



De doorsnede van deelgebieden bij conforme afbeelding

<https://hdl.handle.net/1874/360132>

A. qu. 192, 1942

16169

DE
DOORSNEDE VAN DEELGEBIEDEN
BIJ CONFORME AFBEELDING

J. M. VAN DER HEIJDEN

s.
cht

2

DE DOORSNEDE VAN DEELGEBIEDEN BIJ
CONFORME AFBEELDING.

Diss. Utrecht 1942

DE
DOORSNEDE VAN DEELGEBIEDEN
BIJ CONFORME AFBEELDING

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT,
OP GEZAG VAN DEN WAARNEMENDEN
RECTOR MAGNIFICUS L. VAN VUIREN,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS
BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSI-
TEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN
OP MAANDAG 16 MAART 1942, DES
NAMIDDAGS TE 2 UUR

DOOR

JAN MARINUS VAN DER HEIJDEN

GEBOREN TE ZEIST

AMSTERDAM

N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ

1942

Promotor Prof. Dr. J. A. Barrau.

INHOUD

HOOFDSTUK I. De reële getallen

§ 1. De reële getallen

§ 2. De reële getallen

§ 3. De reële getallen

§ 4. De reële getallen

§ 5. De reële getallen

§ 6. De reële getallen

§ 7. De reële getallen

§ 8. De reële getallen

§ 9. De reële getallen

§ 10. De reële getallen

§ 11. De reële getallen

§ 12. De reële getallen

§ 13. De reële getallen

§ 14. De reële getallen

§ 15. De reële getallen

§ 16. De reële getallen

§ 17. De reële getallen

§ 18. De reële getallen

§ 19. De reële getallen

§ 20. De reële getallen

§ 21. De reële getallen

§ 22. De reële getallen

§ 23. De reële getallen

§ 24. De reële getallen

§ 25. De reële getallen

§ 26. De reële getallen

§ 27. De reële getallen

§ 28. De reële getallen

§ 29. De reële getallen

§ 30. De reële getallen

§ 31. De reële getallen

§ 32. De reële getallen

§ 33. De reële getallen

§ 34. De reële getallen

§ 35. De reële getallen

§ 36. De reële getallen

§ 37. De reële getallen

§ 38. De reële getallen

§ 39. De reële getallen

§ 40. De reële getallen

§ 41. De reële getallen

§ 42. De reële getallen

§ 43. De reële getallen

§ 44. De reële getallen

§ 45. De reële getallen

§ 46. De reële getallen

§ 47. De reële getallen

§ 48. De reële getallen

§ 49. De reële getallen

§ 50. De reële getallen

In dit proefschrift wordt van een aantal stellingen en theorema's van de Analyse gebruik gemaakt.

Voor het gemak van de lezers zullen deze stellingen en theorema's afzonderlijk worden vermeld en bewezen.

Ter onderscheiding van den eigenlijken tekst van het proefschrift zijn deze gedeelten met een kleinere letter gedrukt.

INHOUD.

	blz.
HOOFDSTUK I. Inleidende begrippen en stellingen	11
§ 1. De functie van KÖNIGS	11
§ 2. De stelling van WEIERSTRASZ	15
§ 3. Stellingen van CAUCHY	19
§ 4. Het continuüm	26
§ 5. Functies, holomorf in het halfvlak met een positief reëel deel	29
HOOFDSTUK II. De vraagstelling	38
§ 6. De doorsnee van deelgebieden	38
§ 7. Voorbeelden	43
HOOFDSTUK III. N bevat een gebied	46
§ 8. Geval: een cirkelschijf raakt in α	46
§ 9. Geval: $\lambda > 0$	49
§ 10. De formule van POISSON	60
§ 11. Geval: Δ bevat een punt en zijn beeld	63
§ 12. Geval: Δ heeft 1 en ∞ tot grenspunten	65
HOOFDSTUK IV	66
§ 13. De afbeelding van een deelgebied van N op D	66
§ 14. De afbeelding van D op een deelgebied van N	68

INDEX

10	INDEX
11	1. The history of the subject
12	2. The history of the subject
13	3. The history of the subject
14	4. The history of the subject
15	5. The history of the subject
16	6. The history of the subject
17	7. The history of the subject
18	8. The history of the subject
19	9. The history of the subject
20	10. The history of the subject
21	11. The history of the subject
22	12. The history of the subject
23	13. The history of the subject
24	14. The history of the subject
25	15. The history of the subject
26	16. The history of the subject
27	17. The history of the subject
28	18. The history of the subject
29	19. The history of the subject
30	20. The history of the subject
31	21. The history of the subject
32	22. The history of the subject
33	23. The history of the subject
34	24. The history of the subject
35	25. The history of the subject
36	26. The history of the subject
37	27. The history of the subject
38	28. The history of the subject
39	29. The history of the subject
40	30. The history of the subject
41	31. The history of the subject
42	32. The history of the subject
43	33. The history of the subject
44	34. The history of the subject
45	35. The history of the subject
46	36. The history of the subject
47	37. The history of the subject
48	38. The history of the subject
49	39. The history of the subject
50	40. The history of the subject
51	41. The history of the subject
52	42. The history of the subject
53	43. The history of the subject
54	44. The history of the subject
55	45. The history of the subject
56	46. The history of the subject
57	47. The history of the subject
58	48. The history of the subject
59	49. The history of the subject
60	50. The history of the subject
61	51. The history of the subject
62	52. The history of the subject
63	53. The history of the subject
64	54. The history of the subject
65	55. The history of the subject
66	56. The history of the subject
67	57. The history of the subject
68	58. The history of the subject
69	59. The history of the subject
70	60. The history of the subject
71	61. The history of the subject
72	62. The history of the subject
73	63. The history of the subject
74	64. The history of the subject
75	65. The history of the subject
76	66. The history of the subject
77	67. The history of the subject
78	68. The history of the subject
79	69. The history of the subject
80	70. The history of the subject
81	71. The history of the subject
82	72. The history of the subject
83	73. The history of the subject
84	74. The history of the subject
85	75. The history of the subject
86	76. The history of the subject
87	77. The history of the subject
88	78. The history of the subject
89	79. The history of the subject
90	80. The history of the subject
91	81. The history of the subject
92	82. The history of the subject
93	83. The history of the subject
94	84. The history of the subject
95	85. The history of the subject
96	86. The history of the subject
97	87. The history of the subject
98	88. The history of the subject
99	89. The history of the subject
100	90. The history of the subject

HOOFDSTUK I.

INLEIDENDE BEGRIPPEN EN STELLINGEN.

§ 1. DE FUNCTIE VAN KÖNIGS.

Zij

$$w = u + vi$$

en

$$z = x + yi.$$

Beschouw de functie

$$w = w(z)$$

onder de voorwaarden

$$|w(z)| < 1, \quad w(0) = 0.$$

Zij $w(z)$ holomorf voor

$$|z| < 1.$$

Zij

$$w_1(z) = w(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

met

$$0 < |a_1| < 1.$$

Wij gaan deze functie „itereeren”, dwz. de functiewaarden als argument beschouwen van dezelfde functie, die we $w_2(z)$ noemen; daarna die laatste functiewaarden weer als argument van die functie, noem hem $w_3(z)$, beschouwen, enz. Deze iteratie is de grondslag van ons onderzoek.

$$w_2(z) = w \{w_1(z)\} = a_1 w_1 + a_2 w_1^2 + a_3 w_1^3 + \dots$$

$$w_n(z) = w \{w_{n-1}(z)\} = a_1 w_{n-1} + a_2 w_{n-1}^2 + a_3 w_{n-1}^3 + \dots$$

$$w_{n+1}(z) = w \{w_n(z)\} = a_1 w_n + a_2 w_n^2 + a_3 w_n^3 + \dots$$

Definitie:

$$K(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(z)}{a_1^n}$$

Men noemt $K(z)$ de functie van KÖNIGS.

De convergentie is uniform voor

$$|z| \leq \theta < 1.$$

We geven het bewijs, dat deze limiet bestaat.

Bewijs:

$$\begin{aligned} w_1(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = \\ &= a_1 \left\{ z + \frac{a_2}{a_1} z^2 + \frac{a_3}{a_1} z^3 + \dots \right\} = \\ &= a_1 \{ z + h(z) \}, \end{aligned}$$

met

$$h(z) = \frac{a_2}{a_1} z^2 + \frac{a_3}{a_1} z^3 + \dots$$

Dus

$$|h(z)| < M_r \cdot |z|^2, \quad r < 1 \text{ vast.}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a_1 \{ w_n + h(w_n) \}}{w_n} = a_1 \left\{ 1 + \frac{h(w_n)}{w_n} \right\}.$$

Dus

$$\frac{\frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}}}{\frac{w_n}{a_1^n}} = \frac{a_1^n}{a_1^{n+1}} \cdot a_1 \left\{ 1 + \frac{h(w_n)}{w_n} \right\} = 1 + \frac{h(w_n)}{w_n}.$$

Wegens

$$\frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}} = w_1 \cdot \frac{w_2}{a_1^2} \cdot \frac{w_3}{a_1^3} \dots \frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}}$$

$$\frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}} = a_1 \cdot \frac{w_1}{a_1} \cdot \frac{w_2}{a_1^2} \cdot \frac{w_3}{a_1^3} \dots \frac{w_n}{a_1^n}$$

bestaat de limiet $K(z)$, indien het oneindige product

$$\prod \left\{ \frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}} \cdot \frac{a_1^n}{w_n} \right\} = \prod \left\{ 1 + \frac{h(w_n)}{w_n} \right\}$$

convergeert.

Dit oneindige product convergeert, indien de reeks

$$\sum \left| \frac{h(w_n)}{w_n} \right|$$

convergent is.

Nu is

$$\sum \left| \frac{h(w_n)}{w_n} \right| < \sum \frac{M_r \cdot |w_n|^2}{|w_n|} = \sum M_r \cdot |w_n|.$$

Hierin is M_r constant, dus behoeft slechts de reeks

$$\sum |w_n|$$

te worden onderzocht.

Daar

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z} = a_1,$$

is binnen voldoende kleinen cirkel

$$\left| \frac{w(z)}{z} \right| < \theta < 1,$$

zelfs

$$\left| \frac{w(z)}{z} \right| < \theta < 1$$

voor

$$|z| \leq r.$$

Voor voldoende groote n is binnen voldoende kleinen cirkel

$$\left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| < \theta,$$

waarmee de convergentie van

$$\sum |w_n|,$$

dus tevens de convergentie van

$$\prod \left\{ 1 + \frac{h(w_n)}{w_n} \right\},$$

dus het bestaan van de limiet $K(z)$ is aangetoond.

