Théorie complète des nombres complexes dans les diverses fonctions, suivi d'un complément

THÉORIE COMPLÈTE

DES

NOMBRES COMPLEXES

DANS LES DIVERSES FONCTIONS

SUIVIE D'UN COMPLÉMENT

PAR

G. C. LOUWENRIER.

ZALT-BOMMEL,
H. J. VAN DE GARDE.
1872.

Imprimerie de H. C. A. Thieme, à Nimègue.

AVANT-MOT.

Die Berechtigung einer neuen Theorie wird geprüft an ihrer Einfachheit, an ihrer Uebereinstimmung mit früher bekannt gewordenen *Wahrheiten*, an ihrer Umfasslichkeit und Fruchtbarkeit. Dr. DURDIK.

Bien des choses jugées d'un certain point de vue sont taxées être *imaginaires*, *impossibles*, *vides de sens*, *etc.*

Ces choses regardées d'un autre point de vue peuvent perdre ces qualifications et se montrer toutes *réelles*.

La Théorie des nombres complexes et le complément renferment des principes pour prouver cette vérité.

Z-B. G. C. L.

TABLE DES MATIÈRES.

Complément.

ERRATA.

Planche. — Th. c. d. n. concrètes, lisez complexes.

Page 8, ligne 7, lisez $\sqrt[3]{a^3}\uparrow(\pi.\frac{\pi}{2}) = a\sqrt{a}.(-\sqrt{-}) =$

» 15, » 8 en remontant, lisez $x^2 = +1\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

» 16, » 12 » » lisez $\sqrt{+1}$, $\sqrt[\overset{n}{2}]{+1}$, $\sqrt[2n]{+1}$, etc.

» 26, » 8 » » *Remarque.* Sur cette page et dans la suite se trouve que $\pm y$ dans l'exposant $\sqrt{-1}.y$ marque le nombre des degrés; le nombre y indiquant la grandeur de l'arc de la direction, exprime *le plus souvent* cette grandeur en unités du rayon.

Page 36, ligne 9, 0^0 lisez 0.

» 37, » 2 en remontant $\sqrt{-b}$, lisez $\sqrt[8]{-b}$.

» 66, » 12 » » lisez encore : ou $1\uparrow 1 =$ $(\cos 1 + \sqrt{-1}\sin 1)$.

» 97, » 12 » » $-<0$, lisez <0.

» 121, » 4, Sign. $+\,12$, lisez Sign. $\frac{+12}{4} = +3$.

» 125, » 14, $\frac{-an}{+n} = +a$, » $\frac{-an}{+n} = -a$.

» 135, » 3, racine absolu, » racine absolue.

» 141, » 18, $a^{+\sqrt{-1}.\pi}$, » $a^{x+\sqrt{-1}.\pi}$.

» 152, » 7 en remontant $Bb - \sqrt{-1}$, lisez : $Bb = \sqrt{-1}.a\sin\varphi$.

§ 1. **Nombres ; absolus, complexes.** Les nombres indiquent les quantités, et comme tels ils marquent le rapport à l'unité.

Dans l'Arithmétique ils ne sont employés que pour marquer cette relation, soit à l'unité *abstraite*, soit à l'unité *concrète*.

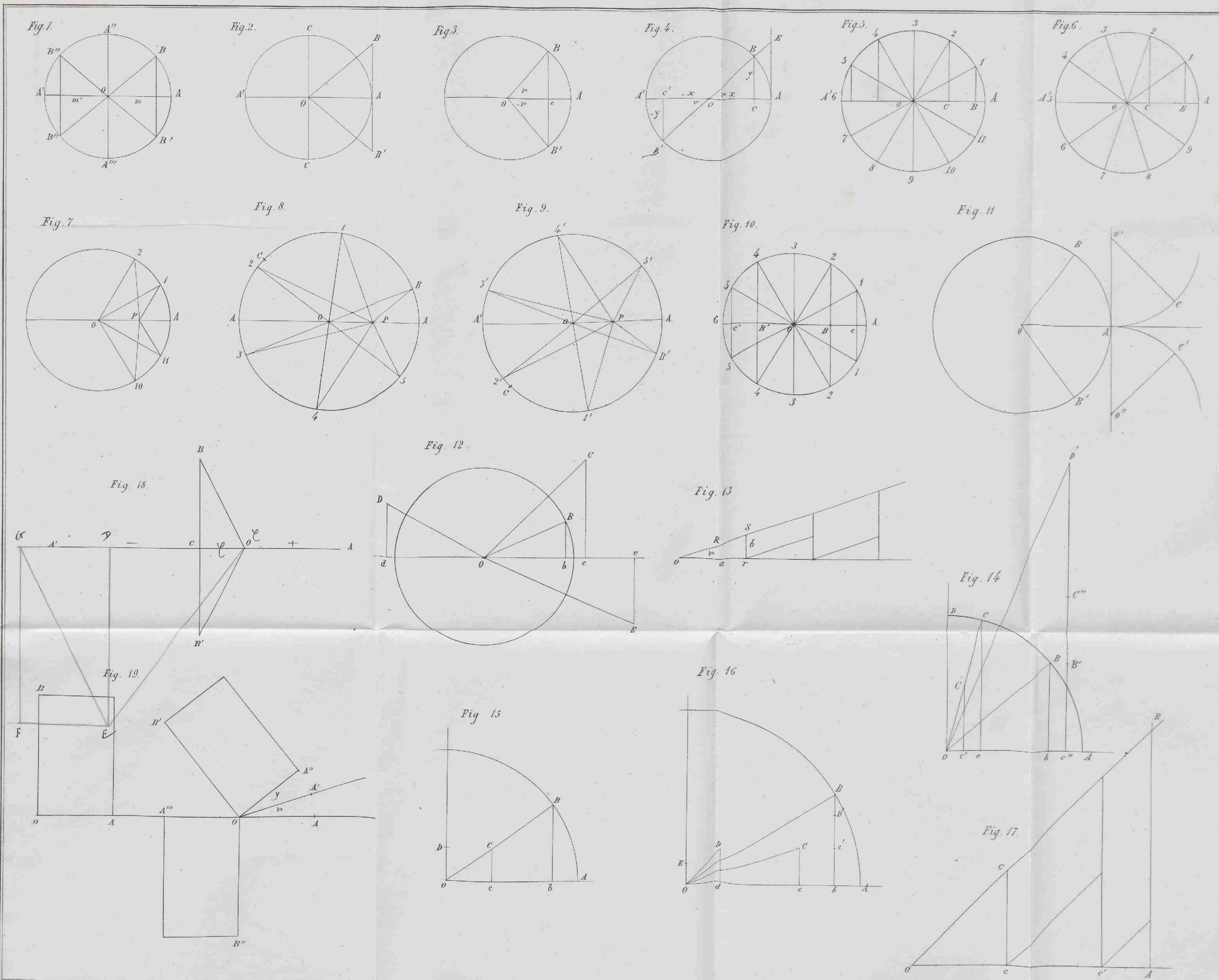
Dans les autres parties des Mathématiques les nombres ne marquent pas simplement cette relation à l'unité ; à l'aide de signes ils marquent encore d'autres relations, auxquelles on peut donner en général le nom de *position*, de *situation*, de *direction*.

Les situations, les directions les plus connues sont celles de *positive* et de *négative* ; la situation négative comme toutes les autres se rapportent à la position positive, qui sert de base à toutes les autres et par laquelle la signification de toutes les autres est determinée.

Dans ce qui suit les nombres seront divisés en nombres *absolus* et en nombres *complexes*.

Les nombres absolus indiquent simplement la quantité ; les nombres complexes marquent non seulement la quantité, mais encore la situation, la direction.

Le nom de direction est employé, pour marquer la situation, la position, où une grandeur se trouve comme l'indice de ses relations.



Théorie complète des nombres Concrets etc: G.C.L.

Et comme les nombres représentent des grandeurs, la direction dans les nombres impliquera pour les grandeurs les idées dérivées de la direction comme signe des relations.

La suite rendra plus clair, ce qu'il y aura d'obscur dans cette définition.

Fig. 1. Soit O l'origine; OA une grandeur dans la direction fondamentale, positive; on peut se figurer que la grandeur OA passe de cette position dans celle de OA′ à l'aide d'une rotation de 180°, l'origine O restant fixe, tandis que le point A décrit l'arc de 180°.

De la même manière les autres directions peuvent être determinées, à l'aide des arcs décrits par la ligne sur le centre O.

Les nombres complexes renferment les deux facteurs pour indiquer ces différents rapports:

$$-a = -1.a; \quad \sqrt{-a^2} = \sqrt{-1}.\sqrt{a^2} = \sqrt{-1}.a,$$

signifiant: $-a$ contient a unités, dont chacune se trouve dans la direction marquée par -1.; $\sqrt{-1}.a$ renferme a unités, chacune dans la direction $\sqrt{-1}$.

§ 2. **Distinction des directions en** *directes* et *indirectes.* **Signes pour la direction.**

Il est nécessaire d'observer déjà ici, que les directions se divisent en *directes* ou données et en *indirectes* ou possibles.

On entend par direction directe, la direction indiquée directement par le facteur directif; par direction indirecte, possible ou imaginaire, celle, non donnée directement, mais implicitement; elle comprend outre la direction directe, marquée par le facteur directif, les rotations complètes ou de 360, que la grandeur a faites outre celle indiquée par la direction directe.

Pour indiquer ce qui précède, on doit savoir que dans la suite pour marquer les directions dans les nombres complexes, on se servira du signe ($\uparrow$) suivi de l'arc ou des degrés qui indiquent la rotation, ainsi

$$+a = +1.a \text{ sera } = \uparrow 0^\circ.\, a = a\uparrow 0^\circ.$$
$$-a = -1.a \text{ » } = \uparrow 180^\circ.\, a = a\uparrow\pi,$$

et ce sera la signification de la direction directe; la direction indirecte impliquera encore les rotations possibles, et signifiera par conséquent:

Outre: $+a = +1.a = a\uparrow 0^\circ$ encore $a\uparrow 2\pi,\ a\uparrow 4\pi,\ a\uparrow 2n\pi.$

$-a = -1.a = a\uparrow\pi$ » $a\uparrow 3\pi,\ a\uparrow 5\pi,\ a\uparrow(2n+1)\pi.$

etc. etc.

§ 3. **Les réductions des nombres** *complexes.* **Les opérations par rapport aux Facteurs de la direction.** Dans les mathématiques on applique aux nombres complexes les différentes opérations, par lesquelles non seulement les nombres absolus, renfermés dans les nombres complexes subissent des réductions, mais aussi les signes, qui marquent les autres relations présentent à la suite de ces opérations des transformations particulières.

Les opérations principales, (l'addition, la soustraction, la multiplication, la division comme aussi l'élévation aux différentes puissances) n'ont pas introduit d'autres directions, marquant la rélation; — les nombres ne restaient que positifs ou négatifs.

Ce n'est que par l'extraction des racines que les facteurs de direction sont augmentés, ce qui a produit une espèce particulière de nombres, nommés *imaginaires, impossibles etc.;* par la combinaison de ces nombres et les réels on obtint les formes *complexes*, $\pm a \pm \sqrt{-1}.\, b$.

La racine d'un nombre absolu est un nombre absolu, rationnel ou irrationnel; et dans ce cas chaque nombre n'a qu'une seule racine pour l'extraction de chaque degré.

§ 4. **L'extraction des racines des Facteurs de la direction.** — Dans les mathématiques se présentaient les cas, que la racine était demandée d'un nombre dans la position positive ou négative.

par ex. $\sqrt[n]{\pm a^n} = \sqrt[n]{\pm 1}\sqrt[n]{a^n}$.

$\sqrt[n]{a^n} = a$; mais quel est le sens qu'on doit attacher à la demande: la racine d'une *situation*, d'une *position*, d'une *direction*?

Peut-être on ne s'est pas fait cette question, parce qu'on n'aura pas fait attention aux différents éléments, compris dans les nombres *complexes*.

Dans certains cas il paraissait qu'il n'y avait pas de difficulté à determiner les racines, on avait par ex.

$$\sqrt[3]{\pm a^3} = \pm a; \quad \sqrt[5]{\pm a^5} = \pm a.$$

en général les racines d'un degré *impair* de nombres *positifs* ou *négatifs* donnaient un nombre *positif* ou *négatif*.

Ainsi. $\sqrt[2n+1]{\pm a^{2n+1}} = \pm a$.

La réponse à la question: Pourquoi? était tout simplement: que les racines élevées au degré indiqué, suivant les règles de la multiplication, donnaient la puissance primitive.

Cette réponse cependant n'éclaircissait pas *pourquoi* l'extraction de la racine d'une direction ne changeait en rien la direction primitive; surtout puisque l'affaire était tout autre dans les racines d'un degré *pair*; on avait pourtant $\sqrt{+ a^2} = \pm a$, et de même avec toutes les racines de degré *pair* de nombres *positifs*; en général:

$$\sqrt[2n]{+ a^{2n}} = \pm a.$$

La raison qu'on donnait était la même que dans les racines de degré impair; — mais ce n'était pas expliquer l'affaire à fond; on ne donnait pas les raisons de la différence, que dans les racines de degré *pair* d'une grandeur *positive*, la direction de la racine est double, *positive* ou *négative*, tandis que dans les racines de degré *impair* d'un nombre dans la même direction *positive* la racine n'est que *positive*.

Plus grande était la difficulté, qui se présentait dans les racines de degré *pair* de nombres *négatifs*,

$$\sqrt{-a^2} \text{ non} = \pm a,$$

et comme on ne connaissait d'autre situation et qu'on ne savait définir cette situation inconnue, on donnait simplement le nom *d'imaginaire*, *d'impossible* aux nombres représentés par ces racines.

On les indique en général par le signe $\sqrt{-1}$, i; — ces nombres proviennent de la formule générale:

$$\sqrt[2n]{-a^{2n}} = a\sqrt[2n]{-1} = a\sqrt{-1}.$$

Dans la suite on pourra juger s'il est juste de réduire, comme on le fait généralement, $a\sqrt[2n]{-1}$ à $a\sqrt{-1}$.

§ 5. **Sur la signification et la valeur des Facteurs de la direction.** — On est parvenu à trouver une valeur réelle pour la forme imaginaire $\sqrt{-1}$, et par là on a pu approfondir la signification de ces grandeurs, déduite de la signification de *positif* et de *négatif* comme direction, suite de rotation.

La proportion ou la relation entre *positif* et *négatif*, peut être représentée, d'après ce qui est dit précédemment, par la proportion:

$$+ : - = 0^0 : 180^0 = 0^0 : \pi.$$

signifiant que la relation entre $\pm$ est la même que celle entre $\frac{0^0}{180^0}$ dans le sens de rotation.

On déterminait la signification de $\sqrt{-1}$, à l'aide de la proposition géométrique: trouver la moyenne proportionnelle de deux nombres ou grandeurs.

Fig. 1. Soit 0 l'origine, $OA = +1$, $OA' = -1$. On aura

$$OA'' = \sqrt{(+1)(-1)} = \sqrt{-1}.$$

La solution de ce problème donnait la signification et la valeur de $\sqrt{-1}$; on voyait que, -1 indiquant la différence de direction de 180° avec $+1$ ou la direction *positive*, $\sqrt{-1}$ marquait la différence de 90° avec $+1$.

La relation entre ces directions peut donc être exprimée par la proportion suivante :

$$\{+1 : \sqrt{-1} : -1\} = \{0° : 90° : 180°\}.$$

Note. Dr. Riecke a fait une objection à ce Théorème dans son livre intitulé : die Rechnung mit Richtungszahlen etc. ; dans les annotations qui suivront la Théorie, on trouvera la réponse à cette objection.

---

§ 6. **Sur les règles que suivent les Facteurs de la direction dans les différentes opérations.** — Pour déterminer les significations des autres Facteurs de direction, il sera propre d'observer et de prouver que ces Facteurs suivent en général les règles des *Exposants* dans les différentes opérations.

Pour **l'addition et la soustraction** on n'a pas de règles pour les *Exposants* ; il en est de même avec les *Facteurs directifs.*

Remarque. Dans le complément se trouve une note sur les signes $\pm$.

Dans cette note il est essayé d'expliquer le sens renfermé dans les exemples suivants, sur le quel les mathématiciens ne sont pas encore généralement d'accord.

$$(+a) + (-a) = o;\ (\sqrt{-a}) + (-\sqrt{-a}) = o.$$
$$(+a) + (-b) = +(a-b) = -(b-a).$$
$$(-a) + (+b) = -(a-b) = +(b-a).$$
$$(+a) - (-b) = a + b;\ (-a) - (-b) = -a + b.$$

Plus tard il sera démontré que les expressions $\sqrt[2^n]{-a}$ $\sqrt[m+1]{-b}$ peuvent toutes être transformées en *formes complexes*, dont on peut trouver *la somme* on *le reste*, qui apres peuvent de nouveau être réduits en quantités complexes.

De cette réduction il suivra, qu'il n'est pas juste de dire que les sommes ou les restes :

$$\sqrt[4]{-a} \pm \sqrt[8]{-b},$$

en général $\sqrt[2^n]{-a} \pm \sqrt[2^m]{-b}$ ne souffrent point de réduction, même quand les valeurs absolues de a et b sont connues.

Dans **les Produits** et **les Quotients** les *Exposants* suivent les règles de l'*addition* et de la *soustraction*, le même en est avec les *Directions*.

$$+a \,.\, +a = a\uparrow 0 \,.\, a\uparrow 0 = a^2\uparrow 0^\circ = +a^2$$

$$-a \,.\, -a = a\uparrow\pi \,.\, a\uparrow\pi = a^2\uparrow 2\pi = +a^2$$

$$\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = (\sqrt{-1}\,\sqrt{a})\,(\sqrt{-1}\,\sqrt{a}) =$$

$$\sqrt{a}\uparrow\frac{\pi}{2} \,.\, \sqrt{a}\uparrow\frac{\pi}{2} \,. = a\uparrow\pi = -a.$$

$$\frac{+a}{+a} = \frac{a\uparrow 0^\circ}{a\uparrow 0^\circ} = \frac{a}{a}\uparrow(0^\circ - 0^\circ) = 1\uparrow 0^\circ = +1.$$

$$\frac{-a}{+a} = \frac{a\uparrow\pi}{a\uparrow 0^\circ} = 1\uparrow(\pi - 0) = 1\uparrow\pi = -1.$$

$$\frac{+a}{-a} = \frac{a\uparrow 0^\circ}{a\uparrow\pi} = \frac{a\uparrow 2\pi}{a\uparrow\pi} = 1\uparrow\pi = -1.$$

Dans le dernier exemple il n'était pas nécessaire de substituer la direction *indirecte* $a\uparrow 2\pi$ à la direction *directe* $a\uparrow 0^\circ$, car en suivant la règle on aura :

$$\frac{a\uparrow 0^\circ}{a\uparrow\pi} = 1\uparrow(0 - \pi) = 1\uparrow -\pi = -1,$$

ce qui donne le même résultat ; quand on tourne la ligne OA $= 1\uparrow 0^\circ$ (voyez la Fig. 1.) soit en direction *positive*, soit en *négative* l'espace de 180°, elle parviendra dans les deux cas dans la position OA$' = 1\uparrow\pi$.

Dans **l'Elévation aux Puissances**, comme aussi **dans l'Extraction des Racines** les **Exposants** sont multipliés et divisés par *l'exposant* marquant le degré de l'élévation et de l'extraction ; il en est de même avec les facteurs *directifs*. —

$$(+\ a)^3 = (a{\uparrow}0^\circ)^3 = a^3{\uparrow}3\,.\,0^\circ = a^3{\uparrow}0^\circ = +\ a^3$$

$$(-\ a)^4 = (a{\uparrow}\pi)^4 = a^4{\uparrow}4\pi \quad = a^4{\uparrow}0^\circ = +\ a^4$$

$$(\sqrt{\ }-\ a)^3 = (\sqrt{\ }-1\ \sqrt{\ }a)^3 = (\sqrt{\ }a{\uparrow}\tfrac{\pi}{2})^3 = \sqrt{\ }a^3{\uparrow}\tfrac{3\pi}{2} =$$

$$\sqrt{\ }a^3{\uparrow} = a\sqrt{\ }a\,(\pi\,.\,\tfrac{\pi}{2})\ -\sqrt{\ }-1) = -\,a\sqrt{\ }-a.$$

$$(\sqrt{\ }-\ a)^7 = (\sqrt{\ }-1\ \sqrt{\ }a)^7 = (\sqrt{\ }a{\uparrow}\tfrac{\pi}{2})^7 = \sqrt{\ }a^7{\uparrow}\tfrac{7\pi}{2} =$$

$$a^3\sqrt{\ }a{\uparrow}(3\pi\,.\,\tfrac{\pi}{2}) = a^3\sqrt{\ }a{\uparrow}(2\pi\,.\,\pi\,.\,\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$-\sqrt{\ }-1.\ a^3\sqrt{\ }a = -\,a^3\sqrt{\ }-a\,.$$

7. **Observation de la direction indirecte dans l'extraction des Racines.** — L'extraction des Racines demande une attention particulière ; dans les nombres *complexes* les opérations se rapportent aux deux éléments intégrants de ces grandeurs, comme déjà il est montré dans les opérations qui précèdent ; il en est de même dans l'extraction des racines.

Dans les opérations précédentes on reduisait quelquefois le resultat avec une direction *indirecte* à la direction *directe.*

$$\sqrt{\ }a^7{\uparrow}\tfrac{7\pi}{2} = a^3\sqrt{\ }a{\uparrow}3\pi\,.\,\tfrac{\pi}{2} = a^3\sqrt{\ }a{\uparrow}\pi\,.\,\tfrac{\pi}{2} = -\,a^3\sqrt{\ }-a.$$

Dans l'extraction des racines on ne se borne pas à la direction *directe*, mais on applique encore l'extraction à la direction *indirecte*, pour avoir toutes les racines *complexes* possibles.

Dans l'extraction on doit déterminer :

1. la racine du nombre *absolu*,
2. » » du facteur *directif.*

La racine du nombre absolu n'est qu'un *single nombre absolu* pour chaque degré d'extraction ; il en serait ainsi avec la racine de la direction, si l'on n'avait qu'à déterminer la racine de la direction *directe* et non en même temps celle de la direction *indirecte*, possible, imaginaire.

De là il résulte que le nombre des racines d'un nombre complexe peut être quelquefois bien grand ; — quand on se borne cependant à la direction *directe*, la racine de la *direction* comme celle du nombre *absolu n'est qu'une*.

Par cette remarque bien des choses seront éclaircies et expliquées à fond.

En observant non seulement la direction *directe*, mais encore *l'indirecte*, on a :

$$+ a^2 = a^2 \uparrow 0° = a^2 \uparrow 2\pi = a^2 \uparrow 4\pi = a^2 \uparrow 2n\pi.$$

$$\sqrt{+a^2} = \sqrt{+1}\sqrt{a^2} = a\uparrow\frac{0°}{2} = a\uparrow\frac{2\pi}{2} = a^2\uparrow\frac{4\pi}{2} = \text{etc.}$$

$$= a\uparrow 0° = a\uparrow\pi = a\uparrow 2\pi \text{ etc.}$$

$$= +a, -a, \quad +a. \text{ etc.}$$

Cet exemple donne d'abord l'explication de la racine double dans le cas que la racine est d'un degré *pair*.

$$\sqrt[3]{+a^3} = \sqrt[3]{+1}.\, a = a\uparrow\frac{0°}{3}, a\uparrow\frac{2\pi}{3}, a\uparrow\frac{4\pi}{3}, a\uparrow\frac{6\pi}{3} \text{ etc.}$$

$$= a\uparrow 0,\ a\uparrow 120°,\ a\uparrow 240°,\ a\uparrow 2\pi$$

$$= +a,\ a\uparrow 120°,\ a\uparrow 240°, +a.$$

L'exemple prouve qu'il n'est pas juste de poser comme règle absolue : les racines de degré impair d'un nombre positif *ne donnent que des nombres positifs*.

Le nombre des racines est égal au nombre de l'indicateur ou de l'exposant du degré dans le cas qu'on observe la direction *directe et l'indirecte*.

Au contraire en n'observant que la direction *directe* dans le nombre complexe, la racine n'est qu'une, on a :

$$\sqrt[4]{+a^4} = a\uparrow\frac{0}{4} = a\uparrow 0° = +a.$$

$$\sqrt[3]{+a^3} = a\uparrow\frac{0°}{3} = a\uparrow 0° = +a.$$

Dans les racines de degré *impair* on néglige toutes les autres racines, parcequ'elles contiennent des facteurs directifs, non directement *positifs* ou *négatifs*, mais indiquant des directions moyennes.

Ces racines cependant ainsi que les autres possèdent toutes les qualités des racines, cequi est démontré en les élevant à la puissance de l'extraction ; — on les néglige, on les ignore ou bien elles sont taxées *impossibles, imaginaires*

Remarque. Plus tard il sera prouvé que ces grandeurs, taxées comme impossibles, imaginaires, représentent cependant des formes complexes, c'est à dire des grandeurs réelles. unies à des grandeurs imaginaires, dont on fera encore connaître la vraie valeur, qui n'est pas toujours imaginaire, dans le vrai sens du mot.

$$(a\uparrow 0°)^3 \quad = a^3\uparrow 3.0° = a^3\uparrow 0° = + a^3$$
$$(a\uparrow 120°)^3 = a^3\uparrow 360° = + a^3$$
$$(a\uparrow 240°)^3 = a^3\uparrow 720° = a^3\uparrow 2\pi = + a^3.$$

Dans les racines de degré *pair* on observe à ce qu'il paraît, peut-être sans le savoir, non seulement la racine de la direction *directe*, mais encore celle de *l'indirecte* avec le facteur *négatif* et on néglige les autres.

De là on obtient :

$\sqrt{+a^2} = \pm a$; dans ce cas on n'avait que deux racines différentes, qui l'une et l'autre sont observées.

$$\sqrt{+a^2} = \sqrt{+1}.\,a = a\uparrow\frac{0°}{2}\ ,\ a\uparrow\frac{2\pi}{2},\ \text{etc.}$$
$$= a\uparrow 0°,\ a\uparrow\pi,\ \text{etc.}$$
$$= + a\ ,\ - a.$$

$$\sqrt[4]{+a^4} = \sqrt[4]{+1}.\,a = a\uparrow\frac{0°}{4},\ a\uparrow\frac{2\pi}{4},\ a\uparrow\frac{4\pi}{4},\ a\uparrow\frac{6\pi}{4},\ a\uparrow\frac{8\pi}{4}\ \text{etc.}$$
$$= a\uparrow 0°,\ a\uparrow\frac{\pi}{2},\ a\uparrow\pi\ ,\ a\uparrow\frac{3\pi}{2},\ a\uparrow 2\pi$$
$$= + a,\ \sqrt{-1}.\,a,\ - a,\ -\sqrt{-1}.\,a,\ + a.$$

Cet exemple marque les 4 différentes racines de $\sqrt[4]{+a^4}$;

dont on n'observe que $\pm a$, tandis qu'on néglige les deux autres comme *imaginaires.*

Toutes ces racines sont de vraies racines, comme il est montré plus haut, et encore on pourrait s'étonner de ce qu'elles sont negligées, vu que la signification en est connue, la direction moyenne signifiant une direction réelle, celle de 90°.

Le nom d'imaginaire est donc inexact à deux égards; d'abord puisque ce sont de vraies racines, et puis des racines à valeur réelle, mais *relative*, comme il sera prouvé dans la suite.

$$\begin{aligned} \sqrt{-a^2} &= \sqrt{-1}\, a = a\uparrow\tfrac{\pi}{2},\ a\uparrow\tfrac{3\pi}{2},\ a\uparrow\tfrac{5\pi}{2} \text{ etc.} \\ &= a\uparrow 90^\circ,\quad a\uparrow(\pi\,.\,90)^\circ,\ a\uparrow(2\pi\,.\,90)^\circ \text{ etc.} \\ &= \qquad -a\uparrow 90^\circ\ ,\ a\uparrow 90^\circ \text{ etc.} \\ &= \sqrt{-1}\,.\,a,\quad -\sqrt{-1}\,.\,a,\ \sqrt{-1}\,.\,a \text{ etc.} \end{aligned}$$

La signification de $\sqrt{-1}\,.\,a$ étant trouvée, comme il est indiqué plus haut, l'application de la théorie au même exemple, sert à en prouver la justesse par la conformité des résultats.

