Disputatio mathematica inauguralis de pontium lapideorum forma et mensuris ex aequilibrii doctrina determinandis

A. A. Nijland

642

De pontium lapideorum forma

Wenckebach

17

A. A. Nijland

DISPUTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

PONTIUM LAPIDEORUM FORMA ET MENSURIS EX AEQUILIBRII DOCTRINA DETERMINANDIS.

Typis exscripsit A. Zweesaardt.

DISPUTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS
DE
PONTIUM LAPIDEORUM FORMA ET MENSURIS EX AEQUILIBRII DOCTRINA DETERMINANDIS,

QUAM,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

CORNELII ADRIANI VAN ENSCHUT,

JUR. UTR. DOCT. ET JUR. PROF. ORDIN.

AMPLISSIMIQUE SENATUS ACADEMICI CONSENSU, ET NOBILISSIMI ORDINIS MATHESEOS AC PHILOSOPHIAE NATURALIS DECRETO,

PRO GRADU MAGISTERII ET DOCTORATUS

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI

HONORIBUS AC PRIVILEGIIS

IN ACADEMIA RHENO-TRAJECTINA

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS

PUBLICO ET SOLEMNI EXAMINI SUBMITTIT

GULIELMUS WENCKEBACH,

HAGANUS.

AD DIEM 28 MAJI 1830, HORA 12.

AMSTELODAMI,

APUD C. G. SULPKE.

1830.

Praefatio.

Quadriennio post relictam Academiam dissertationem in lucem emittens, cur tam sero prodeat, paucis monendum arbitror. Exeunte enim anno 1825, peracto studiorum cursu, ad summos in disciplinis Physicis honores capessendos admissus, statim ad dissertationem scribendam animum adverti; sed vix initio facto accidit, ut Matheseos et Artis Nauticae in Scholâ Regiâ Militari, quae Delphis erat, Lector crearer; cujus muneris officium tantum temporis absumebat, ut non nisi subsecivas horas dissertationi tribuere possem. Biennium Delphis commoratus, Astronomiae Nauticae docendae provinciam cum aliâ mutare debui. Nam, institutâ Bredae Academiâ Regiâ Militari, ad Mathesin docendam eo evocatus, primo anno scholas de Calculo Differentiali et Integrali habere debui, quibus deinceps aliae de Staticâ et Dynamicâ adjungendae erant. In quibus et habendis et praeparandis ut multum temporis ponendum erat, ita alia etiam causa dissertationi absolvendae moram afferebat. Quod enim omnino fieri solet, ut, diu eandem rem meditantes, et aliorum de eâ opiniones colligentes, facile sententiam mutemus, id mihi eo magis accidere debuit, quo major esset auctorum, quos subinde consulerem, discrepantia. Quae quidem tanta fuit, ut diu dubius haererem, quâ tandem ratione argumentum tractarem. Ea autem, quam secutus sum, an bona sit, judicium esto penes lectorem.

Alterum praefationis officium, idque jucundissimum, me jubet gratum meum animum in praeceptores, quos tum in Athenaeo Daventriensi, tum in Rheno-Trajectinâ Academiâ nancisci mihi contigit praestantissimos, palam testificari. Quorum omnium tanta in me exstiterunt tum amicitiae tum institutionis beneficia, ut dulcissima mihi semper futura sit eorum recordatio.

Nominatim autem Tu hoc loco mihi es compellandus, Clar. NIEUWENHUSI! qui me, in tuam scholam tuamque domum receptum, tum egregiis tuis lectionibus, tum vero praecipue sermonibus familiaribus, continuo tantâ opinione de disciplinarum

Physicarum praestantiâ imbuisti, ut, dubius ante cuinam disciplinae me traderem, mox in hisce ponere vitae tabernacula decreverim. Quo semel suscepto consilio omnis deinde dies id effecit, ut magis magisque sentirem quantum tibi deberem ejus consilii auctori, utque post biennium, in tuâ domo tuâque familiaritate felicissime peractum, maximo animi dolore a te discederem.

Verum enimvero a praestantissimo magistro discedenti felicissimum accidit, alios continuo nancisci praeceptores, omni meâ laude longe superiores, vos inprimis, Clarissimi MOLLI, SCHRÖDERE et HEUSDI. Vos scientiae amorem in me et aluistis, et ad eam ardoris vehementiam perduxistis, ut nullo unquam die aut minui aut exstingui possit: vos mihi et viam monstrastis, et vosmet ipsos duces comitesque praebuistis, atque me praeceptis monitisque egregiis benigne semper juvastis; imo vero tantis me benevolentiae testimoniis ornastis, ut nullis verbis haec rite celebrare, nedum gratias, tantis meritis vestris pares, referre possim. Quapropter nihil mihi reliquum est nisi hocce votum, ut vos Deus Optimus Maximus diu servet incolumes ad gloriam patriae et amplissimum adeo disciplinarum emolumentum.

Nec vero jam silentio praetereundi sunt collegae mei conjunctissimi, viri strenuissimi DELPRATIUS et GISIUS NANNING, Munimentis Exstruendis alter Centurio et in Academiâ Regiâ Militari primi Matheseos et Physices Professoris munere fungens, alter Succenturio et in eâdem Academiâ Centurionis vices gerens: quorum prior frequentibus sermonibus de pontium aequilibrio mecum habitis maximopere me adjuvit, ut, quid de eo statuendum esset, clarius perspicerem, posterior vero summâ diligentiâ figuras delineavit, quae lithographo archetyporum instar servire debuerunt. Utrique me pro hisce in me collatis amicitiae beneficiis quam maxime devinctum sentio.

EMENDANDA.

Pag. 1 vers. 11: Nonnulla *lege* Nonnullae.

— 12. Ad pontes antiquiores lapideos, qui 200 metra longitudine superant addendus est pons, qui (1270) sub Rudolpho *Habsburgensi* Moeno prope Francofurtum est injectus, quique anno 1306 disjectus et restitutus, iterumque anno 1342 a flumine abjectus, denuoque restitutus hodieque exstat. Constat 14 arcubus, et habet longitudinem 270met. (Vid. A. Kirchner *Ansicht. v. Frankf. a. M.* 1818. 1er Th. S. 61—66).

— 24 v. 22: D *lege* D′.

— 28 v. 14: $\left(1 + y\frac{dy^2}{dx^2}\right)$ » $y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$.

— 30 *in annot.* v. 2: uich » nicht.

— 31 v. 22, *in numeratore:* $(c\, 2D - y^2)$ » $(2D - y^2)$.

— » v. 23, *in denominatore:* $\mathrm{Cos}^4 \psi$ » $\mathrm{Cos}^2 \psi$.

— 32 v. 5: $c^2 \frac{4D}{4D - e^2} c^2 \,\mathrm{Sin}\,\phi$ » $c^2 - \frac{4D}{4D - e^2} c^2 \,\mathrm{Sin}^2 \phi$.

— » v. 6: $1 - c^2 \,\mathrm{Sin}^2 \psi$ » $1 - c^2 \,\mathrm{Sin}^2 \phi$.

— 36 v. 4: $\frac{G}{D}(u - a)$ » $\frac{G}{D}(u - \alpha)$.

— 37 v. 3: $+\tfrac{1}{2} y^2 \frac{dy}{dx}$ » $+\tfrac{1}{2} y^2 \frac{dy}{dx}\Big\}$.

— » v. 6: $+{}^2\tfrac{1}{6} y^3 \frac{dy^2}{dx^2}$ » $+\tfrac{1}{6} y^3 \frac{dy^2}{dx^2}$.

— 38 v. 1: $\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2$ » $\left(\frac{2D - y^2}{2D - e^2}\right)^2$.

— » v. 3: $\left\{\left[\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right]\right\}$ » $\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$.

— » v. 20, *in denominatore:* $(2D - y_2)$ » $(2D - y^2)^2$.

— 45 v. 3: $(v = y')^2$ » $(v - y')^2$.

— 46 v. 4: $\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2$ » $\left(\frac{2D - y^2}{2D - e^2}\right)^2$.

— 47 v. 9: $m^2 >$ » $m^2 <$.

— 56 v. 24: $(v' - d)\,\mathrm{Tang}\,\mu$ » $(v' - d)\,\mathrm{Tang}\,\mu'$.

— 63. *In tabulâ pro* 1,ped53 *et* 11,ped69 » 1,53 et 11,69.

— 79 v. 19: $\tfrac{1}{3}y$ *bis occurrit. Alterum deleatur.*

— 87 v. 5, *in numeratore:* $\mathrm{Sin}(\mu' + \mu)$ *lege* $\mathrm{Sin}(\mu' + m)$.

— 96 v. 18. *Bis occurrit* $u - a$ » $u - \alpha$.

— 97 v. 11, *in denominatore:* $3a(b + a)(b - v)$ » $3(b + a)(b - v)$.

— » v. 12, *in numeratore:* $\{u^2\, 3$ *etc* » $u^2 \{3$ *etc.*

EXORDIUM.

Quo majores aliqua disciplina progressus fecit, eo uberiores oportet esse fructus, quos inde percipiant artes et vita communis. Itaque quum Physicarum disciplinarum fines per quinquaginta hosce annos, cum accuratiore et observandi et experimenta faciendi methodo, tum perfectiorum instrumentorum usu, mathesi quoque ad explorandum adhibitâ, longissime prolati sint, factum est, ut hoc, quod vivimus, tempore illarum disciplinarum in hominum societatem multo majores quam antea redundare possint utilitates. Docet hoc historia XVIII exeuntis et incipientis XIX saeculi, quo tempore praestantes in Physicis disciplinis viri de artibus optime meriti sunt; docent mutatae inde omnis generis fabricae, agricultura, fodinas explorandi rationes, navigandi ars, caetera.

Nonnulla tamen Adhibitae, quae dicitur, Physices partes nondum aeque ex progressibus disciplinae profecisse videntur: quarum numero censenda est inprimis architectura, cum civilis et militaris, tum navalis et hydrotechnica. Fuerunt quidem, iique principes in re mathematicâ viri, qui operam impenderent gravissimis hujus artis quaestionibus explorandis; exstant dissertationes de aedibus exstruendis, de fornicibus concamerandis, de optimâ formâ navibus tribuendâ, de fluminibus derivandis, de aggeribus moliundis, de emissariis faciendis magno acumine scriptae: sed practici, qui dicuntur, homines saepius aut non curant hanc doctorum virorum operam, aut quasi inutilem, imo noxiam, rejiciunt, et in aedificando alias rationes sequuntur. Quod non ita mirum accidet reputanti, duabus inprimis causis effici, ut theoriae praecepta possint ad praxin adhiberi: nam et hypotheses cum rerum naturâ convenire debent; et quantitates in theoriâ assumtas cognitas esse oportet, hae autem non nisi experimento aut observatione innotescere possunt. Quod ad hypotheses, mathematici saepissime, ut formas mensurasque aedificiorum computarent, hoc sibi sumserunt, ut adhibendam materiem absolute duram esse censerent, eamque nullâ vi quantâcunque posse mutari: jam vero omnis materia nimiâ pressione potest disrumpi, omnis materia magni ponderis actione potest sive extendi sive flecti, omnis materia calore modo dilatatur, modo contrahitur; quae singula eam vim habere possunt, ut, quod aedificium ex materiâ plane solidâ confectum esset stabilissimum, idem eâdem formâ, eâdem longitudine, latitudine, altitudine, eâdem partium crassitudine, sed ex materiâ, qualis re verâ adest, exstructum necessario corruere debeat. Ad hanc igitur materiae imperfectam duritiem, hanc elasticitatem, hanc ejus aut extendendi se aut calore dilatandi proprietatem attendat Mathematicus oportet. Quae quum animadvertere debeat, sequitur inde, ex observatione debere ei cognitum esse, quanta sit cujusque metalli, saxi, ligni durities, quanta eorum elasticitas, quousque extendi possint et flecti, quantam in ea vim calor exserere possit. Hae autem quantitates, quum accuratioribus tantum experimentis definiri possint, quibus instituendis cum multum otii, tum sumtus satis magni requiruntur, fiebat, ut earum pleraeque ignorarentur. Sed et hac in re feliciore vivimus aetate. Practici enim homines ut earum cognitionem magni jam faciunt, ita ad eas determinandas plurima instituerunt experimenta, quae majoris in dies erunt utilitatis. Sufficit hoc loco citasse TREDGOLDUM, RENNIUM et BARLOWUM.

Atque haec cogitanti mihi, curriculo academico ad finem perducto, atque ad scribendam dissertationem accedenti, non inutilis opera fore videbatur, si de parte aliquâ architecturae scriberem, atque ita hoc argumentum tractare conarer, ut, quae mathematicâ ratione disputata sunt, in ipsis operibus construendis usui esse possint: itaque egi *de pontium lapideorum formâ et mensuris ex aequilibrii doctrinâ determinandis.*

Consilium meum in eligendo hocce argumento non est quod multis verbis defendam, sumtis a pontium utilitate rationibus. Pontibus enim exstruendis, uti viis sternendis, et canalibus fodiendis, et navibus aedificandis illud effectum est, ut facilius et frequentius redderetur hominum inter se commercium: quo autem magis dissitarum regionum incolae secum invicem conjunguntur, quo frequentius cum naturae tum artis ingeniique fructus permutant inter se, eo majores et illustriores societatis humanae cernuntur ad veram humanitatem progressus. Quae quidem res ita manifestis declaratur recentiorum aevorum testimoniis, quibus *non maria magna, non ignarae linguae commercia prohibent* amplius (1), ut non facile quisquam hodie cum poëtâ queratur:

Nequicquam Deus abscidit
Prudens Oceano dissociabili
Terras (2);

imo laetetur, omnium gentium conjunctionem in dies magis reddi expeditam, atque adeo plurimi faciat artificum inventa, quae huc referantur.

Quam pontium utilitatem sentientes antiquissimi jam populi iis construendis operam dederunt, exstructosque tamquam pretiosissima artis opera magnâ curâ, imo religione servarunt. Patet jam HOMERI aetate pontium usum frequentem fuisse, quum laudat validum *Diomedis* in Trojanos impetum, comparatione ductâ ab impetu torrentis, qui hiberno tempore exundans pontes perrumpat (3). Fuerunt illi probabiliter rudi adhuc arte ex simplicissimo ligneorum genere, qui, quum facillime jungerentur, saepius quoque a fluviis vehementiori flumine ruentibus disjiciebantur: quo fieri debuit, ut firmior construendi ratio, in magnis praesertim fluviis, quaereretur et majores firmioresque pontes exsisterent. Quales in Asiâ primum exstitisse, conjicitur ex HERODOTI descriptionibus.

Ex iis, qui notatu digniores occurrunt, primus memorandus ille, quem Babylonis regina, sive Nitocris sive Semiramis, exstruxisse narratur in Euphrate. Excisi erant lapides praelongi, quibus ferro ac plumbo revinctis, pons

---

(1) Vid. SALLUST. *Jugurth.* c. 18. § 6.

(2) HORAT. *Od.* I. carm. 3.

(3) Vid. *Iliad.* E. vers. 88.

erat compositus: per hunc pontem sublicae quadratae interdiu extendebantur, eaeque noctu tollebantur, ne incolae utriusque urbis partis, per noctem transeuntes, mutua furta exercerent (1): unde patet, lapides illos pilarum loco verticaliter in fluminis alveo positos, et omnem pontem simplicissimâ ratione exstructum fuisse, neque hic cogitandum esse de opere camerato.

Post hunc occurrunt pontes a *Dario* Hystaspis filio in Bosporo Thracico et Istro, in Strymone et Hellesponto a *Xerxe*, ejus filio, facti (2); ex quibus priores tres navibus erant juncti, nec quidquam de iis novimus memorabile; posterior ille cum in historiâ gentium magnas obtinet partes, quia inservire debuit immensis *Xerxis* copiis ex Asiâ in Europam trajiciendis, tum in historiâ architecturae prae caeteris memorandus est, quia novae construendi rationis primum exemplum praebet. Prima quidem fronte videri possit, uti reliqui, navibus junctus (*schipbrug*) fuisse: attentius vero accuratam HERODOTI (3) descriptionem consideranti verosimile mihi visum est, eum ad pensilium genus pontium esse referendum. Architecti oram elegerunt Asiaticam asperam, in mare prominentem, et ex illâ in Europaeam oram fecerunt duos pontes, alterum ex albo lino Phoenices, Aegyptii ex papyro alterum. Hoc loco nulla omnino navium suppositarum occurrit mentio; imo funes videntur significari ex orâ in oram tensi, quibus superstrata fuerit via: atque hi funes propter freti latitudinem, erat enim eo loco septem stadiorum, i. e. mille et trecentorum fere metrorum, in medio freto probabiliter ipso mari sustentabantur; simili fere modo, atque narrat MUNGO PARKIUS, pontem in flumine Bafing ab Africanis exstructum (4) ipso

(1) HEROD. Lib. I. § 186. DIOD. SIC. Lib. II. cap. 8. CURTIUS Lib. V. cap. 1. § 29. Secundum DIODORUM inter pilas erant duodenum tantum pedum interstitia, unde sequitur immensae molis opus fuisse hunc pontem: laudanda tamen architecti sollertia in determinandâ pilarum formâ, supra acutâ, infra rotundatâ, et ad frangendum moderandumque fluminis impetum aptissimâ.

(2) HEROD. IV. 83, IV. 118, VII. 24, 33—36.

(3) HEROD. VII. 33—36. VIII. 117.

(4) Vide ejus *Reizen in de binnenlanden van Afrika*, den Haag 1802, 3e deel, bl. 43—44, ibique figuram. Cf. quoque R. CAILLIÉ *Voyage à Jenné et à Temboctou*, Tom. I passim.

fluctu sustentari. Ita intelligitur, quomodo, ortâ ingenti tempestate, mare omnia disruperit. Quo facto quum *Xerxes* reficiendos jussisset pontes, utrique submiserunt navium magnum numerum, anchoris praegrandibus demissis stabilitarum; funes (1) axibus ligneis torquentes ex terra intenderunt, lineos duos conjungentes, quatuor papyraceos; truncos lignorum, ad latitudinem pontis adaequatos, ordine imposuerunt non navibus, sed *τῶν ὅπλων τῷ τόνῳ*, funibus intentis; denique materiam terramque importarunt, et pontem ab utrâque parte sepe muniverunt. Itaque posteriores hi pontes uti priores, quos mare disjecerat, erant pensiles, eâ tantum in re ab illis et ab hodiernis diversi, quod propter firmitatem funes sustentabantur navibus firmiter in locis suis collocatis; quod necessarium omnino fuisse patet ex freti latitudine, quae septies superat aperturam celebratissimi Anglici pontis pensilis in freto *Menai*.

Duo sunt in Herodoteâ descriptione, quae facere possint, ut putemus fidem ei haberi vix posse, pontium immensa longitudo, et insolita ante exstruendi ratio. Sed animadvertendum quod ad longitudinem, ejusmodi et Orientalium in genere, et, teste HERODOTO, *Xerxis* inprimis ingenium et indolem fuisse, ut immensa aggrederentur opera, quae magnitudine superarent quaecunque recentiora tempora protulerunt; indicio sunt Aegyptiorum pyramides, Babyloniorum horti pensiles, Indorum templa in rupibus excavata, Sinensium ingens murus Tartaricus, ejusque generis plura; neque Hellespontus igitur freti latitudine et fluctus vehementiâ *Xerxem* retinere debuit, quin Asiam Europae ponte jungi juberet. Tum vero, quod ad pensilem pontium rationem attinet, quae artis pueritiae minus convenire videtur, similitudinem eâ in re videmus inter *Xerxis* opus et recentiores pontium formas apud populos, qui nondum magnos in artibus progressus fecerunt: constat enim, etiam Sinenses, Indos, Americanos (2) pensi-

(1) Funes interpretor, qui vocantur ab HERODOTO *ὅπλα*, auctoritatem secutus HIPPOCRATIS, ut docet GALENUS in *Lexico Hippocratico*.

(2) Vid. *Encycl. Metrop.* in voce *Bridge* pag. 808—809. *Xerxis* ponti similes hodieque pontes construuntur militares: conf. DOUGLAS, *Essai sur les principes de la construction des ponts militaires et sur les passages des rivières en campagne. Traduit de l'Anglais par* VAILLANT. Paris 1824.

libus usos esse pontibus, sed infirmis, vacillantibus, et ad transeundum saepe difficillimis, ut maximum intersit discrimen inter eos et pulcherrimos validissimosque pontes ferreos pensiles, quos cultiores populi cum Americani tum Europaei exstruxerunt.

Quamquam igitur varii generis pontes, lignei, navibus juncti, lapideis pilis instructi, pensiles in Oriente exstiterunt, cameratos tamen pontes apud Orientales reperire non potui. Neque tamen fornicum constructio incognita fuit iis, si fides est habenda DIODORO SICULO (Lib. II. cap. 9), narranti Semiramidem cuniculum fornicatum sub alveo Euphratis fecisse, ut regiae in utrâque ripâ sitae conjungerentur. Parietes cuniculi habebant latitudinem viginti laterum, altitudinem usque ad fornicem duodecim pedum: fornix ex latere coctili exstructus obducebatur bitumine indurescente, ad crassitiem quatuor cubitorum; ipse autem cuniculus latus erat quindecim pedes; ejusque aedificationem difficilem fuisse putaremus, nisi constaret, Semiramidem ante avertisse fluminis cursum. Itaque et in hoc opere, ut in ponte construendo, non tam artificis sollertia admirationem movet, quam impensarum magnitudo (1).

Graeci nullos fere videntur in pontibus exstruendis fecisse progressus (2). Quod non ita mirandum, ipsâ Graeciâ nullas opportunitates offerente; neque enim majores fluvii in ea erant, et mari secum invicem Graeci communicabant lubentissime.

Alia prorsus fuit Romanorum ratio. Urbis situs ad flumen Tiberim sponte eos adducebat, ut utramque ripam jungerent, et, artibus paulo progredientibus, firmiorem pontium sternendorum rationem quaererent, quam aut Graeciae aut

---

(1) Fornices quoque Babylone usurpatos in aedificandis hortis pensilibus auctor est STRABO, lib. XVI, Ed. Amst. 1707, pag. 1073 A.

(2) Quoties a Graecis architectis occurrunt pontes exstructi, sive lignei, sive navibus juncti fuisse videntur. Conf. ex. gr. XENOPH. *Anab.* L. I. c. 2. § 5, L. II. c. 4. § 13. ARRIAN. L. II. c. 23, L. V. c. 7. Aliorum mentio invenitur apud JUSTINUM, aliosque, quorum enumeratio, cum nihil memorabile de iis traditum invenerim, fastidiosa ideoque omittenda videbatur.

Orientis populi. Quum enim pontibus disjectis omnis urbis communicatio intercepta esset cum regionibus Transtiberinis, maximi intererat totius civitatis ut integri servarentur pontes. Quo factum est, ut a remotissimis inde temporibus eorum cura non nisi principibus in republicâ viris fuerit mandata. Legimus antiquissimum Romanorum pontem fuisse *Sublicium*, eumque, auctore *Anco Marcio* (1), primum in Tiberi factum a *Pontificibus*; «nam," ait VARRO (2), «ab his Sublicius est factus primum, ut restitutus saepe, cum ideo sacra et «uls et cis Tiberim non mediocri ritu fiant." Atque ipsum eorum sacerdotum nomen ab hoc pontium negotio originem duxisse idem est auctor. Ab his ad Censores transiit pontium cura (3), tum ad Curatores viarum, denique ad Praefectum Urbis (4).

Quum igitur primi pontes fornicati apud Romanos inveniantur, operae pretium erat investigare, quo tempore et a quonam artifice primus aedificatus fuerit. Itaque quaecunque hac de re in GRAEVII *Thesauro* a DONATO, FABRICIO, NARDINO aliisque referuntur, legi, veteres auctores ipsos adhibui; sed nullam pontis fornicati mentionem reperi ante annum Urbis 575, quo M. Fulvius Censor pontis Palatini sive Senatorii pilas locavit, quibus pilis fornices post aliquot annos P. Scipio Africanus et L. Mummius Censores locaverunt imponendos (5). Constat

---

(1) LIVIUS L. I. c. 33, § 6. De hujus pontis fatis plurima collegit FAMIANUS NARDINUS in Tomo IV *Thes. Ant. Roman.* GRAEVII L. VIII. c. 3.

(2) *De ling. lat.* L. V. pag. 87. Ed. SPRENG. Berol. 1826.

(3) Cf. LIVIUS L. XL. c. 51. AUREL. VICTOR c. 72.

(4) Conf. SYMMACHUS Ed. 1587. L. IV. Ep., 71. L. V. Ep. 74. L. X. Ep. 38 et 39.

(5) Conf. LIVIUS L. XL. c. 51. Quod GAUTHEYUS, Vir Clar. (*Traité de la construction des ponts*, T. I. p. 14) ait, hunc pontem primum lapideum esse factum anno 127 A. C. a *C. Flavio Scipione*, non potui reperire, quâ auctoritate statuerit, et, repugnante LIVIO, mihi videtur minus vere dixisse. Non diu integer fuit hic pons, si ad *Augustum Octavianum* referenda est inscriptio Gruteriana, quam citat BERGIERIUS (*de publ. et milit. imperii Rom. viis*, in GRAEV. *Thes.* X p. 487) quâ patet, *Augustum* eum refecisse. Iterum refectus sub *Gregorio* XIII, anno 1575 P. C., ultimâ vice concidit Tiberis exundantis impetu anno 1598, neque restitutus est postea.

quidem jam ante exstitisse in Aniene pontem Salarium (1), in Tiberi pontem Mulvium (2) aliosque, sed nulla adsunt indicia, ex quibus colligi possit, eos fuisse lapideos, aut camerato opere exstructos. Qui enim supersunt hodieque Tiberini pontes, indicio esse non possunt, quoniam hi fere recentioris sunt aetatis. Nam antiquiores pontes a Tiberi exundante saepius disjecti atque adeo restituti sunt, tum ab imperatoribus, tum a Pontificibus Romanis, ut difficile sit dictu, quid in iis ex veterum Romanorum arte supersit, quid vero recentioribus architectis tribuendum sit.

Neque mirandum est, pontes Romanos saepe concidisse. Quamvis Romani minime materiae et sumtibus pepercerint, quamvis ad stabilienda pontium fundamenta saepius opere usi sint subterraneo, fornice inverso, qui magnitudine et massâ ipsum pontem superaret, quod patet etiamnunc in fundamentis pontis Fabricii, Aelii, Cestii; nunquam tamen ejusmodi constructionem adhibuerunt, quâ aucto flumini satis liber esset transitus.

Pontes eorum, quantum ex figuris patet, fere omnes habebant aperturam

---

(1) Pontis in Aniene mentio occurrit jam in bello, a *Tarquinio Prisco* contra Sabinos gesto (LIV. I. 37.), sed fuit ille, teste DIONYSIO HALICARNASSENSI (L. III. p. 191—192) ex navibus factus. Deinde celeber est factus *T. Manlii Torquati* cum Gallo pugnâ. (LIV. VII, 9—10.) Qualis autem lapideus hodieque cernitur, a *Narsete* restitutus memoratur (apud MARLIANUM in *Urbis Romae Topographiâ)*, postquam a *Totilâ*, barbarorum rege, disjectus esset.

(2) Pontem Mulvium jam exstitisse anno U. 547, patet ex LIV. XXVII. 51. Quod igitur AMMIANUS MARCELLINUS (L. XXVII. c. 3.) et VICTOR (*de Vir. Illustr.* c. 72 § 8.), eosque secuti recentiores omnes narrant, illum a *M. Scauro* Censore *Syllae* tempore exstructum esse, ita videtur accipiendum, ut ligneus ante a *Scauro* majore cum splendore lapideus sit factus. Sed errat plane GAUTHEYUS (I. pag. 13.) dicens: » il est le plus ancien de tous » ceux, qui subsistent tels qu'ils étoient lors de leur prémière construction." Primum enim, teste FABRICIO, in *descript. urb. Romae* (in GRAEV. *Thes.* T. III. p. 453. A), sub *Augusto* refectus est, et saepius deinceps eversus, saepiusque restauratus nihil ex veteri structurâ praeter fundamenta retinuit (Conf. BART. MARLIANI *urb. Rom. topogr.* in GRAEV. *Thes.* T. III. pag. 186). Denique eum restauravit *Nicolaus* V, Pontifex maximus, anno P. C. 1450.

semicirculatam, cujus altitudo erat dimidium latitudinis; quodsi igitur flumen satis latum uno arcu jungeretur, ubi ripae non multum supra aquam eminebant, pons tantam acquirebat supra illas altitudinem, ut adscensus in eum nimis esset arduus: quod ne fieret, pro uno arcu plures minores juxta ponebantur, atque ita altitudo pontis tantum minoris circuli radio fiebat aequalis. Hinc autem simul fiebat, ut plures pilae ad fulciendos arcus in fluminis alveo aedificandae essent; quae pilae, flumine supra modum crescente, aquarum vim sustinere non poterant, atque ab his labefactatae totius pontis ruinam trahebant. Neque pilis crassioribus reddendis quidquam proficiebatur: namque hae crassiores factae majorem etiam aquis superficiem praebebant; aquarum autem vis augebatur coarctato earum subter pontem alveo; et sic pons, auctam earum vim sustinere non magis valens, nihilominus corruebat. Etenim ut in fluminibus rapidioribus firmi fuissent pontes, arcus adhiberi debuissent, quorum convexitas latior fuisset quam in formâ semicirculatâ, quique, aut nullis aut paucissimis tantum pilis superstructi, expeditum fluctibus transitum praebuissent. Quales arcus, recentioribus populis usitatissimi, Romanis incogniti fuisse videntur.

Ignoramus, quantos Romani in pontium structura fecerint progressus. Quum enim et ipsi eorum pontes, aut temporis lapsu aut barbarorum manibus, sint dissoluti, quumque nulli auctores veteres de hocce argumento ad nos pervenerint, certum quid hac de re statuere non possumus (1).

---

(1) Scriptores recentiores, qui de pontibus egerunt, DIONEM auctorem secuti, pontem, ab *Apollodoro*, *Trajano* jubente, Danubio injectum tamquam monumentum artis Romanae celebrant, tum propter fornicum magnitudinem, tum propter constructionis difficultatem. Narrat DIO (Vid. XIPHIL. *Epit.* DIONIS *Ed. Steph.* 1592. pag. 246 B—E), fluvium eo loco, ubi pons aedificatus fuerit, et ex latiore angustiorem, et simul profundiorem fieri, ut oporteat, difficillimum omnino fuisse fundamenta jaciendi negotium: viginti pilas fuisse ex lapide quadrato; earum altitudinem praeter fundamenta fuisse 150 pedum, latitudinem 60 pedum; ipsas autem 170 pedes a se invicem distantes fornicibus (ἁψῖσι) fuisse conjunctas.

Ex hac DIONIS descriptione GAUTHEYUS aliique effecerunt, pontem hunc constitisse 19 fornicibus lapideis, quorum aperturae 170 pedum latitudinem, 85 pedum altitudinem haberent; quae si ita essent, fatendum foret, in majoribus pontibus lapideis construendis

Artibus medio quod vocatur aevo paulatim renascentibus, ad pontium struendorum necessitatem animadverterunt gentes Germanicae, quum, saeculo inprimis XII, invalescerent sacra itinera, quibus fiebat, ut millia hominum, quotannis in loca dissita peregrinantium, maximos fluvios transgredi cogerentur. Quam pontium exstructionem plurimum adjuvarunt Pontifices Romani, tum instituendâ

Romanos recentioribus nisi superiores, certe pares fuisse; nam major nullus hac nostrâ aetate fornix lapideus exstitit. Sed non patet, scriptores illos veram DIONIS mentem assecutos esse: ipse enim DIO quamvis materiam, ex quâ pilae exstructae fuerunt, diserte memoret, fornicum materiam silet; ut ἅψιδες illae quoque ex ligno esse potuerint, et pons Trajaninus ad cameratos haudquaquam pertinuerit. Quae quidem nostra conjectura ut convenit figurae pontis, qualis in columnâ *Trajani* est depicta, ita recentiorum scriptorum testimoniis firmatur. Nam in columna *Trajani* cernuntur pilae, non lapideis fornicibus, sed trabibus junctae. (Conf. *Colonna Trajana da* PIETRO SANTI BARTOLI, tab. 74, et *Columna Trajani, ab* AND. MORELLIO *delineata, curâ* A. F. GORII, Amst. 1752). Ex recentioribus autem, qui tradunt, se ipsa pontis rudera vidisse, excitandus inprimis comes L. F. MARSILLIUS, qui ita de eo loquitur: » certum est, quod in eo ex lapide » formatum nihil praeter pilas: superior autem adhuc superstes pars tam arcuum quam » pavimenti est continua quaedam series trabium, magnitudini pilarum respondens, quas » hodieque illaesas videre est in ambabus Danubii ripis, et quae (si recte volumus » judicare) nunquam sufficere poterant fulciendis vastis illis arcubus lapideis, tantopere » a DIONE celebratis." (Vid. Ejus *Epist de ponte sub imp. Traj. sup. Danubium exstructo*, in *Nov. Thes. Ant. Rom. auct.* SALENGRÉ, T. II. pag. 990—994.) Narrat MARSILLIUS, fluvium 1000 passus latum esse, et quia primae ad ripam pilae adhuc superstites 100 fere pedes a se invicem distant, inde concludit, simile spatium inter binas quasque pilas interfuisse. Quod MARSILLII testimonium magni nobis esset ponderis, si constaret, eum verum pontis locum invenisse; haec tamen res non omni dubio caret: neque enim Geographi, qui diu post MARSILLIUM fuerunt, de loco, in quo olim pons fuerit, consentiunt; ita D'ANVILLIUS locum citat, qui vocatur *Ram*, quatuor milliaria supra urbem *Orsovam*; contra BUSCHINGIUS pontem inter *Zernigrad* et *Czernecz*, duo milliaria infra Orsovam, ponit (Conf. BUSCH., *Géogr.* Amst. 1790. *Deel* I. St. 2. bl. 1183). Quae diversitas eo magis miranda, quia omnes consentiunt, adhuc superesse rudera Trajanini pontis.

Denique, quod ad ipsam DIONIS narrationem, animadvertendum videtur ad pilarum altitudinem, quam 150 pedum facit, i. e. tantam, ut credibilis vix videatur, quia non probabile est, Danubii ripas tantum supra aquas eminere.

utilissimâ *Fratrum Pontificalium* societate, tum vero largiendis indulgentiis, quarum reditus ad exstruendos pontes impenderentur.

Ex medii aevi pontibus si minus antiquissimus, certe celeberrimus omnium est pons Avenionensis in Rhodano, inchoatus a *Benezeto*. *Benezetus* ille, ut narratur, pauper bubulcus ex loco Hauvilar in regione Vivarais anno 1177 ecclesiam Cathedralem intrat Avenionensem, dum Episcopus populum, Eclipsi solari perterritum, adhortationibus metu liberare conatur. Exclamat, sibi a Deo mandatum, ut pontem in Rhodano struat. Episcopus quasi insanientem mittit ad oppidi magistratum, qui ludibrii causa eum operis initium facere jubet ab ingenti saxo in fluminis ripâ forte jacenti, quem vix triginta viri e loco summovissent. *Benezetus* reverâ saxum loco movet; adstantes omnes miraculo perculsi rem mirantur, virum a coelo missum fatentur, manusque operi admovent. Quidquid autem de hac narratione putandum, illud certum est, pontem exstructum atque anno 1187 sive 1188 perfectum fuisse. Eodem fere tempore plures tum in Galliâ, tum in aliis Europae regionibus exstiterunt pontes: nobilissimi Guillotierius et Sancti Spiritûs pontes saeculo XIII in Rhodano sunt strati: saeculo XII apud Germanos aedificatus est pons Reginensis in Danubio et Dresdensis in Albi; apud Anglos celebrem illum veterem pontem Londinensem legimus anno 1176 inchoatum, et saeculo XIII Rochesteriensem et Novo-Castellanum exstructos esse; denique eodem saeculo XII vixit in Sueciâ *Benedictus*, Skarae Episcopus (1), quem plurium pontium auctorem fuisse perhibent.