Aangezien de convergentie voor

$$|z| \leq r$$

gelijkmatig is voor

$$|z| < \theta$$

en $w(z)$ holomorf, is $K(z)$ volgens de stelling van WEIERSTRASZ (zie blz. 15) ook holomorf.

Stelling 1.

$$K\{w(z)\} = a_1 K_1(z)$$

(vergelijking van SCHRÖDER).

Bewijs:

$$\begin{aligned} K\{w(z)\} &= K(w_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(w_1)}{a_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{a_1^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{w_{n+1}}{a_1^{n+1}} = a_1 \cdot K(z), \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

Stelling 2. Is $w(z)$ univalent (schlicht), dan zijn alle $w_n(z)$ en ook $K(z)$ univalent.

Bewijs: De univalentie van $w(z)$ beteekent (behalve dat met iedere z slechts één w correspondeert, hetgeen reeds in de holomorfië van $w(z)$ ligt opgesloten), dat met iedere w slechts één z correspondeert.

Dus correspondeert met iedere w_2 slechts één w_1 en met deze ééne w_1 slechts één z ; d.w.z. met iedere w_2 correspondeert slechts één z , dus de functie $w_2\{w_1(z)\}$ is univalent.

Zoo voortgaande toont men de univalentie aan van alle functies $w_n(z)$.

Daar alle $w_n(z)$ holomorf en univalent zijn en voor

$$|z| \leq r < 1$$

de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(z)}{a_1^n}$$

gelijkmatig is en $K(z)$ geen constante is, is de functie $K(z)$ voor

$$|z| < 1$$

univalent, waarmee de stelling is aangetoond.

§ 2. DE STELLING VAN WEIERSTRASZ.

De in § 1 genoemde stelling van WEIERSTRASZ luidt: Indien de functierij

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$$

op ieder deelgebied H van het gebied G *gelijkmatig convergent* is en indien alle functies $\varphi_n(z)$ in G *holomorfe* zijn, dan is de limietfunctie $\varphi(z)$, die gedefinieerd wordt door

$$\varphi(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z),$$

holomorfe in G . Bovendien mag men, ter bepaling van de afgeleide functie $\varphi'(z)$, term voor term differentieëren.

Bewijs: Binnen het deelgebied H van het gebied G leggen wij een cirkel c met middelpunt a en we trekken tusschen de grenzen van H en G een gesloten kromme Γ (zie fig. 1), die integratieweg is in de integraalformule van CAUCHY (zie blz. 24)

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_n(t)}{t-z} dt.$$

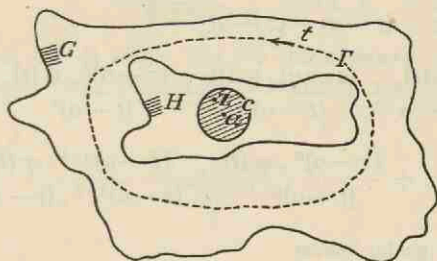


Fig. 1.

Van beide leden nemen we de limiet voor

$$n \rightarrow \infty.$$

Daar gegeven is, dat $\varphi_n(t)$ op Γ gelijkmatig tot $\varphi(t)$ nadert voor

$$n \rightarrow \infty,$$

heeft de integrand

$$\frac{\varphi_n(t)}{t-z}$$

gelijkmatig op Γ de limiet

$$\frac{\varphi(t)}{t-z},$$

zoodat de limiet van de integraal gelijk is aan de integraal van de limiet:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

De functie $\varphi(t)$ is de limiet van de op Γ holomorfe functie $\varphi_n(t)$ en is daarom continu op Γ . Bovendien is $\varphi(t)$ holomorf op Γ .

Daar men kan schrijven:

$$\frac{1}{p-q} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p(p-q)}$$

$$\frac{1}{p-q} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2} + \frac{q^2}{p^2(p-q)}$$

$$\frac{1}{p-q} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2} + \frac{q^2}{p^3} + \frac{q^3}{p^3(p-q)}$$

enz., hebben we thans het volgende:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{t-z} &= \frac{\varphi(t)}{(t-a)-(z-a)} = \\ &= \frac{\varphi(t)}{t-a} + \frac{(z-a) \cdot \varphi(t)}{(t-a)^2} + \frac{(z-a)^2 \cdot \varphi(t)}{(t-a)^3} + \\ &+ \dots + \frac{(z-a)^n \cdot \varphi(t)}{(t-a)^{n+1}} + \frac{(z-a)^{n+1} \cdot \varphi(t)}{(t-a)^{n+1} \cdot (t-z)}. \end{aligned}$$

Deze herleiding is geldig, omdat

$$t-a \neq 0.$$

Daar het aantal termen eindig is, mogen we deze vergelijking term voor term integreren over Γ en we vinden:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt &= \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-a} dt + (z-a) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-a)^2} dt + \\ &+ \dots + (z-a)^n \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-a)^{n+1}} dt + 2\pi i R_n(z). \end{aligned}$$

Deze integralen zijn functies van a , niet van z . Ze zijn constanten, die alleen van a en Γ afhangen, m.a.w. we kunnen bv. schrijven

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-a)^{p+1}} dt = 2\pi i A_p.$$

Dan is

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = 2\pi i \{A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n \cdot (z-a)^n + R_n(z)\}$$

of

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n \cdot (z-a)^n + R_n(z).$$

Gebruik makend van de eigenschap, dat de modulus van een lijn-integraal ten hoogste gelijk is aan de lengte van den integratieweg, vermenigvuldigd met het maximum van den modulus van den integrand langs dien integratieweg, herleiden we:

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z-a)^{n+1} \cdot \varphi(t) dt}{(t-a)^{n+1} \cdot (t-z)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} L_{\Gamma} \cdot \frac{|z-a|^{n+1} \cdot M}{\varrho^{n+1} \cdot h}. \end{aligned}$$

Hierin beteekent L_{Γ} de lengte van den integratieweg, ϱ de straal van den cirkel c , h de afstand van t tot z en M het maximum van den modulus van $\varphi(t)$ langs Γ .

Aangezien

$$\frac{|z-a|}{\varrho} < 1,$$

is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z-a|^{n+1}}{\varrho^{n+1}} = 0.$$

Dus is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| = 0.$$

We hebben hiermee gevonden:

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots$$

Dat wil zeggen: $\varphi(z)$ is holomorf, waarmee het eerste stuk van de stelling van WEIERSTRASZ is aangetoond.

Dat term voor term gedifferentieerd mag worden, berust op de herleiding:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt$$

waarbij naar den parameter z gedifferentieerd mag worden, omdat de integrand begrensd is.

Bovendien is

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi_n(t)}{t-z} dt$$

$$\varphi'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi_n(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Daar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$

mogen we hieruit besluiten tot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(z) = \varphi'(z),$$

waarmee bewezen is, dat wij term voor term mogen differentieeren.

§ 3. STELLINGEN VAN CAUCHY.

Voor het bewijs van de op blz. 15 vermelde integraalformule van CAUCHY hebben wij noodig de *Integraalstelling van CAUCHY*.

Indien binnen het gebied G de functie $f(z)$ differentieerbaar is en de gesloten kromme c met al zijn binnepunten in G ligt, dan is

$$\int_c f(z) dz = 0.$$

Het *bewijs* staat in ieder leerboek (zie o.a. Dr. K. KNOPP „Funktionentheorie“, deel I, p. 57).

Een fraai bewijs is ook het volgende:

Daar

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

en

$$dz = dx + i dy$$

is

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_c \{u(x, y) + iv(x, y)\} (dx + i dy) = \\ &= \int_c (u dx - v dy) + i \int_c (v dx + u dy). \end{aligned}$$

Op grond van het theorema (dat we op blz. 21 bewijzen):

$$\int_c (P dx + Q dy) = 0,$$

indien overal binnen c geldt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

zijn beide integralen gelijk 0, daar volgens de CAUCHY-RIEMANNSCHE differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

en

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Hiermee is de integraalstelling van CAUCHY aangetoond.

De geldigheid der CAUCHY-RIEMANNSCHE differentiaalvergelijkingen voor iedere differentieerbare functie

$$w = w(z)$$

blijkt aldus:

$$w = u + iv$$

is een complexe functie van de reële getallen x en y , zoodat u en v reële functies dier reële getallen zijn.

De differentieerbaarheid van $w(z)$ beteekent:

$$w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

of met andere woorden, het differentiequotient

$$\frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}$$

moet steeds $w'(z)$ tot limiet hebben, hoe ook Δx en Δy tot 0 naderen.

Nemen we eerst *steeds*

$$\Delta y = 0$$

(we blijven horizontaal).

Dan is

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = w'(z)$$

d.w.z.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \Re w'(z)$$

en

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \Im w'(z)$$

of

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Re w'(z)$$

en

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Im w'(z).$$

Vervolgens zij *steeds*

$$\Delta x = 0$$

(we blijven verticaal).

Dan is

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{i \Delta y} = w'(z)$$

d.w.z.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} = i \operatorname{Im} w'(z)$$

en

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i \Delta v}{i \Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} w'(z).$$

Dan moeten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

en

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Het op blz. 19 bedoelde *theorem*a luidt:

Hebben $P(x, y)$ en $Q(x, y)$ continue partiële afgeleiden en heeft de vergelijking van c een continue afgeleide, en is overal binnen c

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

dan is

$$\int_c (P dx + Q dy) = 0.$$

Bewijs: Noem (zie fig. 2) het op c meest links gelegen punt A en het meest

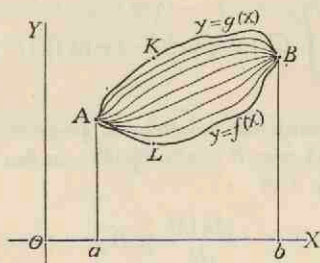


Fig. 2.

rechtsche punt B , dan stellen we de kromme AB (over K) voor door de vergelijking

$$y = g(x)$$

en de kromme AB (over L) door

$$y = f(x).$$

Dan is gegeven, dat $f(x)$ en $g(x)$ in het segment

$$a \leq x \leq b$$

continu zijn en voorzien van continue afgeleiden. We beschouwen een stelsel overgangskrommen van A naar B , gelegen tusschen AKB en ALB , voorgesteld door:

$$y = f(x) + \lambda \{g(x) - f(x)\}$$

met

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Het verschil

$$g(x) - f(x)$$

noemen we $v(x)$, dan is de vergelijking van een tusschenkromme

$$y = f(x) + \lambda v(x)$$

waarbij voor

$$\lambda = 0$$

de kromme ALB en voor

$$\lambda = 1$$

de kromme AKB ontstaat.

