EII8;  $y^2 - z^2 - 1 = 0$ ).

De bundel van type [(111)1], ondertype 1 bevat slechts één imaginaire kegel, het type III bestaat uit één soort kegels: die der **isotrope kegel** (EIII3;  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ).

Het laatste geval: bundeltype [(11)(11)], ondertype 1 bevat geen kegel.

Resumeerend zijn er dus in de Elliptische meetkunde 2 soorten reële en 4 soorten imaginaire kegels. We kunnen, zooals reeds is aangetoond, deze 6 soorten alleen vergelijken met de 2 soorten kegels in de Euclidische meetkunde: de reële en de imaginaire.

't Verdient aanbeveling om in de ruimte het Analytisch onderzoek van de kegels vòòr dat van de oppervlakken met rang 4 te behandelen.

Gegeven is in het algemeen:  $F(xyz) = 0$ , kwadratisch in  $x$ ,  $y$  en  $z$ ; we moeten bepalen van wat voor soort oppervlak  $F(xyz) = 0$  de vergelijking is. Allereerst onderzoeken we de rang van  $F(xyz) = 0$ ; laat deze 3 zijn, dan is het  $O$  dus een kegel. We gaan nu  $O$  bundelen met  $\Omega$ , de bundelvergelijking is:

$$F(xyz) - \lambda \Omega = 0.$$

De  $\lambda$ -vergelijking hiervan kan de volgende drie gevallen vertoonen:

- I: 4 verschillende wortels;
- II: 2 gelijke, 2 verschillende wortels;
- III: 3 gelijke, 1 verschillende wortel.

Bij type I moeten we nog beslissen tusschen de reële en de imaginaire kegel. Hiervoor snijden we de kegel met een vlak niet door de top<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> De top van een kegel wordt ook in de niet-Euclidische meetkunde op de bekende manier bepaald.

en bepalen de aard van de snijfiguur; is deze kromme reëel, dan is de kegel reëel; is deze kromme imaginair, dan is de kegel imaginair.

Het type II wordt onderverdeeld in IIA en IIB, dus eerst moeten we deze twee gevallen onderscheiden. Hiervoor schrijven we de vergelijking op van het exemplaar uit de bundel:  $F(xyz) - \lambda \Omega = 0$ , dat behoort bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking. Is dat exemplaar een reëel vlakkenpaar, dan is het type IIA; in het geval van een toegevoegd complex vlakkenpaar is het type IIB. Tot type IIA behoort slechts de imaginaire omwentelingskegel (1ste soort). Bij type IIB moeten we op bovenstaande manier kiezen tusschen de imaginaire omwentelingskegel (2de soort) en de reëele omtwentelingskegel.

Het type III bevat slechts de isotrope kegel.

Over de O's met rang 2 en 1 kunnen we heel kort zijn. Als de rang van  $F(xyz) = 0$  twee is, kan het O een reëel of een toegevoegd complex vlakkenpaar zijn. Om dit te onderzoeken snijden we wederom met een vlak, niet door de snijlijn van beide vlakken; is de snijkromme reëel, dan is het vlakkenpaar reëel; is de snijkromme imaginair, dan is het vlakkenpaar imaginair.

Het bereikte resultaat voor O's met rang 3, 2 en 1 is samengevat in Tabel IV. Bij de kegels is tevens het type vermeld.

TABEL IV.

Rang:	$F - \lambda \Omega = 0$	Aard exemplaar van bundel behorende bij dubbele $\lambda$ -wortel:	Soort snijkromme met willek. vlak:	Naam:	Nr.:
3	4 verschillende: Type I.	—	imaginair	imaginaire algemeene kegel	EI 4
			reëel	reëele algemeene kegel	EI 5
	2 gelijke, 2 verschillende	reëel: Type IIA. imaginair: Type IIB	—	imaginaire omwentelingskegel (1ste soort)	EII 6
			imaginair	imaginaire omwentelingskegel (2de soort)	EII 7
2	—	—	reëel	reëele omwentelingskegel	EII 8
			—	isotrope kegel	EIII 3
1	—	—	imaginair vlakkenpaar	—	
			reëel vlakkenpaar	—	
			dubbelvlak	—	



### § 11. Analytisch Onderzoek; rang 4.

Gegeven is  $F(xyz) = 0$ , kwadratisch in  $x$ ,  $y$  en  $z$ , waarvan de matrix de rang 4 heeft. We moeten bepalen van welk soort  $O$  dit de vergelijking is. We bundelen  $O$  en  $\Omega$  en de  $\lambda$ -vergelijking van de bundel kan dan hebben:

- I : 4 verschillende wortels;
- II : 2 gelijke, 2 verschillende wortels;
- III : 3 gelijke, 1 verschillende wortel;
- IV : tweemaal 2 gelijke wortels.

In het eerste geval behoort het te onderzoeken  $O$  tot type I: 't is dus een imaginaire ellipsoïde, reële nietrechtlijnige ellipsoïde of rechtlijnige ellipsoïde. Om te kiezen tusschen de imaginaire en de reële oppervlakken gaan we een reële oplossing:  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $F(xyz) = 0$  bepalen. Bestaat deze reële oplossing, dan is het  $O$  een reële ellipsoïde, in het andere geval kan het  $O$  niets anders zijn dan de imaginaire ellipsoïde. Tenslotte de keus uit reële nietrechtlijnige en rechtlijnige ellipsoïde: men bepaalt een raakvlak van het oppervlak en snijdt dit met  $O$ . De aldus ontstane snijfiguur is ontaard; zijn het twee reële rechten, dan is het  $O$  een reële rechtlijnige ellipsoïde. Is de snijkromme ontaard in twee toegevoegd complexe rechten, dan is het een reële nietrechtlijnige ellipsoïde.

Heeft de  $\lambda$ -vergelijking 2 gelijke en 2 verschillende wortels, dan hoort het  $O$  tot type II. Om tusschen type IIA en IIB te kiezen, bepaalt men de vergelijking van het exemplaar uit de bundel, behoorende bij de dubbele  $\lambda$ -wortel. Is dit een reël vlakkenpaar, dan is het type IIA; bij een imaginair: type IIB. Bij type IIA kiest men op de bekende manier tusschen de imaginaire omwentelingsellipsoïde (1ste soort) en de reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (1ste soort). Vindt men type IIB, dan bepaalt men eerst of het  $O$  imaginair (imaginaire omwentelingsellipsoïde 2de soort) of reël is. Daarna snijden met een raakvlak: een imaginair lijnenpaar als snijkromme geeft de reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (2de soort) en een reël lijnenpaar de rechtlijnige omwentelingsellipsoïde.

Zowel bij type III als bij type IV heeft men te kiezen tusschen een reël en een imaginair oppervlak. Vinden we bij type III een reël punt, dan is het  $O$  een reële bol; geen reël punt: imaginaire bol. Type IV en een reël punt geeft een rechtlijnige cirkelcylinder, geen reël punt bepaalt hier de imaginaire cirkelcylinder.

TABEL V.

$F - \lambda \Omega = 0$	Aard exemplaar behoorende bij dubbele $\lambda$ -wortel:	Punt: $\{x_0; y_0; z_0\}$	Soort van snijkromme met raakvlak:	Naam:	Nr.:
4 verschillende: Type I	—	geen reëel	—	imaginaire ellipsoïde reële nietrechtlijnige ellipsoïde	EI 1
		reëel	imaginaire		EI 2
2 gelijke, 2 verschillende	reëel: Type IIA	geen reëel	reëel	rechtlijnige ellipsoïde	EI 3
		reëel	—	imaginaire omwentelings- ellipsoïde (1ste soort)	EII 1
	imaginaire: Type IIB	geen reëel	—	reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (1ste soort)	EII 2
		reëel	—	imaginaire omwentelings- ellipsoïde (2de soort)	EII 3
		reëel	imaginaire	reële nietrechtlijnige omwentelingsellipsoïde (2de soort)	EII 4
3 gelijke, 1 verschillende: Type III.	—	geen reëel	reëel	rechtlijnige omwen- telingsellipsoïde	EII 5
		reëel	—	imaginaire bol	EIII 1
2 maal 2 gelijke: Type IV	—	geen reëel	—	reële bol	EIII 2
		reëel	—	imaginaire cirkelcylinder rechtlijnige cirkelcylinder	EIV 1 EIV 2

ZESDE HOOFDSTUK.

HYPERBOLISCHE MEETKUNDE, INDEELING.

§ 12. Algemeen.

De absolute figuur zij hier de reële bol:  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Wederom beschouwen we eerst alleen oppervlakken met rang 4. Van de 13 verschillende typen van tweedegraadsoppervlakkenbundels vervallen voor ons doel allereerst diegene, die in hun basisfiguur een reële rechte hebben. Van de overgebleven bundeltypen kunnen we alleen die ondertypen gebruiken, welke oppervlakken van signatuur 2 bevatten. Dat zijn de volgende gevallen:

I A.	Bundeltype	[1111],	ondertype	1.
B.	"	[1111],	"	2.
C.	"	[1111],	"	3.
II A.	Bundeltype	[211],	ondertype	1.
B.	"	[211],	"	2.
C.	"	[211],	"	3.
III A.	"	[(11)11],	"	1.
B.	"	[(11)11],	"	2.
C.	"	[(11)11],	"	3.
D.	"	[(11)11],	"	4.
E.	"	[(11)11],	"	5.
F.	"	[(11)11],	"	7.
IV.	Bundeltype	[31].		
VA.	"	[(21)1],	ondertype	1.
B.	"	[(21)1],	"	2.
VIA.	"	[(111)1],	"	1.
B.	"	[(111)1],	"	2.
VII A.	Bundeltype	[2(11)],	ondertype	1.
B.	"	[2(11)],	"	2.
VIII.	"	[(11)(11)],	"	2.

IX.	Bundeltype	[(31)],	ondertype	2.
X.	„	[(211)],	„	1.

Achtereenvolgens zullen we al deze typen nader gaan beschouwen en trachten een nauwkeuriger differentiatie van de verschillende soorten van oppervlakken te krijgen. We maken verder gebruik van de verschillende soorten van torsus, die  $O$  en  $\Omega$  gemeen kunnen hebben en onderzoeken, welke combinaties van bundelondertypen, signaturen en schaarondertypen mogelijk zijn. Iedere combinatie bepaalt één of twee soorten van oppervlakken, welke we in het tweede geval onderscheiden door het aantal deelen, waarin het  $O$  het actueele gebied verdeelt, te beschouwen. Tenslotte worden we vier keer door de aanschouwing gedwongen, om twee oppervlakken tot een verschillende soort te rekenen, door nog een ander kenmerk toe te passen.

### § 13. Algemeene oppervlakken.

Twee  $O$ 's, die elkaar volgens een imaginaire of reële tweedeelige vierdegraadskromme snijden (de bundels, die deze oppervlakken vormen, zijn dus van type [1111], ondertype 1 of 2), hebben een gemeenschappelijk reëel poolviervlak. Met dit poolviervlak als grondviervlak kan men aan de oppervlakken de volgende vergelijkingen toekennen:  $A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1t^2 = 0$  en  $A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2 + D_2t^2 = 0$  (alle coëfficiënten reëel). Stelt men van deze  $O$ 's de klassevergelijkingen op en schaart men beide, dan is de schaar van het type [1111], ondertype 1 of 2 (alle wortels van de  $\lambda$ -vergelijking zijn reëel).

Vervolgens zullen we aantoonen, dat een  $O$  van signatuur 0, dat  $\Omega$  snijdt volgens een imaginaire vierdegraadskromme, met  $\Omega$  als klassenfiguur beschouwd, slechts een reële tweedeelige torsus, basisfiguur van een schaar van ondertype 2, gemeen kan hebben. De vergelijking van  $\Omega$  t.o.v. het reële gemeenschappelijke poolviervlak als grondviervlak is:  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ . De vergelijking van een  $O$  met signatuur 0 is:  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dt^2 = 0$  of:  $ax^2 - by^2 - cz^2 + dt^2 = 0$  ( $a, b, c$  en  $d > 0$ ). Eerst het eerste geval; we bundelen  $O$  en  $\Omega$  en bepalen de vergelijkingen van de kegels uit die bundel:

$$\begin{aligned} (b - a)y^2 - (c + a)z^2 - (d - a)t^2 &= 0; \\ (a - b)x^2 - (c + b)z^2 - (d - b)t^2 &= 0; \\ (a + c)x^2 + (b + c)y^2 - (d + c)t^2 &= 0; \\ (a - d)x^2 + (b - d)y^2 - (c + d)z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Als de snijkromme van beide oppervlakken imaginair is, zijn dit 2 reële en 2 imaginaire kegels; dat is het geval als  $d > b > a$ <sup>1)</sup>. Men stelt nu de klassevergelijking op van  $O$  en  $\Omega$  en schaart deze beide. De krommen van de tweede graad uit die schaar zijn:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{ab} v^2 - \frac{a+c}{ac} w^2 - \frac{a-d}{ad} s^2 &= 0; \\ \frac{b-a}{ab} u^2 - \frac{b+c}{bc} w^2 - \frac{b-d}{bd} s^2 &= 0; \\ \frac{a+c}{ac} u^2 + \frac{b+c}{bc} v^2 - \frac{d+c}{dc} s^2 &= 0; \\ \frac{d-a}{ad} u^2 + \frac{d-b}{db} v^2 - \frac{d+c}{dc} s^2 &= 0. \end{aligned}$$

Voor  $d > b > a$  zijn deze tweedegraadskrommen alle reëel; de schaar is dus van ondertype 2. Hierna het tweede geval; de vergelijking van  $O$  is:  $ax^2 - by^2 - cz^2 + dt^2 = 0$ . De vergelijkingen van de kegels in de bundel zijn nu:

$$\begin{aligned} (b+a)y^2 + (c+a)z^2 - (d+a)t^2 &= 0; \\ (a+b)x^2 - (c-b)z^2 + (d-b)t^2 &= 0; \\ (a+c)x^2 - (b-c)y^2 + (d-c)t^2 &= 0; \\ (a+d)x^2 - (b-d)y^2 - (c-d)z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Hiervan zijn er weer 2 reëel en 2 imaginair als  $d > b > c$ . De tweedegraadskrommen in de schaar gevormd met  $O$  en  $\Omega$  zijn nu:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{ab} v^2 + \frac{a+c}{ac} w^2 - \frac{a+d}{ad} s^2 &= 0; \\ \frac{a+b}{ab} u^2 - \frac{b-c}{bc} w^2 + \frac{b-d}{bd} s^2 &= 0; \\ \frac{a+c}{ac} u^2 - \frac{c-b}{bc} v^2 + \frac{c-d}{dc} s^2 &= 0; \\ \frac{a+d}{ad} u^2 - \frac{d-b}{bd} v^2 - \frac{d-c}{dc} w^2 &= 0. \end{aligned}$$

Voor  $d > b > c$  zijn deze 4 krommen van de tweede graad reëel; het is dus een schaar van ondertype 2. Hiermee is aangetoond, welke combinatie (n.l. voor  $s=0$ ; bundelondertype 1 met schaarondertype 1) niet mogelijk is. De combinaties, die wel mogelijk zijn, bepalen nu één of twee soorten van oppervlakken in de Hyperbolische meetkunde.

<sup>1)</sup> Dit is voldoende algemeen; men mag nog in de vergelijking van  $O$  dië coördinaat als  $x$  kiezen, waarvan de coëfficiënt van de kwadratische term kleiner is dan de andere positieve coëfficiënt.

De snijfiguur van een  $O$  van type IA met  $\Omega$  is een imaginaire vierdegraadskromme; dit type bevat dus de ellipsoïden van de Hyperbolische meetkunde. Een bundel van type [1111], ondertype 1 bevat exemplaren van alle drie de signaturen, evenals de algemeene schaar van ondertype 1. Met inachtneming van hetgeen we bewezen hebben, kunnen slechts oppervlakken van signatuur 4 en 2 tegelijk met  $\Omega$  een algemeene bundel en een algemeene schaar van ondertype 1 vormen. De  $O$ 's van signatuur 4, die deze eigenschap vertoonen, noemen we in de Hyperbolische meetkunde: **imaginaire ellipsoïde** (HI1;  $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + 4 = 0$ ). Bij de  $O$ 's van signatuur 2, die in dit geval verkeeren, redeneeren we aldus: de reëel-projectief algemeene figuur van 2 oppervlakken, die een imaginaire vierdegraadskromme en een imaginaire biquadratische torsus gemeen hebben, is twee oppervlakken van signatuur 2, waarvan het eene geheel in het binnengebied van het andere ligt. Vatten we het eerste als absolute figuur op, dan is het tweede oppervlak virtueel; we noemen het de **virtueele omhullende** (niet rechtlijnige) **ellipsoïde** (HI2;  $6x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 12 = 0$ ). Beschouwen we het tweede als absoluut oppervlak, dan is het eerste actueel, de **actueele ellipsoïde** (HI3;  $4x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 1 = 0$ ). Hiermee is de combinatie van bundelondertype 1 en schaarondertype 1 afgehandeld.

Thans volgt die van bundelondertype 1 met schaarondertype 2; de basisfiguur is een reëele tweedeelige torsus. De oppervlakken in de Hyperbolische meetkunde, die tot deze combinatie behooren, zijn noodzakelijk virtueel. De bundel bevat exemplaren van alle signaturen, de schaar alleen van de signaturen 2 en 0. 't Is duidelijk, dat een imaginair oppervlak niet tot deze combinatie kan behooren. De oppervlakken van signatuur 2, die tegelijk met  $\Omega$  een algemeene bundel van het ondertype 1 en een algemeene schaar van ondertype 2 vormen, noemen we **virtueele** (niet omhullende) **nietrechtlijnige ellipsoïde** (HI4;  $6x^2 + 12y^2 - z^3 + 6 = 0$ ). Een oppervlak van signatuur 0, dat in hetzelfde geval verkeert, noemen we **virtueele rechtlijnige ellipsoïde** (HI5;  $2x^3 - 2y^2 + z^3 - 4 = 0$ ).

Bij het type IB is de snijfiguur van  $O$  en  $\Omega$  een reëele tweedeelige vierdegraadskromme, deze oppervlakken zijn dus de hyperboloïden van de Hyperbolische meetkunde. We behandelen eerst de combinatie van bundelondertype 2 met schaarondertype 1. De bundel bevat exemplaren van de signaturen 2 en 0, de schaar van alle signaturen; 't is duidelijk, dat de imaginaire oppervlakken voor ons doel vervallen. Het oppervlak van signatuur 2, dat dus  $\Omega$  snijdt volgens een reëele tweedeelige kromme

en met  $\Omega$  een imaginaire torsus gemeen heeft, noemen we **concave tweebladige** (nietrechtlijnige) **hyperboloïde** (HI6;  $x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 1 = 0$ ); het verdeelt het actueele gebied in 3 deelen: één buitengebied en 2 binnengebieden. Het oppervlak met signatuur 0 is de **eenbladige rechtlijnige hyperboloïde** (HI7;  $3x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ ), het verdeelt het actueele gebied in 2 deelen. Vervolgens de combinatie van bundelondertype 2 met schaarondertype 2. Beide verzamelingen bevatten oppervlakken van de signaturen 2 en 0. Het oppervlak met signatuur 2 is in de ruimte een voorbeeld van het feit, dat een verdeling, die tot en met de signatuur gaat, niet voldoende is en dat het aantal deelen, waarin het  $O$  het actueele gebied verdeelt, bij 2 actueele oppervlakken wel degelijk een onafhankelijk kenmerk kan zijn. De reëel-projectief algemeene figuur van dit geval is twee tweedegraadsoppervlakken van signatuur 2 die elkaar doorboren. Nu maakt het hier wezenlijk onderscheid, welke figuur als  $\Omega$  wordt genomen. Neemt men het doorboorde oppervlak als absoluut oppervlak, dan verdeelt  $O$  het actueele gebied in 2 deelen; we noemen zoo'n oppervlak: **eenbladige nietrechtlijnige hyperboloïde** (Fig. 6) (HI8;  $4x^2 + 5y^2 + z^2 - 2 = 0$ ). Nemen we het doorborende oppervlak als absolute figuur, dan bestaat  $O$  uit twee deelen, die het actueele gebied in drieën verdeelen: twee buitengebieden en één binnengebied. De naam is **convexe tweebladige** (nietrechtlijnige) **hyperboloïde** (Fig. 7) (HI9;  $2x^2 + y^2 + 5z^2 - 4 = 0$ ). Het geval van signatuur 0 noemen we **tweebladige rechtlijnige hyperboloïde** (HI10;  $x^2 - y^2 + 7z^2 - 5 = 0$ ). Het oppervlak verdeelt het actueele gebied in 3 deelen.