Les deux racines satisfont aux qualités requises:

$$\begin{aligned} (a\uparrow 90^\circ)^2 &= a^2\uparrow 180^\circ = -a^2 \\ (a\uparrow(\pi\,.\,90^\circ)^2 &= a^2\uparrow(2\pi.180)^\circ = -a^2. \end{aligned}$$

Pour développer les idées sur la manière de déterminer les facteurs *directifs* dans l'extraction des racines, la détermination des différentes valeurs de $\sqrt[12]{-a^{12}}$ servira à le montrer plus amplement encore.

$$\sqrt[12]{-a^{12}} = \sqrt[12]{-1}.\ a =$$

$$a\uparrow\tfrac{\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{3\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{5\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{7\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{9\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{11\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{13\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{15\pi}{12},$$
$$a\uparrow\tfrac{17\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{19\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{21\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{23\pi}{12},\ a\uparrow\tfrac{25\pi}{12} \text{ etc.}$$
$$= a\uparrow 15^\circ,\ a\uparrow 45^\circ,\ a\uparrow 75^\circ,\ a\uparrow 105^\circ,\ a\uparrow 135^\circ,\ a\uparrow 165^\circ,$$

$a\uparrow\pi.15^\circ$, $a\uparrow\pi.45^\circ$, $a\uparrow\pi.75^\circ$, $a\uparrow\pi.105^\circ$, $a\uparrow\pi.135^\circ$, $a\uparrow\pi.165^\circ$, $a\uparrow 2\pi.15$ etc.

On voit dans cet exemple que $\sqrt[12]{-1}.\,a^{12}$ n'a que 12 racines différentes ; qu'il n'y en a plus, puisque en continuant, les racines se répèteraient régulièrement ;

$$a\uparrow\frac{\pi}{12} = a\uparrow(2\pi\,.\,\tfrac{\pi}{12}) = a\uparrow(2n\pi\,.\,\tfrac{\pi}{12}).$$

Cet exemple prouve ce qui est observé ci-devant, qu'il n'est pas juste de mettre en général :

$$a\sqrt[2n]{-1} = a\sqrt{-1},$$

car on voit la différence dans l'exemple précédent :

$\sqrt[12]{-1} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{-1}}$ n'est pas simplement $= \sqrt[4]{-1}$.
$\sqrt[6]{-1} = \sqrt{\sqrt[3]{-1}}$ » » » $= \sqrt{-1}$.

§ 8. **Division en directions conjuguées et opposées.** — L'exemple montre encore que les 12 racines renferment des formes, qui de deux manières peuvent être combinées deux à deux, par rapport à certaines conformités, qui méritent d'être remarquées et distinguées par des noms.

Fig. 1. Pour expliquer la dernière remarque soit $OA = 1 = +1$.

$$\angle\, AOB = \angle\, AOB' = \angle\, A'OB'' = \varphi^\circ.$$

$$OB \text{ sera } = 1\uparrow\varphi^\circ$$

$$OB' = 1\uparrow -\varphi^\circ.$$

$$OB'' = 1\uparrow\pi.\varphi^\circ. = 1\,(-\uparrow\varphi^\circ) = -1\uparrow\varphi^\circ.$$

Les mathématiciens donnent le nom de grandeurs conjuguées à OB et OB' $= 1\uparrow\varphi^\circ$ et $1\uparrow -\varphi^\circ$; leurs directions sont *positives* et *négatives* par rapport à la direction positive OA, la base de la direction.

OB et OB'' sont opposées par rapport à l'origine O.

$$OB, OB'' = 1\uparrow\varphi, 1\uparrow(\pi\,.\,\varphi) = 1\uparrow\varphi, 1(-\uparrow\varphi) = 1\uparrow\varphi, -1\uparrow\varphi.$$

Dans ce qui suit OB, OB' seront appelées grandeurs à *direction conjuguée* ; OB, OB'' grandeurs à *direction opposée*.

Ainsi dans l'exemple $\sqrt[12]{-1}\,.\,a^{12}$ les nombres ou les grandeurs :

$$\left.\begin{array}{l} a\uparrow 15^\circ \text{ et } a\uparrow\pi\,.\,165^\circ = a\uparrow -15^\circ \\ a\uparrow 75^\circ \text{ et } a\uparrow\pi\,.\,105^\circ = a\uparrow -75^\circ \end{array}\right\} \text{ sont conjuguées.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\uparrow 15^\circ \text{ et } a\uparrow\pi\,.\,15^\circ \\ a\uparrow 75^\circ \text{ et } a\uparrow\pi\,.\,75^\circ \end{array}\right\} \text{ sont opposées.}$$

Cequi précède renferme la signification fondamentale et complète de toutes les grandeurs imaginaires ou plutôt de toutes les grandeurs complexes et en détermine en même temps la valeur réelle, cependant toujours encore dans un sens abstrait ; — dans la suite il sera essayé de trouver le sens concret des grandeurs généralement taxées comme imaginaires, impossibles, *et* dans un sens *abstrait et* de plus encore dans un sens *concret.*

Le mot signification complète demande cependant une certaine restriction, savoir qu'il ne se rapporte ici qu'au cas que les nombres complexes représentent des grandeurs ou des nombres ordinaires ; les nombres complexes se présentent encore dans d'autres relations, ils peuvent être *Exposants*, et encore dans les fonctions *goniométriques* et les *cyclométriques* ils sont employés pour indiquer les lignes goniométriques ou des arcs de cercle ; les nombres complexes figurant dans ces fonctions demandent d'être traités séparément pour en trouver la signification et la valeur.

Ce point important sera examiné plus tard.

---

§ 9. **Distinction des nombres en abstraits et en concrets.** — Les nombres sont divisés, dans ce qui précède, en *absolus* et en *complexes ;* — on les divise encore en *abstraits* et en *concrets.*

Les nombres *abstraits* indiquent des quantités, dont l'unité est *abstraite*; les concrets au contraire dans cette division, marquent des quantités, dont l'unité est concrète, c'est à dire, on sait quelle est la grandeur réelle, qui représente l'unité de ces quantités.

Dans les Mathématiques l'unité positive étant déterminée, on est parvenu dans bien des cas à trouver la grandeur, qui correspond à la grandeur négative; dans les cas où il ne se présente point de grandeur, répondant à cette fin, les grandeurs négatives sont jugées être impossibles, imaginaires.

Dans l'Algèbre la solution d'un problème donnant une grandeur représentée sous la forme imaginaire ou complexe, le problème est jugé immédiatement comme impossible, imaginaire.

Quand on ne sait la signification ni la valeur des nombres complexes dans toute leur étendue, on ne peut s'étonner de cette décision immédiate; — il n'en est pas ainsi quand la valeur, la signification est trouvée; dans ce cas, de même qu'avec les réponses négatives, on ne se décide à juger le problème impossible, imaginaire, qu'après avoir prouvé, qu'il est impossible d'attacher quelque idée concrète à la réponse à forme imaginaire ou complexe.

Au lieu d'insérer ici un traité sur ce point, qui n'est pas des plus faciles, ni des plus agréables, vu que non seulement jadis, mais encore dans ce temps les opinions sur ce sujet diffèrent beaucoup, voyez les idées de Duhamel dans: Methodes dans les sciences de Raisonnement 2 partie page 161 etc.; il sera plus convenable de réserver cette étude pour la fin, quand les grandeurs ou les nombres complexes auront été expliqués dans toutes leurs relations ou dans toutes les fonctions où ils se trouvent.

§ 10. **La signification et la valeur des nombres**

imaginaires peuvent être déterminées encore d'autres manières. — La manière précédente, quoique certainement la plus simple, la plus naturelle et en même temps la plus complète pour déterminer la signification et la valeur des grandeurs imaginaires, n'est cependant pas la seule pour parvenir à ce but.

La signification et la valeur de $\sqrt{-1}$. se trouvait à l'aide de la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1, de la même manière on pourra parvenir à fixer celle des autres grandeurs imaginaires ; cependant dans tous les cas on ne parvient pas de cette manière à *toutes* les valeurs de ces grandeurs.

Pour trouver la signification et la valeur de $\sqrt[4]{-1}$, on pourra regarder cette grandeur comme une des moyennes proportionelles entre $+1$ et -1 ; $\sqrt{-1}$ étant la seule moyenne proportionnelle entre ces deux grandeurs, on peut se figurer que $\sqrt[4]{-1}$ est une des trois moyennes entre $+1$ et -1 ; de sorte qu'on aura :

$$+1 : x = x : y = y : z = z : 1.$$

Pour y on a trouvé la signification et la valeur de $\sqrt{-1} = 1 \uparrow 90°$; cherchant maintenant la moyenne entre $+1$ et $\sqrt{-1}$ ou entre $\sqrt{-1}$ et -1 on aura la valeur de $\sqrt[4]{-1}$.

$$+1 : x = x : \sqrt{-1} \text{ ; cequi donne}$$
$$x^2 = +1\sqrt{1} = \sqrt{-1}$$
$$x = \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{-1}$$

de même on aura : $z = \sqrt{(-1\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}\sqrt[4]{-1}$.

La proportion continue sera donc :

$$+1 : \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{-1} : \sqrt{-1} =$$
$$\sqrt{-1} : \sqrt{-1}\sqrt[4]{-1} = \sqrt{-1}\sqrt[4]{-1} : -1.$$

De cette proportion il suit :

$$\frac{\sqrt[4]{-1}}{+1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt[4]{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{-1}{\sqrt{-1}.\sqrt[4]{-1}} = \sqrt[4]{-1}.$$

De ce qui est prouvé auparavant, il est connu que la puissance du second degré d'une direction signifie la direction prise deux fois, de sorte qu'on a:

$$(\sqrt[4]{-1})^2 = \underline{\underline{\sqrt{-1}}} = 2\uparrow\sqrt[4]{-1}.$$

$$\uparrow 90^\circ = 2\uparrow\sqrt[4]{-1}.$$

$$\text{ainsi} \qquad \uparrow\frac{90^\circ}{2} = \uparrow 45^\circ = \uparrow\sqrt[4]{-1}.$$

De la même manière on trouvera la signification et la valeur des autres racines de degré *pair* contenues dans la forme $\sqrt[2n]{-1}$.

En appliquant cette méthode aux formes suivantes $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[2n+1]{-1}$ on ne parvient qu'à trouver une seule valeur, savoir $\sqrt[3]{-1} = 1\uparrow\pi$ et ainsi pour toutes les autres.

La valeur de $\sqrt[3]{-1}$ se trouve en prenant deux moyennes proportionnelles, savoir :

$$+1 : x = x : y = y : 1.$$

Encore en suivant cette méthode on ne trouve pas les différentes valeurs des formes :

$$\sqrt{+1},\ \sqrt[2n]{+1},\ \sqrt[2n]{+1},\ \sqrt[2n+1]{+1}.$$

Il suffira d'avoir indiqué d'autres manières, et d'avoir prouvé, que les résultats obtenus de ces manières ne sont pas en contradiction avec la première méthode.

La méthode des moyennes dans les proportions continues est la même que l'interpolation dans les séries géométriques et arithmétiques, qui donnerait les mêmes résultats.

---

§ 11. **Sur l'équation** $x^n = \pm 1$, $x = \sqrt[n]{\pm 1}$. Ce sujet est traité bien amplement dans tous les cours de l'analyse algébrique.

Le sujet est défini comme devant prouver le nombre des racines de *l'unité*, nombre égal à l'exposant de la racine n.

D'après ces traités l'équation renferme 4 cas différents.
pour n *pair*, $x = \sqrt[n]{+1}$ renferme les racines réelles ± 1 ;
» n *impair*, $x = \sqrt[n]{+1}$ ne renferme qu'une seule racine réelle $+1$;
» n *pair*, $x = \sqrt[n]{-1}$ n'a aucune racine réelle ;
» n *impair*, $x = \sqrt[n]{-1}$ renferme la racine réelle -1.

Toutes les autres racines sont imaginaires et ont toutes la forme complexe :

$$(\cos \varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin \varphi).$$

Ce qui signifie réellement :

$$1(\cos \varphi + \sqrt{-1} \,.\, \sin \varphi).$$

§ 12. **Sur la valeur des formes complexes.** — De la combinaison des grandeurs réelles et des imaginaires naissent les formes complexes.

$$x + \sqrt{-1} \,.\, y.$$

Après avoir trouvé la signification de $\sqrt{-1} \,.\, y$, on est parvenu à déterminer la valeur complexe des formes complexes.

Fig. 2. Soit $OA = x$, $AB = y$, $AB' = -y$.

En considérant en même temps la direction de AB et AB′ par rapport à OA, prise comme base de direction, on a $OA = +x$; $AB = \sqrt{-1} \,.\, y$, $AB' = -\sqrt{-1} \,.\, y$.

Puis on a $OB = \sqrt{\{OA^2 + AB^2\}} = \sqrt{\{x^2 + y^2\}} = R$. Cette R est la valeur *absolue* de $\sqrt{(x^2 + y^2)}$; par rapport à OA, OB a une certaine position, dépendant des valeurs de OA et AB ; — cette position peut être déterminée par $\angle$ AOB dont la tangente est égale à $\frac{y}{x}$.

La valeur complexe de OB peut donc être exprimée par :

$$OB = R \uparrow \text{arc. tang } \frac{y}{x} \text{ et } OB' = R \uparrow \text{arc. tang } \frac{-y}{x}.$$

La valeur obtenue de cette manière représente celle de la forme complexe.

On a donc la formule fondamentale :

$$x \pm \sqrt{-1} \, . \, y = \sqrt{(x^2 + y^2)} \uparrow \text{arc tang} \frac{\pm y}{x}.$$
$$= \quad R \quad \uparrow \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{\pm y}{x}.$$

Les grandeurs x et y dans $x + \sqrt{-1} \, . \, y$ diffèrent par rapport à la direction.

Dans le sens de la Théorie ordinaire les grandeurs x et y de la forme $x + \sqrt{-1} \, . \, y$ sont regardées comme hétérogènes ; l'une x étant réelle, l'autre $\sqrt{-1} \, . \, y$ imaginaire, impossible ; dont il suit que ces grandeurs ne sauraient être unies ; l'une par rapport à l'autre est de nulle valeur.

Dans le sens de la Théorie qui précède, d'après laquelle ces grandeurs ne diffèrent que de direction, qui n'est pas jugée absolument imaginaire ou impossible, ces grandeurs nonobstant la diversité des directions, ne sont pas sans influence l'une sur l'autre, comme il sera expliqué dans l'exemple suivant.

Ne considérant que la direction *positive* et la *négative*, si quelqu'un demande :

Une personne ayant fait la route représentée par les lignes OA et AB ou AB′ dans les directions données, quelle est la distance que la route AB ou AB′ a ajoutée à la distance positive OA ?

La réponse sera *nulle*, ainsi ne considérant que les *dites* directions, on a :

$$x \pm \sqrt{-1} \, . \, y = x \pm 0.$$

Au contraire si l'on demande : A quelle distance du point O on est parvenu par les routes données avec leurs directions ; la réponse sera OB ou OB′ comme la distance *absolue* ; — la distance complexe indiquée par les grandeurs complexes sera :

$$OB\,,\ OB' = \sqrt{(x^2+y^2)} \uparrow \text{arc tang}\ \frac{\pm y}{x}.$$

§ 13. **Suite sur** $x = \sqrt[n]{\pm 1}$. Pour reprendre les racines de la dite équation, les formes complexes qui représentent les racines imaginaires:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi) = 1(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)$$

peuvent être réduites à la forme complexe:

$$\sqrt{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \uparrow \text{arc tang}\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 1\uparrow\varphi.$$

Par conséquent en mettant l'arc φ pour représenter les arcs des différentes directions on a pour les valeurs: $x = \sqrt[n]{\pm 1} = 1\uparrow\pm\varphi$.

Encore cette forme comprend non seulement les racines imaginaires, mais en même temps les réelles, car $\pm 1 = 1\uparrow^{0^\circ}_{\pi} = 1(\cos{}^{0^\circ}_{\pi} + \sqrt{-1}\,.\,\sin{}^{0^\circ}_{\pi})$.

Les différentes valeurs de φ se trouvent, comme il est indiqué ci-devant dans l'exemple $\sqrt[n]{\pm 1}$, en écrivant pour ± 1, les valeurs à direction *directe* et *indirecte*.

$$+1 = 1\uparrow 0\,,\ 1\uparrow 2\pi\,,\ 1\uparrow 4\pi \ .\ .\ .\ .\ .\ 1\uparrow 2n\pi \ \text{etc.}$$

dont les racines sont $\sqrt[n]{+1} =$

$$1\uparrow\frac{0}{n},\ 1\uparrow\frac{2\pi}{n},\ 1\uparrow\frac{4\pi}{n}\ .\ .\ .\ .\ .\ 1\uparrow\frac{2n\pi}{n}\ \text{etc.}$$

De la même manière on trouve celles de $\sqrt[n]{-1}$, pour les valeurs des nombres **n** *pair* ou *impair*, comme il est expliqué dans ce qui précède, où en même temps il est démontré que le nombre des racines ne peut monter au delà de **n**, pour ne pas tomber dans des répétitions.

La question d'après ce qui est dit sur l'équation $x^n = \pm 1$, $x = \sqrt[n]{\pm 1}$ sera: s'il est juste de la regarder comme devant prouver que le nombre des racines *de l'unité* est égal à l'indicateur du degré de la racine?

Ou bien: l'équation bien comprise ne renferme-t-elle principalement, fondamentalement la solution de l'extraction des racines de la direction dans les nombres complexes?

Les nombres complexes renferment deux facteurs, l'un c'est le *nombre absolu*; l'autre c'est *le facteur de la direction*; — pour avoir la racine complète il ne suffit pas de déterminer le nombre absolu, c. a. d. la racine du facteur qui indique le nombre absolu, et dont dans tous les cas pour chaque racine d'un certain degré le nombre n'est qu'*un*; — mais encore on doit déterminer la *racine de la direction*, la direction n'étant pas un facteur invariable dans ces opérations.

Il est prouvé que la racine de la direction ne serait qu'*une* de même que celle du nombre absolu, quand on se bornait à déterminer simplement la racine de la direction *directe*, mais puisqu'en même temps on doit considérer la direction *indirecte* renfermée implicitement dans la *directe*, le nombre des racines n'est pas *un*, le nombre dépend de celui indiquant le degré de l'extraction et quand on finit où la répétition des directions commence, le nombre de ces racines est égal à ce même nombre.

Ainsi pour $n = 12$ $\sqrt[n]{\pm 1} = \sqrt[n]{\pm 1.\,1}$.

On a d'abord $\sqrt[n]{1} = 1$; cette unité est la seule racine absolue du nombre *absolu* 1.

$\sqrt[n]{\pm 1}$ indiquant la racine de la direction ne serait qu'*une* pour la direction *directe* $1\uparrow^{0}_{\pi}$, et serait $= 1\uparrow\frac{0}{n}$, $1\uparrow\frac{\pi}{n}$.

En considérant la direction *indirecte* on trouvera les autres racines, comme il est indiqué ci-devant.

§ 14. **Objection sur la manière de considérer l'équation** $x^n = \pm 1$. Peut-être encore après ce qui précède, on fera l'objection: la racine de *l'unité* n'est pas simplement l'unité; — et pour preuve on citera une multitude d'exemples, p. ex.

$$\sqrt[5]{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

On dit: le second nombre élevé au 5me degré donne l'unité.

Réponse. — Le 5me degré ou la puissance demandée donne l'unité, c. à d., l'unité complexe $+1 = 1\uparrow 0° = 1\uparrow 2n\pi$, et non la simple unité *absolue.*

La racine $\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$ n'est pas la racine de *l'unité absolue*; — cette expression bien comprise renferme implicitement deux facteurs, les racines des deux facteurs de l'unité concrète; — savoir

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$1\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}\right\}.$$

Le facteur 1 est égal à $\sqrt[5]{1}$, comme la simple et unique racine de l'unité absolue, et le second facteur n'est autre chose que la réduction de $(\cos 72° + \sqrt{-1} \sin 72°)$ c. à d. qu'on a substitué à cos 72° et à sin 72° les valeurs des lignes goniométriques par rapport au rayon du cercle $= 1$.

L'analyse de cette objection donne le résultat suivant:

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{5(10+2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$1\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}\right\} =$$

$$1\ (\cos 72° + \sqrt{-1} \sin 72°) = 1\uparrow 72° = 1\uparrow\tfrac{2\pi}{5}.$$

Ainsi tout le second membre n'est autre chose que la transformation de la direction $\uparrow\frac{2\pi}{5}$; — et quand l'équation n'était pas prise dans le sens qu'elle exprime implicitement, elle serait *fausse*, car prise explicitement $\sqrt[5]{1}$ n'est que

1, et non le second membre, qui est une forme complexe; laquelle n'entre pas dans les grandeurs absolues — tandis que la valeur du second membre ne se trouve pas dans le premier, 1 n'étant que l'unité absolue, grandeur sans direction. — Ainsi la formule est fausse :

$$\sqrt[5]{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

Si l'on transformait de la même manière les autres racines du 5me degré de l'unité $+1$, on aurait toutes les expressions, qui représenteraient les facteurs directifs $1 \uparrow \frac{4\pi}{5}$, $1 \uparrow \frac{6\pi}{5}$ etc. sous des formes complexes.

Ce qui précède suffira pour bien comprendre le sens de cette équation; c'est par elle qu'il n'y a plus d'incertitude sur la signification, la valeur de toutes les grandeurs complexes, car étant en état de déterminer les racines des deux facteurs dans les nombres complexes la racine complète est connue.

L'importance de ce sujet non généralement encore reconnue ou regardée sous ce point de vue, fera que dans la suite il sera nécessaire d'y revenir, pour éclaircir certains points de l'analyse algébrique et encore pour décider la question des logarithmes des nombres négatifs, en général des nombres complexes et des formes complexes; question qu'on regarde comme décidée, mais dont il sera prouvé que la décision est fausse ou bien qu'on a laissé le dernier mot à un théorème faux.

§ 15. **Les nombres complexes dans les fonctions exponentielles, goniométriques et cyclométriques.** Il est dit plus haut, qu'il ne suffit pas d'avoir trouvé la signification des nombres complexes dans les formes ordinaires, pour pouvoir dire d'en connaître la signification, la valeur complète; — il est nécessaire d'examiner si la même signification convient à ces nombres dans les autres fonctions où ils se trouvent.

Ces nombres se trouvent encore dans les fonctions *exponentielles*, *goniométriques* et *cyclométriques.*

Les formules où se trouvent ces grandeurs, sont de grande importance dans cette partie des mathématiques; — il est donc nécessaire d'analyser les expressions où elles se trouvent dans ces relations, pour pouvoir décider sur leur signification et leur valeur et pour décider ainsi ce qui en est des formules elles-mêmes et des conclusions qu'on en tire.

La signification trouvée et déterminée, il sera clair que la plupart de ces formules dans l'analyse algébrique ne sont que de simples équations identiques, ce qui se prêtera tout naturellement à y attacher des observations importantes et à en tirer des conclusions non moins intéressantes.

§ 16. **Sur les Exposants.** Les Exposants n'étaient d'abord que des nombres *entiers*, *absolus.*

La formule $a^x = 1 . aaa \ldots$ donne la signification de ces nombres. — Par l'application de la règle des exposants dans la division, on a obtenu les exposants négatifs avec leur signification:

$$\frac{a^3}{a^7} = a - 4\,;\ \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}.$$

Ainsi a^4 signifiant $1.aaaa$, on a obtenu pour $a - 4 = \frac{1}{aaaa}$.

Le résultat de l'application est conforme à ce qu'on aurait pu obtenir par l'analyse logique; car a^4 signifiant $1.aaaa$ et puisque a^4 est égal à $a + 4$, il est tout conséquent que $a - 4$ signifie $\frac{1}{aaaa}$; ainsi que $a^0 = 1$.

Il résulte de ce qui précède que dans ce cas les nombres complexes $\pm\, x$ dans $a \pm x$ ont la signification particulière, que le sens de *direction opposéè* se rapporte ici à des *opérations contraires ou opposées.*

Dans l'élévation aux puissances les exposants sont multipliés : $(a^m)^n = a^{mn}$; quand on rencontre des exposants à nombre fractionnaire la signification se trouve tout naturellement ; car de même que la multiplication et la division sont des opérations contraires, $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ comme opposé à $\mathbf{mn}$ dans les exposants se rapportera à une opération contraire dans les fonctions où ces exposants se trouvent, et comme l'extraction est l'opposée de l'élévation, il suit :

$$a^{mn} = (a^m)^n \text{ et } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

La signification ainsi trouvée, s'accorde avec celle tirée des démonstrations algébriques.

Les Exposants se présentent donc pour indiquer les opérations de la *multiplication*, de la *division*, de *l'élévation aux puissances* et de *l'extraction des racines.* — On n'a pas d'autres opérations qui influent sur les exposants ; — dans ces opérations les exposants sont *additionnés*, *soustraits*, *multipliés* et *divisés*, comme *puissance* ils se trouvent dans le cas particulier :

$$(a^m)^m = a^{m^2}.$$

Il n'y a point d'opération qui demande l'extraction de la racine d'un exposant.

Quelle est donc la signification de $a^{\sqrt{-1}.x}$? Au lieu de juger d'abord ces exposants comme *imaginaires*, ou *impropres*, *figurés* ; il est nécessaire d'essayer s'il n'est possible d'en trouver la signification, la valeur réelle, et de déterminer ainsi sous quel point de vue les formes doivent être regardées où se présentent ces exposants soit comme nombres *imaginaires* ou *complexes.*

Ces exposants ne doivent pas être nommés *imaginaires*, *figurés*, s'ils ont une signification réelle, puisque autrement tous les exposants hormis ceux indiqués par des nombres *entiers*, *absolus* mériteraient le nom d'impropre.

La signification trouvée, ils satisfont même dans ce cas à la signification du mot *exposant*, ils montrent, ils indiquent la valeur de la forme.

Aidé simplement par le raisonnement pour trouver le sens de $\sqrt{-1}$, on devrait dire: $\sqrt{-1}$ est moyenne entre ± 1, qui indiquent la multiplication et la division, l'opération moyenne indiquée par ce signe n'existe pas, d'où l'on ne tirerait que la seule conclusion:

les grandeurs avec des exposants de cette forme ne peuvent être qu'*imaginaires*, *impossibles*, et par conséquent l'exposant lui-même ne pourra avoir quelque valeur *reélle*, *absolue*.

Il est donc nécessaire d'examiner comment ils sont entrés dans l'analyse algébrique pour trouver ainsi quelle en peut être la valeur.

Il est connu qu'ils doivent leur présence dans les fonctions exponentielles à la substitution, — en analysant ces formes on parvient à leur signification, à leur valeur véritable.

§ 17. Dans l'Analyse algébrique on trouve que les expressions:

$$\frac{e^{ny} + e^{-ny}}{2} \text{ et } \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2.}$$

developpées en séries de n et de y, et comparées aux séries pour $\cos y$ et $\sin y$, deviennent identiques par la substitution de $\sqrt{-1}$. à **n**.

De là on tire les formules connues:

$$1) \frac{e^{\sqrt{-1}.y} + e^{-\sqrt{-1}.y}}{2} = \cos y;$$

$$2) \frac{e^{\sqrt{-1}.y} - e^{-\sqrt{-1}.y}}{2\sqrt{-1}.} = \sin y.$$

desquelles on déduit encore les suivantes :

$$3)\, e^{\sqrt{-1}\,.\,y} = \cos y + \sqrt{-1}\,.\,\sin y\,;$$

$$4)\, e^{-\sqrt{-1}\,.\,y} = \cos y - \sqrt{-1}\,.\,\sin y.$$

D'après ce qui est prouvé ci-devant on a :

$$\cos y + \sqrt{-1}\,.\,\sin y = 1 \uparrow y^0$$

$$\cos y - \sqrt{-1}\,.\,\sin y = \cos y + \sqrt{-1}\,.\,(-\sin y) =$$

$$\cos - y + \sqrt{-1} \sin - y = 1 \uparrow - y^0.$$

D'où il suit :

$$e^{\sqrt{-1}\,.\,y} = 1 \uparrow y^0 = e^0 \uparrow y^0\,;\; e^{-\sqrt{-1}\,.\,y} = 1 \uparrow - y^0 = e^0 \uparrow - y^0.$$

De ces équations on peut déduire la signification de ces exposants.

Dans $e^{\sqrt{-1}\,.\,y}$ la valeur absolue était $1 = e^0$, il suit que la valeur absolue de l'exposant $\sqrt{-1}\,.\,y$ dans la signification primitive est $= 0$; — puis

$$c^{\sqrt{-1}\,.\,y} = 1 \uparrow y^0 = e^0 \uparrow y^0$$

étant un nombre complexe avec la direction $\uparrow y$, il suit encore que $\sqrt{-1}\,.\,y$ *comme exposant étant égal à* $\uparrow y$ *ne sert qu'à indiquer la direction du nombre complexe auquel il est lié*, de sorte qu'on aura :

$$e^{\sqrt{-1}\,.\,y} = e^{0 + \sqrt{-1}\,.\,y} = 1 \uparrow y = e^0 \uparrow y.$$

Pour résumer on pourra formuler la thèse suivante :

La valeur absolue de $\pm \sqrt{-1}\,.\,y$ *comme exposant est nulle ; et* $\pm y$ *indique le nombre des degrés qui marquent la direction de la valeur numérique, absolue de la puissance figurée.*

Ainsi le signe $\sqrt{-1}$ a reçu par la substitution une signification toute particulière ; il ne doit être regardé que comme un simple *indice*, marquant que le nombre suivant n'a pas la signification ordinaire des exposants primitifs, mais sert à indiquer les degrés de la direction ; l'expression $e^{\sqrt{-1}\,.\,y} = 1 \uparrow y$ n'est donc qu'une expression nouvelle pour marquer le facteur directif.