De integraal van a tot b langs een tusschenkromme is een functie van λ :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_A^B P(x, y) dx + \int_A^B Q(x, y) dy = \\ &= \int_a^b P\{x, f(x) + \lambda v(x)\} dx + \\ &+ \int_a^b Q\{x, f(x) + \lambda v(x)\} \{f'(x) + \lambda v'(x)\} dx. \end{aligned}$$

Om tot het bewijs te komen dat de integraal langs een gesloten kromme gelijk 0 is, zal de integraal van A naar B onafhankelijk van den weg moeten zijn, m.a.w. zal $I(\lambda)$ onafhankelijk van λ of

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

moeten zijn.

We integreren partieel naar λ onder het integraalteeken.

$$\begin{aligned} \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} &= \int_a^b \frac{dP\{x, f(x) + \lambda v(x)\}}{d\{f(x) + \lambda v(x)\}} v(x) dx + \\ &+ \int_a^b Q\{x, f(x) + \lambda v(x)\} v'(x) dx + \\ &+ \int_a^b \frac{dQ\{x, f(x) + \lambda v(x)\}}{d\{f(x) + \lambda v(x)\}} v(x) \{f'(x) + \lambda v'(x)\} dx \end{aligned}$$

waarvoor we verkort schrijven:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} &= \int_a^b P_y \cdot v(x) dx + \int_a^b Q \cdot v'(x) dx + \\ &+ \int_a^b Q_y \cdot v(x) \{f'(x) + \lambda v'(x)\} dx. \end{aligned}$$

Met behulp van de methode van partieel integreren vinden we

$$\begin{aligned} &\int_a^b Q\{x, f(x) + \lambda v(x)\} v'(x) dx = \\ &= \int_a^b Q\{x, f(x) + \lambda v(x)\} dv(x) = \\ &= Q\{x, f(x) + \lambda v(x)\} v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \{Q_x + Q_y\} \frac{dy}{dx} dx = \\ &= 0 - \int_a^b v(x) Q_x dx - \int_a^b Q_y \cdot v(x) \{f'(x) + \lambda v'(x)\} dx. \end{aligned}$$

De 0 ontstaat door

$$v(a) = g(a) - f(a) = 0$$

en

$$v(b) = g(b) - f(b) = 0.$$

Dus is

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b (P_y - Q_x) v(x) dx.$$

Deze integraal wordt 0 voor

$$P_y = Q_x,$$

waarmee het theorema is aangetoond.

Met behulp van de integraalstelling van CAUCHY toonen we tenslotte nog de op blz. 15 gebruikte *integraalformule van CAUCHY* aan.

Indien $f(z)$ holomorf is in G en de kromme c met alle binnenpunten in G ligt, dan is

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz$$

voor iedere a binnen c .

Bewijs: In het heele vlak minus a is

$$\frac{1}{z-a}$$

holomorf en $f(z)$ is holomorf in G . Dan is

$$\frac{f(z)}{z-a}$$

holomorf in G minus a .

We leggen (zie fig. 3) om a een cirkel met straal δ , die geheel binnen c is gelegen.

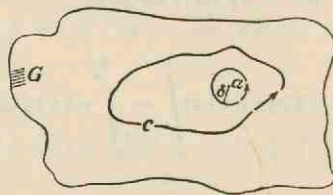


Fig. 3.

Dan is

$$\frac{f(z)}{z-a}$$

tusschen c en δ holomorfe in alle punten, zoodat volgens de integraalstelling van CAUCHY

$$\int_c \frac{f(z) dz}{z-a} = \int_\delta \frac{f(z) dz}{z-a}$$

(immers de twee krommen c en δ kunnen door een twee maal te doorloopen verbindingslijn tot één kromme

$$c + \delta$$

gemaakt worden, die alle binnenpunten in het holomorfe gebied heeft).

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta \frac{f(z) dz}{z-a} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_\delta \frac{f(a) dz}{z-a} + \int_\delta \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right] = \\ &= \int_\delta \frac{f(a) dz}{z-a} + \eta = f(a) \int_\delta \frac{dz}{z-a} + \eta = 2\pi i f(a) + \eta \end{aligned}$$

(immers

$$\int_\delta \frac{dz}{z-a} = \int_\delta d \log(z-a) = \int_\delta d(\log \rho + i\varphi) = 0 + 2\pi i.$$

Daar

$$\left| \int_\delta \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi \delta \frac{|f(z) - f(a)|_{\max}}{\delta} = 2\pi |f(z) - f(a)|_{\max}.$$

en

$$|f(z) - f(a)|_{\max} \rightarrow 0$$

voor

$$\delta \rightarrow 0$$

wegens de holomorfie en continuïteit van $f(z)$, is

$$\eta = 0.$$

Zoodat

$$\int_\delta \frac{f(z) dz}{z-a} \rightarrow 2\pi i f(a)$$

als

$$\delta \rightarrow 0.$$

Dus is ook

$$\int_c \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a),$$

hetgeen te bewijzen was.

§ 4. HET CONTINUUM.

Definitie. Een continuum is een gesloten puntverzameling, die niet de som is van twee niet-leege gesloten puntverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt.

Stelling. Indien A en B twee willekeurige punten zijn van de gesloten en begrensde puntverzameling C en er bij ieder bedrag

$$\varepsilon > 0$$

een „ ε -ketting” bestaat van A naar B , waarvan alle punten tot C behooren, dan is C een continuum.

Bewijs: Stel de gesloten puntverzameling C bestaat uit twee gesloten puntverzamelingen P en Q , die geen gemeenschappelijk punt hebben (fig. 4).

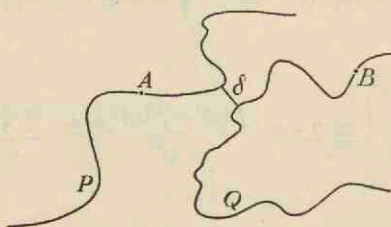


Fig. 4.

Daar C begrensd is, zijn P en Q ook begrensd. P en Q hebben een positieven afstand δ . Immers, indien zij niet een positieven afstand hadden, dan zouden de afstanden der resp. op P en Q gelegen punten A en B de onderste grens nul hebben, hetgeen wegens de geslotenheid en de begrensdheid van P en Q zou beteekenen, dat zij wel een gemeenschappelijk punt zouden hebben — in strijd met de onderstelling. Zij het punt A gelegen op P en het punt B op Q . Kiest men nu

$$\varepsilon > 0$$

zoodanig, dat

$$\varepsilon < \delta,$$

dan kan men niet met een „ ε -ketting” van A naar B gaan (met alle

punten van den „ ε -ketting” tot C behoorend). De gemaakte veronderstelling is dus onjuist: C bestaat niet uit twee gesloten puntverzamelingen, m.a.w. C is een continuüm. Hetgeen te bewijzen was.

Men kan ook omgekeerd een continuüm met de gegevens van deze stelling definieeren, zoodat bovenstaande definitie — ons uitgangspunt — een stelling wordt. De redactie wordt dan:

Definitie: Een continuüm is een gesloten, begrensde puntverzameling, waarbij bij ieder bedrag

$$\varepsilon > 0$$

een „ ε -ketting” bestaat van een willekeurig punt A naar een willekeurig punt B der puntverzameling, van welken „ ε -ketting” alle punten tot die puntverzameling behooren.

Stelling: Indien de gesloten en begrensde puntverzameling E niet de som is van twee niet-leege gesloten puntverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt, dan is E een continuüm.

Bewijs: Stel, er bestaat een getal

$$\varepsilon_1 > 0$$

en een puntenpaar (A, B) op C , dat niet „ ε_1 -verbindbaar” is. Zij E_1 de verzameling der punten van E , die niet „ ε_1 -verbindbaar” zijn met A . Daar B tot E_1 behoort, is E_1 niet-leeg. Zij E_2 de verzameling der punten van E , die met A wel „ ε_1 -verbindbaar” zijn. Ook E_2 is niet-leeg, daar A tot E_2 behoort.

Voorts is

$$E = E_1 + E_2.$$

Onderstel nu, dat E_1 en E_2 het gemeenschappelijke punt P hebben. Dan zou P zoowel „ ε_1 -verbindbaar” als „niet- ε_1 -verbindbaar” moeten zijn, hetgeen uitgesloten is. Dus E_1 en E_2 hebben geen enkel gemeenschappelijk punt. Dan zou E de som zijn van twee niet-leege puntverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt.

Ook zijn E_1 en E_2 gesloten. Immers, ieder verdichtingspunt van E_1 is punt van E_1 , daar dat verdichtingspunt ook niet met A „ ε_1 -verbindbaar” is. Evenzoo is ieder verdichtingspunt van E_2 punt van

E_2 , daar dat verdichtingspunt wel „ ε_1 -verbindbaar” is met A . Echter is gegeven, dat E niet de som is van twee niet-leege gesloten puntverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt. Dus de gemaakte onderstelling is onjuist. D.w.z.: Bij iedere

$$\varepsilon > 0$$

bestaat er een „ ε -ketting” van A naar B , waarvan alle punten tot E behooren.

Waarmee de stelling is aangetoond.

§ 5. FUNCTIES, HOLOMORF IN HET HALFVLAK MET
EEN POSITIEF REËEL DEEL.

Zij

$$w(x + yi) \equiv u(x + yi) + iv(x + yi)$$

holomorf voor

$$x > 0.$$

Zij

$$u(x + yi) \equiv 0.$$

Zij

$$w(a) = \beta.$$

Noem de spiegelbeelden van a en β ten opzichte van de Y -as:
 a' en β' .