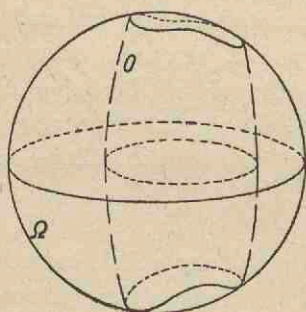


Fig. 6.

Eenbladige nietrechtlijnige  
hyperboloïde (H 18).

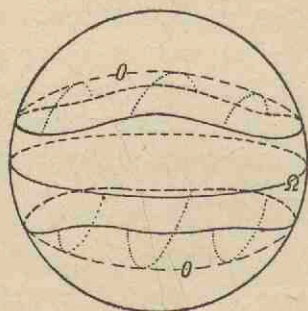


Fig. 7.

Convexe tweebladige hyperboloïde  
(H 19).

Resumeerend vinden we in de Hyperbolische meetkunde: 1 soort

actueele ellipsoïden, 1 soort imaginaire ellipsoïden, 3 soorten virtueele ellipsoïden en 5 soorten hyperboloïden.

TABEL VI.

Euclidische meetkunde	Elliptische meetkunde	Hyperbolische meetkunde
imaginaire ellipsoïde	imaginaire ellipsoïde	imaginaire ellipsoïde
reële ellipsoïde	reële nietrechtlijnige ellipsoïde	actueele ellipsoïde virtueele omhullende (niet rechtlijnige) ellipsoïde virtueele (niet omhullende) nietrechtlijnige ellipsoïde
—	rechtlijnige ellipsoïde	virtueele rechtlijnige ellipsoïde
tweebladige hyperboloïde	—	concave tweebladige (niet rechtlijnige) hyperboloïde convexe tweebladige (niet rechtlijnige) hyperboloïde eenbladige nietrechtlijnige hyperboloïde
eenbladige hyperboloïde	—	eenbladige rechtlijnige hyperboloïde tweebladige rechtlijnige hyperboloïde
—	—	nietrechtlijnige semihyperboloïde
—	—	rechtlijnige semi-hyperboloïde

Tenslotte het laatste geval van Type I: het type IC. De snijkromme van  $O$  met  $\Omega$  is in dit geval een reële, eendelige vierdegraadskromme. De reëel-projectief algemeene vergelijking van een bundel van onder-type 3 is (coëfficiënten reëel):  $\lambda (x^2 + y^2 + 2czt) - (ax^2 + by^2 - z^2 + 2dzt + t^2) = 0$ . Stelt men van deze beide oppervlakken, waaruit de bundel gevormd is, de klassevergelijking op en schaart deze, dan is deze schaar van het type [1111], ondertype 3 (2 toegevoegd complexe wortels in de  $\lambda$ -vergelijking). Hiermee is dus bewezen, dat alleen de combinatie:



bundelondertype 3 en schaarondertype 3 mogelijk is. Zoowel het bundel- als het schaarondertype bevat exemplaren van de signaturen 2 en 0. Het verdient aanbeveling, om, in navolging van blz. 15, die oppervlakken van type IC semihyperboloïden te noemen. Het O met signatuur 2 noemen we **nietrechtlijnige semihyperboloïde** (HI11;  $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x - 3 = 0$ ) en dat met signatuur 0: **rechtlijnige semihyperboloïde** (HI12;  $4x^2 + 2y^2 - z^2 - 4x - 3 = 0$ ). Evenals in het platte vlak zijn er in de Euclidische en Elliptische meetkunde geen figuren, die te vergelijken zijn met deze oppervlakken.

In Tabel VI zijn, alleen voor de algemeene oppervlakken, de overeenkomstige figuren in Euclidische, Elliptische en Hyperbolische meetkunde naast elkaar aangegeven.

#### § 14. Type II; Inleiding.

Tot Type II behooren de oppervlakken, die  $\Omega$  snijden volgens een vierdegraadskromme met dubbelpunt. Voor we dit type kunnen gaan indeelen, zullen we eerst in deze paragraaf een onderzoek instellen naar de mogelijke combinaties van bundelondertypen en schaarondertypen. Allereerst moet natuurlijk bewezen worden, dat twee oppervlakken, die een bundeltype [211] vormen, ook een schaarotype [211] vormen. We kunnen de twee oppervlakken, met een bepaald reëel viervlak als grondviervlak<sup>1)</sup>, voorstellen door de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 + 2zt = 0; \quad (1)$$

$$ax^2 + by^2 + z^2 + 2czt = 0 \quad (a, b, c \text{ reëel}). \quad (2)$$

Gaan we van beide oppervlakken de klassevergelijkingen opstellen en onderzoeken we de schaar, die we hiermee kunnen vormen, dan heeft deze het type [211].

Het oppervlak voorgesteld door (1) heeft de signatuur 2. De vergelijking (2) schrijven we aldus:

$$ax^2 + by^2 + (z + ct)^2 - c^2t^2 = 0.$$

Dit O kan dus nooit van signatuur 4 zijn; het is van signatuur 2 als:  $a > 0$ ,  $b > 0$  of als:  $a < 0$ ,  $b < 0$ ; het heeft de signatuur 0 als:  $a > 0$ ,  $b < 0$  of als:  $a < 0$ ,  $b > 0$ . In al deze gevallen is zoowel:  $c > 0$  als:  $c < 0$  mogelijk.

<sup>1)</sup> D. M. J. Sommerville: „Analytical Geometry of Three Dimensions”, Cambridge, 1934; p. 269.

We gaan beide oppervlakken bundelen en bepalen de kegel, behoorend bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking. De vergelijking hiervan is:  $(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + z^2 = 0$ .

Deze kegel snijden we met het gemeenschappelijk raakvlak aan  $O$  en  $\Omega$ ;  $z = 0$  en vinden dan de vergelijking van de taktangenten aan de snijkromme van  $O$  en  $\Omega$ :

$$(a - c)x^2 + (b - c)y^2 = 0, \quad z = 0.$$

De verschillende bundelondertypen onderscheiden zich nu als volgt:

Bundelondertype 1: Kegels en taktangenten reëel, dus:

$$a > c, b < c \text{ of: } a < c, b > c;$$

Bundelondertype 2: Kegels reëel en taktangenten imaginair, dus:

$$a < c, b < c;$$

Bundelondertype 3: Kegels en taktangenten imaginair, dus:

$$a > c, b > c.$$

De klassevergelijkingen van beide oppervlakken zijn:

$$u^2 + v^2 + 2ws = 0 \text{ en} \\ bc^2u^2 + ac^2v^2 + 2abcws - abs^2 = 0.$$

De tweedegraadskromme, behoorend bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking, is:  $bc(c - a)u^2 + ac(c - b)v^2 - abs^2 = 0$ .

De duale figuur van de taktangenten: dus weer een lijnenpaar, krijgen we door in deze vergelijking  $s = 0$  te stellen, d.i. de klassevergelijking van het gemeenschappelijke punt. De vergelijking van dit lijnenpaar is:

$$b(c - a)u^2 + a(c - b)v^2 = 0, \quad s = 0.$$

Geheel dual vinden we dan voor de kenmerken van de 3 schaarondertypen:

Schaarondertype 1: Tweedegraadskromme en lijnenpaar reëel;

Schaarondertype 2: Kromme reëel en lijnenpaar imaginair;

Schaarondertype 3: Kromme en lijnenpaar imaginair.

We gaan nu voor ieder bundelondertype en de mogelijke signaturen onderzoeken, welk schaarondertype beide oppervlakken kunnen vormen.

Eerst bundelondertype 1: voor signatuur 2 zijn daarbij de volgende mogelijkheden:

1.  $0 < b < c < a$ ;
2.  $b < c < a < 0$ ;
3.  $0 < a < c < b$ ;
4.  $a < c < b < 0$ .

Voor al deze gevallen is de schaar, die beide oppervlakken vormen

noodzakelijk van het ondertype 1. De signatuur 0 geeft de volgende mogelijkheden:

1.  $b < 0 < c < a$ ;
2.  $b < c < 0 < a$ ;
3.  $a < 0 < c < b$ ;
4.  $a < c < 0 < b$ .

Het eerste en derde geval geeft het schaarondertype 3 en het tweede en vierde het schaarondertype 2.

Het bundelondertype 2 en signatuur 2 geeft het volgende:

1.  $0 < a < c, 0 < b < c$ ;
2.  $a < c < 0, b < c < 0$ ;
3.  $a < 0 < c, b < 0 < c$ .

Het eerste en tweede geval levert schaarondertype 2 en het derde geval schaarondertype 3. De signatuur 0 geeft hier de volgende mogelijkheden:

1.  $b < 0 < a < c$ ;
2.  $a < 0 < b < c$ .

Beide keeren is het schaarondertype 1.

Voor bundelondertype 3 en signatuur 2 is:

1.  $0 < c < a, 0 < c < b$ ;
2.  $c < 0 < a, c < 0 < b$ ;
3.  $c < a < 0, c < b < 0$ .

Het eerste en derde geval geeft schaarondertype 3, het tweede geval het schaarondertype 2. De signatuur 0 levert bij bundelondertype 3 het volgende:

1.  $c < b < 0 < a$ ;
2.  $c < a < 0 < b$ .

Beide keeren is het schaarondertype 1.

### § 15. Paraboloiden; Indeeing.

Het in de vorige paragraaf bereikte resultaat geeft de volgende mogelijke combinaties:

Bundelondertype 1.	$s = 2$ .	Schaarondertype 1.
	$s = 0$ .	„ 2.
		„ 3.
Bundelondertype 2.	$s = 2$ .	Schaarondertype 2.
		„ 3.
	$s = 0$ .	„ 1.

Bundelondertype 3.	$s = 2$ .	Schaarondertype 2.
		3.
	$s = 0$ .	1.

Op deze manier hebben we alle gevallen gevonden, die aanleiding geven tot oppervlakken van type II, terwijl bewezen is, dat er niet meer combinaties mogelijk zijn. Al die oppervlakken van type II raken in één punt aan  $\Omega$ , zijn dus paraboloiden.

We beginnen met bundelondertype 1; de basiskromme is reëel, de oppervlakken zijn hyperbolische paraboloiden en wel van type IIA. Twee oppervlakken van signatuur 2, die elkaar in één punt zoodanig raken, dat hun snijkromme een reële vierdegraadskromme met dubbelpunt is, geven aanleiding tot 2 verschillende soorten van oppervlakken in de Hyperbolische meetkunde, al naar gelang welk oppervlak men als absoluut beschouwt. Zoo krijgt men de **eenbladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid** (Fig. 8) (HII 1;  $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$ ) en de **tweebladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid** (Fig. 9) (HII 2;  $2x^2 + y^2 + 4z^2 + 2x - 4 = 0$ ). De oppervlakken met signatuur 0 uit type IIA vormen twee soorten; die met  $\Omega$  een reële torsus gemeen hebben zijn de **eenbladige rechtlijnige hyperbolische paraboloiden (1ste soort)** (HII 3;  $3x^2 + 5y^2 - z^2 - 4x + 1 = 0$ ) en die met  $\Omega$  een imaginaire torsus met een reëel vlak gemeen hebben zijn de **tweebladige rechtlijnige hyperbolische paraboloiden** (HII 4;  $x^2 - y^2 + 5z^2 + 4x - 5 = 0$ ).

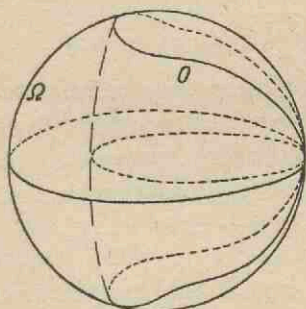


Fig. 8.

Eenbladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid (H II 1).

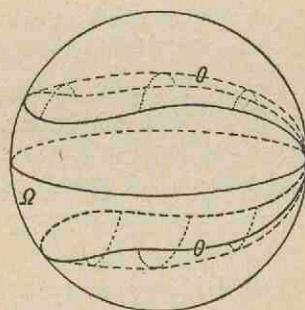


Fig. 9.

Tweebladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid (H II 2).

Ook de oppervlakken, die  $\Omega$  volgens de basisfiguur van bundelondertype 2 snijden, zijn hyperbolische paraboloiden, deze echter van type IIB. Twee oppervlakken van signatuur 2, die elkaar zoodanig in één

punt raken, dat de snijkromme een reële eendeelige vierdegraadskromme met geïsoleerd punt is en die een reële eendeelige torsus gemeen hebben, bepalen twee soorten van oppervlakken, al naar gelang welk  $O$  men als absoluut beschouwt. De oppervlakken van beide soorten verdeelen echter het actueele gebied in twee deelen. Ze zijn evenwel voor de aanschouwing zoo verschillend, dat ze naar onze meening als van twee verschillende soorten moeten worden opgevat. Het verschil tusschen beide soorten is dan, dat bij een  $O$  van de ééne soort het raakpunt  $R$  (Fig. 10 en 11) met  $\Omega$  op het actueele deel van het oppervlak ligt en bij de andere soort op het virtueele deel. Het zijn resp. de **koker-vormige hyperbolische parabolöide** (Fig. 10) (HII6;  $3x^2 + 4y^2 + 2z - 2 = 0$ ) en de **convexe eenbladige (nietrechtlijnige) hyperbolische parabolöide** (Fig. 11) (HII7;  $5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2x - 3 = 0$ ).

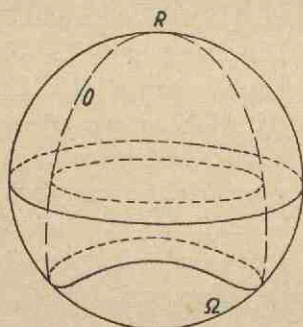


Fig. 10.

Kokervormige hyperbolische parabolöide (H II 6).

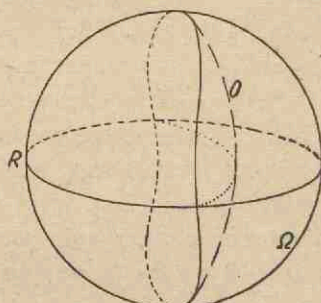


Fig. 11.

Convexe eenbladige hyperbolische parabolöide (H II 7).

Het oppervlak van signatuur 2, dat met  $\Omega$  een imaginaire torsus gemeen heeft, is de **concave eenbladige (nietrechtlijnige) hyperbolische parabolöide** (HII8;  $x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2z = 0$ ). Het oppervlak met signatuur 0 uit dit type IIB is de **eenbladige rechtlijnige hyperbolische parabolöide (2de soort)** (HII5;  $x^2 - y^2 + 7z^2 + 4z - 3 = 0$ ).

De oppervlakken van type IIC hebben met  $\Omega$  een imaginaire vierdegraadskromme met geïsoleerd punt gemeen, zijn dus elliptische parabolöiden. Het  $O$  van signatuur 2, dat met  $\Omega$  een reële eendeelige torsus gemeen heeft, is de **virtueele nietrechtlijnige (nietomhullende) elliptische parabolöide** (HII10;  $x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4x + 3 = 0$ ). Heeft een oppervlak van signatuur 2 met  $\Omega$  een imaginaire torsus gemeen, dan kan het weer geheel actueel of geheel virtueel zijn; het eerste is de **actueele elliptische parabolöide** (HII12;  $3x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4x +$

$1 = 0$ ), het tweede is de **virtueele** (nietrechtlijnige) **omhullende elliptische parabolöide** (HIII11;  $6x^2 + y^2 + 4z^2 + 4x - 10 = 0$ ). Tenslotte het O met signatuur 0 van type IIC; dit is de **virtueele rechtlijnige elliptische parabolöide** (HIII9;  $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x - 8 = 0$ ).

Resumeerend zijn er 9 soorten actueele parabolöiden, bovendien nog 3 soorten virtueele.

### § 16. Type III; Inleiding.

De oppervlakken, die tot dit type behooren, snijden  $\Omega$  volgens twee tweedegraadskrommen, die elkaar in 2 verschillende punten snijden. In het bundeltype [(11)11] zijn 6 ondertypen voor ons doel van belang, hiervan zullen we de vijf eerste in deze paragraaf nader beschouwen. Dat zijn die ondertypen, waarvan de  $\lambda$ -vergelijking reële wortels heeft, dus de ondertypen 1 tot en met 5.

Twee oppervlakken, die samen een bundel van het type [(11)11] vormen, hebben oneindig veel gemeenschappelijke poolviervlakken. Deze zijn bij de ondertypen 1 tot en met 5 geheel reël. De vergelijkingen van die 2 oppervlakken ten opzichte van zoo'n reël poolviervlak als grondviervlak zijn:

$A_1x^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + A_3t^2 = 0$  en  $B_1x^2 + B_1y^2 + B_2z^2 + B_3t^2 = 0$  (alle coëfficiënten reël). Van deze oppervlakken bepalen we de klassevergelijkingen, gaan deze twee scharen en onderzoeken de Segrenotatie van de gevonden schaar; deze is [(11)11], met de wortels der  $\lambda$ -vergelijking alle reël. Hiermee hebben we dus bewezen, dat twee O's, die samen een bundel van het type [(11)11], ondertype 1 tot en met 5 vormen, als klasseoppervlakken beschouwd, een schaar van het type [(11)11], ondertype 1 tot en met 5 vormen. Alvorens de O's van type III te kunnen indeelen, moeten we weer eerst een onderzoek instellen naar de mogelijke combinaties van bundelondertypen en schaarondertypen (de bundel- en schaarnotatie [(11)11] zullen we voorloopig weglaten). We beginnen met de bundel- en schaarondertypen hier op te sommen en erbij te vermelden, welke eigenschappen ervan we bij ons onderzoek zullen gebruiken.

Bundelondertype 1. Basisfiguur: 2 reële tweedegraadskrommen, die elkaar in 2 reële punten snijden. De bundel bevat een reël vlakkenpaar; de vlakkenbundel met behulp van deze beide vlakken gevormd, bevat geen reële raakvlakken aan  $\Omega$ . Oppervlakken met de signaturen 2 en 0.

Bundelondertype 2. Basisfiguur: 2 reële tweedegraadskrommen, die elkaar in 2 imaginaire punten snijden. De bundel bevat een reël

vlakkenpaar; de vlakkenbundel met behulp van deze beide vlakken gevormd, bevat twee reële raakvlakken aan  $\Omega$ . Oppervlakken met de signaturen 2 en 0.

Bundelondertype 3. Basisfiguur: 2 imaginaire tweedegraadskrommen. De bundel bevat een reëel vlakkenpaar. Oppervlakken met de signaturen 4 en 2.

Bundelondertype 4. Basisfiguur: 2 imaginaire tweedegraadskrommen met reële snijpunten. De bundel bevat een toegevoegd imaginair vlakkenpaar. De vlakkenbundel met deze 2 vlakken gevormd, bevat geen reële raakvlakken aan  $\Omega$ . Oppervlakken met de signaturen 2 en 0.

Bundelondertype 5. Basisfiguur: 2 imaginaire tweedegraadskrommen. De bundel bevat een toegevoegd imaginair vlakkenpaar. De vlakkenbundel met deze twee vlakken gevormd, bevat 2 reële raakvlakken aan  $\Omega$ . Oppervlakken van alle signaturen.

Schaarondertype 1. De schaar bevat een reëel puntenpaar, op welks drager geen reële punten van  $\Omega$  liggen. Oppervlakken met de signaturen 2 en 0.

Schaarondertype 2. De schaar bevat een reëel puntenpaar, op welks drager 2 reële punten van  $\Omega$  liggen. Oppervlakken van de signaturen 2 en 0.

Schaarondertype 3. De schaar bevat een reëel puntenpaar. Oppervlakken met de signaturen 4 en 2.

Schaarondertype 4. De schaar bevat een toegevoegd imaginair puntenpaar. Oppervlakken van de signaturen 2 en 0.

Schaarondertype 5. De schaar bevat een toegevoegd imaginair puntenpaar. Oppervlakken van alle signaturen.