La valeur des expressions exponentielles à forme complexe suit immédiatement de ce qui précède :

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^{x} . e^{\sqrt{-1}.y} = e^{x} . e^{0}\uparrow y = e^{x}\uparrow y.$$

$$e^{x-\sqrt{-1}.y} = e^{x} . e^{-\sqrt{-1}.y} = e^{x} . e^{0}\uparrow -y = e^{x}\uparrow -y.$$

§ 18. **Remarque.** Dans les cours de l'analyse algébrique on trouve que, quand on suit l'origine des formules **1. 2. 3. 4.**, on voit, qu'elles ne sont valables que pour la base **e**; — quand on a $a^{\sqrt{-1}.y}$ et en général toute autre base que **e**, on doit réduire l'expression à la base **e**.

Soit $a^{x} = e^{z}$; on a pour les Logarithmus naturelles, $x \,\text{l}.\, a = z$; d'où il suit :

$$a^{\sqrt{-1}.x} = e^{\sqrt{-1}.x\,\text{l}.\,a} = 1\uparrow(x\text{l}.a)^{0}$$

$$a^{x\pm\sqrt{-1}.y} = a^{x} . a^{\pm\sqrt{-1}.y} = a^{x}\uparrow(\pm y \,\text{l}.\, a)^{0}.$$

Réponse. — Quand on cherche dans les cours la base, la démonstration de cette thèse, on trouve, que ce n'est que par *analogie* qu'on a déduit cette règle, et de la manière qu'on l'annonce il paraît, que la raison de l'analogie suffit pour en tirer cette conclusion.

On oublie ou plutôt on n'a pas vu par l'analyse, quelle est la signification et la valeur de $\sqrt{-1}$. dans les exposants ; c'est pourquoi qu'on soumet aux règles des exposants ordinaires, les exposants sous des formes tout à fait différentes, des exposants à signification toute différente.

On trouve p. ex. $(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = e^{-x^2} = \frac{1}{x^2}$, tandis que la vraie valeur sera, suivant les règles indiquées, au moins contenues dans les mêmes cours

$(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = (1\uparrow x)^{\sqrt{-1}.x} = (1\uparrow x)^{0+\sqrt{-1}.x} =$
$(1\uparrow x)^{0}\uparrow x = 1\uparrow x.$

Si ces exposants suivaient les mêmes règles, on aurait les équations dérivées de $(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x}$.

$$(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x = e^{o}\uparrow x\,;$$

$$\text{et } (e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^{x^2}}\uparrow o.$$

$$\text{dont on tirerait : } e^{o} = \frac{1}{e^{x^2}}\,;\ \uparrow x = o.$$

Ce qui prouve la fausseté des équations ; ce n'est que le manque de valeur $x = 0$, qui fait s'accorder les différentes transformations de $(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x}$.

Voyez encore dans le complément la note sur la fameuse formule de Montucla.

Pour prouver que les exposants sous ces formes ont une signification tout autre que celle de ces formes dans les fonctions ordinaires, on peut prendre la réduction de $(e^{x+\sqrt{-1}.y})^{x-\sqrt{-1}.y}$; regardant ces formes complexes, quoique *exposants*, comme soumises aux règles ordinaires, on aurait :

$$(e^{x+\sqrt{-1}.y})^{x-\sqrt{-1}.y} = e^{x^2+y^2} = e^{x^2}\ e^{y^2}$$

tandis que la véritable valeur est :

$$(e^{x+\sqrt{-1}.y})^{x-\sqrt{-1}.y} = (e^{x}\uparrow y)^{x-\sqrt{-1}.y} =$$
$$(e^{x^2}\uparrow xy)\uparrow -y = e^{x^2}\uparrow(x-1)y.$$

Dans les formes ordinaires les grandeurs x et y sont homogènes et ne diffèrent que dans la direction, comme déjà il est indiqué ; — tout autre il en est avec ces grandeurs étant *exposants*, dans ce cas les deux termes sont tout à fait hétérogènes ; x n'est autre qu'un nombre *abstrait*, *absolu*, tandis que le nombre y acquiert par le signe $\sqrt{-1}$ la signification concrète de *degrés.*

Par l'observation de cette grande différence de signification s'explique la fausseté des résultats obtenus en la négligeant.

Dans le complément on reviendra sur ce sujet, pour le présent ce peu suffira pour en tirer la conclusion suivante :

$$e^{\sqrt{-1}.x} = a^{\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x.$$
$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^{x}\uparrow y\,;\ a^{x+\sqrt{-1}.y} = a^{x}\uparrow y.$$

$\sqrt{-1}.x$ impliquant la signification de $o + \sqrt{-1}$.
on a $\quad e^{\sqrt{-1}.x} = e^{o+\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x$

$$a^{\sqrt{-1}.x} = a^{o+\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x.$$

Il est impossible de fournir des raisons directes qui prouvent le contraire ; au contraire en ne pas acceptant la signification et la valeur données, on tombe dans des contradictions, des inconséquences comme il est prouvé dans les exemples, dont le nombre sera augmenté dans la suite surtout en traitant des Logarithmes, où la contradiction et l'absurdité seront encore plus sensibles.

Supposé encore que $\sqrt{-x}$ dépendait de la valeur particulière de a, dans ce cas aussi $a^{\sqrt{-x}} = e^{\sqrt{-x}\,la}$ ne serait pas juste, car on aurait alors

$$a^{\sqrt{-x}} = (e^{la})^{\sqrt{-x}} = e^{la.\sqrt{-x}} \text{ et non } e^{\sqrt{-x}\,la}$$

$$2\sqrt{-4} \text{ n'est pas égal à } \sqrt{-8}.$$

Ce n'est que par *analogie*, qu'on a dit :

$a^{\sqrt{-x}} = e^{\sqrt{-x}\,la}$; on n'a pas été en état de vérifier cette thèse, ni d'en donner quelque raison valable, vu que la signification de ces exposants est tout autre que celle des ordinaires, et par là cette faute faite n'a pas été remarquée et ne l'a pu être.

L'exemple ci-dessus :

$$(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x = e^{\sqrt{-1}.x}$$

donne encore lieu à l'observation suivante : — on voit dans cet exemple que le second exposant $\sqrt{-1}.x$ n'est d'aucune influence ; ce qui s'explique tout naturellement par le sens de $\sqrt{-1}.x$ comme exposant.

Par le signe $\sqrt{-1}$. les exposants $\sqrt{-1}.x$ sont pour ainsi dire devenus des nombres *concrets*, de même que dans l'Arithmétique un nombre *concret* multiplié par un nombre *concret* n'a pas de sens ; ainsi dans l'exemple ci-dessus on aurait : — la direction x degrés multipliée par la direction x degrés ; — cette multiplication absurde ne changerait en rien le premier facteur, puisque le second comme multiplicateur n'a ni sens, ni valeur.

La Théorie donnée est donc conforme à ce que le bon sens décide à priori : x^0 signifiant x degrés

$$\uparrow x^0 \times \uparrow x^0 = \uparrow x^0.$$

La justesse de la réduction suivante est prouvée par la théorie des directions :

$$e^{\sqrt{-1}.x}.\ e^{\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x.\ 1\uparrow x = 1\uparrow 2x = e^{\sqrt{-1}.2x}.$$

Étant donné : $A^{\cos x + \sqrt{-1}.\sin y}$; la transformation donnerait $A^{\cos x + \sqrt{-1}.\sin y} = A^{\cos x}\uparrow(\sin y)^0$; ce qui signifie, la valeur numérique étant :

$$\cos x = a,\ \sin y = b.$$

$$A^a\uparrow b = A^{\cos x + \sqrt{-1}.\sin y} = A^{a + \sqrt{-1}.b}.$$

Dans les cours on trouve que les fonctions exponentielles suivent *en tout* les règles des Exposants ordinaires et pour preuve on donne des exemples ; dans ce qui précède se trouvent des exemples, qui prouvent l'inconséquence de cette thèse.

Encore pour les exposants ordinaires on a :

$$(e^m)^n = e^{mn} = (e^n)^m.$$

D'après la thèse nommée on devrait avoir :

$$(e^{m.})^{\sqrt{-1}.n} = (e^{\sqrt{-1}.n.})^{m.}\,?$$

$$(e^{m.})^{\sqrt{-1}.n} = (e^{m.})^{o+\sqrt{-1}.n} = 1\uparrow n.$$

$$(e^{\sqrt{-1}.n})^m = (1\uparrow n)^m = 1^m\uparrow mn = 1\uparrow mn.$$

Ce qui montre l'inconséquence de la règle.

---

§ 19. Après avoir expliqué la signification et la valeur des Exposants $\sqrt{-1}.x$, $x \pm \sqrt{-1}.y$, l'auteur sans avoir rencontré d'autres formes non expliquées dans les Exposants, se proposait de déterminer déjà d'avance la signification des formes $a^{\sqrt[3n]{-1}.x}$, $a^{\sqrt[2n+1]{-1}.x}$ $a^{\sqrt[2n]{-1}.x}$ qui pourront se présenter dans la suite.

D'après la Théorie donnée il n'est pas difficile de déterminer le sens de ces expressions, parce que les grandeurs complexes, $\sqrt[2n]{-1} . x$, $\sqrt[2n+1]{-1} . x$, $\sqrt[2n]{-1} . x$, comme il sera prouvé, peuvent toutes être transformées en formes complexes $A \pm \sqrt{-1} . B$, dont la signification comme *exposant* est déterminée.

Cependant il a ôté cette partie de la Théorie, parce que ces grandeurs exponentielles ne se présentent pas jusqu'ici dans les Mathématiques et elles ne peuvent se présenter comme suites des Opérations et des réductions appliquées aux grandeurs exponentielles connues $a^{\pm x}$, $a^{\pm \frac{x}{y}}$, $a^{\pm \sqrt{-1} . x}$, $a^{x \pm \sqrt{-1} . y}$.

S'il arrivait cependant qu'on en demandait la signification en les présentant non comme *résultat* de quelque opération ou réduction, mais comme expression *donnée*, on peut en démêler le sens d'après la Théorie démontrée.

Quand on demandait si le sens, déterminé de cette manière d'après la Théorie, sera aussi le sens que les formes auront dans la suite, quand ces expressions se présenteront dans les Mathématiques, comme la conséquence de progrès faits dans cette science, la réponse devra être que la signification déterminée maintenant ne sera certainement pas celle que ces formes auront dans la suite, — ces expressions ne pourront entrer dans les formes exponentielles à la suite des opérations et des réductions connues et suivies jusqu'à ce jour ; elles ne peuvent y entrer que par quelque nouvelle substitution, — l'exemple de la substitution de $\sqrt{-1}$ dans les Exposants ayant montré la signification toute particulière que ces Exposants ont acquise, il n'est pas possible de fixer déjà d'avance le sens de ces Exposants avant de connaître les substitutions et les résultats qui en dérivent.

§ 20. **Les nombres imaginaires et les formes complexes dans les Fonctions goniométriques et les cyclométriques.** — Les formules suivantes sont connues :

$$\cos \sqrt{-1}.\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} ; \ \sin \sqrt{-1}.\varphi = \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2\sqrt{-1}}.$$

En considérant la manière, dont on est parvenu à ces formules, les conséquences tirées de l'analyse n'étonneront pas.

Par la substitution de $\sqrt{-1}.\varphi$ à φ, on a obtenu $e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}.\varphi)}$ qu'on dit être égale à $e^{-\varphi}$.

Dans l'analyse des Exposants il est prouvé que $\sqrt{-1}$ n'est qu'un *signe* indiquant que le nombre suivant marque les degrés de la direction de la puissance, et non comme dans les fonctions ordinaires, renfermant en soi la direction de la grandeur à laquelle il est joint,

$$\sqrt{-1}.x = x\uparrow 90.$$

$\sqrt{-1}$ dans les Exposants n'est qu'un *signe*, *rien de plus*, servant simplement pour exprimer ce qui vient d'être dit ; — on doit observer cependant que ce signe n'est pas introduit dans les fonctions comme tel, c. a. d. *sciemment.*

Sans le vouloir, sans le savoir le signe est entré dans l'algèbre avec la signification, trouvée par l'analyse des fonctions où il se trouve ; — ce signe ne suit pas les règles des facteurs de direction, n'ayant pas de valeur numérique, c'est pourquoi les formules dans lesquelles on a appliqué à ce signe les réductions ordinaires, ont pour résultat d'avoir la signification et la valeur, qui en sont déduites.

Pour $e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}.\varphi)}$ on a mis $e^{-\varphi}$; la vraie valeur au contraire est:

$$e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}.\varphi)} = 1\uparrow\sqrt{-1}.\varphi =$$
$$\cos \sqrt{-1}.\varphi + \sqrt{-1}. \sin \sqrt{-1}.\varphi.$$

Pour $e^{\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}.\varphi)}$ on a mis e^{φ}; la valeur est $e^{\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}.\varphi)} = 1 \uparrow -\sqrt{-1}.\varphi =$

$$\cos -\sqrt{-1}.\varphi + \sqrt{-1}.\sin -\sqrt{-1}.\varphi =$$
$$\cos \sqrt{-1}.\varphi - \sqrt{-1}.\sin \sqrt{-1}.\varphi.$$

D'où il suit qu'on a pour la somme :

$$\frac{e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}.\varphi)} + e^{\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}.\varphi)}}{2} = \cos(\sqrt{-1}.\varphi).$$

Il est donc clair, que la formule très connue $\cos \sqrt{-1}.\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ est identique, quand on met à la place de e^{φ} et $e^{-\varphi}$ les valeurs véritables, déduites des éléments d'après les régles prouvées, tandis que par une opération inexacte, on a obtenu le second membre de la formule citée.

Par l'analyse des deux formules connues, on trouvera que les membres au lieu d'être identiques, mènent à des absurdités, ce qui ne devrait être, si les réductions suivies étaient exactes.

$$\text{De } \cos(\sqrt{-1}.\varphi) = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

$$\text{et} \quad \sin(\sqrt{-1}.\varphi) = \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2\sqrt{-1}.}$$

on déduit : $\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2\sqrt{-1}}$

$$= \cos \sqrt{-1}\,\varphi + \sqrt{-1}.\sin(\sqrt{-1}.\varphi);$$

le second membre est égal à $1 \uparrow \sqrt{-1}\,\varphi$.

Par réduction le premier membre devient :

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} + \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2} = \frac{2e^{-\varphi}}{2} = e^{-\varphi} = \frac{1}{e^{\varphi}}.$$

par conséquent on a : $\frac{1}{e^{\varphi}} = 1 \uparrow \sqrt{-1}.\varphi$.

$\frac{1}{e^{\varphi}}$ est une valeur numérique *absolue ;* la direction est donc $\uparrow 0$ = positive ; cette direction doit s'accorder avec la direction indiquée $\uparrow \sqrt{-1}.\varphi$, d'où il suit que la direction de l'arc imaginaire est $= 0$ et $\sqrt{-1}.\varphi = 0$.

Quelle que soit la signification de $\sqrt{-1}$ dans cette expression, toujours φ devra être $=0$; car si $\sqrt{-1}$ a la même signification que dans les fonctions ordinaires ou dans les exposants, φ devra être $=0$, pourque $\sqrt{-1}\,.\,\varphi$ soit égal à 0 ; φ donc ne pouvant être que 0, les valeurs absolues s'accordent de même :

$\frac{1}{e^{\varphi}} = \frac{1}{e^{0}} = \frac{1}{1} = 1$; la même valeur absolue, qui se trouve dans $1 \uparrow \sqrt{-1}\,.\,\varphi = 1 \uparrow \sqrt{-1}\,.\,0 = 1 \uparrow 0$.

Par conséquent il est prouvé par l'analyse que ces formules très connues sont fausses.

Des formules $\cos\varphi = \frac{e^{\sqrt{-1}\,.\,\varphi} + e^{-\sqrt{-1}\,.\,\varphi}}{2}$;

$$\sin\varphi = \frac{e^{\sqrt{-1}\,.\,\varphi} - e^{-\sqrt{-1}\,.\,\varphi}}{2\sqrt{-1}.}$$

on obtient par la substitution de $(x + \sqrt{-1}\,.\,y)$ à φ, et par quelque transformation les formules connues :

$$\cos(x + \sqrt{-1}\,.\,y) = \cos x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - \sqrt{-1}\,.\,\sin x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\sin(x + \sqrt{-1}\,.\,y) = \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

Par l'analyse précédente on sait la valeur de l'arc marquant la direction indiquée par $(\sqrt{-1}\,.\,\varphi)$ d'où il suit que dans les formules $\cos(x + \sqrt{-1}\,.\,y)$ et $\sin(x + \sqrt{-1}\,.\,y)$ la valeur absolue de y est $= 0$.

Les deux formules se réduisent par là à :

$$\cos(x + \sqrt{-1}\,.\,y) = \cos x \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} - \sqrt{-1}.\ \sin x \frac{e^{0} - e^{-0}}{2}$$

$$= \cos x \frac{1+1}{2} - \sqrt{-1}.\ \sin x \frac{1-1}{2} = \cos x.$$

$$\cos x + \sqrt{-1}\,.\,y \text{ est donc } = \cos x.$$

de la même manière on aura :

$$\sin(x + \sqrt{-1}\,.\,y) = \sin x.$$

§ 21. **La grandeur imaginaire $\sqrt{-1}\,.\,y$ dans les fonctions goniométriques.** Cos. sin $(\sqrt{-1}\,.\,y)$ et cos. sin. $(x + \sqrt{-1}\,.\,y)$ n'a ni valeur *complexe*, ni *absolue*, et par conséquent dans ces expressions elle est *réellement imaginaire.*

Il n'était pas difficile de trouver a priori la signification d'un tel arc. — Le cercle et l'arc sont des lignes courbes toutes déterminées dans leur courbure ou leur direction, d'où l'on peut déduire que l'arc $\sqrt{-1}\,.\,\varphi$, par rapport à l'arc $\pm\,\varphi$ ne peut avoir quelque réalité, quelque signification.

En prenant sur le cercle un point o comme origine, les degrés peuvent être comptés dans des directions opposées, mais outre ces deux directions il n'y a pas d'autre, ce qui est indiqué cependant par $\sqrt{-1}\,.\,\varphi$, d'où il suit directement que cet arc d'une autre direction, qui n'existe pas, doit être regardé comme *imaginaire*, *impossible*, qui n'étant pas réel ne peut avoir une valeur réelle.

Voyez Fig. 11. Les arcs AC et AC′ se trouvent dans la direction par rapport au cercle décrit par OA de devoir être indiqué par $\sqrt{-1}\,.\,AC$, $\sqrt{-1}\,.\,AC'$.

§ 22. **Les formes complexes dans les Fonctions cyclométriques.** — Dans les cours de l'Analyse algébrique on trouve encore les fonctions cyclométriques en formes complexes, p. ex.:

arc sin $(\xi + \sqrt{-1}\,.\,\eta) = x + \sqrt{-1}\,.\,y$; ce qui signifie

$$\sin\,(x + \sqrt{-1}\,.\,y) = \xi + \sqrt{-1}\,.\,\eta.$$

En substituant dans le premier membre la valeur prétendue, ils parviennent aux équations, par lesquelles les valeurs de ξ et η doivent être obtenues.

Par la substitution de ces valeurs on a:

$$\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \sqrt{-1} \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \xi + \sqrt{-1} \, . \, \eta$$

de là les équations :

$$\sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \xi \, ; \ \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \eta.$$

Dans ce qui précède la valeur de $\sqrt{-1} \, . \, y$ est déterminée dans les fonctions goniométriques $\sin(x + \sqrt{-1} \, . \, y)$ pour savoir la valeur de y.

Les équations sont par là :

$$\sin x \frac{e^o + e^{-o}}{2} + \sqrt{-1} \, . \, \cos x \frac{e^o - e^{-o}}{2} = \xi + \sqrt{-1} \, . \, \eta.$$

$$\sin x \, . \, 1 \qquad + \sqrt{-1} \, . \, \cos x \, . \, 0^0 \quad = \xi + \sqrt{-1} \, . \, \eta.$$

ce qui donne $\sin x = \xi$, $\cos x \, . \, o = 0 = \eta$.

La formule $\text{Arc} \sin (\xi + \sqrt{-1} \, . \, \eta) = x + \sqrt{-1} \, . \, y$, ne signifie par conséquence que:

$$\text{arc} \sin \xi = x \text{ ou } \sin x = \eta.$$

Dans ce qui précède on a traité tous les cas où se présentent les grandeurs imaginaires, les formes complexes ; pour tous ces cas on a trouvé la signification et déterminé la valeur tant *absolue* que *complexe* ; — plus tard il sera traité encore la question des Logarithmes, savoir la manière de déterminer les Logarithmes des nombres complexes en général, d'ou l'on déduira ceux des nombres imaginaires et des formes complexes.

Application de la Théorie aux différentes opérations avec des grandeurs imaginaires et des formes complexes.

§ 23. **Réduction de toutes les Formes imaginaires et complexes à la forme $x + \sqrt{-1} \,.\, y$ et $R\uparrow\varphi$.** — Il est dit que toutes les grandeurs imaginaires et toutes les formes complexes, en général tous les nombres complexes peuvent être réduits à la forme $x + \sqrt{-1}.y$, qu'on peut transformer après à la quantité complexe $R\uparrow\varphi$.

Toutes les grandeurs imaginaires sont comprises dans les formes $\sqrt[2n]{-a}$, $\sqrt[2^n]{-a}$.

Il est donné $\sqrt[2^2]{-a} = \sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{-1} \,.\, \sqrt[4]{a}$. — Soit $\sqrt[4]{a}$ un nombre déterminé, rationnel ou irrationnel; $\sqrt[4]{a} = A$.

$$\sqrt[4]{-1} = (\cos 45^0 + \sqrt{-1} \,.\, \sin 45^0) = 1\uparrow 45^0.$$

On a: $\sqrt[4]{-a} = A(\cos 45^0 + \sqrt{-1} \cdot \sin 45^0) =$

$$A \cos 45^0 + \sqrt{-1} \,.\, A \sin 45^0 =$$

$$\tfrac{1}{2} A \sqrt{2} + \sqrt{-1} \,.\, \tfrac{1}{2} A \sqrt{2}.$$

Ce qui donne $\sqrt[4]{-a}$ réduite à la forme complexe $x + \sqrt{-1} \,.\, y$.

Soit donné $\sqrt[2^3]{-b} = \sqrt[8]{-b} = \sqrt[8]{-1} \,.\, \sqrt[8]{b}$. — $\sqrt[8]{b} = B$ et d'après ce qui est prouvé on a:

$$\sqrt[8]{-1} = \uparrow 22\tfrac{1}{2}^0 = (\cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \text{Sin } 22\tfrac{1}{2}^0).$$

D'où il suit: $\sqrt[8]{-b} = B(\cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \sin 22\tfrac{1}{2})$

$$= B \cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, B \sin 22\tfrac{1}{2}.$$

La valeur numérique de b étant donnée, la valeur absolue des deux termes est connue par les valeurs de $\cos 22\tfrac{1}{2}$ et $\sin 22\tfrac{1}{2}$; — ainsi la grandeur $\sqrt{-b}$ est transformée à la forme complexe $x + \sqrt{-1} \,.\, y$.

Il ne sera nécessaire de donner d'autres exemples de la forme $\sqrt[2n]{-x}$ p. ex. $\sqrt[10]{-a} = \sqrt[10]{-1} \,.\, \sqrt[10]{a}$.

Soit $\sqrt[10]{a} = A$; on ne devra se borner à la valeur $\sqrt[10]{-1} = \sqrt[5]{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} = \uparrow 90^0$, pour avoir les 10 différentes valeurs de $\sqrt[10]{-1}$.

Des formes complexes comme $A(\cos\alpha \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin\beta)$ se transforment d'abord en $x + \sqrt{-1} \,.\, y$, quand on sait les valeurs numériques de A, α, β.

Étant donné $a + \sqrt[6]{-1} \,.\, b$; on réduit premièrement d'après ce qui précède $\sqrt[6]{-1} \,.\, b$ à la forme $x + \sqrt{-1} \,.\, y$, de sorte que la forme sera :

$$(a + x) + \sqrt{-1} \,.\, y.$$

Ces exemples suffiront pour montrer que toutes les formes quelque compliquées qu'elles soient et quel que soit le nombre des termes, peuvent être transformées à la forme complexe, $x + \sqrt{-1} \,.\, y$, quand les valeurs numériques sont connues.

Un seul exemple montrera le résultat de ces réductions. — Quand on demandait la valeur de $f\,\sqrt[8]{-1} \,.\, 1000$; la réponse serait : c'est une grandeur *imaginaire*, *impossible*, dont la valeur est *nulle*.

C'est la réponse d'après la Théorie ordinaire ; il n'en est pas ainsi, quand on détermine la valeur d'après la nouvelle Théorie.

$$\begin{aligned}
\sqrt[8]{-1} \,.\, 1000 &= 1000 \uparrow \tfrac{\pi}{8} = 1000\,(\cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \sin 22\tfrac{1}{2}) \\
&= 1000 \cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, 1000 \sin 22\tfrac{1}{2} \\
&= 1000 \,.\, 0.92388 + \sqrt{-1} \,.\, 1000 \,.\, 0{,}38628 \\
&= 923{,}88 + \sqrt{-1} \,.\, 386{,}28.
\end{aligned}$$

La valeur réelle de $f\,\sqrt[8]{-1} \,.\, 1000$ est donc $f\,923{,}88$, et de plus on a la valeur imaginaire de $f\,386{,}28$.

Dans les Annotations il sera traité de la valeur et de la signification des grandeurs *imaginaires*, comme grandeurs *complexes*, dans un sens concret.

§ 24. **Application. Sommes, Différences.** — Supposé que les formes données toutes compliquées qu'elles soient, sont déjà réduites à la forme complexe $x + \sqrt{-1}. y$.

On demande de trouver la somme des formes complexes:
$(a \pm \sqrt{-1}. b)$; $-(a' \pm \sqrt{-1}. b')$; $(a'' \pm \sqrt{-1}. b'')$.

Soit $a - a' + a'' = A$.

$$\sqrt{-1}\{\pm b \mp b' \pm b''\} = \pm \sqrt{-1}. B.$$

On a $A \pm \sqrt{-1}. B = R(\cos \varphi \pm \sqrt{-1}. \sin \varphi)$.

$$R = \sqrt{\{A^2 + B^2\}}\ ;\ \varphi = \text{arc. tang } \frac{\pm A.}{B.}$$

Il ne sera nécessaire de donner d'autres exemples plus compliqués, ni de transporter l'exemple en figure pour l'expliquer davantage.

§ 25. **Produits.** — Dans la Théorie il est prouvé que les facteurs *directifs* suivent la règle des Exposants dans la multiplication.

$$a \uparrow \alpha . b \uparrow \beta = ab \uparrow (\alpha + \beta).$$

Puisque toutes les grandeurs imaginaires peuvent se transformer en formes complexes, la multiplication est réduite à trouver le produit de

$$(x \pm \sqrt{-1}. y)\ (x' \pm \sqrt{-1}. y')$$

et en réduisant ces formes en nombres complexes $R \uparrow \varphi$, on a à la fin:

$$(x \pm \sqrt{-1}. y)\ (x' \pm \sqrt{-1}. y') = R \uparrow \pm \varphi . R' \uparrow \pm \varphi' = RR' \uparrow \pm (\varphi + \varphi').$$

Ce dernier produit peut ensuite être transformé de nouveau en $x \pm \sqrt{-1}. y$.

On demande le produit de:

$$(8 + \sqrt{-1}. 6)\ (4 - \sqrt{-1}. 3).$$

$$8 + \sqrt{-1}.\,6 = \sqrt{(64+36)} \uparrow \text{arc tang}\ \frac{6}{8} = 10 \uparrow 36^o 52\,.$$

$$4 - \sqrt{-1}.\,3 = \sqrt{(16+\ 9)} \uparrow \text{»} \quad \text{»} \ \frac{-3}{4} = 5 \uparrow -36^o 52'.$$

Le produit est $50 \uparrow (36^o 52' - 36^o 52') = 50 \uparrow 0^o = +50$. Le résultat prouve la validité de la Théorie.