Stel voor $x > 0$:

$$\frac{z-a}{z-a'} = \zeta$$

en

$$\frac{w(z) - \beta}{w(z) - \beta'} = \omega.$$

Daar met

$$x > 0 \text{ correspondeert } |\zeta| < 1$$

en met

$$u(z) \equiv 0 \text{ correspondeert } |\omega(\zeta)| \equiv 1$$

en met

$$w(a) = \beta \text{ correspondeert } \omega(0) = 0,$$

zijn voor de functie $\omega(\zeta)$ de premissen van de *stelling van SCHWARZ* (zie blz. 35) vervuld. Dus is volgens deze stelling

$$|\omega(\zeta)| \equiv |\zeta|$$

m.a.w.:

$$\left| \frac{w - \beta}{w - \beta'} \right| \equiv \left| \frac{z - a}{z - a'} \right|$$

of

$$\left| \frac{w - \beta}{z - a} \right| \equiv \left| \frac{w - \beta'}{z - a'} \right|.$$

Laat nu

$$z \rightarrow a,$$

zoodat

$$w(z) \rightarrow \beta.$$

Dan is

$$|w'(a)| \equiv \frac{2 \Re(\beta)}{2 \Re(a)}.$$

Van $D(x > 0)$ was a geheel willekeurig, dus geldt voor iedere z van D :

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \equiv \frac{u}{x} \dots \dots \dots (1)$$

We beschouwen een rechte $y = c$ (onstant) (fig. 5).

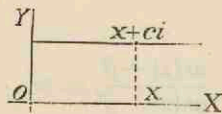


Fig. 5.

Wegens

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

is

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \equiv \frac{u}{x},$$

dus

$$\frac{u}{x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{u}{x}$$

daar u en x positief zijn.

Hieruit volgt, dat op de rechte $y = c$, bij groeiende x , de waarde $\frac{u}{x}$ niet toeneemt, immers

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} = d \log \left(\frac{u}{x} \right) \leq 0.$$

Derhalve: $\frac{u}{x} \downarrow$ een limiet

$$\lambda(c) \geq 0,$$

die a priori van c afhangt.

We willen $\lambda(c)$ met $\lambda(0)$ vergelijken.

Wegens

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

volgt uit (1):

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{u}{x},$$

dus

$$-\frac{u}{x} \leq \frac{\partial u}{\partial y} \leq \frac{u}{x}.$$

Daaruit volgt:

$$\frac{\partial \log u}{\partial y} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \leq \frac{1}{x}$$

$$\log u(x + ci) - \log u(x) \leq \frac{c}{x}.$$

Evenzoo toont men aan:

$$-\frac{c}{x} \leq \log u(x + ci) - \log u(x).$$

Men heeft namelijk:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \log u}{\partial y}$$

$$-\frac{c}{x} \leq \log u(x + ci) - \log u(x).$$

Uit het gevondene:

$$-\frac{c}{x} \equiv \log u(x + ci) - \log u(x) \equiv \frac{c}{x}$$

volgt:

$$\frac{u(x)}{x} \cdot e^{-\frac{c}{x}} \equiv \frac{u(x + ci)}{x} \equiv \frac{u(x)}{x} \cdot e^{\frac{c}{x}}$$

Bij den overgang

$$x \rightarrow +\infty$$

krijgt men dus:

$$\lambda(0) \equiv \lambda(c) \equiv \lambda(0).$$

Dus

$$\lambda(c) = \lambda(0),$$

d.w.z. $\lambda(c)$ is een begrensde constante

$$\lambda \equiv 0$$

en voor ieder punt z van D is

$$\frac{u}{x} \equiv \lambda \dots \dots \dots (2)$$

Beschouw nu het geval

$$\lambda = 0.$$

We teekenen de rechten

$$y = \pm mx,$$

waarin

$$0 < m < \infty$$

(fig. 6).

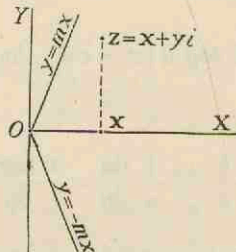


Fig. 6.

Zij

$$z = x + yi$$

een punt daartusschen. We vonden boven:

$$\frac{u(x)}{x} \cdot e^{-\frac{y}{x}} \leq \frac{u(x+yi)}{x} \leq \frac{u(x)}{x} e^{\frac{y}{x}},$$

dus

$$\frac{u(x)}{x} e^{-m} \leq \frac{u(x+yi)}{x} \leq \frac{u(x)}{x} e^m.$$

We laten nu

$$z \rightarrow \infty$$

met de beperking

$$|y| \leq mx.$$

Daarna

$$x \rightarrow \infty,$$

$$\frac{u(x)}{x} \rightarrow 0 \quad (\text{wegens } \lambda = 0),$$

zoodat, wegens m vast, uniform in den hoek $|y| \leq mx$:

$$\frac{u}{x} \rightarrow 0 \quad \dots \quad (3)$$

Zij nu

$$\lambda > 0.$$

Beschouw de functie

$$\varphi(z) = w(z) - \lambda z.$$

Deze functie is holomorf in $D(x > 0)$ en haar reëel deel

$$u(z) - \lambda x \geq 0$$

wegens (2). Deze functie $\varphi(z)$ voldoet dus aan alle onderstellingen, in het begin van deze paragraaf gemaakt. Haar λ is

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \text{ const.}}} \frac{u - \lambda x}{x} = \lambda - \lambda = 0.$$

Zij valt dus onder het zoeven behandelde geval. Wegens (3) is, uniform in elken hoek $|y| \leq mx$, voor $z \rightarrow \infty$:

$$\frac{u - \lambda \cdot x}{x} \rightarrow 0$$

d.w.z.:

$$\frac{u}{x} \rightarrow \lambda \dots \dots \dots (4)$$

Zij weer

$$\lambda = 0.$$

Uit (1) en (3) volgt:

$$\frac{dw}{dz} \rightarrow 0$$

uniform in iederen hoek

$$|y| \leq mx.$$

Zij

$$\varepsilon > 0,$$

dan is

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| < \varepsilon$$

voor $|z| >$ een zekere $R(\varepsilon)$, $|y| \leq mx$ (zie fig. 7).

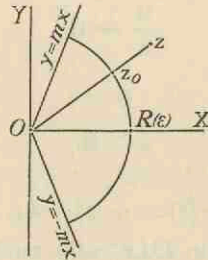


Fig. 7.

Zij

$$|z| > R(\varepsilon),$$

z_0 het punt op Oz , waarvoor geldt

$$|z_0| = R(\varepsilon).$$

Dan is

$$w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{dw}{dz} dz.$$

Wegens

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| < \varepsilon$$

op $z_0 z$ is

$$w(z) = w(z_0) + \theta \varepsilon |z - z_0|, \quad |\theta| < 1.$$

$$\frac{w(z)}{z} = \frac{w(z_0)}{z} + \frac{\theta \cdot \varepsilon \cdot |z - z_0|}{z} = \frac{w(z_0)}{z} + \theta_1 \varepsilon, \quad |\theta_1| < 1.$$

Voor $|z|$ voldoende groot in den hoek $|y| \cong mx$ is dus

$$\left| \frac{w(z)}{z} \right| < 2\varepsilon.$$

Bijgevolg is uniform in iederen hoek $|y| \cong mx$:

$$\frac{w(z)}{z} \rightarrow 0$$

voor $z \rightarrow \infty$.

Zij nu weer

$$\lambda > 0.$$

Voor

$$\varphi(z) = w(z) - \lambda \cdot z$$

geldt dan, omdat haar λ nul is, uniform in iederen hoek $|y| \cong mx$:

$$\frac{\varphi(z)}{z} \rightarrow 0$$

of

$$\frac{w(z) - \lambda \cdot z}{z} \rightarrow 0$$

of

$$\frac{w(z)}{z} \rightarrow \lambda.$$

De Stelling van SCHWARZ, die wij op blz. 29 gebruikt hebben, luidt:

Indien $f(z)$ holomorf is voor

$$|z| < 1, \quad f(0) = 0$$

en

$$|f(z)| < 1,$$

dan is

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Bewijs. Daar

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

binnen den eenheidscirkel convergent is en daar

$$a_0 = 0$$

wegens

$$f(0) = 0$$

is

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots$$

op de geheele cirkelschijf met straal 1 holomorfe.

Zij

$$|z| < 1.$$

Trekken we een cirkel met het middelpunt in 0 en straal ϱ zoodanig, dat

$$|z| < \varrho < 1.$$

Daar een niet-constante holomorfe functie zijn maximum op de grens van het holomorfegebied heeft, zal het maximum van

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right|$$

op de schijf

$$|z| \leq \varrho$$

ergens op den cirkel

$$z = \varrho$$

liggen, b.v. in het punt ζ .

Dan is

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| < \frac{1}{\varrho} \quad (\text{daar } |\zeta| = \varrho).$$

Voor

$$|z| < \varrho < 1$$

is dus

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{\varrho}.$$

Indien we nu tot de limiet overgaan voor

$$\varrho \rightarrow 1,$$

dan mogen we in de laatste ongelijkheid beide leden door hun limiet vervangen, mits we het teeken $<$ vervangen door het teeken \leq .

Dus

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

of

$$|f(z)| \leq |z|$$

hetgeen te bewijzen was.



HOOFDSTUK II.

DE VRAAGSTELLING.

§ 6. DE DOORSNEE VAN DEELGEBIEDEN.

Zij G_0 het gebied

$$|z| < 1.$$

De afbeeldingsfunctie

$$f(z) = z_1(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

brenge G_0 conform over naar een *deelgebied* G_1 van G_0 , dat één grenspunt a gemeen heeft met de grens van G_0 (zie fig. 8).

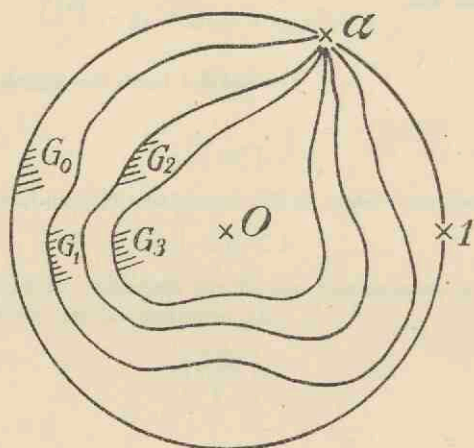


Fig. 8.

De afbeeldingsfunctie

$$f(z_1) = z_2(z)$$

brenge dan G_0 over naar het deelgebied G_2 van G_1 , dat eveneens slechts één grenspunt (n.l. bovengenoemd punt a) met de grens van G_1 gemeen heeft.