Ad hosce medii aevi pontes duplicem ob causam nobis animadvertendum est: primum enim qui maximi hodieque exstant pontes, iidem sunt vetustissimi, atque jam saeculo XII aut XIII exstructi, veluti Guillotierius et Sancti Spiritûs. Quod ut quale sit pateat, in sequentem tabulam pontes omnes, qui nobis innotuerunt, lapideos contulimus, ducentorum metrorum aut majorem longitudinem habentes.

---

(1) Conf. *Encyclop. Ersch-Gruberiana* in voce *Brückenbrüder.*

ANNUS.	NOMEN PONTIS.	FLUVIUS.	ARCHITECTUS.	NUMERUS ARCUUM.	LONGITUDO PONTIS (1).	*OBSERVANDA.*
P. Christ.	*Pontes antiquiores.*					
1135	Regensburger-Brücke	Donau		15	303$^{met.}$	
1176—1209	Old London-Bridge (2)	Thames	PETRUS COLCHESTER,	19	275^{m}	
1177—1187	Pont d'Avignon	Rhône		21	900^{m}	
1179	Dresdener-Brücke.	Elbe	(FOTIUS?)	23	441^{m}	
1245	Pont de la Guillotière	Rhône		18	570^{m}	
1285—1305	Pont du S^{t}. Esprit (3)	Rhône		25	820^{m}	
1358	Prager-Brücke (4)	Moldau		18	520^{m}	
1543—1632	Pont de Toulouse	Garonne	SOUFFRON,	7	228^{m}	
1578—1604.	Pont-neuf (5)	Seine	CERCEAU et MARCHAND,	12	—	Cuncti arcus habent aperturam 185^{m}.
	Pontes recentiores.					
1720	Pont de Blois	Loire	GABRIEL et PITROU,	11	285^{m}	Demtis molibus.
1738—1750	Westminster-Bridge	Thames	CH. LABELYE,	15	373^{m}	
1740	Pont de Charmes	Moesel		12		Cunctorum arcuum apertura = 216^{m}.
1751—1760	Pont d'Orléans	Loire	HUPEAU et SOYER,	9	325^{m}	
1755—1762	Pont de Tours	Loire	BAYEUX,	15	434^{m}	Demtis molibus.
1756—1764	Pont de Saumur	Loire	VOGLIE et DE CESSART,	12	277^{m}	Demtis molibus.
1756—1764	Pont de Moulins	Allier	REGEMORTE,	13	296^{m}	Demtis molibus.
1760—1776	Blackfriars-Bridge	Thames	ROB. MYLNE,	9	287^{m}	
1768—1774	Pont de Neuilly	Seine	PERRONET,	5	233^{m}	Cunctorum arcuum apertura = 164^{m}.
1789	Pont de Roanne	Loire		7		
1809—1827	Boffalore Ponte (6)	Ticino	STEPH. MELCHIORI et GIANELLA,	11	304^{m}	Demtis molibus.
1814—1817	Waterloo-Bridge	Thames	J. RENNIE,	9	379^{m}	
1815—1822	Pont de Bordeaux (7)	Garonne		17	587^{m}	
1824	New London-Bridge (8)	Thames	J. et G. RENNIE,	5	290^{m}	

(1) Longitudines hae pleraeque utrum accuratae sint, dubium est: differunt enim de eâ saepe auctores, et saepe incertum, quânam mensurâ longitudines indicentur. Idem valet de tabulâ sequenti. Gallicorum pontium mensuras fere ex GAUTHEYO sumsi, Germanorum ex WIEBEKINGIO, Anglorum ex WIEBEKINGII filii relatione, insertâ tomo IV operis paterni.

(2) In hujus pontis mensuris tradendis mirum in modum differunt auctores, WIEBEKINGIUS, GAUTHEYUS, MOLLIUS, *Encyclopaedia Metropolitana*, DAVYUS. Verosimillima mihi est visa longitudo supra scripta.

(3) WIEBEK. T. III. p. 501 ait hunc pontem exstructum esse annis 1265—1285: quod non ita videtur, siquidem GAUTHEYUS affert documentum Mss. in spitalio hodieque asservatum, quo anni 1285—1305 citantur.

(4) WIEBEK. T. III. p. 537. GAUTHEYUS habet annum 1638, et tamen consentit cum WIEB. narrante, pontem exstrui coepisse *Carolo* IV in Germaniâ imperante; fuit autem ille imperator ab anno 1346 ad 1378.

(5) GAUTH. T. I. p. 65 ait hunc pontem habere tantum 10 arcus, in figurâ autem reverâ sunt 12, atque cum eâ consentit BATSCH, *Hydrotechn. Wander.* 2es Heft. Weim. 1825. p. 27.

(6) Conf. *Annal. Univ. di Statist. Econ. Publ.* Vol. IX. Jul. 1826 p. 71, atque hinc excerpta in *Bullet. des Scienc. Technolog.* Juill. 1828. N^{o}. 59.

(7) Conf. *Bull. de Scienc. Technolog.* Juill. 1828.

(8) Longitudinem sumsi a tabulâ hujus pontis pictâ, Londini editâ anno 1827.

Tum vero arte paulatim progrediente saeculo XIV et XV pontes uno arcu exstructi sunt, quorum apertura maximos quosque recentiores aequat, imo vero superat; ut docet sequens tabula, quae continet maximos utriusque aetatis arcus, aperturâ triginta quinque metris majori.

Annus.	NOMEN PONTIS.	Fluvius.	ARCHITECTUS.	APERTURAE altitudo.	APERTURAE latitudo.	CURVA.
	Pontes antiquiores.					
1336	Pont de Céret	Tech		$22^{m},5$	45^{m}	Semi-circulus.
1354	Ponte di Vérona	Adige		$10^{m},88$	$48^{m},73$	
14....	Pont de Villeneuve d'Agen	Lot		$18^{m},84$	$35^{m},1$	Semi-circulus.
1454	Pont de Vieille-Brioude	Allier	Grénier et Estone,	21^{m}	$54^{m},2$	Unius circuli arcus.
1545	Pont de Tournon	Doux	Architectus Italus,	$19^{m},82$	$47^{m},8$	Unius circuli arcus.
1611	Pont de Claix	Drac		$16^{m},24$	$45^{m},8$	Unius circuli arcus.
	Pontes recentiores.					
1732	Pont des Têtes	Durance	Henriana,	19^{m}	38^{m}	Fere semi-circulus.
1755	Pont-y-Pryd (1)	Taaf	W. Edwards.	$10^{m},67$	$42^{m},67$	Unius circuli arcus.
1757—1765	Pont de Mantes	Seine	Hupeau et Perronet,	$11^{m},37$ $10^{m},88$	39^{m} $35^{m},1$	Ex 11 centris ducta.
1768—1774	Pont de Neuilly	Seine	Perronet,	$9^{m},75$	39^{m}	Ex 11 centris ducta.
1775	Pont de Lavaur.	Agoût	Saget,	—	$48^{m},7$	Ex pluribus centris ducta.
1777—1793	Pont de Gignac	Hérault	Garipuy,	$13^{m},32$	$48^{m},7$	id.
1785	Pont de Rumilly	Chéran	Garella,	$19^{m},5$	39^{m}	Semi-circulus.
17....	Pont de Vizile	Romanche	Bouchet,	$11^{m},69$	$41^{m},9$	Ex pluribus centris ducta.
post 1801	Aberdeen-Bridge	Dee	Telford,	$8^{m},84$	$39^{m},62$	id.
1814—1817	Waterloo-Bridge	Thames	J. Rennie,	$9^{m},14$	$36^{m},58$	Ex pluribus centris ducta.
1824	New London-Bridge	Thames	J. et G. Rennie,	$9^{m},75$ $9^{m},14$ $7^{m},62$	$45^{m},72$ $42^{m},67$ $39^{m},62$	Ex pluribus centris ducta.

(1) Gautheyus (T. I. p. 30.) aperturae latitudinem facit = 41^{m}. Equidem Anglos secutus sum. Cf. Savage, *on bridge building.*

Quamvis igitur vetustiores architecti eorum successoribus palmam praeripuerunt, et in immensis longitudine pontibus sternendis, et in maximae aperturae arcubus aedificandis, negari tamen non potest, recentissimâ aetate, inprimis ab instituto initio saeculi XVIII Gallorum Pontificum Collegio (Corps Royal des

Ingenieurs des Ponts et Chaussées), magnos progressus fecisse pontium struendorum artem. Quum enim medio aevo pontes temere ac secundum nullam normam videantur exstructi, ab eo inde tempore haec ars coepta est ad certa quaedam praecepta redigi, et ex multorum saeculorum usu, et ex disciplinae ratione desumta.

Videamus jam, quid in priorum pontium structurâ sit reprehendendum, et ad quid prae caeteris in ponte aedificando animadverti debeat.

Antea fere architecti, sive potius artifices aut operarii, pontis struendi negotium suscipiebant, naturae fluminis cui imponebatur nullâ habitâ ratione. Saepe aut longiorem faciebant pontem, quam pro fluminis latitudine opus erat, et multum operae atque impensarum frustra adhibebant; aut fluvium, pro parte latitudinis saxis et humo impletum, ut sumtibus parcerent, ponte breviore jungebant; aut plurimis pilis crassis arcus minores superstruebant, quibus fluctus retinebantur. Ita diminutâ supra pontem fluminis velocitate, quaecunque aquis suspensa ferebantur considebant; unde exsurgente alveo aquae superficies attollebatur, et fluvius imbribus auctus saepe regionem ad pontem sitam inundabat. Saepe etiam minores arcus, per quos majora navigia transire non possent, fluvium navigationi inutilem reddebant: denique ipsae saepe aquae, quod supra diximus, pontem magna vi percussum destruebant.

Quorum fere vitiorum exemplum praebet vetus Londinensis pons. Annis 1176 ad 1209 a *Petro Colchesteriensi* factus, 275 metra longus erat, et constabat viginti arcubus, qui parvas aperturas habebant, et superstructi erant pilis, quinque ad septem metra crassis: pilae autem sustinebantur palis in fundum fluminis fistucatis, aliquot pedes supra fundum serrâ abscissis, et aliis palis certo intervallo circumdatis: intervalla inter palos calce, lapidibus et ruderibus completa erant; unde exstiterant crepidines (Angl. *starlings*), insanae substructionum moles, pilas amplitudine multum excedentes, et tantam fluvii partem occupantes, ut aqua, his angustiis impedita, et supra pontem et sub eo altior vulgo esset quam infra. Huc cum accederet naturalis fluvii declivitas, fluctus vehementior efficiebatur, qui fundum continue corrodebat. Ut hoc impediretur, ipsi fundo sub arcubus pali sunt infixi: quod quamvis omnino necessarium esset, iterum aperturam aquis patentem tantopere diminuebat, ut expertissimus *Labelyus* anno 1746 inveniret, crepidines cum his simul palis flumini ex 275^{m} latitudine tantum 60^{m} ($196\frac{2}{3}^{ped}$) spatium reliquisse, et cataractam $1,^{m}45$ ($4\frac{3}{4}^{ped}$) altam sub ponte exstitisse, quae minoribus quoque scaphis transeuntibus periculum faceret. Itaque quum solide contra aquarum vim pons ille firmatus videretur, tamen patuit, examine totius pontis eo anno instituto, tanta damna resarcienda esse, ut supra 80,000 librarum Sterl. sequentibus annis ei operi impensa fuerint. Ut enim quodammodo malo medela afferretur, i. e. ut liberior transitus aquis aperiretur, anno 1758 pro duobus mediis arcubus unus multo major, 22^{m} (72^{ped}) patens, substitutus est. Neque tamen malum cessabat: nam iterato anno 1811, i. e. post 43 tantum annos, examine, cognitum est, fluminis impetum plures crepidines fere totas abstulisse, et in arcubus vacillantibus varias adesse fissuras, certam ponti ruinam minitantes: quamvis igitur per plures adhuc annos resarciendo rem distulerint ejus pontis praefecti, denique eo ventum est, et omnino veniri debuit, ut ante hos paucos annos magistratus Londinenses decreverint totum pontem auferre, novumque in ejus locum sufficere, qui quinque arcubus latioribus, cunctis 210^{m} aperturam habentibus, compositus, multo minore mole, firmior et pulchrior et ad flumen accommodatior erit (1).

Recentiores igitur, hoc similibusque exemplis edocti, antequam pontem sternere aggrediantur, quinam probabiles sint fluvii in pontem et pontis in flumen effectus perpendunt. Quumque veteres arcus crassissimis pilis superstruerent, ipsos arcus crassissimos facerent, eosque molibus in utrâque fluminis ripâ maximis fulcirent:

---

(1) Cf. WIEBEK. T. IV. pag. 185—192, et inprimis C. DAVY, *A descriptive account of the bridges over the Thames*, in *the Mechanics Magazine*, *Sept.* et *Oct.* 1829. Ejusmodi exempla qui plura velit, adeat auctores qui historiam pontium scripserunt, inprimis GAUTHEYUM et WIEBEKINGIUM. Ita ex. gr. WIEBEK. (T. III. p. 537) narrat, sex pilas pontis Dresdensis, quia nimium crassae fluminis transitum impediebant, suffossas et abreptas fuisse. Item p. 538—539 de ponte Reginensi. In genere ex historiâ pontium, qui corruerunt, patet, plurimos ideo corruisse, quia flumen, sub ponte alveo angustiore inclusum, majore celeritate vectum materias fundamentis pilarum circumfusas paulatim abluit et abstulit, ut postea pilas suffossas facili negotio labefactaret. Cf. quoque PERELLI in *Raccolta d'autori, che trattano del moto dell' acque*. Ed. II. Tom X. p. 209 seqq.

recentiores, cogitantes, quibusnam viribus aedificium contineatur, quibus disjungatur, certis principiis determinare studuerunt, quae esse deberet arcuum forma, quaeque eorum pro variâ aperturae latitudine et altitudine crassitudo in vertice, sive potius, quaenam inter hasce mensuras necessario intercedere deberet ratio. Quâ rite definitâ, facili negotio inde determinari potest, quae formae atque mensurae pilis molibusque pontem fulcientibus sint tribuendae. Ita justâ partium proportione id effecerunt, ut eandem, imo majorem firmitatem operi pararent, mensuras autem minores adhibentes materiae et sumtibus sapienter parcerent, et simul pulcherrima artis monumenta conderent.

Verum alii architecti aliter de hisce formis et proportionibus statuerunt, neque adhuc eo pervenisse dici possunt, ut unam quamdam et optimam normam omnes sequantur.

Primum enim, quod ad formam arcuum attinet, a quo inde tempore semicirculi cum aliis curvis commutari coeperunt, quae aperturae pontis majorem latitudinem cum minore altitudine tribuerent, magnus erat curvarum linearum numerus, quibus hisce conditionibus satisfieri poterat. Ita alii putarunt, si filum libere a duabus clavis suspendatur, curvâ, quam filum ejusmodi assumat, inversâ, ita ut convexitas sursum vertatur, optimam fornicis formam indicari (1). Alii curvam composuerunt ex trium circulorum arcubus; quorum medius magno radio describebatur, extremi duo, minoribus et sibi aequalibus radiis descripti, infimum fornicem ab utrâque parte determinabant (2). Alii, ulterius in hac

---

(1) Curvam hanc, *catenariam* dictam, pontium arcubus esse adhibendam, primus, ut videtur, affirmavit HOOKIUS (vid. J. SAVAGE in *Essays of the London architectural Society* Vol. II. 1811 Lond. p. 145.) Varia huc pertinentia disputata sunt a DAV. GREGORIO (*Philos. Transact.* 1697 N° 231) JAC. BERNOUILLIO (*Oper.* Tom. II. p. 1119) COUPLETIO (*Mém. de Paris* 1729) et KRAFFTIO (*Nov. Comm. Petropol.* T. IV. p. 207—209).

(2) Curvam ex tribus centris ductam invenimus apud BLONDELIUM (*Cours d'Architect* L. IV. c. 6); aliam ejusmodi curvae ducendae rationem apud PITOTIUM (*Mém. de Paris* 1726. pag. 220). BLONDELIUS tria centra ita disposuit, ut essent anguli trianguli aequicruralis, PITOTIUS, ut oriretur triangulum aequilaterale. De utrâque methodo egregie disputavit KRAFFTIUS (l. c. pag. 216 seqq). Conf. quoque GAUTHEYUS l. c. T. I. pag. 247 et seqq.

describendi ratione progressi, curvam, ductis ex quinque centris arcubus, composuerunt; alii ex septem centris. Tandem PERRONETIUS ex undecim centris curvam duxit, eam semper legem secutus, ut medius ex illis arcubus maximo radio describeretur, proximus illi ab utrâque parte minore, atque sic porro radiis a medio ad imum arcum decrescentibus. Quâ curvae formâ id effecit, ut aperturae pro aequali latitudine et altitudine majores essent, et facilior inde aquis auctis transitus (1). Denique idem PERRONETIUS, ad simpliciorem formam reversus, unius circuli, maximo radio descripti, arcum latissimum sumsit, eumque, ut satis supra aquas assurgeret, pilis multo quam ante altioribus imposuit. Qui postea majores pontes aedificarunt, modo hanc modo aliam formam elegerunt (2).

Tum vero, quod ad crassitudinem fornicis in medio arcu attinet, non minus varia praecepta apud varios auctores reperiemus. Antiquiores architecti, Itali v. c., quum eam fecissent 12^{mam}, 15^{mam} aut 17^{mam} partem aperturae arcûs, primus BELIDORIUS eam non tantam esse debere statuit. Praecipit enim, ut crassitudo in vertice in arcu semicirculato fiat $= \frac{1}{24}^{\text{mae}}$ diametri parti, in arcu latius patente $= \frac{1}{12}^{\text{mae}}$ ejus radii, quo summa arcûs pars descripta est. (3). PERRONETIUS hoc praeceptum ita mutavit, ut 24^{mae} diametri parti adderet unum

---

(1) Curva ex quinque centris ducta reperitur apud GAUTHEYUM l. c. T. I. pag. 251, ubi radius secundi et quarti arcûs aequalis fit radici ex producto radiorum tertii et primi sive quinti arcûs. PERRONETIUS curvam ex undecim centris ductam descripsit operis sui (Edit. formae maximae) T. I. p. 55 seqq.

(2) Primus pons, in quo curva arcûs esset pars unius circuli, factus est in flumine *Oignon*, dictusque *Pont de Pesmes* (GAUTH. l. c. T. I. p. 91. Pl. VII. fig. 123): in eo aperturae latitudo est ad altitudinem uti 12 : 1. Fornices latiores deinde sunt exstructi, in quibus aperturae altitudo esset tantum 13^{ma}, 14^{ma} latitudinis pars, uti Pons *Ludovici XVI* in Sequanâ, *Pont St. Maixence*, *Pont de Pontoise*, alii: omnes vero superavit ille, quem anno 1805 celeb. BOISTARDIUS in flumine *Loing* exstruxit, cujusque apertura cum sit 50 ped. lata, 3 autem tantum alta, facit eandem proportionem uti 16,7 ad unitatem. (Conf. *Expériences sur la main d'oeuvre, par* L. C. BOISTARD, Paris 1804 in 4^{to}).

(3) *Archit. Hydraul.* T. IV. pag. 445.

pedem, demeret autem tot lineas, quot pedes haberet diameter (1). A PERRONETIO hoc praeceptum recentiores sumserunt (2); illud vero neque antea, neque his temporibus secutos esse pontium constructores diserte patet ex tabulâ, in WIEBEKINGII opere exhibitâ, qua continentur praecipuorum pontium mensurae: ex eâ enim videmus, crassitudinem fornicis in vertice interdum octavam aperturae partem esse, interdum vero etiam 30^{mam}, imo 40^{mam} et 50^{mam}. Neque mirum, siquidem ipse GAUTHEYUS, vir harum rerum peritissimus, ait: crassitudinem pontis in vertice vix videri uno praecepto posse definiri (3).

Quum igitur tam variae sint celebrium virorum sententiae, mihi propositum est, certam quamdam, si fieri possit, constituere normam, quam in aedificando camerato ponte architectus sequi et debeat et possit.

Felicissimum autem me praedicabo, si opera, a me hac in re posita, a viris peritis praxi non inutilis plane judicetur.

---

(1) *Description des Ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans* etc. Paris 1782. Edit. form. maxim. T. III. p. 21.

(2) Uti SGANZIN, *Cours de Construction*, 3e Edit. 1821. pag. 146.

(3) L. c. T. I. pag. 164. Similem architectorum dissensum animadvertimus in determinandâ pilarum et molium crassitudine; de hoc vero argumento, quia in ipsâ dissertatione non egimus, hoc quoque loco fusius loquendum non videtur.

§ 1.

Argumentum exponitur.

Ut problematis propositi natura clare perspiciatur, initium faciendum est ab enumerandis viribus in quovis ponte agentibus, quarum aliae ad firmandum, aliae ad labefactandum aedificium faciunt. Siquidem autem in ponte, e pluribus arcubus composito, eadem valent, quae de singulis arcubus sunt dicenda, pro toto ponte arcum unicum sumemus. Prima vis est pondus ipsius arcûs. Sustinetur hoc partim pilis, in fluminis alveo positis, partim molibus in utrâque ripâ exstructis. Pondere arcûs ac pilarum premitur alveus fluvii, atque, ut hoc pondere non deprimatur, hunc satis compactum ac firmum esse oportet. Arcus ponderis pressione obliquâ sive a latere (*door zijdelingsche drukking*) simul agit in moles arcum fulcientes; oportet igitur, ut moles illae pressionem sustinere valeant. Moles suâ vice renitentes arcum premunt, quae pressio quando nimia fit, materia, ex qua conficitur arcus, quaeque duritie suâ determinatae tantum pressioni resistere potest, victa cedit, atque arcus corruit; justa igitur proportio esse debet inter pressionem illam et materiae duritiem. Homines et animalia pontem transeuntes atque onera super pontem vecta suum ei pondus addunt; neque his resistere possit pons, nisi et frictione et cohaerentiâ, quae ex impensis caementisque oritur, partes arctissime conjungantur; oportet igitur denique, ut summa onera, quae ponti unquam sint imponenda, hisce ferri possint (1).

(1) Non omnes vires, quae in pontem agere possunt, enumeravimus: fieri potest, ut terra, post molem sita, humida facta maximâ vi premat in molem, atque hac pressione

Jam videamus, quanta sit unaquaeque vis, et secundum quam directionem agat.

Pondus arcûs aequale est ponderi unitatis cubicae materiae, multiplicato per volumen arcûs: volumen autem habetur multiplicando latitudinem arcûs per aream sectionis verticalis, quae secundum arcûs longitudinem sumitur; quum vero et pondus specificum materiae et latitudo pontis sint quantitates constantes, pondus arcûs erit in proportione cum areâ sectionis verticalis, et hanc ejus loco substituere possumus.

Sit fig. 1. ejus sectio verticalis secundum longitudinem arcûs sumta:

b a b′ curva, quae est intersectio hujus plani verticalis cum superficie fornicis superiore, nobis *curva dorsi*, (Gall. *extrados*).

d c d′ curva, quae est intersectio ejusdem plani cum superficie arcûs inferiore, nobis *curva arcûs* (Gall. *intrados*, Belg. *toog*).

b d et b′d′, intersectiones rectilineae ejusdem plani cum lateribus camerae, nobis dictae *pulvinaria* (Gall. *coussinets*). Haec latera sive pulvinaria sustinentur sive *pilis* (Gall. *piles*, Belg. *regtstanden*), sive *molibus* (Gall. *culées*, Belg. *landhoofden*).

a Y linea verticalis, per summum arcum ducta, atque sectionem in duas partes aequales dividens. Erit igitur arcûs pondus vis verticalis, secundum a Y deorsum agens, atque aequalis areae b d d′b′.

Pondus hoc 2G sustinetur molibus, plana b d et b′d′ fulcientibus: quum vero hae moles agant in latera secundum directiones lineis b d et b′d′ perpendiculares, earum actionem nobis proponimus tamquam duas vires D′ et D″ ad normam in laterum quibusdam punctis g et g′ applicatas, et his viribus assumtis ipsas moles in posterum omittemus.

Prima aequilibrii conditio igitur est haec, ut vis composita ex utrâque vi

corruat arcus; quod factum esse in ponte Coalbrookdaliano auctor est WIEBEKINGIUS fil. (T. IV. p. 217.). Fieri potest, ut fluvius in pontem illidens eum disrumpat, quod sexcenties factum esse testes sunt omnium gentium historiae. Itaque oportet his quoque viribus resistere posse pontem firmiter exstructum. Sed non faciunt ad determinanda ea, quae sola a nobis quaeruntur; itaque jure videntur hoc loco omittenda, atque ad universam quaestionem de mutuâ fluminis et pontis actione releganda.

D' et D'' aequalis sit et directe opposita ponderi $2G$; quae ex hac conditione oritur aequatio, sufficiet ad cognoscendam quantitatem virium D' et D'', ad determinandum igitur, quantum moles ferant oporteat.

Quodsi fornix ex massâ unicâ, neque ullâ vi disrumpendâ, constaret, hac primâ conditione omne aequilibrium contineretur. Sed constat fornix ex *cuneis* (Gall. *voussoirs*, Belg. *wulfsteenen*,) qui juxta se invicem positi mutuâ pressione continentur; si igitur $b''d''$ sit junctura quaevis, sive potius intersectio plani nostri verticalis cum plano juncturae, oportet ut vires in parte $b'd'd''b''$ agentes in aequilibrio sint cum pressione, quâ reliqua pars $b\,d\,d''b''$ in eam agit: atqui, primo, est haec pressio semper normalis juncturae $b''d''$; itaque vis composita ex viribus in parte $b'd'd''b''$ agentibus juncturae $d''b''$ normalis sit oportet: quod cum valeat pro singulis juncturis, quae plurimae in fornice adsunt, *secundam* aequilibrii conditionem hanc habemus, ut vis composita ex viribus in quâvis fornicis parte agentibus semper sit normalis juncturae, quâ haec pars terminatur. Verum secundo, ut haec composita vis reverâ oppositae pressionis actione in aequilibrium redigatur, *tertia* aequilibrii conditio praecipit, ut punctum, in quo sibi invicem oppositae agere debent, sive punctum applicationis, positum sit in juncturâ $b''d''$ inter puncta b'' et d'', neque supra b'' in $b''\beta''$, aut infra d'' in $d''\delta''$. Quod nisi fiat, rotatio partium circa punctum b'' aut d'' locum habebit (1).

Ponamus, in summo fornice juncturam esse $a\,c$, quâ fornix in duas partes aequales dividatur. Sit

$Z'Z''$ verticalis, in quâ centrum gravitatis dimidii fornicis $a\,b'd'c$ sit positum. Adsunt jam in hanc partem agentes duae vires, D'' secundum $i'g'$, et pondus G dimidii arcus secundum $Z'Z''$. Transferamus D'' et G in punctum z, in quo earum directiones se invicem secant, et componamus eas; composita igitur D, ut normali pressioni alterius partis $a\,b\,d\,c$ aequipolleat, ad perpendiculum esse debet cum juncturâ verticali $a\,c$; itaque secundum horizontalem directionem agat

(1) Hanc tertiam aequilibrii conditionem indicavit COULOMBIUS (*Mémoires de Math. et de Phys.* ann. 1773. p. 346), atque primus docuit, quid valeat ad formam arcûs determinandam.

oportet, et praeterea transeat a c intra a et c. Licebit igitur explorare dimidii tantum aequilibrium arcûs, pro alterius dimidii actione adsumtâ vi horizontali D, in puncto quodam e mediae juncturae agente.

Sumamus igitur dimidium fornicem a b d c, atque in eo iterum juncturam $b''d''$: agunt in parte superiore a $b''d''$c pressio horizontalis D, et pondus partis a $b''d''$c, quarum virium composita, quia in aequilibrio esse debet cum pressione partis inferioris b $b''d''$d, directionem habere debet juncturae $b''d''$ normalem, atque intra b'' et d'' eam secantem.

Hac tertiâ conditione determinatur pondus hujus partis, sive area sectionis a $b''d''$c. Area autem definitur formâ curvae dorsi, curvae arcûs, et directione juncturarum fornicem terminantium. Igitur cognitâ areâ, et ex tribus hisce duobus datis tertium determinari poterit.

Sumamus nunc juncturam proxime inferiorem $b'''d'''$, ut sit $b''d''d'''b'''$ unus tantum cuneus; sustinetur hic ab utrâque parte pressione partium a c $b''d''$ et b $b'''d'''$d, alterâ pressione juncturae $b''d''$ normali, juncturae $b'''d'''$ alterâ; composita autem ex utrâque vis aequalis esse debet ponderi cunei, eique directe opposita. Pressio in juncturam $b'''d'''$ igitur determinari poterit componendâ pressione in juncturam $b''d''$ agente cum pondere cunei, sive etiam, quia haec pressio iterum ex compositione pressionis horizontalis D et ponderis partis a c $b''d''$ orta est, componendo toto pondere partium a c $b''d''$ + cunei $b''d''d'''b'''$ cum horizontali pressione. Quomodocunque autem vires componamus, semper patet, singulos cuneos comprimi duabus pressionibus in ejus latera agentibus. Atqui omnis materiae, quae ad aedificandum adhibetur, ea est natura, ut tantum certam quandam pressionem sustinere valeat; pressione autem hanc excedente in partes tenuissimas disrumpatur. Quod ne in fornice contingat, oportet, ut satisfiat *quartae* huic aequilibrii conditioni, quâ jubetur, ut per totum fornicem vis cohaesionis, quae ex materiae duritie oritur, superet pressionem juncturis perpendicularem.

Fieri potest, ut arcus secundum lineam quamvis f f′ divellatur: fieri hoc debebit, quando vis cohaesionis, secundum hanc lineam partes conjungens, minor erit quam virium in fornice agentium composita vis, decomposita secundum directionem dictae lineae. Igitur videndum est *quinto*, ut ductâ quâvis lineâ per fornicem semper vires continentes majores sint, quam illae, quae divellere conantur.

Duae hae conditiones, quarta atque quinta, siquidem a duritie materiae pendent, varias determinationes praebebunt pro pontibus ex variis materiis exstruendis.

Quamvis autem fornix his conditionibus satisfaciat, nondum ab omni periculo tutus erit. Fornicis partes inter se et cum molibus erunt in aequilibrio, sed oportet quoque, ut possit pons ferre pondera hominum, animantium, curruum transeuntium. Estque hocce onus nova vis, eaque mutabilis, modo major, modo minor, saepe nulla: igitur aequilibrium, absque eâ constitutum, eâ agente disrumpitur: si vero partes pontis ita sint constitutae, ut sub onere determinato, ex. gr. 100,000 Kil., in aequilibrio sint, iterum aequilibrium deerit, quoties aut nullo, aut minore pondere premetur pons. Quâ igitur vi agente, ut possit tamen aequilibrium subsistere, adesse debet ei opposita in ipso ponte alia vis mutabilis, quae singulis temporibus tantum resistat, quantum oneris arcum premit. Haec vis reverâ adest; oritur ex frictione partium, quae aliquatenus motui resistet, atque ex cohaesione, quae ex calce caementoque inter cuneos interposito exsistit. Sed possunt haec frictio atque cohaesio tantum aliquatenus motui sese opponere: ut igitur arcus perduret, oportet *sexto*, ut frictio atque cohaesio maxima pondera, quae unquam arcus sit gesturus, possint sustinere.

§ 2.

Formulae generales.

Quaerendae nunc sunt aequationes, quibus conditiones illae contineantur. Habemus pro dimidio arcu Systema trium virium D, D′ et G in plano verticali agentium, quae secum invicem in aequilibrio debent esse. Hocce aequilibrium continetur tribus aequationibus (1), quarum duabus illud indicatur, si vires omnes decomponamus secundum duos axes sibi invicem perpendiculares, summam decompositarum cuique axi parallelarum $=$ o esse; tertiâ indicatur, summam momentorum virium omnium pro quovis puncto in plano sito $=$ o esse.

Sumamus originem axium in summo et medio puncto a (fig. 2.) curvae dorsi, axem abscissarum a X horizontalem, axem ordinatarum a Y verticalem, et computentur abscissae positivae ab a sinistrorsum, ordinatae positivae ab a deorsum. Sint porro

x' et y', coördinatae puncti cujusvis b curvae dorsi,

x et y, coördinatae puncti d curvae arcûs, in eâdem cum b juncturâ siti,

u et v, coördinatae puncti applicationis vis D′ ad juncturam b d.

α, coördinata horizontalis centri gravitatis partis a b d c.

d, coordinata verticalis (a e) puncti applicationis pressionis horizontalis D ad mediam juncturam.

μ, angulus juncturae b d cum verticali.

μ', angulus compositae D′ cum verticali, quando non normalis est ad juncturam b d,

e, crassitudo fornicis in vertice (a c).

Quum D sit horizontalis, et G verticalis, tantum decomponenda est vis D′. Sed est D, ex 2da aequilibrii conditione (pag. 21.), normalis juncturae b d; itaque angulus ejus directionis cum verticali est $= 90^{\circ} - \mu$, et sunt decompositae

$$\text{secundum a X} = D' \operatorname{Cos}\mu,$$
$$\text{« a Y} = D' \operatorname{Sin}\mu.$$

(1) Conf. POISSON. *Traité de Mécan.* T. I. p. 65.

Habemus igitur

$$D + D' \operatorname{Cos}\mu = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

$$G + D' \operatorname{Sin}\mu = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

$$D\,d + D'\,v \operatorname{Cos}\mu - G\,\alpha - D'\,u \operatorname{Sin}\mu = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (3)$$

Vis G aequalis ponitur areae a b d c. Atqui

$$a\,b\,d\,c = a\,c\,d\,l + d\,l\,n\,b - a\,b\,n.$$

$$a\,c\,d\,l = \int y\,dx$$

$$d\,l\,n\,b = \tfrac{1}{2}\,(y' + y)\,(x' - x)$$

$$a\,b\,n = \int y'dx'$$

igitur

$$G = \int y\,dx - \int y'dx' + \tfrac{1}{2}\,(y' + y)\,(x' - x) \; \ldots\ldots\ldots \; (4)$$

et secundum theoriam centrorum gravitatis

$$G\,\alpha = \int y\,x\,dx' - \int y'x'dx' + \tfrac{1}{2}\,(x'^2 - x^2)\,y' + \tfrac{1}{6}\,(x' - x)\,(x' + 2\,x)\,(y - y') \; \ldots \; (5)$$

Sunt porro puncta b, g, d, in eâdem rectâ lineâ sita; itaque habemus in triangulis b h d, b h′ g, et g h″ d:

$$\frac{y - y'}{x' - x} = \frac{v - y'}{x' - u} = \frac{y - v}{u - x} = \operatorname{Cot}\mu \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

Tandem, ubivis juncturam b d in fornice ponamus; quae igitur sint variabilium y, x, y′, et x′ valores, quae sint virium G et D′ quantitates, eadem semper est pressio horizontalis, quae cum utrâque aequilibrium facit. D est igitur quantitas constans (1), et habemus $dD = 0$ .... (7)

His septem aequationibus continentur omnes rationes, quae intercedunt inter quantitates datas et quaerendas. Occurrunt in his formulis d, x′, y′, x, y, u, v, α, G, D, et D′. Quantitas d, uti postea videbimus, non pendet a reliquis (quantum attinet ad conditiones aequilibrii, quae his aequationibus indi-

---

(1) Hanc constantiam primus indicavit, eamque usurpavit ad investigandam curvae formam, J. H. LAMBERTIUS (Vid. ejus *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*. Berlin. 1772. 3er Th. S. 360. § 43); scribens: » *Nun muss der Druck in D* »(nostrâ figurâ in *e*) *von beständiger Grösse seyn, so gross oder klein man auch immer* » *den Bogen D M* (nostrâ figurâ a c b d) *annimmt.*"

cantur); igitur tamquam aliunde cognita assumitur. Habemus igitur 7 aequationes inter 10 quantitates a se invicem pendentes: quodsi inde aequationem inter duas quantitates volumus deducere, ex. gr. inter coördinatas curvae arcûs, aut dorsi, oportet, ut duae aliae dentur aequationes.