§ 16. **Le Théorême de Moivre**. — Ce Théorême suit immédiatement de ce qui précède, car le produit de différentes formes complexes n'est que le produit des nombres complexes $R \uparrow \varphi$, qui présentent la valeur sous une forme plus simple. — Quand on a

$$R \ (\cos \varphi \ + \sqrt{-1}.\sin \varphi) \ = R \uparrow \varphi$$

$$R' \ (\cos \varphi' \ + \sqrt{-1}.\sin \varphi') \ = R' \uparrow \varphi'$$

$$R'' \ (\cos \varphi'' + \sqrt{-1}.\sin \varphi'') = R'' \uparrow \varphi''$$

Le produit sera $= \overline{R\,R'R''} \uparrow (\varphi + \varphi' + \varphi'') =$

$$R\,R'R'' \left\{ \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'') + \sqrt{-1}.\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'') \right\}.$$

Le produit continu change en *Puissance*, quand les facteurs sont les mêmes, ce qui donne le Théorême de Moivre.

$$R^3 \uparrow 3\varphi = R^3 (\cos 3\varphi + \sqrt{-1}.\sin 3\varphi)$$

Exemple. — Quel est le produit de:

$$(4 + \sqrt[4]{-1}.\,5)\ (3 + \sqrt[8]{-1}.\,3)\ ?$$

$$-1.\,5 = 5 \uparrow 45^0 = 5\,(\cos 45^0 + \sqrt{-1}.\sin 45^0).$$

En substituant les valeurs de cos, sin 45^0, on a:

$$\sqrt[4]{-1}.\,5 = 3{,}5355 + \sqrt{-1}.\,3{,}5355.$$

$$4 + \sqrt[4]{-1}.\,5 = 7{,}5355 + \sqrt{-1}.\,3{,}5355.$$

$$\sqrt[8]{-1}.\,3 = 3 \uparrow 22\tfrac{1}{2} = 3\,(\cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}.\sin 22\tfrac{1}{2})$$

par la substitution des valeurs on a:

$$\sqrt[8]{-1}.\,3 = 2{,}77163 + \sqrt{-1}.\ 1{,}14804.$$

$$3 + \sqrt[8]{-1}.\,3 = 5{,}77163 + \sqrt{-1}.\ 1{,}14804.$$

Par la réduction de ces formes complexes en nombres complexes, on obtient :

$$\sqrt{\{7{,}5355^2 + 3{,}5355^2\}} \uparrow \text{arc tang} \frac{3{,}5355}{7{,}5355} = 8{,}324 \uparrow 25^\circ 8'.$$

Pour le second facteur :

$$\sqrt{\{5{,}77163^2 + 1{,}14804^2\}} \uparrow \text{arc tang} \frac{1{,}14804}{5{,}77163} = 5{,}884 \uparrow 11^\circ 15'.$$

Le produit sera :

$$\{8{,}324 \uparrow 25^\circ 8'\} \; \{5{,}884 \uparrow 11^\circ 15\} = 48{,}98 \uparrow 36^\circ 23'.$$

En suivant la méthode ordinaire, on obtient :

$$12 + 12 \sqrt[8]{-1} + 15 \sqrt[4]{-1} + 15 \sqrt[8]{-1} \,.\, \sqrt[4]{-1}\,.$$

D'après la méthode ordinaire on ne peut aller plus loin avec la transformation ; — au moins on ne peut parvenir à réunir les quatre termes de la forme en un seul.

La question est : *Les produits acquis de différentes manières s'accordent-ils en valeur ?*

$12 = 12.$

$12 \sqrt[8]{-1} = 12 \uparrow 22\tfrac{1}{2} \qquad = 12(\cos 22\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \sin 22\tfrac{1}{2})$

$15 \sqrt[4]{-1} = 15 \uparrow 45 \qquad = 15(\cos 45 + \sqrt{-1} \,.\, \sin 45)$

$15 \sqrt[4]{-1} \sqrt[8]{-1} = 15 \uparrow 45, 22\tfrac{1}{2} = 15(\cos 67\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \sin 67\tfrac{1}{2}).$

Par les valeurs numériques des cos sin on a :

$$\begin{array}{lr}
12 = & 12. \\
12 \sqrt[8]{-1} = & 11{,}08656 + \sqrt{-1} \,.\, \ \ 4{,}59216. \\
15 \sqrt[4]{-1} = & 10{,}60650 + \sqrt{-1} \,.\, 10{,}60650. \\
15 \sqrt[4]{-1} \sqrt[8]{-1} = & 5{,}74020 + \sqrt{-1} \,.\, 13{,}85820. \\
\hline
 & 39{,}43326 + \sqrt{-1} \,.\, 29{,}05686.
\end{array}$$

La dernière forme complexe transformée en nombre complexe donne :

$$\sqrt{\left\{39{,}43326^2 + 29{,}05686^2\right\}} \uparrow \text{arc tang} \frac{29{,}05686}{39{,}43326}$$
$$= 48{,}98 \uparrow 36^\circ\ 23'.$$

§ 27. **Quotients.** — Un exemple tout simple suffira pour montrer et pour prouver la méthode basée sur les principes précédents.

Soit donnée la forme générale

$$\frac{a+\sqrt[4]{-b}+\sqrt[6]{-c}+\sqrt[8]{-d}.}{\sqrt[10]{-e}-\sqrt[14]{-f}.}$$

Les nombres généraux étant donnés, qu'on obtienne par la réduction :

$$\frac{4+\sqrt{-1}\,.\,3}{9+\sqrt{-1}\,.\,2}=\sqrt{\frac{5\uparrow \text{arc tang}\,\frac{3}{4}}{85\uparrow \text{»}\quad \text{»}\quad \frac{2}{9}}}=\sqrt{\frac{5\uparrow 36^{o}\,52'}{85\uparrow 12^{o}\,32'}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{85}}\uparrow 24^{0}\,20=\sqrt{\frac{5}{17}}\uparrow 24^{0}\,20'=$$

$$\sqrt{\frac{5}{17}}\,(\cos\,24^{0}\,20'+\sqrt{-1}\,.\,\sin\,24^{0}\,20')$$

$$=\sqrt{\frac{5}{17}}\left\{0{,}91116+\sqrt{-1}\,.\,0{,}41204\right\}$$

$$=0{,}4941+\sqrt{-1}\,.\,0{,}2235.$$

D'après la méthode ordinaire on aura :

$$\frac{4+\sqrt{-1}\,.\,3}{9+\sqrt{-1}\,.\,2}=\frac{(4+\sqrt{-1}\,.\,3)\,(9-\sqrt{-1}\,.\,2)}{81+4}$$

$$=0{,}4941+\sqrt{-1}\,.\,0{,}2235.$$

Ainsi les quotients obtenus des deux manières sont les mêmes.

Remarque. — On dira peut-être, la méthode nouvelle n'est pas plus courte que l'ordinaire.

La réponse sera : dans cet exemple, mais en sera-t-il de même dans tous les autres ?

La méthode ordinaire peut-elle être appliquée à toutes les formes imaginaires quelque compliquées qu'elles soient ?

Et encore la nouvelle méthode n'exclut pas l'ordinaire ; — dans les exemples on se sert de la méthode quiest la plus convenable.

La nouvelle méthode se prête à toutes les formes ; — le quotient peut toujours être transformé à la forme complexe $(x+\sqrt{-1}\,.\,y)$ ou au nombre complexe $R\uparrow\varphi$.

§ 28. **Puissances.** — On réduit d'abord la forme quelle qu'elle soit en $(x + \sqrt{-1}\,.\,y)$ et en $R\uparrow\varphi$.

On élève le nombre complexe $R\uparrow\varphi$ à la puissance voulue, qui après est transformée en forme complexe.

Exemple. Quelque polynome imaginaire doit être élevé à la 3me puissance; soit que la transformation donne la forme :

$$(4 + \sqrt{-1}.\,3.)^3 = \left\{5\uparrow\text{arc. tang } \frac{3}{4}\right\} = \left\{5\uparrow 36^\circ 52'\right\}^3 = 125\uparrow 110^\circ 36'.$$

D'après la théorie ordinaire on ne sait faire les premières réductions pour parvenir du polynome à la simple forme complexe.

En employant le Binome on a :

$$(4 + \sqrt{-1}.\,3)^3 =$$
$$4^3 + 3.\,4^2\sqrt{-1}.\,3 + 3.\,4.(\sqrt{-1}.\,3)^2 + (\sqrt{-1}.\,3.)^3 =$$
$$64 + \sqrt{-1}.\,144 - 108 - \sqrt{-1}.\,27 = -44 + \sqrt{-1}.\,117 =$$
$$125.\,04\uparrow 110^\circ 36'.$$

Les résultats prouvent l'exactitude, et la nouvelle méthode par sa généralité pourra bien être comparée à l'ordinaire pourque la décision soit à son avantage.

---

§ 29. **Racines.** Pour montrer la justesse de la méthode, un exemple de l'extraction du 2me degré sera pris premièrement.

$$\sqrt{\{2 + 2i\sqrt{15}\}} = \sqrt{5} + i\sqrt{3}.$$

C'est la racine obtenue suivant la manière ordinaire.

D'après la nouvelle méthode on a :

$$2 + 2\sqrt{-15} = \sqrt{64}\uparrow\text{arc tang }\sqrt{15} = 8\uparrow\text{arc tang }\sqrt{15}$$

ainsi $\sqrt{\{2 + 2\sqrt{-15}\}} = \sqrt{(8\uparrow\text{arc tang }\sqrt{15})}$

$$= 2\sqrt{2}\uparrow\tfrac{1}{2}\text{ arc tang }\sqrt{15}.$$

$$\text{Log}\sqrt{15} = 0{,}58804 = \text{tang } 75^{\circ}31'20''$$
$$\frac{}{2}$$
$$37^{\circ}45'40'' = a$$

$$\sqrt{\{2 + 2\sqrt{-15}\}} = 2\sqrt{2}\{\cos a + \sqrt{-1}\sin a\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Log}\sqrt{8} &= 0{,}45154 \\ \text{Log}\cos a &= \underline{9{,}89808} \\ & 0{,}34962 = \text{Log } 2{,}237 = \text{Log}\sqrt{5}. \\ \text{Log}\sqrt{8} &= 0{,}45154 \\ \text{Log}\sin a &= \underline{9{,}78702} \\ & 0{,}23856 = \text{Log}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$\sqrt{\{2 + 2\,i\sqrt{15}\}} = 2\sqrt{2}\uparrow 37^{\circ}45'40'' = \sqrt{5} + \sqrt{-1}.\sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{-3}.$$

Il serait moins facile d'employer la méthode ordinaire pour trouver la racine d'une forme imaginaire quelle qu'elle soit et de quelque degré que ce soit.

Demandée la racine: $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{-1}.\,3)} = \sqrt[4]{(5\uparrow 36^{\circ}52')} = \sqrt[4]{5}\uparrow 9^{\circ}13'$.

$$\sqrt[4]{5}\,(\cos 9^{\circ}13' + \sqrt{-1}.\sin 9^{\circ}13') =$$
$$\sqrt[4]{5}\,(0{,}98708 + \sqrt{-1}.0{,}16016) = 1{,}476 + \sqrt{-1}.0{,}2395.$$

L'avantage de la nouvelle méthode basée sur la Théorie précédente se manifeste par sa généralité dans toutes les opérations, surtout dans la *Multiplication*, la *Division*, l'*Elévation aux Puissances et l'Extraction des Racines* de quelque polynome et de quelque degré que ce soit.

D'après la méthode ordinaire dans l'*Elévation aux Puissances* et dans l'*Extraction des Racines*, on ne peut que transformer le *polynome* en *binome* et y appliquer la formule du *Binome ;* — on obtient de cette manière des polynomes ou bien des séries infinies, dont les termes pour la plupart sont imaginaires, desquels il serait difficile si non impossible de réduire la valeur à la forme complexe $(x + \sqrt{-1}.y)$.

---

§ 30. **Conclusion**. — Après avoir divisé les nombres en *absolus* et en *complexes*; après avoir distingué les facteurs des nombres complexes, en facteur de la valeur numérique absolue, et en facteur de la direction; — après avoir trouvé la signification et la valeur de tous les facteurs de la direction, tant *directe* qu'*indirecte*, comme aussi les règles que ces facteurs suivent dans les diverses opérations et réductions, on peut regarder comme prouvé ce qui suit:

Que les nombres *imaginaires*, *impossibles* etc. n'existent pas, excepté dans les fonctions goniométriques et cyclométriques à forme imaginaire et complexe; — ce sont tous des nombres *réels*, *possibles*, qui ont une valeur réelle.

Qu'il est prouvé par la détermination de la signification qu'on peut marquer la valeur absolue et la complexe de tous les nombres et de toutes les formes, et les réduire à la forme générale $x + \sqrt{1}.y$ ou à la valeur numérique complexe $R\uparrow\varphi$, et encore que quelques opérations et quelques réductions très difficiles ou bien impossibles d'après la méthode ordinaire basée sur la Théorie généralement suivie sont réduites à des règles et à des opérations bien simples et toutes générales.

Pour compléter la signification et la valeur des nombres complexes il reste de trouver la signification *réelle*, *concrète* de ces nombres qui jusqu'ici ne sont traités que dans un sens *abstrait*; mais de même qu'avec les grandeurs négatives, qui parfois ne permettent pas dans les résultats de la solution des équations, d'en trouver la signification concrète, il arrivera avec les grandeurs imaginaires de ne pouvoir indiquer la grandeur concrète, répondant à la forme imaginaire ou complexe.

Les regarder cependant d'abord comme absolument imaginaires, c'est tomber dans l'ancienne erreur avec les nombres fractionnaires et les négatifs, qui furent considérés bien un temps, comme impossibles, imaginaires dans les résultats de la solution de plusieurs équations.

Dans l'Arithmétique les nombres ne sont qu'*absolus*, sans facteur de direction ; dans l'Algèbre la direction ou la situation positive et la négative seules sont regardées comme réelles ; les autres, dont on ne savait la signification, sont jugées imaginaires, impossibles.

Le chapitre à part sera voué à prouver que ces grandeurs ne sont pas toujours uniquement abstraites, mais qu'elles ont pour la plupart une signification toute concrète, et de plus qu'elles trouvent leur application dans bien des cas concrets.

---

§ 31. *Logarithmes.* La Théorie qui vient d'être exposée conduit d'elle-même par ses principes sur les exposants, à la question des Log. des nombres négatifs.

L'auteur ne commencera pas à répéter le *pour* et le *contre* que les mathématiciens *Bernoulli* et *Leibnitz*, *d'Alembert* et *Euler*, et tant d'autres ont écrit sur les Log. des nombres négatifs.

Il est connu qu'on a laissé le dernier mot à Euler et que dans l'opinion presque ou toute générale l'idée d'Euler est regardée comme la vraie.

Euler s'est prononcé de la manière suivante :

Tous les nombres *positifs* ont un nombre infini de Log., dont il n'y a qu'un seul de *réel* ;

Tous les nombres *négatifs* ont un nombre infini de Log., qui sont tous *imaginaires*.

Les formules fondamentales des Log. dans les divers systèmes sont :

$$e^x = y \quad ; \quad x = \text{L.} \quad y.$$
$$10^x = y \quad ; \quad x = \text{Log.} \; y.$$
$$a^x = y \quad ; \quad x = \text{Log.} \; y.$$

Il suit de ces formules et des propriétés qui en dérivent, que toute la Théorie des Log. est basée sur les Exposants ; car le Log. d'un nombre n'est que l'Exposant de la base d'un système, marquant le degré de la puissance à laquelle la base doit être élevée pour avoir le nombre.

Dans la Théorie les Exposants sous toutes les formes sont analysés ; la signification en est indiquée, la valeur est déterminée de l'*Exposant* comme aussi du *nombre* dans toutes ses formes, et par là il est démontré que pour chaque nombre complexe on peut déterminer l'exposant de la base ; le nombre complexe pris dans la direction *directe* ou dans *l'indirecte*.

§ 32. La formule $e^x = y$; $x = \text{L.}\, y.$ se rapporte aux Log. naturels.

Il vaudra mieux prendre pour formule fondamentale :

$$a^x = y \quad ; \quad y = \text{Log.} \; x.$$

puisqu'on a déjà donné des raisons, sur lesquelles on reviendra dans le *Complément*, qui permettent de prétendre que la direction indiquée par le signe $\sqrt{-1}$ dans les exposants, est indépendante de la valeur absolue du nombre a.

Les nombres complexes $\pm x$ comme exposants, se rapportent aux opérations :

$$a^x = a^{+x} = 1 \,.\, aaa \ldots, \; a^{-x} = \frac{1}{aaa\ldots}.$$

Les autres exposants en nombres complexes ne peuvent avoir que les formes $\pm \sqrt{-1} \,.\, x$, $\pm (x \pm \sqrt{-1} \,.\, y)$.

$$a^{\pm \sqrt{-1}\,.\,x} = 1 \uparrow \pm x^0 ; \; a^{x \pm \sqrt{-1}\,.\,y} = a^x \uparrow \pm y^0.$$

Les expressions de la forme $a^{\pm\sqrt{-1}\,.\,x} = e^{\pm\sqrt{-1}\,.\,x}$

$= 1 \uparrow \pm x$ ne sont autre chose que des manières d'indiquer les facteurs de la direction dans les nombres complexes.

En passant de la dernière formule

$$a^{x \pm \sqrt{-1} . y} = a^x \uparrow \pm y.$$

aux Log. on a : $x \pm \sqrt{-1} . y = x + \uparrow \pm y = \text{Log.}\, a^x \uparrow \pm y.$

Cet exemple renferme la solution de la question sur les Log. des nombres complexes en général, et en particulier celle sur les Log. des nombres négatifs.

Quel est le Log. du nombre $\pm A$?

$$\pm A = \pm 1 . \text{A} = A \uparrow^{0}_{\pi}.$$

Soit $A = a^p, + A = A \uparrow 0 = A \uparrow 2n\pi$;

$$a^{p + \sqrt{-1}. 0} = a^{p + \sqrt{-1}. 2n\pi} = + A$$

$$\text{et } p + \uparrow 0 = p + \uparrow 2n\pi = \text{Log} + A$$

de même on aura pour $- A = A \uparrow \pi = A \uparrow (2n + 1)\pi.$

$$a^{p + \sqrt{-1}. \pi} = a^{p + \sqrt{-1}. (2n+1)\pi} = - A$$

$$\text{et } p + \uparrow \pi = p + \uparrow (2n + 1)\pi = \text{Log} - A.$$

Ainsi le Log. de chaque nombre complexe est un nombre complexe, representé en *forme complexe* ; la situation, la direction du nombre complexe, dont on cherche le Log. est jointe dans l'Exposant à sa valeur *absolue* par le signe $\sqrt{-1}$, et toujours les directions du nombre complexe et du Log. ou de l'Exposant sont parfaitement égales.

Dans la question des Log. il n'est parlé d'autres nombres que des négatifs, on pourra donc compter que l'affaire est terminée par ce qui précède ; on peut la juger décidée mathématiquement.

§ 33. Il sera à propos d'insérer ici le principal fondement sur lequel Euler basait son opinion.

Cette base était la formule :

$$e^{x + \sqrt{-1}. y} = e^x (\cos y + \sqrt{-1}. \sin y).$$

D'après la Théorie cette formule peut être écrite :

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1} . \sin y) = e^x \uparrow y.$$

De cette formule il a tiré les suivantes:

$$e^{L.a+\sqrt{-1}.2n\pi} = a = + a.$$

$$e^{L.a+\sqrt{-1}.(2n+1)\pi} = - a$$

et $\text{Log. } a = \text{L. } a + 2n\pi . i$

$$\text{Log.} - a = \text{L. } a + (2n+1)\pi . i.$$

La signification de $i = \sqrt{-1}$. dans les Exposants est démontrée ; il est indiqué la signification de $2n\pi$ comme expression générale de la direction indirecte $+ 1$ ou de la direction *positive*, la base des directions.

La signification de $(2n+1)\pi$ comme expression de la direction *indirecte* de la direction *négative* est indiquée en même temps.

Euler dit : Tous les nombres *positifs* ont un nombre infini de Log., dont un seul est réel, les autres sont tous imaginaires.

Ce nombre infini de Log. de $+ a$ est renfermé en :

$$\text{Log. } a = \text{L. } a + 2n\pi . i$$

pour $n = o. \text{Log. } a = \text{L. } a + 2.o.\pi.i = \text{L. } a + o.i = \text{L. } a + \uparrow o$

$n = 1.$ » $= \text{L. } a + 2\pi . i = \text{L. } a + \uparrow 2\pi = \text{L. } a + \uparrow o°$

$n = 2.$ » $= \text{L. } a + 4\pi . i = \text{L. } a + \uparrow 4\pi = \text{L. } a + \uparrow o°$

et ainsi de suite pour n *ad infinitum*, toujours on a :

$\text{Log. } a = \text{L. } a + 2n\pi . i = \text{L. } a + \uparrow 2n\pi = \text{L. } a + \uparrow o°$

ainsi tous les Log. de a ne sont que $\text{L. } a + \uparrow o°$, c. a. d. Log. a avec *la direction positive.*

Les Log. d'un nombre positif sont donc tous le Log. du nombre *absolu* suivi de la direction positive, exprimée d'une infinité de manières, qui toutes ne signifient que la direction positive.

La direction *directe* ne s'exprime que d'une seule manière ; *l'indirecte* d'une infinité de manières, qui toutes n'indiquent que *la même direction.*

De la même manière on explique le véritable sens de l'infinité des Log. imaginaires des nombres négatifs.

$$\text{Log.} -a = \text{L.}\, a + (2\,n + 1)\pi \,.\, i$$

pour $n = o$. $\text{Log.} - a = \text{L.}\, a + \pi \,.\, i \qquad = \text{L.}\, a + \uparrow\pi$

$n = 1. \quad » \quad = \text{L.}\, a + 3\pi \,.\, i \qquad = \text{L.}\, a + \uparrow\pi$

$n = \omega \quad » \quad = \text{L.}\, a + (2\,\omega + 1)\pi \,.\, i = \text{L.}\, a + \uparrow\pi.$

Ainsi dans l'infinité des Log. de — a tous sont L. $a + \uparrow\pi$ c. a. d. Log. *a avec la direction négative.*

L'infinité est donc l'infinité de manières dont on peut exprimer une direction par la direction *indirecte*, laquelle cependant n'indique que *la même direction.*

Pourquoi ces Log. sont-ils taxés imaginaires? Parce que dans tous on trouve le signe $i = \sqrt{-1}$, dont on n'a pas compris la signification de direction $= \uparrow$.

Quelle est maintenant la traduction de la Thèse de *Euler ?*

Tous les nombres *positifs* ainsi que les *négatifs* n'ont qu'un seul Log. pour chaque *Base.*

Ces nombres *positifs* et *négatifs*, comme nombres complexes, ont dans leurs Log. le signe de leur direction, exprimée non par un *facteur* dans le Log., mais par un terme uni au Log. *absolu* par le signe + suivi de $i = \sqrt{-1} = \uparrow$.

La direction *positive*, ainsi que *la négative*, peut être exprimée d'une infinité de manières, qui toutes ne signifient que la direction *positive* ou la direction *négative.*

$$\uparrow 0^\circ = \uparrow 2\,n\,\pi = +1\,;\ \uparrow\pi = \uparrow(2\,n + 1)\pi = -1.$$

La valeur numérique de ces directions comme hétérogène avec le Log. *absolu* ne change en rien la valeur *absolue* du Log., qui dans le sens primitif et propre n'est qu'un nombre *abstrait*, *absolu*, tandis que le nombre qui se trouve après le signe $\sqrt{-1}$. marque le nombre des degrés de l'arc, mesurant la direction,

$\text{Log.} - 100 = \text{Log.}\ 10^{2 + \sqrt{-1}\,.\,180} = 2 + \uparrow 180^\circ.$ —

ou la longueur de l'arc exprimé dans la longueur du rayon du cercle prise pour *unité*,

$\text{Log.} - 100 = \text{Log.}\, 10^{2 + \sqrt{-1}\,.\,\pi} = 2 + \sqrt{-1}\,.\,3{,}1415926.$

Dans le dernier cas 3,1415926 a la valeur concrète de 3,14 — *rayons du cercle* pour marquer la longueur de l'arc, mesure de la direction ; 2 n'étant qu'un nombre *abstrait*, *absolu*.

Pour faire ressortir l'absurdité il suffira de prendre pour exemple :

$$\text{Log.} + 1 = \sqrt{-1}\,.\,2\,n\,\pi = \uparrow 2\,n\,\pi\,;$$

$$\text{Log.} - 1 = \sqrt{-1}\,.\,(2\,n + 1)\pi = \uparrow(2\,n + 1)\pi$$

en donnant à n les valeurs de 0, 1, 2 etc. on dit:

$\text{Log.} + 1 = 0\,;\ \sqrt{-1}\,.\,2 \times 3{,}14\,;\ \sqrt{-1}\,.\,4 \times 3{,}14$ etc.

$$\text{Log.} - 1 = \sqrt{-1}\,.\,3{,}14\,;\ \sqrt{-1}\,.\,3 \times 3{,}14\,;$$

$$\sqrt{-1}\,.\,5 \times 3{,}14 \text{ — ad inf.}$$

Pour se sauver de la contradiction, de l'absurdité, puisque dans tout système $\text{Log.}\, 1 = 0$, on répond que tous ces Log. sont *imaginaires*.

Le vrai sens de ces formules est :

$$\text{Log.} + 1 = \text{Log.}\, a^{\sqrt{-1}\,.\,2\,n\,\pi} = \text{Log.}\, a^{0 + \sqrt{-1}\,.\,2\,n\,\pi}$$
$$= 0 + \uparrow 2\,n\,\pi.$$

$$\text{Log.} - 1 = \text{Log.}\, a^{\sqrt{-1}\,(2n+1)\pi} = \text{Log.}\, a^{0 + \sqrt{-1}\,.\,(2n+1)\pi}$$
$$= 0 + \uparrow(2\,n + 1)\pi.$$

Signifiant que le Log. de *l'unité complexe* est 0, et que la direction de cette unité dans le premier cas est la *positive*, marquée par la direction indirecte $\uparrow 2\,n\,\pi = \sqrt{-1}\,.\,2\,n\,\pi$.

Dans le second cas *la négative*, marquée de la même manière générale par

$$\uparrow(2\,n + 1)\pi = \sqrt{-1}\ (2\,n + 1)\pi.$$

Toutes ces valeurs comme *direction* n'ont que l'unique valeur de la direction directe

$$\uparrow 2\,n\,\pi = +\,;\ \uparrow(2\,n + 1)\pi = -.$$

§ 34. Pour montrer et pour prouver que tous les nombres complexes ont des Log., il est nécessaire de répéter premièrement que toutes les formes complexes peuvent être réduites en nombres complexes; et que tous les nombres imaginaires sont des nombres complexes.

Par la transformation indiquée de tous les nombres imaginaires et des formes complexes en nombres complexes les Log. de tous les nombres sous toutes les formes et dans toutes les situations sont trouvés.

Exemples. — Les Log. des nombres *positifs* et des *négatifs* sont déja indiqués.

Le Log. de $\sqrt{-1} \,.\, A$?

$$\sqrt{-1} \,.\, A = A \uparrow \tfrac{\pi}{2} = a^{\text{Log.} A + \sqrt{-1} \,.\, 90}$$

$$\text{ainsi Log. } \sqrt{-1} \,.\, A = \text{Log. } A + \uparrow 90°.$$

Le Log. de la forme $\sqrt[2n]{-1} \,.\, A$?

Soit $n = 5$.

$\sqrt[10]{-1} \,.\, A = A \uparrow \frac{\pi}{10} = a^{\text{Log.} A + \sqrt{-1} \,.\, 18}$, pour ne prendre que la valeur de la direction directe.

$$\text{ainsi Log. } \sqrt[10]{-1} \,.\, A = \text{Log. } A + \uparrow 18°.$$

Pour avoir toutes les valeurs de $\sqrt[10]{-1} \,.\, A$, on n'aurait qu'à prendre $\sqrt[10]{-1} \,.\, A = A \uparrow \frac{\pi}{10}$, $A \uparrow \frac{3\pi}{10}$, $A \uparrow \frac{5\pi}{10}$ etc. jusqu'à $A \uparrow \frac{19\,\pi}{10}$.

La différence des Log. ne serait que la différence des directions, d'après la valeur prise pour $\sqrt[10]{-1} \,.\, A$.

$$\text{Log. } A \uparrow \frac{19\,\pi}{10} = \text{Log. } A + \uparrow 19 \,.\, 18°.$$

Le Log. de la forme $\sqrt[2^n]{-1} . A$?

Soit $n = 3$.

$$\sqrt[2^3]{-1} . A = \sqrt[8]{-1} . A = A \uparrow_{\frac{\pi}{8}} = a^{\text{Log.} A + \sqrt{-1} . 22\frac{1}{2}}.$$

ainsi $\text{Log.} \sqrt[8]{-1} . A = \text{Log.} A + \uparrow 22\frac{1}{2}{}^{\circ}$.

La même remarque sur les autres valeurs et les autres Log. des différentes valeurs complexes.

Le Log. de la forme $\sqrt[n]{+A}$ non imaginaire?

$$\sqrt[n]{+A} = A \uparrow_{\frac{o}{n}} = a^{\text{Log.} A + \sqrt{-1} . o^{\circ}}.$$

ainsi $\text{Log.} \sqrt[n]{+A} = \text{Log.} A + \uparrow o^{0}$.

Il ne sera nécessaire de parler des $(n - 1)$ autres valeurs complexes.