Wegens

$$z_1(0) = 0$$

en

$$z_2(0) = 0$$

ligt de oorsprong 0 binnen elk der gebieden G_1 en G_2 en gaat bij iedere afbeelding in zichzelf over.

Zoo voortgaande doen wij ontstaan de deelgebieden G_1, G_2, G_3, \dots (iedere volgende binnen de voorafgaande) met het gemeenschappelijke grenspunt a , terwijl

$$O(z = 0)$$

binnen alle G_n ligt.

VRAAG: Hoe kan nu de doorsnee

$$N(G_0 G_1 G_2 \dots)$$

van alle gesloten deelgebieden er uitzien?

Op grond van het bovenstaande merken we reeds dadelijk op, dat — onafhankelijk van den vorm van N — de punten 0 en a tot de grens van N behooren.

We kunnen de doorsnee N van alle deelgebieden op drie manieren kwalificeeren:

1. N is de verzameling van alle punten, die in alle deelgebieden liggen.
2. N is de grootste puntverzameling, die invariant is bij de transformatie.

$$z_1 = z_1(z).$$

3. N is de meetkundige plaats der punten, die antecedenten van alle orden hebben.

De eerste kwalificatie is het gevolg van het feit, dat N de doorsnee is van alle deelgebieden.

De tweede kwalificatie ontleent haar kracht aan de omstandigheid, dat de transformatie

$$z_1 = z_1(z)$$

ieder deelgebied op een kleiner deelgebied afbeeldt. De punten van de doorsnee N blijven bij die transformatie in N . De doorsnee N is voorts de grootste puntverzameling met die eigenschap, daar bij een deel van N de transformatie

$$z_1 = z_1(z)$$

een punt van dat deel buiten dat deel kan brengen.

De derde kwalificatie spreekt van antecedenten. De omgekeerde bewerking van itereeren noemen wij antecedeeren. De n de iteratie van de afbeelding

$$z_1 = z_1(z)$$

brengt een punt van G_0 over naar een punt van G_n . Omgekeerd heeft dat punt van G_n slechts n antecedenten. Pas indien een punt oneindig veel antecedenten heeft (d.w.z. antecedenten van alle orden), is het een punt van de doorsnee N .

Stelling: De doorsnee N van alle gesloten deelgebieden G_1, G_2, G_3, \dots is een continuüm.

Bewijs: Indien wij het grenspunt a aan N toevoegen, is N gesloten, daar dan ieder verdichtingspunt tot N behoort.

Stel, N bestaat uit twee gesloten puntverzamelingen P en Q zonder gemeenschappelijk punt. Zij a (grens)-punt van P en O punt van Q (zie fig. 9).

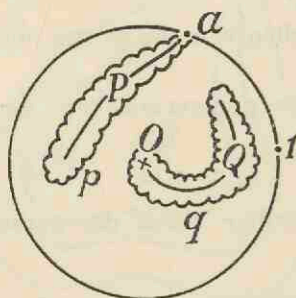


Fig. 9.

We legen om P die gesloten kromme p en om Q die gesloten kromme q , zoodat p en q geheel buiten elkaar liggen. Daar N de doorsnee is van alle G_k , is er een rangnummer K , zoodat alle G_k met

$$k > K$$

geheel binnen de krommen p en q liggen. Dit beteekent, dat al deze G_k uit ten minste twee gebieden bestaan.

Daar echter een continuüm bij de afbeelding

$$z_1 = z_1(z)$$

tot een continuüm samentrekt, is dit in strijd met het gegeven. Immers, alle G_k zijn samenhangende gebieden.

Dus is de onderstelling, dat N uit twee puntverzamelingen P en Q zonder gemeenschappelijk punt bestaat, onjuist.

N is dus een gesloten puntverzameling, die niet de som is van twee niet-leege gesloten puntverzamelingen zonder gemeenschappelijk punt.

Hetgeen te bewijzen was.

Opmerking: Zij

$$z = x + yi$$

en

$$w = u + vi.$$

De lineaire transformatie

$$w(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

beeldt het gebied

$$|z| < 1$$

conform af op het halfvlak

$$u > 0.$$

Tengevolge daarvan is het in deze paragraaf voor den eenheids-cirkel besprokene evenzeer geldig voor het rechterhalfvlak.

De redactie is dan als volgt:

Zij D het gebied

$$x > 0.$$

De afbeeldingsfunctie

$$z_1(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

brenge D conform over naar een deelgebied D_1 van D , dat één grenspunt (het punt ∞) gemeen heeft met de grens van D .

De afbeeldingsfunctie

$$z_2 = z_2(z)$$

brenge dan D over naar het deelgebied D_2 van D_1 , dat eveneens slechts één grenspunt (nl. bovengenoemd punt ∞) met de grens van D_1 gemeen heeft.

Wegens

$$z_1(1) = 1$$

en

$$z_2(1) = 1$$

ligt het punt

$$z = 1$$

binnen elk der gebieden D_1 en D_2 en gaat bij iedere afbeelding in zichzelf over.

Zoo voortgaande doen wij ontstaan de deelgebieden D_1, D_2, D_3, \dots (iedere volgende binnen de voorafgaande) met het gemeenschappelijke grenspunt ∞ . Het punt

$$z = 1$$

ligt binnen iedere D_n .

Ons onderzoek strekt zich dus evenzeer uit tot de doorsnee

$$N(D D_1 D_2 \dots)$$

van alle gesloten deelgebieden.

§ 7. VOORBEELDEN.

1. De functie

$$z_1 = \sqrt{z+2}$$

beeldt het halfvlak

$$x > 0$$

af op het halfvlak

$$x_1 > \sqrt{2}.$$

Hierin zijn weer

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

en

$$z = x + yi.$$

Wij beschouwen de iteratie van deze afbeelding (zie § 6), bepaald door de functierij

$$z_1 = \sqrt{z+2}, \quad z_2 = \sqrt{\sqrt{z+2}+2}, \quad z_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{z+2}+2}+2}$$

enz.

Blijkbaar geldt

$$z_1(2) = 2$$

en

$$z_1(\infty) = \infty$$

De gebieden, waarop de functies van deze rij het halfvlak

$$x > 0$$

afbeelden, trekken samen tot de halfrechte

$$(x \geq 2, y = 0).$$

In dit eerste voorbeeld is de doorsnee N van alle deelgebieden dus een halfrechte, waarvoor de drie kwalificaties, genoemd in § 6, gelden.

2. De functie

$$z_1(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$$

beeldt het halfvlak

$$x > 0$$

af op het halfvlak

$$x_1 > \frac{1}{2}.$$

Blijkbaar gelden

$$z_1(1) = 1$$

en

$$z_1(\infty) = \infty.$$

De geïtereerde afbeelding van

$$x > 0,$$

gegeven door de functie

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

of

$$\frac{1}{4} z + \frac{3}{4},$$

is het halfvlak

$$x_2 > \frac{3}{4}.$$

De geïtereerde afbeelding van

$$x > 0,$$

gegeven door de functie

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2}$$

of

$$\frac{1}{8} z + \frac{7}{8},$$

is het halfvlak

$$x_3 > \frac{7}{8}.$$

De n^{de} geïtereerde afbeelding is blijkbaar het halfvlak

$$x_n > 1 - \frac{1}{2^n}.$$

De doorsnee N van alle deelgebieden is het halfvlak

$$x > 1.$$

In dit voorbeeld is N dus een *gebied*.

3. We beschouwen de figuur, gevormd door twee halfrechten vanuit 0, waarbij een der halfrechten (zie fig. 10) een „aanhangsel” heeft, gevormd door twee stukken van cirkels met 0 als middelpunt en een stuk van een derde halfrechte door 0.

Vermenigvuldigen wij deze figuur achtereenvolgens met de waarden

$$2, 2^{-1}, 2^2, 2^{-2}, 2^3, \dots$$

dan ontstaat gebied H (zie fig. 11), waarin de „aanhangsels” zich verdichten in 0 en in ∞ .

We beschouwen vervolgens het gebied G , dat de vereeniging is van H en een cirkelschijf om 0 (zie fig. 12).



Fig. 10.

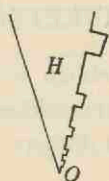


Fig. 11.

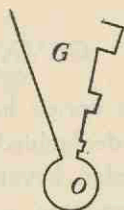


Fig. 12.

De functie

$$z_1 = \frac{1}{2} z$$

beeldt G af op een deelgebied van G , waarbij

$$z_1(0) = 0$$

en

$$z_1(\infty) = \infty.$$

Immers bij de transformatie

$$z_1 = \frac{1}{2} z$$

komt een punt in een „aanhangel” juist binnen een dichter bij 0 gelegen „aanhangel” terecht, terwijl een punt, eenmaal binnen den cirkel gelegen, bij iedere iteratie binnen dien cirkel blijft.

Als grootste invariante puntverzameling N (invariant bij de transformatie $z_1 = \frac{1}{2} z$) ontstaat nu het gebied H .

Opmerking: Tusschen de drie beschreven voorbeelden bestaat de overeenkomst: Een gebied wordt steeds afgebeeld op een deelgebied met één invariant binnenpunt en één invariant punt op ∞ . Het grootste invariante deelgebied is telkens een continuum, dat deze beide invariante punten verbindt. Er bestaat tevens een *verschil*: Bij het voorbeeld 1 is dat continuum *lineair*, bij de voorbeelden 2 en 3 bevat dat continuum een *gebied*.

HOOFDSTUK III.

N BEVAT EEN GEBIED.

§ 8. GEVAL: EEN CIRKELSCHIJF RAAKT IN α .¹⁾

In het vorige hoofdstuk hebben wij gezien, dat de doorsnee N van alle deelgebieden kan samentrekken tot een lineair continuüm 0α of gebieden bevatten. In het laatste geval kan N al of niet een gebied bevatten, waarvan

$$z = 0$$

en

$$z = \alpha$$

grenspunten zijn.

Theorema: Indien G_1 (zie blz. 38) een cirkelschijf bevat, die in α raakt aan den cirkelomtrek, die grens is van G_0 , dan heeft N dezelfde eigenschap en N bevat een gebied, waarvan

$$z = 0$$

en

$$z = \alpha$$

grenspunten zijn.