Atque reverâ his § § tria reliquimus non determinata:

1° formam curvae arcûs;

2° formam curvae dorsi;

3° directionem juncturarum.

Ex quibus, si duae cognitae erunt, habebimus 9 aequationes, et 8 quantitates eliminando ad aequationem quaesitam pervenire poterimus. Possumus igitur tres nobis proponere quaestiones:

1ª ex datâ curvâ dorsi et directione juncturarum curvam arcûs, caeteraque, uti pressionem horizontalem et normalem, invenire;

2ª datâ curvâ arcûs cum directione juncturarum invenire formam curvae dorsi; denique

3ª datâ utrâque curvâ determinare, quales esse debeant directiones juncturarum, ut adsit in fornice aequilibrium.

Fuit Nieuportius, Mathematicus sagacissimus, qui quaestionem hac triplici ratione adortus solutiones exhibuit in Commentatione egregiâ, cui titulus: «*Essai Analytique sur la Mechanique des Voûtes*" inserta Commentationibus Academiae Bruxellensis, Tom. II. p. 43—136. (Ann. 1780), eumque nos in argumenti divisione sequemur.

§ 3.

Datâ curvâ dorsi et directione juncturarum invenire formam curvae arcûs.

Plerisque in casibus, ubi pontes lapidei aedificantur, est fere superficies sive dorsum pontis planum horizontale, vel paullum tantum ab eo recedit (1). Sumimus igitur curvam dorsi tamquam lineam horizontalem, per originem coördinatarum transeuntem. Unde habemus pro ejus aequatione:

$$y' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Porro oportet, quantum ejus fieri potest, ut sint juncturae fere normales curvae arcûs; quia cuneorum anguli et latera facilius disrumpuntur, si sunt acutiores. Itaque habemus (fig. 2.) b d normalem tangenti o d p, et

$$\mathrm{Tang}\,\mu = \mathrm{Tang}\,b\,d\,h = \mathrm{Tang}\,d\,p\,l = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{x' - x}{y - y'} = \frac{x' - x}{y} = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

---

(1) Adsunt quidem plures pontes, saeculis praecedentibus exstructi, quorum dorsa sunt admodum curvata, uti pons Vicentinus, Pons Venetiis *di Rialto*, Pons in fluvio *Taaf* in Angliâ, Pons *Zwettavensis* prope Torgau in Germaniâ, aliique: sed rejiciunt fere recentiores Architecti hanc formam, quippe minus accommodatam, et nulli aut pauci ejusmodi pontes inter recentiores reperiuntur. Utque pateat nostram hypothesin minime a veritate abesse, adducemus, quae de dorsi inclinatione praecipiuntur. BELIDORIUS(*Archit. Hydr.* T. IV. p. 446) praecepit, ut esset via horizontalis, si satis aperturae navigationi relinqui posset sub medio arcu. PERRONETIUS vulgo usus est plano inclinato pro singulis hexapedis duobus pollicibus, i. e. $\frac{1}{36}$ longitudinis parte: in ponte Ludovici XVI tamen $28\frac{1}{2}$ lineis pro hexapedo inclinatur dorsum. Apud GAUTHEYUM (l. c. T. I. p. 203.) invenitur $\frac{1}{36}$; apud WIEBEKINGIUM (l. c. T. III. p. 576) $\frac{1}{60}^{ma}$; apud LANGSDORFIUM (*Anleit. z. Strass. u. Brückenbau.* Manh. 1817. T. I. p. 172) $= \frac{1}{36}$, neque unquam major, quam $\frac{1}{18}^{ma}$ pars.

Ope utriusque aequationis (8) et (9) invenienda est aequatio curvae arcûs.

Eliminando D′ ex (1) et (2), habemus

$$G = D \operatorname{Tang} \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Atqui substituendo $y' = 0$ in (4)

$$G = \int y\, dx + \tfrac{1}{2} y (x' - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Sed propter (9) $\quad x' - x = y \dfrac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$

Igitur $\quad G = \int y\, dx + \tfrac{1}{2} y^2 \dfrac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$

Verum ex (6) $\operatorname{Tang} \mu = \dfrac{x' - x}{y - y'} = \dfrac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$

Substituimus valores pro G et Tang μ in (10), et habemus

$$\int y\, dx + \tfrac{1}{2} y^2 \frac{dy}{dx} = D \frac{dy}{dx}$$

sive $\quad \int y\, dx = (D - \tfrac{1}{2} y^2) \dfrac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$

Differentiemus hanc aequationem posito $dD = 0$;

$$y\, dx = (D - \tfrac{1}{2} y^2) \frac{d^2 y}{dx} - y \frac{dy^2}{dx}$$

sive $\quad (D - \tfrac{1}{2} y^2) \dfrac{d^2 y}{dx^2} - \left(1 + y \dfrac{dy^2}{dx^2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$

Quae aequatio, ab omni aliâ variabili quantitate, praeter x et y, liberata, iteratâ integratione praebebit aequationem curvae arcûs.

Sit igitur $\quad \dfrac{dy}{dx} = p$

unde $$dx = \frac{dy}{p} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$$

quibus substitutis in (14), haec fit

$$(D - \tfrac{1}{2}y^2)\,\frac{p\,dp}{dy} - y\,(1 + p^2) = 0$$

sive $$\frac{p\,dp}{(1+p^2)} - \frac{y\,dy}{(D - \frac{1}{2}y^2)} = 0$$

et integrando, $\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + p^2) + \mathrm{Log}\,(D - \tfrac{1}{2}y^2) = \mathrm{Log}\,C$ . . . . (17)

Unde $$\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{C}{D - \frac{1}{2}y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

et $$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left\{\frac{C^2}{(D - \frac{1}{2}y^2)^2} - 1\right\}}$$

quando $y = e$ erit $\frac{dy}{dx} = 0$, igitur $\frac{C^2}{(D - \frac{1}{2}e^2)^2} - 1 = 0$ et $C = D - \frac{1}{2}e^2$;

unde tandem $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left\{\left(\frac{D - \frac{1}{2}e^2}{D - \frac{1}{2}y^2}\right)^2 - 1\right\}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}} \ . \quad (19)$$

Si substituimus hunc valorem pro $\frac{dy}{dx}$ in (15), habebimus pro areâ curvae

$$I = \int y\,dx = (D - \tfrac{1}{2}y^2)\,\frac{dy}{dx} = (D - \tfrac{1}{2}y^2)\sqrt{\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}}$$

$$= \sqrt{\{(D - \tfrac{1}{2}e^2)^2 - (D - \tfrac{1}{2}y^2)^2\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Cui aequationi nulla constans est addenda, quia, pro $y = e$, I evanescit.

Ope hujus aequationis possumus integrare $\int y\,x\,dx$ in form. (5). Nam secundum generalem reductionis formulam habemus:

$$\int y\,x\,dx = x\int y\,dx - \int dx \int y\,dx$$
$$= x\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} - \int dx\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx}$$
$$= x\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} - \int\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)dy$$
$$= x\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} - D\,y + \tfrac{1}{6}y^3 + C''$$

quando $y = e$, erit $x = 0$ et $\int y\,x\,dx = 0$, unde

$$0 = -\,D\,e + \tfrac{1}{6}e^3 + C'' \text{ et } C'' = e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right),$$

quo substituto, habemus

$$\int y\,x\,dx = x\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} - y\left(D - \tfrac{1}{6}y^2\right) + e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right) \;\ldots\ldots\; (21)$$

§ 4.

Aequatio integratur.

Ex aequatione (19) sequitur

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}}}$$

$$\text{et } x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}}} = \int \frac{(2D - y^2)\,dy}{\sqrt{\{(2D - e^2)^2 - (2D - y^2)^2\}}} \;\ldots (A)$$

(1) Quae integratio non nisi evolvendo in seriem potest effici. Pertinet haec formula (A) ad integralia, quae cognita sunt nomine *functionum Ellipticarum*,

---

(1) Hanc aequationem primus, ut videtur, dedit LAMBERTIUS (l. c. p. 375), quia vero eo tempore integrari non poterat, addit: » *mit diesen Formeln ist uich viel anzufangen.*" Post eum invenitur apud BERARDUM (*Statique des voûtes.* Paris 1810 in 4to pag. 29.), qui ait: » *equation, qui appartient à la courbe élastique. Il n'est pas douteux que les Ingénieurs devraient adopter cette courbe pour les ponts; elle leur procurerait plus de solidité, et autant d'élégance, que celles en usage.*"

quia arcus Ellipseos et Hyperbolae eorum ope computantur. Eorum integrationi multum operae tribuerunt celeberrimi EULERUS, LAGRANGIUS, et LEGENDRIUS: postremus eorum theoriam dedit in opere: *Exercices de calcul Intégral*, quam postea refusam atque tabulis instructam iterum edidit in opere: *Traité des fonctions Elliptiques et des Intégrales Eulériennes, avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique.* Paris, 1825, II Tom. in 4to. In iis, quae sequuntur, a LEGENDRIO indicatum cursum tenebimus.

Quodsi vocamus R denominatorem formulae (A), et hunc in factores resolvimus, habemus

$$R=\sqrt{\left\{(2D-e^2)-(2D-y^2)\right\}\left\{(2D-e^2)+(2D-y^2)\right\}}=\sqrt{\left\{y^2-e^2\right\}\left\{4D-e^2-y^2\right\}}\,..\,(a)$$

Ponamus $\qquad y = e\ \mathrm{Sec}\psi$ . . . . (b)

quod ponere semper licet, quia semper $y > e$ est; habebimus

$$y^2-e^2=e^2\ \mathrm{Sec}^2\psi-e^2=e^2\,\mathrm{Sec}^2\psi\,(1-\mathrm{Cos}^2\psi)=e^2\ \mathrm{Tang}^2\psi$$

et

$$4D-e^2-y^2=4D-e^2-e^2\ \mathrm{Sec}^2\psi=\mathrm{Sec}^2\psi\ \{(4D-e^2)\,\mathrm{Cos}^2\psi-e^2\}$$
$$=\mathrm{Sec}^2\psi\ \{(4D-e^2)(1-\mathrm{Sin}^2\psi)-e^2\}=\mathrm{Sec}^2\psi\ \{(4D-2e^2)-(4D-e^2)\,\mathrm{Sin}^2\psi\}$$

Porro

$$2D-y^2=2D-e^2\ \mathrm{Sec}^2\psi=\mathrm{Sec}^2\psi\ (2D\ \mathrm{Cos}^2\psi-e^2)$$
$$=\mathrm{Sec}^2\psi\,\{2D(1-\mathrm{Sin}^2\psi)-e^2\}=\mathrm{Sec}^2\psi\,(2D-e^2-2D\ \mathrm{Sin}^2\psi)$$

et $\qquad dy=d(e\ \mathrm{Sec}\psi)=\dfrac{e\ \mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Cos}^2\,\psi}\,d\psi$

quibus substitutis in (A) erit

$$x=\int\frac{(c\,2D-y^2)\,dy}{\sqrt{\{(2D-e^2)^2-(2D-y^2)^2\}}}=\int\frac{\mathrm{Sec}^2\psi\,(2D-e^2-2D\ \mathrm{Sin}^2\psi)\ e\,\mathrm{Sin}\psi\ \mathrm{Sec}^2\psi}{\sqrt{[e^2\ \mathrm{Tang}^2\psi\,\{\mathrm{Sec}^2\psi\,((4D-2e^2)-(4D-e^2)\,\mathrm{Sin}^2\psi)\}]}}\,d\psi$$

$$=\int\frac{\mathrm{Sin}\,\psi\,(2D-e^2-2D\ \mathrm{Sin}^2\psi)}{\mathrm{Cos}^4\psi\ \mathrm{Tang}\,\psi\sqrt{\{(4D-2e^2)-(4D-e^2)\mathrm{Sin}^2\psi\}}}\,d\psi=\int\frac{2D-e^2-2D\ \mathrm{Sin}^2\psi}{(1-\mathrm{Sin}^2\psi)\sqrt{\{(4D-2e^2)-(4D-e^2)\mathrm{Sin}^2\psi\}}}\,d\psi$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4D-e^2)}\int\frac{\left(\dfrac{4D-2e^2}{4D-e^2}-\dfrac{4D}{4D-e^2}\,\mathrm{Sin}^2\psi\right)}{(1-\mathrm{Sin}^2\psi)\sqrt{\left\{\dfrac{4D-2e^2}{4D-e^2}-\mathrm{Sin}^2\psi\right\}}}\,d\psi\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Sit porro

$$\frac{4\,D-2e^2}{4\,D-e^2}=c^2 \text{ et } \operatorname{Sin}\psi=c\operatorname{Sin}\phi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)\ (e)$$

Hinc fit

$$\operatorname{Cos}\psi\, d\psi=c\operatorname{Cos}\phi\, d\phi \quad \text{et } d\psi=c\frac{\operatorname{Cos}\phi}{\operatorname{Cos}\psi}\, d\phi=\frac{c\operatorname{Cos}\phi d\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}$$

$$\frac{4\,D-2\,e^2}{4\,D-e^2}-\frac{4\,D}{4\,D-e^2}\operatorname{Sin}^2\psi=c^2\frac{4\,D}{4\,D-e^2}c^2\operatorname{Sin}\phi=c^2\left(1-\frac{4\,D}{4\,D-e^2}\operatorname{Sin}^2\phi\right)$$

$$1-\operatorname{Sin}^2\psi=1-c^2\operatorname{Sin}^2\psi$$

$$\frac{4\,D-2e^2}{4\,D-e^2}-\operatorname{Sin}^2\psi=c^2-c^2\operatorname{Sin}^2\phi=c^2\operatorname{Cos}^2\phi$$

quibus substitutis in (c) habemus

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4D-e^2)}\int\frac{c^2\left\{1-\frac{4\,D}{4\,D-e^2}\operatorname{Sin}^2\phi\right\}\frac{c\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)\,c\operatorname{Cos}\phi}d\phi=\tfrac{1}{2}c^2\sqrt{(4D-e^2)}\int\frac{\left\{1-\frac{4D}{4D-e^2}\operatorname{Sin}^2\phi\right\}}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{3/2}}d\phi$$

atqui

$$\tfrac{1}{2}c^2\sqrt{(4\,D-e^2)}=\frac{(4\,D-2\,e^2)\sqrt{(4\,D-e^2)}}{2\,(4\,D-e^2)}=\frac{2\,D-e^2}{\sqrt{(4\,D-e^2)}}$$

unde

$$x=\frac{2\,D-e^2}{\sqrt{(4\,D-e^2)}}\int\frac{\left(1-\frac{4\,D}{4\,D-e^2}\operatorname{Sin}^2\phi\right)}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{3/2}}d\phi \quad\ldots\ldots\ldots (f)$$

Haec formula in partes simpliciores est resolvenda. Ponendo

$$1-\frac{4\,D}{4\,D-e^2}\operatorname{Sin}^2\phi=\alpha(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)+\beta,$$

erit $\alpha+\beta=1$ et $c^2\alpha=\dfrac{4\,D}{4\,D-e^2}$

hinc

$$\alpha=\frac{4\,D}{c^2(4\,D-e^2)}=\frac{2\,D}{2\,D-e^2} \qquad \beta=1-\alpha=-\frac{e^2}{2\,D-e^2}$$

$$x=\frac{2\,D-e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\cdot\frac{2\,D}{(2\,D-e^2)}\int\frac{1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi-\frac{2D-e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\cdot\frac{e^2}{(2D-e^2)}\int\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{3/2}}$$

$$=\frac{2\,D}{\sqrt{(4\,D-e^2)}}\int\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{1}{2}}}-\frac{e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\int\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}\quad\ldots\ldots (g)$$

Altera hujus formulae pars iterum dividi potest in duas partes simpliciores, ut patet differentiatione quantitatis $\frac{\operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2 \operatorname{Sin}^2\phi)}}$.

Nam est

$$d\frac{\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}=\frac{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}(\operatorname{Cos}^2\phi-\operatorname{Sin}^2\phi)+\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi\frac{c^2\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}}{1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi}d\phi$$

$$=\frac{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)(\operatorname{Cos}^2\phi-\operatorname{Sin}^2\phi)+c^2\operatorname{Sin}^2\phi\operatorname{Cos}^2\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}^2\phi-\operatorname{Sin}^2\phi-c^2\operatorname{Sin}^2\phi\operatorname{Cos}^2\phi+c^2\operatorname{Sin}^4\phi+c^2\operatorname{Sin}^2\phi\operatorname{Cos}^2\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi$$

$$=\frac{1-2\operatorname{Sin}^2\phi+c^2\operatorname{Sin}^4\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi=\frac{1}{c^2}\frac{c^2-2c^2\operatorname{Sin}^2\phi+c^4\operatorname{Sin}^4\phi+1-1}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi$$

$$=\frac{1}{c^2}\frac{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^2-(1-c^2)}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}d\phi=\frac{1}{c^2}(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{1}{2}}d\phi-\frac{1-c^2}{c^2}\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

unde sequitur

$$\int\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{c^2}{1-c^2}\frac{\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}+\frac{1}{1-c^2}\int(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{1}{2}}d\phi$$

Atqui $\frac{c^2}{1-c^2}=\dfrac{\dfrac{4D-2e^2}{4D-e^2}}{1-\dfrac{4D-2e^2}{4D-e^2}}=\frac{4D-2e^2}{4D-e^2-(4D-2e^2)}=\frac{4D-2e^2}{e^2}$

et $\frac{1}{1-c^2}=\dfrac{1}{1-\dfrac{4D-2e^2}{4D-e^2}}=\frac{4D-e^2}{4D-e^2-(4D-2e^2)}=\frac{4D-e^2}{e^2}$

Igitur erit

$$-\frac{e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\int\frac{d\phi}{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4D-2e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\frac{\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}-\sqrt{(4D-e^2)}\int\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}\,d\phi$$

atque hinc denique

$$x=\frac{2D}{\sqrt{(4D-e^2)}}\int\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}-\sqrt{(4D-e^2)}\int\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}d\phi+\frac{4D-2e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\frac{\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{Sin}^2\phi)}}\ldots(B)$$

in quâ aequatione (secundum (b) (d) et (e)) $c^2=\frac{4D-2e^2}{4D-e^2}\ldots\ldots$

et $\mathrm{Sin}\,\phi=\frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{(1-\mathrm{Cos}^2\psi)}=\frac{1}{c}\sqrt{\left(1-\frac{e^2}{y^2}\right)}=\frac{\sqrt{(y^2-e^2)}}{cy}\ldots\ldots$ (h)

In formulâ (B) duo occurrunt integralia. Utrumque Legendrius in seriem convergentem resolvit, cujus ope tabulas computavit, in quibus pro singulis c et ϕ reperiuntur quantitates integralium.

Brevitatis causâ cum legendrio prius integrale indicabimus literâ F, posterius literâ E; itaque habemus pro aequatione curvae arcûs

$$x=\frac{2D}{\sqrt{(4D-e^2)}}F-\sqrt{(4D-e^2)}\,E+\frac{4D-2e^2}{\sqrt{(4D-e^2)}}\frac{\mathrm{Sin}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi}{\sqrt{(1-c^2\,\mathrm{Sin}^2\phi)}}\ldots\ldots(B)$$

Cui aequationi nulla constans est addenda, ut, pro $y=e$, $x=0$ sit; nam ex tabula IX legendrii patet, pro $y=e$ utramque quantitatem F et $E=0$ fieri, et eâdem substitutione in (h) habemus $\mathrm{Sin}\,\phi=0$; igitur tertia quoque pars $=0$ erit.

In aequatione nostrâ occurrunt, praeter x et y, duae quantitates constantes e et D, quarum haec adhuc nobis superest determinanda. Ponamus igitur fornicem esse exstruendum altitudinis $=h$, atque aperturae $=2O$: oportebit, ut, pro $y=h+e$, sit $x=O$. Igitur substitutis his quantitatibus in aequatione (B) habebimus aequationem inter datas h, O, et e, et determinandam D; quae ut innotescat, solvenda est illa aequatio; sed solutio fieri nequit, quia aequatio est transscendentalis ita intricatissima, ut ne seriem quidem convergentem invenire potuerim pro quantitate D. Nil aliud igitur superest, nisi ut substituendis variis quantitatibus pro D, et simul faciendo $y=h+e$, computemus x; tum vero eam quantitatem D sumamus, quâ x fere $=O$ fit. Neque computatio illa ope tabulae Legendrianae difficilis est, quippe cognito uno limite quantitatis D.

Etenim formulae (A) denominator quum sit radicalis quantitas, oportet ut $(2D-e^2)^2-(2D-y^2)^2=(y^2-e^2)(4D-e^2-y^2)$ semper sit positiva. Prior factor y^2-e^2 semper est positivus, propter $y>e$; oportet igitur, ut posterior quoque semper sit positivus, unde ducitur:

$$4D > e^2 + y^2$$

pro quavis quantitate y, igitur quoque pro $y = h + e$, unde

$$D > \tfrac{1}{4}(e^2 + (h+e)^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

In aequatione (D) non occurrit quantitas d, i. e. distantia a e (fig. 2.) puncti applicationis pressionis horizontalis ad mediam juncturam usque ad dorsum. Itaque patet, si nullae aliae conditiones aequilibrii adessent, quam ex quibus orta est aequatio (B), licere pressionem horizontalem ad quodvis punctum juncturae mediae applicare. Quod etiam patet ex figurâ 2. Nam ubicunque sumamus punctum e, modo ne quantitatem et directionem pressionis D mutemus, patet fore semper ut cum pondere G composita praebeat resultantem juncturae b d normalem.

§ 5.

De Curvâ pressionum determinandâ.

Postquam ita determinavimus curvam arcûs, ut omnes pressiones normales sint juncturis, videndum est, utrum punctum applicationis pressionis normalis ubivis in ipsâ juncturâ sit positum. Quod ut pro omnibus juncturis pateat, indaganda est aequatio curvae, quae transit per omnia puncta applicationis g pressionum D′ (fig. 2): atque videndum, utrum tota haec curva sit inter curvam dorsi et curvam arcûs sita. Appellabimus eam *curvam pressionum.* Coördinatae puncti applicationis pressionis ad juncturam quamvis nobis dictae sunt u et v; igitur ex aequationibus praecedentium §§orum quaerenda est aequatio inter u et v. Cui inveniendae inserviet tertia aequilibrii conditio, quâ indicatur, ut sit summa momentorum omnium virium ad punctum quodvis sectionis verticalis $= 0$, quam pag. 25 invenimus:

$$D\,d + D'\,v \operatorname{Cos}\mu - G\alpha - D'\,u \operatorname{Sin}\mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Quodsi ex (1) et (2) ejusdem paginae pro quantitatibus $D' \operatorname{Cos}\mu$ et $D' \operatorname{Sin}\mu$ in hanc substituimus,

erit . . . . $D(d-v)+G(u-\alpha)=0$

sive $$(v-d)-\frac{G}{D}(u-a)=0$$

sed, secundum (9) et (10),

$$\frac{G}{D}=\operatorname{Tang}\mu=\frac{dy}{dx}$$

unde $$(v-d)-\frac{dy}{dx}(u-\alpha)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

ex quâ aequatione eliminandae sunt $\frac{dy}{dx}$ et α.

Hunc in finem adhibemus aequationem (6) pag. 25:

$$\frac{y-v}{u-x}=\operatorname{Cot}\mu=\frac{dx}{dy},$$

quae ita scribi potest $$(v-y)\frac{dy}{dx}-(x-u)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Haecce multiplicetur per $\frac{dy}{dx}$,

$$(v-y)\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{dy}{dx}(x-u)=0$$

et addatur aequationi (23); oritur

$$v\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=(x-\alpha)\frac{dy}{dx}+y\frac{dy^2}{dx^2}+d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Ad eliminandum α ex hac formulâ habemus aequationem (5) pag. 25,

$$G\alpha=\int yx\,dx-\int y'x'dx'+\tfrac{1}{2}(x'^2-x^2)y'+\tfrac{1}{6}(x'-x)(x'+2x)(y-y') \quad \ldots \quad (5)$$

quae, substituendo $y'=0$ et $x'-x=y\frac{dy}{dx}$, mutatur in

$$G\alpha=\int yx\,dx+\tfrac{1}{6}y^2\frac{dy}{dx}\left(3x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

et substituendo pro $\int y\, x\, dx$ quantitatem (21) pag. 30.

$$G\alpha = x\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} - y\left(D - \tfrac{1}{6}y^2\right) + e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right) + \tfrac{1}{2}xy^2\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{6}y^3\frac{dy^2}{dx}$$

$$= x\left\{\left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}y^2\frac{dy}{dx} - y\left(D - \tfrac{1}{6}y^2\right) + e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right) + \tfrac{1}{6}y^3\frac{dy^2}{dx^2}\right.$$

Verum ex (11) et (20) habemus

$$G = \int y\, dx + \tfrac{1}{2}y\,(x' - x) = \left(D - \tfrac{1}{2}y^2\right)\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}y^2\frac{dy}{dx} = D\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots (25)$$

Igitur $$G\alpha = Gx - y\left(D - \tfrac{1}{6}y^2\right) + e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right) + {}^2\tfrac{1}{6}y^3\frac{dy^2}{dx^2}$$

et dividendo per $G = D\dfrac{dy}{dx}$

$$\alpha = x - \frac{y\left(D - \tfrac{1}{6}y^2\right) - e\left(D - \tfrac{1}{6}e^2\right) - \tfrac{1}{6}y^3\dfrac{dy^2}{dx^2}}{D\dfrac{dy}{dx}} \quad \ldots\ldots (26)$$

sive $$(x - \alpha)\frac{dy}{dx} = y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right) - e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - \frac{y^3}{6D}\frac{dy^2}{dx^2} \quad \ldots\ldots (27)$$

substituimus hanc quantitatem pro $(x - \alpha)\dfrac{dy}{dx}$ in (24), et habemus

$$v\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right) - e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - \frac{y^3}{6D}\frac{dy^2}{dx^2} + y\frac{dy^2}{dx^2} + d$$

$$= y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \left[e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d\right]$$

sive dividendo per $1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}$

$$v = y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right) - \left[e\left(1 - \frac{e}{6D}\right) - d\right]\frac{1}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}$$

ex quâ jam evanuit α. Praeterea habemus ex (18)

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + p^2 = \left(\frac{D - \tfrac{1}{2}e^2}{D - \tfrac{1}{2}y^2}\right)^2 = \frac{(2D - e^2)^2}{(2D - y^2)^2}$$

unde $v = y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right) - \left[e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d\right]\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$

Si item substituimus pro x et $\frac{dy}{dx}$ in aequationem (6), haec mutatur in

$$y - v = \left\{\left[\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right]\right\}\left\{u - \int \frac{dy}{\left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}}}\right\} = 0 \; . \; . \; . \; (29)$$

atque habemus duas aequationes (28) et (29) inter u, v, y, et constantes, ex quâ denique y eliminanda est, ut perveniamus ad aequationem curvae pressionum. Quam tamen eliminationem fieri non posse statim patet.

Quia igitur magis generalem methodum sequi non possumus, ut sciamus, utrum pressio ubivis ad ipsam juncturam sit applicata; videndum erit pro singulis juncturis, utrum punctum g positum sit inter puncta b et d curvarum arcûs et dorsi in eâdem juncturâ sita. Quem in finem adhibendae sunt aequationes (28) et (29), ex quibus cognitis quantitatibus x et y pro singulis juncturis computare possumus v et u. Ut igitur g in ipsâ sit juncturâ, oportet ut sit (fig. 3.) $mg > 0$ et $< ld$, sive $v > 0$ et $v < y$, sive $y - v$ positiva quantitas. Ex (28) sequitur:

$$y - v = \frac{1}{6D}y^3 + \frac{e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d}{(2D - e^2)^2}(2D - y^2)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

quae igitur quantitas pro omni y debet esse positiva. Quia y semper + est, prior pars $\frac{1}{6D}y^3$ necessario est positiva; altera quoque erit, si factor constans est positivus, igitur si $e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) > d$

Sed quando $d > e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right)$ tamen $y - v$ erit +, modo sit

$$d < e\left(1 - \frac{e}{6D}\right) + \frac{y^3}{6D}\frac{(2D - e^2)^2}{(2D - y^2)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Quodsi igitur pro datis quantitatibus e, h, et O, et inde ductâ pressione D quantitas d ita sumi potest, ut pro omni y aequationi (31) satisfaciat, certum erit, ubivis pressionem applicari ad ipsam juncturam. Sin huic conditioni satisfieri non potest, non aderit aequilibrium, neque licebit simul cum aperturâ $2\,O$ et altitudine h crassitiem verticis e adhibere.

Conditionis $v > o$ nullam rationem esse habendam, facile patet ex figurâ 3. Etenim si directiones pressionis horizontalis D et ponderis G se mutuo secant in f, ex compositione virium, quarum altera est horizontalis, altera verticalis atque deorsum agens, oritur composita vis, cujus directio fg necessario deorsum vergit, et punctum quodvis g inferius quam f et e situm erit; quia autem punctum applicationis e pressionis horizontalis necessario infra horizontalem ab est positum, eo magis punctum quodvis g erit infra lineam ab, itaque $v > o$.

Coulombius (1) et navierius (2) putarunt, non opus esse formulis (30) et (31) ad explorandum, utrum pressiones ad ipsas juncturas sint applicatae. Nam, inquiebant, juncturae sunt normales curvae arcûs; directiones pressionum iterum sunt normales juncturis; igitur sunt parallelae singulis Tangentibus, ad curvam arcûs ductis; itaque curva, quae omnes directiones illas tangit, erit parallela curvae arcûs, atque proinde tota supra hanc et infra curvam dorsi sita: atqui puncta applicationis pressionum ad juncturas omnia in hac curvâ parallelâ sunt sita; ergo sequitur, per se satisfieri conditioni, ut pressiones omnes ad ipsas juncturas sint applicatae, neque opus esse, peculiari calculo in hanc rem inquirere.

Quae quidem conclusio nititur hypothesi, quae mihi minus videtur veritati consentanea. Quando per omnia puncta g, g', g'', etc. (fig. 4.) applicationis pressionum ad juncturas lineam ducimus, oritur curva illa, quam pag. 35. vocavimus curvam pressionum, cujusque coördinatae sunt u et v. Sed est haec curva minime confundenda cum alterâ illâ, quae directionibus omnibus pressionum tangitur, quaeque in figurâ nostrâ indicatur literis $h\ h'\ h''$; et contra curva pressionum, quippe quae directiones fgh, $f'g'h'$, $f''g''h''$ non

(1) *Mémoires de Math. et de Phys, présent. à l'Acad.* Ann. 1773 pag. 373. *Rémarque* 1ière.

(2) *Leçons sur l'application de la Mécanique à l'Etablissement des constructions et machines.* Tom. I. pag. 141. Nro. 224.

tangit, sed secat, minime est curvae arcûs d d′ d″ parallela, atque reverâ fieri potest, ut, duabus his curvis se mutuo secantibus, curva pressionum pro parte sit infra curvam arcûs sita.

Ad probandam hanc curvarum g g′g″ et h h′h″ diversitatem, sint d b, d′b′, d″b″ tres juncturae, quantitate infinite parvâ d d′=d′d″ a se invicem distantes; f f′f″ puncta, ubi verticales, per centra gravitatum partium a c d b, a c d′b′, a c d″b″ transeuntes, secant directiones pressionis horizontalis D in e applicatae; porro f g h, f′g′h′, f″g″h″, tres directiones pressionem normalium se invicem in punctis i et i′ secantes; denique h, h′, h″ puncta, ubi curvam h h′h″ tangunt. Quia d d′ = d′d″ infinite parva sunt, f f′ et f′f″ et anguli f′i f, f″i′f′, et proinde distantia i i′ erit infinite parva: atqui inter i et i′ positum est punctum h′, in quo i i′ tangit curvam h h′h″; igitur quoque h′i et h i erunt infinite parva, atque abscissa puncti i et abscissa puncti h, in eadam rectâ f g h i positi, non nisi infinite parvâ quantitate differunt. Quodsi igitur demonstrare possumus, pro qualibet juncturâ, b d, abscissam puncti g ad curvam pressionum pertinentis, finitâ quantitate differre ab abscissâ puncti i, in eâdem rectâ f g h siti, atque cum abscissâ puncti h curvae h h′h″ confundendâ, patebit, revera duas adesse curvas g g′g″ et h h′h″, et curvam proinde pressionum minime esse curvae arcûs parallelam.

Pressio, juncturae b′d′ normalis, quam modo ut compositam ex pressione horizontali D et pondere partis a c b′ d′ sumsimus, quoque sumi potest tamquam composita ex pressione, juncturae superiori b d normali, et ex pondere cunei b d d′b′, inter utramque juncturam contenti. Si pressionem juncturae b d normalem, atque secundum f i agentem, componimus cum pondere cunei b d d′b′, quod agit secundum verticalem per centrum gravitatis z hujus cunei transeuntem, compositae, id est, pressionis ad b′d′ normalis, directio transibit per punctum i, in quo directio pressionis ad b d normalis secat verticalem per z ductam: itaque abscissa puncti i, in quo duae pressionum directiones se invicem secant, est abscissa centri gravitatis z cunei b d d′b′. Sed quia cuneus continetur juncturis b d et b′d′, angulum infinite parvum facientibus, b d d′b′

tamquam rectangulum est sumendum, cujus centrum gravitatis z in mediâ altitudine est positum. Quodsi igitur ex z rectam z p juncturae b d normalem ducimus, erit $b\,p = p\,d$, et $z\,p = z\,q = \frac{1}{2}\,d\,d'$ infinite parva: ductis autem z k et p p', rectae a b normalibus, erit etiam k p', projectio rectae z p, infinite parva; igitur $a\,p' = a\,k$ pro abscissâ puncti h curvae h h'h'' sumenda. Sed est

$$a\,p' = \tfrac{1}{2}(a\,b + a\,l) = \tfrac{1}{2}(x' + x)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(x + y\,\frac{dy}{dx} + x\right) = x + \tfrac{1}{2}\,y\,\frac{dy}{dx}$$

Pro abscissâ a m puncti g habemus ex aequatione (6) pag. (36)

$$u = x - (v - y)\,\frac{dy}{dx}$$

igitur subtrahendo $a\,p' - a\,m = (v - \tfrac{1}{2}y)\,\frac{dy}{dx}$

quae est quantitas finita. Puncta igitur g et h utriusque curvae sunt diversa, atque tantum iis in locis idem punctum commune erit utrique curvae, in quibus haec differentia $= 0$ est, i. e. quando aut $v = \frac{1}{2}y$, aut $\frac{dy}{dx} = 0$. Hoc locum tantum habet in vertice fornicis, illud pro aliis fornicibus in aliis juncturis obtinebit, pro variis quantitatibus e, h, O, et d.

§ 6.

De pressionis juncturae normalis quantitate.

Praecedentibus §§is directionem pressionis ita determinavimus, ut et normalis esset juncturis et ad ipsas applicaretur juncturas; nunc ejus quantitatem ita determinemus, ut quartae satisfiat conditioni, quâ jubetur, ne pressione nimiâ cohaesio materiae vincatur, et disruptis arcûs partibus totus fornix concidat. De hac aequilibrii conditione, a praecedentibus Mathematicis plane omissâ, primus cogitavit COULOMBIUS (1), eamque adhibuit NIEUPORTIUS (2), quem alii deinceps secuti sunt.