Dans la Théorie il est montré que tous les polynomes avec des termes imaginaires de toutes les formes peuvent être reduits à la forme complexe $x + \sqrt{-1} . y$, quand la valeur numérique des grandeurs générales est déterminée; — chaque polynome de cette forme peut donc être transformé en forme complexe, puis en nombre complexe, dont on peut déterminer le Log.

---

§ 35. **Application de la Théorie.** — Demandé le produit de $= - A \times - B$ à l'aide de Log.

$$\text{Log.} - A = \text{Log.} (A \uparrow \pi) = \text{Log.} A + \uparrow \pi$$
$$\text{Log.} - B = \text{Log.} (B \uparrow \pi) = \text{Log.} B + \uparrow \pi$$
$$\text{Log.} (- A . - B) = \text{Log.} AB = (\text{Log.} A + \text{Log.} B) + \uparrow 2\pi$$
$$= (\text{Log.} A + \text{Log.} B.) + \text{la direction positive.}$$

Il sera à propos d'insérer d'abord une des bases de l'opinion de *Leibnitz*.

Son argument était : quand — 2 avait un Log., celui de $\sqrt{-2}$ serait $\frac{1}{2}$ Log. — 2, et un nombre imaginaire, impossible aurait dans cette supposition un Log.

Réponse. $\text{Log.} -2 \;=\; \text{Log.}(2 \uparrow \pi) = \text{Log.}\, 2 + \uparrow \pi$

$$\text{Log.} \sqrt{-2} = \tfrac{1}{2} \text{Log.} (2 \uparrow \pi) = \tfrac{1}{2} \text{Log.}\, 2 + \uparrow \tfrac{\pi}{2}.$$

Ces équations sont tirées des équations Logarithmétiques d'une Base quelconque ; pour la Base 10 on a :

$$10^{x + \sqrt{1}\,.\,180} = 2 \uparrow \pi = -2.$$

dans la table on trouve $x = 0{,}30103$.

ainsi $10^{0{,}30103 + \sqrt{-1}\,.\,180} = -2$; $\text{Log.} -2 = 0{,}30103 + \uparrow \pi$

encore $10^{0{,}150515 + \sqrt{-1}\,.\,90} = \sqrt{2} \uparrow \frac{\pi}{2} = \sqrt{-2}$.

$$\text{et Log.} \sqrt{-2} = 0{,}150515 + \uparrow \tfrac{\pi}{2}.$$

Non seulement le Log. $\sqrt{-2}$ existe réellement, mais encore on est en état de donner toute déterminée la forme complexe, qui l'exprime.

Remarque. Les Log. des nombres complexes sont indiqués en formes complexes.

Il y a cependant une grande différence entre les formes complexes *ordinaires* et celles marquant les Log. des nombres complexes.

Dans les formes complexes ordinaires $x + \sqrt{-1}\,.\,y$, les quantités x et y sont homogènes et ne diffèrent que de direction ; ce qui n'est pas le cas dans les formes, indiquant les Log.

p. ex. $\text{Log.}\; a^{x + \sqrt{-1}\,.\,y} = x + \sqrt{-1}\,.\,y = x + \uparrow y$.

Les quantités x et y ne sont pas homogènes, x étant un nombre *abstrait*, *absolu*, y étant un nombre *concret*, $y = y$ degrés ou y rayons du cercle.

Les formes complexes marquant les Log. des nombres complexes ne peuvent donc pas être transformées en nombres complexes comme les formes complexes ordinaires, dont les termes x et y sont homogènes.

Le vrai sens demande qu'on écrive

$$\text{Log. } a^{x+\sqrt{-1}\cdot y} = x + \uparrow y$$

puisque le signe $\sqrt{-1}$ dans l'exposant n'a pas la signification de $\sqrt{-1}$ dans les nombres complexes ordinaires ou les nombres imaginaires $\sqrt{-1}\,.\,y = y \uparrow \frac{\pi}{2}$.

Cette distinction *Euler* ne l'a pas entrevue ; quand on lit ce qui se trouve dans les oeuvres mathématiques et surtout ce que *Dr. Riecke* a écrit sur les Log. dans son livre : *die Rechnung mit Richtungszahlen*, on verra qu'on prend le signe $\sqrt{-1}$ dans le sens ordinaire de la direction $\uparrow \frac{\pi}{2}$, ou de l'unité complexe $1\uparrow\frac{\pi}{2}$.

Déterminer à l'aide des Log. le product $(\sqrt{-2})(\sqrt{-2})$.

$$\text{Log. } \sqrt{-2} = \tfrac{1}{2}\text{ Log. } 2 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}$$

$$\text{Log. } \sqrt{-2} = \tfrac{1}{2}\text{ Log. } 2 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}$$

$$\text{Log. } (\sqrt{-2})(\sqrt{-2}) = \text{Log. } -2 = \text{Log. } 2 + \uparrow\pi.$$

Le quotient donnera :

$$\text{Log. } \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}} = 0 + \uparrow 0^0 = 0 = \text{Log. } 1.$$

Demandée la puissance $(\sqrt{-2})^4 = 4$.

$$\text{Log. } \sqrt{-2} = \tfrac{1}{2}\text{ Log. } 2 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}.$$

$$\text{Log. } (\sqrt{-2})^4 = 4(\tfrac{1}{2}\text{ Log. } 2 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}) = 2\text{ Log. } 2 + \uparrow 2\pi$$

$$= \text{Log. } 2^2 + \uparrow 0 = \text{Log. } + 4.$$

Demandée la racine $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{-1} \, . \, 2.$

$$\text{Log.} -16 = \text{Log.}\ 16 + \uparrow \pi$$

$$\text{Log.}\ \sqrt[4]{-16} = \tfrac{1}{4}\,\text{Log.}\ 16 + \uparrow 45^\circ = \text{Log.}\ \sqrt[4]{16} + \uparrow 45^\circ$$
$$= \text{Log.}\ 2 + \uparrow 45 = \text{Log.}\ (2 \,.\, \sqrt[4]{-1}) = \text{Log.}\ \sqrt[4]{-1} \,.\, 2.$$

Ces exemples suffiront pour montrer la méthode et pour prouver en même temps que la méthode ordinairement suivie est celle, qui résulte de la Théorie des Exposants dans les différentes formes.

On peut compter par ce qui précède que la question sera terminée, décidée non en faveur de l'opinion de *Euler*, mais pour réfuter ce que sur son autorité ou suivant ses principes les mathématiciens pour la plupart jusqu'à ce jour ont jugé être vrai.

---

§ 36. Avant de quitter le sujet il est nécessaire de juger les autres fondements sur lesquels les deux partis basaient leurs opinions.

Bernoulli fondait son opinion sur la ligne logarithmétique, pour prouver que les nombres *négatifs* de même que les *positifs* ont leurs Log.

Soit dans l'équation $a^x = y$, *x l'abscisse* et *y l'ordonnée*; on voit qu'à la valeur x se rapportent toujours deux ordonnées y, l'une dans la partie *positive*, l'autre dans la *négative*. — Ce qui s'accorde avec l'équation, car

$$a^x = a^{\frac{2x}{2}} = \sqrt{a^{2x}} = \pm y.$$

ainsi $x = \text{Log.} \pm y.$

En prenant les tables des Log. cette opinion est tout d'accord avec ce qui s'y trouve;

Dans les Log. de *Briggs* on trouve:

$$\text{Log.}\ 100 = 2{,}00000$$

réduite en équation logarithmétique on a :

$$10^{2{,}00000} = 10^{\frac{200000}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{200000}} = \pm 100.$$

$$\text{ainsi } 2 = \text{Log.} \pm 100.$$

Leibnitz qui était contre la thèse que les nombres négatifs ont des Log., suivait l'argument déja annoncé.

La base en est jugée ; il taxait les nombres dits imaginaires, comme impossibles, non réels ; il ne discernait pas les deux facteurs dans les nombres complexes, au moins il n'en savait la signification ni la valeur ; — surtout il ne regardait pas les Exposants des différentes formes sous le point de vue exposé dans la Théorie.

Dans le temps de *Leibnitz* les Exposants de la forme $\sqrt{-1} \,.\, x$, $x + \sqrt{-1} \,.\, y$ étaient-ils déjà connus ?

Il décidait sur les idées généralement adoptées ; son argumentation est conséquente, mais la base en est fausse.

Quelle aurait-été sa réfutation, si on lui avait presenté le raisonnement suivant :

Supposé que (-1) ne peut avoir qu'un Log. imaginaire, impossible, on aurait l'équation suivante :

$$\text{Log. } (-1) = \chi = \text{impossible}$$

$$2 \text{ Log. } (-1) = 2\chi$$

$$\text{ou Log. } (-1)^2 = \text{Log. } +1 = 2\chi$$

$$\text{Log. } (+1) = 0$$

$$\text{par conséquent} \quad 2\chi = 0$$

$$\chi = 0$$

$$\text{ainsi Log. } (+1) = 0 = \text{Log. } (-1).$$

$$\text{Encore Log. } (\sqrt{-1}) = \chi = \text{impossible}$$

$$4 \text{ Log. } (\sqrt{-1}) = \text{Log. } (\sqrt{-1})^4 = \text{Log. } (+1) = 4\chi$$

$$\text{ainsi Log. } +1 = 0 = 4\chi$$

$$\text{et } \chi = \text{Log. } (\sqrt{-1}) = 0 = \text{Log. } +1.$$

D'où il suit :

$$\text{Log.} - 2 = \text{Log.} - 1 + \text{Log.}\,2 = 0 + \text{Log.}\,2.$$

ce qui donne $\text{Log.} - 2 = \text{Log.}\,2 + 0 = \text{Log.}\,2.$

$$\text{Log.}\,(\sqrt{-2}) = \text{Log.}\sqrt{-1}\,\sqrt{2} = 0 + \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\,2.$$

et $\text{Log.}\,\sqrt{-2} = \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\,2 + 0 = \tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\,2.$

D'Alembert se prononçait en faveur des Log. des nombres négatifs.

Il fondait son opinion sur l'équation ;

il disait : $e^x = y$, soit $x = \frac{n}{2m}$.

on aura : $e^{\frac{n}{2m}} = \sqrt[2m]{e^n} = \pm y$.

et encore sur la ligne logarithmétique comme il se trouve dans : Klügel, mathematisches Wörterbuch.

La base de **Euler** est déjà annoncée et on a déjà donné la traduction de sa thèse, de même on a formulé ce qui en est des Log. des nombres complexes en général, auxquels toutes les formes complexes et les nombres imaginaires peuvent être réduits.

---

§ 37. **Conclusion.** On doit s'étonner de ce que jusqu'à ce jour on n'a pas entrevu l'importance de distinguer dans les nombres complexes la signification et la valeur des éléments intégrants, et surtout de ce qu'on n'a pas observé que les nombres dits imaginaires et les formes complexes dans les Fonctions exponentielles et les goniométriques n'ont pas la même signification ni la même valeur que dans les Fonctions ordinaires.

Encore de ce qu'on a négligé d'observer dans la direction l'influence, la portée, non seulement de la *directe*, mais encore de *l'indirecte*.

Surtout l'équation pour prouver le nombre des racines de l'unité dans le sens où on l'a pris, n'a pas contribué peu à embrouiller les idées, les opinions.

La suite en a été qu'on a jugé imaginaires, impossibles des nombres et des grandeurs réelles et qu'au contraire on a attaché la réalité et une réalité de valeurs infinies à des expressions, dont la valeur numérique, absolue était *nulle* et l'infinité de valeurs hétérogènes avec la première n'était qu'*une*.

Toutes les obscurités dans les mathématiques à ce sujet et la dispute sur les Log., qui a occupé des esprits éminents à différentes reprises et durant un espace de temps si considérable sans parvenir à une décision complète, ne tiennent, après ce qui vient d'être prouvé, qu'à des points en apparence de peu d'importance et de profondeur.

Pour prouver que toujours encore on n'a pas deviné le vrai sens de ces sujets et la grande influence, qu'il a encore toujours dans toutes les parties des mathématiques, il sera certainement utile de relever les obscurités et les absurdités, suites nécessaires de la manière dont on a regardé ces points, et de montrer en même temps, combien ces obscurités sont expliquées tout naturellement, de prouver l'absurdité des conséquences tirées de la manière ordinaire de comprendre ces choses.

L'auteur a pris à cette fin les oeuvres des premiers mathématiciens pour être sûr de ne pas critiquer des idées et des opinions surannées.

Le complément renferme la comparaison des principes des Théories ordinaires avec ceux, exposés dans la Théorie précédente.

THÉORIE COMPLÈTE

DES

NOMBRES COMPLEXES

DANS LES DIVERSES FONCTIONS.

COMPLÉMENT.

Sur le complément. La Théorie renferme les principes des nombres complexes dans les diverses Fonctions.

Ces principes diffèrent de ceux, qu'on trouve dans les Oeuvres mathématiques; il sera bien de répondre plus directement aux principes des opinions contraires en confrontant les bases.

Il ne sera nécessaire de parcourir à cette fin toutes les Oeuvres mathématiques; la réponse aux Oeuvres principales sera en même temps celle aux autres.

Quelques sujets, sur lesquels les opinions diffèrent encore beaucoup, demandent d'être traités plus au long qu'il n'est fait dans la Théorie.

Sur les signes $\pm$ et les quantités positives et les négatives;

Sur les quantités imaginaires;

Sur la signification *concrète* des nombres complexes en général, des imaginaires en particulier.

Le complément deviendrait trop grand, si l'on voulait comparer tout ce qui se trouve dans les livres de **Vallès**, *des Formes imaginaires en algèbre; leur interprétation en abstrait et en concret;* **Dr. Riecke**, *die Rechnung mit Richtungszahlen etc.*, qui traitent spécialement les principaux points de la Théorie; ces deux livres cependant consultés et comparés par l'auteur méritent bien l'attention pour pouvoir se prononcer sur la diversité des principes et des résultats par rapport aux nombres complexes dans les diverses Fonctions.

Le complément pourra être continué, de sorte que toujours on pourra revenir sur des sujets oubliés et répondre aux remarques, aux critiques qui seront faites.

Dr. Riecke, *die Rechnung mit Richtungszahlen.* — *Pag.* 29. *Note.*

La détermination de la signification et de la valeur de $\sqrt{-1}$ peut être regardée comme le premier pas pour déterminer les autres quantités imaginaires, en général tous les nombres complexes.

R. fait objection contre la manière de déterminer $\sqrt{-1}$ à l'aide de la moyenne géométrique; il dit qu'on a fait la faute de transporter sur les grandeurs complexes le théorème des quantités absolues.

La remarque est juste, qu'il est fautif d'appliquer en général les mêmes principes à ces différentes grandeurs; les mathématiques offrent beaucoup d'exemples dans lesquels on a suivi cette manière, qui a donné lieu à bien des inconséquences et des absurdités.

Fig. 1. R. prétend qu'au lieu de OA″, OA‴ on pourrait conclure avec le même droit, que les lignes OB, OB′, OB″, OB‴ etc. seraient les moyennes entre OA et OA′, — de sorte qu'on aurait :

$$OA : OB = OB : OA'$$
$$+1 : OB = OB : -1.$$
$$OB = \sqrt{-1}.$$

Les lignes OA, OA′ étant des lignes complexes, OB, OB′ etc. devront pour la même raison être prises complexes; — la proportion sera :

$$OA : OB = OB : OA;\ +1 : 1\uparrow\varphi = 1\uparrow\varphi : -1.$$
$$\text{et } \frac{+1.}{1\uparrow\varphi} = \frac{1\uparrow\varphi}{-1},\ +1 . -1 = 1\uparrow\varphi . 1\uparrow\varphi.$$

Il est tout clair que la proportion est fausse, quand on prend la ligne complexe OB comme moyenne entre OA, $OA' = +1, -1 = 1 \uparrow 0,\ 1 \uparrow \pi.$; il en serait de même, quand on prenait pour moyennes les autres lignes OB′, OB″ etc. en sens complexe.

Les seules lignes complexes, comme moyennes entre OA et OA′, sont les lignes OA″ et OA‴.

$$OA : OA'' = OA'' . OA' \; ; \; +1 : 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2} = 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2} : -1.$$

$$OA : OA''' = OA''' : OA' \; ; \; +1 : 1 \uparrow \pi . \tfrac{\pi}{2} = 1 \uparrow \pi . \tfrac{\pi}{2} : -1.$$

Car on a :

$$\frac{+1.}{1 \uparrow \frac{\pi}{2}} = \frac{1 \uparrow \frac{\pi}{2}}{-1} = 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2} \; ; \; +1 . -1 = 1 \uparrow 0 . 1 \uparrow \pi = (1 \uparrow \tfrac{\pi}{2})^2$$

$$\frac{+1}{1 \uparrow \pi . \frac{\pi}{2}} = \frac{1 \uparrow \pi . \frac{\pi}{2}}{-1.} = 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2} \; ; \; +1 . -1 = (1 \uparrow \pi . \tfrac{\pi}{2})^2 =$$

$$1 \uparrow 2\pi . \pi = 1 \uparrow \pi = -1.$$

Il ne sera nécessaire d'expliquer l'égalité de ces raisons; la figure montre, que la différence des directions est parfaitement égale.

L'objection de R. n'est donc pas fondée, et on ne s'est pas trompé de baser la signification de $\sqrt{-1}$ sur la démonstration, qu'en fournit la Géométrie, quand on prend les grandeurs non comme absolues mais comme complexes.

La formule $\pi = -2\sqrt{-1} . L \sqrt{-1}.$

dite d'après Montucla trouvée par J. Bernoulli.

Klügel, *mathem. Wörterbuch.*

Dr. Riecke, page 76 § 46.

R. a dérivé cette formule de $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$.

D'abord il tâche de trouver la valeur de $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$

$$\sqrt{-1} = 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2} = e^{\sqrt{-1} . \frac{\pi}{2}}$$

Par conséquent il dit:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (e^{\sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078\ldots$$

R. regarde par conséquent $\sqrt{-1}$, l'exposant, comme ayant la valeur de $1 \uparrow \frac{\pi}{2}$.

Dans la Théorie il est prouvé, ce qui en est de cette supposition.

De $\sqrt{-1} = e^{\sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}}$; $L\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,.\,\frac{\pi}{2}$, il obtient $\pi = -2\sqrt{-1}\,.\,L\sqrt{-1}$.

Analyse de cette solution. Quand on étudie, ce qui se trouve dans *Riecke*, *Klügel* et d'autres, on voit que l'exposant $\sqrt{-1}$ est pris dans le sens de $\sqrt{-1}\,.\,1$; $\sqrt{-1}$ pris dans ce sens, on a:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (1 \uparrow \tfrac{\pi}{2})^{0+\sqrt{-1}.1} = 1^0 \uparrow 1^0 = 1 \uparrow 1^0,$$

ou si l'on veut $1 \uparrow 1^0 = 1\,(\cos 1^0 + \sqrt{-1}.\ \sin 1^0)$.

C'est là d'après la Théorie la signification et la valeur de $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ et non $0{,}2078\ldots.$

$\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ peut aussi être pris comme signifiant:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}.0} = (\sqrt{-1})^{0+\sqrt{-1}.0} = 1 \uparrow 0 = +1.$$

Dans les exposants $\sqrt{-1}$ n'est qu'un signe, *rien de plus*, pour indiquer que les nombres, qui accompagnent $\sqrt{-1}$, comme $\sqrt{-1}\,.\,x$, $x\sqrt{-1}$, donnent les degrés de la direction, $\sqrt{-1}\,.\,x = x\sqrt{-1} = \uparrow x^0$.

Puisque dans $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ l'indice n'est suivi d'aucun nombre, on peut compter, *et avec plus de raison*, que la direction manque, de sorte qu'on a:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}.0} = (\sqrt{-1})^{0+\sqrt{-1}.0} = 1\uparrow 0^0 = +1.$$

$$\pi = -2\sqrt{-1}\ L(\sqrt{-1}.).$$

Cette formule est derivée de la manière suivante:

$$\sqrt{-1} = e^{\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}}\ ;\ L(\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1}.$$

$$\overline{}\,2\sqrt{-1}.$$

$$2\sqrt{-1}\,.\,L(\sqrt{-1}) = -\pi.$$

$$\pi = -2\sqrt{-1}\ L(\sqrt{-1}).$$

Analyse. Dans le second membre $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, on a pris $\sqrt{-1}$, qui n'est que l'indice de la direction, pour l'unité complexe $1\uparrow\frac{\pi}{2}$; puis multipliant les deux membres avec $2\sqrt{-1} = 2\uparrow\frac{\pi}{2}$, on a obtenu la Formule, qui ne peut être qu'*absurde.*

La dérivation dans le vrai sens ne donnerait que:

$$L(\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = 0 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}$$

$$\overline{}\,(2$$

$$2L(\sqrt{-1}) \qquad = (0 + \uparrow\tfrac{\pi}{2})\,2$$

$$L(\sqrt{-1})^2 \qquad = L-1 = L1 + \uparrow\pi = 2\{0 + \uparrow\tfrac{\pi}{2}\}.$$

Dans la suite on trouvera par rapport à cette formule des formules encore beaucoup plus compliquées, tirées de **Duhamel**, *des Méthodes dans les sciences de raisonnement.*

On a passé sous silence dans R. la construction géométrique de $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, basée sur sa manière de comprendre l'expression, jointe à sa solution algébrique.

Réduction de $\sqrt{(-\sqrt{(-\sqrt{-1}))}}$

Dans les Eléments de l'algèbre on trouve quelquefois ces réductions, traitées de la manière suivante:

$$\sqrt{(-\sqrt{(-\sqrt{-1})}} = \sqrt{-1}\,.\sqrt[4]{-1}\,.\sqrt[8]{-1} =$$
$$\sqrt[8]{(-1)^4}\,\sqrt[8]{(-1)^2}\,\sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{(-1)^7} = \sqrt[8]{-1}.$$

Ce qui donne lieu à bien des obscurités et des contradictions pour les commençants.

p. ex. $\sqrt{-1}\,.\sqrt[4]{-1}\,\sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{-1}$

$$\sqrt{-1}\,.\sqrt[4]{-1} = 1.$$

Une réduction semblable donne :

$$\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{-1} \quad ; \quad \sqrt{-1} = 1.$$

En réduisant ces expressions suivant la Théorie et en n'observant d'abord que la direction *directe*, on a :

$$\sqrt{(-\sqrt{(-\sqrt{-1}))}} = \sqrt{-1}\,.\sqrt[4]{-1}\,.\sqrt[8]{--1} =$$
$$1\uparrow\tfrac{\pi}{2}\cdot 1\uparrow\tfrac{\pi}{4}\cdot 1\uparrow\tfrac{\pi}{8} = 1\uparrow\tfrac{7\pi}{8} = 1\uparrow 157\tfrac{1}{2}^{0} =$$
$$1\,(\cos 157\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}.\ \sin 157\tfrac{1}{2}^{0}).$$

Ou encore: $\sqrt{(-\sqrt{(-\sqrt{-1}))}} =$

$$\sqrt{(-\sqrt{(-1\uparrow\tfrac{\pi}{2}))}} = \sqrt{(-\sqrt{1\uparrow\pi.\tfrac{\pi}{2}})} = \sqrt{(-\sqrt{1\uparrow\tfrac{3\pi}{2}})} =$$
$$\sqrt{(-1\uparrow\tfrac{3\pi}{4})} = \sqrt{(1\uparrow\pi.\tfrac{3\pi}{4})} = \sqrt{1\uparrow\tfrac{7\pi}{4}} = 1\uparrow\tfrac{7\pi}{8}.$$

Quand on observe en même temps les directions *indirectes*, on aura les différentes expressions.

Quelle est la signification et la valeur de $\sqrt[\omega]{-1}$?

$$\sqrt[\omega]{-1} = 1\uparrow\tfrac{\pi}{\omega} = 1\uparrow 0^{0} = +\,1.$$

Trouver la valeur de x dans :

$$\sqrt[x]{-1}\,.\,2 = 1 + \sqrt{-3}.$$

$$\sqrt{-1}\,.\,2 = 2\uparrow\tfrac{\pi}{x}\,;\ 1 + \sqrt{-3} = \sqrt{(1+3)}\uparrow\text{arc tang}\,\sqrt{3}.$$

Ainsi $$2\uparrow\tfrac{\pi}{x} = \sqrt{4}\uparrow\text{arc tang}\,\sqrt{3} = 2\uparrow 30^{0}.$$

$$\uparrow\frac{180}{x} = \uparrow 30\,; \qquad x = 6.$$

Les nombres complexes renferment deux facteurs, $+a = a\uparrow 0\,;\ -a = a\uparrow\pi\,;\ \sqrt{-1}\,.\,a = a\uparrow\tfrac{\pi}{2}$.

Tous les nombres imaginaires $\sqrt{-1}\,.\,a$, $\sqrt[4]{-1}\,.\,a$ et en général $\sqrt[2n]{-1}\,.\,a$, $\sqrt[2^n]{-1}\,.\,a$, dont les indicateurs dans les racines sont des nombres connus, représentent dans leurs facteurs de direction des grandeurs *constantes*, ainsi

$$\delta -1\,.\,x^2 = -1\,.\,2x\,\delta x + x^2\,\delta -1 =$$
$$-2x\,\delta x + x^2\,.\,0 = -2x\,\delta x.$$
$$\delta\sqrt[4]{-1}\,.\,x^2 = \sqrt[4]{-1}\,.\,2x\,\delta x + x^2\,.\,\delta\sqrt[4]{-1} =$$
$$\sqrt[4]{-1}\,.\,2x\,\delta x + x^2\,.\,0 = \sqrt[4]{-1}\,.\,2x\,\delta x.$$

etc., etc.

Pour comparer la Théorie des nombres complexes et le contenu des oeuvres mathématiques sur les quantités imaginaires et les formes complexes, il est nécessaire de relever les points de différence, d'en trouver les raisons et de donner les fondements sur lesquels les opinions différentes reposent.

En étudiant ces oeuvres, on trouve que dans la plupart l'auteur fait sentir ou déclare ouvertement, que ces quantités et ces formes renferment des obscurités, des inconséquences, même des absurdités, qu'il ne sait expliquer.

Dans d'autres l'auteur les taxe comme des quantités imaginaires dans le vrai sens du mot; l'opération sur les quantités n'est que machinale, on ne les comprend pas, on ne sait si l'application des règles est juste ou non, on ne peut vérifier tous les résultats; — on s'en sert parce que les imaginaires donnent quelquefois des résultats réels, on obtient des solutions, dont on s'étonne, qu'on n'avait pu prévoir, qu'on ne sait expliquer.

Encore d'autres continuent toujours à les nommer imaginaires, mais ils prétendent que la signification leur est connue, et dans leurs oeuvres ils les traitent d'après l'idée qu'ils y attachent; — pour montrer la réalité de leurs opinions, ils transportent leurs idées sur les quantités à des grandeurs, c'est par des constructions géométriques qu'ils traduisent leur manière de les concevoir.

Parmi ces derniers l'auteur de la Théorie a trouvé des constructions en contradiction avec les principes donnés; par l'analyse il est parvenu à trouver la raison de la divergence, et à prouver que ses idées contraires peuvent soutenir la comparaison de celles contenues dans ces oeuvres.

L'auteur a rencontré des passages, qui renferment que les imaginaires, par les découvertes faites dans ce siècle, ont acquis la juste définition; qu'on peut dire avec raison que la manière correcte de comprendre ces quantités et la méthode à suivre dans l'application doivent être comptées parmi les plus importantes découvertes du 19me siècle.

Encore on trouve pour réponse à ceux, qui demandent si les quantités dites imaginaires ne sont pas impossibles, et que par conséquent, tout ce qu'on en dit, n'est qu'un jeu de mots sans quelque intérêt : — Dans les mathématiques on ne peut nommer impossible que ce qui renferme des contradictions, des absurdités, *qui ne se présentent pas dans les quantités imaginaires.*

Ceux qui ont fait cette demande sont jugés ne pas avoir fait beaucoup de progrès dans les mathématiques.

La question, il est vrai, marque que celui qui la fait, n'a pas fait beaucoup de progrès dans les mathématiques, mais la réponse à la question sur l'imaginaire, l'impossible, n'étonne pas moins l'auteur de la Théorie.

»Dans les mathématiques ne se présentent pas des ab»surdités dans les réductions, les opérations appliquées a »ces quantités" ? !

La Théorie en offre bien des exemples ; on est donc obligé d'en tirer la conclusion que : ne pas les *remarquer*, c'est ne pas les *comprendre*.

La différence avec la Théorie se trouve dans les points suivants :

On n'a pas distingué assez les nombres *absolus* des *complexes*, dans le sens indiqué.

On n'a pas approfondi la signification, la valeur des facteurs directifs dans les nombres complexes.