Op een gemeenschappelijk reëel poolviervlak van  $O$  en  $\Omega$  als grondviervlak kunnen we, door geschikte keuze van het eenheidspunt, aan  $\Omega$  de volgende vergelijking geven:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

De vergelijking van  $O$  ten opzichte van datzelfde grondviervlak is:

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1t^2 = 0 \quad (A_1, B_1, C_1 \text{ en } D_1 \text{ reëel}).$$

De voorwaarde, waaronder  $O$  en  $\Omega$  een bundel van type [(11)11] vormen, is:

- a.  $A_1 = B_1$  of  $A_1 = C_1$  of  $B_1 = C_1$ ;
- b.  $-D_1 = A_1$  of  $-D_1 = B_1$  of  $-D_1 = C_1$ .

We hebben voldoende vrijheid om aan  $O$  de volgende 2 vergelijkingen toe te kennen:

1.  $Ax^2 + Ay^2 + Bz^2 + Ct^2 = 0$ ;
2.  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - Ct^2 = 0$  (A, B en C reëel).

Deze twee gevallen moeten we dus beide afzonderlijk gaan onderzoeken.

We beginnen met de vergelijkingen:  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$  en  $Ax^2 + Ay^2 + Bz^2 + Ct^2 = 0$ . Beide vergelijkingen bundelen en het vlakkenpaar van de bundel bepalen levert:

$$z^2 = \frac{A+C}{A-B} t^2.$$

Als nu  $\frac{A+C}{A-B} > 0$ , dan is het vlakkenpaar reëel en hoort dus de bundel, gevormd met O en  $\Omega$ , tot bundelondertype 1, 2 of 3. Is  $\frac{A+C}{A-B} < 0$ , dan hoort de bundel tot bundelondertype 4 of 5. We gaan nu de klassevergelijkingen van O en  $\Omega$  opstellen, gaan deze scharen en bepalen het puntenpaar van de schaar; dat is:

$$w^2 = -\frac{A+C}{A-B} \cdot \frac{B}{C} s^2.$$

We zien, dat als:  $\frac{A+C}{A-B} > 0$  en B en C verschillend teeken hebben, het puntenpaar reëel is, dus de schaar hoort tot schaarondertype 1, 2 of 3. Is:  $\frac{A+C}{A-B} > 0$  en hebben B en C hetzelfde teeken, dan is de schaar van het ondertype 4 of 5. Dit kunnen we aldus interpreteren: een O van signatuur 2 (B en C verschillend teeken), dat met  $\Omega$  een bundel van het bundelondertype 1, 2 of 3 vormt, moet noodzakelijk met  $\Omega$  (beide als klassefiguur beschouwd) tot een schaar van schaarondertype 1, 2 of 3 behooren. Een O van signatuur 4 of 0 (B en C hetzelfde teeken), dat met  $\Omega$  tot een bundel van bundelondertype 1, 2 of 3 behoort, moet noodzakelijk met  $\Omega$  een schaar van ondertype 4 of 5 vormen. We kunnen echter ook hebben:  $\frac{A+C}{A-B} < 0$  en B en C verschillend teeken, dan vormt het O (dat dus de signatuur 2 heeft) met  $\Omega$  een bundel van ondertype 4 of 5 en een schaar van ondertype 4 of 5. Als:  $\frac{A+C}{A-B} < 0$  en B en C hebben hetzelfde teeken, dan behoort O (van signatuur 4 of 0) met  $\Omega$  tot een bundel van ondertype 4 of 5 en tot een schaar van ondertype 1, 2 of 3.

De mogelijke combinaties van O's met signatuur 4 zijn hiermee reeds bekend. Voor de oppervlakken met signatuur 2 gebruiken we de volgende



vergelijkingen:  $ax^2 + ay^2 + bz^2 - ct^2 = 0$  of  $ax^2 + ay^2 - bz^2 + ct^2 = 0$  ( $a, b$  en  $c > 0$ ). We weten nu: O's van signatuur 2 vormen met  $\Omega$  een bundel van ondertype 1, 2 of 3 en een schaar van ondertype 1, 2 of 3. Of ze vormen met  $\Omega$  een bundel van ondertype 4 of 5 en een schaar van ondertype 4 of 5.

Eerst behandelen we het geval:  $ax^2 + ay^2 + bz^2 - ct^2 = 0$ . Bundelen met  $\Omega$  en bepalen van het vlakkenpaar in de bundel geeft hiervoor als vergelijking:

$$z^2 = \frac{a-c}{a-b} t^2. \quad (1)$$

Als  $\frac{a-c}{a-b} > 0$ , is het een O uit bundelondertype 1, 2 of 3. Om de kenmerken voor ieder ondertype afzonderlijk te bepalen, snijden we dit vlakkenpaar met  $\Omega$ , dat wordt:

$$x^2 + y^2 = \frac{c-b}{a-b} t^2. \quad (2)$$

Als nu  $\frac{c-b}{a-b} > 0$ , dan is deze snijfiguur reëel, het bundelondertype is 1 of 2; als  $\frac{c-b}{a-b} < 0$ , dan is het bundelondertype 3.

Vormt dus O met  $\Omega$  een bundel van ondertype 1, 2 of 3, dan moest in (1):

1.  $a > c, a > b$  of
2.  $a < c, a < b$ .

Voor bundelondertype 1 en 2 moest bovendien in (2):  $c > b$  als  $a > c, a > b$  of  $c < b$  als  $a < c, a < b$ . Men krijgt dus: de bundel is van ondertype 1 of 2 als  $a > c > b$  of als  $a < c < b$ . Voor bundelondertype 3 moest in (2):  $c < b$  als  $a > c, a > b$ ; of  $c > b$  als  $a < c, a < b$  is. De bundel is van ondertype 3 als  $c < b < a$  of als  $c > b > a$ .

We moeten nu nog een verschil opsporen tusschen bundelondertype 1 en bundelondertype 2. Het vlakkenpaar in de bundel is in beide gevallen:

$$z^2 = \frac{a-c}{a-b} t^2 \quad \left( \frac{a-c}{a-b} > 0; \text{ stel nu: } \frac{a-c}{a-b} \equiv D^2 \right).$$

De vlakken zelf zijn:  $z + Dt = 0$  en  $z - Dt = 0$ ; de bundel hiervan is:  $z(1 + \lambda) + Dt(1 - \lambda) = 0$ , alle vlakken hiervan hebben de vlakcoördinaten:  $\{0; 0; (1 + \lambda); D(1 - \lambda)\}$ . Substitueeren we dit in de klassevergelijking van  $\Omega$ , dan vinden we de  $\lambda$ 's van die vlakken in de bundel, die raken aan  $\Omega$ . Dat zijn in dit geval reëele  $\lambda$ 's dus 2 reëele vlakken: de bundel is van ondertype 2.

We hebben dus een  $O$ :  $ax^2 + ay^2 + bz^2 - ct^2 = 0$  ( $a > c > b$  of  $a < c < b$ ). Dat beteekent: het  $O$  vormt met  $\Omega$  een bundel van ondertype 2. We gaan van  $O$  en  $\Omega$  de klassevergelijking bepalen en gaan deze scharen; dan vinden we een schaar van ondertype 1, 2 of 3. Welk ondertype gaan we nu nader bepalen. De schaar is:

$$u^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) + v^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) + w^2 \left( \frac{1}{b} - \lambda \right) - s^2 \left( \frac{1}{c} - \lambda \right) = 0.$$

( $a > c > b$  of  $a < c < b$ ).

In beide gevallen vinden we op de bekende manier, dat deze schaar oppervlakken van signatuur 2 en 0 bevat. Het moet dus een schaar van ondertype 1 of 2 zijn. Hiertusschen beslissen we met het puntenpaar:

$$w^2 = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{b}{c} s^2 \quad \left( \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{b}{c} > 0; \text{ stel nu: } \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{b}{c} \equiv E^2 \right).$$

De punten zijn:  $w - Es = 0$  en  $w + Es = 0$ ; de puntenreeks:  $w(1 + \lambda) + Es(1 - \lambda) = 0$ , in puntcoördinaten:  $\{0; 0; (1 + \lambda); E(1 - \lambda)\}$ . Substitueeren we dit in de graadvergelijking van  $\Omega$ , dan vinden we, dat de drager 2 reële punten van  $\Omega$  bevat; 't is dus schaarondertype 2. Resumeerend: een  $O$  van signatuur 2, dat met  $\Omega$  een bundelondertype 2 vormt, behoort als klassefiguur met  $\Omega$  noodzakelijk tot een schaar van ondertype 2.

Vervolgens het geval van een  $O$ , dat met  $\Omega$  een bundel van ondertype 3 vormt:

$$ax^2 + ay^2 + bz^2 - ct^2 = 0 \quad (c < b < a \text{ of } c > b > a).$$

Na het opstellen der klassevergelijkingen en het onderzoek van de schaar blijkt, dat deze exemplaren van de signaturen 4 en 2 bevat: het is schaarondertype 3. Dus een  $O$  van signatuur 2, dat met  $\Omega$  een bundel van het ondertype 3 vormt, behoort samen met  $\Omega$  tot een schaar van ondertype 3.

We gaan nu behandelen:  $\frac{a-c}{a-b} < 0$ , het  $O$  hoort tot een bundelondertype 4 of 5. Het vlakkenpaar is:  $z^2 = \frac{a-c}{a-b} t^2$ . Gaan we verder onderzoeken, dan vinden we dat er in de vlakkenbundel 2 reële raakvlakken van  $\Omega$  voorkomen: het is dus bundelondertype 5. Er zijn hier weer twee mogelijkheden:  $a < c$ ,  $a > b$  of  $a > c$ ,  $a < b$ ; anders geschreven:  $c > a > b$  of  $c < a < b$ . Met behulp van de klassevergelijking van de schaar vinden we, dat de schaar, gevormd uit  $O$  en  $\Omega$ , in dit geval exemplaren van de drie signaturen bevat: 't is dus een schaar van

ondertype 5. Hiermee is de vergelijking  $ax^2 + ay^2 + bz^2 - ct^2 = 0$  volledig onderzocht.

Thans volgt:  $ax^2 + ay^2 - bz^2 + ct^2 = 0$  ( $a, b$  en  $c > 0$ ). Bundelen we deze vergelijking met die van  $\Omega$ , dan is de vergelijking van het vlakkenpaar:  $z^2 = \frac{a+c}{a+b} t^2$  (altijd reëel). Bovenstaande vergelijking stelt dus altijd een  $O$  voor, dat met  $\Omega$  een bundelondertype 1, 2 of 3 vormt. Om hieruit te kiezen, snijden we dit vlakkenpaar weer met  $\Omega$ ; de vergelijking van de snijfiguur wordt:  $x^2 + y^2 = \frac{b-c}{a+b} t^2$ . Dus als  $b > c$ , is het bundelondertype 1 of 2 en voor  $b < c$ , is het bundelondertype 3. Het eerste onderzoeken we op de bekende manier: er zijn 2 reële raakvlakken in de vlakkenbundel, dus het is bundelondertype 2. De vergelijking van de schaar is:

$$u^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) + v^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) - w^2 \left( \frac{1}{b} + \lambda \right) + s^2 \left( \frac{1}{c} + \lambda \right) = 0.$$

Als  $b > c$  (dus bundelondertype 2), dan bevat de schaar exemplaren van de signaturen 4 en 2, is van ondertype 3. Voor  $b < c$  (bundelondertype 3) bevat de schaar exemplaren van de signaturen 2 en 0; dus van schaarondertype 1 of 2. Dit laatste beslissen we weer met het puntenpaar uit de schaar; op de drager ervan liggen 2 reële punten van  $\Omega$ : het is schaarondertype 2.

Hiermee zijn de oppervlakken van signatuur 2 uit het eerste geval van blz. 51 afgehandeld, zoodat thans volgen die met signatuur 0. De vergelijking hiervan is:  $ax^2 + ay^2 - bz^2 - ct^2 = 0$  ( $a, b$  en  $c > 0$ ). Na bundeling met  $\Omega$  vinden we voor het vlakkenpaar:

$$z^2 = \frac{a-c}{a+b} t^2.$$

Dus voor  $a > c$  hoort het  $O$  tot een bundel van ondertype 1 of 2 en voor  $a < c$  tot een bundel van ondertype 4 of 5. Het onderzoek met de realiteit van de 2 raakvlakken aan  $\Omega$  leert, dat voor  $a > c$  het  $O$  tot bundelondertype 2 hoort en voor  $a < c$  tot bundelondertype 5. We weten nu verder, dat  $O$ 's van signatuur 0 met  $\Omega$  een bundel van ondertype 2 en een schaar van ondertype 4 of 5 vormen. Of ze vormen met  $\Omega$  een bundel van ondertype 4 of 5 en een schaar van ondertype 1 of 2. De vergelijking van de schaar is:

$$u^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) + v^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) - w^2 \left( \frac{1}{b} + \lambda \right) - s^2 \left( \frac{1}{c} - \lambda \right) = 0.$$

Voor  $a > c$  bevat deze schaar oppervlakken van alle signaturen, 't is er dus één van ondertype 5. Voor  $a < c$  bevat de schaar oppervlakken van de signaturen 2 en 0, 't is ondertype 1 of 2. Met behulp van het puntenpaar vinden we dat het een schaar van ondertype 2 is.

Vervolgens het tweede geval van blz. 51. De vergelijking van O is dan:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - Ct^2 = 0 \quad (A, B \text{ en } C \text{ reëel}).$$

Dit geval bevat dus geen imaginaire oppervlakken. Het vlakkenpaar uit de bundel met  $\Omega$  heeft tot vergelijking:  $x^2 = \frac{C-B}{A-C} y^2$  en het puntenpaar uit de schaar:

$$u^2 = \frac{C-B}{A-C} \cdot \frac{A}{B} v^2.$$

We nemen eerst A en B hetzelfde teeken: het O heeft dan de signatuur 2; deze oppervlakken vormen met  $\Omega$  een bundel van ondertype 1, 2 of 3 en een schaar van ondertype 1, 2 of 3; of een bundel van ondertype 4 of 5 en een schaar van ondertype 4 of 5. Als A en B verschillend teeken hebben is de signatuur 0: deze oppervlakken vormen met  $\Omega$  een bundel van ondertype 1 of 2 en schaar van ondertype 4 of 5, of een bundel van ondertype 4 of 5 en een schaar van ondertype 1 of 2.

De oppervlakken van signatuur 2 kunnen we de volgende vergelijking geven:  $ax^2 + by^2 + cz^2 - ct^2 = 0$ . ( $a, b$  en  $c > 0$ ). Met deze coëfficiënten is het vlakkenpaar:  $x^2 = \frac{c-b}{a-c} y^2$ .

Als  $\frac{c-b}{a-c} > 0$ , dan hebben we bundelondertype 1, 2 of 3. Met behulp van de vlakkenbundel, gevormd uit die 2 vlakken, vinden we dat dit geval het bundelondertype 1 is. Nu is  $\frac{c-b}{a-c} > 0$ , voor  $a > c > b$  en voor  $a < c < b$ . De vergelijking van de schaar gevormd uit O en  $\Omega$  is hier:

$$u^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) + v^2 \left( \frac{1}{b} - \lambda \right) + w^2 \left( \frac{1}{c} - \lambda \right) + s^2 \left( \lambda - \frac{1}{c} \right) = 0.$$

Op de bekende manier vinden we dat voor beide gevallen deze schaar exemplaren van de signaturen 2 en 0 bevat, dus van ondertype 1 of 2 is, terwijl we verder met behulp van het puntenpaar uit de schaar vinden, dat het ondertype 1 is.

Vervolgens:  $\frac{c-b}{a-c} < 0$ , het bundelondertype 4 of 5. Het onderzoek

met de vlakkenbundel leert dat dit bundelondertype 4 is. Nu is  $\frac{c-b}{a-c} < 0$ , voor:  $c > b$ ,  $c > a$  en  $c < b$ ,  $c < a$ . Men ziet dat hier onderscheid gemaakt moet worden voor:  $a > b$  en  $a < b$  ( $a = b$  is onmogelijk). Voor al die gevallen heeft de schaar oppervlakken van de signaturen 2 en 0, is dus van ondertype 4.

Tenslotte de signatuur 0; we geven het O in dit geval de vergelijking:  
 $ax^2 - by^2 + cz^2 - ct^2 = 0$  ( $a, b$  en  $c > 0$ ).

De vergelijking van het vlakkenpaar uit de bundel is:  $x^2 = \frac{b+c}{a-c} y^2$ . Dus voor  $a > c$  behoort O tot een bundelondertype 1 of 2, verder vinden we met behulp van de vlakkenbundel en de raakvlakken aan  $\Omega$ , dat het bundelondertype 1 is. De schaarvergelijking is:

$$u^2 \left( \frac{1}{a} - \lambda \right) - v^2 \left( \frac{1}{b} + \lambda \right) + w^2 \left( \frac{1}{c} - \lambda \right) + s^2 \left( \lambda - \frac{1}{c} \right) = 0.$$

Voor  $a > c$  bevat deze schaar oppervlakken van de signaturen 2 en 0, is dus van ondertype 4. Het geval  $a < c$  geeft de bundelondertypen 4 of 5, terwijl de nadere bepaling met de raakvlakken aan  $\Omega$  het ondertype 4 geeft. De schaar is van ondertype 1 of 2. De drager van het puntenpaar heeft 2 imaginaire snijpunten met  $\Omega$ ; het is schaarondertype 1.

### § 17. Omwentelingsoppervlakken; Indeeling.

Het in de vorige paragraaf bereikte resultaat geeft de volgende mogelijke combinaties:

Bundelondertype 1.	$s = 2$ .	Schaarondertype 1.
	$s = 0$ .	" 4.
Bundelondertype 2.	$s = 2$ .	Schaarondertype 2.
		" 3.
	$s = 0$ .	" 5.
Bundelondertype 3.	$s = 4$ .	Schaarondertype 5.
	$s = 2$ .	" 2.
		" 3.
Bundelondertype 4.	$s = 2$ .	Schaarondertype 4.
	$s = 0$ .	" 1.
Bundelondertype 5.	$s = 4$ .	Schaarondertype 3.
	$s = 2$ .	" 5.
	$s = 0$ .	" 2.

We hebben tevens bewezen, dat er geen andere mogelijkheden zijn. Alle oppervlakken van dit type III snijden  $\Omega$  in 2 tweedegraadskrommen,

het zijn dus omwentelingsoppervlakken in de Hyperbolische meetkunde. Zooals bekend bestaan hiervan twee soorten: met actueele en met virtueele omwentelingsas. Omdat het ons ongewenscht voorkomt, de naam cylinder hier te gebruiken, noemen we beide soorten omwentelingsoppervlak.

De O's, die  $\Omega$  volgens een reële kromme snijden, zijn hyperboloïden; de oppervlakken van type IIIA en IIIB zijn dus omwentelingshyperboloïden. Beginnen we met de O's, die met  $\Omega$  bundelondertype 1 vormen, type IIIA. Het O met signatuur 2 uit dit ondertype bepaalt één soort omwentelingsoppervlak, dat het actueele gebied in 3 deelen verdeelt: de **tweebladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde** (HIII 1;  $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$ ). Hierbij moet opgemerkt worden, dat in dit geval geen 2 verschillende soorten van oppervlakken te voorschijn komen, wanneer men beide O's van signatuur 2, die het bundelondertype 1 vormen, als absolute figuur beschouwt; beide keeren is het O tweedeelig. Een bundel van ondertype 1 bevat ook nog O's met signatuur 0, we noemen deze oppervlakken **tweebladige rechtlijnige omwentelingshyperboloïden** (HIII 2;  $3x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$ ).

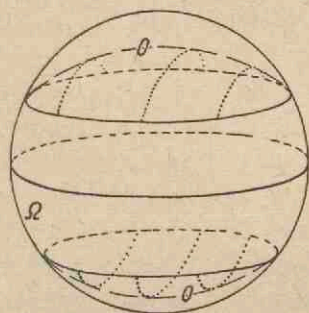


Fig. 12.

Convexe tweebladige omwentelingshyperboloïde (H III 3).

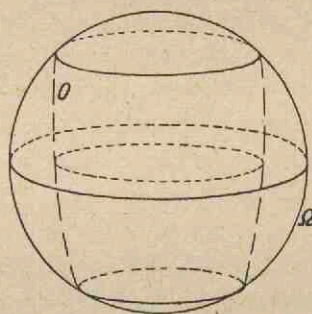


Fig. 13.

Eenbladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde (H III 4).