Difficillimum omnino est negotium, in hac disquisitione formulas generales invenire, quae simul ita sint simplices, ut ad quemvis casum practicum possint adhiberi. Quaerenda nobis est 1° quantitas pressionis pro quovis puncto cujusvis juncturae, et quantitas vis pressioni resistentis, quae ex materiae cohaesione oritur pro quolibet puncto; et 2^{do} videndum, in quonam puncto resistentiae ad pressionem ratio fiat minima. Quodsi in hoc quoque puncto pro sumtis quantitatibus O, h, e, satis magna est cohaesio partium, ut ab omni periculo tutus sit fornix, aequilibrio satisfactum est: sin minus, non licebit simul et aperturam 2 O, et altitudinem h, et crassitiem e fornici tribuere, sed una ex tribus ita mutanda est, ut sive pressio fiat minor, sive major ei resistat massa.

Hactenus vires, quibus fornicis pars a b d c juncturam b d premit, spectavimus tamquam in unam compositam vim redactas, eamque ad unicum punctum g applicatam. Oportet ut compositam hanc D′ nunc distribuamus in singula juncturae puncta, secundum eam distributionis legem, quae in fornice revera locum habet.

Ex § 4 et 5 novimus totam quantitatem D′, et coördinatas u et v puncti g. Nam habemus ex aeq. (1) pag. 25 et (19) pag. 29.

$$D' = D \operatorname{Sec}\mu = D\sqrt{(1 + \operatorname{Tang}^2 \mu)}$$

$$= D\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = D\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)$$

et pro u et v habemus aeq. (28) et (29) pag. 38.

Ut ex hisce datis pressionem pro puncto quovis juncturae inveniamus, praeterea sciamus oportet, quomodo D′ in juncturae puncta sit distribuenda.

---

(1) Cf. COULOMB. l. c. pag. 380. *Rémarque* 1ière.

(2) Cf. NIEUPORT. l. c. pag. 114 et seqq. Erravit tamen Vir celeberrimus in eo, quod pressionem a totâ juncturâ sustineri, itaque totius juncturae cohaesione ferri putaverit; quâ in re consentientem habuit PRONYUM, Vir. Clar. (Vid. ejus *Architect. Hydraul.* Tom. I. pag. 155. Nro 361.).

Ducamus lineas juncturae perpendiculares $b'b_{,}'$, $b''b_{,}''$, quarum longitudines sint ut pressiones in singula puncta b' b'' agentes; porro jungamus $b_{,}'$, $b_{,}''$ curvâ $b_{,}'b_{,}''b_{,}'''$; erit area $b'b_{,}'b_{,}'''b'''$ uti tota pressio D'. Sint coördinatae hujus curvae

$$b\,b^{n} = r \quad b^{n}b_{,}^{n} = s.$$

$$\text{erit} \quad D' = \int_{r=b\,b'''}^{r=b\,b'} s\,dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

et quia momentum vis D' ad punctum b aequale est summae momentorum totius plani,

$$D'.\,b\,g = \int_{r=b\,b'''}^{r=b\,b'} s\,r\,dr$$

atqui puncti b coordinatae sunt $x' = x + y\,\dfrac{dy}{dx}$ et $y' = 0$, puncti g coördinatae u et v; igitur

$$b\,g = \left\{\left(x + y\,\frac{dy}{dx} - u\right)^{2} + v^{2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

et substituendo

$$D\,\frac{2D - e^{2}}{2D - y^{2}}\cdot\left\{\left(x + y\,\frac{dy}{dx} - u\right)^{2} + v^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \int s\,r\,dr \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Ex duabus aequationibus (32) et (33), eliminatione quantitatum x, u, et v, differentiatione et integratione quaerenda esset aequatio

$$s = \phi\,(r),$$

quâ continerentur omnes curvae, quae conditionibus (32) et (33) satisfacerent. Porro determinandum esset r, ita ut s maximum fieret, atque quantitas s, i. e. pressio, pro hoc puncto quaerenda.

Sed patet, plurimas esse posse curvas $b_{,}'b_{,}'''$, quarum area $= D'$ sit, et centrum gravitatis positum in normali ad punctum g. Ex quibus quaenam igitur sumenda? i. e. quomodo in ponte secundum aequilibrii conditiones constructo pressio in juncturae puncta esset distributa? Ex iis, qui exsistunt, pontibus, hujus quaestionis solutionem petere non possumus, quia eorum curvae positis conditionibus non satisfaciunt. Oportet igitur, ut ex hypothesibus, cum aequationibus (32) et (33) convenientibus, unam pro libitu eligamus.

Sumamus simplicissimam, et sit $s =$ quantitati constanti, ita ut curva $b_{,}' b_{,}^{m}$ sit recta, juncturae $b d$ parallela. Area $b' b_{,}' b_{,}^{m} b^{m}$ igitur fit rectangulum. In rectangulo autem linea per centrum gravitatis transiens et basi perpendicularis, hanc in duas partes aequales dividit; ergo basis $b' b^{m}$ puncto g in duas partes aequales dividitur, et habemus $b' g = g b^{m}$. Atqui patet ex praecedentibus §§is, g non in mediâ lineâ $b d$ esse positam, sed modo propius ad dorsum accedere, quod saepe fit in vertice fornicis, modo propius ad arcum, quod in lateribus fornicum observatur. Ut igitur quam maxima juncturae pars pressioni resistat, sumamus, pressionem aequabiliter distribui in partem juncturae, inter g et proximam curvam sitam, et in aequalem partem, a g versus alteram curvam sumtam. Quodsi igitur g propius est curvae arcûs quam dorsi, sumto

$$g b^{m} = g d$$

$$\text{et} \quad b' g = g b^{m}$$

pressio distribuitur in lineam $b' d$, et pars superior $b b'$ nullam pressionis partem feret. Sin g propius est curvae dorsi, quam arcûs, sumto $b' g = b g$ et $g b^{m} = b' g = b g$, inferior pars juncturae $b^{m} d$ nullam pressionis partem feret. Neutro igitur casu licebit pressionem in totam juncturam distribuere; neque igitur in totâ juncturâ cohaesio materiae pressioni resistet; sed tantum in parte $b b^{m}$ (fig. 5^{a}) aut $b' d$ (fig. 5^{b}). Per hanc partem autem et pressio D aequaliter erit distributa, et vis resistens, quae ex materiae duritie sive cohaesione oritur, ubivis aeque magna erit: igitur pro quovis puncto ratio inter utramque eadem erit, atque ratio inter totam resistentiam et totam pressionem D'. Sufficit igitur determinare juncturam, in qua haec fiat minima. Ex praecedentibus habemus (fig. 5^{a})

$$g b = \sqrt{\{(v - y')^2 + (x' - u)^2\}}$$

$$\text{et (fig. } 5^{b}\text{)} \quad g d = \sqrt{\{(y - v)^2 + (u - x)^2\}}$$

quodsi igitur vocamus V pondus, quod unitas quadrata materiae ferre possit, antequam corruat, et T totam resistentiam partis $2 g d$ aut $2 b g$, erit

1°. quando $g b < g d$

$$T' = 2 V g b = 2 V \sqrt{\{(v - y')^2 + (x' - u)^2\}}$$

Atqui ex aeq. (6) pag. (36)

$$x' - u = x' - x - (u - x) = y\frac{dy}{dx} - (y - v)\frac{dy}{dx} = v\frac{dy}{dx}$$

et propter $y' = o$ $(v = y')^2 = v^2$

igitur per aeq. (18)

$$T' = 2V\left(v^2 + v^2\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2Vv\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2Vv\frac{2D - e^2}{2D - y^2} \;\ldots\ldots\ldots\; (34)$$

2^{do}. quando $gd < gb$

$$T'' = 2Vgd = 2V\sqrt{\{(y - v)^2 + (u - x)^2\}}$$

Atqui ex aeq. (5) $u - x = (y - v)\frac{dy}{dx}$

unde $T'' = 2V\sqrt{\left\{(y - v)^2 + (y - v)^2\frac{dy^2}{dx^2}\right\}} = 2V(y - v)\frac{2D - e^2}{2D - y^2} \ldots (35)$

Ut hanc vim resistentem cum pressione D' conferamus, oportet, ut D' item ad pondus reducatur, quod fit multiplicando D' per pondus cubicae unitatis materiae. Sit hoc $= p$, erit

$$pD' = pD\frac{2D - e^2}{2D - y^2}$$

et ratio inter resistentiam et pressionem

1^o pro $gb < gd$

$$S' = \frac{T'}{pD'} = \frac{2Vv\frac{2D - e^2}{2D - y^2}}{pD\frac{2D - e^2}{2D - y^2}} = \frac{2Vv}{pD} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (36)$$

2^o pro $gd < gb$

$$S'' = \frac{T''}{pD'} = \frac{2V(y - v)\frac{2D - e^2}{2D - y^2}}{pD\frac{2D - e^2}{2D - y^2}} = \frac{2V(y - v)}{pD} \;\ldots\ldots\ldots\; (37)$$

Nunc quaerenda est junctura, i. e. quantitas y, pro qua S' et S'' fiant minima: constat autem utraque, S' et S'', ex constante factore $\frac{2V}{pD}$, qui pro omni juncturâ manet idem, et ex variabili factore v sive y — v; qui solus igitur minimus fieri debet.

Pag. 38, aeq. (28) invenimus:

$$v = y\left(1 - \frac{y^2}{6D}\right) - \left[e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d\right]\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2$$

posito, brevitatis causâ: $\dfrac{\left[e\left(1 - \dfrac{e^2}{6D}\right) - d\right]}{(2D - e^2)^2} = m$ . . . . (38)

et differentiando fit: $\dfrac{dv}{dy} = 1 - \dfrac{y^2}{2D} + 4my(2D - y^2)$

quae aequalis cyfrae est ponenda, unde

$$o = (2D - y^2)\{1 + 8mDy\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Huic aequationi satisfieri potest tribus quantitatibus y, scilicet

$$y = \sqrt{2D}$$

$$y = -\sqrt{2D}$$

$$y = -\frac{1}{8mD}$$

In fornice y semper positiva est quantitas, igitur secunda quantitas ($-\sqrt{2D}$) non est hujus loci; tertia positiva erit, quando m negativa fiet. Igitur quaerendus secundus coëfficiens differentialis, et, substituendâ primâ et tertiâ quantitate pro y, ex signo determinandum, utrum earum substitutione in (28) v et S′ fiant minima an maxima.

Iteratâ differentiatione ex (39) oritur

$$\frac{d^2v}{dy^2} = (2D - y^2)\,8mD - (1 + 8mDy)\,2y$$

quae, substituendo $y = \sqrt{2D}$, mutatur in

$$\frac{d^2v}{dy^2} = -(1 + 8mD\sqrt{2D})\,2\sqrt{2D}$$

quae positiva esse debet. Erit autem positiva pro $(1 + 8mD\sqrt{2D}) < 0$

unde $\quad 8mD\sqrt{2D} < -1$

$$m < -\frac{1}{8D\sqrt{2D}}$$

$$e\left(1-\frac{e^2}{6D}\right)-d<-\frac{(2D-e^2)^2}{8D\sqrt{2D}};$$

igitur quando $$d>e\left(1-\frac{e^2}{6D}\right)+\frac{(2D-e^2)^2}{8D\sqrt{2D}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(40)$$

et simul $y=\sqrt{\tfrac{1}{3}2D}$, fiet S' minimum. Sin d minor illâ quantitate, S' erit maximum.

Substituendo $y=-\frac{1}{8mD}$, fit

$$\frac{d^2v}{dy^2}=(D-y^2)\,8mD=\left(2D-\frac{1}{64m^2D^2}\right)8mD=16mD^2-\frac{1}{8mD}$$

quae iterum positiva esse debet. Sed, quia in hoc casu necessario m negativa est quantitas, $\frac{d^2v}{dy^2}$ erit positiva, pro $\frac{1}{8mD}>16mD^2$,

unde $$m^2>\frac{1}{(8D)^2\,2D}$$

sive, substituendo $$e\left(1-\frac{e^2}{6D}\right)-d<-\frac{(2D-e^2)^2}{8D\sqrt{2D}}\;\ldots\ldots\;(41)$$

et $y=-\frac{1}{8mD}$ fiet S' minimum.

Pro altera quantitate S'' vidimus oportere, ut $y-v$ fiat minimum. Ex aequatione (28) pag. 38. habemus:

$$y-v=\frac{y^3}{6D}+m(2D-y^2)^2\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(42)$$

quae differentiando fit: $$\frac{d(y-v)}{dy}=\frac{y^2}{2D}-4my(2D-y^2)$$

quae quantitas aequalis cyfrae ponenda; igitur: $y^2-8mDy(2D-y^2)=0$

unde eruitur $y=0,\quad y-8mD(2D-y^2)=0,$

et $$y=-\frac{1}{16mD}\pm\left\{\frac{1}{(16mD)^2}+2D\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Iteratâ differentiatione habemus:

$$\frac{d^2(y-v)}{dy^2}=\frac{1}{2D}\left\{y-8mD(2D-y^2)\right\}+\frac{y}{2D}(1+16mDy)$$

quae, substituendo $y = o$, mutatur in $\frac{d^2v}{dy^2} = -8\,m\,D$ quae positiva esse debet, unde $m < o$. Igitur pro

$$d > e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

et $y = o$ S'' fit minimum.

Sin $d < e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right)$ $y = o$ reddet S'' maximum.

Quod ad secundam et tertiam quantitatem y,

$$y = -\frac{1}{16\,m\,D} \pm \left\{\frac{1}{(16\,m\,D)^2} + 2\,D\right\}^{\frac{1}{2}}$$

pendent hae ita a signo secundi termini, sub radice positi, ut hoc positivo y sit positiva; hoc negativo, negativa pro quavis quantitate m: igitur alterutra semper est positiva, alterutra negativa, et pertinent ad juncturas, inter quas medias junctura, pro quâ $y = o$ est, est posita. Quum autem maximum inter duo tantum minima esse possit, et minimum tantum inter maxima, apparet, quodsi posito $y = o$ S'' fiat minimum, necessario secundâ et tertiâ quantitate y substitutâ, S'' fieri maximum, igitur pro

$$d > e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right):$$

et tantum, quando, posito $y = o$, S'' erit maximum, i. e.

quando $\quad d < e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right),$

ponendo $\quad y = -\frac{1}{16\,m\,D} + \left\{\frac{1}{(16\,m\,D)^2} + 2\,D\right\}^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$

S'' fiet minimum.

Postquam aequationibus (40) (41), (43) et (44) quantitatem y computaverimus, quae cum assumtâ quantitate d S' et S'' minima reddant, substituendis his quantitatibus in (36) et (37) videndum erit, utrum S' et S'' pro his juncturis satis magna sint, ut absit disrumpendi periculum. Sin minus, alia sumatur quantitas d, atque idem experimentum repetatur. Sin nulla est quantitas d (quam neque cyfrâ minorem neque e majorem licet assumere), qua S' et S'' satis sint magna, inde concludatur, fornicem aperturae, altitudinis et crassitiei, 2 O, h et e exstrui non licere ex datâ materiâ. Eaedem tamen mensurae convenire possunt fornici, ex aliâ materiâ aedificando, siquidem S' et S'' sunt in ratione directâ duritiei sive cohaesionis V, et inversâ ponderis specifici p; quando igitur ratio $\frac{V}{p}$ pro aliâ materiâ major erit, eaedem 2 O, h et e sufficientem praebebunt resistentiam pressioni normali. Simul autem patet non melius consuli operis firmitati duriore materiâ adhibendâ, si pondus specificum eâdem atque durities ratione creverit.

Ut praecepta hactenus data ad praxin adhiberi possent, oporteret, ut cognita sit quantitatis S magnitudo stabilitati operis necessaria, h. e. ut sciamus, quoties resistentia materiae pressionem superare debeat. Quodsi S paullo tantum superat unitatem, i. e. si pressio normalis paullo minor est quam pondus, quo disrumpatur saxum, ex experimentis institutis patuit, semper fere oriri rimas et contritiones, stabilitati operis valde noxias: idque saepe obtinuit, quamvis pressio ne tertia quidem pars esset ponderis disrumpentis. Ita ex. gr. apud WIEBEKINGIUM (l. c. T. III. p. 593.) legimus, saxum in cubi formam sectum, quod latus 6 pollicum Bavaric. habebat, et specificum pondus $= 2,909$, findi coepisse sub pressione 22,000 libr. (circa 10,000 Kil.), quamvis totum demum corruerit sub pressione 75,000 libr. (38,000 Kil.). Itaque hoc exemplo pro $S = \frac{75,000}{22,000}$ ($= 3,5$ fere) pressio normalis suffecisset ad fornicem paulatim disrumpendum, et sequitur, S debere aliquoties unitatem superare. Pro singulis materiis experimenta essent instituenda, et inde computanda esset tabula, quae pro singulis quantitatibus 2 O et h ita determinaret limites, quibus quantitas e contineri deberet, ut nunquam S justo minor fieret.

Quae tabula quamvis in experimentorum adhuc institutorum paucitate strui nondum possit, formulae a nobis inventae tamen inservire possunt ad comparandos varios pontes, pro quibus V et p novimus: et quamvis nesciamus, quanta esse debeat S, eatenus recte judicare possumus, quod pateat, illi ponti majorem firmitatem jure tribui, in quo S ubivis major est quantitas.

§ 7.

De fornice secundum planum quodvis disrumpendo.

Fieri posset, ut fornix, victâ materiae cohaesione, secundum planum quodvis disrumperetur, cujus cum sectione verticali communis intersectio esset m d (fig. 6.). Videamus igitur, quaenam hac in re sint vires continentes, quaenam divellentes. Materia cohaesione suâ impedit, quominus ejus particulae divellantur, et quo major est multitudo particularum cohaerentium, eo majore vi opus erit ad divellendum: itaque cohaesio K, secundum planum m d agens, erit vis, proportionalis longitudini lineae m d, et indicabitur hac formulâ

$$K = k. \, m\,d$$

ubi k erit cohaesio pro unitate longitudinis. Ducamus ordinatam d l, et vocemus α angulum m d l, erit m d $= y \text{ Sec } \alpha$, unde

$$K = k\,y \text{ Sec } \alpha,$$

Quodsi vires agentes in fornice superiore hanc cohaesionem vincere valent, oportet, ut singulis illis viribus decompositis in duas vires, alteram lineae m d parallelam, alteram ei perpendicularem, summa decompositarum virium m d parallelarum major sit quam K. Itaque hujus summae quantitas cognoscenda. In parte a c d m agunt 1° pressio horizontalis pD, quae decomposita secundum m d, cum ejus directione angulum $90° - \alpha$ faciente, praebet vim m d parallelam $p D \text{ Sin } \alpha$:

2do pondus G′ partis a c d m; atqui

$$a\,c\,d\,m = a\,c\,d\,l + l\,d\,m = \int y\,dx + \tfrac{1}{2} y^2 \text{ Tang } \alpha.$$

igitur $$G' = p \left\{\int y\,dx + \tfrac{1}{2} y^2 \text{ Tang } \alpha\right\}$$

quâ decompositâ secundum m d $G' \text{ Cos } \alpha = p\left\{\text{Cos } \alpha \int y\,dx + \tfrac{1}{2} y^2 \text{ Sin } \alpha\right\}$

igitur summa virium divellentium $= p\left\{D \text{ Sin } \alpha + \text{Cos } \alpha \int y\,dx + \tfrac{1}{2} y^2 \text{ Sin } \alpha\right\}$

et ratio $$R = \frac{k\,y \text{ Sec } \alpha}{p\left\{D \text{ Sin } \alpha + \text{Cos } \alpha \int y\,dx + \tfrac{1}{2} y^2 \text{ Sin } \alpha\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

aliquoties unitatem superet oportet pro quovis angulo α, et quâvis abscissâ y, ut nusquam possit fornix divelli. Oportet igitur differentiatione quantitatem α quaerere, quâ R fiat minimum, et quae inde quantitas R elicietur, haec demum aliquoties unitate major esse debet. Sed vetat aequationis forma has differentiationes instituere, et praeterea, ut inde concludi possit illud, quod velimus, oporteret, ut quantitas k cognita esset, quae pro quibusdam tantum materiis innotuit. Itaque nobis sufficit, rationem indicasse, quâ dijudicari debet, utrum accidere possit ejusmodi fornicis divulsio.

§ 8.

De oneribus, a ponte ferendis.

Superest, ut indagemus, quomodo onera ponti imposita in eum agant, quanta sit haec actio, et quatenus ope frictionis ferri possit. Iterum hoc loco excitandus Vir. Cel. NIEUPORTIUS, qui dissertationis pag. 116 et seq. primus, quantum equidem scio, hanc aequilibrii conditionem exploravit.

Onera ponti imposita duplici ratione vim suam in pontem exserunt. Primo loco quantitatem compositae vis D′ augent, secundo directionem ejus mutant. Addito pontis ponderi onere imposito, crescit summa virium verticalium; crescent item pressiones D′ in juncturas, in pilas, in moles: majoris igitur crassitudinis oportet sint et pilae et moles. Sed 2°, idque praecipue hoc loco spectandum, parte dorsi pondere onustâ, arcûs pars onusta non amplius aequilibrare poterit caeteras fornicis partes. Manifestum est, quando ex. gr. vertex medius tantummodo onere premitur, hunc nimiam pressionem in latera exercere, atque hac nimiâ pressione recendentibus lateribus verticem necessario descendere atque arcum corruere. Sed praeterea dico, aequilibrium non amplius adesse, quamvis totum planum dorsi aequalibiter oneribus prematur: quod facile demonstratur.

Quando viribus G et D (fig. 7.), quarum composita D′ est normalis juncturae b d, accedit tertia vis G′, quae est pondus oneris dorso a b impositi, composita trium virium G, G′ et D aliam habebit directionem quam D′, neque igitur normalis erit juncturae b d. Decomponamus eam in vim b d parallelam et vim ei normalem; huic inferior pars fornicis resistit, illa vero vis juncturae parallela, nullâ resistentiâ cohibita, necessario aget in partem superiorem, atque hanc sive deorsum sive sursum movebit. Qui motus ut impediatur, sumamus pressionem horizontalem D tanto majorem, ut haec major vis $D_{\prime}$, cum G et G′ composita, iterum sit juncturae normalis, quod fiet sumendo $D_{\prime} = D\,\frac{G + G'}{G}$: nam quando vires verticales et horizontales eâdem ratione augentur, Tangens anguli inter directionem compositae et verticalem lineam, quae Tangens est aequalis huic rationi, eadem manebit. Nunc in juncturâ b d aderit aequilibrium; sed simul in omni aliâ juncturâ, ex. gr. b′d′, deerit. Nam sit (fig. 7.) pondus partis $a\,c\,d'b' = G_{\prime}$; quia onus aequabiliter dorsum a b premit, ejus pars in a b′ premens erit $= G_{\prime}\,\frac{a\,b'}{a\,b}$; et summa virium verticalium in a c d′b′ agentium erit $= G_{\prime} + G'\,\frac{a\,b'}{a\,b}$; quae est componenda cum pressione $D_{\prime} = D\,\frac{G + G'}{G}$: sit l n verticalis per centrum virium verticalium transiens; o n directio pressionis horizontalis; sit porro o n ad l n uti ratio virium; igitur linea n m directione et magnitudine sit aequalis compositae; ut haec composita eandem habeat directionem atque ante, oportet, ut vires componendae eandem rationem servaverint, igitur ut sit

$$G_{\prime} + G'\,\frac{a\,b'}{a\,b} : D_{\prime} = G_{\prime} : D$$

unde ducitur: $G_{\prime} + G'\frac{a\,b'}{a\,b} : G_{\prime} = D_{\prime}$, sive $D\,\frac{G + G'}{G} : D$

$$= G + G' : G$$

$$\left(G_{\prime} + G'\,\frac{a\,b'}{a\,b}\right) - G_{\prime} : G_{\prime} = (G + G') - G : G$$

$$G' \frac{a\,b'}{a\,b} : G_, = G' : G$$

$$G' \frac{a\,b'}{a\,b} : G' = G_, : G$$

denique $\quad a\,b' : a\,b = G_, : G$

i. e. areae partium a c d′b′ et a c d b deberent esse uti lineae a b′ : a b, quod non locum habebit, nisi sit curva arcus c d recta dorso parallela; quod nunquam fieri poterit.

Quodsi igitur necessario ex omni onere ponti imposito sequitur, non amplius ejusmodi quantitatem D posse reperiri, cujus cum cujusvis partis pondere composita normalis sit juncturis, patet, aequilibrium non amplius existere posse, nisi nova oriatur vis resistens. Eam adesse jam supra diximus, frictionem scil., quae motui juncturae parellelo resistens efficit, ut ejusmodi vis parallela, quatenus non justo major sit, in fornicem agere possit salvo aequilibrio. Itaque jam nobis dandae sunt formulae, quarum ope inquiratur pro quovis onere et quâvis juncturâ, utrum vis juncturae parallela contineri possit frictione. Sit $D_,'$ composita virium in a c d′b′ agentium et $\psi = b'g\,n$ angulus hujus compositae cum juncturâ; igitur

vis juncturae parallela $= D_,' \operatorname{Cos} \psi$

« « normalis $= D_,' \operatorname{Sin} \psi$.

Sit π ratio inter frictionem et pressionem, erit frictio motui se opponens $= \pi\, D_,' \operatorname{Sin} \psi$; oportet igitur ut sit

$$\pi\, D_,' \operatorname{Sin} \psi > D_,' \operatorname{Cos} \psi$$

sive $\quad \pi > \operatorname{Cot} \psi$

quodsi in hanc formulam inducimus angulum frictionis θ, ponendo

$$\pi = \operatorname{Tang} \theta,$$

habemus $\quad \operatorname{Tang} \theta > \operatorname{Cot} \psi \quad$ sive $\quad \theta > 90 - \psi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$

i. e. motus juncturae parallelus impedietur, quousque $D_,'$ cum lineâ juncturae ad normalem ductâ angulum faciet angulo frictionis minorem. Sufficit igitur pro quovis onere ejusmodi pressionem horizontalem $D_,$ assumere, quâ pro quavis juncturâ angulus compositae $D_{,}'$ (cujus componentes sunt $D_{,,}$ G et G′) cum normali $< \theta$ maneat (1). Sin ejusmodi quantitatem $D_{,}$ assumere non possumus, qua ubivis fiat $\theta > 90 - \psi$, inde patet fore, ut fornix, ponderibus datis onustus, corruat, neque licere, sumtas h, e et O servare.

Mutatis viribus D et G, qui in ponte non onusto agebant, in $D_{,}$ et $G + G'$, composita ad aliud, quam ante, punctum juncturae applicatur; curva pressionum igitur alia erit, et iterum videndum nobis, ut et ad ipsas juncturas ubivis applicetur composita $D_{,}'$, et ejus pars $D_{,}'\mathrm{Sin}\,\psi$ juncturae normalis ferri possit a materiâ absque comprimendi periculo. Ut prius indagetur, oportet ut cognoscamus quantitatem oneris ferendi; ad alterum determinandum nosse debemus modum, quo hocce onus in singulas arcûs partes distributum sit. Quod ad quantitatem oneris ferendi computemus maximum, quod unquam in pontem premere poterit. Constat illud sive hominibus, sive animalibus, sive curribus. Statuitur vulgo (2):

1° gravissimos currus, sex equis junctos, atque spatium 40 metrorum quadratorum continentes, pondus habere 9500 Kil.; itaque pro 1 □ metro..240 Kil.

2° equitem cum omni apparatu et armis implere *duo* metra, atque pondus

---

(1) De quantitate frictionis experimenta numero exigua sunt instituta. Ratio pressionis ad frictionem est

secundum BOISTARDUM (*Expér. sur la main d'Oeuv.*) $= 1 : 0{,}75$
et $= 1 : 0{,}86$

secundum RONDELETIUM (*Art de Bâtir*, T. III. pag. 241.) $= 1 : 0{,}53$.

quae magnopere inter se differunt. RONDELETIUS addit, saxa, plano inclinato imposita, suo pondere descendere, quando planum facit angulum cum horizonte 28° ad 36° graduum, unde elicitur ratio pressionis ad frictionum $= 1 : 0{,}53$
et $= 1 : 0{,}73$.

Ne igitur nimium frictioni tribuamus, in iis, quae sequntur hanc rationem ponemus $= 1 : 0{,}50$, aut quando angulum frictionis adhibebimus, faciemus $\theta = 25°$. Itaque partes fornicis non descendent motu juncturae parallelo, quando angulus pressionis cum juncturâ superabit $90 - \theta = 65°$.

(2) Conf. IGNAZ VON MÉTIS, *die Sophien-Brücke, oder beschreibende Darstellung der ersten Ketten-brücke in Wien.* Wien 1826. 8° S. 45.

habere 400 Kil., igitur pro 1 □ metro . . . . 200 Kil.

3° Homines in 1 □ metrum posse coacervari sex, quorum singulis 70 Kil. pondus habentibus, veniunt pro 1 □ metro . . . . 420 Kil.

Quae si recte se habent, nunquam pons majore onere premetur, quam quando hominum multitudo ejus dorsum implebit, et sumemus pondus 420 Kil. per metrum quadratum tamquam summum oneris. Quod, ut pateat, quantum sit, ratione habitâ ponderis ipsius pontis, videamus, quam altum saxi stratum dorso imponendum sit, ut eodem pondere prematur: sumamus medium pondus specificum lapidum = 2,000; erit pondus metri cubi = 2000 Kil.; igitur maximum illud onus 420 Kil. erit fere quinta pars, atque aequabit stratum 2 decim. altum; atqui pontium crassitudo in vertice fere est $0^m,5$ ad $1^m,5$ et 2^m; interdum igitur onus impositum magna pars erit ponderis ipsius pontis, saepe autem octava erit, aut decima, aut minor etiam ejus pars.

Quod ad modum, quo onus in singulas arcûs partes est distributum, videndum, quae distributio ponti maxime noxia esse possit. Ex supradictis satis apparet, omnem fornicem posse spectari tamquam tribus partibus compositum, unâ mediâ, B H, lateribus duobus, A B et C D (fig. 8). Quodsi mediam auferimus, latera introrsum cadent; hunc motum igitur impedit mediae partis in latera pressio: sin latera auferimus, media pars descendet; igitur ejus pondus sustentatur resistentiâ laterum; ex aequalitate autem actionis et resistentiae oritur aequibrium. Quodsi igitur onera imponimus mediae parti, haec vincet latera, atque illis amotis deorsum cadet; si lateribus A B et C D, haec medium cuneum B H sursum prement, iterumque rumpetur fornix; si mediae simul parti et lateribus, onus lateribus impositum eorum motum, ab onere mediae partis excitatum, impediet, atque contra media pars minus facile ab onere laterum sursum premetur, quippe ipsa suo onere depressa. Unde concludimus, hoc in casu, i. e. toto dorso ponderibus aequabiliter onusto, minus ab aequilibrio recedere fornicem, quam aut mediâ parte aut lateribus tantum onustis; itaque saepe onera minora, sed in partem pontis tantum prementia, majus ei periculum afferre. Hoc igitur cogitantes computemus oneris in fornicem actionem. Sit (fig. 9.) dorsum, a medio a ad b′ ponderibus aequalibus onustum: sit pondus in partem quamlibet a b″ premens $= G'$,

coördinata puncti d″ x et y,
« b″ x′ et o
« e o et d.

Erit $G' = n x'$

Pondus hocce est vis agens secundum lineam verticalem, per mediam a b″ transeuntem, itaque distantem a medio quantitate $\frac{1}{2} x'$. Pondus G partis a c d″b″ agit secundum verticalem, cujus abscissa $= \alpha$. Quodsi duo haec pondera ad unam vim redigimus, erit composita $= G + G'$, et aget secundum verticalem, cujus abscissa erit

$$\alpha' = \frac{G\alpha + \frac{1}{2} G'x'}{G + G'} = \alpha - (\alpha - \tfrac{1}{2} x') \frac{G'}{G + G'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Hanc iterum componendo cum pressione horizontali $D_{,}$, habemus angulum directionis compositae $D_{,}'$ cum verticali hac aequatione

$$\text{Tang}\,\mu' = \frac{D_{,}}{G + G'}$$

$$\text{et} \quad \psi = \mu + \mu' \ \text{sive} = 180 - (\mu + \mu') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

quae quantitas superare debet $90 - \theta$.

Ut coördinatas u′ et v′ puncti applicationis g′ inveniamus, habemus ex triangulis z m g et g n d″

$$\frac{u' - \alpha'}{v' - d} = \text{Tang}\,\mu' \quad \text{et} \quad \frac{x' - u'}{v'} = \text{Tang}\,\mu$$

ex quibus sequitur

$$v' = d + (u' - \alpha') \ \text{Cot}\,\mu'$$
$$v' = (x' - u') \ \text{Cot}\,\mu$$
$$\overline{(u' - \alpha') \ \text{Cot}\,\mu' - (x' - u') \ \text{Cot}\,\mu = - d}$$

porro

$$(v' - d) \ \text{Tang}\,\mu = u' - \alpha'$$
$$v' \ \text{Tang}\,\mu = x' - u'$$
$$\overline{(v' - d) \ \text{Tang}\,\mu' + v' \ \text{Tang}\,\mu = x' - \alpha'}$$

unde

$$\left.\begin{array}{ll} u' = \dfrac{\alpha' \ \text{Cot}\,\mu' + x' \ \text{Cot}\,\mu - d}{\text{Cot}\,\mu' + \text{Cot}\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{et} \quad v' = \dfrac{d \ \text{Tang}\,\mu' + x' - \alpha'}{\text{Tang}\,\mu' + \text{Tang}\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (49)$$

Quodsi igitur punctum g positum est in ipsâ juncturâ, oportet ut sit

$$u' < x' \text{ et } > x.$$

sive

$$v' < y \text{ et } > 0$$

Denique inquiramus, utrum materies duritie suâ ferre possit pressionem juncturae normalem. Modo vidimus hanc pressionem esse $= D_{,}' \operatorname{Sin}\psi$; atqui ex parallelogrammo virium habemus

$$D_{,}' = D_{,} \operatorname{Cosec}\mu' \text{ et } D_{,}' \operatorname{Sin}\psi = D_{,} \frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}\mu'} = D_{,} \frac{\operatorname{Sin}(\mu'+\mu)}{\operatorname{Sin}\mu'}$$

Haec pressio iterum agit in partem juncturae, quae determinatur sumtis ab utrâque parte puncti g partibus aequalibus, itaque in partem 2 g b″, quando g propius est dorso, in partem vero 2 g d″, quando propius est curvae arcûs: itaque (uti § 6 pag. 44, seq.) resistentia, quam praebet materiae durities, erit

sive

$$T' = 2\,V\,g\,b''$$

sive

$$T'' = 2\,V\,g\,d''$$

Atqui

$$g\,b'' : d''b'' = v' : y$$

$$g\,b'' = \frac{v'}{y}\,d''b'' = \frac{v'}{y}\,\frac{y}{\operatorname{Cos}\mu} = \frac{v'}{\operatorname{Cos}\mu}$$

et

$$g\,d'' : d''b'' = y - v' : y$$

$$g\,d'' = \frac{y - v'}{y}\,\frac{y}{\operatorname{Cos}\mu} = \frac{y - v'}{\operatorname{Cos}\mu}$$

quibus substitutis erit $T' = \dfrac{2\,V\,v'}{\operatorname{Cos}\mu}$ et $T'' = 2\,V\left(\dfrac{y - v'}{\operatorname{Cos}\mu}\right)$

Atque inde ratio inter resistentiam et pressionem

$$\left.\begin{aligned} &\text{sive} \quad S' = \frac{T'}{p\,D_{,}\operatorname{Sin}\psi} = \frac{2\,V\,v'\operatorname{Sin}\mu'}{p\,D_{,}\operatorname{Cos}\mu\,\operatorname{Sin}(\mu'+\mu)} \\ &\text{sive} \quad S'' = \frac{T''}{p\,D_{,}\operatorname{Sin}\psi} = \frac{2\,V\,(y - v')\operatorname{Sin}\mu'}{p\,D_{,}\operatorname{Cos}\mu\,\operatorname{Sin}(\mu'+\mu)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

§ 9.