Par la détermination de la signification des imaginaires sous la forme $\sqrt{-1} . a$, on a trouvé encore la valeur des formes complexes et la manière de les transformer en nombres complexes ;

$$x + \sqrt{-1} . y = \sqrt{(x^2 + y^2)} \uparrow \text{arc tang} \frac{y}{x} = R\uparrow\varphi =$$
$$R(\cos\varphi + \sqrt{-1} . \sin\varphi);$$

mais on s'est arrêté là pour la plupart ; on n'est pas parvenu à déterminer la signification et la valeur de toutes les imaginaires, sous quelque forme qu'elles se présentent ;

on n'a pas determiné en général la juste signification et la vraie valeur des quantités complexes.

Dans l'équation $x^n = \pm 1$., $x = \sqrt[n]{\pm 1}$, que toujours on ne regarde que comme la solution des diverses racines de l'*unité*, on a perdu de vue suivant la Théorie, la véritable signification, savoir la détermination de la signification des différents facteurs de la direction.

Dans les expressions $A(\cos x + \sqrt{-1} . \sin x)$ on ne regarde pas assez le second facteur comme simple facteur de direction, ne signifiant que $A \uparrow x$, et renfermant pour ainsi dire la clef de la signification de toutes les quantités complexes.

Par là on a manqué de savoir transformer à la simple forme complexe $x + \sqrt{-1} . y$ toutes les quantités complexes imaginaires, tous les polynomes renfermant ces termes.

Dans l'application des opérations à ces quantités, à ces formes, à ces polynomes la Théorie a montré, combien toutes les opérations sont réduites à des règles simples et générales, qui ne laissent ni difficultés, ni obscurités, dont les résultats non obtenus machinalement, peuvent être vérifiés. — On sait ce qu'on fait, connaissant les choses qu'on traite, la méthode qu'on suit. Connaissant à fond les facteurs de la direction, on sait que dans tout nombre complexe la direction *directe* donne la vraie et la simple valeur, que la direction *indirecte* n'a la moindre influence sur la valeur d'une quantité, d'une grandeur complexe, que toujours on a comme parfaitement égales :

$$A \uparrow \varphi = A \uparrow 2n\pi . \varphi.$$

On sait que les directions indirectes ne sont d'influence que dans l'extraction des racines des nombres complexes.

Le point important sur lequel la Théorie diffère principalement avec les Théories connues, c'est que les nombres complexes imaginaires et surtout les formes complexes ont une tout autre signification, quand ils se trouvent dans les Fonctions exponentielles, goniométriques et cyclométriques.

La Théorie renferme les différents points contraires à ceux dans les Théories suivies jusqu'à ce jour, et en même temps les fondements de ces principes divergents; — on y trouve la validité de ces principes prouvée par l'application aux formules, qui par là perdirent leur obscurité ou montrèrent leur absurdité.

Les opinions contraires sur ces divers points, contenues dans la Théorie, n'ont pas été sans influence sur les principes des Logarithmes.

Il ne sera nécessaire de les répéter ici.

Dr. Oscar Schlömilch. *Algebraïsche Analysis.*

En étudiant ce que Schl. a écrit sur les imaginaires et les formes complexes, on voit clairement que bien des choses lui sont tout obscures; que par rapport aux imaginaires, elles lui sont en beaucoup de cas encore de vraies imaginaires; qu'il n'a pas entrevu que les imaginaires et les formes complexes dans les différentes fonctions n'ont pas la même signification ni la même valeur.

La signification de $\sqrt{-1}$ dans les formes ordinaires ne lui est pas inconnue, de même que la valeur des formes complexes, mais il n'a pas distingué les nombres en *absolus* et en *complexes;* il n'a pas distingué dans toute son étendue la signification des facteurs directifs; et encore il n'a pas approfondi le sens, la portée de la distinction des directions en *directes* et en *indirectes*; dans quels cas la distinction est importante; dans quels cas elle n'est d'aucune influence, et ne change en rien la valeur réelle de l'expression.

Dr. Oscar Schlömilch. *Chap.* X, § 51, *page* 225.
Die Functionen complexer Variabelen.

Par les remarques que *Schl.* lie aux formules de $\cos y$, $\sin y$, de $e^{\sqrt{-1}.y}$, $e^{\sqrt{-1}.y}$ on voit d'abord qu'il n'a pas compris la signification de $(\sqrt{-1})$ dans les Exposants.

Il dit qu'il était à prévoir que pour avoir les équations de $\cos y$, $\sin y$, il devait entrer dans $\frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2}$ et $\frac{e^{ky}-e^{-ky}}{2k}$ des valeurs imaginaires; — les valeurs de cos. et sin. étant tout au plus l'unité, il serait impossible de trouver pour k une valeur réelle, qui repondît à cette fin.

Puis en faisant l'énumération des différentes Fonctions à formes complexes, il dit que les définitions de ces Fonctions, quand les quantités sont réelles, n'ont pas de sens pour les mêmes Fonctions, quand les quantités sont des imaginaires ou des formes complexes.

P. ex. $a^{\sqrt{-1}.y}$, $\sin \sqrt{-1}.y$, arc tang $\sqrt{-1}.y$.

Encore il demande, si les règles pour les différentes opérations en quantites réelles, sont les mêmes pour les imaginaires et les formes complexes.

La Théorie donne les réponses à ces diverses questions.

Dans une note *Schl.* dit que Cauchy a donné la solution de ces problêmes.

L'auteur de la Théorie n'a pu avoir le cours de l'analyse algébrique de *Cauchy*, il ne sait donc, si toutes les définitions de Cauchy s'accordent avec celles, qu'il a données; — quand Cauchy a donné la démonstration, que les règles dans les opérations sont toutes les mêmes pour les réelles et les imaginaires, la Théorie donnée avec ses démonstrations sera en opposition avec les solutions de Cauchy.

Les formules $e^{\sqrt{-1}.y}$, $e^{-\sqrt{-1}.y}$ $\cos \sqrt{-1}.y$, $\sin \sqrt{-1}.y$

sont des formules fondamentales; on doit s'étonner un peu de la remarque de *Schl.*, disant que la dérivation de ces formules n'est pas absolument juste, correcte, et cependant elles lui servent d'introduction dans les nombres imaginaires.

Les formules ne sont tout au plus que des équations identiques, comme la Fig. 3 le montre.

Soit le rayon $OA = 1$, et comme base de la direction $= + OA = + 1$.

Les autres lignes prises en sens complexe, on a :

$$OB = 1\uparrow\varphi \quad ; \quad OB' = 1\uparrow-\varphi.$$

$$1)\ OB = Oc + \sqrt{-1}.cB = 1(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi) = e^{\sqrt{-1}.\varphi}$$

$$2)\ OB' = Oc + \sqrt{-1}.cB' = 1(\cos-\varphi + \sqrt{-1}.\sin-\varphi) = [e^{-\sqrt{-1}.\varphi}.$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$Oc - \sqrt{-1}.cB = 1(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi).$$

Par l'addition et la soustraction de (1, 2) on obtient :

$$OB + OB' = 2\,Oc = 2\cos\varphi = e^{\sqrt{-1}.\varphi} + e^{-\sqrt{-1}.\varphi}.$$

$$OB + OB' = 2\sqrt{-1}.cB = 2\sqrt{-1}.\sin\varphi = e^{\sqrt{-1}.\varphi} - e^{-\sqrt{-1}.\varphi}.$$

Ce qui renferme les Formules fondamentales :

$$e^{\sqrt{-1}.\varphi} = 1\uparrow\varphi = 1(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi);$$

$$e^{-\sqrt{-1}.\varphi} = 1\uparrow-\varphi = 1(\cos-\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi).$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{-\sqrt{}1.\varphi} + e^{-\sqrt{}-1.\varphi}}{2.} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{e^{\sqrt{-1}.\varphi} - e^{-\sqrt{-1}.\varphi}}{2\sqrt{-1}.}$$

La Figure montre l'identité, la réalité des Formules.

Dr. O. Schlömilch, par 52. — pag. 227. — La preuve que *Schl.* n'a pas fait la distinction des facteurs directifs dans les nombres complexes, c'est qu'il regarde $\sqrt{-1}$, i comme *l'unité imaginaire*, au lieu de les prendre comme facteurs ou indices de la direction $1\uparrow180$, $1\uparrow\frac{\pi}{2}$.

L'addition, *la soustraction* : — Au lieu de regarder les formes complexes, comme étant composées de *réelles* et *d'imaginaires*, il est plus juste de dire : les formes complexes renferment deux termes de quantités homogènes, mais à direction différente ; les premiers termes sont des quantités complexes *pos.* ou *nég.*, les seconds des complexes à direction $\uparrow 90$ ou $\uparrow\frac{\pi}{2}$.

Pour avoir la somme ou la différence de ces Formes, on unit les termes, qui ont la même direction, ou dont les directions ne sont qu'*opposées*, savoir les premiers, qui sont tous $\pm$; et les seconds, qui ne sont que $\pm\sqrt{-1} = \pm\uparrow\frac{\pi}{2}$.

La multiplication, *la division.* — Quand on connaît la signification des nombres complexes, on sait que les règles de la multiplication et de la division des polynomes, dont les termes ne sont que *pos.* et *nég.*, trouvent aussi leur application aux polynomes, dont les termes complexes ont toutes les directions.

Dans la multiplication il transforme les Formes $x + \sqrt{-1}.y$ en $R(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$ pour y appliquer l'opération, mais il ne passe pas de la dernière réduction aux nombres complexes $R\uparrow\varphi$, ce qui rend l'opération beaucoup plus simple, et dont on tire encore les mêmes résultats, obtenus d'une manière plus compliquée en suivant la méthode ordinaire.

La comparaison des opérations qu'on trouve dans *Schl.* et celles dérivées de la Théorie, prouveront la simplicité et la généralité des dernières.

Schl. ne parle que des Formes $x + \sqrt{-1}.y$; il n'est parlé de la réduction de toutes les quantités imaginaires etc. etc. à la forme simple $x + \sqrt{-1}.y$, ni au nombre $R\uparrow\varphi$

Dans le reste de cette § se trouvent des choses bien compliquées, qui toutes traitent les directions.

Schl. ne parle pas de *directions* dans le sens indiqué dans la Théorie.

Au lieu d'analyser ce qui se trouve dans *Schl.*, il sera cependant nécessaire de répéter quelques points de la Théorie, et d'y attacher des remarques.

Les directions se distinguent en *directes* et en *indirectes*; — les directes renferment implicitement les indirectes.

Il n'y a point de différence de *valeurs* entre les quantités, qui ne diffèrent que par rapport à leur direction de *directe* et *d'indirecte* $R{\uparrow}\varphi = R{\uparrow}\varphi + 2n\pi$.

La différence ne se trouve que dans la *forme* et non dans *la valeur*; — la différence n'a point de réalité.

Parce que les *directes* renferment implicitement les *indirectes*, ce n'est que dans l'extraction des racines, qu'il est nécessaire d'observer non seulement la *directe*, mais encore les *indirectes*, pour déterminer toutes les différentes racines possibles.

Dans tout le reste l'observation des *indirectes* n'est d'aucune influence, et ne sert qu'à embarrasser par les formules compliquées, qui en résultent.

Tous les polynomes à termes complexes imaginaires, ainsi que les simples formes complexes, ne sont réellement que des nombres complexes.

Les nombres absolus peuvent être regardés comme des nombres complexes à la direction ${\uparrow}0 = {\uparrow}2n\pi$. Tous les nombres étant ainsi en tout de même nature, suivent en tout les mêmes règles par analogie, étant réellement des choses analogues.

Il est donc superflu de prouver, ce qui n'a besoin d'être prouvé encore.

Z étant $= Z{\uparrow}0$, les mêmes règles pour Z sont aussi applicables à $Z{\uparrow}\varphi = Z(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$.

P. ex. $(Z{\uparrow}\varphi)^m$, $(Z{\uparrow}\varphi)^{-m}$, $(Z{\uparrow}\varphi)^{\frac{m}{n}}$, $(Z{\uparrow}\varphi)^{-\frac{m}{n}}$ etc.

Dans les cas que les exposants sont des membres entiers, la puissance n'a qu'une seule *réalité*, soit que la base soit un nombre absolu ou complexe.

Quand les exposants sont des nombres fractionnaires, le nombre des différentes racines, représentant différentes valeurs, est égal au dénominateur de la fraction.

En réduisant $x + \sqrt{-1} . y$ en $R \uparrow$ arc tang $\frac{y}{x}$, les deux membres de l'équation ne sont pas absolument égaux.

Arc tang $\frac{y}{x}$ a deux valeurs φ et $\pi + \varphi$.

Ainsi on aurait $x + \sqrt{-1} . y = R \uparrow \varphi = R \uparrow (\pi + \varphi)$; ce qui est faux, les deux valeurs $R \uparrow \varphi$ et $R \uparrow (\pi + \varphi)$ étant des grandeurs *opposées*.

Explication. Par la réduction des deux formes complexes $\pm \{x + \sqrt{-1} . y\}$ on obtient le même nombre complexe, $R \uparrow$ arc tang $\frac{\pm y}{\pm x} = R \uparrow$ arc tang $\frac{y}{x}$.

Le nombre complexe renferme ainsi deux différentes formes complexes, qui sont représentées par les grandeurs $R \uparrow \varphi$ et $R \uparrow (\pi + \varphi)$, — suite de la double valeur de

$$\text{arc tang } \frac{y}{x} = \varphi \text{ et } (\pi + \varphi).$$

Fig. 4. Soit AE $=$ tang $\varphi =$ tang $(\varphi . \pi) =$ etc.

$$OC = \cos \varphi = \cos (\varphi . 2\pi) = \text{etc.};$$
$$BC = \sin \varphi = \sin (\varphi . 2\pi) = \text{etc.}$$
$$OC' = \cos (\varphi . \pi) = \cos (\varphi . 3\pi) \text{ etc.};$$
$$B'C' = \sin (\varphi . \pi) = \sin (\varphi . 3\pi) = \text{etc.}$$
$$OC + \sqrt{-1} . BC = OB = R \uparrow \varphi = x + \sqrt{-1} . y.$$
$$OC' + \sqrt{-1} . B'C' = OB' = R \uparrow (\varphi . \pi) = -x - \sqrt{-1} . y.$$

Ce point non expliqué à fond a causé des difficultés, qu'on rencontre aussi dans *Schl.*

Il dit : $x + \sqrt{-1} . y = R \uparrow$ arc tang φ, $(\varphi . k\pi)$, pour k on peut mettre toutes valeurs, *pair* ou *impair*; mais quand on met :

$$x + \sqrt{-1}.y = R(\cos \varphi . k\pi) + \sqrt{-1}. \sin(\varphi . k\pi)$$
le nombre k doit être toujours *pair*.

La *vraie et unique valeur* de $x + \sqrt{-1}.y$ est $R\uparrow\varphi$; de $-x - \sqrt{-1}.y$ est $R\uparrow\varphi.\pi$.

Les directions indirectes n'influent pas sur ces valeurs, et ne regardent que la forme de l'expression.

$$R\uparrow\varphi = R\uparrow(\varphi . 2k\pi) \; ; \; R\uparrow(\varphi . \pi) = R\uparrow(\varphi . (2k + 1)\pi).$$

Dr. O. Schlömilch, § 53, page 233.

Cette § traite principalement l'équation $x_n \pm 1 = o$ et le Théorême de Côtes.

La Théorie renferme le point de vue, sous lequel cette équation est regardée, et la manière d'en déterminer les racines.

En donnant à n dans $x^n \pm 1 = o$, les valeurs 6 et 5, les Fig. 5, 6 représentent dans les lignes O_1, O_2 etc. les racines de ces équations.

Fig. 5. Soit le rayon du cercle $= 1$.; les racines
de $x^6 + 1 = o$ sont $x = O_1 , O_3 , O_5 , O_7 , O_9 , O_{11}$,
de $x^6 - 1 = o$ $\quad x = O_2 , O_4 , O_6 , O_8 , O_{10} , OA$.

$$O_1 = 1\uparrow\tfrac{\pi}{6} = 1(\cos\tfrac{\pi}{6} + \sqrt{-1}. \sin\tfrac{\pi}{6}) = OB + \sqrt{-1}.B_1$$

$$O_2 = 1\uparrow\tfrac{2\pi}{6} = 1(\cos\tfrac{2\pi}{6} + \sqrt{-1}. \sin\tfrac{2\pi}{6}) = OC + \sqrt{-1}.C_2.$$

Dans la Fig. 6 le cercle est divisé en 10 parties égales, les lignes O_1, O_2 etc. représentent de la même manière les racines des équations $x^5 \pm 1 = o$.

$$x^5 + 1 = o \, ; \; x = O_1 , O_3 , O_5 , O_7 , O_9.$$
$$x^5 - 1 = o \, ; \; x = O_2 , O_4 , O_6 , O_8 , OA.$$

$$O_1 = 1\uparrow\tfrac{\pi}{5} = 1(\cos\tfrac{\pi}{5} + \sqrt{-1}. \sin\tfrac{\pi}{5}) = OB + \sqrt{-1}.B_1$$

$$O_2 = 1\uparrow\tfrac{2\pi}{5} = 1(\cos\tfrac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}. \sin\tfrac{2\pi}{5}) = OC + \sqrt{-1}.C_2.$$

Ces lignes O_1, O_2 etc., racines de l'unité complexe, marquent les différentes directions de l'unité, d'après le degré de la puissance de l'équation.

Le Théorême de Côtes est fondé sur le Théorême que, les racines d'une équation étant connues, le premier membre peut être divisé en facteurs du premier degré, ainsi on a pour les équations $x^6 + 1 = o$, $x^5 - 1 = o$.

1) Fig. 5 $(x - O_1)(x - O_3)(x - O_5)(x - O_7)(x - O_9)$
$$(x - O_{11}) = x_6 + 1$$

2) Fig. 6 $(x - O_2)(x - O_4)(x - O_6)(x - O_8)(x - OA =$
$$x^6 + 1$$

et ainsi avec les autres équations $x^6 - 1 = o$, $x^5 + 1 = o$.

Les équations (1. 2) peuvent être prouvées directement en cherchant le produit contenu des facteurs des premiers membres; ces produits donneront les Fonctions :

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = x^6 + 1 \quad (3$$
$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx^5 + E \quad = \quad x^5 - 1 \quad (4.$$

Dans (3. 4) A indique la somme des Uniones, B celle des Biniones, etc. des racines des équations.

La manière simple d'indiqner les racines en nombres complexes $O^1 = 1 \uparrow \frac{\pi}{6} = x$ etc. dans $x^6 + 1 = o$;
$O_2 = 1 \uparrow \frac{2\pi}{5} = x$ etc. dans $x^5 - 1 = o$, se prête à trouver facilement les valeurs de A, B, C etc. dans (3. 4).

Pour prouver les Formules (1. 2) et pour déterminer les valeurs de A, B, C etc. dans (3. 4), il sera nécessaire de déterminer premièrement la somme et le produit de quantités conjuguées et d'opposées.

Fig. 3. OB et OB′ sont des grandeurs conjuguées ;

$$OB = 1\uparrow\varphi = 1(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin_{\varphi}).$$

$$OB' = 1\uparrow-\varphi = 1(\cos-\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi) = 1(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi).$$

Ainsi $OB + OB' = 1\uparrow\varphi + 1\uparrow-\varphi = 2\cos\varphi$.

Le produit sera :

$$OB.OB' = 1\uparrow\varphi.1\uparrow-\varphi = 1\uparrow(\varphi-\varphi) = 1\uparrow o = +1.$$

Fig. 4. OB et OB′ sont des grandeurs opposées ;

$$OB = 1\uparrow\varphi = 1(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin_{\varphi}).$$

$$OB' = 1\uparrow\varphi.\pi = -1\uparrow\varphi = -1(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi).$$

Ainsi $OB + OB' = 1\uparrow\varphi + 1\uparrow\varphi.\pi = o$.

Les figures donnent les mêmes résultats.

Fig. 3. $OB = Oc + \sqrt{-1}.Bc.$

$OB' = Oc + \sqrt{-1}.B'c = Oc - \sqrt{-1}.Bc.$

$OB + OB' = 2Oc = 2\cos\varphi.$

Fig. 4. $OB = = Oc + \sqrt{-1}.Bc.$

$OB' = Oc' + \sqrt{-1}.B'c' = Oc' - \sqrt{-1}.Bc.$

$OB + OB' = o.$

Détermination de la somme des Uniones, des Biniones, des Tertiones etc.

Les racines de $x^6 + 1 = o$ sont O_1, O_3, O_5, O_7, O_9, O_{11} ; indiquant les différentes valeurs par 1, 3, 5, 7, 9, 11, la somme des Uniones sera : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; — dans cette somme on a les valeurs opposées :

1, 7 ; 3, 9 ; 5, 11.

$$1 + 7 = 1\uparrow\tfrac{\pi}{6} + 1\uparrow\tfrac{7\pi}{6} = 1\uparrow\tfrac{\pi}{6} + 1\uparrow(\tfrac{\pi}{6}.\pi) = o.$$

et ainsi avec les autres, par conséquent $A = o$.

Pour trouver la somme des Biniones, on mettra pour abrévier $1.3 = 1\uparrow\frac{\pi}{6} \cdot 1\uparrow\frac{3\pi}{6} = 1\uparrow\frac{4\pi}{6} = 4$.

Les Biniones de 1, 3, 5, 7, 9, 11 sont:

1.3, 1. 5, 1.7, 1. 9, 1.11 $= 4 + 6 + 8 + 10 + 12$.
3.5, 3. 7, 3.9, 3.11, 5. 7 $= 8 + 10 + 12 + 14 + 12$.
5.9, 5.11, 7.9, 7.11, 9.11 $= 14 + 16 + 16 + 18 + 20$.

Parmi ces valeurs se trouvent les valeurs opposées: $4 + 10$, $6 + 12$, etc. Car:

$$4 + 10 = 1\uparrow\frac{4\pi}{6} + 1\uparrow\frac{10\pi}{6} = 1\uparrow\frac{4\pi}{6} + 1\uparrow\frac{4\pi}{6} \cdot \pi = o$$

et ainsi avec les autres valeurs opposées; les seules valeurs, qui ne s'anéantissent pas d'abord, sont:

$$12 + 16 + 20 = 1\uparrow\frac{12\pi}{6} + 1\uparrow\frac{16\pi}{6} + 1\uparrow\frac{20\pi}{6}$$
$$= 1 + 1\uparrow\frac{4\pi}{6} + 1\uparrow\frac{8\pi}{6}.$$

Les valeurs $1\uparrow\frac{4\pi}{6}$, $1\uparrow\frac{8\pi}{6}$ sont conjuguées;

$$= 1\uparrow\frac{4\pi}{6} + 1\uparrow\frac{-4\pi}{6} = 2 \cos \frac{4\pi}{6}.$$

$$2 \cos \frac{4\pi}{6} = 2 \cos 120 = -2 \sin 30 = -1.$$

$$\text{ainsi } 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{6} = 1 - 1 = o = \text{B}.$$

La somme des Tertiones sera:

1.3.5, 1.3.7, 1.3.9, 1.3.11, 1.5.7 $= 9 + 11 + 13 + 15 + 13 +$
1.5.9, 1.5.11, 1.7.9, 1.7.11, 1.9.11 $= 15 + 17 + 17 + 19 + 21 +$
3.5.7, 3.5.9, 3.5.11, 3.7.9, 3.7.11 $= 15 + 17 + 19 + 19 + 21 +$
3.9 11, 5.7.9, 5.7.11, 5.9.11, 7.9.11 $= 23 + 21 + 23 + 25 + 27$.

La somme est $= o$, puisque toutes les valeurs sont opposées $9 + 15$, $11 + 17$, $21 + 27$, qui s'anéantissent.

Ainsi $C = o$.

La somme des Quaterniones sera :

$$1.3.5.7,\ 1.3.5.9,\ 1.3.5.11,\ 1.3.7.9,\ 1.3.7.11 =$$
$$16 + 18 + 20 + 20 + 22 +$$
$$1.3.6.11,\ 1.5.7.9,\ 1.5.7.11,\ 1.5.9.11,\ 1.7\,9.11 =$$
$$24 + 22 + 24 + 26 + 28 +$$
$$3.5.7.9,\ 3.5.7.11,\ 3.5.9.11,\ 3.7.9.11,\ 5.7.9.11 =$$
$$24 + 26 + 28 + 30 + 32.$$

La somme est, après avoir rayé les valeurs opposées,

$$24 + 28 + 32 = 1\uparrow\frac{24\pi}{6} + 1\uparrow\frac{28\pi}{6} + 1\uparrow\frac{32\pi}{6} =$$
$$= 1 + 1\uparrow\frac{4\pi}{6} + 1\uparrow\frac{8\pi}{6} = o = D.$$

Comme il est montré dans les Biniones.

La somme des Quintiliones sera :

$$1.3.5.7.\,9,\ 1.3.5.7.11,\ 1.3.5\,9.11 = 25 + 27 + 29 +$$
$$1.3.7.9.11,\ 1.5.7.9.11,\ 3.5.7.9.11 = 31 + 33 + 35.$$

La somme des quintiliones s'anéantit d'abord, donc $E = o$.

La valeur de F est :

$$1.3.5.7.9.11 = 36 = 1\uparrow\frac{36\pi}{6} = 1\uparrow o = +1.$$

Détermination de la somme des Uniones, des Biniones etc. des racines de $x^5 - 1 = o$.

Pour abrévier il suffira de donner les résultats obtenus suivant la manière précédente.

Les racines de $x^5 - 1 = o$ sont, $x = 0.2.4.6.8.$

$$2 + 8 = 1 \uparrow \frac{2\pi}{5} + 1 \uparrow \frac{8\pi}{5} \text{ sont conjuguées } = 2 \cos \frac{2\pi}{5}.$$

$$4 + 6 = 1 \uparrow \frac{4\pi}{5} + 1 \uparrow \frac{6\pi}{5} \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad = 2 \cos \frac{4\pi}{5}.$$

$$o = 1 \uparrow o \qquad\qquad = 1.$$

La somme des Uniones est $1 + 2 \cos 72 + 2 \cos 144 = o = A.$

Pour la somme des Biniones on obtient:

$$2 \uparrow o + 4 \cos \frac{2\pi}{5} + 4 \cos \frac{4\pi}{5} = o = B.$$

La somme de Terniones et des Quaterniones est la même que celle des Biniones $= o = C.$

La valeur de E est:

$$0.2.4.6.8 = 20 = 1 \uparrow \frac{20\pi}{5} = 1 \uparrow o = + 1.$$

Remarques. Au calcul, qui précède, se lient quelques observations.

D'abord il est montré, que la méthode suivie prouve d'une manière bien simple le théorême des facteurs du premier membre de l'équation $x^n \pm 1 = o$.

Encore on n'a pas opéré avec des grandeurs imaginaires, impossibles, mais avec des grandeurs réelles, ce qui mettait en état de comprendre les opérations et de juger les résultats.

Une autre observation c'est, que de cette manière se présentent différentes relations entre les directions et les lignes goniométriques.

Les racines de $x^n \pm 1 = o$ sont:

$$1\uparrow\frac{\pi}{n},\ 1\uparrow\frac{3\pi}{n},\ 1\uparrow\frac{5\pi}{n}\ \ldots\ldots\ 1\uparrow\frac{(2n-1)\pi}{n}$$

$$1\uparrow o,\ 1\uparrow\frac{2\pi}{n},\ 1\uparrow\frac{4\pi}{n}\ \ldots\ldots\ 1\uparrow\frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

Quand n est *pair*, on a toujours, que la somme des directions est *nulle*, ainsi que la somme des unités complexes, racines de l'équation.

La raison en est, que toutes ces grandeurs ont dans ce cas deux à deux des valeurs *opposées*, qui s'anéantissent.

Quand n est *impair*, les racines sont deux à deux des valeurs *conjuguées*, dont la somme, exprimée dans des cosinus de différents degrés, est l'opposée du terme *impair*, qui reste.

Le nombre 360 a les facteurs impairs 3, 5, 9, 15, 45; en prenant ces nombres pour **n** dans les racines de $x^n \pm 1 = o$, différentes relations se présentent.

Prenant par ex. $n = 15$, dans $x^{15} \pm 1 = o$, et écrivant par abréviation dans les racines $1 = 1\uparrow\frac{\pi}{15}$, on a $x = 1, 3, 5 \ldots\ldots\ldots 25, 27, 39$.

Le terme moyen $15 = 1\uparrow\frac{15\pi}{15} = -1$; les termes 1,29; 3,27; représentent des valeurs *conjuguées :*

$$1 + 29 = 1\uparrow\frac{\pi}{15} + 1\uparrow\frac{29\pi}{15} = 2\cos\frac{\pi}{15}.$$

$$3 + 27 = 1\uparrow\frac{3\pi}{15} + 1\uparrow\frac{27\pi}{15} = 2\cos\frac{3\pi}{15}.$$

La somme des valeurs étant $= o$, on obtient l'équation:

$$2\ \{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13\} = 1.$$

$$x = \{1\} = \frac{\pi}{15} \text{ est par conséquent } = 12^o.$$

L'équation indiquée par abréviation sera:

$$2\{\cos 12 + \cos 36 + \cos 60 + \cos 84\} -$$
$$2\{\sin 18 + \sin 42 + \sin 66\} = 1.$$
$$\text{ou } 2\{\cos 12 + \cos 36 + \cos 60 + \cos 84\} =$$
$$2\{\sin 18 + \sin 42 + \sin 66\} + 1.$$

Ce qui se réduit encore à :

$$\cos 12 + \cos 36 + \cos 84 = \sin 18 + \sin 42 + \sin 66.$$

Pour ne pas amplifier trop le complément, l'auteur a oté, ce qu'il avait écrit sur le Théorême de Côtes et sur celui de Moivre, qui n'est qu'une variante de celui de Côtes.