Vervolgens bundelondertype 2; eerst de oppervlakken met signatuur 2, die met  $\Omega$  een schaar van ondertype 2 (dus met reële torsus) vormen. De algemeene figuur hiervan is twee O's van signatuur 2, die elkaar doorboren (de snijkromme bestaat natuurlijk uit 2 tweedegraadskrommen). We kunnen hier weer beide oppervlakken als absolute figuur opvatten en krijgen dan de **convexe tweebladige (nietrechtlijnige) omwentelingshyperboloïde** (Fig. 12) (HIII 3;  $x^2 + y^2 + 5z^2 - 2 = 0$ ) en de **eenbladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde** (Fig. 13) (HIII 4;  $5x^2 + 5y^2 + z^2 - 4 = 0$ ). Het geval: signatuur 2 en schaarondertype 3 geeft

slechts aanleiding tot één soort: de **concave tweebledige** (nietrechtlijnige) **omwentelingshyperboloïde** (HIII 5;  $x^2 + y^2 - 7z^2 + 1 = 0$ ). Het oppervlak met signatuur 0 uit dit bundelondertype bepaalt de **eenbladige rechtlijnige omwentelingshyperboloïde** (HIII 6;  $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ ).

De snijfiguur van een O van type IIIC met  $\Omega$  is imaginair; de oppervlakken zijn dus omwentelingsellipsoïden en wel van de 1ste soort. Het oppervlak met signatuur 4 is natuurlijk de **imaginaire omwentelingsellipsoïde (1ste soort)** (HIII 10;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2 = 0$ ). De oppervlakken van signatuur 2, die met  $\Omega$  een schaar van ondertype 2 vormen, bepalen de **virtueele nietomhullende** (nietrechtlijnige) **omwentelingsellipsoïde** (HIII 7;  $x^2 + y^2 - z^2 + 7 = 0$ ). De combinatie: signatuur 2 en schaarondertype 3 geeft weer aanleiding tot twee soorten van oppervlakken in de Hyperbolische meetkunde, nl. actueele en virtueele. Het zijn de **actueele omwentelingsellipsoïde (1ste soort)** (HIII 9;  $5x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ ) en de **virtueele omhullende** (nietrechtlijnige) **omwentelingsellipsoïde (1ste soort)** (HIII 8;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 5 = 0$ ).

De basisfiguur van het bundelondertype 4 bevat 2 reële punten; we zullen de oppervlakken, die tot type IIID behooren, omwentelingsparaboloïden noemen. Het O met signatuur 2 uit dit bundelondertype geeft aanleiding tot meerdere soorten oppervlakken: de **actueele omwentelingsparaboloïde** (HIII 13;  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ ) en virtueele oppervlakken. Hierbij doet zich hetzelfde voor als op blz. 17 met de afstandslijnen. Er bestaan in dit geval twee soorten virtueele oppervlakken, nl.: omhullende en nietomhullende. Bij de omhullende bevindt zich  $\Omega$  in het binnengebied van O en bij de nietomhullende in het buitengebied. De eerste soort noemen we **virtueele omhullende** (nietrechtlijnige) **omwentelingsparaboloïde** (HIII 12;  $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 3 = 0$ ) en de tweede soort: **virtueele nietomhullende** (nietrechtlijnige) **omwentelingsparaboloïde** (HIII 11;  $x^2 - 3y^2 - z^2 - 1 = 0$ ). Het oppervlak van signatuur 0 geeft één soort, de **virtueele rechtlijnige omwentelingsparaboloïde** (HIII 14;  $3x^2 - y^2 + z^2 - 3 = 0$ ).

Tenslotte de oppervlakken van type IIIE; dit zijn weer omwentelingsellipsoïden en wel van de 2de soort. Hierin komt weer een oppervlak met signatuur 4 voor, de **imaginaire omwentelingsellipsoïde (2de soort)** (HIII 16;  $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 1 = 0$ ). Het O met signatuur 2 uit het bundelondertype 5 bepaalt weer twee soorten van oppervlakken: de **actueele omwentelingsellipsoïde (2de soort)**<sup>1)</sup> (HIII 18;  $4x^2 + 4y^2 +$

<sup>1)</sup> Barrau (Versl. Afd. Nät. Kon. Ac. v. Wet., XIX, blz. 1428) noemt de oppervlakken HIII 9 en HIII 18 resp.: verlengde en afgeplatte omwentelingsellipsoïde.

$5z^2 - 1 = 0$ ) en de **virtueele omhullende** (nietrechtlijnige) **omwentelingsellipsoïde (2de soort)** (HIII 17;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 5 = 0$ ). Volgens het O met signatuur 0; dit is de **virtueele rechtlijnige omwentelingsellipsoïde** (HIII15;  $x^2 + y^2 - z^2 - 7 = 0$ ).

We kunnen hierbij opmerken, dat men de omwentelingsoppervlakken in de Hyperbolische meetkunde (die tevens cylinders zijn) ook kan indeelen naar: omwentelingsas actueel (en dus cylinders virtueel) en omwentelingsas virtueel (en dus cylinders actueel). 't Is duidelijk, dat de oppervlakken van type IIIA en IIID tot het tweede geval behooren, dus een actuele cylinders hebben; ze worden dan ook wel kanaaloppervlakken genoemd. Die van type IIIB, IIIC en IIIE hebben een actuele omwentelingsas, zijn dus echte omwentelingsoppervlakken.

Thans blijft van het bundeltype [(11)11] nog over ondertype 7. Eerst moeten we hier bewijzen welk schaarondertype erbij behoort. Op het gemeenschappelijk poolviervlak (ten deele reëel) als grondviervlak kunnen we door keuze van het eenheidspunt aan  $\Omega$  steeds de vergelijking:  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$  geven. Aan O mag men dan de vergelijking:  $ax^2 + ay^2 + bz^2 + ct^2 = 0$  toekennen, waarin a reëel en b en c complex zijn. Na opstelling van beide klassevergelijkingen en scharen vinden we, dat de  $\lambda$ -vergelijking van de schaar ook 2 imaginare wortels heeft; de schaar is dus van ondertype 7. Het bundelondertype bevat alleen exemplaren van de signatuur 2, deze bepalen de **omwentelingssemihyperboloïde** (HIII19;  $x^2 + y^2 - z^2 - 3z + 1 = 0$ ).

Resumeerend zijn er 2 soorten imaginaire omwentelingsoppervlakken, 10 soorten actuele en 7 soorten virtueele.

#### § 18. Type IV: Osculeerende paraboloiden.

Eerst toonen we weer aan, dat twee O's, die exemplaren zijn van een bundel van type [31], als klasseoppervlakken beschouwd, samen slechts een schaar van het type [31] kunnen vormen. Voor de vergelijkingen van de beide O's kunnen we, met behulp van de standaardmatrix van dit type, nemen:  $2xy + z^2 + t^2 = 0$  en  $2axy - 2xz + az^2 + bt^2 = 0$ . Stellen we van deze oppervlakken de klassevergelijking op, scharen we en bepalen we de wortels van de  $\lambda$ -vergelijking, dan blijkt het een schaar van type [31] te zijn.

Deze soort bundel heeft geen ondertypen, evenmin als de schaar; we hebben dus slechts de combinatie van één soort bundel met één soort schaar te beschouwen. Beide bevatten oppervlakken van de signa-



turen 2 en 0. De snijkromme van  $O$  en  $\Omega$  bevat een keerpunt, we zullen deze oppervlakken: osculeerende paraboloiden noemen. Het  $O$  met signatuur 2 is dan de **nietrechtlijnige osculeerende paraboloid** (HIV1;  $3x^2 + 4y^2 + z^2 - xy - x + 2y - 2 = 0$ ) en het  $O$  met signatuur 0, de **rechtlijnige osculeerende paraboloid** (HIV2;  $x^2 + 2y^2 - z^2 - xy - x + 2y = 0$ ). Evenmin als er in het platte vlak 2 soorten osculeerende parabolen zijn, ontstaan hier 2 soorten van oppervlakken met signatuur 2, omdat het bij de figuur van 2 oppervlakken met signatuur 2, die elkaar snijden volgens een vierdegraadskromme met keerpunt, voor ons doel geen verschil maakt, welk  $O$  men als absoluut beschouwt.

### § 19. Type V: Parabolische omwentelingsoppervlakken.

Alvorens we dit type kunnen gaan indeelen, moeten we eerst weer een beschouwing over de mogelijke combinaties houden. De vergelijkingen van twee oppervlakken, die een bundel van type [(21)1] vormen, zijn <sup>1)</sup>:

$$x^2 + y^2 + 2zt = 0 \quad (1)$$

$$ax^2 + by^2 + z^2 + 2azt = 0 \quad (a, b \text{ reëel}). \quad (2)$$

Het onderzoek naar de schaar, die deze beide oppervlakken vormen, leert, dat het type [(21)1] is. De vergelijking (2) is aldus te schrijven:  $ax^2 + by^2 + (z + at)^2 - a^2t^2 = 0$ . Voor  $O$ 's met signatuur 2 is:  $a > 0$ ,  $b > 0$  of  $a < 0$ ,  $b < 0$ ; voor  $a > 0$ ,  $b < 0$  of  $a < 0$ ,  $b > 0$  is de signatuur 0. Het vlakkenpaar uit de bundel met de beide oppervlakken gevormd is:

$$(b - a)y^2 + z^2 = 0.$$

't Is dus duidelijk, dat voor  $b > a$  beide oppervlakken een bundel van ondertype 1 vormen, terwijl het voor  $b < a$  een bundel van ondertype 2 is. De klassevergelijkingen van (1) en (2) zijn:

$$u^2 + v^2 + 2ws = 0 \text{ en } abu^2 + a^2v^2 + 2abws - bs^2 = 0;$$

het puntenpaar uit de schaar heeft tot vergelijking:

$$a(a - b)v^2 - bs^2 = 0.$$

Is dit imaginair, dan is de schaar van ondertype 1; is het reëel, dan is het ondertype 2.

Voor een  $O$  met signatuur 2 en bundel van ondertype 1 hebben we de volgende gevallen:

$$1) b > a > 0;$$

$$2) 0 > b > a.$$

Voor beide is de schaar van ondertype 1. De signatuur 0 in hetzelfde

<sup>1)</sup> D. M. J. Sommerville: „Analytical Geometry of Three Dimensions”; p. 269.

bundelondertype geeft:  $b > 0 > a$ , de schaar is dan van ondertype 2.

Voor bundelondertype 2 en signatuur 2 zijn er de volgende gevallen:

$$1) a > b > 0;$$

$$2) 0 > a > b.$$

Voor beide is de schaar van ondertype 2. Tenslotte de signatuur 0 in hetzelfde bundelondertype; dan is  $a > 0 > b$ . De schaar is van ondertype 1.

We hebben bij bundeltype [(21)1] dus de volgende mogelijke combinaties:

Bundelondertype 1.  $s = 2$ . Schaarondertype 1.

$s = 0$ . Schaarondertype 2.

Bundelondertype 2.  $s = 2$ . Schaarondertype 2.

$s = 0$ . Schaarondertype 1.

Deze oppervlakken van type V noemen we parabolische omwentelingsoppervlakken, zoodat die van type VA de parabolische omwentelingsellipsoïden zijn. Het oppervlak van signatuur 2 uit een bundel van ondertype 1 geeft weer aanleiding tot twee soorten van oppervlakken: de **actuele parabolische omwentelingsellipsoïde** (HV2;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x = 0$ ) en de **virtuele nietrechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde** (HV1;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 3 = 0$ ). Het O van signatuur 0 is de **virtuele rechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde** (HV3;  $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 3 = 0$ ).

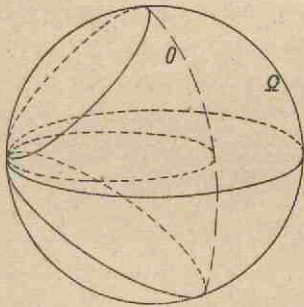


Fig. 14.

Eenbladige parabolische omwentelingshyperboloïde (H V 4).

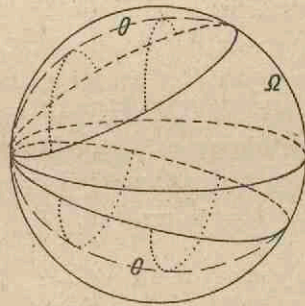


Fig. 15.

Tweebladige parabolische omwentelingshyperboloïde (H V 5).

De oppervlakken van type VB zijn de parabolische omwentelingshyperboloiden. Van die met signatuur 2 bestaan twee soorten: de **eenbladige** (nietrechtlijnige) **parabolische omwentelingshyperboloïde** (Fig. 14) (HV4;  $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x - 1 = 0$ ) en de **tweebladige** (nietrechtlijnige) **parabolische omwentelingshyperboloïde** (Fig. 15) (HV5;  $y^2 +$

+  $2z^2 - 2x - 2 = 0$ ). De **rechtlijnige parabolische omwentelingshyperboloïde** (HV6;  $3x^2 - y^2 + z^2 + 4x + 1 = 0$ ) is het oppervlak met signatuur 0 in dit type.

Dit type bevat dus 4 soorten actueele en 2 soorten virtueele oppervlakken.

### § 20. Type VI: Bol en afstandsoppervlak <sup>1)</sup>.

Een bundel van type  $[(111)1]$  is een bundelschaar, het bundeltype heeft twee ondertypen, dus iedere bundel van zoo'n ondertype is tevens een schaar; de exemplaren van de bundel hebben, als klassefiguur beschouwd, dezelfde torsus gemeen. Een bundel van type  $[(111)1]$ , ondertype 1 bevat oppervlakken van de signaturen 4 en 2. De snijfiguur van  $O$  met  $\Omega$  is een imaginaire tweedegraadskromme dubbelgeteld, dus het  $O$  met signatuur 4 van type VIA is de **imaginaire bol** (HVI1;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4z + 3 = 0$ ). Het andere geval is twee oppervlakken van signatuur 2, waarvan het eene zich in het binnengebied van het andere bevindt. Beschouwt men het tweede als absolute figuur, dan is het  $O$  de **actueele bol** (HVI3;  $4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4z = 0$ ). Wordt het eerste als  $\Omega$  beschouwd, dan is het  $O$  de **virtueele bol** (HVI2;  $x^2 + y^2 + 4z - 5 = 0$ ).

Op dezelfde manier verkrijgt men de oppervlakken van type VIB. De basisfiguur van een bundel van type  $[(111)1]$ , ondertype 2 is een reële tweedegraadskromme dubbelgeteld, terwijl de oppervlakken van de signaturen 2 en 0 zijn. Het eerste geval levert weer twee soorten: een oppervlak, dat op die tweedegraadskromme na geheel actueel is, en een oppervlak, dat verder virtueel is. Het eerste is het **actueele afstandsoppervlak** (HVI 5;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ ) en het tweede het **virtueele nietrechtlijnige afstandsoppervlak** (HVI 4;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2 = 0$ ). Het  $O$  met signatuur 0 is een **virtueel rechtlijnig afstandsoppervlak** (HVI 6;  $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ ).

### § 21. Typen VII en VIII.

We zullen eerst weer bewijzen, dat, als twee oppervlakken elkaar snijden volgens de basisfiguur van het bundeltype  $[2(11)]$ , hun gemeenschappelijke klassefiguur die van het schaarstype  $[2(11)]$  is. Met behulp van de standaardmatrix van dit bundeltype geven we aan de oppervlakken de vergelijkingen:  $2xy + z^2 + t^2 = 0$  en  $2axy - y^2 + bz^2 + bt^2 = 0$ . De schaar, gevormd uit beide oppervlakken als klassefiguren, is van het type  $[2(11)]$ . De bundel bevat voor ons doel twee ondertypen, beide

<sup>1)</sup> J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde”, Deel II, blz. 339.

bevatten slechts exemplaren van signatuur 2. Van de 3 ondertypen van de schaar kunnen we er slechts twee gebruiken; het derde bevat alleen O's met signatuur 0.

We beginnen met type VII A: de snijfiguur van  $\Omega$  met een O van dit type is een imaginaire tweedegraadskromme en 2 imaginaire rechten. De oppervlakken van dit type noemen we dus parabolische ellipsoïden. Een O van dit type, dat met  $\Omega$  een imaginaire torsus (schaarondertype 1) gemeen heeft, komt weer in twee soorten voor: de **actueele parabolische ellipsoïde** (HVII 2;  $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4z + 1 = 0$ ) en de **virtueele omhullende parabolische ellipsoïde** (HVII 1;  $x^2 + y^2 + 4z - 4 = 0$ ). Het O, dat met  $\Omega$  een reële torsus (schaarondertype 2) gemeen heeft, is de **virtueele** (niet omhullende) **parabolische ellipsoïde** (HVII 3;  $x^2 + y^2 + 3z^2 - 8z + 5 = 0$ ).

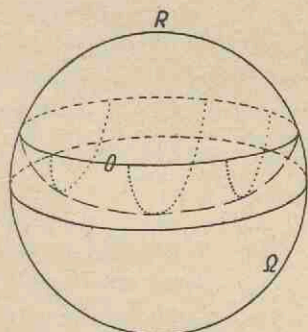


Fig. 16.

Convexe parabolische hyper-  
boloïde (H VII 5).

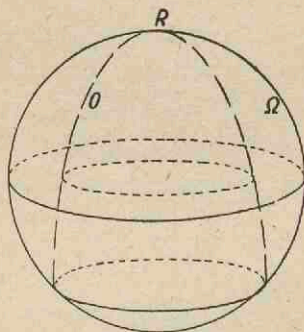


Fig. 17.

Kokervormige parabolische hyper-  
boloïde (H VII 6).

Vervolgens het type VII B: de basisfiguur van het corresponderende bundelondertype bestaat uit een reële tweedegraadskromme en 2 imaginaire rechten; deze oppervlakken noemen we parabolische hyperboloïden. Een oppervlak uit dit bundelondertype, dat met  $\Omega$  een imaginaire torsus (schaarondertype 1) gemeen heeft, is de **concave parabolische hyperboloïde** (HVII 4;  $x^2 + y^2 - 3z^2 + 4z - 1 = 0$ ). Een oppervlak uit dit bundelondertype, dat met  $\Omega$  een reële torsus (schaarondertype 2) gemeen heeft, geeft aanleiding tot twee soorten van oppervlakken, die echter beide het actueele gebied in twee deelen verdeelen, maar die we weer als van verschillend soort definiëren. Voor oppervlakken van de eene soort ligt n.l. het gemeenschappelijk raakpunt R van O en  $\Omega$  op het virtueele deel van O en bij de andere soort op het actueele deel.

Een  $O$ , dat in het eerste geval verkeert, noemen we **convexe parabolische hyperboloïde** (Fig. 16) (HVII 5;  $x^2 + y^2 + 3z^2 - 2z - 1 = 0$ ) en in het tweede geval: **kokervormige parabolische hyperboloïde** (Fig. 17) (HVII 6;  $2x^2 + 2y^2 + z - 1 = 0$ ).

De basisfiguur van het bundeltype [(11)(11)] is een scheeve vierhoek; de rechten liggen in 2 raakvlakken van  $\Omega$ . Als die raakvlakken  $V_1$  en  $V_2$  zijn, is de bundelvergelijking:  $\Omega - \lambda V_1 V_2 = 0$ . Het type VIII bevat dus de cirkelcilinders<sup>1)</sup>.

Een bundel van het ondertype 2 is een bundelschaar en bevat alleen  $O$ 's met signatuur 2. Zoo'n oppervlak heeft met  $\Omega$  een imaginaire snijfiguur en een imaginaire torsus gemeen, zoodat hier twee gevallen kunnen voorkomen: actueele en virtueele oppervlakken. Van het eerste geval komt één soort voor: de **actueele cirkelcylinder** (HVIII 3;  $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$ ), maar er bestaan twee soorten van virtueele cirkelcilinders: die waar  $\Omega$  in het buitengebied ligt en die waar  $\Omega$  in het binnengebied ligt. De eerste soort is de **virtueele nietomhullende cirkelcylinder** (HVIII 1;  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ ) en de andere de **virtueele omhullende cirkelcylinder** (HVIII 2;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$ ).

## § 22. Typen IX en X.

Weer moet eerst bewezen worden, dat 2  $O$ 's, die elkaar snijden volgens een basisfiguur van het bundeltype [(31)], ook als klassefiguur een schaar van het type [(31)] vormen. Met behulp van de standaardmatrix van dit type geven we beide oppervlakken de vergelijkingen:  $2xy + z^2 + t^2 = 0$  en  $2axy - 2yz + az^2 + at^2 = 0$ . Na hiervan de klassevergelijkingen opgesteld en geschaard te hebben, blijkt, dat deze 2  $O$ 's ook een schaar van type [(31)] vormen. Het bundelondertype 1 bevat oppervlakken van één signatuur, n.l. 2. We hoeven slechts dit bundeltype met het schaarondertype 1 te combineeren, want slechts dat schaarondertype bevat oppervlakken met signatuur 2. Een nauwkeuriger in-deeling is dus niet mogelijk; type IX bestaat uit oppervlakken van signatuur 2, die alle dezelfde soort torsus met  $\Omega$  gemeen hebben: de **parabolisch-osculeerende paraboloiden** (HIX 1;  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2x - 1 = 0$ ).