Exemplum.

Ponamus, arcum esse extruendum

Aperturae $2\,O = 120$ pedum Gallicorum

Altitudinis $h = 30$ « «

Crassitudinis $e = 7$ « «

Sit porro pondus specificum materiei $= 2{,}100$.

Durities ejusmodi, ut centrimetrum quadratum confringatur pondere 92 Kil.; igitur pro pede quadrato $V = 97060$ Kil.

Haec data fere conveniunt cum ponte celeberrimo *Neuilliano*, quem confecit PERRONETIUS et descripsit in opere egregio: *Description des Ponts de Neuilly, etc. Tom.* I. Itaque, quae ex theoriâ nostrâ ducentur, cum ponte reverâ exsistente comparari poterunt. Duo tamen hoc loco monenda:

1° me sumsisse crassitudinem 7 pedum, quamvis apud PERRONETIUM 5 tantum pedum sit, quia ex ipsâ descriptione pontis patet, stratum arenae, calcis et lapidum duorum fere pedum arcui impositum esse;

2° quod ad pondus autem specificum et duritiem, quia ex variis saxorum generibus pons ille confectus fuit, inprimis autem lapis, quem vocant: *pierre de Saillancourt*, ei adhibitus fuit, ex tabulâ GAUTHEYANA sumsi eam hujus lapidis speciem, numero 3 notatam, quae minime esset dura, quo tutius theoriae eventus cum praxi conferri possent.

Ut igitur ex datis formam curvae arcûs determinare possimus, omnium prima quaerenda est quantitas D, i. e. pressio horizontalis in unum pedem quadratum. Quia $D > \frac{1}{4}((h+e)^2 + e^2)$ esse debet, novimus hoc loco D superare

$$\tfrac{1}{4}(37^2 + 7^2) = \tfrac{1}{4} . 1418 = 354{,}5$$

Ponamus igitur $D = 400$, et simul substitutis in aeq. (B) pag. 34

$$y = 37^{ped.} \text{ et } e = 7^{ped.}$$

computemus ope tabulae IX LEGENDRII abscissam x, inveniemus

$$x = 34^{ped.},40.$$

quae abscissa debuisset inveniri $= O = 60^{ped.}$

Iterum sumamus

$$D = 1000 \ldots\ldots \text{ erit } x = 65,32$$
$$« = 800 \ldots\ldots « \ x = 56,05$$
$$« = 850 \ldots\ldots « \ x = 58,63$$
$$« = 875 \ldots\ldots « \ x = 59,80$$
$$« = 880 \ldots\ldots « \ x = 60,04$$

Ex postremis hisce proportione eruitur

pro $x = 60$ sumendum esse

$$D = 879,15$$

quae quantitas, ut ad pondus redigatur, multiplicanda est pondere unius pedis cubici, quod $= 71,982$ Kil., unde

$$p\,D = 63283 \text{ Kil. } (1)$$

Substituendo pro O, h, e, et D in aequationem curvae (B), haec erit

$$x = 29,859\,F - 58,886\,E + 58,054\,\frac{\mathrm{Sin}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi}{\sqrt{(1 - c^2\,\mathrm{Sin}^2\phi)}}$$

sive $$x = 29,859\,F - 58,886\,E + \frac{1}{y}\sqrt{(y^2 - 49)(3467,6 - y^2)}$$

ubi $c^2 = 0,98587$ et $\theta = \mathrm{Arc.}\,(\mathrm{Sin} = c) = 83^{\circ}\,10'\,22''$.

Antequam ope hujus aequationis ipsam curvam computemus, videndum, utrum d, i. e. ordinata puncti applicationis pressionis horizontalis D ad mediam juncturam, ita assumi possit, ut pressio normalis ubivis ad ipsas juncturas

---

(1) Pons *Neuillianus* latitudinem habet 45 pedum: igitur pressio horizontalis pro toto ponte esset $= 45 \times 63,283$ Kil. fere 2,850,000 Kil. Secundum GAUTHEYUM haec pressio foret $= 2,060,000$ Kil.

applicetur: hunc in finem pag. 38 vidimus oportere, ut sit

$$d < e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) + \frac{y^3}{6D}\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2$$

pro quavis quantitate y. Pro $e = 7$ et $D = 879{,}15$ prior terminus fit $= \left\{1 - \frac{49}{5274{,}9}\right\} = 6^{ped},94$; posterior terminus semper est positivus: igitur tota quantitas superat $6^{ped},9$; atqui d, pro crassitie 7 pedum, intra 2 et 7 pedes est (1); igitur nihil impedit, quominus ita sumamus quantitatem d, ut formulae (31) satisfiat.

Deinde videndum, utrum d ita sumere possimus, ut in quâvis juncturâ materies suâ duritie resistere possit pressioni normali. Quando punctum applicationis pressionis proprius est dorso, quam curvae arcûs, ratio S′ inter resistentiam T′ et pressionem D′ maxima aut minima est pro eâ juncturâ, pro qua v maximum aut minimum est: v autem maximum aut minimum tantum fieri potest, (pag. 46) pro

$$y = \sqrt{2D},\ y = -\sqrt{2D},\ \text{aut}\ y = -\frac{1}{8mD}$$

$y = \sqrt{2D}$, nobis $= \sqrt{(2 \times 879{,}15)} = 41^{ped},93$, v maximum reddit: nam, quia ut modo vidimus, $d < e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) < 6{,}94$ est sumendum, $m = e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d$ erit positivum, igitur $\frac{d^2v}{dy^2}$ (pag. 46.) $= -(1 + 8mD\sqrt{2D})\,2\sqrt{2D}$ negativum. Ex m positivo sequitur, utramque $y = -\sqrt{2D}$ et $= -\frac{1}{8mD}$ esse negativam; igitur v minimum fieri pro negativo y, itaque v et S′ decrescere inde ab $y = 41^{ped},93$ usque ad $y = 0$; extremae quantitates y in nostro exemplo

(1) In omnibus quae sequuntur, semper volumus, ut pressio non premeret in superiorem juncturae partem, quia in ponte haec superior pars arenâ et calce maxime constat, et pressioni igitur resistere non posset. In nostro exemplo cuneus medius tantum altitudinem 5 pedum habere censetur, ceteri duo pedes arenâ constant; itaque d semper 2^{ped} major erit, et 7^{ped} minor: punctum applicationis autem in mediâ juncturâ curvae dorsi erit propius, quando $d < 4{,}^{ped}5$; curvae arcûs propius, quando $d > 4{,}^{ped}5$.

adhibendae sunt $y = 37^{ped.}$ et $y = 7^{ped.}$: igitur nobis S' erit minimum pro $y = 7^{ped.}$ i. e. pro juncturâ verticis, et pro hac juncturâ fit $v = d - 2$. Secundum aeq. (36) igitur

$$S' = \frac{2\,V\,v}{p\,D} = \frac{2\,V\,(d-2)}{p\,D}$$

Atqui $\left.\begin{array}{l} V = 97060 \text{ Kil.} \\ p = 71{,}982 \;\text{«} \\ D = 879{,}15 \;\text{«} \end{array}\right\}$ unde

$$S' = \frac{2.97060}{71{,}982.879{,}15}(d-2) = 3{,}0675\,d - 6{,}1350.$$

Substituendis pro d variis quantitatibus, eruuntur quantitates S' in tabellâ pag. 63 tradendae: quia autem haec formula tantum inservit computandae rationi S', quando punctum g dorso propius, quam curvae arcûs, d hic $4{,}^{ped}5$ excedere non debet.

Quando punctum applicationis pressionis normalis proprius est curvae arcus, quam dorso, ratio S'' inter resistentiam T'' et pressionem D' maximum aut minimum fiet pro $y - v$ maximo aut minimo. Pag. 47 vidimus, $y - v$ tantum maximum aut minimum fieri posse pro $y = 0$ et $y = -\frac{1}{16\,m\,D} \pm \left\{\frac{1}{(16\,m\,D)^2} + 2\,D\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Quia m positivum, i. e. $d < e\left(1 + \frac{e^2}{6D}\right)$, $y = 0$ facit $y - v$ et S'' maximum; igitur S'' minimum fit pro $y = -\frac{1}{16\,m\,D} + \left\{\frac{1}{(16\,m\,D)^2} + 2\,D\right\}^{\frac{1}{2}}$, nam tertia quantitas y, quippe necessario negativa, extra limites nostri exempli cadit.

Pro vario d varia erit junctura, quâ S'' minimum; nam quantitas y, quae juncturam indicat, pendet ab m, m autem a d.

Ex (38) et $D = 879{,}15$ habemus

$$16\,m\,D = 16\,D\,\frac{\left\{e\left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) - d\right\}}{(2D - e^2)^2}$$

$$= 16.879{,}15\,\frac{6{,}94 - d}{(1758{,}3 - 49)^2} = \frac{6{,}94 - d}{217{,}7} = 0{,}03340 - 0{,}0048144\,d.$$

Sumto $d = 3$, erit $16\,m\,D = 0{,}019$, et

$$y = \frac{1}{0{,}019} + \left\{\left(\frac{1}{0{,}019}\right)^2 + 1758{,}3\right\}^{\frac{1}{2}} = 14{,}^{ped}634$$

erit ordinata, qua S'' fit minimum.

Eâdem ratione habemus:

pro $d = 3{,}5$	$16\,m\,D = 0{,}0166$	$y = 13{,}^{ped}12$
« $d = 4$	$16\,m\,D = 0{,}0141$	$y = 11{,}^{ped}50$
« $d = 4{,}5$	$16\,m\,D = 0{,}0117$	$y = 9{,}^{ped}76$
« $d = 5$	$16\,m\,D = 0{,}0093$	$y = 7{,}^{ped}92$
« $d = 6$	$16\,m\,D = 0{,}0045$	$y = 3{,}^{ped}80$
« $d = 6{,}5$	$16\,m\,D = 0{,}0021$	$y = 1{,}^{ped}84$.

Notis quantitatibus y, computanda est $y - v$: per aeq. (42) $y - v = \frac{y^3}{6D} + m\,(2\,D - y^2)^2$; quae tamen tantum adhibenda pro $d = 4^{ped}$, $d = 4^{ped}5$, et $d = 5^{ped}$. Nam quia $y = 3{,}^{ped}80$ et $= 1{,}^{ped}84$ non amplius ad nostrum exemplum pertinent, his proxima quantitas $y = 7^{ped}$ erit sumenda. Pro $y = 7^{ped} = e$, $y - v$ fit $= e - d$, uti facile patet ex figurâ.

Ita reperimus:

pro $d = 3^{ped}$	fieri	$y - v = 3{,}^{ped}81$
« $d = 3{,}^{ped}5$	«	$y - v = 3{,}^{ped}39$
« $d = 4^{ped}$	«	$y - v = 2{,}^{ped}95$
« $d = 4{,}^{ped}5$	«	$y - v = 2{,}^{ped}48$
« $d = 5^{ped}$	«	$y - v = 1{,}^{ped}98$
« $d = 6^{ped}$	«	$y - v = 1{,}^{ped}00$
« $d = 6{,}^{ped}5$	«	$y - v = 0{,}^{ped}50$

et his substitutis in $S'' = \frac{2\,V\,(y-v)}{p\,D} = \frac{2{,}97060\,(y-v)}{71{,}982.879{,}15} = 3{,}0675\,(y-v)$

eruuntur quantitates sequentis tabulae, in qua etiam S'' pro $d < 4{,}^{ped}5$ computavimus, quia fieri potest ut in mediâ juncturâ pressionis punctum applicationis propius sit dorso, in eâ juncturâ autem, pro quâ S'' fit minimum, contra punctum g proprius accedat ad curvam arcûs.

d	S′	S″	y cum S″ congruentes.
2,^{ped}5	1,^{ped}53		
3	3,07	11,^{ped}69	y = 14,^{ped}63
3,5	4,60	10,39	y = 13,12
4	6,14	9,04	y = 11,50
4,5	7,67	7,61	y = 9,76
5		6,07	y = 7,92
6		3,07	y = 7,00
6,5		1,53	y = 7,00

Ex hac tabulâ patet pressionem horizontalem in mediam fere juncturam debere applicari, ut ubivis maxima resistentia praebeatur. Itaque sumta (fig. 10) $d = 4,^{ped}5$ materiei durities ubivis septies saltem superabit pressionem normalem.

Constat jam quantitates O, h, e, et d ita esse determinatas, ut absque frictione fornix sit in aequilibrio. Nunc determinanda forma arcûs curvae, quae conferatur cum curvâ *Neuillianâ:* itaque per form. pag. 59 computavimus coördinatas, simulque angulos juncturarum cum verticali lineâ ope aeq. (19) pag. 29.

$$\text{Tang}\,\mu = p = \left\{\left(\frac{2D - e^2}{2D - y^2}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ex quâ sequitur $\text{Cos}\,\mu = \dfrac{2D - y^2}{2D - e^2} = 0{,}000585034\,(1758{,}3 - y^2)$

Simul autem computavimus abscissas curvae pontis *Neuilliani,* cum iisdem ordinatis atque nostrae abscissae convenientes, atque interpolatione facillime inveniendas ex PERRONETII tabulâ: eventus autem omnes in tabulam sequentem contulimus, atque ex hac confecimus figuram decimam, in quâ curva inferior est curva aequilibrii, superior autem, punctis notata, est *Neuilliani* pontis curva, composita ex arcubus circulorum, ex 11 centris diversis ductorum.

y	x in nostrâ curvâ:	x in ponte Neuilliano:	μ
ped.	ped.	ped.	
7	0,000	0,00	0° 0′ 0″
8	15,431	17,17	7°35′46″
9	21,634	24,00	11° 6′15″
10	26,002	28,75	14° 1′53″
11	29,596	32,92	16°41′20″
12	32,736	35,92	19°11′32″
13	35,429	38,67	21°35′49″
14	37,814	41,33	23°56′ 9″
15	39,948	43,50	26°13′45″
16	41,881	45,42	28°29′25″
17	43,652	47,17	30°43′45″
18	45,252	48,67	32°57′11″
19	46,743	50,08	35°10′ 4″
20	48,099	51,33	37°22′39″
21	49,360	52,58	39°35′10″
22	50,510	53,58	41°47′50″
23	51,604	54,50	44° 0′47″
24	52,604	55,42	46°14′10″
25	53,530	56,08	48° 1′12″
26	54,358	56,75	50°42′53″
27	55,156	57,33	52°58′26″
28	55,876	57,83	55°14′59″
29	56,526	58,33	57°32′38″
30	57,144	58,75	59°51′31″
31	57,696	59,08	62°11′46″
32	58,224	59,33	64°33′30″
33	58,658	59,67	66°56′50″
34	59,047	59,75	69°22′ 4″
35	59,406	59,83	71°49′13″
36	59,711	59,92	74°18′30″
37	59,999	60,00	76°50′ 6″

Ex curvarum inter se comparatione patet, *Neuillianam* nusquam fere magis quam duorum pedum intervallo a nostrâ abesse; sed omnino animadvertendum, quamvis eâdem curvâ arcûs, fornices duos non sibi similes esse quod ad aequilibrium, nisi eaedem quoque sint directiones juncturarum: quod hic locum non habet: nam et in *Neuilliano* ponte et in nostro juncturae normales sunt curvae arcûs; unde inspectione fig. 10. facile ducitur, aliam, praecipue in parte inferiore, esse earum directionem in *Neuillianâ* curvâ, quam in nostrâ. Praeterea fornix quisque *Neuillianus* a parte posteriore terminatur plano verticali, quo separatur a proximo fornice; ad nostrum autem fornicem pertinet massa prismatica longissime se extendens, quâque demtâ manifestum est, aequilibrium non amplius exsistere. Itaque omnino inde concludatur oportet, *Neuillianum* fornicem absque frictione et partium cohaerentiâ in aequilibrio non esse; de hisce autem viribus postea fusius videbimus.

Jam ad nostram curvam redeamus. Ulterius progredientes videamus, utrum fornix caeteris aequilibrii conditionibus satisfaciat, i. e. utrum non possit disrumpi secundum planum quodcunque, a juncturae plano diversum, et utrum onera ponti imponenda possint ferri absque aequilibrii detrimento. Ut prius exploremus, cognitam habere debemus materiae vim cohaesionis, quae sese opponit viribus divellentibus, eâque in formulâ (45) pag. 50 adhibitâ determinare, utrum haec cohaesio ubivis satis resistat viribus divellentibus. Sed pauca tantum exstant experimenta, iisque pro duabus tantum materiis ea vis fuit determinata; ea scil., quae reperiuntur apud COULOMBIUM (1). Haec autem non adhiberi possunt ad saxum, ex quo *Neuillianus* pons fuit aedificatus. Itaque coacti sumus hujus quantitatis ignorantiâ, hanc disquisitionem omittere, atque statim ad actionem onerum in pontem procedere. Ad hanc determinandam adhibemus aequat. (48) (49) et (50), pag. 56 et 57, quarum ope explorandum

1° utrum composita ubivis applicetur ad juncturam sub angulo, complementum anguli frictionis excedente;

2° utrum ad ipsam juncturam applicetur;

---

(1) l. c. 1773. pag. 348.

3° utrum pressio juncturae normalis, oneris accessione aucta, ferri possit a materiae duritie.

In his aequationibus utimur quantitatibus x', α, et G; hae ante sunt computandae ope aequationum

$$x' = x + y \operatorname{Tang} \mu$$

$$\alpha = x - y \left(1 - \frac{y^2}{6D} \operatorname{Sec}^2 \mu\right) \operatorname{Cot} \mu + e \left(1 - \frac{e^2}{6D}\right) \operatorname{Cot} \mu$$

$$G = D \operatorname{Tang} \mu$$

quae eliciuntur ex aeq. (9), (10) et (26), substituendo $\operatorname{Tang}\mu$ pro $\frac{dy}{dx}$, et $\operatorname{Sec}^2\mu$ pro $1 + \frac{dy^2}{dx^2}$. Ita invenimus:

y	x′	α	G
8^{ped}	$16,^{ped}50$	$8,^{ped}19$	117,27
10	28,50	14,54	219,71
12	36,91	19,24	306,02
14	44,03	23,30	390,25
16	50,57	27,03	477,16
18	56,92	30,95	569,91
20	63,38	34,14	671,63
22	70,18	37,72	786,00

Sumamus (fig. 10), dorso imponi onera inde a mediâ juncturâ usque ad eam, quae convenit cum $y = 12^{ped}$, i. e. inde ab $x' = 0$ usque ad $x' = 36,^{ped}91$. Pag. 55 invenimus, pondus in metrum quadratum premens $= 420^{Kil}$ esse: hinc sumendo pedem quadratum Gallicum $= 0,^{\square m}1055$ (1), erit onus in $1^{\square ped} = 420^{Kil} \times 0,1055$ $= 44,^{Kil}319$; sed quia pro virium unitate sumsimus pondus pedis cubici materiae adhibitae $= 72,^{Kil}982$, hoc onus dividimus per 72,982, et habemus

$$n = \frac{44,^{Kil}319}{72,^{Kil}982} = 0,6157$$

(1) Lacroix *Arithmét.* pag. 149.

unde $G' = n x' = 0{,}6157 x'$

Porro sumsimus pressionem horizontalem D, eandem, quam antea $D = 879{,}15$.

Habemus igitur, quia $\operatorname{Tang}\mu' = \frac{D}{G + G'}$, sequentes quantitates

y	x′	G′	G	G + G′	μ′	μ	ψ = μ + μ′
8 ped	16, ped 50	10,16	117,27	127,43	81°45′	7°36′	89°21′
12	36,91	22,72	306,02	328,74	69°30′	19°12′	88°42′
18	56,92	22,72	569,91	592,63	56° 1′	32°57′	88°58′

Ex quâ tabulâ videmus, angulum pressionis cum juncturâ paulum differre ab angulo recto, eumque longe superare complementum anguli frictionis $90 - \theta = 65°$.

Caeteris non mutatis, sumamus onus premere partem dorsi mediam usque ad juncturam, quae convenit cum $y = 18^{\text{ped}}$, i. e. usque ad $x' = 56,^{\text{ped}}92$: omnia manent eadem usque ad $y = 12^{\text{ped}}$; deinde autem G′ major quam antea fit, et mutatur in μ'; habemus nunc:

y	x′	G′	G	G + G′	μ′	μ	ψ
18 ped	56, ped 92	35,04	569,91	604,95	55°28′	32°57′	88°25′

Iterum ψ fere rectus longe superat 65°. Neque mirum. Quae enim vis accedens $G = 35{,}04$ causa est, ut non adsit aequilibrium in fornice, utque igitur frictione opus sit ad impediendum partium motum, est haec adeo parva ratione habitâ reliquarum virium $D = 879{,}15$ et $G = 569{,}91$, ut et quantitas et directio compositae necessario parvam tantum mutationem subire debeat.

Sin sumimus, etiam remotiorem dorsi partem onere premi, ex fig. 10 patet, onus hocce, ratione habitâ maximi ponderis cuneorum, ex quibus haec pars constat, plane posse negligi, et praeterea frictionem, quae in tam longis juncturis est maxima, omni motui validissime resistere. Quum igitur videamus, medium fornicem esse ab omni motûs periculo tutum, eo certius, etiam nullo instituto calculo, concludere possumus, caeteras partes satis esse firmas.

Sed quamvis composita paullum tantum a normali recedat, curva tamen pressionum aliam habet figuram, et fieri potest, ut non ubivis ad ipsam juncturam applicetur: calculo igitur indagemus, utrum ordinatae punctorum g, g′ sint inter o et y comprehensa. Sumimus, D habere ordinatam $d = 4^{ped}5$; per formulam (47) $\alpha' = \alpha - (\alpha - \frac{1}{2} x') \frac{G'}{G + G'}$ invenimus α'; deinde per formulam (49) $v' = \frac{d \operatorname{Tang} \mu' + x' - \alpha'}{\operatorname{Tang} \mu' + \operatorname{Tang} \mu}$ ordinatam v′, et habemus iisdem atque antea hypothesibus quantitates in sequentem tabulam relatas.

Antequam vero utamur postremâ aequatione ad determinandum v′, hanc ita transformemus, ut aptior fiat calculo logarithmico. Habemus

$$v' = \frac{d \operatorname{Tang} \mu' + x' - \alpha'}{\operatorname{Tang} \mu' + \operatorname{Tang} \mu} = \frac{(d \operatorname{Tang} \mu' + x' - \alpha') \operatorname{Cos} \mu' \operatorname{Cos} \mu}{\operatorname{Sin} (\mu' + \mu)}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} \mu (d \operatorname{Sin} \mu' + (x' - \alpha') \operatorname{Cos} \mu')}{\operatorname{Sin} (\mu' + \mu)} = \frac{d \operatorname{Cos} \mu}{\operatorname{Sin} (\mu' + \mu)} \left\{ \operatorname{Sin} \mu' + \frac{x' - \alpha'}{d} \operatorname{Cos} \mu' \right\}$$

Sit $\frac{x' - \alpha'}{d} = \operatorname{Tang} m$: hoc substituendo erit

$$v' = \frac{d \operatorname{Cos} \mu}{\operatorname{Sin} (\mu' + \mu)} \left\{ \operatorname{Sin} \mu' + \operatorname{Tang} m \operatorname{Cos} \mu' \right\}$$

$$= \frac{d \operatorname{Cos} \mu \operatorname{Sin} (\mu' + m)}{\operatorname{Cos} m \operatorname{Sin} (\mu' + \mu)}$$

quae formula facile in calculo adhiberi potest.

y	G′	α'	m	v′
8^{ped}	10,16	$8,^{ped}19$	61°33′20″	$5,^{ped}60$
12	22,72	19,19	75°45′20″	9,85
18	22,72	30,48	80°20′30″	15,54
18	35,04	30,81	80°13′20″	15,54

Videmus quantitates v′ omnes minores esse quam y, itaque pressiones ad ipsas juncturas applicari.

Denique pressio juncturis normalis cum duritie materiei conferamus ope aequationis (50) pag. 57.

$$S'' = \frac{2\,V\,(y - v')\,\mathrm{Sin}\,\mu'}{p\,D,\,\mathrm{Cos}\,\mu\,\mathrm{Sin}\,(\mu' + \mu)}$$

quae hic ex duabus allatis aequationibus sola est adhibenda, quia ex quantitatibus y et v′ patet, puncta g propriora esse arcûs curvae, quam dorso. Substituendo pro V, p, D habemus

$$S'' = \frac{3{,}0675\,(y - v')\,\mathrm{Sin}\,\mu'}{\mathrm{Cos}\,\mu\,\mathrm{Sin}\,(\mu' + \mu)}$$

unde ductae sunt quantitates sequentes

y	G′	S″
8^{ped}	10,16	7,36
12	22,72	6,55
18	22,72	7,47
18	35,04	7,42

Quantitates S″ igitur quoque satis magnae sunt.

Ex omnibns, quae hactenus disputavimus, tandem concludimus, fornicem, cujus aperturae latitudo sit 120 pedum, altitudo 30 pedum, crassitudo in vertice 7 pedum, ex datâ materiâ posse confici, qui ab omni parte sit stabilis.

§ 10.

Datâ curvâ arcûs et directione juncturarum, invenire formam curvae dorsi.

Transimus jam ad secundam problematis nostri partem solvendam, quâ quaeritur: ex cognitâ curvâ arcûs et directione juncturarum ita determinare curvam dorsi, ut satisfiat omnibus aequilibrii conditionibus, § 1ª enunciatis. Quae solutio adhibenda erit et ad dijudicandas formas pontium jamjudum exstructorum, in quibus dorsum valde est incurvatum, et ad computandam optimam pontis figuram iis in locis, ubi et ripae paullum supra aquas eminentes, et navigia majora per fluvium quotidie vecta non evitandam necessitatem adferant construendi fornicis supra ripas multo prominentis.

Sint uti in praecedentibus §§

x, y,	coördinatae curvae	arcûs c d
x', y',	« «	dorsi a b
u, v,	« «	pressionum e g

$2\,O$ aperturae latitudo,
h aperturae altitudo,
e crassitudo in vertice sive altitudo clavis,
d ordinata puncti curvae pressionum, in summâ juncturâ siti,
D pressio horizontalis,
D' pressio normalis juncturae curvae b d,
G pondus partis a b d c,
α abscissa centri gravitatis partis a b d c,
μ angulus juncturae b d cum linea verticali.

Quia in omnibus fere pontibus (1), qui exsistunt, curva arcûs est circuli pars, nos quoque eam facimus circularem. Sit igitur r radius circuli; habemus aequationem

$$y^2 = \{2r - (x-e)\}\{x-e\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Porro habemus aequationes aequilibrii (pag. 25)

$$D + D' \operatorname{Cos}\mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$G + D' \operatorname{Sin}\mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$Dd + D'v \operatorname{Cos}\mu - G\alpha - D'u \operatorname{Sin}\mu = 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$G = \int y\,dx - \int y'dx' + \tfrac{1}{2}(y'+y)(x'-x) \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$G\alpha = \int yx\,dx - \int y'x'dx' + \tfrac{1}{2}(x'^2 - x^2)y' + \tfrac{1}{6}(x'-x)(x'+2x)(y-y') \ldots (6)$$

$$\frac{y-y'}{x'-x} = \frac{v-y'}{x'-u} = \frac{y-v}{u-x} = \operatorname{Cot}\mu \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$dD = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

et quando iterum juncturas curvae arcûs normales sumimus, $\operatorname{Tang}\mu = \frac{dy}{dx} \ldots (9)$

Ut ex hisce aequationibus simplicissimâ ratione perveniatur ad aequationem curvae dorsi, transferatur origo e summo dorsi puncto in centrum circularis curvae arcûs, et sumamus (fig. 11.): $Mi = y$, $id = x$, $Mh = y'$, $hb = x'$, $Mk = v$, $kg = u$; oportet igitur, ut in formulas (1) ad (9) substituamus: $r+e-y$ pro y, $r+e-y'$ pro y', et $r+e-v$ pro v; dum x, x' et u immutata manent. Habemus igitur pro (1)

$$y^2 = r^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

pro (5) $G = \int (r+e-y)\,dx - \int \{r+e-y'\}dx' + \tfrac{1}{2}\{(r+e)-(y'+y)\}(x'-x)$

$$= (r+e)(x-x') + (r+e)(x'-x) + \int y'dx' - \int y\,dx - \tfrac{1}{2}(y'+y)(x'-x)$$

$$= \int y'dx' - \int y\,dx - \tfrac{1}{2}(y'+y)(x'-x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

---

(1) La hirius (in *Mém. de l'acad.* 1702 pag. 100—103) citat constructionem curvae arcûs, quâ Parabola efficiatur (Vid. *Corresp. Mathém.* T. II. p. 77) quaeque secundum gautheyum (l. c. I. 253) adhuc videtur in usu esse: apud belidorium (l. c. p. 443) Elliptica forma pontibus adhibenda memoratur. Verum, quantum equidem scio, neque haec, neque illa curva unquam usurpata fuit ad pontes majores exstruendos. Vid. de formâ dorsi, cum curvâ arcûs Ellipticâ conveniente, bossut, *Mém. de l'Acad.* 1774. p. 534 et suiv. et nieuport l. c. pag. 55 et suiv.

pro (6) $G\alpha = \int (r+e) x\,dx - \int y x\,dx - \int (r+e) x' dx' + \int y' x' dx' + \frac{1}{2}(x'^2 - x^2)(r+e) -$
$\frac{1}{2}(x'^2 - x^2)\, y' + \frac{1}{6}(x' - x)(x' + 2x)(y' - y)$
$= \frac{1}{2}(r+e)(x^2 - x'^2) + \frac{1}{2}(r+e)(x'^2 - x^2) + \int y' x' dx' - \int y x\,dx - \frac{1}{2}(x'^2 - x^2)\, y' +$
$\frac{1}{6}(x' - x)(x' + 2x)(y' - y)$
$= \int y' x' dx' - \int y x\,dx - \frac{1}{2}(x'^2 - x^2)\, y' + \frac{1}{6}(x' - x)(x' + 2x)(y' - y) \quad . \; . \; . \; (12)$

pro (7) $$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{y' - v}{x' - u} = \frac{v - y}{u - x} = \text{Cot}\,\mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

pro (9) $$\text{Tang}\,\mu = -\frac{dy}{dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Eliminando D′ ex (2) et (3) habemus
$$G = D \;\text{Tang}\,\mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$
quae, substituendo pro G et tang μ ex (11) et (14) mutatur in
$$\int y' dx' - \int y\,dx - \tfrac{1}{2}(y' + y)(x' - x) = -D\frac{dy}{dx}$$
sive $$\int y' dx' - \int y\,dx - \tfrac{1}{2} y' x' + \tfrac{1}{2} y x - \tfrac{1}{2}(y x' - x y') = -D\frac{dy}{dx} \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Ex quâ aequatione adhuc eliminari debent x et y. Differentiando (16) fit
$$y' dx' - y\,dx - \tfrac{1}{2} d(y' x') + \tfrac{1}{2} d(y\,x) - \tfrac{1}{2} d(y\,x' - x\,y') = -D\,d\frac{dy}{dx}$$
sive $$y' dx' - y\,dx - \tfrac{1}{2} y' dx' - \tfrac{1}{2} x' dy' + \tfrac{1}{2} y\,dx + \tfrac{1}{2} x\,dy - \tfrac{1}{2} d(y x' - x y') = -D\,d\frac{dy}{dx}$$
sive, multiplicando per 2 et reducendo,
$$y' dx' - x' dy' - (y\,dx - x\,dy) - d(y\,x' - x\,y') = -2D\,d\frac{dy}{dx}$$
$$y'^2 d\frac{x'}{y'} - y^2 d\frac{x}{y} - d(y\,x' - x\,y') = -2D\,d\frac{dy}{dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Differentiando (10) habemus $y\,dy = -x\,dx$, unde $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Atqui ex (13) et (14) $\frac{dy}{dx} = -\text{Tang}\,\mu = -\frac{x' - x}{y' - y}$, igitur $-\frac{x}{y} = -\frac{x' - x}{y' - y}$, $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'}{y'}$ . . . (18)
$$x\,y' - y\,x' = 0, \;\text{ et }\; d(x\,y' - y\,x') = 0$$

quibus substitutis in (17), fit

$$y'^2 d\frac{x'}{y'} - y^2 d\frac{x'}{y'} = 2\,D\,d\frac{x'}{y'}$$

sive $$y'^2 - y^2 = 2\,D \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(19)$$

quae est aequatio simplicissima et calculo accommodatissima. Atqui ex aequatione circuli et ex iis, quae modo vidimus, $\frac{y'^2}{x'^2} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{r^2 - y^2}$, est

$$y'^2 (r^2 - y^2) = x'^2 y^2, \quad y'^2 r^2 = (y'^2 + x'^2) y^2$$

et $$y^2 = \frac{r^2 y'^2}{x'^2 + y'^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(20)$$

quod substituendo in (19) habemus

$$y'^2 - \frac{r^2 y'^2}{x'^2 + y'^2} = 2\,D \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(21)$$

sive $$(y'^2 - 2\,D)(x'^2 + y'^2) - r^2 y'^2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(A)$$

quae est aequatio inter coördinatas curvae dorsi (1).

In hac aequatione inveniuntur duae quantitates constantes r et D. Determinantur hae 1°. conditione eâ, quâ debet pro $y = r - h$ $x = O$ esse, unde substituendo in $y^2 = r^2 - x^2$, eruitur:

$$(r - h)^2 = r^2 - O^2, \quad 2\,r\,h - h^2 = O^2,$$

et $$r = \frac{h^2 + O^2}{2\,h} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(22)$$

2°. pro $y = r$ oportet ut sit $y' = r + e$, quod si substituitur in (19), haec fit $(r + e)^2 - r^2 = 2\,D$

et $$D = \frac{2\,r\,e + e^2}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(23)$$

Tertiae conditioni, ut sit $\frac{dy}{dx} = 0$ pro $x = 0$, sponte satisfacit aequatio (A).

Ex formâ hujus aequationis patet:

1^{mum} pro $+x'$ et $-x'$ aequales quantitates y', et pro $+y'$ et $-y'$ aequales

---

(1) Hoc problema primus, ut videtur, solvit Chardonnus (Vid. *Mém. de l'Acad.* 1731, *Histoire* pag. 53.). Nieuportius (l. c. pag. 49 et seqq.) fusius de eo egit.

quantitates x' inveniri. Itaque curva constat quatuor brachiis aequalibus et similibus, singulis positis in singulis quadrantibus, in quos per axem horizontalem et verticalem distribuitur omne spatium circa originem M. Nobis nunc tantum spectanda sunt brachia supra axem horizontalem posita:

2°. pro $x' = \pm \infty$ aequat. (21) fit $y^2 = 2D$, unde

$$y' = \pm \sqrt{2D} = \pm \sqrt{(2re + e^2)}$$

Quodsi igitur ducatur linea q p q′ (fig. 12.) parallela axi abscissarum, et ab eâ distans intervallo $= \sqrt{(2re + e^2)}$, haec q p q′ erit asymptota curvae. Cum eadem quantitate y' convenit ex (19) $y = 0$ et igitur $x = r$.