Les Fig. 8, 9. Servaient à expliquer la démonstration.

Dr. O. Schlömilch, § 54.

Die Exponentialgrössen mit complexen variabelen.

Par la substitution de $x + \sqrt{-1}.y$ pour z dans

$$e^z = \text{Lim.}\left\{(1 + \tfrac{z}{m})^m\right\}$$

il obtient après des réductions :

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y).$$

La formule obtenue prouve la justesse de la Théorie par rapport à la signification de $\sqrt{-1}$ dans les exposants.

La formule n'avait besoin d'être prouvée encore, car

$$e^{\sqrt{-1}.y} \text{ etant } = 1(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) =$$
$$e^0(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) \text{ on avait d'abord :}$$
$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^x.e^{\sqrt{-1}.y} =$$
$$e^x.1(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = e^x \uparrow y.$$

Schl. appuie beaucoup sur les formules :

$$e^z = \text{Lim.}\left\{(1 + \tfrac{z}{m})^m\right\};\ e^{x+\sqrt{-1}.y} = \left\{(1 + \tfrac{x+\sqrt{-1}.y}{m})^m\right\}$$

comme renfermant la définition des Puissances sous toutes les Formes. Il remarque encore dans une note, que les mathématiciens ont donné la préférence à sa définition sur celle de Cauchy, qui la définit comme la somme d'une série ; savoir :

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = 1 + \frac{x+\sqrt{-1}.y}{1} + \frac{(x+\sqrt{-1}.y)^2}{1.\ 2} + \text{etc.}$$

Schl. est parvenu par la réduction à :

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = \left\{(1 + \frac{x+\sqrt{-1}.y}{m})^m\right\} =$$

$$e^x (\cos y + \sqrt{-1}\ .\ \sin y.$$

Ainsi $e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = e^x{\uparrow}y.$

En observant la signification et la valeur de $\sqrt{-1}.$ dans les Exposants, la définition donnée dans la Théorie n'est-elle pas plus simple, toute générale et aussi mathématique ?

Par analogie *Schl.* dit : $a^{\sqrt{-1}.y} = e^{\sqrt{-1}.y\ l.a}.$

Dans la suite on reviendra sur cette formule, en traitant ce que *Duhamel* a dit sur les quantités imaginaires, pour prouver directement que cette formule, obtenue par analogie, est fausse.

Schl. prouve encore que :

$$(a^{x+\sqrt{-1}.y})(a^{x'+\sqrt{-1}.y'}) = a^{(x+x')+\sqrt{-1}.(y+y')}.$$

Dans le cours de la démonstration il met continuellement au lieu de cos y, y' et de sin y, y', cos $y\,l.a$, $y'\,l.a$, sin $y\,l.a$, $y'\,l.a$; mais il est clair, que les expressions écrites sous cette forme, n'ont la moindre influence dans toute la démonstration.

De la Théorie on sait que les équations sont identiques :

$2\cos u = 1{\uparrow}u + 1{\uparrow}-u$; $2\sqrt{-1}.\ \sin u = 1{\uparrow}u - 1{\uparrow}-u.$

En élevant les deux membres de ces équations identiques à la même puissance, on obtient des relations importantes.

En appliquant les principes de la Théorie et prenant les puissances 5, 6 on a:

$$(2\cos u)^5 = 1\uparrow 5u + 5.1\uparrow 3u + 10.1\uparrow u + 1\uparrow -5u + 5.1\uparrow -3u + 10.1\uparrow -u.$$

Les termes sont deux à deux *conjugués*, qui sont placés les uns sous les autres, et dont la somme des valeurs est connue; ainsi on a:

$$2^5\cos^5 u = 2\cos 5u + 10\cos 3u + 20\cos u.$$

$$2^4\cos^5 u = \cos 5u + 5\cos 3u + 10\cos u.$$

$$(2\sqrt{-1}.\sin u)^6 = 1\uparrow 6u - 6.1\uparrow 4u + 15.1\uparrow 2u - 20.1\uparrow 0 + = 1\uparrow -6u - 6.1\uparrow -4u + 15.1\uparrow 2u.$$

$$-2^6\sin^6 u = 2\cos 6u - 12\cos 4u + 30\cos 2u - 20$$

et $-2^5\sin^6 u = \cos 6u - 6\cos 4u + 15\cos 2u - -10.$

$$(2\sqrt{-1}.\sin u)^5 = 1\uparrow 5u - 5.1\uparrow 3u + 10.1\uparrow u. - 1\uparrow -5u + 5.1\uparrow -3u - 10.1\uparrow -u.$$

Prenant la différence des termes *conjugués*, on a:

$$2^5\sqrt{-1}.\sin^5 u = \sqrt{-1}\,\{2\sin 5u - 10\sin 3u + 20\sin u\}$$

et $2^4\sin^5 u = \sin 5u - 5\sin 3u + 10\sin u.$

La Fig. 6 donne l'explication de quelques transformations.

Dr. O. Schlömilch, § 56.

Die goniométrischen Functionen complexer Bögen.

Dans la Théorie on a traité ces formules et la valeur en est analysée.

Cos, sin $(\sqrt{-1}.y) =$; cos, sin $(x + \sqrt{-1}.y) =$

Schl. dit que ces formules représentent la signification de ces Fonctions, mais il ne traduit pas le sens de ces formules.

La Fig. 11. Représente la valeur, la signification des arc $\sqrt{-}.y$.

AB = arc $+ y^0$; AB′ = arc $- y^0$;

AC = arc $\sqrt{-1}.y = y\uparrow 90$; AC′ = arc $\sqrt{-1}. - y =$ arc $- y\uparrow 90^0$.

Les arcs AB et AC, ainsi que AB′ et AC′ forment l'un avec l'autre un angle de 90^0, l'angle étant mesuré par les tangentes tirées aux différents arcs.

Dans cette § *Schl.* applique à ces formules des opérations, pour prouver que les formules goniométriques sont encore de rigueur pour les formes imaginaires et complexes; toute la démonstration n'est qu'apparence, donnant des résultats, qui ne sont qu'apparence, de même que les conséquences.

Analyse d'une seule formule :

$$\text{cosec}\,(x + \sqrt{-1}.y) = 2\,\frac{\sin x\,(e^y + e^{-y}) - \sqrt{-1}.\cos x\,(e^y - e^{-y}(}{-2\cos 2x + (e^{2y} + e^{-2y})}$$

toute la signification réelle n'en est que :

$$\text{cosec}\ x = 2\,\frac{\sin x\,(1+1) - \sqrt{-1}.\cos x\,(1-1)}{-\cos 2x + (1+1)} =$$

$$2\frac{2\sin x}{-2\cos 2x + 2} = \frac{2\sin x}{-\cos 2x + 1} = \frac{2\sin x}{-1 + 2\sin^2 x + 1} = \frac{1}{\sin x} = \text{cosec}\,x.$$

L'analyse des autres formules donne les mêmes résultats.

Dr. O. Schlömilch, § 57.
Die cyclométrischen Functionen complexer variabelen.

Schl. a obtenu par des opérations très étendues des formules très compliquées, qui ne sont tout au plus qu'identiques et ne renferment pour le reste la moindre relation nouvelle.

Il ne sera nécessaire d'analyser ces formules pour en prouver l'identité.

Dr. O. Schlömilch, § 55.
Die Logarithmen complexer Zahlen.
Dr. Lobatto, *Lessen Hoogere Algebra. Logarithmen.*

La preuve que l'opinion de *Euler* etc. est aussi celle de ces auteurs, c'est qu'ils tachent d'affermir encore cette opinion par leurs démonstrations.

Il ne sera nécessaire d'analyser ces démonstrations ni l'application de leur Théorie.

Schl. conclut par analogie, que la règle indiquée par $Lz + Lz' = Lzz'$ est aussi de rigueur pour les formes complexes.

Soit $z = e^x$;

$z\uparrow\varphi = z(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi) = a + \sqrt{-1}.b = e^x + \sqrt{-1}.\varphi.$

Les exposants, les Log., sont x et $x + \sqrt{-1}.\varphi$.

Y a-t-il analogie entre ces exposants de nature différente dans la partie $\sqrt{-1}.\varphi$?

La règle est générale mais non par analogie.

Lobatto finit sa théorie sur les Log., en disant:

»Il mérite d'être observé que de même que chaque »ligne goniométrique appartient à une infinité d'arcs, de

»même chaque nombre a une infinité de Log. dont il n'y »a qu'un seul de réel, les autres étant tous imaginaires."

Traduction de cette thèse:

Il mérite d'être observé que de même que chaque ligne goniométrique, appartient à une infinité d'arcs, qui n'ont la moindre influence sur la valeur primitive de ces lignes, appartenant à la direction *directe;* de même chaque nombre soit *absolu* soit *complexe* a une infinité de Log., qui tous ont absolument la même signification, la même valeur, — la conclusion en est, que l'infinité des Log. se rapporte à l'infinité des formes, sous lesquelles le seul et véritable Log. d'un nombre quelconque peut être exprimé.

La base de l'opinion de *Lobatto* est la même que celle des autres auteurs.

Lobatto à l'exemple de *Cauchy* pour distinguer les Log. réels des imaginaires écrit $L((a))$ pour indiquer la totalité des Log., tandis que $L(a)$ ne marque que le seul Log. réel.

Dr. Lobatto, Lessen Hoogere Algebra, 2e druk, p. 299.

Analyse de quelques Formules.

$$e^{\sqrt{-1}.\varphi} = \left\{ 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.} - \text{etc.} \right\} + \sqrt{-1} \left\{ \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3.} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5.} - \text{etc.} \right\}.$$

Cette formule est obtenue par la substitution de $\sqrt{-1}.\varphi$. La valeur de $e^{\sqrt{-1}.\varphi}$ est $= 1\uparrow\varphi$; la valeur absolue du second membre est égale a:

$$\sqrt{\left\{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.} - \text{etc.}\right)^2 + \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{2.3.} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5.} - \text{etc.}\right)^2\right\}} \quad (1.$$

Cette expression indiquant la valeur absolue, doit être égale à la valeur absolue de $e^{\sqrt{-1}.\varphi} = 1\uparrow\varphi$; ainsi la valeur de l'expression est $= 1$.

Le Facteur de la direction est égal à :

$$\uparrow \text{arc tang}\ \frac{\varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}}{1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4} - \text{etc.}} = \uparrow \text{arc tang}\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \uparrow\varphi.$$

Cette valeur s'accorde avec la direction de $1\uparrow\varphi$. Le numérateur et le dénominateur de la fraction sont égaux à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$; ainsi la valeur absolue de (1) est l'unité, puisque $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Le tout n'est qu'identique, et les opérations ne forment qu'un cercle logique.

$$e^{\sqrt{-1}.2\varphi} = \frac{1 + \sqrt{-1}.\text{tang}\,\varphi}{1 - \sqrt{-1}.\text{tang}\,\varphi}.$$

$$\frac{1 + \sqrt{-1}.\text{tang}\,\varphi}{1 - \sqrt{-1}.\text{tang}\,\varphi} = \frac{\sqrt{(1 + \text{tang}^2\varphi)}\uparrow\varphi}{\sqrt{(1 + \text{tang}^2\varphi)}\uparrow-\varphi} = 1\uparrow\{\varphi - (-\varphi)\}$$

$$1\uparrow\{\varphi - (-\varphi)\} = 1\uparrow2\varphi = e^{\sqrt{-1}.2\varphi}.$$

La formule n'est qu'identique.

Prenant les Log. des deux membres *Lobatto* obtient :

$$\sqrt{-1}.\,2\varphi = L\,\frac{1 + \sqrt{1}.\text{tang}\,\varphi}{1 + \sqrt{1}.\text{tang}\,\varphi}\ \text{ainsi} = L\,1\uparrow2\varphi.$$

L'exposant de $e^{\sqrt{-1}.\varphi}$ est proprement $o + \sqrt{-1}.\varphi$, s'accordant, comme il est prouvé dans la Théorie, avec le Log. de $1\uparrow2\varphi$ = Log. $1 + \uparrow2\varphi$, car :

$$1\uparrow2\varphi = e^o\uparrow2\varphi = e^{o + \sqrt{-1}.2\varphi} = e^{\sqrt{-1}.2\varphi}.$$

$$\text{Arc}\,(\sin = x) = \text{arc}\,(\text{tang} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,L\,\{\sqrt{(1-x^2)} + \sqrt{-1}.\,x\}.$$

$$\sqrt{(1-x^2)} + \sqrt{-1}.x =$$

$$\sqrt{\{(1-x^2)+x^2\}}\uparrow\text{arc}(\text{tang}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=1\uparrow\text{arc}(\text{tang}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})$$

de sorte qu'on touche ici à une inconséquence,

$$\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{Log. }1\uparrow\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})$$

$$\text{car } L1\uparrow\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=L1+\uparrow\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=$$

$$o+\uparrow\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})$$

$$\text{ainsi arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\{o+\uparrow\text{arc tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\}.$$

Pour expliquer cette inconséquence, qui n'est qu'apparence avec la signification de $\sqrt{-1}$, il est à observer que la formule peut être écrite :

$$\sqrt{-1}\,\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})=o+\uparrow\text{arc}(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}})$$

preuve de la valeur ou de la signification de $\sqrt{-1} = \uparrow =$ *signe de direction.*

Pour résumer cette analyse en peu de mots, la formule n'est qu'identique et la division par $\sqrt{-1}$ correspond à :

$$10 \text{ Florins} = f\,10.$$

$$10 = \frac{f\,10}{\text{Florins}}.$$

Les quantités pos. et nég.; détermination de la signification et de la valeur.

Pour déterminer une chose la manière la plus sûre pour y parvenir c'est de remonter à son origine.

Les nég. sont le résultat d'une soustraction ; quand on a $8-5$, le reste est 3; ce reste est dans le vrai sens du mot, il est effectif, il est positif. Quand on a au contraire $5-8$, il est impossible qu'il y aît de reste dans le sens précédent; le résultat de cette soustraction c'est, qu'il en reste encore 3 à soustraire; $5 - 8 = - 3$.

Le résultat -3 indique dans ses deux éléments, la signification de ce nombre; la valeur absolue en est 3 unités, le signe (—) marque que ces 3 unités restent encore à soustraire.

Les résultats 3 et -3 proviennent de deux cas opposés; ces nombres eux-mêmes renferment dans leur signification cette valeur opposée.

$$\left.\begin{array}{rr} 8 & 5 \\ -5 & -8 \\ \hline 3 & -3 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 13 \\ -13 \\ \hline 0. \end{array}$$

La combinaison de ces deux cas montre la valeur des résultats opposés 3 et $- 3 = 0$.

En donnant le nom de positif à 3, le reste de $8 - 5$; il est conséquent de donner celui de négatif au résultat de la seconde soustraction; et $(- 3)$ étant le reste conséquent de $5 - 8$, il est tout naturel de donner à 3, le reste du cas opposé, le signe (+) pour indiquer le résultat du cas contraire.

La combinaison de ces deux cas contraires prouve la valeur opposée de ces deux nombres; 3 et $- 3 = + 3 - 3 = 0$; ces deux nombres ont par là la propriété de s'anéantir, de se neutraliser réciproquement.

Ce qui précède renferme la signification et la valeur de ces quantités.

Les opinions sur les quantités négatives sont loin d'être d'accord parmi les mathématiciens.

Quant à la signification quelques uns les regardent comme vides de sens; comme n'étant pas des grandeurs, comme n'ayant d'existence réelle.

Quant à la valeur on les taxe comme moindres que Zéro;

et bien qu'on soit persuadé de l'absurdité de l'idée de moindre que le néant, on montre qu'on ne saurait se passer de cette manière de regarder et de taxer ces grandeurs.

Pour répondre à ces opinions, il sera propre de demander d'abord ce que c'est que la réalité d'un nombre.

Un nombre est-ce quelque chose de réel, dans le sens de matériel? Certainement non.

On peut réaliser un nombre en prenant un nombre d'unités concrètes, mais ces unités ne *sont* pas le nombre, elles ne servent qu'à le faire figurer.

Qu'est-ce donc que l'opinion, que les nombres négatifs n'ont pas d'existence réelle?

Ne peuvent-ils être figurés comme les nombres absolus?

Il est prouvé, que les nombres nég. ne diffèrent des pos., qu'en ce qu'ils indiquent avec le nombre un sens opposé.

Ce sens opposé peut se réaliser d'une infinité de manières; $+3$ et -3, dans l'exemple précédent, indique que $+3$ marque 3 unités qui restent après la soustraction; (-3) au contraire 3 unités, qui restent encore à soustraire.

Quelle est la différence de réalité dans ces deux cas, par rapport au nombre?

Quand le nombre 3 indique une route de 3 lieues, -3 indiquera de même une route de la même longueur; le sens négatif joint à -3 renferme un sens opposé par rapport à $3 = +3$.

Ce sens opposé peut se trouver dans la direction; soit 3, une route à gauche, -3 sera la même route à droite.

$+3$ et -3 ne sont-ce pas des nombres réels, l'idée jointe à ces nombres leur fait-elle perdre leur réalité de nombres?

La grandeur dans les nombres se rapporte à la quantité des unités ; dans la réalisation qui précède, $+3$ et -3 ne sont ils par figurés dans les deux cas par 3 unités ; pourquoi donc les nombres négatifs ne sont pas de grandeurs ?

Les nombres négatifs sont *vides de sens ;* les exemples, pris d'une infinité d'autres, sont-ils vides de sens ? Ce qui est vide de sens, est de même vide de réalité. — En quoi ces exemples sont illusoires ; en quoi pèchent-ils contre la raison et la conséquence ?

Surtout on en veut à ces nombres négatifs, quand ils sont *isolés.*

L'origine a fait connaître, que ces nombres indiquent dans leur signe négatif, qu'ils doivent être soustraits, que ce sont des nombres, qui renferment dans leur signe un sens d'opposé aux nombres, qui n'ont pas cette marque ; que ce sens opposé leur donne la propriété d'anéantir, de neutraliser un nombre absolu ou positif, qui renferme le même nombre d'unités.

Quand on trouve le nombre isolé (-3), a-t-il perdu par son isolement son existence, sa réalité, ne conserve-t-il pas toujours son nombre d'unités, sa grandeur, et la propriété de neutraliser le même nombre d'unités positives.

Quelqu'un, qui par son isolement, ne peut montrer, ne peut appliquer ses forces, peut-on dire d'une telle personne, que ses forces n'ont pas de réalité, que les forces d'un tel sont illusoires, *vides de sens.*

Quant à la valeur on les taxe comme moindres que Zéro.

Qu'est-ce que le néant ; qu'est-ce que moindre que le néant, moindre que Zéro ?

Une inconséquence, une contradiction, une absurdité. — On le reconnait, et cependant on continue à les taxer comme tels ; on montre qu'on ne peut se passer de cette base, et cette base doit être le fondement des nombres algébriques, des nombres complexes dans les mathématiques.

Dérivation de cette opinion.

$$5-8 = 4-7 = 1-4 = 0-3; \text{ ainsi}$$
$$5-8 = \quad -3 = 0-3.$$

Une absurdité ne peut, ne doit entrer dans les mathématiques.

Explication. $5-8 = 0-3 = -3$ ne signifie pas que les nég. sont moindres que Zéro, mais qu'une impossibilité dans la demande conduit à l'impossibilité de l'exécuter ; (-3) signifie simplement que 3 unités restent encore à soustraire ; il n'y a point de reste dans le sens propre ; le reste est, ce qui reste encore à faire ; le résultat est une quantité, qui porte avec soi la position où elle se trouve.

Autre dérivation de cette opinion.

$$3 < 5; \ 3-5 < 5-5; \ -2 < 0.$$

Réponse. — <0 est donc pris dans le sens de $(-2) = <0$, mais <0 est une absurdité; la valeur des nég. comme moindres que Zéro est donc basée sur la comparaison de quelque chose d'inconnu à une absurdité.

Les règles pour les inégalités sont justes, pour autant que les inégalités se bornent aux possibilités.

Dans l'absurde, l'impossible les règles du conséquent, du possible ne sont pas applicables.

$$3 < 5; \ 3-2 < 5-2; \ 1 < 3.$$

Les conséquences sont justes, parceque les choses sont possibles.

$$3 < 5 ;\ 3 - 5 < 5 - 5 ;\ -2 < 0.$$

L'impossible, l'absurde mène à l'absurde; dans le premier membre la chose est impossible; dans le second elle est possible.

Il est contradictoire, absurde l'idée de $>$ $<$ entre l'impossible et le possible; de même cette idée est telle entre les résultats.

$$3 < 5 ,\ 3 - 8 < 5 - 8 ;\ -5 < -3 ;$$

des deux cotés il y a de l'impossibilité; l'impossible ne peut être fait; quelle signification peut être attachée au signe $<$, qui du vrai a passé machinalement dans l'absurde, l'impossible?

L'impossible n'a pu être fait; cependant en faisant ce qu'on a pu faire, on a obtenu un résultat.

$3 - 8 = -5$, $5 - 8 = -3$; de l'un coté il reste encore 5 à soustraire, de l'autre 3.

Ces nombres sont tous deux négatifs, homogènes, le nombre d'unités marque la grandeur, ainsi $-5 > -3$.

$$3 < 5 ;\ 3 - 4 < 5 - 4 ;\ -1 < +1.$$

Entre le possible et l'impossible il n'y a pas de rapport de $>$ $<$; les résultats des deux cotés sont hétérogènes, entre lesquels le rapport de $>$ $<$ est *vide de sens.*

Par la réalisation les idées précédentes sur les nombres abstraits prouveront leur verité dans le sens concret.

Les nombres 3, 5 etc. indiqueront des routes de la longueur de ces nombres en lieues.

$3 < 5$; $3 - 2 < 5 - 2$; 1 Lieue $<$ 3 Lieues.

$$3 < 5 \quad 3 - 5 < 5 - 5. \quad -2 \text{ Lieues} < 0 \text{ Lieue ?}$$

En parcourant la route de 3 L. on est parvenu à la distance de ces lieues du point de départ, *de l'origine*, de 0; diminuer cette route, cette distance, c'est faire la route opposée; en faisant cette route inverse on passe le point 0 et l'on parvient à la distance de 2 L. de 0 dans une direction opposée; en faisant la route (5 — 5) on est revenu au point 0.

Quelle est la signification de $-2 < 0$; le résultat a un sens réel, quand on met $-2 > 0$ savoir la distance négative, opposée, -2 L. $>$ 0 L.

La distance négative est-elle non-réelle; n'est-ce pas une grandeur; cette grandeur est-elle vide de sens?

$$3 < 5;\ 3 - 8 < 5 - 8;\ -5 < -3.$$

En faisant la route de 3 — 8 on est arrivé à la distance nèg. (-5 L) de 0; par la route de 5 — 8 on est arrivé à (-3 L) de 0.

Ces distances sont-elles réelles; ces distances étant homogènes est-il juste l'inégalité des distances:

$$-5 \text{ L.} < -3 \text{ L.};\ \text{ou bien}\ -5 \text{ L.} > -3 \text{ L.?}$$

$$3 < 5;\ 3 - 4 < 5 - 4;\ -1 < +1.$$

Par la route 3 — 4 on est parvenu à la distance nég. -1 L. de 0; par 5 — 4 à la distance pos. $+1$ L. de 0.

L'inégalité des distances est-elle juste:

$$-1 \text{ L.} < +1 \text{ L. ?}$$

Les distances sont hétérogènes, elles ne peuvent être comparées dans leur sens complexe, et par conséquent dans leur sens complexe il n'entre pas dans la comparaison l'idée de $>$ $<$; ces idées entre les grandeurs hétérogènes prises en sens complexe de leurs grandeurs est vide de sens.

On prétend que -5 est <-3, puisque par la transposition des termes on a : $+3<+5$.

La signification de (-5), (-3) est trouvée par l'analyse de l'origine de ces grandeurs.

Ce sont des quantités, qui doivent être soustraites, ce sont des quantités opposées, des négatives.

Soit $-5<-3$; $8-5$ sera $>8-3$; $3>5$.

(-5), (-3) étant des quantités homogènes, on a: $-5>-3$, et $8-5<8-3$; $3<5$.

La transposition dans les équations et les inégalités est le résultat de ce que les deux membres sont augmentés ou diminués de quantités égales.

$-3=-3$; $-3+6=-3+6$; $+3=+3$; dans la supposition de $-3>-5$, on aura d'après la règle dans les inégalités $8=8$; $8-3<8-5$; $5<3$; au contraire -3 étant <-5, comme quantités homogènes, on a: $8-3>8-5$; $5>3$.

Ainsi $-3>-5$, est en contradiction avec les règles dans les équations et les inégalités.

Sur les Polynomes.

Dans les mathématiques les signes $(\pm)$ indiquent non seulement les opérations, mais servent encore à distinguer les quantités pos. des nég.

Tout polynome peut être regardé comme la combinaison de quantités absolues, unies par les signes des opérations.

Tout polynome encore peut être regardé comme la combinaison de quantités complexes.

$$a + b - c \quad ; \quad a\uparrow 0 + b\uparrow 0 + c\uparrow \pi.$$

Quand on trouve par le calcul la valeur des polynomes; la valeur sera exprimée d'après la manière, qu'on a regardé et calculé les polynomes.

Quelle que soit la manière de les regarder et d'en calculer les valeurs; les résultats réduits l'un dans l'autre, montreront, que ces résultats obtenus en regardant les polynomes des deux manières, donnent cependant les mêmes valeurs ou des valeurs qui s'accordent.

Cette vérité est le résultat de la connaissance de la signification et de la valeur des quantités complexes et de la connaissance des règles, que suivent les élements intégrants de ces quantités dans les diverses opérations.

Par rapport aux polynomes composés de quantités complexes, pos. et nég., en les regardant comme polynomes composés de quantités absolues, unies par les signes ($\pm$), et en y appliquant les diverses opérations, les résultats obtenus, transformés ou traduits en quantités complexes donneront le vrai résultat complexe.

Cette règle générale ne trouve de restriction que dans l'extraction des racines, pour avoir la valeur complète.

Ce qui précède, servira de base dans l'analyse de ce que *Duhamel* dit sur les quantités négatives dans son Oeuvre: *des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, où il critique les opinions de *Euler*, de *d'Alembert*, de *Carnot*, de *Leibnitz* et d'autres.

Duhamel, *partie* II, *page* 164 *etc.*

»§ *Les quantités négatives isolées doivent être dites plus petites que Zéro.*"

»Euler, dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, a dit que les quantités nég. étaient moindres que Zéro."

»D'Alembert, dans le premier volume de ses *Opuscules mathém.*, s'exprime ainsi a ce sujet:

»Qu'il me soit permis de remarquer combien est fausse l'idée qu'on donne quelquefois des quantités nég., en disant que ces quantités sont au dessous de Zéro. Indépendamment de l'obscurité de cette idée envisagée métaphysiquement, ceux qui voudront la réfuter par le calcul pourront se contenter de considérer cette proportion:

$$1 : -1 = -1 : 1$$

proportion réelle, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et que d'ailleurs $\frac{-1}{1} = -1$ et $\frac{1}{-1} = -1$."

»Cependant si on regardait les quantités nég. comme au dessous de Zéro, 1 serait > -1, et $-1 < 1$; ainsi il ne pourrait y avoir proportion."

»Il est vrai que Leibnitz prétend que (-1) n'est pas moyen proportionnel entre 1 et 1, non plus que -2 entre 1 et 4, quoiqu'il avoue que $-2 \times -2 = 1 \times 4$; parceque les quantités nég., dit-il, entrent dans le calcul sans entrer dans les rapports, et que des fractions ne sont pas la même chose que des rapports."

»J'avoue que je ne sens pas la force ni la vérité de cette raison: elle tendrait à renverser toutes les notions algébriques par des limitations inutiles et forcées; et elle ne serait juste d'ailleurs qu'en supposant que les quantités nég. sont au dessous de Zéro, ce qui n'est pas."

La raison de L. sera: *les quantités nég. entrent dans* *le calcul*, dans le sens de quantites opposées ; *elles n'entrent pas dans les rapports;* puisque L. n'aura pas distingué les deux éléments des quantités nég., et par là il ne lui a pas été clair, comment on pourrait déterminer le rapport complexe de ces quantités complexes.

Des fractions ne sont pas la même chose que les rapports; L. a dit vrai par rapport aux quantités nég. et pos.; les fractions dans le sens primitif marquent les parties d'un tout ; dans ce sens $\frac{+3}{-4}$ n'est pas une fraction, car le numérateur et le dénominateur ne sont pas homogènes ; le tout serait divisé en quatre parties à valeur nég. ; on ne peut avoir 3 parties pos. comme fraction de 4 parties nég.