Tenslotte het laatste type: de basisfiguur is een dubbeltellend lijnenpaar, gelegen dus in een raakvlak  $V$  van  $\Omega$ . De bundelvergelijking is:  $\Omega - \lambda V^2 = 0$ .

<sup>1)</sup> J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde“, Deel II, blz. 337.

Dit type zal de grensbollen<sup>1)</sup> bevatten. Een bundel van type [(211)] is een bundelschaar; ondertype 1 bevat slechts oppervlakken van signatuur 2. De torsus van deze bundelschaar is imaginair; we hebben dus weer een figuur, bestaande uit 2 oppervlakken, waarvan het ééne, op één punt na, geheel in het binnengebied van het andere ligt. Beschouwen we het tweede oppervlak als  $\Omega$ , dan is het  $O$  een **actueele grensbol** (HX2;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2z = 0$ ); wordt het eerste als absolute figuur beschouwd, dan is het een **virtueele grensbol** (HX1;  $x^2 + y^2 + 2z - 2 = 0$ ).

In totaal zijn er in de Hyperbolische meetkunde 42 verschillende soorten van actueele tweedegraadsoppervlakken met rang 4; bovendien nog 4 soorten imaginaire en 23 soorten virtueele.

### § 23. Kegels; Inleiding.

Alvorens we de kegels in de Hyperbolische meetkunde kunnen gaan indeelen, moeten we voor eenige kegeltypen een theoretische beschouwing houden. We zullen eenige reëel-projectieve eigenschappen van een kegel ten opzichte van  $\Omega$  gaan afleiden; het is dus voldoende als we dit doen voor een kegel en een willekeurig oppervlak van signatuur 2:  $O_1$ . Met zoo'n oppervlak en met een ander oppervlak:  $O_2$ , vormen we een bundel van het type, dat we onderzoeken willen.

Twee oppervlakken, die samen een algemeene bundel van ondertype 1 of 2 vormen, hebben een gemeenschappelijk reëel poolviervlak, dat we als grondviervlak nemen. Ons onderzoek is voldoende algemeen, als we  $O_1$  de vergelijking:  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$  geven, terwijl we voor de vergelijking van  $O_2$  de beide gevallen:  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dt^2 = 0$  ( $a, b, c$  en  $d > 0$ ;  $a < b$ ) en  $ax^2 - by^2 - cz^2 + dt^2 = 0$  ( $a, b, c$  en  $d > 0$ ;  $b > c$ ) moeten beschouwen.

We zullen eerst het eerste geval behandelen; zooals we gezien hebben is voor  $d > b > a$  de bundel van ondertype 1. De vier kegels van de bundel zijn dan:

$$\begin{aligned} (b - a)y^2 - (c + a)z^2 - (d - a)t^2 &= 0 \text{ (reëel),} & \text{top: } \{1; 0; 0; 0\}; \\ (a - b)x^2 - (c + b)z^2 - (d - b)t^2 &= 0 \text{ (imaginair),} & \text{top: } \{0; 1; 0; 0\}; \\ (a + c)x^2 + (b + c)y^2 - (d + c)t^2 &= 0 \text{ (reëel),} & \text{top: } \{0; 0; 1; 0\}; \\ (a - d)x^2 + (b - d)y^2 - (c + d)z^2 &= 0 \text{ (imaginair),} & \text{top: } \{0; 0; 0; 1\}. \end{aligned}$$

Van de twee imaginaire kegels heeft er één de top in het binnengebied van  $O_1$  en de andere in het buitengebied. We stellen nu de klasse-

<sup>1)</sup> J. A. Barrau: „Analytische Meetkunde“, Deel II, blz. 340.

vergelijkingen van de beide reële kegels op (die beide hun top in het buitengebied van  $O_1$  hebben); laten deze zijn:

$$\begin{cases} u^2 + \frac{v^2}{b-a} - \frac{w^2}{c+a} - \frac{s^2}{d-a} = 0 \text{ en } \begin{cases} \frac{u^2}{a+c} + \frac{v^2}{b+c} + w^2 - \frac{s^2}{d+c} = 0 \\ w = 0. \end{cases} \\ u = 0; \end{cases}$$

We bepalen nu de gemeenschappelijke oplossingen van ieder van deze stelsels vergelijkingen en de klassevergelijking van  $O_1$ . Stel  $s = 1$ , dan vindt men voor de coördinaten van die gemeenschappelijke raakvlakken van kegel en  $O_1$  resp.:

$$u = 0, v^2 = \frac{(b-a)(c+d)}{(d-a)(b+c)}, w^2 = \frac{(d-b)(a+c)}{(d-a)(b+c)}, s = 1;$$

$$u^2 = \frac{(b-d)(a+c)}{(b-a)(d+c)}, v^2 = \frac{(d-a)(b+c)}{(b-a)(d+c)}, w = 0, s = 1.$$

Voor  $d > b > a$  zijn deze vier vlakken bij de eerste kegel reëel en bij de tweede imaginair.

De bundel, gevormd met  $O_1$  en  $O_2$ , is van ondertype 2 als  $b > d > a$  en als  $b > a > d$ . De vier reële kegels zijn dan:

$$\begin{array}{ll} (b-a)y^2 - (c+a)z^2 - (d-a)t^2 = 0, & \text{top: } \{1; 0; 0; 0\}; \\ (a-b)x^2 - (b+c)z^2 - (d-b)t^2 = 0, & \text{top: } \{0; 1; 0; 0\}; \\ (a+c)x^2 + (b+c)y^2 - (d+c)t^2 = 0, & \text{top: } \{0; 0; 1; 0\}; \\ (a-d)x^2 + (b-d)y^2 - (c+d)t^2 = 0, & \text{top: } \{0; 0; 0; 1\}. \end{array}$$

De top van de vierde kegel ligt in het binnengebied van  $O_1$ . Bepalen we nu de coördinaten van de gemeenschappelijke raakvlakken van  $O_1$  en de kegel, dan zijn deze voor bovenstaande kegels met toppen buiten  $O_1$  resp.:

$$u = 0, v^2 = \frac{(b-a)(c+d)}{(d-a)(b+c)}, w^2 = \frac{(d-b)(a+c)}{(d-a)(b+c)}, s = 1;$$

$$u^2 = \frac{(a-b)(d+c)}{(d-b)(a+c)}, v = 0, w^2 = \frac{(d-a)(b+c)}{(d-b)(a+c)}, s = 1;$$

$$u^2 = \frac{(b-d)(a+c)}{(b-a)(d+c)}, v^2 = \frac{(d-a)(b+c)}{(b-a)(d+c)}, w = 0, s = 1.$$

Zowel voor  $b > d > a$ , als voor  $b > a > d$  zijn er van deze drie kegels twee, die 4 imaginaire gemeenschappelijke raakvlakken met  $O_1$  hebben, terwijl de derde 4 reële raakvlakken met  $O_1$  gemeen heeft.

Ook in het tweede geval, als de vergelijking van  $O_2$ :  $ax^2 - by^2 - cz^2 + dt^2 = 0$  ( $b > c$ ) is, vinden we, dat er in een bundel van onder-

type 1, twee imaginaire kegels zijn: één met top binnen  $O_1$  en één met top buiten  $O_1$ ; terwijl van de andere twee reële kegels (beide met top buiten  $O_1$ ) er één 4 reële en de ander 4 imaginaire raakvlakken met  $O_1$  gemeen heeft. Een bundel van ondertype 2 bevat dan één reële kegel met top binnen  $O_1$ ; van de drie andere reële kegels met top buiten  $O_1$  hebben er twee 4 imaginaire raakvlakken gemeen met  $O_1$  en één 4 reële.

Voor een algemeene bundel van ondertype 3 zijn de vergelijkingen van  $O_1$  en  $O_2$  ten opzichte van een reël grondvlak resp.:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2czt &= 0; \\ax^2 + by^2 - z^2 + t^2 + 2dzt &= 0.\end{aligned}$$

Deze bundel bevat 2 reële kegels, de vergelijkingen ervan zijn:

$$\begin{aligned}(a - b)y^2 + z^2 - t^2 + 2(ac - d)zt &= 0; \\(b - a)x^2 + z^2 - t^2 + 2(bc - d)zt &= 0 \quad (a, b, c \text{ en } d \text{ reël}).\end{aligned}$$

Of in klassecoördinaten:

$$\begin{cases} (a - b) \{ 1 + (ac - d)^2 \} u^2 + \{ 1 + (ac - d)^2 \} v^2 + (a - b) w^2 - \\ \quad - (a - b) s^2 + 2(a - b)(ac - d) ws = 0 \\ u = 0; \end{cases}$$

$$\text{en } \begin{cases} \{ 1 + (bc - d)^2 \} u^2 + (b - a) \{ 1 + (bc - d)^2 \} v^2 + (b - a) w^2 - \\ \quad - (b - a) s^2 + 2(b - a)(bc - d) ws = 0 \\ v = 0. \end{cases}$$

De gemeenschappelijke oplossingen van zoo'n stelsel vergelijkingen en de klassevergelijking van  $O_1$  geven de coördinaten van de gemeenschappelijke raakvlakken van de kegel en  $O_1$ . Na eenig omwerken (stel  $s = 1$ ) vinden we de volgende vergelijkingen voor deze coördinaten <sup>1)</sup>:

$$\begin{cases} w^2 + 2Pw - 1 = 0 \\ v^2 = -\frac{2w}{c}; \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} w^2 - 2Pw - 1 = 0 \\ u^2 = -\frac{2w}{c}. \end{cases}$$

Voor beide kegels zijn de wortels van de vierkantsvergelijking in  $w$  reël en verschillend van teeken. Bij de eerste kegel zijn dan van de bijbehorende  $v$ -waarden er twee reël en twee imaginair en bij de tweede kegel gebeurt hetzelfde met de waarden van  $u$ . Er zijn dus bij beide

<sup>1)</sup>  $P = \frac{(ac - d)(d - bc) - 1}{c(a - b)}$ .



kegels twee gemeenschappelijke raakvlakken met  $O_1$  reëel en twee imaginair, terwijl beide kegels hun top buiten  $O_1$  hebben.

Voor het vormen van een bundel van type [211] geven we aan de oppervlakken  $O_1$  en  $O_2$  de reeds bekende vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 + 2zt = 0 \text{ en } ax^2 + by^2 + z^2 + 2czt = 0 \text{ (a, b en c reëel).}$$

De kegels uit deze bundel, wier top niet op de snijkromme ligt, zijn:

$$\begin{aligned} (b-a)y^2 + z^2 + 2(c-a)zt &= 0, & \text{top: } \{1; 0; 0; 0\}; \\ \text{en } (a-b)x^2 + z^2 + 2(c-b)zt &= 0, & \text{top: } \{0; 1; 0; 0\}. \end{aligned}$$

Of in klassevergelijking:

$$\begin{cases} (b-a)(c-a)^2 u^2 + (c-a)^2 v^2 + 2(b-a)(c-a)ws - (b-a)s^2 = 0 \\ u = 0; \end{cases}$$

$$\text{en } \begin{cases} (c-b)^2 u^2 + (a-b)(c-b)^2 v^2 + 2(a-b)(c-b)ws - (a-b)s^2 = 0 \\ v = 0. \end{cases}$$

De coördinaten van de enkelvoudige gemeenschappelijke raakvlakken van de kegel en  $O_1$  vinden we uit (stel  $s = 1$ ):

$$\begin{cases} 2w = \frac{(b-a)}{(c-a)(b-c)} \\ v^2 = -2w; \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 2w = -\frac{(b-a)}{(c-a)(b-c)} \\ u^2 = -2w. \end{cases}$$

We zien dus, dat als bij de eene kegel de vlakken reëel zijn, ze bij de andere imaginair zijn. Beide kegels hebben hun top buiten  $O_1$ .

Om de vergelijking van een bundel van type [(11)11] ondertype 2, 3 en 5 op te stellen, geven we aan  $O_1$  de vergelijking:

$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$  en aan  $O_2$ :  $ax^2 + ay^2 + bz^2 + ct^2 = 0$ . (a, b en c reëel), beide ten opzichte van een reëel gemeenschappelijk poolvlak als grondvlak. De kegels uit de bundel zijn:

$$\begin{aligned} (a-b)x^2 + (a-b)y^2 + (b+c)t^2 &= 0, \\ (a+c)x^2 + (a+c)y^2 + (b+c)z^2 &= 0; \end{aligned}$$

waarvan de eerste de top buiten  $O_1$  en de tweede binnen  $O_1$  heeft.

Een bundel van ondertype 1 en 4 vinden we door aan  $O_1$  en  $O_2$  resp. de vergelijkingen:  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$  en  $ax^2 + by^2 + cz^2 - ct^2 = 0$  te geven. De kegels uit deze bundel zijn:

$$\begin{aligned} (b-a)y^2 + (c-a)z^2 + (a-c)t^2 &= 0, & \text{top: } \{1; 0; 0; 0\}; \\ (a-b)x^2 + (c-b)z^2 + (b-c)t^2 &= 0, & \text{top: } \{0; 1; 0; 0\}. \end{aligned}$$

In klassevergelijking:

$$\begin{cases} u^2 + \frac{v^2}{b-a} + \frac{w^2}{c-a} + \frac{s^2}{a-c} = 0 \\ u=0; \end{cases} \text{ en } \begin{cases} \frac{u^2}{a-b} + v^2 + \frac{w^2}{c-b} + \frac{s^2}{b-c} = 0 \\ v=0. \end{cases}$$

Berekenen we de gemeenschappelijke raakvlakken van de kegel en  $O_1$ , dan vinden we hiervoor in beide gevallen de vlakken:  $\{0; 0; 1; 1\}$  en  $\{0; 0; -1; 1\}$ , deze zijn dus beide reëel. Beide kegels hebben hun top buiten  $O_1$ .

#### § 24. Kegels; Indeeeling.

Een bundel van type [1111], ondertype 1 bevat 2 imaginaire en 2 reële kegels. Het type IA bevat dus 4 soorten kegels: 2 imaginaire en 2 reële. De kegels van de ééne imaginaire soort hebben een actueele top, we noemen deze **imaginaire algemeene kegels (1ste soort)** (HI 13;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$ ); de andere hebben een virtueele top: de **imaginaire algemeene kegels (2de soort)** (HI 14;  $y^2 + 2z^2 + 1 = 0$ ). De toppen van de beide soorten reële kegels zijn virtueel. De eene soort heeft 4 imaginaire raakvlakken gemeen met  $\Omega$ , het is de **virtueele omhullende algemeene kegel** (HI 15;  $2x^2 + y^2 - 3 = 0$ ) en de andere soort heeft 4 reële raakvlakken met  $\Omega$  gemeen: de **virtueele (nietomhullende) algemeene kegel** (HI 16;  $x^2 - z^2 - 2 = 0$ ).

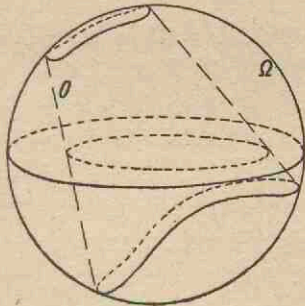


Fig. 18.

Kokervormige algemeene kegel  
(H 118).

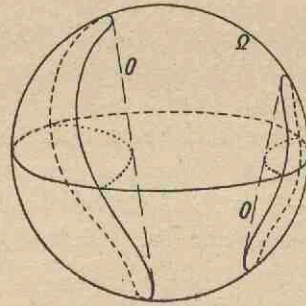


Fig. 19.

Concave algemeene kegel (H 119).

In een algemeene bundel van ondertype 2 bevinden zich 4 reële kegels. Het type IB bevat dus 4 soorten reële kegels, waarvan één

soort met actueele top: de **reëele algemeene kegel** (HI 17;  $2x^2 + 6y^2 - z^2 = 0$ ). Van de andere drie soorten zijn er twee met kegels, die 4 imaginaire raakvlakken met  $\Omega$  gemeen hebben; een kegel van de ééne soort deelt het actueele gebied in 2 deelen, de **kokervormige algemeene kegel** (Fig. 18) (HI 18;  $7x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ ); een van de andere soort in 3 deelen: de **concave algemeene kegel** (Fig. 19) (HI 19;  $2x^2 - 5y^2 - 1 = 0$ ). Tenslotte de soort van kegels met 4 reëele raakvlakken gemeen met  $\Omega$ : de **convexe algemeene kegel** (HI 20;  $7x^2 + 5z^2 - 6 = 0$ ); deze verdeelt het actueele gebied in 3 deelen.

Een bundel van type [1111], ondertype 3 bevat 2 imaginaire en 2 reëele kegels. De imaginaire kegels hebben een imaginaire vergelijking, dus deze worden hier niet verder behandeld. We hebben gezien, dat alle kegels, die  $\Omega$  snijden volgens de basisfiguur van een algemeene bundel, ondertype 3, een virtueele top hebben en twee reëele en twee imaginaire raakvlakken met  $\Omega$  gemeen hebben. Bovendien deelen al die kegels het actueele gebied in 2 deelen. Het type IC bevat dus één soort van kegels, die der **eendeelige algemeene kegels** (HI 21;  $x^2 - z^2 + 2x - 2 = 0$ ).

Vervolgens de kegels van type II. Een bundel van type [211], ondertype 1 bevat drie kegels, waarvan één met top op de snijkromme. Deze soort van kegels, dus wier top op  $\Omega$  ligt, noemen we in de Hyperbolische meetkunde **tweedeelige parabolische parallelkegel** (HII 13;  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 1 = 0$ ). De kegels van de beide andere soorten van type IIA hebben een virtueele top en een gemeenschappelijk reëel dubbeltellend raakvlak met  $\Omega$ . De twee andere gemeenschappelijke raakvlakken zijn bij de eene soort reëel, dat is die van de **tweedeelige parabolische kegels** (HII 15;  $x^2 + 3z^2 + 2x - 3 = 0$ ) en bij de andere imaginair: de **eendeelige parabolische kegel** (HII 14;  $2x^2 + 3y^2 - 2x = 0$ ).

Het type IIB bevat ook 3 soorten kegels, waarvan één met top op  $\Omega$ : de **eendeelige parabolische parallelkegel** (HII 16;  $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 2z - 1 = 0$ ). De kegels van beide andere soorten hebben een virtueele top en weer een dubbeltellend gemeenschappelijk reëel raakvlak met  $\Omega$ . Bij de eene soort zijn de overige 2 vlakken imaginair; zoo'n kegel is de **concave parabolische kegel** (HII 17;  $y^2 - 3z^2 - 2z + 1 = 0$ ). Bij de andere soort zijn de overige gemeenschappelijke raakvlakken met  $\Omega$  reëel: de **convexe parabolische kegel** (HII 18;  $x^2 + 4z^2 + 2z - 2 = 0$ ).

Ook het type IIC bestaat uit drie soorten kegels, waarvan een soort de top op  $\Omega$  heeft; dit is een imaginaire kegel: de **imaginaire parabolische parallelkegel** (HII 19;  $2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 4x + 2 = 0$ ). De

kegels van de beide andere soorten hebben een virtueele top, terwijl weer twee van de gemeenschappelijke raakvlakken met  $\Omega$  zijn samengevallen. Zijn beide andere raakvlakken imaginair, dan is het de **virtueele omhullende parabolische kegel** (HIII 20;  $5x^2 + 3z^2 + 4x - 9 = 0$ ); zijn beide reëel, dan de **virtueele (nietomhullende) parabolische kegel** (HIII 21;  $2x^2 - 3y^2 + 4x - 6 = 0$ ).

Type III bevat de omwentelingskegels. Een bundel van het type [(11)11], ondertype 1 bevat 2 kegels, waartusschen met de door ons gebruikte kenmerken geen onderscheid te maken is. Het type IIIA bestaat uit één soort kegels, de **tweedeelige omwentelingskegels** (HIII 22;  $2x^2 + z^2 - 1 = 0$ ), die het actueele gebied in 3 deelen verdeelen.