3°. differentiando (A) habemus

$$y'dy'(x'^2 + y'^2) + (y'^2 - 2D)(x'dx' + y'dy) - r^2y'dy' = 0.$$

$$y'dy'(x'^2 + y'^2 - r^2) + (y'^2 - 2D)(x'dx' + y'dy') = 0$$

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{(y'^2 - 2D)x'}{y'(x'^2 + y'^2 - r^2) + (y'^2 - 2D)y'}$$

Ex (20) $r^2 = \left(\frac{x'^2 + y'^2}{y'^2}\right)y^2$, igitur

$$x'^2 + y'^2 - r^2 = (x'^2 + y'^2)\left(1 - \frac{y^2}{y'^2}\right) = (x'^2 + y'^2)\frac{2D}{y'^2} = \frac{r^2\,2D}{y'^2 - 2D}$$

unde $$y'dy'\left\{(x'^2 + y'^2)\frac{2D}{y'^2} + y'^2 - 2D\right\} + (y'^2 - 2D)x'dx' = 0,$$

et $$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{(y'^2 - 2D)x'}{y'\left\{(x'^2 + y'^2)\frac{2D}{y'^2} + y'^2 - 2D\right\}} = -\frac{(y'^2 - 2D)x'y'}{2Dx'^2 + y'^4} \quad \ldots\ldots (24)$$

Si in hanc formulam substituimus $x = 0$, fit $\frac{dy'}{dx'} = 0$; unde sequitur, directionem curvae dorsi in summo puncto a (fig. 11.) esse horizontalem.

4°. Quia curva habet directionem horizontalem in puncto a, et simul asymptotam horizontalem q p q′, oportet, ut in superiore parte concava, deinde autem convexa sit ratione axis horizontalis. Adest igitur punctum inflexionis. Ut hoc definiamus, est

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{(2Dx'^2+y'^4)(y'^2-2D)\left(y'+x'\frac{dy'}{dx'}\right)+2(2Dx'^2+y'^4)x'y'^2\frac{dy'}{dx'}-4(y'^2-2D)x'y'\left(Dx'+y'^3\frac{dy'}{dx'}\right)}{(2Dx'^2+y'^4)^2}$$

$$=-\frac{(2Dx'^2+y'^4)(y'^2-2D)x'\frac{dy'}{dx'}+2y'^2(2Dx'^2+y'^4)x'\frac{dy'}{dx'}-4y'^4(y'^2-2D)x'\frac{dy'}{dx'}+(2Dx'^2+y'^4)y'(y'^2-2D)-4Dx'^2y'(y'^2-2D)}{(2Dx'^2+y'^4)^2}$$

$$=-\frac{\{(2Dx'^2+y'^4)(3y'^2-2D)-4y'^4(y'^2-2D)\}x'\frac{dy'}{dx'}-(y'^2-2D)y'(2Dx'^2-y'^4)}{(2Dx'^2+y'^4)^2}$$

$$=-\frac{(-4D^2x'^2+6Dx'^2y'^2-2Dy'^4+8Dy'^4+3y'^6-4y'^6)x'\frac{dy'}{dx'}-(2Dx'^2-y'^4)(y'^2-2D)y'}{(2Dx'^2+y'^4)^2}$$

Substituendo quantitatem $\frac{dy'}{dx'}$ ex (24)

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{(-4D^2x'^2+6Dx'^2y'^2+6Dy'^4-y'^6)\frac{(y'^2-2D)x'^2y'}{(2Dx'^2+y'^4)}+(2Dx'^2-y'^4)(y'^2-2D)y'}{(2Dx'^2+y'^4)^2}$$

$$=\frac{(y'^2-2D)y'}{(2Dx'^2+y'^4)^3}\left\{-4D^2x'^4+6Dx'^4y'^2+6Dy'^4x'^2-y'^6x'^2+(2Dx'^2-y'^4)(2Dx'^2+y'^4)\right\}$$

$$=\frac{(y'^2-2D)y'}{(2Dx'^2+y'^4)^3}\left\{-4D^2x'^4+6Dx'^4y'^2+6Dy'^4x'^2-y'^6x'^2+4D^2x'^4-y'^8\right\}$$

$$=\frac{(y'^2-2D)y'}{(2Dx'^2+y'^4)^3}\left\{6Dx'^2y'^2(x'^2+y'^2)-y'^6(x'^2+y'^2)\right\}=\frac{(y'^2-2D)y'^3(x'^2+y'^2)(6Dx'^2-y'^4)}{(2Dx'^2+y'^4)^3}$$

Sed secundum (20) est $x'^2+y'^2=\frac{r^2y'^2}{y'^2-2D}$; igitur

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{(y'^2-2D)y'^3(6Dx'^2-y'^4)r^2y'^2}{(y'^2-2D)(2Dx'^2+y'^4)^3}=\frac{r^2y'^5(6Dx'^2-y'^4)}{(2Dx'^2+y'^4)^3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Pro puncto inflexionis habemus $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, $=0$; igitur

$$y'^5(6Dx'^2-y'^4)=0.$$

Huic aequationi duplici modo satisfieri potest; sed quia ex $y'^5=0$, sequitur $x=$ imaginariae quantitati, oportet ut sumamus

$$6Dx'^2-y'^4=0 \quad \text{sive} \quad y'^4=6Dx'^2\quad\ldots\ldots\ldots(26)$$

quae, substituendo ex (A) $x'^2 = -y'^2 + \frac{r^2 y'^2}{y'^2 - 2D} = y'^2 \left\{ \frac{r'^2 + 2D - y'^2}{y'^2 - 2D} \right\}$, fit

$$y'^4 = \frac{6Dy'^2(r^2 + 2D - y'^2)}{y'^2 - 2D}$$

$$y'^2(y'^2 - 2D) = 6D(r^2 + 2D - y'^2)$$

$$y'^2 = -2D \pm \sqrt{\{6D(r^2 + 2D) + 4D^2\}}$$

$$y' = \pm \sqrt{\{+\sqrt{(16D^2 + 6Dr^2)} - 2D\}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

ex quibus quantitatibus tantum positiva y ad nostram curvam pertinet.

Hanc substituendo in (26) habemus

$$x^2 = \frac{y'^4}{6D} = \frac{\{\sqrt{(16D^2 + 6Dr^2)} - 2D\}^2}{6D}$$

$$= \frac{16D^2 + 6Dr^2 + 4D^2 - 4D\sqrt{(16D^2 + 6Dr^2)}}{6D}$$

$$= \frac{20D^2 + 6Dr^2 - 4D\sqrt{(16D^2 + 6Dr^2)}}{6D}$$

et $$x' = \sqrt{\{\tfrac{1}{3}(10D + 3r^2 - 2\sqrt{(16D^2 + 6Dr^2)}\}} \;\ldots\ldots (28)$$

Ope aequat. (27) et (28) puncta inflexionis sunt construenda. Totius curvae constructionem simplicissimam exhibet Nieuportius l. c. pag. 49 — 50.

5º. Aream partis fornicis invenimus formulâ

$$G = D \operatorname{Tang}\mu = -D\frac{dy}{dx} = D\frac{x'}{y'} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

et pressionem juncturis normalem habemus ex (2) et (3) pag. 71

$$D' = D \operatorname{Sec}\mu = D\sqrt{(1 + \operatorname{Tang}^2\mu)} = \frac{D}{y'}\sqrt{(x'^2 + y'^2)}$$

Atqui ex (A) est $\frac{x'^2 + y'^2}{y'^2} = \frac{r^2}{(y'^2 - 2D)} = \frac{r^2}{y^2}$, igitur

$$D' = \frac{Dr}{\sqrt{(y'^2 - 2D)}} = D\frac{r}{y} = G\frac{r}{x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

§ 11.

De curvâ pressionum determinandâ.

Substituendo $r+e-v$ pro v in aeq. (4) pag. 71 habemus

$$D\,d - G\alpha - D'u \operatorname{Sin}\mu + D'(r+e-v) \operatorname{Cos}\mu = 0 \quad \ldots \ldots (31)$$

et, si pro $D'\operatorname{Sin}\mu$ et $D'\operatorname{Cos}\mu$ sumamus $-G$ et $-D$,

$$D(d-r-e+v) + G(u-\alpha) = 0$$

Sit, brevitatis causâ, (fig. 11.) $M\,e = r+e-d = d'$, igitur

$$G(u-\alpha) + D(d'-v) = 0$$

Atqui ex (29) $G = D\dfrac{x'}{y'} = D\dfrac{x}{y}$, unde $x(u-\alpha) - y(d'-v) = 0 \,..\, (32)$

quae aequatio facile ex triangulis similibus M i d et g f n duci poterat. Porro habemus ex eâdem figurâ, sive ex aeq. (13) et (18) $x : y = u : v \ldots (33)$ igitur (32) fit:

$$u(u-\alpha) - v(d'-v) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Ut ex hac aequatione α eliminetur, adhibemus formulam (12)

$$G\alpha = D\frac{x}{y}\alpha = \int y'x'dx' - \int y\,x\,dx - \tfrac{1}{2}(x'^2 - x^2)\,y' + \tfrac{1}{6}(x'-x)\,(x'+2x)\,(y'-y),$$

quaë, propter $x'y - yx' = 0$, fit $= \int y'x'dx' - \int y\,x\,dx - \frac{1}{3}(x'^2y' - x^2y)$,
in quâ duo integralia sunt quaerenda.

Est
$$\int y'x'dx' = \tfrac{1}{2}y'x'^2 - \tfrac{1}{2}\int x'^2dy';$$

ex (A) est
$$x'^2 = \frac{r^2y'^2}{y'^2 - 2D} - y'^2; \text{ igitur}$$

$$\int x'^2dy' = r^2\int \frac{y'^2}{y'^2-2D}\,dy' - \int y'^2dy'$$

$$= r^2\int \frac{y'^2-2D}{y'^2-2D}\,dy' + r^2\,2D\int \frac{dy'}{y'^2-2D} - \int y'^2dy'$$

$$= r^2y' - \tfrac{1}{3}y'^3 - \frac{r^2\,2D}{2\sqrt{2D}}\ \text{Nep. log.}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\}$$

unde $\int y'dx' = \frac{1}{2}y'x'^2 - \frac{1}{2}r^2y' + \frac{1}{6}y'^3 + \frac{1}{4}r^2\sqrt{(2D)}\ \mathrm{N.\ log.}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\} \ldots (35)$

Porro, quia ex $x^2 = r^2 - y^2$ sequitur $x\,dx = -y\,dy$,

$$\int y\,x\,dx = -\int y^2 dy = -\tfrac{1}{3}y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

quibus substitutis in $G\alpha$

$$G\alpha = D\frac{x'}{y'}\alpha = D\frac{u}{v}\alpha = \tfrac{1}{2}y'x'^2 - \tfrac{1}{2}r^2y' + \tfrac{1}{6}y'^3 + \tfrac{1}{4}r^2\sqrt{2D}\,\mathrm{N.Log.}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\} + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{3}y'x'^2 + \tfrac{1}{3}yx^2 + C$$

$$= y'(\tfrac{1}{6}x'^2 - \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{6}y'^2) + \tfrac{1}{3}y(y^2+x^2) + \tfrac{1}{4}r^2\sqrt{2D}\ \mathrm{N.Log.}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\} + C$$

sed $\quad \tfrac{1}{6}(x'^2+y'^2) = \tfrac{1}{6}\dfrac{r^2y'^2}{y'^2-2D}$, et $y^2+x^2=r^2$, ergo

$$G\alpha = D\frac{x'}{y'}\alpha = D\frac{u}{v}\alpha = \tfrac{1}{6}r^2y'\left\{\frac{y'^2}{y'^2-2D} - 3\right\} + \tfrac{1}{3}r^2y + \tfrac{1}{4}r^2\sqrt{(2D)}\ \mathrm{N.\ Log.}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\} + C \ldots (37)$$

Ex quâ aequatione, cum $y'^2 - y^2 = 2D$, $y^2 = r^2 - x^2$, et $y : x = u : v$ conjunctâ facile invenitur aequatio inter α, u, et v, cujus ope ex (34) eliminanda esset α, et haec eliminatio facile instituitur, sed tam complicata oritur formula inter u et v, ut nullius nobis usûs esse possit. Idem igitur faciendum, quod in priore exemplo fecimus, ut singulorum punctorum g coördinatas computantes videamus, utrum ubivis in ipsis juncturis sint posita.

Ut videamus, utrum materies ubivis suâ duritie pressionem juncturis normalem ferre possit, habemus

1°. quando punctum g dorso propius est, quam curvae arcûs, pressionem normalem $pD' = pD\frac{r}{y} = pD\ \mathrm{Sec}\,\mu$ ex (30); resistentiam $T = 2V(y'-v)\mathrm{Sec}\,\mu$; et rationem inter utramque:

$$S' = \frac{2V(y'-v)\,\mathrm{Sec}\,\mu}{pD\,\mathrm{Sec}\,\mu} = \frac{2V(y'-v)}{pD} \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

2°. Quando punctum g proprius est curvae arcûs quam dorso, habemus

$$T'' = 2V(v-y)\,\mathrm{Sec}\,\mu$$

et
$$S'' = \frac{2V(v-y)}{pD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Igitur quaerere debemus juncturas, in quibus $y'-v$ et $v-y$ fiant minima; et his minimis substituendis in (38) et (39) videre, utrum S' et S'' sint satis magna. Quantitas v ita invenitur: ex (37) habemus, substituendo y'^2-2D pro y^2,

$$D\frac{x'\alpha}{y'}=r^2\left\{\tfrac{1}{3}y'\frac{(3D-y'^2)}{y'^2-2D}+\tfrac{2}{3}\sqrt{(y'^2-2D)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2D}\,\text{N.Log}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\}+\frac{C}{r^2}\right\}$$

sive

$$\frac{x'\alpha}{r^2y'}=\frac{1}{D}\left\{\tfrac{1}{3}y'\left\{\frac{3D-y'^2}{y'^2-2D}\right\}+\tfrac{2}{3}\sqrt{(y'^2-2D)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2D}\,\text{N.Log}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\}+\frac{C}{r^2}\right\}\ldots(40)$$

Sed ex (32) et $x:y=x':y'$, est

$$x'(u-\alpha)=y'(d'-v)$$

atqui $\quad x':y'=u:v,\ \text{et}\ u=\frac{x'}{y'}v,$

unde $\quad x'\left(\frac{x'}{y'}v-\alpha\right)=y'(d'-v)$

$$v\left(\frac{x'^2}{y'}+y'\right)=x'\alpha+d'y'$$

$$v\left(\frac{x'^2+y'^2}{y'}\right)=v\frac{r^2y'^2}{y'(y'^2-2D)}=x'\alpha+d'y'$$

$$v=(y'^2-2D)\left(\frac{d}{r^2}+\frac{x'\alpha}{r^2y'}\right)$$

in quam formulam pro $\frac{x'\alpha}{r^2y'}$ substituendo ex (40) habemus:

$$v=\frac{y'^2-2D}{D}\left\{\frac{d'D}{r^2}+\frac{C}{r^2}+\tfrac{1}{3}y'\frac{(3D-y'^2)}{y'^2-2D}+\tfrac{1}{3}\sqrt{(y'^2-2D)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2D}\,\text{N.Log}\left\{\frac{y'+\sqrt{2D}}{y'-\sqrt{2D}}\right\}\right\}\ldots(41)$$

Quodsi non y' sed y in quantitate v volumus, pro y' substituimus $\sqrt{(y^2+2D)}$, et habemus

$$v=\frac{y^2}{D}\left\{\frac{d'D}{r^2}+\frac{C}{r^2}+\tfrac{1}{3}\frac{\sqrt{(y^2+2D)}(3D-y^2-2D)}{y^2}+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}\sqrt{2D}\,\text{N.Log}\frac{\sqrt{(y^2+2D)}+\sqrt{2D}}{\sqrt{(y^2+2D)}-\sqrt{2D}}\right\}$$

$$=\frac{y^2}{D}\left\{\frac{d'D}{r^2}+\frac{C}{r^2}+\tfrac{1}{3}y+\frac{(D-y^2)\sqrt{(y^2+2D)}}{3y^2}+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}\sqrt{2D}\,\text{N.Log}\frac{\sqrt{(y^2+2D)}+\sqrt{2D}}{\sqrt{(y^2+2D)}-\sqrt{2D}}\right\}\ldots(42)$$

Ex hisce (41) et (42) determinantur quantitates $y'-v$ et $v-y$, earumque minima, quae differentiando inveniuntur; sed sunt illa iterum ita complicata, ut praestet pro variis juncturis quantitates S' et S'' computare, et hinc determinare, utrum ubivis satis superent unitatem.

Quod ad caeteras conditiones, quibus jubetur, ne fornix secundum planum quodvis disrumpatur, aut onera a ponte ferenda aequilibrium perturbent, iisdem atque ante formulis est utendum. Itaque statim ad exemplum transimus.

§ 12.

Exemplum.

Ponamus, curvam arcûs esse circuli partem descriptam radio $r = 87^{\text{ped Angl.}},5$

Aperturae altitudinem . . . . $h = 35^{\text{ped}}$

» latitudinem . . . . $2O = 140^{\text{ped}}$

Crassitudinem fornicis in vertice . . . . $e = 3^{\text{ped}}$

Pondus specificum materiei . . . . $= 2,4$

Quia 1 Pes Angl. $= 3,^{\text{decim}}0479868$, est 1 idem cubic. $= 28,3165$ decim. cub.; igitur

Pondus pedis cubici, circa . . . . $p = 68^{\text{Kil}}$

Pondus, quo materiei centrimetrum cubicum disrumpatur . . $= 200^{\text{Kil}}$

Sed 1 pes angl. quadr. $= 929,\square^{\text{Cent}}0225$; igitur pondus, quo pes quadr. hujus materiei disrumpatur . . . . $V = 185800^{\text{Kil}}$

Mensurae, quas hoc loco sumimus, fere conveniunt cum ponte celeberrimo in Angliâ, quem WILLIAM EDWARDS exstruxit annis 1746—1756 in flumine *Taaf* prope *Llantrissent* in comitatu Glamorganensi (1).

---

(1) Vid. J. SAVAGE *on Bridge Building*; WIEBEK. Tom. IV. p. 183; *Encyclopaed. Metropol.* in voce *Bridge*, p. 805.

Ex (23) est: $D = \frac{2re + e^2}{2} = \frac{175.3 + 3^2}{2} = 267$; unde $pD = 68.267 = 18156^{Kil}$;

Substituendo D et r^2 in aequationem (A) dorsi, haec fit

$$(534 - y'^2)(x'^2 + y'^2) - 7656{,}25\, y'^2 = 0$$

ex quâ pro singulis y' quantitates x' possent computari. Sed quia simul nobis x, y, D′, G et μ sunt quaerendae, praestat hisce formulis simplicioribus uti:

$$x^2 = r^2 - y^2 = 7656{,}25 - y^2$$

$$y'^2 = y^2 + 2D = y^2 + 534$$

$$x' = \frac{x}{y}\, y'$$

$$D' = D\frac{r}{y} = \frac{267.87{,}5}{y} = \frac{23362{,}5}{y}$$

$$G = D\frac{x}{y}$$

ex quibus numeros in sequentem tabulam relatos invenimus: desinit tabula in $y = 52^{ped},5$ quia ex $r = 87^{ped},5$ et altitudo $= h = 35^{ped}$ sequitur, ordinatam imi puncti arcûs $= 52^{ped},5$ esse. Ex numeris autem hisce delineavimus figuram 14^{am}.

y	x	y′	x′	G	D′
$87^{ped},5$	$0^{ped},00$	$90^{ped},50$	0^{ped}	0,0	267
87	9,34	90,02	9,78	28,7	268,5
86	16,13	89,05	16,70	50,1	271,7
85	20,77	88,10	21,52	65,2	274,9
84	24,50	87,12	25,41	77,9	278,1
83	27,70	86,16	28,75	89,1	281,5
82	30,53	85,20	31,72	99,4	284,9
81	33,09	84,23	34,41	109,1	288,4
80	35,44	83,27	36,89	118,3	292,0
79	37,62	82,31	39,20	127,1	295,7
78	39,65	81,35	41,36	135,7	299,5
77	41,56	80,39	43,39	144,1	303,4
76	43,36	79,44	45,32	152,3	307,4
75	45,07	78,48	47,16	160,4	311,5
74	46,69	77,53	48,92	168,5	315,7
73	48,24	76,57	50,60	176,4	320,0
72	49,62	75,62	52,22	184,4	324,5
71	51,14	74,67	53,78	192,3	329,0
70	52,50	73,72	55,29	200,3	333,7
69	53,81	72,77	56,75	208,2	338,6
68	55,07	71,82	58,16	216,2	343,6
67	56,28	70,87	59,53	224,3	348,7
66	57,45	69,93	60,87	232,4	354,0
65	58,58	68,99	62,17	240,6	359,4
64	59,67	68,04	63,44	248,9	365,0
63	60,72	67,10	64,68	257,3	370,8
62	61,74	66,17	65,89	265,9	376,8
61	62,73	65,23	67,08	274,6	383,0
60	63,69	64,30	68,25	283,4	389,4
59	64,62	63,36	69,40	292,4	396,0
58	65,52	62,43	70,52	301,6	402,8
57	66,39	61,51	71,64	311,0	409,9
56	67,23	60,58	72,73	320,6	417,2
55	68,05	59,66	73,82	330,4	424,8
54	68,85	58,74	74,89	340,4	432,7
53	69,62	57,82	75,95	350,8	440,8
52,5	70,00	57,36	76,48	356,0	445,0

Punctum inflexionis reperitur per formulas (27) et (28)

$$y' = \sqrt{\{\sqrt{(16\,D^2 + 6\,D\,r^2)} - 2\,D\}}, \text{ et } x' = \frac{y'^2}{\sqrt{6\,D}}.$$

Ex $D = 267$ et $r^2 = 87{,}5$ habemus $\sqrt{(16\,D^2 + 6\,D r^2)} = 1538{,}556$, et $2\,D = 534$, unde $\quad y'^2 = 1004{,}556, \quad y' = 31^{ped},69, \quad$ et $x' = 25^{ped},10.$

Punctum, ad quod hae coördinatae pertinent, cadit extra curvae nostrae limites: unde concludimus, totam curvam, quatenus a nobis adhibetur, esse sursum convexam.

Ut pateat, utrum dorsi inclinatio ad horizontem satis parva facilem adscensum praebeat, computemus angulum Tangentis extremi puncti B cum horizonte. Pag. 74 form. (24) vidimus:

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{(y'^2 - 2\,D)\,x'y'}{2\,D\,x'^2 + y'^4} = -\frac{y^2 x' y'}{2\,D\,x'^2 + y'^4}$$

Habemus $\quad y' = 57^{ped},36, \; x' = 76^{ped},48, \; y = 52^{ped},5,$ unde

$$\frac{dy'}{dx'} = -1{,}128; \text{ igitur Tang } \Phi = 1{,}128, \quad \text{et } \Phi = 48^{\circ}26'.$$

Tanta igitur est dorsi convexitas, ut omnino transiri non possit.

Quamvis jam hinc manifestum sit, nostrum fornicem pontis officio fungi non posse, videamus, utrum omnibus aequilibrii conditionibus satisfaciat. Primum ut exploremus, utrum pressio ubivis ad ipsas juncturas applicata sit, adhibemus formulam hancce, ex (41) et (42) compositam:

$$v = \frac{y^2}{D}\left\{\frac{d'D + C}{r^2} - \tfrac{1}{3}(y' - y) + \tfrac{1}{3}\frac{Dy'}{y^2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2D} \text{ Nep. Log. } \frac{y' + \sqrt{2\,D}}{y' - \sqrt{2\,D}}\right\};$$

in quâ reperitur quantitas constans C, quae prius est determinanda. Pro $\; y = r \;$ fit $\quad y' = r + e, \;$ et $v = d'$: igitur

$$d' = \frac{r^2}{D}\left[\frac{d'D + C}{r^2} - \tfrac{1}{3}e + \frac{D(r+e)}{3\,r^2} + \frac{\sqrt{2\,D}}{4\,m}\log.\left\{\frac{r + e + \sqrt{2\,D}}{r + e - \sqrt{2\,D}}\right\}\right]$$

unde $\quad C = -\tfrac{1}{6}(3\,r + e)e^2 - \dfrac{r^2\sqrt{2\,D}}{4\,m}\log.\left\{\dfrac{r + e + \sqrt{2\,D}}{r + e - \sqrt{2\,D}}\right\}.$

Habemus $r = 87^{ped},5$, $e = 3^{ped}$, $D = 267$, et $m = 0{,}43429$; hinc $C = -23493{,}9$, et substituendo omnes numeros pro literis

$$v = 0{,}0037453\, y^2 \left\{ 89 \frac{y'}{y^2} - \tfrac{1}{3}(y' - y) + 13{,}302 \log. \frac{y' + 23{,}108}{y' - 23{,}108} - 3{,}06859 \right\} + 0{,}00013061\, y^2 d'$$

cujus formulae ope invenimus sequentes quantitates

y	v
$87^{ped},5$	d'
85	$2^{ped},34 + 0{,}944\, d'$
80	$7{,}00 + 0{,}836\, d'$
75	$10{,}93 + 0{,}734\, d'$
70	$14{,}27 + 0{,}640\, d'$
65	$17{,}13 + 0{,}552\, d'$
60	$19{,}34 + 0{,}470\, d'$
55	$20{,}99 + 0{,}395\, d'$
52,5	$21{,}66 + 0{,}360\, d'$

Quantitates v pendent a constante d', i. e. a positione puncti applicationis pressionis horizontalis ad juncturam in vertice fornicis : d' autem semper $> 87^{ped},5$ et $< 90,^{ped}5$ est. Videamus pro variis d', intra hos limites contentis, quaenam sint v.

y	y'	v				
		$d' = 88^{ped}$	$d' = 88^{ped},5$	$d' = 89^{ped}$	$d' = 89^{ped},5$	$d' = 90$
$87^{ped},5$	$90^{ped},50$	$88^{ped},00$	$88^{ped},50$	$89^{ped},00$	$89^{ped},50$	$90^{ped},00$
85	88,10	85,42	85,88	86,36	86,83	87,30
80	83,27	80,57	80,99	81,40	81,82	82,24
75	78,48	75,52	75,89	76,26	76,62	76,99
70	73,72	70,59	70,91	71,23	71,55	71,87
65	68,99	65,71	65,98	66,26	66,53	66,81
60	64,30	60,70	60,94	61,17	61,41	61,64
55	59,66	55,76	55,96	56,15	56,35	56,55
52,5	57,36	53,34	53,52	53,70	53,88	54,06

Curvam pressionum cum $d = 89^{ped}$ convenientem figurâ 14 delineavimus atque indicavimus literis e g' g''.

Quando igitur quantitates v cum y et y′ comparamus, videmus intra $d' = 88^{ped}$ et $d' = 90^{ped}$ v semper $>$ y et $<$ y′ esse; itaque pressionem ad ipsam juncturam applicari.

Ratio inter resistentiam materiei et pressionem normalem quaeritur formulis pag. 78.

$$S' = \frac{2V}{pD}(y' - v) \quad \text{et} \quad S'' = \frac{2V}{pD}(v - y)$$

Habemus $V = 185800^{Kil}$, $p = 68^{Kil}$, $D = 267$; igitur

$$\frac{2V}{pD} = \frac{2.185800}{68.267} = \frac{371600}{18156} = 20{,}5$$

Quantitates $y' - v$ et $v - y$ ex praecedenti tabulâ reperiuntur.

y	$d' = 88^{ped}$		$d' = 88^{ped},5$		$d' = 89^{ped}$		$d' = 89^{ped},5$		$d' = 90^{ped}$	
	$y' - v$	$v - y$	$y' - v$	$v - y$	$y' - v$	$v - y$	$y' - v$	$v - y$	$y' - v$	$v - y$
$87^{ped},5$	$2^{ped},50$	$0^{ped},50$	$2^{ped},00$	$1^{ped},00$	$1^{ped},50$	$1^{ped},50$	$1^{ped},00$	$2^{ped},00$	$0^{ped},50$	$2^{ped},50$
85	2,68	0,42	2,22	0,88	1,74	1,36	1,27	1,83	0,80	2,30
80	2,70	0,57	2,28	0,99	1,87	1,40	1,45	1,82	1,03	2,24
75	2,96	0,52	2,59	0,89	2,22	1,26	1,86	1,62	1,49	1,99
70	3,13	0,59	2,81	0,91	2,49	1,23	2,17	1,55	1,85	1,87
65	3,28	0,71	3,01	0,98	2,73	1,26	2,46	1,53	2,18	1,81
60	3,60	0,70	3,36	0,94	3,13	1,17	2,89	1,41	2,66	1,64
55	3,90	0,76	3,70	0,96	3,41	1,15	3,31	1,35	3,11	1,55
52,5	4,02	0,84	3,84	1,02	3,66	1,20	3,48	1,38	3,30	1,56

Omnium quantitatum in hac tabulâ inveniendarum minima est $v - y = 0^{ped},42$. Hanc multiplicando per $\frac{2V}{pD} = 20{,}5$, fit $S'' = 20{,}5 \times 0{,}42 = 8{,}62$; quae est tanta, ut absque ullo disrumpendi periculo pressio normalis in juncturam agere possit. Igitur ubicunque pressio horizontalis intra puncta e′ et e″ (fig. 14.) ad mediam juncturam applicetur, firmus est fornix.

Superest, ut exploremus, utrum onera ponti imponenda ab eo ferri possint. Sint onera dorso imposita ut abscissae x′, igitur $G' = n x'$ (pag. 67): atqui

$$n = \frac{44^{Kil},319}{p} = \frac{44^{Kil},319}{68^{Kil}} = 0{,}651755, \quad \text{et}$$

$$G' = 0{,}65175\, x'.$$

Invenitur angulus quem composita ex G, G′ et D facit cum verticali per $\text{Tang}\,\mu' = \frac{D}{G+G'}$; angulus autem, quem junctura facit cum verticali, per $\text{Tang}\,\mu = \frac{G}{D} = \frac{x}{y}$; unde angulus juncturae, cum directione compositae $\psi = \mu + \mu'$, qui debet superare complementum anguli frictionis $90 - \theta = 65^\circ$. Ex his formulis eruuntur quantitates sequentis tabulae, in quâ onera per totum dorsum usque ad $x' = 76^{ped},48$ distributa esse sumsimus.

y	x'	G	G'	$G+G'$	μ	μ'	ψ
85^{ped}	$21^{ped},52$	65,2	14,0	79,2	13°44′	73°29′	87°13′
80	36,89	118,3	24,0	142,3	23°54′	61°57′	85°51′
70	55,29	200,3	36,0	236,3	36°52′	48°30′	85°22′
60	68,25	283,4	44,5	327,9	46°43′	39° 9′	85°52′
55	73,82	330,4	48,1	378,5	51° 3′	35°12′	86°15′
52,5	76,48	356,0	49,9	405,9	53° 8′	33°20′	86°28′

Quantitates ψ igitur tantopere 65° superant, ut motus juncturis parallelus nusquam locum habere possit.

Ut videamus, utrum pressio ubivis ad ipsam juncturam applicetur, adhibemus formulas similes iis, quas pag. (68) invenimus. Oportet igitur antea α computare.

Ex (32) pag. 77 habemus : $\alpha = u - \frac{y(d'-v)}{x}$; sed propter $x : y = u : v$ est

$$u = \frac{x}{y} v,$$

$$\text{et } \alpha = \frac{x}{y} v + \frac{y}{x} v - \frac{y}{x} d' = \frac{x^2+y^2}{yx} v - \frac{y}{x} d' = \frac{r^2 v}{yx} - \frac{y}{x} d' \quad . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Deinde habemus
$$\alpha' = \alpha - (\alpha - \tfrac{1}{2} x') \frac{G'}{G+G'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Ex similitudine triangulorum m g z et g n d″ (fig. 9) iterum ducimus

$$u' - \alpha' = (d' - v') \text{ Tang}\,\mu'$$
$$u' - x = (v' - y) \text{ Tang}\,\mu$$

unde subtrahendo $x - \alpha' = d' \text{ Tang}\,\mu' + y \text{ Tang}\,\mu - v'(\text{Tang}\,\mu' + \text{Tang}\,\mu)$

et $$v' = \frac{-x+\alpha'+d' \operatorname{Tang}\mu' + y \operatorname{Tang}\mu}{\operatorname{Tang}\mu' + \operatorname{Tang}\mu}$$

atqui $$x = y \operatorname{Tang}\mu,$$

igitur $$v' = \mp \frac{\alpha' + d' \operatorname{Tang}\mu'}{\operatorname{Tang}\mu' + \operatorname{Tang}\mu} = \operatorname{Cos}\mu \left\{ \frac{\alpha' \operatorname{Cos}\mu' + d' \operatorname{Sin}\mu'}{\operatorname{Sin}(\mu'+\mu)} \right\}$$

et sumendo $$\frac{d'}{\alpha'} = \operatorname{Cot} m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

fit $$v' = \frac{\alpha' \operatorname{Cos}\mu}{\operatorname{Sin}(\mu'+\mu)}(\operatorname{Cos}\mu' + \operatorname{Cot} m \operatorname{Sin}\mu') = \frac{\alpha' \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}(\mu'+\mu)}{\operatorname{Sin} m \operatorname{Sin}(\mu'+\mu)} \ldots\ldots \quad (46)$$

quae v' intra y et y' debet contineri. Quantitas d' in form. (43) et (45) adest: hanc sumamus $= 89^{\text{ped}}$, ut in mediam juncturam verticis applicata sit pressio horizontalis. Per aeq. (43) habemus

pro $y = 85^{\text{ped}}$	$\alpha = 10^{\text{ped}},30$	$\alpha' = 10^{\text{ped}},38$
$= 80$	$= 18,91$	$= 18,84$
$= 70$	$= 29,74$	$= 29,42$
$= 60$	$= 38,72$	$= 38,10$
$= 55$	$= 42,93$	$= 42,16$
$= 52,5$	$= 45,12$	$= 44,28$

Ex his sumendo $d' = 89^{\text{ped}}$ prodeunt quantitates v', in sequenti tabulâ positae juxta quantitates y ad easdem juncturas pertinentes.

y	m	v′	v′ — y
85^{ped}	6°39′	$85,^{\text{ped}}89$	+ $0,^{\text{ped}}89$
80	11°57′	80,13	+ 0,13
70	18°18′	69,12	— 0,88
60	23°10′	58,95	— 1,05
55	25°21′	54,02	— 0,98
52,5	26°17′	51,55	— 0,95

Videmus, puncta applicationis pressionum in medio quidem fornice in ipsis esse juncturis positas; sed pro $y = 79$ aut 78^{ped} curva pressionum secat curvam arcûs, et inferior prioris curvae pars tota infra ipsum fornicem cadit, uti ostenditur fig. 14 curvâ e g, g,'. Igitur aequilibrium non amplius adest; quamvis enim motus juncturis parallelus locum non habebit, quia curva pressionum adhuc omnibus juncturis est fere normalis, simul et motus rotatorius locum habebit, et pressio in minimas partes juncturarum, ad $y = 81^{ped}$ $y = 80^{ped}$ $y = 79^{ped}$ pertinentium, distributa materiem disrumpet; itaque fornix necessario corruere debet, nisi data, ex quibus hanc curvae pressionum formam computavimus, mutentur.