Bewijs: Door een lineaire transformatie wordt $z_1(z)$ een functie, die het halfvlak $D(x > 0)$ afbeeldt op een deelgebied D_1 van D , dat een halfvlak $H(x > a)$ bevat en waarvan de grens C_1 de rechte

$$x = 0$$

niet ontmoet op het punt

$$z = \infty$$

na (zie fig. 13).

Bovendien zorgen we, dat

$$z_1(1) = 1$$

en

$$z_1(\infty) = \infty.$$

¹⁾ J. WOLFF, Comptes Rendus, 5 April 1937, p. 1101.

Daar elkaar in a rakende cirkels door de lineaire transformatie evenwijdige rechten worden, sluiten de onderstellingen over G_1 het

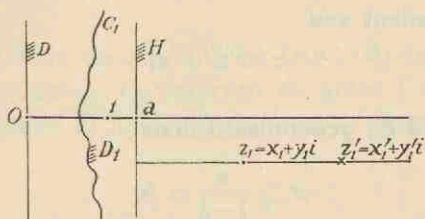


Fig. 13.

bestaan in van een angulaire afgeleide

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1(z)}{z} = \lambda, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Hier is

$$\lambda < 1,$$

omdat voor

$$\lambda = 1$$

het punt ∞ het eenige dekpunt zou zijn.

In $H(x > a)$ is de inverse functie $z(z_1)$ van $z_1(z)$ holomorfe en heeft er een positief reëel deel. Op een horizontale lijn geldt dus voor de punten z_1 en z'_1 ($x_1 < x'_1$):

$$\frac{x}{x_1 - a} \cong \frac{x'}{x'_1 - a},$$

want wegens het in § 5 behandelde neemt $\frac{u}{x}$ op een rechte

$$y = c$$

niet toe.

Laat nu

$$z'_1 \rightarrow \infty$$

op de horizontale lijn, dan is

$$\frac{x}{x_1 - a} \cong \frac{1}{\lambda} \quad x \cong \frac{x_1 - a}{\lambda} \quad x \cong \lambda^{-1} \cdot (x_1 - a)$$

Noemt men een willekeurig punt van H : z , dan volgt uit deze laatste ongelijkheid:

$$x_{-1} \cong \lambda^{-1} \cdot (x - a), \quad \dots \dots \dots (1)$$

waarbij

$$z_{-1} = x_{-1} + y_{-1} i$$

het eerste antecedent van

$$z = x + yi$$

voorstelt.

Van het gebied Δ , gedefinieerd door

$$x > \frac{a}{1-\lambda} = b,$$

kan nu opgemerkt worden, dat alle antecedenten eveneens tot Δ behooren.

Immers, uit (1) volgt nu, dat

$$x_{-1} \equiv \frac{x-a}{\lambda} > \frac{\frac{a}{1-\lambda} - a}{\lambda} = \frac{a}{1-\lambda} = b,$$

dus

$$x_{-1} > b.$$

Evenzoo toont men aan, dat alle

$$x_{-k} > b$$

zijn, met

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Daar voor ieder punt z van Δ alle antecedenten bestaan (ja zelfs eveneens tot Δ behooren), behoort het gebied Δ tot N en zijn grens bevat de punten

$$z = 1$$

en

$$z = \infty,$$

waarmee het theorema is aangetoond.

§ 9. GEVAL: $\lambda > 0$.

Zij $z_1(z)$ een functie, die het halfvlak $D(x > 0)$ conform afbeeldt op een gebied D_1 binnen D , waarvan de grens f een Jordansche kromme is, die binnen D ligt en zich naar ∞ uitstrekt in de twee richtingen

$$\arg z \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

en

$$\arg z \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

wanneer z groeit naar oneindig.

Zij

$$z_1(1) = 1$$

en

$$z_1(\infty) = \infty.$$

Noemen wij de angulaire afgeleide van $z_1(z)$ bij oneindig: λ , dan is

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1(z)}{z} = \lambda,$$

hoe z ook angulair naar oneindig gaat. Geven wij het gebied, dat ontstaat, door de transformatie

$$z_1 = z_1(z)$$

op alle punten z van D_1 toe te passen, aan met D_2 ; het gebied, dat verkregen wordt, door dezelfde transformatie toe te passen op alle punten van D_2 , geven wij aan met D_3 ; en zoo vervolgens. Het gebied D_n bevat het gebied D_{n+1} voor

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Zij N de doorsnee van alle gebieden D_n .

Theorema: Indien λ positief is, dan bevat N een gebied met opening π bij oneindig¹⁾.

¹⁾ J. WOLFF, Comptes Rendus, 29 April 1940, p. 658.

Vooraf bewijzen we de
Hulpstelling: Indien

$$\lambda > 0,$$

dan is

$$\int_{t=1}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt$$

begrensd, waarbij

$$\psi(t) = \left| \arg \frac{z_1(-ti)}{ti} \right| + \left| \arg \frac{z_1(-ti)}{-ti} \right|$$

Bewijs: Stel

$$u(z) = \arg \frac{z_1(z)}{z}.$$

Uit de onderstellingen omtrent $z_1(z)$ volgt, dat $u(z)$ voor

$$x \geq 0$$

harmonisch en begrensd is.

Volgens de formule van POISSON (blz. 60) is dus

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{u(ti)}{x^2 + (t-y)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} u(ti) d\theta.$$

De geconjugeerde van $u(z)$ is $v(z)$, die van θ is $\log r$ en die van $d\theta$ is dus $d \log r$.

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} u(ti) d \log r = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{u(ti)(t-y)}{x^2 + (t-y)^2} dt.$$

Ligt z in het bijzonder op de reële as, dan is

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{u(ti) t dt}{x^2 + t^2} = \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\{u(ti) - u(-ti)\} t dt}{x^2 + t^2}.$$

Daar

$$u(z) = \arg \frac{z_1(z)}{z},$$

is

$$v(z) = \log \left| \frac{z_1(z)}{z} \right|.$$

Wegens

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1(z)}{z} > 0$$

is $v(z)$ begrensd.

Voor $t > 0$ en voldoende groot is $u(ti) < 0$.

Voor $t > 0$ en voldoende groot is $u(-ti) > 0$.

Voor $t > 0$ en voldoende groot is dus $u(ti) - u(-ti) < 0$.

De begrensdheid van $v(x)$ beteekent dus, dat

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{\psi(t) t dt}{x^2 + t^2}$$

begrensd is bij

$$x \rightarrow \infty.$$

Zij $v(x)$ begrensd voor

$$x \equiv 1,$$

dan is

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{\psi(t) t dt}{t^2 + 1}$$

convergent.

Wegens de begrensdheid van

$$\int_0^1 \frac{\psi(t) t dt}{t^2 + 1}$$

is

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t) t dt}{t^2 + 1}$$

het ook.

Bij

$$t \rightarrow \infty$$

is

$$t^2 + 1$$

van de orde t^2 , waarmee de begrenstheid van

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t) dt}{t}$$

is aangetoond.

We toonen nu het theorema van blz. 49 aan.

Bewijs: Stel op de imaginaire as

$$z = ti$$

en

$$\psi(t) = \left| \arg \frac{z_1(ti)}{ti} \right| + \left| \arg \frac{z_1(-ti)}{-ti} \right|.$$

Zij

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Beginnen we te antecedeeren in een punt z_0 met $\arg z_0$ tusschen

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

en

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

en is $|z_0|$ groot genoeg, dan zijn er — wegens $\lambda > 0$ — meer en meer z_{-k} aanwezig, met argumenten tusschen

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon$$

en

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Daar

$$\arg \frac{z_1(z)}{z}$$

harmonisch is en begrensd, is volgens de formule van POISSON:

$$\arg \frac{z-k}{z-(k+1)} = \frac{x-(k+1)}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \arg \frac{z_1(t)}{ti} \cdot \frac{dt}{x_{-(k+1)}^2 + (t-y_{-(k+1)})^2}.$$

Dus

$$\left| \arg \frac{z-k}{z-(k+1)} \right| \leq \frac{x-(k+1)}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot \frac{dt}{x_{-(k+1)}^2 + (t-y_{-(k+1)})^2}.$$

Zij n het aantal antecedenten van z_0 met argumenten tusschen

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon$$

en

$$- \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon,$$

dan is de som der argumenten dier antecedenten

$$\sum_0^n \left| \arg \frac{z-k}{z-(k+1)} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t-y_{-(k+1)})^2} \right\} dt.$$

Zij nu het getal N vast en zóó gekozen, dat

$$\int_N^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \frac{1}{8} \varepsilon$$

(hetgeen wegens de hulpstelling mogelijk is), dan is

$$\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \psi(t) \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t-y_{-(k+1)})^2} \right\} dt < \frac{2N \{ \psi(t) \}_{max.}}{\pi} \cdot \left(\sum_0^n \frac{1}{x_{-(k+1)}} \right),$$

waarin met

$$\{ \psi(t) \}_{max.}$$

bedoeld wordt het maximum van de functie $\psi(t)$ langs den integratieweg, d.w.z. voor

$$|t| < N.$$

Immers, de absolute waarde van een integraal is ten hoogste gelijk aan den integratieweg maal het maximum van den integrand.

Is nu $|z_0|$ voldoende groot, dan is, daar

$$x_{-k} \propto \lambda x_{-(k+1)}$$

met

$$0 < \lambda < 1,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \psi(t) \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} \right\} dt < \frac{1}{8} \varepsilon.$$

We nemen nu

$$|t| > N.$$

Zij vooreerst

$$|z_{-(k+1)}| \equiv |t|$$

voor

$$k = 0, 1, \dots, (t-1)$$

(zie fig. 14).

Dan is

$$|t - y_{-(k+1)}| > a \cdot x_{-(k+1)},$$

a constant.

Dus

$$\frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} < \frac{x_{-(k+1)}}{(t - y_{-(k+1)})^2} < \frac{x_{-(k+1)}}{a^2 \cdot x_{-(k+1)}^2}$$

of

$$\frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} < \frac{G}{x_{-(k+1)}},$$

G constant $\left(= \frac{1}{a^2} \right)$.

Zij vervolgens

$$|z_{-(k+1)}| > |t|$$

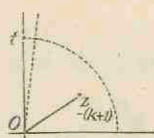


Fig. 14.

voor

$$k = r, (r+1), \dots, n$$

(zie fig. 15).