In het type IIIB bevinden zich twee soorten kegels; één met actueele top, de **actueele omwentelingskegel** (HIII 20;  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ ) en één met virtueele top, de **eendeelige omwentelingskegel** (HIII 21;  $4x^2 + 4y^2 - 3 = 0$ ).

Het type IIIC bevat slechts twee soorten imaginaire kegels: één met actueele top, de **imaginaire omwentelingskegel (1ste soort)** (HIII 23;  $4x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0$ ) en één met virtueele top, de **imaginaire omwentelingskegel (2de soort)** (HIII 24;  $x^2 + y^2 + 3 = 0$ ).

Een bundel van ondertype 4 bevat twee kegels, die wederom met de hier gebruikte kenmerken niet van elkaar te onderscheiden zijn. De corresponderende soort in de Hyperbolische meetkunde is de **virtueele (nietomhullende) omwentelingskegel** (HIII 27;  $2x^2 + z^2 - 2 = 0$ ); zij heeft 2 reële raakvlakken met  $\Omega$  gemeen.

Tot type IIIE behooren een soort imaginaire kegels met actueele top: de **imaginaire omwentelingskegel (3de soort)** (HIII 25;  $3x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$ ) en een soort virtueele kegels, die 2 imaginaire raakvlakken met  $\Omega$  gemeen hebben: de **virtueele omhullende omwentelingskegel** (HIII 26;  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ).

Een bundel van type [(11)11], ondertype 7 bevat slechts kegels met imaginaire vergelijking, die we niet behandelen.

In een bundel van type [31] bevinden zich twee kegels, waarvan één de top heeft in het keerpunt der vierdegraadskromme. De hiermee corresponderende soort noemen we in de Hyperbolische meetkunde die der **osculeerende parallelkegels** (HIV 3;  $y^2 - 2z^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$ ). De andere soort van type IV bestaat uit kegels met virtueele top: de **osculeerende kegel** (HIV 4;  $2x^2 + 3y^2 - xy - x + 2y - 1 = 0$ ).

Het type VA bevat één soort, waarvan de kegels op één punt na

geheel virtueel zijn: de **virtueele parabolische omwentelingskegel** (HV 7;  $z^2 - 2x - 2 = 0$ ). Ook het type VB bestaat uit één soort; deze kegel, de **actueele parabolische omwentelingskegel** (HV 8;  $2x^2 + z^2 + 2x = 0$ ) heeft een actueel deel.

Een bundel van type [(111)1], ondertype 1 bevat één imaginaire kegel. Het type VIA bestaat dus uit één soort: de **imaginaire afstandskegel** (HVI 7;  $3x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4z + 1 = 0$ ), die een acteele top heeft. Het type VIB bestaat uit één soort virtueele kegels: de **virtueele afstandskegels** (HVI 8;  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ).

Het laatste bundeltype, waarin zich kegels bevinden, is [2(11)]; zowel bij ondertype 1 als bij ondertype 2 heeft de kegel van de bundel de top op de snijkromme, terwijl in het eerste geval de kegel imaginair is. Het type VIIA bevat dus één soort kegels: de **imaginaire parabolisch-elliptische parallelkegel** (HVII 7;  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4z + 2 = 0$ ) en ook het type VIIB bestaat uit één soort kegels: de **reële parabolisch-hyperbolische parallelkegel** (HVII 8;  $x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$ ).

In totaal zijn er in de Hyperbolische meetkunde 18 soorten actueele, 8 soorten imaginaire en 8 soorten virtueele kegels. Er zijn 2 soorten reële kegels met actueele top en 6 soorten parallelkegels.

## ZEVENDE HOOFDSTUK.

### HYPERBOLISCHE MEETKUNDE, ANALYTISCH ONDERZOEK.

#### § 25. Ontaardingen.

We onderstellen:  $F(xyz) = 0$ , kwadratisch in  $x$ ,  $y$  en  $z$ , heeft de rang 2. Het vlakkenpaar, dat  $F(xyz) = 0$  tot vergelijking heeft, kan zijn imaginair of reëel. Om dit te bepalen, snijden we  $O$  met een vlak, dat niet door de snijlijn van beide vlakken gaat. Is de snijfiguur met dit vlak imaginair, dan is het een imaginair vlakkenpaar; is het een reëele snijfiguur, dan een reëel vlakkenpaar.

Dit laatste geval moeten we nog nader onderzoeken; we ontbinden  $F(xyz) = 0$  en beschouwen de beide lineaire vergelijkingen afzonderlijk. Van het met zoo'n lineaire vergelijking corresponderende vlak willen we bepalen, of het actueel of virtueel is. Hiertoe bepalen we de Euclidische loodrechte afstand  $d$  van de oorsprong van het coördinatenstelsel tot het vlak, door de coördinaten:  $\{0; 0; 0; 1\}$  te substitueeren in de op nul herleide normaalvergelijking van het vlak. Is nu  $d > 1$ , dan is het vlak geheel virtueel; is  $d = 1$ , dan raakt het vlak aan  $\Omega$  en is  $d < 1$ , dan heeft het vlak een actueel deel. Er zijn zoo 9 standen mogelijk van een reëel vlakkenpaar t.o.v.  $\Omega$ .

Hetzelfde geldt natuurlijk voor een  $O$  met rang 1, een dubbelvlak, waar we de  $d$  bepalen met behulp van de vergelijking van het enkelvoudige vlak; hier zijn 3 standen mogelijk van een dubbelvlak t.o.v.  $\Omega$ .

#### § 26. Rang 3; Vier verschillende wortels.

De te onderzoeken vergelijking met rang 3 is:  $F(xyz) = 0$ . We bundelen deze vergelijking met die van  $\Omega$ , de  $\lambda$ -vergelijking van deze bundelvergelijking kan dan hebben:

1. vier verschillende wortels: type I;
2. twee gelijke en twee verschillende wortels: typen II en III;
3. drie gelijke en één verschillende wortel: typen IV, V en VI;
4. twee maal twee gelijke wortels: type VII.

De nadere indeeling van type I gaat in de eerste plaats met de realiteit van deze wortels; 4 reële wortels komt voor bij de typen IA en IB, terwijl 2 reële en 2 toegevoegd complexe wortels bij type IC behoort. In het laatste geval is de kegel de eendeelige algemeene kegel.

Het kenmerk, waarmee we de typen IA en IB van de kegels onderscheiden, is zeer fundamenteel, want daarmee zullen we tevens dezelfde typen van de algemeene oppervlakken splitsen. Zoowel tot type IA als tot type IB behoort één soort kegels met actueele top. Bij type IA zijn die kegels imaginair, bij type IB reëel. Na de bundeling van  $O$  met  $\Omega$  onderzoeken we dus ook de andere kegels, welke in die bundel voorkomen. Op de bekende manier worden de coördinaten van de verschillende toppen bepaald; laten deze in Cartesiaansche coördinaten zijn:  $\{x_1; y_1; z_1\}$ , dan is die top actueel als  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ . Eén van de vier kegels uit de bundel heeft een actueele top; we onderzoeken deze kegel verder; is hij imaginair, dan is het  $O$  van type IA; is hij reëel, dan van type IB. Dit onderzoek naar de realiteit van de kegel gaat vanzelfsprekend aldus: snijden met een vlak, dat niet door de top gaat; is de snijkromme reëel, dan is het een reële kegel; is de snijkromme imaginair, dan een imaginaire. Een andere manier om beide typen: IA en IB te scheiden, zou kunnen geschieden met de snijkromme van  $O$  en  $\Omega$ ; we projecteeren deze kromme op het XOY-vlak en bepalen de aard ervan door „curve-tracing”<sup>1)</sup>. Heeft de vlakke vierdegraadskromme reële punten, dan is het  $O$  van type IB; in het andere geval (dat echter niet zoo eenvoudig is aan te toonen) is het type IA.

Hiermee zijn dus de typen IA en IB gesplitst; tevens is van  $O$  bepaald of de top actueel:  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ , of virtueel:  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$  is. Het type IA en een actueele top komt voor bij de imaginaire algemeene kegel (1ste soort) en het type IB en een actueele top bepaalt de reële algemeene kegel. Vindt men een virtueele top, dan moeten bij beide typen de gemeenschappelijke raakvlakken van  $O$  en  $\Omega$  bepaald worden. Vier reële vlakken komt bij type IA voor bij de virtueele algemeene kegel (HI 16); bij type IB is dit het geval bij de convexe algemeene kegel. Een  $O$  met virtueele top van type IA, dat 4 imaginaire raakvlakken met  $\Omega$  gemeen heeft, kan nu nog zijn: imaginair of reëel, waaruit men weer kiest door te snijden met een vlak niet door de top. Is de snijfiguur met  $O$  imaginair, dan is het de imaginaire algemeene kegel (2de soort); is de snijkromme reëel, dan is  $O$  de virtueele omhullende algemeene kegel. Behoort het  $O$  met virtueele top en 4 gemeen-

<sup>1)</sup> H. Hilton, „Plane Algebraic Curves”, Oxford 1932, p. 37.

schappelijke imaginaire raakvlakken met  $\Omega$  tot type IB, dan is het een kokervormige of een concave algemeene kegel (Fig. 18 en 19). Men bepaalt nu de projecteerende kegel van  $\Omega$ , die hetzelfde punt tot top heeft als het te onderzoeken O. Deze beide kegels met dezelfde top snijdt men met elkaar; bestaat die snijfiguur uit 4 imaginaire rechten, dan is het O een kokervormige algemeene kegel; zijn de 4 rechten reëel, dan is het een concave algemeene kegel.

TABEL VII.

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Aard kegel met actueele top uit de bundel	Coördinaten top: $\{x_1; y_1; z_1\}$	Gemeenschappelijke raakvlakken van O en $\Omega$	Snijfiguur met willekeurig vlak	Naam	Nr.	
4 verschillende reële	imaginair: type IA	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	—	imaginaire algemeene kegel (1ste soort)	HI 13	
		$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	4 imag.	imaginair	imaginaire algemeene kegel (2de soort)	HI 14	
	reëel: type IB	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	4 reële	—	virtueele omhullende algemeene kegel	HI 15
				—	—	virtueele algemeene kegel	HI 16
		$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	4 imag.	—	—	reële algemeene kegel	HI 17
				4 reële	—	kokervormige algemeene kegel (zie blz. 75)	HI 18
4 verschillende: 2 reëel, 2 imag.: type IC	—	—	—	—	concave algemeene kegel (zie blz. 75)	HI 19	
					convexe algemeene kegel	HI 20	
4 verschillende: 2 reëel, 2 imag.: type IC	—	—	—	—	eendeelige algemeene kegel	HI 21	

### § 27. Rang 3; Twee gelijke en twee verschillende wortels.

Bij het tweede geval van blz. 73 moet allereerst onderscheid worden gemaakt tusschen de typen II en III. Na de bundeling van  $F(xyz) = 0$  en  $\Omega = 0$  onderzoeken we het exemplaar uit de bundel, behoorende bij de dubbele wortel van de  $\lambda$ -vergelijking. Is van dat oppervlak de rang 3, dus is het een kegel, dan is de bundel van type [211], dus het O van type II. Is de rang 2, dus een vlakkenpaar, dan is het O van type III.

De keuze uit de drie gevallen van type II gaat weer, door een bijzondere kegel uit de bundel, gevormd met O en  $\Omega$ , te onderzoeken.



In iedere bundel van type [211] bevindt zich een kegel met top op  $\Omega$ . We bepalen die kegel door de coördinaten van de toppen der drie kegels uit de bundel te berekenen. Als die speciale kegel imaginair is, is de bundel van type [211], ondertype 3, dus het O van type IIC. Is die kegel reëel, dan behoort het O tot de typen IIA of IIB. Het raakvlak aan  $\Omega$  in de top van die kegel is eenvoudig te bepalen. We snijden dat vlak met de kegel; is de snijfiguur reëel, dus een reëel lijnenpaar, dan is het O van type IIA; een imaginair lijnenpaar komt voor bij een O van type IIB.

TABEL VIII.

Rang exemplaar behoorende bij dubbele $\lambda$ -wortel	Aard kegel met top op $\Omega$ uit de bundel	Snijfiguur met raakvlak in die top aan $\Omega$ met de kegel	Coördinaten top: $ x_1: y_1: z_1 $	Gemeenschappelijke enkelvoudige raakvl. van O en $\Omega$	Naam	Nr.
3	reëel	reëel: Type IIA	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$	—	tweedeelige parabolische parallelkegel	HII 13
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 imag.	eendeelige parabolische kegel	HII 14
		imaginair: Type IIB	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$	—	tweedeelige parabolische kegel	HII 15
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 reëele	eendeelige parabolische kegel	HII 16
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$	2 imag.	concave parabolische kegel	HII 17
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 reëele	convexe parabolische kegel	HII 18
	imaginair: Type IIC	—	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$	—	imaginaire parabolische parallelkegel	HII 19
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 imag.	virtueele omhullende parabolische kegel	HII 20
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 reëele	virtueele parabolische kegel	HII 21

We hebben met deze manier tevens de coördinaten van de top van O bepaald. Een kegel van type IIA met top op  $\Omega$  is de tweedeelige parabolische parallelkegel. Beide andere soorten kegels van dit type hebben virtueele toppen. We bepalen weer de gemeenschappelijke raakvlakken van O en  $\Omega$ , waarvan er in dit geval twee samenvallen. De andere 2 kunnen zijn: imaginair, dan is het O de eendeelige parabolische kegel; of reëel, bij de tweedeelige parabolische kegel. Ook het type IIB bevat een soort kegels met top op  $\Omega$ , de eendeelige parabolische parallelkegel. Vindt men hier een virtueele top van O, dan moeten weer de gemeenschappelijke raakvlakken van O en  $\Omega$  bepaald worden. De twee enkelvoudige zijn imaginair bij de concave parabolische kegel

en reëel bij de convexe parabolische kegel. Tenslotte behoort ook tot type IIC een soort kegels met top op  $\Omega$ , de imaginaire parabolische parallelkegel. In het geval van een virtueele top bepalen we weer de gemeenschappelijke raakvlakken van  $O$  en  $\Omega$ ; twee imaginaire enkelvoudige komt voor bij de virtueele omhullende parabolische kegel en twee reëele enkelvoudige bij de virtueele parabolische kegel (HIII 21).

Bevat de bundel, gevormd uit  $O$  en  $\Omega$ , een vlakkenpaar, dan behoort  $O$  tot type III. Nu kan dat vlakkenpaar reëel zijn, het oppervlak is dan van één der drie typen: IIIA, IIIB of IIIC. Is het vlakkenpaar imaginair, dan behoort  $O$  tot type IIID of IIIE. In het eerste geval ontbinden we de vergelijking van het vlakkenpaar en onderzoeken of de afzonderlijke vlakken actueel of virtueel zijn. Zijn  $d_1$  en  $d_2$  de Euclidische afstanden van de vlakken tot de oorsprong van het coördinatenstelsel, dan zijn mogelijk de gevallen: 1)  $d_1$  en  $d_2 < 1$  en 2)  $d_1$  en  $d_2 > 1$ . Het eerste omvat de typen IIIA en IIIB. Het tweede is type IIIC.

TABEL IX.

Rang exemplaar behoorende bij dubbele $\lambda$ -wortel	Aard van vlakkenpaar uit de bundel	Euclidische afstand van vlakken tot oorsprong	Coördinaten top: $\{x_1; y_1; z_1\}$	Gemeen-schappelijke raakvlakken van $O$ en $\Omega$	Naam	Nr.	
2	reëel	$d_1$ en $d_2 < 1$ : Typen IIIA en IIIB	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	actueele omwentelingskegel	HIII 20	
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 imag.	eendeelige omwentelingskegel	HIII 21	
		imaginair: Typen IIID en IIIE	$d_1$ en $d_2 > 1$ : Type IIIC	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	tweedeelige omwentelingskegel	HIII 22
				$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	—	imag. omwentelingskegel (1ste soort)	HIII 23
	—		—	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	imag. omwentelingskegel (2de soort)	HIII 24
				$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	—	imag. omwentelingskegel (3de soort)	HIII 25
	—	—	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$	—	virtueele omhullende omwentelingskegel	HIII 26	
			$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	2 imag. 2 reëele	virtueele omhullende omwentelingskegel	HIII 27	

De volgende stap is het berekenen van de coördinaten van de top. Heeft men  $d_1$  en  $d_2 < 1$  en een actueele top gevonden, dan is de kegel de actueele omwentelingskegel. Vinden we hier een virtueele top, dan moeten de gemeenschappelijke raakvlakken van  $O$  en  $\Omega$  berekend worden, dat zijn er hier twee, die ieder dubbeltellen. Zijn deze twee vlakken reëel, dan is de kegel de tweedeelige omwentelingskegel; zijn ze toege-

voegd complex, dan is  $O$  een eendeelige omwentelingskegel. De tweede mogelijkheid was  $d_1$  en  $d_2 > 1$ , dus type IIIC. We berekenen dan weer de top; deze kan zijn actueel: de imaginaire omwentelingskegel (1ste soort), of virtueel: de imaginaire omwentelingskegel (2de soort).

Vervolgens het geval van het imaginaire vlakkenpaar in de bundel. Ook hier moeten we de coördinaten van de top berekenen. De soort kegels met actueele top is die der imaginaire omwentelingskegels (3de soort). Tenslotte zijn er twee soorten kegels met virtueele top. De eene soort bestaat uit kegels, die twee toegevoegd complexe raakvlakken gemeen hebben met  $\Omega$ : de virtueele omhullende omwentelingskegels, terwijl het  $O$ , dat twee reële raakvlakken met  $\Omega$  gemeen heeft, de virtueele omwentelingskegel (HIII 27) is.

§ 28. Rang 3; Drie gelijke, één verschillende en tweemaal twee gelijke wortels.

Vinden we bij de  $\lambda$ -vergelijking van de bundel, gevormd met  $O$  en  $\Omega$ , drie gelijke wortels, dan behoort  $O$  tot één der typen IV, V of VI. Men beslist hier weer tusschen, met behulp van de rang van het oppervlak uit de bundel behorende bij de drievoudige wortel. De rang 3 komt voor bij type IV; de rang 2 bij type V en de rang 1 bij type VI.

TABEL X.

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Rang exemplaar behorende bij 3-voudige $\lambda$ -wortel	Aard van dit exemplaar	Coördinaten top: $\{x_1; y_1; z_1\}$	Aard snijfiguur met willekeurig vlak	Naam	Nr.
3 gelijke, 1 verschillende	3: type IV	—	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$	—	osculeerende parallelkegel	HIV 3
	2: type V	imaginair	$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$	—	osculeerende kegel	HIV 4
			—	—	virtueele parabolische omwentelingskegel	HV 7
	1: type VI	reëel	—	—	actueele parabolische omwentelingskegel	HV 8
			—	—	imaginair	imaginaire afstandskegel
2 maal 2 gelijke: Type VII	—	—	—	reëel	virtueele afstandskegel	HVI 8
				imaginair	imag. parabolisch-elliptische parallelkegel	HVII 7
				reëel	reële parabolisch-hyperbolische parallelkegel	HVII 8

Het type IV gaan we verder splitsen door de coördinaten van de top te bepalen. Ligt die top op  $\Omega$ , dus is:  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ , dan is O een osculeerende parallelkegel; is die top virtueel, dan is het een osculeerende kegel. Bij type V moeten we dat vlakkenpaar, dat in de bundel voorkomt, nader onderzoeken; is het reëel, dan is O een actueele parabolische omwentelingskegel; is het imaginair, dan een virtueele parabolische omwentelingskegel. Het type VI bevat slechts een reëel en een imaginair soort kegels. We snijden dus O met een willekeurig vlak, niet door de top; een imaginaire snijkromme hiermee bepaalt de imaginaire afstandskegel; een reëele snijkromme de virtueele afstandskegel.

Het laatste geval, tweemaal twee gelijke wortels van de  $\lambda$ -vergelijking, is het type VII, dat slechts een imaginaire en een reëele soort kegels bevat, waartusschen we weer kiezen door snijding met een vlak niet door de top. Een imaginaire snijfiguur komt voor bij de imaginaire parabolisch-elliptische parallelkegel en een reëele bij de reëele parabolisch-hyperbolische parallelkegel.

#### § 29. Rang 4; Vier verschillende wortels.

De vergelijking  $F(xyz) = 0$  van het te onderzoeken O heeft nu de rang 4. Na bundeling van  $F(xyz) = 0$  en  $\Omega = 0$  kan de  $\lambda$ -vergelijking van de bundel de volgende gevallen vertoonen:

1. vier verschillende wortels: Type I;
2. twee gelijke, twee verschillende wortels: typen II en III;
3. drie gelijke, één verschillende wortel: typen IV, V en VI;
4. tweemaal twee gelijke wortels: typen VII en VIII;
5. vier gelijke wortels: typen IX en X.