Sed duas constantes pro lubitu sumsimus, $d' = 89^{ped}$ et $D = 267$: igitur explorandum nunc, utrum sive hac, sive illâ, sive utrâque mutandâ possimus eas ita sumere, ut fornicis aequilibrium oneribus impositis non rumpatur. Primum servatâ $D = 267$, i. e. eâdem pressionis horizontalis quantitate, eam in aliud punctum mediae juncturae applicemus. Quando, fig. 13, D ex e in e' transfertur, ponderis $G + G'$ directionem in puncto f' secat, cum ante eam in f secaret; quantitatibus virium iisdem manentibus composita D' habebit directionem f' g', priori directioni f g parallelam, et aget in punctum g' juncturae b d: igitur ordinata $M k = v'$ mutabitur in $M k'$, et facile determinatur, quaenam sit ratio incrementi $k k'$ ordinatae v' ad incrementum $e e'$ ordinatae d' Nam ductâ per g verticali lineâ g h i, est $g' g i = \mu$, $b g' i = \mu + \mu' = \psi$; quia $e e' f' f$ et $f f' i g$ sunt parallelogramma, est $e e' = f f' = g i$; in triangulo $i g g'$ $g i = \frac{g g' \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} \mu'}$; et in triangulo rectangulo $g' g h$ $g' g = g h \operatorname{Sec} \mu$; sed denique $g h = k k'$; igitur

$$e e' = \frac{k k' \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Cos} \mu \operatorname{Sin} \mu'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Ex figurâ patet, $k k'$ semper minorem fore, quam $e e'$.

Hujus formulae ope determinemus, quantum incrementum ordinatae d' sit tribuendum, ut in nostro fornice puncta g' cadant supra curvam arcûs. Oportet singulas v' tanto majores fieri, ut superent quantitates y, ad eandem juncturam pertinentes; et quia non licet puncta g nimium accedere ad curvam arcus, ne pressio in minimam juncturae partem agens materiae cohaesionem vincat, pro $y = 70^{ped}$ usque ad $y = 52{,}5$ incrementum $k k'$ minus esse non potest 1 pede cum dimidio; quo incremento in (47) substituto, eruuntur pro incremento $e\,e'$ sequentes quantitates, quibus additis $d' = 89^{ped}$ quantitates $d_{\prime}'$ inveniuntur.

y	e e′	$d_{\prime}'$
70^{ped}	$2^{ped},50$	$91^{ped},50$
60	3,46	92,46
55	4,13	93,13
52,5	4,54	93,54

Atqui $d_{\prime}'$ non potest major quam $90_{ped},5$ fieri, igitur punctum e nunquam in mediâ juncturâ ita potest sumi, ut, manente $D = 267$, curva pressionum tota sit supra curvam arcûs posita.

Superest, ut mutemus quantitatem pressionis horizontalis. Atque patet statim ex fig. 13, quando in parallelogrammo virium f o m l vis verticalis o f eadem manet, horizontalis vero l f increscit, et fit l′ f, fore, ut composita $D_{\prime}'$, producta usque ad juncturam b d, in quam agit, hanc juncturam secet in puncto g'', supra g posito, iterumque ordinatam $v' = M\,k''$ majorem fieri quam ante: itaque novam quantitatem $D_{\prime}$ ita determinabimus, ut punctum g in juncturâ, pro quâ longissime infra curvam arcûs positum erat, supra eam cadat, et tantum a puncto d distet, ut pressio normalis a satis magnâ juncturae parte sustineatur. Deinde autem videbimus, utrum $D_{\prime}$ caeteris aequilibrii conditionibus quoque satisfaciat.

Sit (fig. 13) $o\,f\,m' = g''f\,n' = \mu_{\prime}'$. In triangulo rectangulo, quod oritur ductâ horizontali linea $g''n''$, est $\quad \mathrm{Tang}\,\mu_{\prime}' = \dfrac{g''n''}{f\,n''}$

sed $\quad g''n'' = g''h'' + g\,n = g\,h''\,\mathrm{Tang}\,g''g\,h'' + f\,n\,\mathrm{Tang}\,g\,f\,n$

porro $\quad g''g\,h'' = \mu, \quad g\,f\,n = h''g\,f = \mu', \quad$ et $\; f\,n = d' - v'$

igitur $\quad g''n'' = g\,h''\,\mathrm{Tang}\,\mu + (d' - v')\,\mathrm{Tang}\,\mu'$;

deinde $f\,n'' = f\,n - n\,n'' = d' - v' - g\,h''$; unde

$$\mathrm{Tang}\,\mu_{\prime}' = \frac{(d' - v')\,\mathrm{Tang}\,\mu' + g\,h''\,\mathrm{Tang}\,\mu}{d' - v' - g\,h''} \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

et ex triangulo $o f m'$

$$D_{,} = (G + G') \operatorname{Tang} \mu_{,}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Sumendo $d' = 89^{ped}$ et $g h'' = 2^{ped},00$, ex formulis (48) et (49) invenitur:

pro	$y = 70^{ped}$ fieri	$\mu_{,}' = 53°16'$	et $D_{,} = 316,65$
	$y = 60^{ped}$	$= 43°28'$	$= 310,82$
	$y = 55^{ped}$	$= 39°28'$	$= 311,71$
	$y = 52^{ped},5$	$= 37°36'$	$= 312,58$

Quodsi igitur ex variis $D_{,}$ eam, quae est maxima, scil. $D_{,} = 316,65$ sumamus, curva pressionum pro juncturis inferioribus non amplius infra curvam arcûs cadet. Sed crescente $D_{,}$ ubivis crescet composita $D_{,}'$, et haec non amplius juncturis normalis erit. Igitur nunc iterum videndum

1°. utrum angulus $\psi = \mu + \mu_{,}'$ major sit complemento anguli frictionis;

2°. utrum $D_{,}'$, decomposita secundum normalem ad juncturas, a materiae duritie ferri possit.

Ut prius innotescat, angulum $\mu_{,}'$ computamus per formulam $\operatorname{Tang} \mu_{,}' = \frac{D_{,}}{G + G'}$, ex quâ habemus sequentes quantitates:

y	$\mu_{,}'$	μ	ψ
85^{ped}	75°57′	13°44′	89°41′
80	65°48′	23°54′	89°42′
70	53°16′	36°52′	90° 8′
60	44° 0′	46°43′	90°43′
55	39°55′	51° 3′	90°58′
52,5	37°58′	53° 8′	91° 6′

Ex his patet, directionem compositae $D_{,}'$ tam prope a normali ad juncturas abesse, ut omnino nullus motus juncturae parallelus possit fieri.

Ad rationem inter resistentiam materiae et pressionem normalem inveniendam opus est ordinatis v'' curvae pressionum, quae nunc pro omnibus juncturis majores erunt quam quantitates v' pag. 87.

Ex fig. 13 habemus, ponendo $M k'' = v''$, et $k'' g'' = u''$, in triangulo $g'' k'' M$

$$g'' k'' = M k'' \ \mathrm{Tang}\, \mu, \text{ sive } u'' = v'' \ \mathrm{Tang}\, \mu$$

et in triangulo $f g'' n''$ $\quad g'' n'' = f n'' \cdot \mathrm{Tang}\, \mu_{\prime}{}'$,

sive $\quad g'' k'' - n'' k'' = (M e - M k'') \ \mathrm{Tang}\, \mu_{\prime}{}'$

$$u'' - \alpha' = (d' - v'') \ \mathrm{Tang}\, \mu',$$

unde $\quad v'' \ \mathrm{Tang}\, \mu - \alpha' = (d' - v'') \ \mathrm{Tang}\, \mu_{\prime}{}'$

et $$v'' = \frac{d' \ \mathrm{Tang}\, \mu_{\prime}{}' + \alpha'}{\mathrm{Tang}\, \mu + \mathrm{Tang}\, \mu_{\prime}{}'}.$$

quae iterum, ponendo $\frac{\alpha'}{d'} = \mathrm{Tang}\, m$, mutatur in

$$v'' = \frac{d' \ \mathrm{Cos}\, \mu \ \ \mathrm{Sin}\, (m + \mu_{\prime}{}')}{\mathrm{Cos}\, m \ \ \mathrm{Sin}\, (\mu + \mu_{\prime}{}')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Anguli m iidem sunt, quos pag. 87 adhibuimus, igitur per formulam hanc statim habemus v''.

y	v″	y′ — v″	v″ — y
87,ped5	89ped	1ped,50	1ped,50
85	86,35	1,75	1,35
80	81,30	1,97	1,30
70	71,12	2,60	1,12
60	61,20	3,10	1,20
55	56,23	3,43	1,23
52,5	53,73	3,63	1,23

Porro habemus pressionem juncturae normalem

$$P = p\, D_{\prime}{}' \ \mathrm{Sin}\, (\mu + \mu_{\prime}{}') = \frac{p\, D_{\prime} \ \mathrm{Sin}\, (\mu + \mu_{\prime}{}')}{\mathrm{Sin}\, \mu'_{\prime}},$$

et resistentiam materiae (quia puncta applicationis pressionum ubivis curvae arcûs sunt propiora)

$$T'' = 2\, V\, (v'' - y)\ \mathrm{Sec}\, \mu$$

igitur $$S'' = \frac{T''}{P} = \frac{2\, V\, (v'' - y) \ \mathrm{Sin}\, \mu_{\prime}{}'}{p\, D_{\prime} \mathrm{Cos}\, \mu \ \mathrm{Sin}(\mu + \mu_{\prime}{}')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

ubi $$\frac{2V}{pD,} = \frac{371600}{68.316,65} = 17,26.$$

Hinc ducuntur quantitates S'' sequentis tabulae:

y	S''
$87^{ped}5$	25,89
85	23,27
80	22,38
70	19,36
60	20,98
55	21,67
52,5	21,77

ex quibus patet, firmissimum omnino esse fornicem, quamvis ponderibus onustum.

Unde concludimus, licere pontem ex datâ materiâ exstruere, cujus arcus circularis habeat aperturae latitudinem 140 ped., altitudinem 35 ped. et crassitudinem in vertice 3 pedum.

Operae pretium est, hanc conclusionem, ex calculo deductam, conferre cum iis, quae experientia docuit in aedificando ponte illo, a quo in hoc exemplo mensuras sumsimus. Jam supra monuimus, nos eas sumsisse a ponte Anglo, vulgo Pont-y-Pryd dicto, quem exstruxit Guilielmus Edwardsius. Is nempe anno 1746 fluvium *Taaf* junxerat ponte lapideo, ex tribus arcubus composito: quem cum post biennium flumen impetu suo abstulisset, alterum in ejus locum substituere decrevit, qui aquis auctis liberiorem praeberet transitum; itaque anno 1751 unum arcum aedificavit, 140 pedes latum, 30 altum, atque 3 pedes in vertice crassum, cujus curva arcûs esset pars circuli: jamque fornix erat paratus, sed via supra eum nondum erat strata, quum latera nimio suo pondere depressa verticem extulerunt, et pons denuo corruit. Quo eventu edoctus Edwardsius pontem tertio exstructurus easdem quidem mensuras servavit, sed, ut partes pontis se mutuo aequilibrarent, in utroque latere tria fecit cava cylindriformia, quorum axes essent horizontales atque ad pontis longitudiuem normales: cavo ripae proximo tribuit diametrum 9 pedum, secundo 6 pedum, tertio 3 pedum. Indicat curvam dorsi hujus pontis in figurâ nostrâ 14 linea A H H′ H″, cava autem cylindriformia indicantur circulis a a a, b b b, et c c c. Pons ita anno 1756 exstructus adhuc salvus est.

Quodsi pontem Edwardsii H″ A C D cum nostro fornice aequilibrato B A C D comparemus, statim patebit, omnino fieri debuisse quod accidit, antequam cylindri a a a, b b b, c c c adessent: quum enim vertex in utroque fornice ejusdem fere sit ponderis, latus Edwardsii nostrum latus superat pondere totius partis B H H′ H″: in nostro fornice latera cum vertice sunt in aequilibrio; igitur latera Edwardsii, quum, caeteris rebus adjunctis iisdem illi atque nobis exsistentibus, tanto majus habuerint pondus, omnino debuerunt et ipsa descendere et mediam fornicis partem in cunei modum sursum premere. Excavationibus autem cylindricis id denique effectum est, ut quamvis curva dorsi in ponte multo sit altior, quam in fornice aequilibrato, tamen pondera laterum fere eadem sint atque in nostro fornice.

Itaque calculum omnino cum experientiâ convenire videmus.

§ 13.

Datâ curvâ dorsi atque curvâ arcûs determinare directiones juncturarum.

Restat, ut paucis absolvamus tertiam problematis propositi partem, quâ quaeritur, curvâ tam dorsi quam arcûs determinatâ, quae esse debeant directiones juncturarum in fornice, ut sit fornix in aequilibrio.

Iterum haec solutio est petenda ex aequationibus § 2 (pag. 25).

$$D + D' \operatorname{Cos} \mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$G + D' \operatorname{Sin} \mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$D d + D' v \operatorname{Cos}\mu - G\alpha - D' u \operatorname{Sin}\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$G = \int y\, dx - \int y' dx' + \tfrac{1}{2}(y' + y)\,(x' - x) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$G\alpha = \int y\, dx - \int y' x' dx' + \tfrac{1}{2}(x'^2 - x^2)\, y' + \tfrac{1}{6}(x' - x)\,(x' + 2x)\,(y - y') \quad \ldots (5)$$

$$\frac{y - y'}{x' - x} = \frac{v - y'}{x' - u} = \frac{y - v}{u - x} = \operatorname{Cot}\mu \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$d D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

quibus nunc accedunt aequationes curvarum dorsi et arcûs

$$y' = f'(x') \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

In omnibus hisce aeq. originem coördinatarum in mediâ curvâ dorsi ponimus.

Quaeritur, pro quocunque puncto curvae dorsi sive arcûs, qui sit angulus μ juncturae cum verticali, i. e. quaeritur aequatio inter angulum μ et unum ex coördinatis x, y, x', y'. Ut hanc obtineamus, adhibendae sunt aequationes

(1) (2) (4) (8) (9) et $\frac{y - y'}{x' - x} = \operatorname{Cot}\mu$ .... (6)

in quibus sex aequationibus ex septem quantitatibus D', G, y, y', x, x', et μ quinque eliminandae sunt, ut oriatur aequatio quaesita. Deinde per aeq. (4) et (6) et (7) determinanda est aequatio inter coördinatas u et v curvae pressionum, atque videndum, utrum intra curvam dorsi et arcûs tota sit comprehensa, et utrum juncturae ubivis pressioni normali possint resistere: denique dorso onera sunt imponenda, et horum actio in pontem est determinanda.

Ex formâ aequationum (8) et (9) pendet, utrum eliminationes indicatae possint fieri nec ne: quia vero eas in aequationibus generalibus instituere non possumus, statim ad exemplum transimus.

Saepius aedificantur fornices, qui duobus planis horizontalibus continentur (Gall. *plates bandes*). In ejusmodi fornice igitur utraque curva fit linea horizontalis; aeq. (8) et (9) mutantur in

$$y' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

quibus substitutis in (4) (5) et (6) invenitur

$$G = e\,x + \tfrac{1}{2} e\,(x' - x) = \tfrac{1}{2} e\,(x' + x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$G\alpha = \tfrac{1}{2} e\,x^2 + \tfrac{1}{6}(x' - x)\,(x' + 2x)\,e = \tfrac{1}{6} e\,(x'^2 + x\,x' + x^2) \quad \ldots \quad (13)$$

$$\frac{e}{x' - x} = \frac{v}{x' - u} = \frac{e - v}{u - x} = \mathrm{Cot}\,\mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Unde facile eruitur aequatio inter μ et x sive x′.

Dividendo (1) per (2) habemus $\mathrm{Cot}\,\mu = \frac{D}{G}$ .... (15)

et, substituendo $\frac{1}{2} e\,(x' + x)$ pro G (12), $\mathrm{Cot}\,\mu = \frac{2\,D}{e\,(x' + x)}$ .... (16)

Sed ex (14) est $x' - x = e\ \mathrm{Tang}\,\mu$, et $x' + x = 2\,x + e\ \mathrm{Tang}\,\mu$; quo substituto in (16) fit

$$\mathrm{Cot}\,\mu = \frac{2\,D}{2\,e\,x + e^2\ \mathrm{Tang}\,\mu}$$

et

$$\mathrm{Tang}\,\mu = \frac{2\,e\,x}{2\,D - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Sin aequationem inter μ et x′ volumus, est ex (14) $x = x' - e\ \mathrm{Tang}\,\mu$, et hinc

$$\mathrm{Cot}\,\mu = \frac{2\,D}{e\,(2\,x' - e\ \mathrm{Tang}\,\mu)}$$

et

$$\mathrm{Tang}\,\mu = \frac{2\,e\,x'}{2\,D + e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Ex (I) et (II) patet, juncturas omnes productas debere per unum punctum transire M, cujus distantia ab origine coördinatarum sit $= \frac{2\,D + e^2}{2\,e}$.

Nam si sumamus (fig. 15) $a\,M = \frac{2\,D + e^2}{2\,e}$, et $a\,b = x'$, erit Tang b M a $= \frac{a\,b}{a\,M} = \frac{2\,e\,x'}{2\,D + e^2}$, igitur b M a $= \mu$ pro puncto b. Si porro ex eodem puncto M ducamus quamlibet M b′, pro $x' = a\,b'$ erit Tang b′M a $= \frac{b'a}{M\,a} = \frac{2\,e\,x'}{2D + e^2}$; igitur hic quoque erit b′M a $= \mu$: quia autem M a sumsimus $= \frac{2\,D + e^2}{2\,e}$, est $M\,c = M\,a - a\,c = \frac{2\,D + e^2}{2\,e} - e = \frac{2\,D + e^2 - 2\,e^2}{2\,e} = \frac{2\,D - e^2}{2\,e}$, et Tang d M c $= \frac{c\,d}{M\,c} = \frac{2\,e\,x}{2\,D - e^2} = \mathrm{Tang}\,\mu$, ex quo cum (II) comparato iterum sequitur d M c $= \mu$.

Brevitatis causâ in iis, quae sequentur, faciemus

$$\frac{2D - e^2}{2e} = Mc = a \quad \text{et} \quad \frac{2D + e^2}{2e} = Ma = e + a = b.$$

In aeq. (I) et (II) invenitur quantitas D. Haec determinari potest, si v. c. sciamus oportere, ut extrema fornicis junctura b d faciat angulum = m cum verticali, dimidiam autem fornicis latitudinem c d esse = O. Nam substituendo in

(I) habetur $\quad \mathrm{Tang}\, m = \frac{2eO}{2D - e^2} = \frac{O}{a}$

unde $\quad (2D - e^2)\,\mathrm{Tang}\, m = 2eO$

et $\quad D = e\,(O\,\mathrm{Cot}\, m + \frac{1}{2}e) = e\,(a + \frac{1}{2}e) \; \ldots\ldots\ldots \; (17)$

quam quantitatem facile construere possumus. Nam quia in fig. 15. d c = O, et d M c = m, est c M = d c Cot d M c = O Cot m = a; quodsi igitur faciamus c r' = c M + ½ c a = a + ½ e, erit area a c r′ r″ = e (O Cot m + ½ e) = D, i. e. pressio horizontalis in medio fornice erit aequalis ponderi partis a c r′ r″.

§ 14.

De curvâ pressionum determinandâ.

Ad inveniendam aequationem curvae pressionum adhibemus aequat. (3) (12) (13) et (14). Substituendo — D pro D′ Cos μ et G pro D′ Sin μ in (3) habemus $\quad D\,(d - v) + G\,(u - \alpha) = 0$

et propter (15) $\quad \frac{d - v}{u - a} = -\frac{G}{D} = \mathrm{Tang}\,\mu = \frac{x}{a} \qquad a\,(v - d) = x\,(u - a) \;.\; (18)$

Ex (14) habemus $\frac{e - v}{u - x} = \mathrm{Cot}\,\mu = \frac{a}{x}$, unde $(e + a - v)\,x = a\,u$, et quia

$e + a = b \qquad x = \frac{a\,u}{b - v} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (19)$

Cujus ope ex (18) x potest eliminari. Ut α eliminetur adhibemus aequat. (13)

$$\alpha = \frac{\frac{1}{6}e(x'^2+x'x+x^2)}{G} = \frac{\frac{1}{6}e(x'^2+x'x+x^2)}{\frac{1}{2}c(x'+x)}$$

$$= \frac{x'^2+x'x+x^2}{3(x'+x)}; \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

quia ex (I) et (II) $\text{Tang}\,\mu = \frac{x}{a} = \frac{x'}{b}$, est $x' = \frac{b}{a}x$,

quo substituto in (20) haec fit

$$\alpha = \frac{x^2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{a}+1\right)}{3x\left(\frac{b}{a}+1\right)} = x\frac{b^2+ab+a^2}{3(ab+a^2)} \ldots\ldots (21)$$

iterumque substituendo in (18)

$$a(v-d) = x\left(u - x\frac{b^2+ab+a^2}{3a(b+a)}\right)$$

sive propter (19)

$$a(v-d) = \frac{au}{b-v}\left\{u - \frac{au(b^2+ab+a^2)}{3a(b-v)(b+a)}\right\}$$

$$(v-d) = \frac{u^2}{b-v}\left\{1 - \frac{b^2+ab+a^2}{3a(b+a)(b-v)}\right\}$$

$$= \frac{\{u^2 3(b+a)(b-v) - (b^2+ab+a^2)\}}{3(b+a)(b-v)^2}$$

$$(v-d)(b-v)^2 = \frac{u^2(2(b+a)b - a^2 - 3(b+a)v)}{3(b+a)}$$

unde
$$u^2 = \frac{3(v-d)(b-v)^2}{\frac{2b^2+2ab-a^2}{b+a} - 3v}$$

et sumendo $\frac{2b^2+2ab-a^2}{b+a} = 3c \ldots\ldots\ldots (22)$

fit
$$u^2 = \frac{(v-d)(b-v)^2}{c-v} \ldots\ldots\ldots (III)$$

quae est aequatio curvae pressionum. Propter $a < b$, quantitas c semper est positiva. Ut igitur u^2 semper sit quantitas positiva, oportet, ut $v-d$ et $c-v$

simul sint positivae, aut simul negativae; quod fieri tantum poterit, quando v sumimus majorem quam minorem ex utrâque quantitate c et d, et minorem quam majorem ex hisce c et d.

Inde concludimus, sumto (fig. 15) $a\,f = c$, et ductis lineis horizontalibus $e\,e'$ et $f\,f'$, totam curvam pressionum intra duas has lineas contineri.

Posito $v = c$ u^2 fit $= \infty$; igitur $f\,f'$ est asymptota curvae.

Pro $u = o$ et $v = d$ fit $\frac{d\,v}{d\,u} = o$; igitur curva pressionum in summo puncto e habet directionem horizontalem.

In singulis brachiis adest punctum inflexionis. Duplici differentiatione et faciendo $\frac{d^2v}{du^2} = o$ habetur aequatio

$$2v^3 + 2(c - 2d)v^2 - (3c^2 + 2cd - 3d^2)v + 2cd(2c - d) - b(c - d)^2 = o,$$

ex quâ coördinatae puncti inflexionis possunt determinari. Quia autem calculus est longus, neque certam nobis affert utilitatem, hoc loco omittitur.

Ex figurâ patet, fore ut curva pressionum non tota intra curvas dorsi et arcûs contineatur, quando $a\,f > a\,c$, i. e. quando $c > d$; quod plerumque locum habebit: nam

$$c = \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3(a + b)} = \frac{2(e + a)^2 + 2a(e + a) - a^2}{3(a + a + e)}$$

$$= \frac{2e^2 + 6ea + 3a^2}{6a + 3e} = \frac{6ea + 3e^2 - e^2 + 3a^2}{6a + 3e} = e + \frac{3a^2 - e^2}{6a + 3e} \;..\,(23)$$

quae quantitas e superabit, quoties $3a^2 - e^2$ erit positiva. Hoc fere semper obtinet; igitur $c > e$.

Determinemus igitur punctum, in quo curva pressionum secat curvam arcûs. Pro hoc puncto fit $v = e$, igitur $u^2 = \frac{(e - d)(b - e)^2}{c - e}$; sed $b - e = a = O\,\mathrm{Cot}\,m$,

unde . . . . . $$u^2 = \frac{(e - d)a^2}{c - e} = \frac{(e - d)O^2\mathrm{Cot}^2 m}{c - e} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

Quia aequilibrium non exsistit, quando curva pressionum ex parte infra curvam arcûs est posita, oportet, ut punctum illud i (fig. 15), cujus coördinatae sunt $v = e$ et $u = O \operatorname{Cot} m \sqrt{\left(\frac{e-d}{c-e}\right)}$, sit extra fornicem a c d b positum, i. e. ut sit $ci > cd$, sive

$$O \operatorname{Cot} m \sqrt{\left(\frac{e-d}{c-e}\right)} > O$$

unde habemus conditionem aequilibrii

$$e - d > (c - e) \operatorname{Tang}^2 m \quad \text{sive } d < e \operatorname{Sec}^2 m - c \operatorname{Tang}^2 m \ \ldots \ (25)$$

Quodsi in fornice, cujus apertura sit $2O$, crassitudo e et angulus incumbarum cum verticali m, d non potest ita sumi, ut hac quantitate minor sit, fornix non potest in aequilibrio esse. Praeterea d semper debet esse positiva, itaque oportet, ut $e \operatorname{Sec}^2 m > c \operatorname{Tang}^2 m$, sive

$$e > c \operatorname{Sin}^2 m,$$

unde patet, inter mensuras e, O et m quemdam nexum esse, neque licere tres has quantitates pro lubitu sumere. Nam substituendo pro c, haec formula mutatur in

$$e > \left\{e + \frac{3a^2 - e^2}{6a + 3e}\right\} \operatorname{Sin}^2 m$$

unde sequitur

$$e(1 - \operatorname{Sin}^2 m) > \frac{3a^2 - e^2}{6a + 3e} \operatorname{Sin}^2 m$$

$$e(6a + 3e) > (3a^2 - e^2) \operatorname{Tang}^2 m$$

$$e^2 + 2\frac{3a}{3 + \operatorname{Tang}^2 m} e > \frac{3a^2 \operatorname{Tang}^2 m}{3 + \operatorname{Tang}^2 m}$$

et

$$e > \frac{-3a + a\sqrt{(9 \operatorname{Sec}^2 m + 3 \operatorname{Tang}^4 m)}}{(3 + \operatorname{Tang}^2 m)}$$

sive, quia $a = O \operatorname{Cot} m$,

$$e > O\, \frac{-3 + \sqrt{(9 \operatorname{Sec}^2 m + 3 \operatorname{Tang}^4 m)}}{\operatorname{Tang} m\, (3 + \operatorname{Tang}^2 m)} \ \ldots\ldots\ldots \ (26)$$

Sed majorem etiam quantitatis e limitem determinare possumus. Non sufficit enim, curvam pressionum intra curvam arcûs et dorsi contineri; oportet etiam, ut puncta applicationis pressionum ad juncturas ubivis tantum ab extremitatibus juncturarum distent, ut pressio haec normalis in juncturae partem distributa ab eâ ferri possit, ut resistentia materiae satis superet pressionis quantitatem. Utramque igitur calculo subjiciamus:

1°. Pressio normalis D' eruitur ex aeq. (1) et (2), nam $D' \operatorname{Cos}\mu = -D$, et $D' \operatorname{Sin}\mu = -G$, unde, sumendo potentias utriusque membri, et addendo,

$$D' (\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Sin}^2\mu) = D^2 + G^2;$$

sed ex (15) $$G = D \operatorname{Tang}\mu,$$ igitur

$$D'^2 = D^2 + D^2 \operatorname{Tang}^2\mu = D^2 \operatorname{Sec}^2\mu,$$

et quando p iterum est pondus unitatis cubicae materiei

$$p D' = p D \operatorname{Sec}\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

2°. Resistentia materiae, quando g' propius est dorso, est

$$T' = 2 V (v - y') \operatorname{Sec}\mu = 2 V v \operatorname{Sec}\mu;$$

quando g propius est curvae arcûs,

$$T'' = 2 V (y - v) \operatorname{Sec}\mu = 2 V (e - v) \operatorname{Sec}\mu,$$

igitur ratio inter resistentiam et pressionem

sive $$S' = \frac{2 V v}{p D},$$ sive $$S'' = \frac{2 V (e - v)}{p D}.$$

In utraque S' et S'' habemus v, quae facile eliminari potest. Nam ex (19) sequitur $u^2 = \frac{x^2 (b - v)^2}{a^2}$, quo substituto in (III) habemus

$$\frac{x^2 (b - v)^2}{a^2} = \frac{(v - d) (b - v)^2}{c - v}$$

unde $$x^2 (c - v) = a^2 (v - d)$$

et $$v = \frac{d a^2 + c x^2}{a^2 + x^2}$$

Sed ex fig. (15) patet, pro quocunque $x = c d'$, esse

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(c d')^2}{(c d')^2 + (M c)^2} = \left(\frac{c d'}{d'M}\right)^2 = \operatorname{Sin}^2\mu$$

et $$\frac{a^2}{a^2 + x^2} = \frac{(M c)^2}{(c d')^2 + (M c)^2} = \left(\frac{M c}{d'M}\right)^2 = \operatorname{Cos}^2\mu$$

igitur $$v = d \operatorname{Cos}^2\mu + c \operatorname{Sin}^2\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

quo substituendo in S' et S'' invenitur

$$\left.\begin{aligned} S' &= \frac{2 V}{p D} (d \operatorname{Cos}^2\mu + c \operatorname{Sin}^2\mu) \ldots \\ S'' &= \frac{2 V}{p D} (e - d \operatorname{Cos}^2\mu - c \operatorname{Sin}^2\mu) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (29)$$

Utraque S' et S'' pro omni juncturâ aliquoties debet unitate major esse, igitur quoque pro eâ juncturâ, ubi minima fit. Differentiando facile invenitur, S' fieri minimum pro $\mu = 0$; S'' autem contra decrescere inde a $\mu = 0$ usque ad $\mu = 90°$; igitur in fornice, ubi μ nunquam major est quam m, S'' erit minimum pro $\mu = m$. In fornice igitur rectilineo junctura media et extrema facillime disrumpentur; media, quando punctum e propius ad dorsum a accedit; extrema, quando punctum g propius ad curvam arcûs d accedit.

Pro $\mu = 0$ fit $$S' = \frac{2\,V}{p\,D}\,d \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Pro $\mu = m$ $$S'' = \frac{2\,V}{p\,D}(e - d\,\mathrm{Cos}^2 m - c\,\mathrm{Sin}^2 m) \;\ldots\ldots \quad (31)$$

Quibus aequationibns iterum satisfieri tantum poterit sumendo e majorem certo quodam limite, qui ex (30) et (31) determinatur, quando cognitum est, quantae pro pontis stabilitate S' et S'' debeant esse. His enim cognitis habemus ex (30) $d = \frac{p\,D}{2\,V}\,S'$, quâ substituendâ in (31), haecce mutatur in

$$S'' = \frac{2\,V}{p\,D}(e - c\,\mathrm{Sin}^2 m) - S'\,\mathrm{Cos}^2 m$$

sive $$(S'' + S'\,\mathrm{Cos}^2 m)\,\frac{p\,D}{2\,V} = e - c\,\mathrm{Sin}^2 m$$

Sed ex (17) $D = e\,(a + \tfrac{1}{2} e) = \frac{e^2 + 2\,a\,e}{2}$, et ex (23) $c = e + \frac{3\,a^2 - e^2}{3(2\,a + e)}$,

igitur

$$\frac{p}{2V}(S'' + S'\mathrm{Cos}^2 m)\left(\frac{e^2 + 2\,a\,e}{2}\right) = e - \left(e + \frac{3\,a^2 - e^2}{3(2a + e)}\right)\mathrm{Sin}^2 m = e\,\mathrm{Cos}^2 m - \frac{3\,a^2 - e^2}{6a + 3e}\,\mathrm{Sin}^2 m$$

aut dividendo per $\mathrm{Cos}^2 m$, et faciendo brevitatis caussâ,

$$\frac{p\,(S'' + S'\,\mathrm{Cos}^2 m)}{4\,V\,\mathrm{Cos}^2 m} = \frac{1}{f} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$(e^2 + 2\,a\,e) = f\left(e - \frac{3\,a^2 - e^2}{6\,a + 3\,e}\,\mathrm{Tang}^2 m\right)$$

unde sequitur

$$e^3 + (4\,a - f\,(-1 + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tang}^2 m))\,e^2 + 2\,a\,(2\,a - f)\,e + a^2 f\,\mathrm{Tang}^2 m = 0 \;\ldots\ldots \quad (33)$$

ex quâ aequatione e per methodum notam resolvendo ejus quantitatem habebimus in a, m, S′, S″, V et p, et ponendo O Cot m pro a, limes, infra quem e sumere non licet, innotuerit.

§ 15.

Exemplum.

Quaeratur quaenam crassitudo tribuenda sit fornici rectilineo, cujus longitudo . . . . $2\,O = 20$ met.
Angulus ultimae juncturae m cum verticali . . . . $= 20^\circ$
Pondus specificum . . . . $= 2{,}5$
Pondus, quo decimetrum cubicum disrumpatur . . . $V = 20000$ Kil.

Porro sumamus, materiem duritie suâ ubivis pressionem normalem saltem septies debere superare, faciamusque igitur . . . . . $S' = S'' = 7$.

Pro unitate longitudinis sumemus decimetrum; igitur p erit pondus decimetri cubici, et habemus . . . . $p = 2^{\text{Kil}},5$

Hinc habemus $f = 2143{,}8$ et $a = 274{,}75$, quibus substitutis in aequationem (33) haec fit $\quad e^3 - 1139{,}5\, e^2 - 876080\, e + 2143900 0 = 0$

In hac aequatione primus terminus e^3, ratione habitâ caeterorum terminorum tam parvus esse debet (nam crassitudo verticis nunquam major erit quam aliquot metra), ut si in solvendâ aequatione hunc negligamus, quantitatem e ex caeteris terminis satis accuratam inveniamus. Tum vero aequatio tantum ad secundam potentiam adscendit et calculo simplici eruitur e; quae si non satis accurata fuerit, substituendo pro e inventam quantitatem e′ habebimus aequationem, ex quâ iterum negligentes tertiam potentiam statim accuratiorem e′ habebimus.

Nam si quantitates constantes 2^1, 3^1, et 4^1 termini vocamus n n′ n″, aequatio fit

$$e^3 - n\,e^2 - n'e + n'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

et, negligendo e^3,

$$n\,e^2 + n'e - n'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

unde

$$e^2 + \frac{n'}{n}\,e = \frac{n''}{n}, \text{ et } e = \frac{-n' + \sqrt{(n'^2 + 4\,n\,n'')}}{2\,n} \quad \ldots\ldots (36)$$

Hanc approximatam quantitatem e′ vocabimus, differentiam autem inter eam et veram e, i. e. $e - e' = e''$ ponentes, in (32) pro e substituimus $e' + e''$, quo mutatur in

$$e''^3 + 3\,e'\,e''^2 + 3\,e'^2e'' + e'^3 - n\,e''^2 - 2\,n\,e'e'' - n\,e'^2 - n'e'' - n'e' + n'' = 0$$

sed $n\,e'^2 + n'e' - n'' = 0$ propter (35), igitur negligentes e''^3, et secundum potentias hujus quantitatis aequationem ordine disponentes habemus,

$$(n - 3\,e')\,e''^2 + (n' + 2\,n\,e' - 3\,e'^2)\,e'' - e'^3 = 0$$

Hic autem iterum secundus et tertius terminus tantopere superat primum, ut hunc quoque negligere liceat, unde habemus

$$e'' = \frac{e'^3}{n' + 2\,n\,e' - 3\,e'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Per formulam (36) in nostro exemplo reperitur

$$e' = 23^{\text{decim}},73$$

quâ quantitate in (37) translatâ fit $e'' = 0,015$

unde $e = e' + e'' = 23,73 + 0,02$

$$= 23,75 = 2^{\text{m}},375$$

Videmus e″ tam parvum esse, ut in hoc exemplo e′ pro e sumere licuisset. Quod quum plerumque obtineat, solutio aequationis (33) in praxi nullam affert difficultatem.

Figura 16 fornicem ostendit, cujus mensurae sunt 20^{m} latitudine, $2^{\text{m}},375$ crassitudine, et cujus ultima junctura b d facit angulum $= 20^\circ$ cum verticali.