Dan is

$$\frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} < \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2} = \frac{1}{x_{-(k+1)}}.$$

Nu is — wegens $x_{-k} \sim \lambda x_{-(k+1)}$ met $0 < \lambda < 1$ —

$$\sum_0^{r-1} \frac{G}{x_{-(k+1)}} < \frac{G}{(1-\lambda)x_0}$$

en

$$\sum_r^n \frac{1}{x_{-(k+1)}} < \frac{\lambda^r}{(1-\lambda)x_0}.$$

Zoodat

$$\sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} < \frac{G + \lambda^r}{(1-\lambda)x_0} \sim \frac{G + \lambda^r}{(1-\lambda)\lambda^{r+1}} \cdot \frac{1}{x_{-(r+1)}} = \frac{H}{x_{-(r+1)}},$$

H constant.

Dus is

$$\int_N^\infty \frac{\psi(t)}{\pi} \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} \right\} dt < \frac{H}{\pi} \int_N^\infty \frac{\psi(t) dt}{x_{-(r+1)}} < \frac{H}{\pi} \int_N^\infty \frac{\psi(t) dt}{t},$$

omdat $x_{-(r+1)} > |t|$, dus

$$\int_N^\infty \frac{\psi(t)}{\pi} \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} \right\} dt < \frac{H}{8\pi} \varepsilon.$$

Evenzoo

$$\int_{-\infty}^{-N} \frac{\psi(t)}{\pi} \left\{ \sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} \right\} dt < \frac{H}{8\pi} \varepsilon,$$

zoodat

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \left[\sum_0^n \frac{x_{-(k+1)}}{x_{-(k+1)}^2 + (t - y_{-(k+1)})^2} \right] dt < \left(\frac{1}{8} + \frac{H}{4\pi} \right) \varepsilon.$$

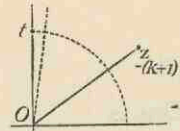


Fig. 15.

Hiermede is bewezen

$$\sum_0^n \left| \arg \frac{z-k}{z-(k+1)} \right| < \left(\frac{1}{8} + \frac{H}{4\pi} \right) \varepsilon.$$

Dus is

$$| \arg z_{-n} - \arg z_0 | < \varepsilon \left(\frac{1}{8} + \frac{H}{4\pi} \right)$$

voor $|z_0|$ voldoende groot. Dan houdt de antecedeering dus nooit op. Hetgeen te bewijzen was.

Het bewijs van het theorema: „Indien

$$\lambda > 0$$

is, dan bevat N een gebied met opening π bij oneindig”, bevat het bewijs van de volgende stelling:

Ondersteld: $f(z)$ holomorf met positief reëel deel in $D(x > 0)$, $a_n (n = 1, 2, \dots)$ is een puntrij in D met

$$|a_{n+1}| \geq c |a_n|,$$

$c > 1$ en vast $n = 1, 2, \dots$

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg a_n \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ en vast, $n = 1, 2, \dots$ (zie fig. 16).

Bewering.

$$\sum_1^\infty \left| \arg \frac{f(a_n)}{a_n} \right|$$

is convergent.

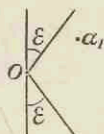


Fig. 16.

Opmerking: $f(z)$ behoeft geen afbeeldingsfunctie te zijn, m.a.w. niet univalent (schlicht).

$\lambda =$ angulaire afgeleide van $f(z)$ in het oneindige.

Bewijs. Wegens

$$\lambda > 0$$

is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \arg \frac{f(ti)}{ti} \right| \frac{dt}{1+|t|} \text{ convergent (1)}$$

(zie FATOU, Séries trigonométriques et séries de TAYLOR, Acta Mathematica 30, pag. 363).

Hier moet opgemerkt worden, dat onder $f(ti)$ verstaan wordt de op een volle maat van

$$-\infty < t < \infty$$

bestaande

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + ti) \neq 0.$$

Wegens de formule van POISSON is, stellende

$$a_n = a_n + i b_n,$$

$$\arg \frac{f(a_n)}{a_n} = \frac{a_n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \arg \frac{f(ti)}{ti} \frac{dt}{|ti - a_n|^2}, n = 1, 2, \dots \dots (2)$$

Want

$$\arg \frac{f(z)}{z}$$

is begrensd in D .

Fixeer een waarde van t . Als

$$|a_k| \equiv |t|,$$

dan is

$$|ti - a_k| \equiv |t| \sin \varepsilon,$$

dus

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^k \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} &\equiv \frac{1}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_1^k a_n \equiv \frac{1}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_1^k |a_n| \equiv \\ &\equiv \frac{|a_k|}{t^2 \sin^2 \varepsilon} \sum_1^k c^{-(n-k)} < \frac{1}{(1-c^{-1})|t| \sin^2 \varepsilon} = \frac{G}{|t|} \end{aligned} \right\} (3)$$

waarin G vast.

Als

$$|a_k| > |t|$$

dan is

$$|ti - a_k| > |a_k| \sin \varepsilon,$$

dus

$$\left. \begin{aligned} \sum_k^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} &< \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \sum_k^{\infty} \frac{a_n}{|a_n|^2} \equiv \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \sum_k^{\infty} |a_n|^{-1} < \\ &< \frac{1}{(1-c^{-1})|a_k| \sin^2 \varepsilon} = \frac{G}{|a_k|} < \frac{G}{|t|} \end{aligned} \right\} (4)$$

Zonder verlies van algemeenheid, stel

$$|a_1| > 1.$$

Wegens (4):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left| \arg \frac{f(ti)}{ti} \right| \cdot \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} \cdot dt \equiv \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{2G}{|a_1|} < 2G \quad (5)$$

Uit (3) en (4) volgt, dat voor iedere t :

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} < \frac{2G}{|t|}, \quad \dots \dots \dots (6)$$

want men behoeft slechts den eersten index

$$k > |t|$$

te beschouwen.

Wegens (2), (5) en (6) is

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} \left| \arg \frac{f(a_n)}{a_n} \right| &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \arg \frac{f(ti)}{ti} \right| \cdot \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{|ti - a_n|^2} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^1 + \int_{|t|>1} \right) < 2G + \frac{2G}{\pi} \int_{|t|>1} \left| \arg \frac{f(ti)}{ti} \right| \frac{dt}{|t|} \end{aligned} \right\} (7)$$

Uit (7) en (1) volgt de stelling.

Dat de aan de puntrij (a_n) gestelde eischen niet overbodig zijn, bewijst het voorbeeld:

$$f(z) = z + \sum_1^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{z-2^n i} + \frac{1}{z+2^n i} \right) = z + z \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^2 + 2^{2n}}.$$

Hier nemen we nu

$$a_n = 1 + 2^n \cdot i.$$

Nu is

$$\arg \frac{f(z)}{z} \text{ angulair } \sim \text{Im} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^2 + 2^{2n}} \right\}.$$

$$\arg \frac{f(a_k)}{a_k} \sim \text{Im} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+1}}{a_k^2 + 2^{2n}} \right\} =$$

$$= - \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+k+2}}{(1 + 2^{2n} - 2^{2k})^2 + 2^{2k+2}} < k^e \text{ term } < -A$$

($A > 0$).

$$\arg \frac{f(z)}{z} = \arg \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^2 + 2^{2n}} \right) \sim \text{Im} \sum_1^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^2 + 2^{2n}}.$$

§ 10. DE FORMULE VAN POISSON.

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G .

Dan is volgens de integraalformule van CAUCHY (blz. 24)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

waarbij de integratievariabele t den cirkel c doorloopt en z een parameter is. Ook $f(t)$ is natuurlijk holomorf in G .

Indien z' een punt buiten den cirkel c is, kan men de grootte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t-z'} dt$$

berekenen.

In den met c concentrischen cirkel c' is $f(t)$ holomorf. De vorm

$$\frac{1}{t-z'}$$

is holomorf in het heele vlak minus z' , dus is de integrand

$$\frac{f(t)}{t-z'}$$

holomorf binnen c' , waaruit volgt, dat de CAUCHY-integraal gelijk 0 is (blz. 19). Dus is

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t-z'} dt = 0.$$

Nu kiezen we (zie fig. 17) voor z' het beeldpunt (geconjugeerde punt) van z ten opzichte van den cirkel c .

De eigenschappen van geconjugeerde punten z en z' zijn:

$$|z| \cdot |z'| = R^2$$

en

$$\left| \frac{t-z}{t-z'} \right| = \text{constant},$$

n.l.

$$\frac{|z|}{R},$$

als t den cirkel c doorloopt.

Zij de voerstraal van z gelijk ϱ , dan heeft z' de voerstraal

$$\frac{R^2}{\varrho}.$$

Hun argument zij θ . Van het veranderlijke punt t zij het argument φ .

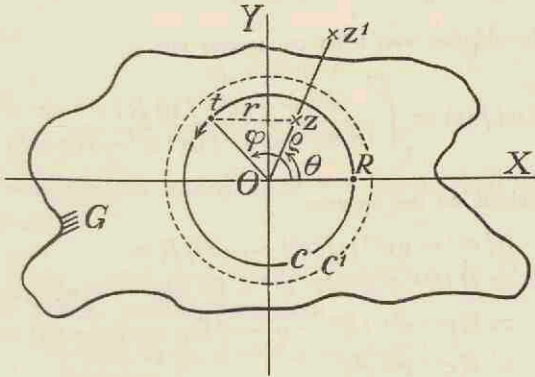


Fig. 17.

Dus in poolcoördinaten is

$$z = \varrho e^{\theta i}, \quad z' = \frac{R^2}{\varrho} e^{\theta i} \quad \text{en} \quad t = R e^{\varphi i}.$$

Hieruit volgt

$$dt = R i e^{\varphi i} d\varphi.$$

Het verschil van

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t-z} dt$$

en

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{t-z'} dt$$

is

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(z'-z)f(t)}{(t-z)(z'-t)} dt$$

of

$$2\pi i f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{R^2}{\varrho} e^{\theta i} - \varrho e^{\theta i}\right) f(t) R i e^{\varphi i}}{(R e^{\varphi i} - \varrho e^{\theta i}) \left(\frac{R^2}{\varrho} e^{\theta i} - R e^{\varphi i}\right)} d\varphi$$

of na vermenigvuldiging van teller en noemer met ϱ :

$$2\pi i f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \varrho^2) e^{\theta i} f(t) R i e^{\varphi i} d\varphi}{(R e^{\varphi i} - \varrho e^{\theta i}) (R^2 e^{\theta i} - R \varrho e^{\varphi i})}.$$

Hiervan herleiden we den noemer:

$$\begin{aligned} & (R e^{\varphi i} - \varrho e^{\theta i}) (R e^{\theta i} - \varrho e^{\varphi i}) R = \\ &= R (R^2 + \varrho^2) e^{\varphi i} e^{\theta i} - R^2 \varrho (e^{2\varphi i} + e^{2\theta i}) = \\ &= R e^{\varphi i} e^{\theta i} \{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\varphi - \theta)\} = \\ &= R e^{\varphi i} e^{\theta i} r^2, \end{aligned}$$

zoodat we tenslotte krijgen de formule van POISSON:

$$f(z) = \frac{R^2 - \varrho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t) d\varphi}{r^2}.$$

Zij $u(z)$ het reële deel van $f(z)$ dan is

$$u(z) = \frac{R^2 - \varrho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(t) dt}{r^2}.$$

§ 11. GEVAL: Δ BEVAT EEN PUNT EN ZIJN BEELD.