De eerste mogelijkheid kunnen we aldus onderverdeelen: de vier  $\lambda$ -waarden zijn alle reëel of er zijn er twee toegevoegd complex. We gaan eerst het eerste geval, dus de typen IA en IB onderzoeken. Het onderscheid tusschen deze beide typen maken we weer met behulp van de kegel met actueele top in de bundel:  $F(xyz) - \lambda \Omega = 0$ . Is deze kegel imaginair, dan is het te onderzoeken O van type IA; is de kegel reëel, dan is het O van type IB.

De volgende stap, die we te doen hebben, is het bepalen van het ondertype van de schaar, die O en  $\Omega$ , beide als klassefiguren beschouwd, vormen. Deze schaar kan zijn van ondertype 1 of van ondertype 2. Om dit te bepalen moeten we bedenken, dat een schaar van ondertype 1 twee reëele en twee imaginaire tweedegraadskrommen bevat, welke krommen we op een manier, geheel dual aan die we voor een dergelijk geval bij de kegels gebruiken, kunnen onderzoeken. Stel dat nu een O

van type IA met  $\Omega$  een imaginaire torsus gemeen heeft (schaarondertype 1), dan kan het zijn: imaginair of reëel. We zoeken dus een reële oplossing van  $F(xyz) = 0$ . Bestaat deze niet, dan is het oppervlak de imaginaire ellipsoïde. Is deze reële oplossing  $\{x_0; y_0; z_0\}$ , dan is voor  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$  het oppervlak een virtueele omhullende ellipsoïde (HI 2) en voor  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$  een actueele ellipsoïde.

Hebben  $O$  en  $\Omega$  een reële torsus (schaarondertype 2) gemeen, dan moeten we het oppervlak snijden met een eigen raakvlak; is de snijkromme met dat vlak imaginair, dan is het  $O$  een virtueele nietrechtlijnige ellipsoïde (HI 4); is de snijkromme een reëel lijnenpaar, dan is  $O$  een virtueele rechtlijnige ellipsoïde.

Ook bij een oppervlak van type IB moeten we het ondertype van de schaar, die  $O$  en  $\Omega$  vormen, bepalen. Vinden we een schaar met imaginaire torsus (ondertype 1), dan is de volgende stap: het  $O$  snijden met een eigen raakvlak. Is de aldus ontstane snijfiguur imaginair, dan is het oppervlak een concave tweebbladige hyperboloïde (HI 6); is de snijfiguur reëel, dan een eenbladige rechtlijnige hyperboloïde.

Hebben  $O$  en  $\Omega$  een reële torsus (ondertype 2) gemeen, dan is ook het volgende wat wij doen moeten, het oppervlak snijden met een eigen raakvlak. Vinden we nu een imaginaire snijfiguur, dan kan het  $O$  zijn: een eenbladige nietrechtlijnige hyperboloïde of een convexe tweebbladige hyperboloïde (Fig. 6 en 7). Bij het onderzoek naar het type van het oppervlak: IA of IB, hebben we reeds de toppen van de kegels uit de bundel, gevormd met  $O$  en  $\Omega$  bepaald. De top (de eenige actueele uit de bundel) van de reële algemeene kegel weten we; we bepalen nu welke die van de kokervormige algemeene kegel is. De lijn  $m$ , die deze beide toppen verbindt (en die geheel in het binnengebied van de kokervormige algemeene kegel ligt) snijden we met  $O$ , één der snijpunten is:  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Als nu  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$  is, dan is het oppervlak een eenbladige nietrechtlijnige hyperboloïde; is  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ , dan is  $O$  een convexe tweebbladige hyperboloïde (HI 9).

Een  $O$  van type IB, dat met  $\Omega$  een reële torsus (schaarondertype 2) gemeen heeft en waarvan de snijfiguur met zijn eigen raakvlak reëel is, is een tweebbladige rechtlijnige hyperboloïde.

Tenslotte een  $O$  van type IC; van de vier verschillende wortels der  $\lambda$ -vergelijking zijn er twee toegevoegd complex. Ook hier snijden we het oppervlak met een eigen raakvlak; een imaginaire snijfiguur bepaalt hier de nietrechtlijnige semihyperboloïde, een reële de rechtlijnige semihyperboloïde.

TABEL XI.

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Bundel-ondertype	Schaar-ondertype	Aard snijfiguur met eigen raakvlak	Reëel punt: $\{x_0; y_0; z_0\}$	Naam	Nr.
4 verschillende, alle reëel	1: type IA	1	—	geen	imaginaire ellipsoïde	HI 1
				$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele omhullende ellipsoïde	HI 2
		2	imaginair	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele ellipsoïde	HI 3
				—	virtueele nietrechtlijnige ellipsoïde	HI 4
				—	virtueele rechtlijnige ellipsoïde	HI 5
	2: type IB	1	imaginair	—	concave twebladige hyperboloïde	HI 6
				—	eenbladige rechtlijnige hyperboloïde	HI 7
		2	imaginair	—	eenbladige nietrechtlijnige hyperboloïde (zie blz. 80)	HI 8
				—	convexe twebladige hyperboloïde (zie blz. 80)	HI 9
				—	twebladige rechtlijnige hyperboloïde	HI 10
4 verschillende; 2 reëel, 2 toegev. complex; type IC.	—	—	imaginair	—	nietrechtlijnige semihyperboloïde	HI 11
			reëel	—	rechtlijnige semihyperboloïde	HI 12

### § 30. Rang 4; Twee gelijke en twee verschillende wortels.

Een oppervlak, dat aanleiding geeft tot twee gelijke wortels in de  $\lambda$ -vergelijking van de bundel, kan behooren tot type II of tot type III. We beslissen hierin op de bekende manier: heeft het exemplaar uit de bundel, behoorende bij de dubbele  $\lambda$ -wortel, de rang 3, dan is het O van type II. Is de rang van dat exemplaar 2, dan behoort het O tot type III.

Ook de manier, waarmee we bij het eerste geval de typen IIA, IIB en IIC onderscheiden, is bekend: deze is dezelfde, als die we bij het analytisch onderzoek der kegels gebruiken. Vervolgens bepalen we op geheel duale manier het ondertype van de schaar, die gevormd wordt door de klassefiguren O en  $\Omega$ . Is deze schaar van ondertype 1, dan kan het oppervlak zijn: een eenbladige nietrechtlijnige hyperbolische

paraboloïde of een tweebladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloïde (Fig. 8 en 9). De top van de tweedeelige parabolische parallelkegel is reeds bekend; we bepalen nu die van de eendeelige parabolische kegel en stellen de vergelijking op van de lijn  $l$ , die deze beide toppen verbindt. Deze lijn ligt geheel in het binnengebied van de tweedeelige parabolische parallelkegel. We nemen nu een willekeurig vlak (echter niet het raakvlak aan  $\Omega$ ) door  $l$ , hierin liggen bovendien 2 beschrijvenden van de parallelkegel; de lijn  $m$ , die met  $l$  harmonisch ligt ten opzichte van deze beschrijvenden, snijden we met  $O$ ; het snijpunt, dat niet in het gemeenschappelijk raakpunt van  $O$  en  $\Omega$  valt, is  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Is nu  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ , dan is  $O$  een eenbladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloïde, en is  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$ , dan is het oppervlak een tweebladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloïde.

Behoort de schaar, die  $O$  en  $\Omega$  vormen, tot ondertype 2, dan is  $O$  een eenbladige rechtlijnige hyperbolische paraboloïde (1ste soort) en is de schaar van ondertype 3, dan is het oppervlak een tweebladige rechtlijnige hyperbolische paraboloïde.

Vervolgens het type IIB. Wederom bepalen we het ondertype van de schaar, die  $O$  en  $\Omega$  vormen; is dat ondertype 1, dan is  $O$  een éénbladige rechtlijnige hyperbolische paraboloïde (2de soort). Vinden we voor het ondertype van de schaar 2, dan kan het oppervlak zijn de kokervormige hyperbolische paraboloïde en de convexe eenbladige hyperbolische paraboloïde (Fig. 10 en 11). In de bundel, gevormd met  $O$  en  $\Omega$ , bevinden zich een eendeelige parabolische parallelkegel en twee kegels met virtueele top. We trekken nu een lijn  $l$  door de top der parallelkegel en één der virtueele toppen. Verder bepalen we een reëel punt van de parallelkegel en beschouwen het vlak  $V$  door dat punt en  $l$ , hetwelk echter geen raakvlak van de parallelkegel mag zijn. In  $V$  liggen de lijn  $l$  en twee beschrijvenden van de parallelkegel; we bepalen nu in dit vlak de harmonische straal  $m$  van  $l$  ten opzichte van de beide beschrijvenden en deze lijn  $m$  snijden we met  $O$ ; het snijpunt, dat niet in het gemeenschappelijk raakpunt van  $O$  en  $\Omega$  valt, is  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Als nu  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$ , dan is  $O$  een kokervormige hyperbolische paraboloïde en als  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ , dan is het oppervlak een convexe eenbladige hyperbolische paraboloïde (HII 7).

Hebben  $O$  en  $\Omega$  een imaginaire torsus met reëel vlak (schaarondertype 3) gemeen, dan is  $O$  een concave eenbladige hyperbolische paraboloïde (HII 8).

Tenslotte het type IIC, ook hier moeten we het ondertype bepalen van de schaar die  $O$  en  $\Omega$ , als klassefiguren, vormen. Is het ondertype

van deze schaar 1, dan is  $O$  een virtueele rechtlijnige elliptische paraboloid. Hebben  $O$  en  $\Omega$  een reële torsus met geïsoleerd vlak (schaar-ondertype 2) gemeen, dan is het oppervlak een virtueele nietrechtlijnige elliptische paraboloid (HII 10). Vormen  $O$  en  $\Omega$  een schaar van onder-type 3, dan kan het oppervlak zijn: actueel of virtueel; we bepalen een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$ ; is nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan is  $O$  een actuele elliptische paraboloid; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan een virtueele omhullende elliptische paraboloid (HII 11).

TABEL XII.

Rang exemplaar uit bundel behoorende bij dubbele $\lambda$ -wortel	Bundel- ondertype	Schaar- ondertype	Reëel punt: $\{x_0; y_0; z_0\}$	Naam	Nr.	
3	1: Type IIA	1	—	eenbladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid (zie blz. 82)	HII 1	
				tweebladige nietrechtlijnige hyperbolische paraboloid (zie blz. 82)	HII 2	
		2	—	eenbladige rechtlijnige hyperbolische paraboloid (1ste soort)	HII 3	
				tweebladige rechtlijnige hyperbolische paraboloid	HII 4	
		2: Type IIB	1	—	eenbladige rechtlijnige hyperbolische paraboloid (2de soort)	HII 5
					kokervormige hyperbolische paraboloid (zie blz. 82)	HII 6
	3: Type IIC	2	—	convexe eenbladige hyperbolische paraboloid (zie blz. 82).	HII 7	
				concave eenbladige hyperbolische paraboloid	HII 8	
				virtueele rechtlijnige elliptische paraboloid	HII 9	
		3	—	—	virtueele nietrechtlijnige elliptische paraboloid	HII 10
					virtueele omhullende elliptische paraboloid	HII 11
					actuele elliptische paraboloid	HII 12

Komt in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  een vlakkenpaar voor, dan is het  $O$  een omwentelingsoppervlak. In tegenstelling met type II moeten we



hier onderscheiden naar: de wortels der  $\lambda$ -vergelijking zijn reëel, of twee wortels zijn toegevoegd complex.

Het eerste geval omvat de typen IIIA tot en met IIIE. De verschillende kenmerken, waarmee we deze 5 typen onderscheiden, zijn die van blz. 49 en 50, behalve voor het onderscheid tusschen de typen IIIA en IIIB eenerzijds en IIIC anderzijds.

Voor type IIIA gebruiken we de volgende kenmerken: 1) het vlakkenpaar in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  is reëel; 2) voor beide vlakken van dit vlakkenpaar is de Euclidische afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel kleiner dan 1; 3) de vlakkenbundel met die 2 vlakken gevormd, bevat geen reëele raakvlakken van  $\Omega$ . Vinden we, dat een te onderzoeken  $O$  van type IIIA is, dan gaan we het snijden met een eigen raakvlak; is die snijfiguur een imaginair lijnenpaar, dan is  $O$  een twebladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde, en is die snijfiguur een reëel lijnenpaar, dan een twebladige rechtlijnige omwentelingshyperboloïde.

Het type IIIB onderscheiden we aldus: 1) het vlakkenpaar in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  is reëel; 2) voor beide vlakken van dit vlakkenpaar is de Euclidische afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel kleiner dan 1; 3) de vlakkenbundel met die 2 vlakken gevormd, bevat 2 reëele raakvlakken van  $\Omega$ . Een oppervlak van type IIIB moeten we verder gaan onderzoeken op het ondertype van de schaar, die het met  $\Omega$  vormt. Is dit ondertype 2, dan kan het oppervlak zijn: een convexe twebladige omwentelingshyperboloïde of een eenbladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde (Fig. 12 en 13). De bundel, gevormd met  $O$  en  $\Omega$ , bevat een actueele omwentelingskegel en een eendeelige omwentelingskegel. De lijn  $m$ , die de toppen van deze kegels verbindt (en die geheel in het binnengebied van de eendeelige omwentelingskegel ligt), snijden we met  $O$ ; laat één der snijpunten  $\{x_1; y_1; z_1\}$  zijn. Dan is voor  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$  het  $O$  een convexe twebladige omwentelingshyperboloïde (HIII 3) en voor  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$  een eenbladige nietrechtlijnige omwentelingshyperboloïde. Vormen  $O$  en  $\Omega$  een schaar van ondertype 3, dan is het oppervlak een concave twebladige omwentelingshyperboloïde (HIII 5) en is het een schaar van ondertype 5, dan is  $O$  een eenbladige rechtlijnige omwentelingshyperboloïde.

Om te bepalen of een  $O$  van type IIIC is, gebruiken we de volgende kenmerken: 1) het vlakkenpaar in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  is reëel; 2) voor beide vlakken van dit vlakkenpaar is de Euclidische afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel grooter dan 1. Ook hier gaan we het ondertype van de schaar, die  $O$  en  $\Omega$  vormen, bepalen; is dit

2, dan is het oppervlak een virtueele nietomhullende omwentelingsellipsoïde (HIII 7); is het ondertype 3, dan kan het oppervlak zijn: actueel of virtueel. We zoeken in dit geval weer een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$ ; is nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan is het oppervlak de actueele omwentelingsellipsoïde (1ste soort); is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan is  $O$  een virtueele omhullende omwentelingsellipsoïde (1ste soort) (HIII 8). Het  $O$ , dat met  $\Omega$  een schaar van ondertype 5 vormt, is de imaginaire omwentelingsellipsoïde (1ste soort).

Voor type IIID gebruiken we de volgende kenmerken: 1) het vlakkenpaar in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  is toegevoegd complex; 2) de vlakkenbundel met deze 2 vlakken gevormd, bevat geen reële raakvlakken van  $\Omega$ . We snijden een  $O$  van type IIID met een eigen raakvlak; is deze snijfiguur een imaginair lijnenpaar, dan kan het oppervlak zijn: actueel of virtueel, waaruit we beslissen met behulp van een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$ . Voor  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$  is het  $O$  virtueel en voor  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$  de actueele omwentelingsparaboloïde. Om te bepalen, welk soort virtueel oppervlak  $O$  is, schrijven we de vergelijking op van de projecteerende kegel van  $O$  vanuit de oorsprong van het coördinatenstelsel. Is deze reëel, dan is het  $O$  een virtueele nietomhullende omwentelingsparaboloïde (HIII 11) en is die projecteerende kegel imaginair, dan een virtueele omhullende omwentelingsparaboloïde (HIII 12). Een  $O$  van type IIID, dat met zijn eigen raakvlak een reëel lijnenpaar gemeen heeft, is de virtueele rechtlijnige omwentelingsparaboloïde.

Tenslotte het type IIIE; hier zijn de kenmerken: 1) een toegevoegd complex vlakkenpaar in de bundel; 2) de vlakkenbundel, gevormd uit deze beide vlakken, bevat 2 reële raakvlakken van  $\Omega$ . Hier moeten we weer de schaar van  $O$  en  $\Omega$  onderzoeken. Heeft deze het ondertype 2, dan is het  $O$  een virtueele rechtlijnige omwentelingsellipsoïde, terwijl bij ondertype 3 het oppervlak een imaginaire omwentelingsellipsoïde (2de soort) is. Vormen  $O$  en  $\Omega$  een schaar van ondertype 5, dan kan het oppervlak zijn: actueel of virtueel. We bepalen weer een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$ . Is nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan is  $O$  een actueele omwentelingsellipsoïde (2de soort) en is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan een virtueele omhullende omwentelingsellipsoïde (2de soort) (HIII 17).

't Is duidelijk, dat een  $O$ , hetwelk gebundeld met  $\Omega$  een bundel met een zoodanige  $\lambda$ -vergelijking geeft, zoodat 2 wortels gelijk en 2 toegevoegd complex zijn, altijd een omwentelingssemihyperboloïde is.

TABEL XIII.

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Rang van exemplaar van dubbele $\lambda$ -wortel	Bundel-ondertype	Schaar-ondertype	Snijfiguur met raakvlak	Reëel punt: $\{x_0; y_0; z_0\}$	Naam	Nr.						
2 gelijke, 2 verschillende; alle reëel	2	1: type IIIA	—	imaginair	—	tweebladige niet-rechthoekige omwentelingshyperboloïde	HIII 1						
				reëel	—	tweebladige rechthoekige omwentelingshyperboloïde	HIII 2						
		2: type IIIB	2	—	—	—	—	convexe tweebladige omwentelingshyperboloïde (zie blz. 84)	HIII 3				
								eenbladige niet-rechthoekige omwentelingshyperboloïde (zie blz. 84)	HIII 4				
								concave tweebladige omwentelingshyperboloïde	HIII 5				
								eenbladige rechthoekige omwentelingshyperboloïde	HIII 6				
								virtueele nietomhullende omwentelingsellipsoïde	HIII 7				
		3: type IIIC	2	—	—	—	—	virtueele omhullende omwentelingsellipsoïde (1ste soort)	HIII 8				
								actueele omwentelingsellipsoïde (1ste soort)	HIII 9				
								—	—	—	—	—	—
								—	—	—	—	—	—
								—	—	—	—	—	—
		4: type IIID	—	—	—	imaginair	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele nietomhullende omwentelingsparaboloïde (zie blz. 85)	HIII 11				
								virtueele omhullende omwentelingsparaboloïde (zie blz. 85)	HIII 12				
								actueele omwentelingsparaboloïde	HIII 13				
—	—							—	—				
—	—							—	—				
5: type IIIE	2	—	—	reëel	—	virtueele rechthoekige omwentelingsparaboloïde	HIII 14						
						virtueele rechthoekige omwentelingsellipsoïde	HIII 15						

TABEL XIII (Vervolg).

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Rang van exemplaar van dubbele $\lambda$ -wortel	Bundel-ondertype	Schaar-ondertype	Snijfiguur met raakvlak	Reëel punt: $\{x_0; y_0; z_0\}$	Naam	Nr.
2 gelijke, 2 toegevoegd complex: type IIIF	—	—	3	—	—	imaginaire omwentelingsellipsoïde (2de soort)	HHI 16
			5	—	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtuele omhullende omwentelingsellipsoïde (2de soort)	HHI 17
				—	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actuele omwentelingsellipsoïde (2de soort)	HHI 18
				—	—	omwentelingssemi-hyperboloïde	HHI 19

### § 31. Rang 4; Drie gelijke en één verschillende wortel.

Vinden we, dat een  $O$ , gebundeld met  $\Omega$ , een  $\lambda$ -vergelijking met 3 gelijke en 1 verschillende wortel geeft, dan moeten we weer het exemplaar uit de bundel onderzoeken, dat behoort bij de drievoudige  $\lambda$ -wortel.

Is de rang van dat exemplaar 3, dan is het  $O$  van type IV. We snijden het dan met een eigen raakvlak; een imaginair lijnenpaar als snijfiguur bepaalt de nietrechtlijnige osculeerende paraboloiden en een reëel lijnenpaar de rechtlijnige osculeerende paraboloiden.