Ex inventâ quantitate e sequitur

$$b = a + e = 29^{\text{m}},85 \text{ et } D = \frac{e(e + 2\,a)}{2} = 6807,3$$

unde pressio horizontalis in fornicem, unius decimetri latitudine, $pD = 17018^{Kil},25$.

Punctum e, ad quod haec pressio applicari debet, invenitur per formulam (30) $d = \frac{p D S'}{2 V}$, in quam substituendo $D = 17018,25$, $S' = 7$, et $2V = 40000$, fit $\quad d = 0^m,298$.

Punctum applicationis pressionis normalis ad ultimas juncturas, sive ad incumbas, habetur ex aeq. (28) pag. 100.

$$v = d \operatorname{Cos}^2 m + c \operatorname{Sin}^2 m$$

nam est ex (23) pag. 98

$$c = e + \frac{3a^2 - e^2}{6a + 3e} = 2,375 + \frac{3(27,475)^2 - (2,375)^2}{164,85 + 7,125} = 15^m,511$$

igitur $\quad v = 0^m,298 \operatorname{Cos}^2 20^\circ + 15^m,511 \operatorname{Sin}^2 20^\circ = 2^m,077$

Ex hisce calculis patet, fornices rectilineos posse exstrui 20 metra longos, qui omnibus aequilibrii conditionibus satisfaciant, simul autem patet, eos, ratione habitâ caeterorum fornicum curvilineorum, satis esse debere crassos; quum enim in maximis arcubus recentioribus, pro aperturis 40 metrorum, crassitudo 2 metra non excedat, videmus in nostro fornice rectilineo pro aperturâ dimidiâ, i. e. 20^m, crassitudinem fere 4 decim. majorem fieri quam 2^m. Neque tamen haec crassitudo $2^m,375$ pro aperturâ 20^m minima esset, quae adhiberi posset. Nam et duritiem V lapidis et angulum m incumbarum satis parvum sumsimus, et simul voluimus, pressionem ubivis septies superari a resistentiâ materiae. Jam igitur computemus, quousque crassitudo $2^m,375$ pro eâdem aperturâ diminui posset, si sumamus, S' et S'' tantum $= 5$ esse debere, caetera autem data eadem atque antea servemus.

Ex (32) patet f esse in ratione inversâ quantitatum S'' et S'; igitur erit nunc $\quad f = \frac{7}{5}\, 2143,8 = 3001,1$, unde

$$e^3 - 2034,9\, e^2 - 1,347,200\, e + 30,014,600 = 0$$

et resolvendo per methodum indicatum

$$e = 2^m,16$$

itaque tantum $0^m,22$ minor quam ante.

Iterum faciamus S'' et $S' = 3$, quo minores omnino ponere non licet: tum fit

$$f = \tfrac{5}{3}\, 3001{,}1 = 5001{,}8; \text{ unde}$$

$$e^3 - 4124{,}2\, e^2 - 2568200\, e + 50024333 = 0$$

et solvendo

$$e = 1^m{,}89$$

quae crassitudo fere aequat fornicum curvilineorum crassitudinem.

Pro iisdem autem quantitatibus S'' et S' crassitudo quoque mutabitur, quando pro angulo m majorem minoremve quantitatem sumimus. Videamus, quaenam, caeteris immutatis, crassitudo ex calculo prodibit, quando ponamus $m = 10^\circ$.

Primum sit $S' = 7$. Hinc fit $f = 2250{,}72$, et $a = 567^m{,}14$, unde

$$e^3 - 5{,}54\, e^2 - 1266333\, e + 22507250 = 0,$$

et

$$e = 1^m{,}83$$

Videmus, quando diminuitur angulus m, minorem quoque esse posse crassitudinem. Jam contrarium hypothesin assumentes videamus, quae fiat quantitas e pro $m = 30^\circ$ et $S'' = S' = 7$. Est igitur $f = 1959{,}18$, $a = 173{,}21$, unde

$$e^3 - 1484{,}05\, e^2 - 558667\, e + 19591837 = 0$$

et

$$e = 3^m{,}23$$

Videmus cum angulo m augeri crassitudinem. Est igitur quantitas quaedam m intra 10° et 30°, quae e minimum facit.

Sit $m = 24^\circ$. Fit $f = 2079{,}75$, $a = 224{,}61$, unde

$$e^3 - 1318{,}69\, e^2 - 732450\, e + 20797500 = 0$$

et

$$e = 2^m{,}71$$

quae adhuc major est quam pro $m = 20^\circ$. Quando minorem quam 20° sumimus, ex gr. $m = 18^\circ$, fit $f = 2171{,}15$, $a = 307{,}77$, unde

$$e^3 - 1016{,}47\, e^2 - 957550\, e + 21711500 = 0$$

et

$$e = 2^m{,}22$$

Sit $S = 5$, et $m = 10^\circ$. Fit $f = 3151{,}02$, unde

$$e^3 - 915{,}16\, e^2 - 2324561 + 31510150 = 0$$

et

$$e = 1^m{,}35$$

Sit $S = 3$ et $m = 10^\circ$. Fit $f = 5251{,}69$, unde

$$e^3 - 4171{,}86\, e^2 - 4{,}670{,}226\, e + 52{,}516{,}920 = c$$

et

$$e = 1^m{,}13.$$

Ut singulae quantitates e facilius inter se conferri possint, eas in eandem tabulam collegimus:

2 O	S	m	e
20^m	7	30^o	$3^m,23$
«	7	24^o	$2^m,71$
«	7	20^o	$2^m,38$
«	7	18^o	$2^m,22$
«	7	10^o	$1^m,83$
«	5	20^o	$2^m,16$
«	5	10^o	$1^m,35$
«	3	20^o	$1^m,89$
«	3	10^o	$1^m,13$

Ex hac tabulâ primo loco patet, fornices rectilineos ejusdem crassitudinis eo firmiores esse dicendos, quo minor sit angulus incumbarum cum verticali. (1) Secundo patet, fornicem minus crassum saepe fortiorem jure dicendum esse, quam crassiorem, ita ex. gr. fornix $1^m,83$ crassus, 20^m longus, et incumbis sub 10^o ad verticalem inclinatis, ubivis septies pressioni resistit; alter crassior, $2^m,16$, ejusdem longitudinis, sed incumbis sub 20^o ad verticalem inclinatis tantum quinquies ubivis materiae duritie pressioni resistet. Non recte igitur vulgo statuitur, quo crassiorem eo fortiorem fieri fornicem.

Videamus porro, quaenam pro singulis quantitatibus m et S sint pressiones D' ultimis juncturis sive incumbis normales. Habemus formulam (pag. 100)

$$D' = D \operatorname{Sec} m;$$

(1) Haec conclusio tamen non pro omnibus quantitatibus m valet. Quodsi enim faciamus m aequalem paucis tantum minutis unius gradûs, ita ut sectio verticalis fornicis quam maxime ad rectangulum accedat, absque omni calculo patet, pressionem horizontalem maximam fieri debere, ut cum pondere fornicis verticali composita praebeat resultantem, incumbae normalem, et paulum igitur ab horizontali recedentem: ex magnâ autem pressione necessario sequitur, partem juncturae ei resistentem magnam quoque esse debere, ne materia cedat.

igitur prius est computanda D per formulam (17) $D = e\,(a + \frac{1}{2}\,e)$, tum vero D′ per hancce formulam. Facili calculo invenimus has quantitates.

m	S	e	D	D′
30°	7	3m,23	6116	7062
24°	7	2,71	6454	7065
20°	7	2,38	6807	7244
18°	7	2,22	7079	7443
10°	7	1,83	10546	10709
20°	5	2,16	6167	6563
10°	5	1,35	7747	7867
20°	3	1,89	5371	5716
10°	3	1,13	6473	6573

Ex his numeris sequitur, quo minor sit angulus m, caeteris iisdem manentibus, eo majorem fieri pressionem totius fornicis in incumbas. Oportet igitur, moles resistentes eo esse fortiores. Quodsi igitur ab unâ parte materiei parcitur minore crassitudine fornici tribuendâ, ab alterâ parte major saxi aut lapidis massa perdetur in exstruendis molibus satis firmis. Interdum ideo praeferendum est, crassiorem reddere fornicem, non ut major firmitas operi comparetur, sed ut sumtibus parcatur.

Antequam vero certi quid hac de re statuatur, explorandum est, utrum varii fornices onera ponti imponenda absque periculo ferre possint, sive totus fornix, sive tantum ejus quaedam pars ponderibus prematur. Initio hujus §i sumsimus pondus specificum = 2,5. Supra autem (pag. 55) vidimus, pondus 420 Kil. interdum in □ metrum premere; igitur $4^{kil},20$ in □ decim., unde fit $n = \frac{4,2}{25} = 1,68$ et onus, a parte, cujus longitudo = x′, ferendum

$$G' = n\,x' = 1,68\,x'$$

i. e. onus, quod interdum in pontem aget, aequale erit ponderi strati lapidei, ex eadem, quâ pons, materiâ confecti, atque 168^{millim} alti.

Ponamus onera distributa esse in dorsum fornicis (fig. 16) inde a medio a usque ad punctum quodvis h; sit igitur a h = x′, h i junctura, c i = x.

Pag. 95 vidimus $G = \frac{1}{2} e (x' + x)$, et ex aeq. (I) et (II) est $x = \frac{a}{b} x'$,

igitur
$$G = \frac{1}{2} e \left(x' + \frac{a}{b} x' \right) = \frac{2(a+b)}{2b} x' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

et
$$G + G' = \left\{ \frac{e(a+b)}{2b} + n \right\} x' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Quia utraque G et $G_{,}$ est proportionalis abscissae x', additio G' verticalem G ubivis in eadem proportione auget; quodsi igitur vis horizontalis D eadem ratione augeatur, itaque fiat $D_{,} = D \left\{ 1 + \frac{G'}{G} \right\} = D \left\{ 1 + \frac{2nb}{e(a+b)} \right\}$, ratio inter vires componendas eadem manebit, composita eandem atque ante habebit directionem juncturis normalem, per eadem juncturarum puncta transibit, et eâ in re tantum mutatio erit, quod pressio normalis ubivis aucta fuerit augmento, G' proportionali, i. e. uti 1 ad $1 + \frac{G'}{G}$; pars juncturae resistens vero eadem manserit; unde ratio S inter resistentiam et pressionem mutata erit in

$$S_{,} = \frac{S}{1 + \frac{G'}{G}} = S \frac{e(a+b)}{e(a+b) + 2nb}.$$

Quae ratio si adhuc satis magna sit ut disrumpendi fornicis periculum absit, fornicis pars a h i c stabilis est.

Alia est partis h i d b ratio: vi verticali eâdem manente, normali D' vero auctâ, composita, a priori directione f g recedens, magis fiet horizontalis, et juncturam quamvis b d secabit in puncto, supra g posito, neque amplius rectum cum eâ faciet angulum. Duabus igitur rebus prospiciendum est, ut nova ratio $S_{,}$ satis sit magna, et ut composita D' in laterali parte h i d b ubivis a resistentiâ normali, cum frictione compositâ, in aequilibrium redigatur.

In parte mediâ fornicis ex iis, quae pag. 101 vidimus, $S_{,}$ minimum fiet pro juncturâ h i; igitur haec computanda. Pro $S = 3$ hanc computationem instituere non necessarium duximus; haec enim jam erat tam parva, ut omnino videatur minor fieri non debere. Pro $S = 5$ et $S = 7$ eos tantum casus sumemus, in quibus $e < 2^m$ invenimus; caeteri enim fornices in quibus $e > 2^m$, ut sunt nimium crassi, ita in iis certum est, onera imponenda tam parvam partem efficere ponderis ipsius fornicis, ut procul omni dubio sit, tuto onus illud posse imponi.

Ut igitur videamus, quid sit futurum, quando aut totum dorsum aut pars ejus oneretur, successive ponamus $a\,h = x' = 2^m, = 5^m$, et $= 10^m$,

1°. Quando $e = 1^m,83$ et $m = 10^o$, habemus, decimetrum pro unitate sumentes,

$$a = 567{,}13 \qquad n = 1{,}68$$
$$b = 585{,}4 \qquad D = 10546$$

igitur $$D_{,} = D\left(1 + \frac{G'}{G}\right) = 11529{,}5.$$

Porro est $\operatorname{Tang}\mu = \frac{x'}{b}$, et $D_{,}' = D_{,} \operatorname{Sec}\mu$, unde

pro $x' = 20$	$\mu = 1^o 57'$	$D_{,}' = 11536$
$x' = 50$	$\mu = 4^o 53'$	$= 11571$
$x' = 100$	$\mu = 9^o 42'$	$= 11697$

Has pressiones normales non nimias esse statim patet: quum enim crassitudo fornicis ita determinata fuerit, ut demtis oneribus resistentia ubivis saltem septies major esset, quam pressio, haec autem pressio aucta sit, in ratione $1 : 1{,}093$, ratio, quae antea septem superabat, nunc superabit $\frac{7}{1{,}093} = 6{,}403$, quod omnino sufficit.

Quando pressionem $D_{,}'$ cum pondere G'' partis $b\,h\,i\,d$ componimus, composita punctum quoddam g' ultimae juncturae transibit, quod supra punctum g positum est, per quod pressio normalis demtis oneribus transit. Quod facile demonstratur. Etenim vis $D_{,}'$ in eodem atque ante puncto k cum eodem pondere G'' componitur; sola $D_{,}'$ major est, quam antea D'; igitur composita, quae ante habebat directionem $k\,g$ ad $b\,d$ normalem, nunc magis accedet ad directionem $f\,k$ atque ad horizontalem; itaque $b\,d$ secabit in puncto superius posito: et $D_{,}''$ in majorem juncturae partem distribuetur quam ante.

Simul autem non amplius haec $D_{,}''$ normalis erit juncturae b d, sed paullum a normali declinabit; eam igitur decomponentes habebimus vim normalem $D_{,}''\text{Cos}\,\psi$, quae ut paullum differt a priori pressione normali, ita a majore quoque juncturae parte 2 g′d fertur, ut facile ferri posse etiam sine calculo concludatur: altera autem vis juncturae parallela $D_{,}''\text{Sin}\,\psi$ tam parva necessario erit, ut quam facillime a frictione in aequilibrium redigatur. Quae vero de ultimâ juncturâ b d disputavimus, eadem valent de quavis juncturâ inter h i et b d positâ. Ubivis igitur aequilibrium servabitur.

2° Quando $e = 1^m{,}35$ et $m = 10°$ est

$$a = 567{,}13 \qquad n = 1{,}68$$
$$b = 580{,}6 \qquad D = 7747$$

Igitur primum pressio horizontalis D, quae in hoc exemplo erat quinta pars resistentiae, augebitur in ratione 1 ad 1,07942, et erit $\frac{5}{1{,}07942} = 4{,}63^{\text{ma}}$ pars resistentiae. Pro omnibus aliis juncturis S major erat quam 5; igitur nunc major erit quam 4,63. Quodsi igitur haec quantitas est satis magna, in caeteris juncturis nullum est disrumpendi periculum. In parte autem laterali b h i d pressio iterum paullum a normali declinabit, sed simul in majorem juncturae partem aget, quia ex simili argumentatione concluditur, punctum applicationis g′ altius positum esse quam g. Igitur fornix firmus erit, si $S = 4{,}63$ est satis magna quantitas. Ex calculis autem, de pontibus exsistentibus institutis, patet saepe S minorem esse, quam 4; igitur 4,63 satis magna videtur habenda.

Ex calculis igitur hucusque institutis jure concludi videtur, fornicem rectilineum 20 metra longum posse aedificari, qui satis sit stabilis.

§ 16.

Datâ curvâ dorsi, curvâ arcûs et directione juncturarum, invenire, utrum fornix sit in aequilibrio, nec ne.

Hactenus egimus de fornicibus aequilibratis, i. e. de ejusmodi fornicibus, in quibus, ex curvis arcûs et dorsi et directione juncturarum duabus pro lubitu assumtis, tertium ita determinatum fuerit, ut ubivis pressiones juncturis essent normales.

Restat ut videamus de fornicibus, in quibus tria illa simul pro lubitu fuerint assumta. Ejusmodi fornicem et exsistere posse et satis magnam habere stabilitatem, facile conjicitur ex iis, quae §§ praecedentibus disputavimus de aequilibrio pontium, quibus onera essent imposita. Quivis enim fornix non aequilibratus cogitatione potest dividi in partem aequilibratam, et alteram abundantem; haec autem posterior pars tamquam onus priori impositum potest spectari. Quodsi igitur non nimium sit hocce onus, i. e. si forma fornicis non nimium recedat ab aequilibrii formâ, vires in eo agentes frictionis ope in aequilibrium redigentur.

Ejusmodi autem fornices per se non aequilibrati sunt omnes fere pontes exstructi. Sunt enim illi ita fere aedificati, ut 1° curva dorsi sive sit linea horizontalis, sive paullum tantum ab eâ differat; 2° ut curva arcûs sive sit semicirculi pars, sive composita ex partibus plurium circulorum, variis radiis descriptorum; 3° ut juncturae sint ad curvam arcûs normales. Supra autem demonstravimus, quando dorsum est planum horizontale, curvam arcûs non debere esse circulum (§ 3), et contra, quando curva arcûs est circulus, curvam dorsi non esse lineam horizontalem, sed curvam algebraicam, cujus aequatio est quartae dignitatis (§ 10); unde sequitur, pontes, qui hactenus exstructi sunt, esse fornices non aequilibratos.

Quum igitur solutio quaestionis de ejusmodi fornicis firmitate praxi sit utilissima, nobis minime erat silentio praetermittenda. Et primum quidem nobis proposueramus, praecipuos pontes cum theoriâ comparare, atque hinc judicium de eorum firmitate ducere. Postquam vero vidimus, comparationem illam iisdem omnino principiis niti atque omnem praecedentem disputationem, ad eam autem instituendam et plurimis coefficientibus empiricis opus esse, quos apud auctores nullos reperire possemus, et otio, ad calculos multiplices faciendos omnino necessario, quod nobis aliis negotiis impeditis nunc non esset, mutato consilio satis habuimus, si viam in hac comparatione tenendam indicassemus. Quod igitur paucis facere nunc nobis est propositum.

Ut nullus pons eorum, qui hactenus exstructi sunt, absque frictionis adjumento in aequilibrio est, ita alius tamen minus a perfectâ aequilibrii conditione abest, quam alius; atque illi ponti major firmitas est tribuenda, quam huic. Quod ope figurae 14 manifestum erit. Sumamus pontem quemdam circularem, i. e. cujus curva arcûs sit pars circuli C D, quique terminetur plano horizontali A B et juncturâ B D; ut absque frictione aequilibrium adesset, oporteret curvam dorsi esse curvam A E. Igitur in fornice abundat pars A E B, et hujus partis pondere efficitur, ut vires non sint ad omnes juncturas normales: sed pondus hocce tam parvum est ratione habitâ ponderis totius massae A C D E, ut etiam absque calculo concludere liceat, frictione adhibitâ satis firmum fore fornicem A B D C. Alterum nunc sumamus pontem circularem, cujus curva arcûs sit multo major pars circuli, ex. gr. C D′; hicce item terminetur plano horizontali A B′, et juncturâ B′D′. In hoc fornice nimia erit tota massa A E′B′, quae quum ratione massae A E′D′C satis magna sit, certum est, hunc fornicem multo magis a perfectâ aequilibrii conditione abesse, eique igitur multo minorem firmitatem esse tribuendam quam fornici, qui habeat formam partis A B D C.

Ut autem accuratius hac de re statuatur, firmitatem pontis, qui non sit in aequilibrio perfecto, tribus criteriis cerni putamus; primum enim eo firmior erit, quo minor sit pressio, quam pilae aut moles sustinere debent; secundo quo magis vires compositae ex partium pondere et pressione horizontali ad directionem normalem juncturis accedant; tertio, quo magis in omni juncturâ vis resistens superet pressionem normalem, i. e. quo majus sit minimum rationis S.

Quae criteria ut ad pontem quemcunque adhibeamus, haec patet via.

Sit fig. 17 a b curva dorsi et c d curva arcûs quaelibet; sit b d junctura pontis. Tota dimidii pontis massa sustinetur duabus viribus, pressione horizontali D in punctum quoddam e juncturae mediae agente, et resistentiâ D′ pilarum aut molium, in punctum quoddam g incumbarum agente. Haec resistentia, quia frictionis simul rationem habemus, non necessario ad b d normalis est, sed agere potest secundum directionem quamvis, modo a normali non longius recedat, quam angulo frictionis. Composita ex D et D′ in aequilibrio est cum pondere G fornicis. Quoniam et curva arcûs et curva dorsi et directio juncturarum est data, pondus G cognitum est, et simul centrum gravitatis; igitur verticalis f f′ per centrum gravitatis transiens positione cognita est.

Quodsi pro lubitu quantitatem D et punctum e sumamus, hac D cum G componendo in puncto f, in quo harum virium directiones se mutuo secant, habebimus compositam D′ et quantitate et directione; igitur sciemus, per quodnam punctum g ultimae juncturae haec composita transitura sit, et quantâ resistentiâ D′ in aequilibrium redigantur D et G. Contra, datâ G et puncto g, computari poterunt horizontalis pressio D et positio puncti e, ad quod est applicanda. Et in genere, ex sex illis quantitatibus et directionibus virium D et D′ et eorum punctis applicationis, datis tribus tria reliqua poterunt computari. Quum igitur tria pro lubitu possint assumi, innumerabilibus modis nobis fingere possumus systema virium, pondus dati fornicis in aequilibrium redigentium. Ex hisce plurima quidem aequilibrii conditionibus supra positis non satisfacient, quia non in omni juncturâ, pro lubitu sumtâ, aequilibrium aderit; multa tamen remanebunt systemata, quae satisfaciant. Ex hisce iterum illud systema eligere debemus, quod optime criteriis modo positis respondeat. Quodsi idem pro aliâ pontis formâ faciamus, illi formae merito videbitur stabilitatis palma esse tribuenda, in qua et pressio lateralis est minor, et frictione minus opus est ad servandum aequilibrium, et minimum rationis S est majus quam in altero.

Ut systemata illa, quae aequilibrii conditionibus satisfaciant, inveniamus, ita rem considerabimus.

Sumamus vires incognitas D et D′ ad puncta e et g adplicari, D autem agere secundum horizontalem directionem: ducamus per e horizontalem e f; quum D et G sibi occurrant in puncto f, oportet, ut tertia vis quoque per hoc punctum transeat, igitur g f jam erit directio resistentiae D′. Sumtâ porro parte f f′ pro cognito pondere G fornicis, ductâque lineâ horizontali et verticali parallelogrammum orietur, cujus latus et diagonalis erunt ad alterum latus, uti quantitates quaesitae D et D′ ad pondus G.

Nunc caeteris immutatis manentibus, si 1º punctum g altius collocemus, in g′ aut g″, ex figurâ patet, majores fieri vires D et D′; eo minores autem fient, quo inferius collocemus punctum g, ex. gr. in g‴.

Si contra, puncto g eodem manente, positionem puncti e mutemus, ex variis figurae parallelogrammis apparet, eo majores fieri D et D′ quo magis e ad curvam arcûs accedat, minores vero, quo magis ad curvam dorsi.

Ex utroque concludimus, minimum fieri D′, quando e quam proximum sit dorso, g autem quam proximum arcui. Igitur hoc systemate virium optime satisfiet primae conditioni, quae vult, ut resistentia, quam pilae aut moles praebere debent, sit minima.

Sed 2º vis D′ non nimium cum normali ad b d facere debet angulum: quodsi normalis ex f ad b d ducta hanc secet prope aut supra punctum b, angulus ille eo major fiet, quo inferius sumatur punctum g, et fieri poterit, ut coacti simus g paulo remotius a curvâ arcûs sumere, ut ne frictione nimium opus sit; sin normalis ex f ad b d ducta hanc prope aut infra punctum d secet, quo inferius sumatur punctum g eo magis D′ ad normalem accedet, et sumendo g quam proximum curvae arcûs, systema virium quoque secundae conditioni satisfaciet. In praecedentibus vidimus, ubicunque punctum g sit positum, directionem pressionis tam paucis gradibus a normali recedere, ut hoc nomine paullum intersit, ubicunque g assumamus. Quod autem in fornicibus aequilibratis observavimus, idem videtur ad pontes plerosque exsistentes posse applicari. Experientiâ enim duce omnes practici consentiunt, pontes, qui conciderunt, fere omnes motu rotatorio corruisse; sin corruissent, quia vis D′ nimium a normali recessisset, pars fornicis debuisset motu juncturae cuidam parallelo descendere, quod an unquam observatum fuerit dubito. Igitur systema virium, ex quo de pontis stabilitate judicari debet, praecipue ita sumendum est, ut primae et tertiae conditioni, quantum fieri potest, satisfiat. Quod ad primam, jam vidimus, oportere ut e et g quam proxime ad dorsum et arcum accedant. Restat, ut de tertiâ videamus.

Quodsi e et g nimium ad juncturarum extremitates accedant, vires in juncturas prementes minimae quidem erunt, simul vero in tam parvam superficiei juncturae partem agent, ut ratio inter resistentiam T et pressionem D′ fiat parva. Haec igitur ratio S ut non sit justo minor, e et g semper certo quodam intervallo ab extremitatibus distent oportet: igitur distantias has tantas sumimus, ut sit ex gr. $S = 5$; neque majores, nam ut supra monuimus, quo majores erunt a e et d g, eo majores fient vires prementes D et D′, et hae vires minus bene satisfacient primae conditioni.

Postquam igitur puncta e et g ita determinavimus, ut vires in mediam et in ultimas juncturas apte actionem suam exserant, progrediendum est ad examinandam earum actionem in caeteras omnes juncturas intermedias, ut pateat 1° quanti sint anguli, quos composita D′ cum normali ad singulas juncturas faciat, et 2° quanta sit pro singulis ratio S. Quod examen instituitur ope formularum et calculorum, qui omnino conveniunt cum iis, quos in praeced. §§ adhibuimus. Hi autem calculi, quippe longiores, satis sunt fastidiosi: ut igitur pro parte computandi taedium evitetur, adhiberi possunt constructiones graphicae ad determinandas quantitates virium et puncta, ad quae applicantur.

Itaque sive constructionibus sive calculis instituendis patebit, quibusnam in locis fornix datae formae sit debilissimus, et quantae sint vires agentes. Quibus cognitis eidem examini submittendae erunt aliarum fornicum formae: pro his quoque determinentur ea virium systemata, quae, dum aequilibrium in fornice efficiant, optime criteriis supra positis satisfaciant; invento systemate deinceps computentur juncturae debilissimae, et calculo eruantur quantitates virium prementium et resistentium. Denique comparatione institutâ inter quantitates pro singulis fornicibus inventas accurate concludatur, cuinam curvae formae stabilitatis palma jure tribuatur.

QUAESTIONES.

I.

Minus bene agunt, qui incrementa valde parva quantitatum variabilium adhibent differentialium instar.

II.

Limitum notio a calculo differentiali abesse non potest.

III.

Quae vulgo vocantur corpora simplicia, pleraque simplicia non esse videntur.

IV.

In phaenomenis Electro-Chemicis explicandis, plurimi Physici nimium tribuere videntur contactui metallorum aliorumve elementorum heterogeneorum, tamquam causae horum phaenomenorum.

V.

Saepe glacies nascitur in fundo fluminum, ubi, eâdem atque in superficie temperaturâ, aquae minus agitantur.

VI.

Quando vas sphaericum apertum fluido quodam repletur eique immergitur, et fluidum hocce magnâ vi comprimitur, vasis capacitas diminuitur vel augetur pro diversâ pressionis quantitate et materiae compressibilitate.

QUAESTIONES.

VII.

In variis regionibus ventorum ex eâdem coeli plagâ spirantium effectus in Barometrum varius esse debet.

VIII.

Crassitudo fornicis in vertice praecipue pendet a ratione inter duritiem materiae ejusque pondus specificum.

IX.

Male igitur agunt, qui praeceptum tradunt, quo haec crassitudo a solâ aperturae latitudine pendeat.

X.

Orientales populi non magnopere excelluerunt in arte fornicum construendorum.

XI.

Pons TRAJANI non fuit lapideis fornicibus exstructus.

XII.

Niger fluvius effunditur in Sinum Beninensem.

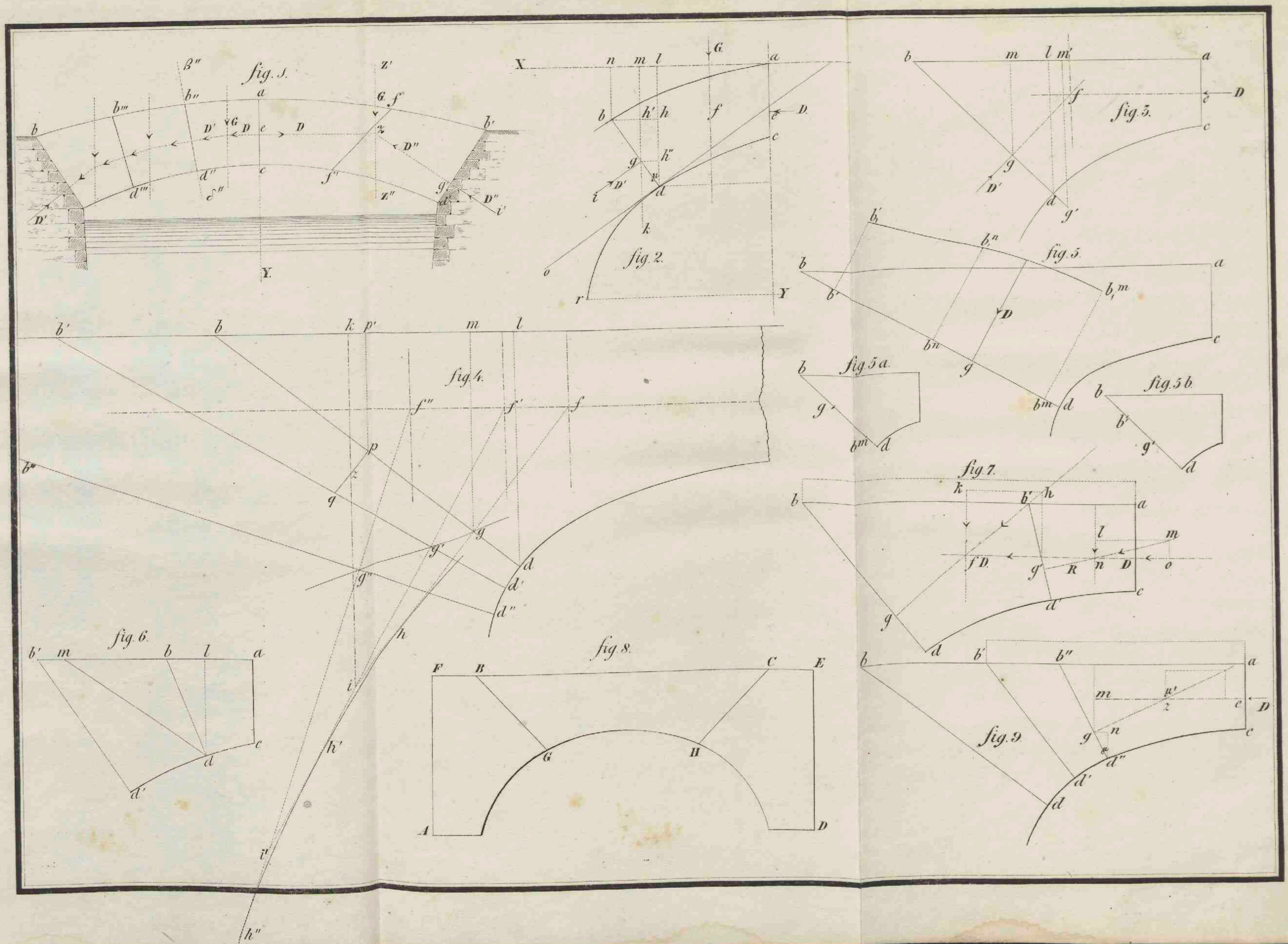
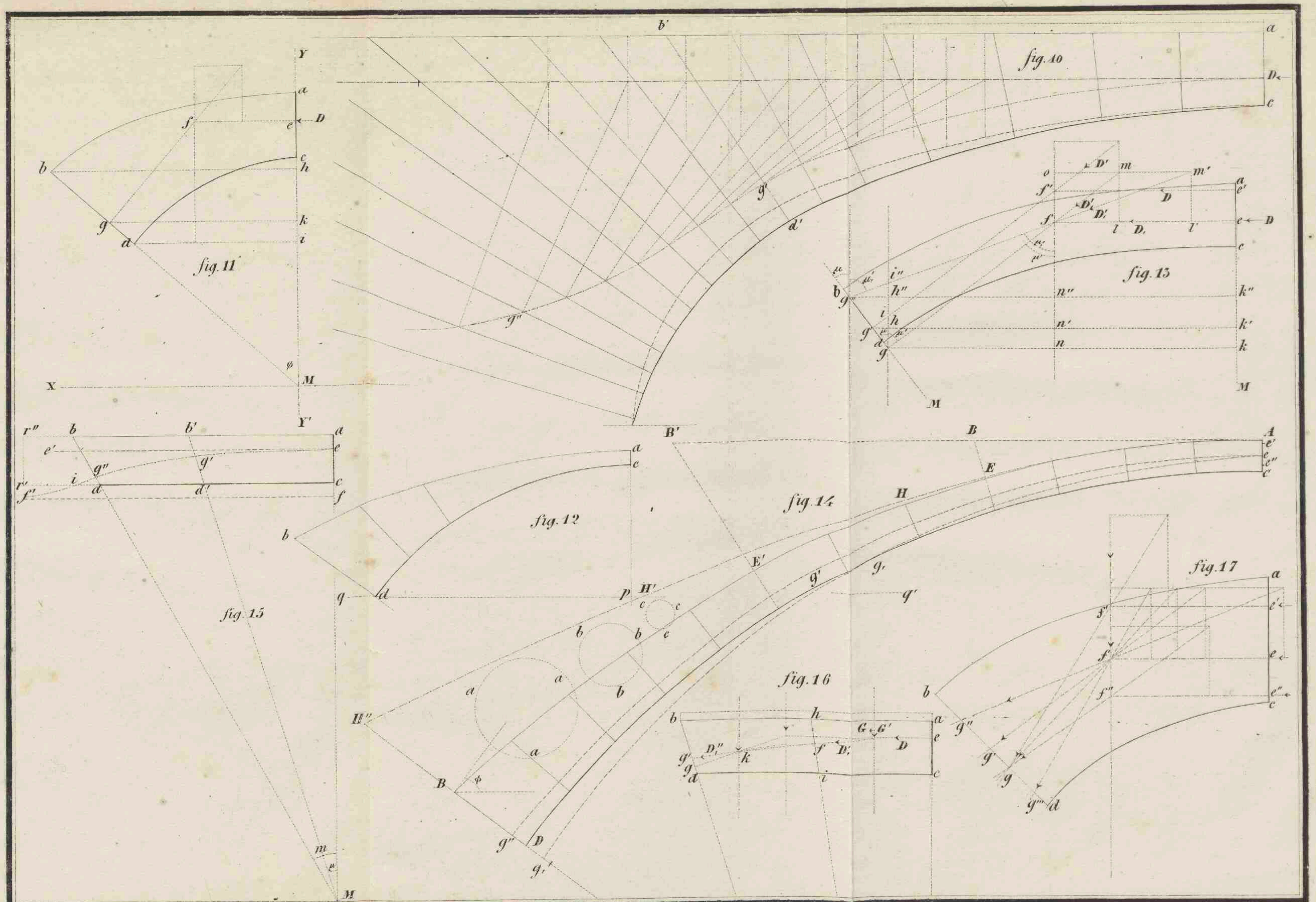


fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 5 a.
fig. 5 b.
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 9.



Steuerwald f. C°