Theorema. Indien N een gebied Δ bevat, dat een punt

$$a \neq 1$$

en zijn beeld

$$a_1 = z_1(a)$$

bevat, dan is

$$\lambda > 0$$

(zoodat N volgens het voorgaande een gebied met opening π bij oneindig bevat) ¹⁾.

Bewijs: Daar Δ een deel is van N , bezit Δ in D antecedenten z_{-n} van alle orden, gedefinieerd door

$$z_0 = z, \quad z_1(z_{-n}) = z_{-(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

De harmonische functies

$$u_n(z) = \arg z_{-n}$$

in Δ hebben hun waarden tusschen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$

en zijn geconjugueerd met $\log z_{-n}$.

Trekken wij in Δ een polygoon Γ van a_1 naar a , dan is

$$\log |a_{-n}| - \log |a_{-(n-1)}| = \int_{a_1}^a \frac{\partial u_n}{\partial v} ds,$$

waarbij Γ de integratieweg is en de normaal v de goede richting heeft.

Langs Γ zijn de waarden van

$$\frac{\partial u_n}{\partial v}$$

begrensd, zoodat er een constante M bestaat zoodanig, dat

$$\left| \frac{a_{-n}}{a_{-(n-1)}} \right| < M, \quad n = 1, 2, \dots$$

¹⁾ J. WOLFF, Ned. Ak. v. Wet., Vol. XLIII, no. 8 (1940).

Wij beweren, dat

$$a_{-n} \rightarrow \infty$$

als

$$n \rightarrow \infty.$$

Immers, indien a_{-n} niet met n naar oneindig ging, dan zou er een constante R bestaan en een suite (p) van geheele getallen p , die naar oneindig gaan, zóódanig, dat

$$|a_{-p}| < R.$$

Wegens de onderstelling

$$z_1(1) = 1$$

geldt uniform voor $|z| < R$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} z_p = 1,$$

zoodat dan $a = 1$ zou zijn, hetgeen uitgesloten is.

Uit

$$\left| \frac{a_{-n}}{a_{-(n-1)}} \right| < M$$

en

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1(z)}{z} = \lambda$$

volgt nu

$$\lambda \cong \frac{1}{M} > 0.$$

Wat te bewijzen was.

Opmerking. Het gebied Δ kan het punt

$$z = 1$$

niet bevatten, omdat dit punt op de grens van N is gelegen en N het gebied Δ bevat.

§ 12. GEVAL: Δ HEEFT 1 EN ∞ TOT GRENSPUNTEN.

Theorema. Indien N een gebied Δ bevat met de punten 1 en ∞ tot grenspunten, dan bevat N een gebied met opening π bij ∞ 1).

Bewijs:

Daar Δ tot N behoort en N de doorsnee is van alle deelgebieden D , behoort ook Δ_1 tot N en tot alle

$$D_n, n = 1, 2, \dots$$

indien Δ_1 het gebied is, dat ontstaat door op ieder punt z van Δ de transformatie

$$z_1 = z_1(z)$$

toe te passen (zie fig. 18).

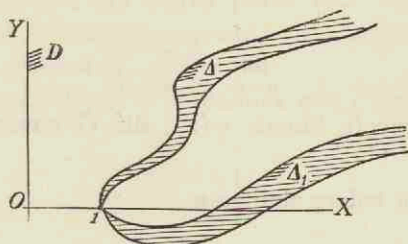


Fig. 18.

Heeft Δ_1 een punt met Δ gemeen, dan bevat Δ een punt en zijn beeld, dus is $\lambda > 0$ (zie § 11).

Heeft Δ_1 geen punt met Δ gemeen, dan moet het gebied tusschen Δ en Δ_1 ook tot alle D_n behooren wegens hun enkelvoudigen samenhang.

Een gebied van N bevat ook nu een punt (in Δ) en zijn beeld (in Δ_1), weer is

$$\lambda > 0$$

en bevat N een gebied met opening π bij ∞ .

1) J. WOLFF, Ned. Ak. v. Wet., Vol. XLIV, no. 2 (1941) p. 195.

HOOFDSTUK IV.

§ 13. DE AFBEELDING VAN EEN DEELGEBIED VAN N OP D .

Zij

$$\lambda > 0,$$

zoodat volgens het voorgaande de doorsnee N van alle deelgebieden

$$D_n (n = 1, 2, \dots)$$

een gebied G met opening π bij oneindig bevat, en het punt $z = 1$ tot grenspunt.

Wij nemen aan, dat G het grootste zoodanige deelgebied van N is.

Zij α een vast punt van G .

Stelling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z - n}{|\alpha - n|}$$

is een in G holomorfe functie $\psi(z)$, die G conform afbeeldt op $D(x > 0)$ ¹⁾.

Bewijs: Stel voor iedere eindige n

$$\psi_n(z) = \frac{z - n}{|\alpha - n|}$$

waarbij α een vast punt in G is en z een veranderlijk punt in G (zie fig. 19).

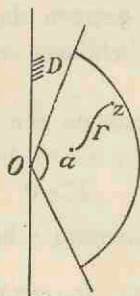


Fig. 19.

¹⁾ J. WOLFF, Ned. Ak. v. Wet., Vol. XLIV, no. 3, 1941, p. 308.

Zij I' een rectificeerbare boog az .

Het argument van z_{-n} is harmonisch in G voor

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_{-n}$$

is harmonisch, gelijkmatig over I' en niet constant.

$$\arg \frac{\bar{z}_{-n}}{|a_{-n}|} = \arg z_{-n} \rightarrow$$

een zekere limiet, dus

$$\psi_n(z) = \frac{z_{-n}}{|a_{-n}|} \rightarrow$$

holomorfe functie van z in G voor $n \rightarrow \infty$ (zie § 11).

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z)$ is een holomorfe functie $\psi(z) = \zeta$.

De waardevoorraad van $\psi_n(z)$ bevat voor voldoende groote n het gebied H , dus de waardevoorraad van ψ bevat H , dus de waardevoorraad van ψ bevat D .

De waardevoorraad van ψ is identiek met D , omdat ψ in D ligt. Dus de functie

$$\zeta = \psi(z)$$

beeldt G af op D .

§ 14. DE AFBEELDING VAN D OP EEN DEELGEBIED
VAN N .

Bij de besproken iteratie werd het halfvlak

$$D (x > 0)$$

door de afbeeldingsfunctie

$$z_1 = z_1(z)$$

afgebeeld op een deelgebied D_1 van D , D_1 op het deelgebied D_2
enz. met

$$z_1(1) = 1$$

en

$$z_1(\infty) = \infty.$$

De doorsnee van alle deelgebieden is N .

Het is niet mogelijk gebleken, de functie te bepalen, die D op N
afbeeldt.

Uit § 13 volgt wel: De inverse functie van

$$\zeta = \psi(z)$$

$$z = \psi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_{-n}| \zeta)_n$$

beeldt D af op een deelgebied G van N met opening π bij ∞ .

STELLINGEN.

I.

Door de functie van KÖNIGS kan men het onderzoek naar de doorsnede der geïtereerde deelgebieden bij conforme afbeelding vereenvoudigen, waarbij de transformatieformules een eenvoudigen vorm krijgen.

II.

Het theorema, volgens hetwelk voor alle in den eenheidscirkel holomorfe univalente functies

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |a_n|^2 \leq 1,$$

kan veel eenvoudiger bewezen worden dan door LANDAU is gedaan.

E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, p. 107, 108 (2te Auflage).

III.

Navolgingswaard is de wijze, waarop CARATHEODORY de determinanten invoert.

C. CARATHEODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen, p. 318.

IV.

Het bestaan van een diffusiekracht, die door RASHEVSKY wordt gebruikt als grondslag voor de verklaring van een aantal biologische verschijnselen, is noch experimenteel, noch theoretisch voldoende bewezen.

N. RASHEVSKY, Mathematical Biophysics.

V.

Ten onrechte beweert BOTTEMA, dat wiskundige strengheid een betrekkelijk begrip is.

O. BOTTEMA, De dienst der Wiskunde (inaugureele rede te Delft op 30 September 1941).

VI.

Het is gewensch, in de planimetrie de begrippen symmetrie en congruentie uit elkaar te houden.

VII.

De invoering der irrationale getallen kan door de studenten eerst na het candidaatsexamen begrepen worden.

VIII.

Het bewijs, dat LANDAU geeft van de bekende stelling van FATOU, is noodeloos lang en ingewikkeld.

E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, p. 40 (2te Auflage).

IX.

Het bewijs van de stelling, dat iedere lijfrente op twee hoofden van verschillende leeftijd door een lijfrente op twee hoofden van gelijken leeftijd kan worden vervangen, indien de gebruikte sterftetafel aan de Wet van MAKEHAM

$$l_x = c \cdot k^x \cdot g^{r^x}$$

voldoet, behoeft niet — zooals wel door LANDRÉ wordt gedaan — gebruik te maken van de Hoogere Wiskunde.

C. L. LANDRÉ, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, p. 495, 496 (5te Auflage).

X.

De z.g. symbolische methode in de projectieve invariantentheorie is op te vatten als een verkorte notatie, waarbij de „symbolen” de indices van de vormen voorstellen.

XI.

De middelbare fout in een sterftetafel, bij het levensverzekeringsbedrijf in gebruik, wordt te vaak over het hoofd gezien.

D
Ut
19