Een exemplaar van rang 2 in de bundel bepaalt een oppervlak van type V. Is dit vlakkenpaar imaginair, dan is het type VA; is het reëel, dan type VB. De volgende stap bij een  $O$  van type V is het snijden met een eigen raakvlak. Behoort het te onderzoeken oppervlak tot type VA en is de snijfiguur met een raakvlak een imaginair lijnenpaar, dan kan het  $O$  zijn: virtueel en actueel, waaruit we kiezen door een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  te bepalen; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan is het oppervlak een virtuele nietrechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan een actuele parabolische omwentelingsellipsoïde. Een  $O$  van hetzelfde type, dat een reëel lijnenpaar met een raakvlak gemeen heeft, is een virtuele rechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde.

Bevindt zich in de bundel van  $O$  en  $\Omega$  een reëel vlakkenpaar en is

de snijfiguur van  $O$  met een eigen raakvlak een imaginair lijnenpaar, dan kan het oppervlak zijn: een eenbladige parabolische omwentelingshyperboloïde of een twebladige parabolische omwentelingshyperboloïde (Fig. 14 en 15). We hebben hier de 2 vlakken van het vlakkenpaar  $V_1$  en  $V_2$  en het gemeenschappelijk raakvlak  $W$ . Nu bepalen we het vlak  $U$  harmonisch met  $W$  ten opzichte van  $V_1$  en  $V_2$  en snijden dit met een willekeurig vlak door het gemeenschappelijk raakpunt van  $O$  en  $\Omega$ , dat niet tot de bundel  $V_1 + \lambda V_2 = 0$  behoort. De snijlijn  $m$  van deze beide vlakken snijdt  $O$  nog in een punt  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Dan is voor  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$  het oppervlak een eenbladige parabolische omwentelingshyperboloïde (HV 4) en voor  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$  een twebladige parabolische omwentelingshyperboloïde (HV 5). Een  $O$  van

TABEL XIV.

Rang exemplaar uit bundel beh. bij drief. $\lambda$ -wortel	Bundel-ondertype	Snijfiguur met eigen raakvlak	Reëel punt: $ x_0; y_0; z_0 $	Naam	Nr.
3: Type IV	—	imaginair	—	nietrechtlijnige osculeerende paraboloid	HIV 1
		reëel	—	rechtlijnige osculeerende paraboloid	HIV 2
2	1: Type VA	imaginair	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele nietrechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde	HV 1
			$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele parabolische omwentelingsellipsoïde	HV 2
		reëel	—	virtueele rechtlijnige parabolische omwentelingsellipsoïde	HV 3
	2: Type VB	imaginair	—	eenbladige parabolische omwentelingshyperboloïde (zie blz. 88)	HV 4
				twebladige parabolische omwentelingshyperboloïde (zie blz. 88)	HV 5
		reëel	—	rechtlijnige parabolische omwentelingshyperboloïde	HV 6
1	1: Type VIA	—	geen	imaginaire bol	HVI 1
			$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele bol	HVI 2
	2: Type VIB		$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele bol	HVI 3
		imaginair	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueel nietrechtlijnig afstandsoppervlak	HVI 4
			$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueel afstandsoppervlak	HVI 5
		reëel	—	virtueel rechtlijnig afstandsoppervlak	HVI 6

type VB, dat een reëel lijnenpaar met een eigen raakvlak gemeen heeft, is een rechtlijnige parabolische omwentelingshyperboloïde.

Tenslotte het geval, dat de bundel van  $O$  en  $\Omega$  een dubbelvlak bevat, dus het  $O$  van type VI is. We beschouwen de vergelijking van het enkelvoudige vlak en berekenen de Euclidische afstand  $d$  van dat vlak tot de oorsprong van het coördinatenstelsel; is nu  $d > 1$ , dan is het  $O$  van type VIA; is  $d < 1$ , dan van type VIB. Een oppervlak van type VIA kan zijn: imaginair, virtueel of actueel. We bepalen dus weer een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$ ; is dit niet aanwezig, dan is het  $O$  een imaginaire bol; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan een virtueele bol en is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan is  $O$  een actueele bol.

Bij type VIB gaan we het te onderzoeken oppervlak snijden met een eigen raakvlak. Is deze snijfiguur een imaginair lijnenpaar, dan kan het oppervlak virtueel of actueel zijn. We gebruiken weer het middel: een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$  bepalen. Is nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan is het oppervlak een virtueel nietrechtlijnig afstandsoppervlak en is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan een actueel afstandsoppervlak. Het reële lijnenpaar als snijfiguur bepaalt hier het virtueele rechtlijnige afstandsoppervlak.

### § 32. Rang 4; Tweemaal twee en vier gelijke wortels.

In een bundel van het type [2(11)] correspondeeren de beide wortels van de  $\lambda$ -vergelijking met een kegel en een reëel vlakkenpaar en in een bundel van het type [(11)(11)], ondertype 2 met een reëel en een imaginair vlakkenpaar. We beschouwen in beide gevallen alleen het reële vlakkenpaar. Laten de Euclidische afstanden van de vlakken van dat paar tot de oorsprong van het coördinatenstelsel  $d_1$  en  $d_2$  zijn, dan kunnen er hier de volgende mogelijkheden voorkomen:

1.  $d_1 = 1, d_2 > 1$  : Type VII A;
2.  $d_1 = 1, d_2 < 1$  : Type VII B;
3.  $d_1 = d_2 = 1$  : Type VIII.

In de eerste twee gevallen moeten we het ondertype van de schaar bepalen, die  $O$  en  $\Omega$  vormen. Dit geschiedt op geheel duale wijze. Is dat ondertype 1 bij type VII A, dan kan het oppervlak nog zijn: actueel of virtueel. We zoeken een reëel punt van  $O$ :  $\{x_0; y_0; z_0\}$ ; als nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan is het  $O$  een actueele parabolische ellipsoïde; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan een virtueele omhullende parabolische ellipsoïde. Vormen  $O$  en  $\Omega$  een schaar van ondertype 2, dan is  $O$  een virtueele parabolische ellipsoïde (H VII 3).

Een  $O$  van type VII B, dat met  $\Omega$  een schaar van ondertype 1 vormt, is een concave parabolische hyperboloïde. Is het een schaar van ondertype 2, dan kan het oppervlak zijn een convexe parabolische hyperboloïde of een kokervormige parabolische hyperboloïde (Fig. 16 en 17). De bundel, gevormd door beide vlakken van het vlakkenpaar, bevat

TABEL XV.

Wortels van $\lambda$ -vergelijking	Rang exemplaar beh. bij vierv. $\lambda$ -wortel	Euclidische afstand van vlakken tot oorsprong	Schaar-ondertype	Reëel punt: $ x_0; y_0; z_0 $	Naam	Nr.				
2 maal 2 gelijke	—	$d_1 = 1, d_2 > 1$ ; Type VIIA	1	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele omhullende parabolische ellipsoïde	HVII 1				
				$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele parabolische ellipsoïde	HVII 2				
			2	—	virtueele parabolische ellipsoïde	HVII 3				
			1	—	concave parabolische hyperboloïde	HVII 4				
					convexe parabolische hyperboloïde (zie blz. 90)	HVII 5				
					kokervormige parabolische hyperboloïde (zie blz. 90)	HVII 6				
		$d_1 = 1, d_2 < 1$ ; Type VIIB	—	$d_1 = 1, d_2 = 1$ ; Type X	—	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$	virtueele nietomhullende cirkelcylinder (zie blz. 91)	HVIII 1		
							virtueele omhullende cirkelcylinder (zie blz. 91)	HVIII 2		
						$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele cirkelcylinder	HVIII 3		
					4 gelijke	2: Type IX	—	—	parabolisch-osculerende paraboloiden	HIX 1
									1: Type X	—
									$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$	actueele grensbo

2 reële raakvlakken aan  $\Omega$ ; we bepalen beide raakpunten en trekken een lijn  $m$  door beide. Deze lijn  $m$  snijden we met  $O$ ; het snijpunt, dat niet in het gemeenschappelijke raakpunt van  $O$  en  $\Omega$  valt, is  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Als nu  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ , dan is  $O$  een convexe parabolische hyperboloïde; is  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > 1$ , dan is het een kokervormige parabolische hyperboloïde.

Vervolgens de derde mogelijkheid:  $d_1 = d_2 = 1$ . We bepalen dan een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van  $O$ . Is nu  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$ , dan is  $O$  virtueel; is  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$ , dan een actueele cirkelcylinder. Om tusschen beide soorten virtueele cirkelcylinders te beslissen, stellen we weer de vergelijking op van de projecteerende kegel van  $O$  vanuit de oorsprong van het coördinatenstelsel. Is deze kegel reëel, dan is  $O$  een virtueele nietomhullende cirkelcylinder en is die projecteerende kegel imaginair, dan een virtueele omhullende cirkelcylinder.

Het vijfde geval van blz. 79 is weer te splitsen met de rang van het exemplaar uit de bundel, behoorende bij de viervoudige  $\lambda$ -wortel. Is deze rang 2, dan is het  $O$  een parabolisch-osculeerende parabolöide. Is de rang 1, dan moeten we weer een reëel punt  $\{x_0; y_0; z_0\}$  van het oppervlak bepalen; als  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 1$  is, dan is het  $O$  een virtueele grensbol;  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$  bepaalt de actueele grensbol.

---



## SUMMARY.

As all available publications on the classification of conics in non-Euclidean space lack the imaginary and ideal curves, a thorough investigation of this problem has been made. The classification is of course founded on the different species of intersections with the absolute conic. This being not sufficient, we make use of the reality of the joint tangents of the conic and the absolute curve for a more accurate division. Of course we distinguish between real and imaginary curves and in hyperbolic space between metrically real and ideal curves, while here in two cases a still more accurate distinction is necessary, in order to coincide with observation. Thus we find in elliptic space 4 different species of curves and in hyperbolic space 22 species, viz. 12 metrically real, 2 imaginary and 8 ideal.

A classification of all quadratic surfaces, based on purely geometrical characteristics, has not yet been published. This classification is made by the aid of the types of the intersections of two quadratic surfaces and with the species of developables. Just as with the conics, we distinguish between real and imaginary surfaces and in hyperbolic space between metrically real and ideal surfaces. Moreover in some cases the number of domains, in which the metrically real space is divided by the surface, must be used here as a new characteristic. In four cases this is not enough as observation commands a still further division. The cones are divided by the aid of the intersections with the absolute surface, the place of the vertex and the reality of the joint tangential planes of the cone and the absolute surface (in one case moreover with the number of domains). In this way we find in elliptic space 12 species of surfaces viz. 5 imaginary, 4 nonruled and 3 ruled, and 6 species of cones. In hyperbolic space there are 42 metrically real surfaces (32 nonruled and 10 ruled), 4 imaginary and 23 ideal; moreover 34 species of cones (i.e. 2 real ones with metrically real vertex and 4 real ones with the vertex on the absolute surface).

For all different curves, surfaces and cones a mathematical method has been planned to find the species, without making use of a sketch.

---

# INHOUD.

Bladz.

## EERSTE DEEL: HET PLATTE VLAK.

EERSTE HOOFDSTUK: INLEIDING (§ 1) . . . . . 7

TWEEDE HOOFDSTUK: ELLIPTISCHE MEETKUNDE.

§ 2. Indeeling; rang 3 . . . . . 11

§ 3. Analytisch Onderzoek . . . . . 12

DERDE HOOFDSTUK: HYPERBOLISCHE MEETKUNDE.

§ 4. Indeeling; rang 3 . . . . . 14

§ 5. Analytisch Onderzoek; rang 3 . . . . . 19

§ 6. Krommen met rang 2 en 1 . . . . . 23

## TWEEDE DEEL: DE RUIIMTE.

VIERDE HOOFDSTUK: INLEIDING (§ 7 en § 8). . . . . 25

VIJFDE HOOFDSTUK: ELLIPTISCHE MEETKUNDE.

§ 9. Indeeling; rang 4 . . . . . 30

§ 10. Kegels en ontaarding en . . . . . 33

§ 11. Analytisch Onderzoek; rang 4 . . . . . 36

ZESDE HOOFDSTUK: HYPERBOLISCHE MEETKUNDE, INDEELING.

§ 12. Algemeen . . . . . 38

§ 13. Algemeene oppervlakken . . . . . 39

§ 14. Type II; Inleiding . . . . . 44

§ 15. Paraboloiden; Indeeling . . . . . 46

§ 16. Type III; Inleiding . . . . . 49

§ 17. Omwentelingsoppervlakken; Indeeling . . . . . 56

§ 18. Type IV: Osculeerende paraboloiden . . . . . 59

§ 19. Type V: Parabolische omwentelingsoppervlakken . . . . . 60

94

§ 20. Type VI: Bol en afstandsooppervlak . . . . .	62
§ 21. Typen VII en VIII. . . . .	62
§ 22. Typen IX en X . . . . .	64
§ 23. Kegels; Inleiding . . . . .	65
§ 24. Kegels; Indeeeling . . . . .	69

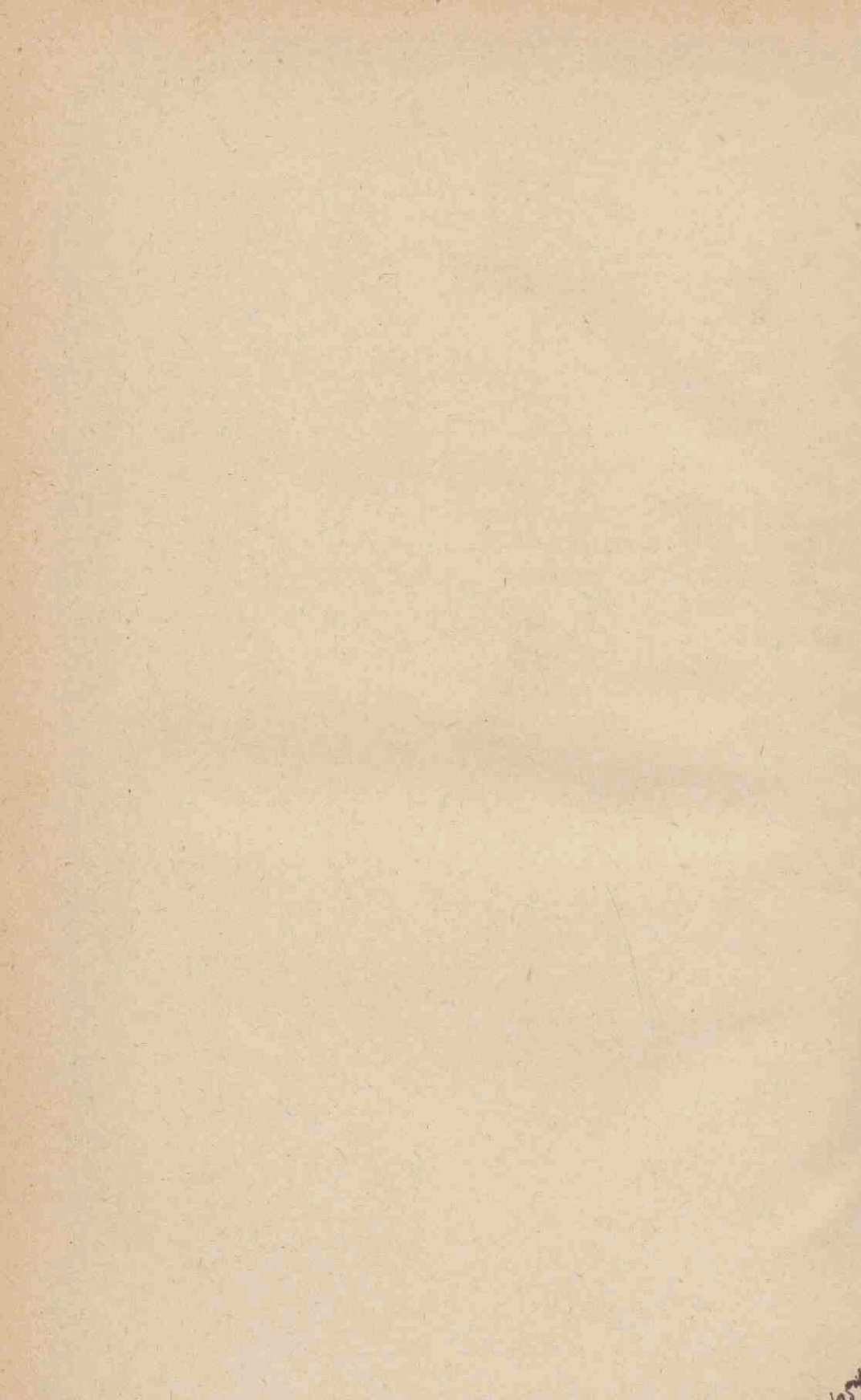
ZEVENDE HOOFDSTUK: HYPERBOLISCHE MEETKUNDE, ANALYTISCH ONDERZOEK.

§ 25. Ontaardingen . . . . .	73
§ 26. Rang 3; Vier verschillende wortels . . . . .	73
§ 27. Rang 3; Twee gelijke en twee verschillende wortels .	75
§ 28. Rang 3; Drie gelijke, één verschillende en tweemaal twee gelijke wortels . . . . .	78
§ 29. Rang 4; Vier verschillende wortels . . . . .	79
§ 30. Rang 4; Twee gelijke en twee verschillende wortels .	81
§ 31. Rang 4; Drie gelijke en één verschillende wortel . .	87
§ 32. Rang 4; Tweemaal twee en vier gelijke wortels . .	89

SUMMARY . . . . .	92
-------------------	----

---





## STELLINGEN.

---

### I.

De definitie van de positieve afstand in de niet-Euclidische meetkunde berust, vergeleken met die in de Euclidische meetkunde, op een vrij willekeurige afspraak.

### II.

Bij een bepaalde soort snijkromme van 2 tweedegraadsoppervlakken van rang 4 behoort, indien die oppervlakken tevens als klasseoppervlakken beschouwd worden, in de meeste, maar niet in alle gevallen, slechts één soort van torsus.

### III.

Een indeeling van de tweedegraadskrommen en -oppervlakken in de niet-Euclidische meetkunde moet zich, met behulp van wiskundige kenmerken, nauwkeurig aan de aanschouwing aanpassen.

### IV.

Het onderzoek naar de verschillende soorten van kegelsnedenbundels in het ternaire gebied is te verkiezen boven dat met behulp van de afbeelding der krommen in  $R_5$ .

### V.

De wijze, waarop Borel soms de Overdekkingsstelling van Borel citeert, is onjuist.

(E. Borel: „Leçons sur les Fonctions Monogènes uniformes d'une variable complexe"; Paris, 1917, p. 11.)

### VI.

Het bewijs, dat Lebesgue geeft voor de stelling: „De limiet van een rij meetbare functies is meetbaar", is onnauwkeurig.

(H. Lebesgue: „Leçons sur les Séries Trigonométriques"; Paris, 1906, p. 9.)

## VII.

Waar van elektrische overbrenging wordt gebruik gemaakt voor psychrometerwaarnemingen, kan men met voordeel naast de temperatuur van de thermometer met droge bol het verschil in temperatuur doen aanwijzen van deze thermometer met een thermometer met natte bol, in plaats van — zooals gebruikelijk is — de temperatuur van elk dezer thermometers.

## VIII.

Een verklaring van de gevonden verschijnselen in de elliptische nevel NGC 3115 zou kunnen geschieden door het aannemen van interstellair stof, vooral in de buitenste lagen en speciaal in het equatorvlak.

(J. H. Oort; *Ap. J.*, 91, 273, 1940.)

## IX.

De meermalen vermelde gelijkheid in kleur van fluorescentie en chemiluminescentie van 3-aminophtaalzuurhydrazide is slechts kwalitatief: de spectra zijn verschillend. Daardoor zijn de conclusies aangaande het molecuul, dat bij chemiluminescente reactie het licht uitzendt, onjuist.

Albrecht: *Z. S. f. Phys. Chem.*, 136, 321, 1928.

Zellner en Dougherty: *J. Am. Chem. Soc.*, 59, 2580, 1937.

Drew: *Transactions Faraday Society*, Jan. 1939.

## X.

Voor de bestudeering van de geschiedenis der exacte wetenschappen zijn de stellingen van vroegere promoties van veel belang.

## XI.

De huidige indeeling van het natuurkundeonderwijs aan de middelbare scholen is uit didactisch oogpunt minder gewenscht.

---