Cependant $\frac{+3}{-4}$ marque un rapport, savoir les deux quantités prises absolument ont le rapport de $\frac{3}{4}$, mais puisque ces quantités sont complexes, le rapport de leur condition, de leur situation, de leur direction est celui d'opposé = nég. : ainsi le rapport complexe de $\frac{+3}{-4}$ est $= -\frac{3}{4}$.

Par conséquent la conclusion de d'Alembert n'est pas juste que les nég. devraient être au dessous de Zéro, pour pouvoir faire la remarque de L.

Duhamel: »*Carnot* approuve la réfutation de d'Al., et s'exprime en ces termes au commencement de sa *Géometrie de position.*"

»Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités nég. isolées, se réduisent à deux : celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que Zro ; et celle qui consiste à dire que les quantités nég. sont de même nature que les pos., mais prises dans un sens contraire."

»D'Al. détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique."

»Soit, dit-il, cette proportion :

$$1 : -1 = -1 : 1."$$

»Si la notion combattue était exacte, c. à. d. si —1 était plus petit que Zéro, à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion serait moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième, c. a. d. que 1 devrait être moindre que —1 ; donc —1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1, ce qui est contradictoire."

Dans le passage de Carnot se trouve : »*Les nég. sont les mêmes que les pos. mais prises dans un sens contraire. D'Al. détruit l'une et l'autre de ces notions.*"

L'auteur regrette de ne pas trouver dans Duhamel la réfutation de cette notion par d'Alembert, et de n'avoir été dans l'occasion de l'avoir ; ainsi il n'a pu y répondre.

Duhamel : »Ces diverses opinions sont aussi peu fondées les unes que les autres.

»Et d'abord, quand on nie que les quantités nég. sont moindres que Zéro, il faudrait demander à ceux, qui l'affirment, ce qu'ils entendent par là, autrement on ne saurait pas ce que l'on nie. Et si on l'avait fait, on aurait fini par s'entendre, car il n'est jamais venu à l'esprit de personne de prétendre qu'il y ait quelque chose de plus petit que rien."

»Quant à la prétendue démonstration de d'Al. approuvée par C., il est bien étrange que ces deux illustres géomètres n'en aient pas aperçu le défaut."

»Que signifie cette proportion $1 : -1 = -1 : 1$? D'où vient-elle ? Comment l'entend-on ? Est-elle résultat ou donnée ? Si l'on entend qu'on fasse les divisions d'après les règles des signes dans le cas des polynomes, on dira en effet que le rapport $\frac{1}{-1}$ est —1, comme le second

$\frac{-1}{1}$, et on pourra appeler leur égalité une proportion. Mais on n'attachera réellement aucun sens à ces opérations et les remarques faites dans le cas des véritables proportions n'auront aucune raison de s'appliquer ici : et l'on ne pourrait dire que si le premier terme d'un rapport est plus grand que le second, il en doit être de même dans l'autre."

»Quelle définition donnera-t-on de plus grand ou plus petit, relativement à des choses qui ne sont pas des grandeurs ?"

»Ces observations suffisent pour montrer le vide de ces simulacres de raisonnements, qui se font sur des choses non définies, sans existence réelle et où l'on se sert de propositions établies sur des grandeurs véritables."

Il est bien hasardé de se prononcer sur ces auteurs ; d'Al. n'a pas dit directement ce qu'il entend par des quantités nég., il dit simplement qu'il est absurde en tout sens de les regarder comme moindres que Zéro ; Carnot dit que d'Al. détruit encore la notion que les nég. sont les mêmes que les pos. mais dans un sens contraire.

Duh. ne sait pas par conséquent quelle est l'idée de d'Al. ; il s'étonne de ce qu'on parle de ces choses sans les définir, tandis que sa propre idée n'est autre que de dire : *des choses qui ne sont pas des grandeurs etc.*, sans qu'il fournisse la raison pour cette opinion.

Toujours *Duhamel* juge d'après son idée sur les polynomes et les quantités nég. isolées ; il oublie que les signes $\pm$ dans les polynomes n'indiquent pas *absolument* des opérations ; et à l'égard des quantités nég. isolées, que quand elles se présentent isolées on en connaît cependant la signification, la valeur par leur origine et le sens qui en dérive.

Quand ces quantités isolées désignent des quantités concrètes, on en sait d'abord la valeur absolue, réelle, il ne manque que le sens relatif, qui n'influence pas la valeur réelle.

Les conséquences de ces idées se montrent dans les conclusions, que *Duhamel* tire des opérations sur les polynomes, dont il sera parlé après; les conséquences se manifestent ici par rapport aux proportions.

On se demande, sur quel fondement *Duh.* se prononce sur les proportions de la manière suivante:

»Et l'on ne pourrait dire que si le premier terme d'un rapport est plus grand que le second, il en doit être de même dans l'autre."

Les rapports dans une proportion peuvent être très différents, d'après les quantités ou les grandeurs qui entrent dans la proportion, comme il est déjà prouvé plus haut à l'égard des rapports complexes des quantités complexes; mais toujours il est vrai que si le premier terme d'un rapport est plus grand que le second, il en doit être de même dans l'autre.

D'Al. a eu raison de parler de plus grand et de plus petit, puisqu'il regardait les *nég.* isolées comme des grandeurs; il s'est trompé en ne pas observant que les *pos.* et les *nég.*, quantités en sens *complexe*, sont hétérogènes; *dans ce sens le rapport de* $>$ $<$ *est vide de sens.*

Duhamel oublie que dans certains cas les proportions peuvent être véritables et justes sans qu'il y ait question de plus grand et de plus petit.

Duhamel fait quelques questions sur la proportion de d'Alembert et de Carnot.

»Que signifie cette proportion?" La proportion renferme des quantités complexes abstraites; *d'Al.* a montré par le produit des extrêmes et par l'égalité des raisons ou des rapports que la proportion répondait aux propriétés des proportions; — elle est exacte non seulement en sens *abstrait*, mais encore on peut la traduire en sens *concret*.

La proportion signifie proprement :

$$1\uparrow 0 : 1\uparrow\pi = 1\uparrow\pi : 1\uparrow 0.$$

Le produit des extremes $1\uparrow 0 \,.\, 1\uparrow 0 = 1\uparrow 0$ est égal à celui des moyens $1\uparrow\pi \,.\, 1\uparrow\pi = 1\uparrow 2\pi = 1\uparrow 0$.

L'identité des rapports se démontre encore de la manière suivante, par les propriétés des proportions :

$$1\uparrow 0 : 1\uparrow\pi = 1\uparrow\pi : 1\uparrow 0$$

en multipliant les termes du second rapport avec le même facteur $1\uparrow\pi$, on obtient :

$$1\uparrow 0 : 1\uparrow\pi = 1\uparrow 2\pi : 1\uparrow\pi = 1\uparrow 0 : 1\uparrow\pi.$$

La proportion est juste et la signification en est expliquée en sens abstrait.

»D'ou vient-elle ?" On pourrait répondre en disant simplement : pourquoi cette démande ? — Cependant on peut donner des réponses directes.

Deux personnes ont fait la route d'une lieue l'une à droite, l'autre à gauche, on demande les nombres, qui marqueront le rapport de ces routes à direction opposée.

$$\overset{\text{Lieues.}}{+1} : -1 = +1 : -1 = -1 : +1$$

comme il est prouvé ci-devant.

Le rapport des longueurs absolues des routes est 1 ; le rapport des autres facteurs, le rapport des directions est une demi-rotation $= \uparrow\pi = \uparrow 180$.

»Est-elle résultat on donnée ?" Comme on veut, cequi suit immédiatement de ce qui précède.

Ces réponses renferment en même temps la réponse aux mots qui suivent : »mais on n'attachera réellement aucun sens etc."

Réponse à la conclusion de Duhamel: »Ces observations suffiront etc.''

L'auteur s'étonne d'entendre quelqu'un se prononcer de la sorte dans un livre, dont le but principal est de marquer les défauts et de garantir contre des opinions non basées sur des vérités solides.

Duhamel prétend que ses observations suffiront pour montrer le vide de ces simulacres de raisonnements.

Il est vrai que les auteurs n'ont pas défini précisément les choses qu'ils traitent; ne pas définir précisement une chose est un vide, un défaut, pour se faire entendre de ceux, qui ne connaissent ces choses; mais ne pas définir une chose n'est pas toujours ne pas la connaître, et encore, même dans le cas que les auteurs n'ont su les définir précisément, il n'en suit pas directement, que ces choses non définies sont sans existence réelle, que ces grandeurs ne sont pas de véritables, et que par là les propositions établies, appliquées à ces grandeurs ne sont justes.

La seule remarque juste serait, qu'il est hasardé de compter définitivement sur les résultats obtenus sans connaître parfaitement les quantités, les grandeurs qu'on soumet à des réductions, à des opérations; remarque à faire sur toutes les opérations faites sur les grandeurs imaginaires en particulier, sur les complexes en général.

Duhamel, II, page 166 etc. Dans ces §§ il traite les Inégalités. Bien des fois *Duhamel* s'est prononcé sur les quantités nég. comme vides de sens, comme des grandeurs qui ne sont pas des grandeurs, qui n'ont pas d'existence réelle; dans ces §§ il va »montrer comment, contrairement à l'opinion de d'Alembert et de Carnot il peut y avoir lieu de considérer les quantités nég. comme plus petites que Zéro" — et encore »qu'on doit regarder comme la moindre de deux quantités nég. celle qui a la valeur absolue la plus grande."

Duhamel: »Il est nécessaire pour cela de rappeler les premiers principes du calcul des inégalités, qui sont si simples, que nous n'avons pas cru devoir nous en occuper spécialement."

Après avoir dit ce qu'on doit faire pour tirer d'une inégalité la limite de l'inconnue, il continue:

»Mais si les nombres connus sont représentés par des lettres dont les valeurs puissent être prises arbitrairement, on sera exposé à trouver des soustractions impossibles, quand on particularisera ces valeurs; et l'un des membres, ou même tous les deux pourront se présenter sous la forme de quantités nég."

»Si par ex. en partant de l'inégalité:

1) $a + b < c + d$, on tire 2) $a - c < d - b$, et que dans un cas particulier on ait $d = b$, et par suite $a < c$; (1) et (2) se réduiront à 3) $a - c < 0$; et, comme $a - c$ est nég., l'inégalité (3) exprime qu'une quantité nég. est plus petite que Zéro."

Dans ce qui suit, Duh. dit encore que» $a - c < 0$ n'est qu'une manière d'écrire $a < c$, qui n'aura aucun inconvénient; qu'il faut se résigner à accepter cette forme de l'inégalité ou ne pas faire le calcul général; mais que ce serait se priver de l'avantage des solutions générales et sans aucun intérêt puisque la forme bizarre du résultat est interprété d'avance et pourra être changé sans difficulté."

»Et si l'on avait retranché des deux membres une quantités supérieure au plus grand membre, les deux membres se trouveraient nég. et celui qui aurait la plus grande valeur absolue serait indiqué comme le plus petit."

»Et tout cela serait d'accord avec les propositions qui ont lieu dans le cas des nombres absolus."

»Par ex., si on ajoute une quantité absolue plus petite qu'une seconde, la somme est moindre que si on ajoutait la seconde; or il en sera de même pour l'addition de quantités nég., *telle qu'on l'entend, pourvu qu'on regarde comme la moindre de deux quantités nég. celle qui a la valeur absolue la plus grande.*"

»Au reste, les inégalités dont les deux membres sont nég., prendront une forme réelle en faisant passer respectivement les termes d'un membre dans l'autre. — Ainsi l'inégalité $-5 < -3$ deviendra $3 < 5$; $-2 < 0$ deviendra $0 < 2$."

Réponse. La question après tout ce qui précède c'est: s'il est vrai qu'on ne peut se passer dans les mathématiques de principes, qui ont pour résultats des formes bizarres; de principes basés sur des absurdités: $-2 < 0$, $-5 > -3$; qu'on doit se résigner d'accepter ces principes ou ne pas faire le calcul général.

L'auteur, après avoir déjà parlé bien amplement sur les inégalités, le juge cependant à propos d'y revenir encore, pour essayer de trouver le fond de ces obscurités, de ces contradictions, et de chercher ainsi le moyen de les expliquer.

Les équations peuvent se diviser en deux espèces: *les équations d'égalité et les équations d'inégalité ou de limite.*

Les deux membres des équations d'égalité ont la même valeur exprimée en formes différentes.

Dans les équations d'inégalité ou de limite un des membres renferme un limite exprimé par une quantité précédée d'un des signes $>$ $<$.

Ces signes $>$ $<$ ainsi que les signes $\pm$ et d'autres, doivent être regardés comme éléments intégrants des quantités auxquelles ils sont joints; par conséquent ces signes ne doivent être séparés de ces quantités avec lesquelles ils forment une autre espèce de quantités complexes appelées *limites*.

En observant cette idée les équations d'inégalité ne fourniront point d'obscurités; les résultats ne seront pas des formes bizarres et encore il sera prouvé que pour généraliser le calcul on n'est pas obligé d'accepter des contradictions.

Pour revenir à l'exemple de Duhamel, $a + b < c + d$; cette inégalité formera l'équation de limite:

$$a + b = < (c + d),$$

signifiant: $(a + b)$ est égal à un nombre plus petit que $(c + d)$.

Soustrayant des deux membres $b + c$, on a:

$$a + b - (b + c) = < (c + d) - (b + c),$$

ce qui donne après quelque réduction:

$$a - c = (< d) - b \text{, soit } d = b,$$

on aura: $a - c = -(> 0)$ et non $a - c < 0$.

Explication. Ayant $d = b$, $(< d)$ sera moindre que b, ainsi le résultat de $(< d) - b$ sera négatif et puisque $(< d)$ est moindre que b le reste ne sera pas Zéro mais plus grand que Zéro.

L'équation bien comprise ne renferme donc ni contradiction, ni absurdité; car il est tout conséquent que $a - c$, a étant $< c$, donne pour résultat une quantité nég. non égale à Zéro; et ainsi l'équation de limite est juste, car $- > 0$, le limite, indique une quantité nég. (> 0).

Quand on a: $a < c$, ce qui implique l'équation $a = (< c)$, et quand on diminue les deux membres de b plus grand que a et c, on aura pour résultat: $a - b = (< c) - b$, le premier membre donnera un nombre négatif, mais, comme c est plus grand que a, le résultat du second membre, de même un nombre nég., sera cependant moindre que celui du premier.

Ainsi $a - b = (< c) - b$, donnera pour résultat $-(b - a) = -> (b - c)$.

Ce qui signifie le nombre nég. $-(b - a)$ est plus grand que le nombre nég. résultat de $(b - c)$.

Quand on a : $3 < 5$; $3 = (< 5)$, et qu'on diminue des deux cotés de 5, on aura :

$3 - 5 = (< 5) - 5$; mais comme (< 5) est moindre que 5, le résultat ne sera pas Zéro, mais

$$-(5 - 3) = -> 0, \text{ on } -2 = -(> 0)$$

ainsi -2 est une quantité nég. dont le limite est une autre quantité nég. plus grande que Zéro.

Encore $3 < 5$; $3 = (< 5)$, en soustrayant des deux cotés 8, on aura :

$$3 - 8 = (< 5) - 8;$$

$$-(8 - 3) = -> (8 - 5), \; -5 = -> 3,$$

la quantité nég. -5 a pour limite la quantité nég. $-> 3$.

De ces exemples il suit qu'on n'est pas forcé d'accepter la contradiction, que dans des quantités homogènes il y en aurait, qui seraient plus petites à mésure que le nombre des unités était plus grand.

Sur la transposition : $-5 < -3$; $3 < 5$.

Dans ces transpositions Duhamel trouve la preuve de la vérité de $-5 < -3$. — La grandeur des quantités se mésure par le nombre d'unités qu'elles renferment ; l'idée de plus grand et de plus petit ne se rapporte qu'aux quantités ou grandeurs homogènes ; entre des quantités hétérogènes il n'est question de plus grand ni de plus petit.

-5 et -3 sont des quantités homogènes, dont la grandeur se mésure d'après le nombre d'unités, ainsi $-5 > -3$.

Les nég. par rapport aux pos. sont de valeur opposée ; quand on ajoute des deux cotés la quantité pos. 8, on a $8-5=3$; $8-3=5$; le résultat est $3 < 5$; la raison en est que dans le premier cas la quantité pos. unie à la nég. est diminuée de 5 unités, dans le second de 3 unités.

Ainsi $-5 > -3$ et $8=8$ donne $3 < 5$.

Encore $3 < 5$; $3 = (\angle 5)$; diminuant des deux cotés de 8, on a : $3-8=(<5)-8$; $-5 = -> (8-5) = -> 3$; $-> 3 = > -3$ étant le limite de -5, marque que -5 a pour limite une quantité négative plus grande que 3 ; $-5 = -> 3$; $-5 > -3$.

Quant à la transposition dans les équations il n'est pas nécessaire que dans la transposition les signes se changent ; quand on a : $a=b$, on obtient par la transposition $b=a$; de même dans les équations d'inégalités on peut transposer les membres sans changement de signes, pourvu que les quantités complexes *limites* conservent les éléments dont elles sont composées.

Ainsi dans : $-5 > -3$; $-5 = > -3$, on a :

$> -3 = -5$; de même on peut changer les signes sans que la transposition soit exigée $> 3 = 5$ ou cequi en résulté $3 = < 5$.

En confrontant cequi vient d'être dit sur les équations des deux espèces, avec les opinions, les principes cités de Duhamel, on devra reconnaître que toutes les choses qui se rapportent aux inégalités, s'expliquent d'une manière toute naturelle, que les règles sur les équations d'égalité, s'appliquent de même sur celles des inégalités, des limites, sans qu'on ait besoin d'accepter des contradictions $-5 < -3$, ni des absurdités $-2 < 0$.

Le point essentiel dans les inégalités, c'est de regarder les limites comme des complexes et de leur conserver durant les opérations et les réductions le signe $>$ ou $<$, l'indice de la relation où elles se trouvent.

Duhamel termine ses raisonnements sur les inégalités en parlant encore de la multiplication et de la division; en transcrivant ses paroles, on verra que cequi précède, renferme le jugement sur ses opinions.

»Ceque nous venons de dire s'applique à toutes les transpositions de termes et généralement aux additions ou soustractions des membres des inégalités. Si on effectue ces opérations suivant les règles ordinaires et sans *s'inquiéter des signes des nombres, les résultats seront toujours exacts et réductibles à une forme intelligible par elle-même.*"

Rémarque. — Une quantité nég. prise négativement donne une quantité pos.; de même il en est quand on prend une contradiction dans un sens contraire, opposé.

$-5 < -3$ renferme une vérité opposée, négative,
$+3 < +5$ » » » positive.

Comme il est prouvé auparavant la dernière inégalité est obtenue en additionnant des deux cotés le nombre $+8$.

Le résultat logique serait $+3 > +5$; cette inégalité prise en sens opposé, nég. donne $+3 < +5$; c'est là le résultat de l'analyse du dernier passage de Duhamel.

Duhamel dit, que dans la multiplication et la division des inégalités on doit avoir soin de s'assurer si les multiplicateurs ou diviseurs sont des nombres pos. — Car étant nég. p. ex. $(-a)$, »si on commence par multiplier ou diviser les deux membres par (a) on aura une inégalité vraie, mais si on change ensuite les signes des deux membres, il faut renverser le sens de l'inégalité; *car le changement de signe de tous les termes revient à un changement de membre*" — (Au changement des deux membres, par conséquent etc.)

»Nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet: les cas que nous omettons s'expliqueront toujours sans difficulté par les mêmes considérations."

»Et la conclusion de cette discussion est que si l'on veut avoir des procédés généraux pour le calcul des inégalités, on est forcé de dire que les quantités nég. sont traitées comme plus petites que Zéro, et d'autant moindres qu'elles ont plus de valeur absolue; et que les expressions de plus petit et plus grand seront appliquées d'après les mêmes principes que pour les quantités absolues."

»En procédant ainsi on n'est exposé à aucune erreur, à aucune difficulté, et on a l'avantage de la généralité. Mais si l'on rejette les formes d'inégalités qui expriment qu'une quantité nég. est plus petite que Zéro, on s'interdit tout calcul sur des inégalités dont les termes sont littéraux et l'on ne concevrait pas qu'après avoir admis les quantités nég. pour généraliser le calcul des équations, on s'y refusât dans le cas des inégalités, lorsqu'il est bien entendu qu'on ne veut pas dire qu'il existe quelque chose de plus petit que rien, et que l'inégalité qui le dit n'est qu'une forme sans danger qu'on peut changer dès qu'on y aura quelque intérêt."

En lisant cette conclusion on a peine à se persuader qu'on étudie un traité des mathématiques ; on croit plutôt se trouver sur un tout autre terrain ; on se croit en présence de quelqu'un qui vous prescrit les règles à suivre dans vos actions ; qui vous dit comment vous devez regarder les choses et les taxer ; — mais qui en même temps vous commande de ne pas demander le *pourquoi* de ceque vous ferez ; qui vous interdit de vous opposer ou d'avoir d'autres idées sur les choses, quoique la manière prescrite soit en opposition avec la raison et répugne au bon sens ; — ce quelqu'un vous prévient en vous adressant des paroles consolantes, sachant qu'il vous en coutera d'accepter ces idées et ces règles comme vraies ; il vous dit : suivez mes conseils et mon instruction et tout ira bien, vous ne rencontrerez de difficultés ; — si au contraire vous n'acceptez pas, *vous serez rejeté.*

Sur les opérations avec les nombres pos. et les nég.

Le complément sur les pos. et les nég. demande de traiter encore spécialement les opérations appliquées à ces nombres.

Le sens complexe de ces nombres fait, que les opérations qui se rapportent aux deux éléments, sont plus compliquées et que les résultats obtenus d'après les règles démontrées, demandent encore une explication spéciale.

L'application des opérations à ces quantités complexes a changé à certains égards la signification de ces opérations comparée à celle des quantités absolues.

Cequi suit trouvera sa base dans le sens attaché aux quantités nég. ; — il sera permis d'oser prétendre que la signification et la valeur trouvée par l'analyse n'est pas une opinion donnée d'une manière arbitraire ; il est prouvé que ce sens non fondé sur quelque absurdité ou quelque contradiction, n'a pas rencontré jusqu'ici des difficultés, des obscurités, qui ne s'expliquaient d'une manière conséquente et raisonnable et servaient en même tems à prouver la valeur de l'idée attachée à ces nombres soit dans leur signification soit dans leur valeur.

Les nombres pos. isolés ne sont que des nombres absolus ; les nég. isolées marquent leur origine dans le signe, dont ils sont accompagnés ; ce sont des nombres qui *restent à soustraire*, le nom de nég. leur est donné pour les distinguer des pos. ; il est indiqué que cette dénomination n'est pas tout à fait sans raison, n'est pas inconséquente.

De cette origine on a dérivé la signification *d'opposée*, conséquence tirée de l'influence de ces nombres dans leur combinaison avec les pos.

Les pos. et les nég. ne diffèrent en rien par rapport à la réalité des unités qu'ils renferment.

Le facteur de pos. et de nég. indiqué par les signes $\pm$ ou de quelque autre manière, n'a la moindre influence sur la réalité de ces nombres ou grandeurs ; ces facteurs se rapportent uniquement aux relations, aux conditions, aux positions, aux directions etc. où ils se trouvent.

De même que dans les opérations les nombres changent d'après les réductions auxquelles ils sont assujetés, de même les autres facteurs varient suivant les changements qui résultent des diverses opérations.

L'addition. — Dans cette opération les quantités complexes peuvent être homogènes ou hétérogènes par rapport à leur facteur de relation, de direction.

$(+8) + (+5) = +13$; $(-8) + (-5) = -13$.

Le sens de ces exemples est clair.

$(+8) + (-5) = +3$; $(-8) + (+5) = -3$.

Le sens d'opposé dans les pos. et nég. explique les résultats.

La soustraction. Cette opération renferme par rapport aux complexes différents cas :

1. Les nombres sont homogènes et la soustraction possible dans le sens direct :

$(+8) - (+5) = +3$; $(-8) - (-5) = -3$;

les exemples n'ont besoin d'explication.

2. Les nombres sont homogènes ; le nombre qui doit être soustrait plus grand que l'autre.

$(+5) - (+8) = -3$; $(-5) - (-8) = -(-3) = +3$.

Le premier exemple est déjà expliqué auparavant ; le second donne d'abord $(-5) - (-8) = -(-3)$; le signe $(-)$ qui precède (-3) indique que le reste ou le résultat doit être pris négativement c. à d. en sens opposé, ainsi $-(-3) = +3$.

Pour ajouter encore à la démonstration logique, basée sur le sens des nég. et la signification des signes en sens complexe, on peut trouver la valeur de $-(-3)$ de la manière suivante.

Les quantités opposées $(+3)$, (-3) s'anéantissent, se neutralisent ; $(+3) + (-3) = 0 =$ Zéro.

En soustrayant des deux cotés (-3), on a :

$$+3 = 0 - (-3) = -(-3).$$

Il serait absurde de vouloir regarder le résultat de la dernière soustraction comme une preuve que $+3$ était encore moindre que Zéro.

3. Les nombres sont hétérogènes;
$(+8) - (-3) = +11$; $(-8) - (+3) = -11$.

Quand on voudrait dire d'abord dans le premier exemple $-(-3) = +3$, ainsi $+8+3 = +11$, on ferait l'objection que dans ces deux exemples les signes (—) entre les deux quantités complexes n'indiquent pas des *conditions* mais des *opérations*.

Dans les deux exemples les quantités sont hétérogènes, donc on ne peut soustraire les unes des autres ; le mot *reste* dans le sens primitif est vide de sens dans ces exemples.

Dans le sens primitif le mot *reste* implique encore l'idée de plus grand et de plus petit ; cette idée n'entre non plus dans les soustractions de cette espèce.

Quelle est donc l'idée qu'on peut attacher à ces opérations ?

Le rapport qui existe entre les pos. et les nég. fait qu'on peut y attacher une idée de comparaison, pour trouver combien ces quantités diffèrent les unes des autres ; combien on doit ajouter à l'une pour avoir l'autre.

Les pos. et les nég. ont un origine commun, la grandeur de ces quantités marque leur distance de l'origine, les unes en direction pos., les autres en nég. ; en confrontant ces deux grandeurs on trouve non seulement combien elles diffèrent par rapport à ces distances prises absolument, mais encore combien elles diffèrent les unes des autres, dans le sens : quelle est leur distance réciproque ; combien on doit ajouter à l'une pour avoir l'autre.

$(+8) - (-3) = +11$. Signifie que l'on doit ajouter à (-3) la distance pos. $(+11)$ pour avoir $(+8)$; $(-8) - (+3) = -11$; signifie que l'on doit ajouter à $+3$ la distance nég. (-11) pour parvenir à (-8).

Ces différents cas prouvés et expliqués en sens abstrait·

seront encore pris en sens concret pour montrer que la réalité concrète est d'accord avec la réalité abstraite.

La multiplication. Dans la Théorie la multiplication des nombres complexes a été traitée en général ; celle des pos. et des nég. trouvera son explication, sa démonstration dans la signification de ces nombres et de ces signes.

1. $(+4)(+3) = +12$. Signification : prenez la quantité pos. $(+4)$ trois fois, prenez la positivement c. a d. ne changez rien à sa relation, à sa direction pos.

2. $(-4)(+3) = -12$. Signifie : prenez la quantité nég. (-4) trois fois etc. Ainsi -12.

3. $(+4)(-3) = -12$. Signifie : le facteur 3 dans le multiplicateur a le même sens ; le facteur $(-) = -1$ indique qu'on doit prendre $(+4).3 = +12$ dans un sens opposé $-(+12) = -12$.

4. $(-4)(-3) = +12$. Signifie : $(-4).3 = -12$; le facteur (-1) du multiplicateur indique que le dernier produit doit encore être pris en sens opposé $-(-12) = +12$.

La division. Explication des différents cas :

Les résultats des différents cas de la division pourraient être dérivés de la multiplication, l'explication, la démonstration directe prouve la validité de ces résultats.

1. $\frac{+12}{+4} = +3$. **Sign.** Divisez les quantités pos. $(+12)$

en 4 parties égales $(+3)$ prenez les positivement c. a. d. ne changez rien à leur relation, à leur direction.

2. $\frac{-12}{+4} = -3$. **Sign.** La même de (1).

3. $\frac{+12}{-4} = -3$. **Sign.** $\frac{+12}{} = +3$. Le facteur -1 dans le diviseur indique, qu'on doit changer encore le quotient obtenu en sens opposé $-(+3) = -3$.

4. $\frac{-12}{-4} = +3$. **Sign.** Les cas précédents renferment l'explication de (4); $\frac{-12}{4} = -3$; $-(-3) = +3$.

En confrontant l'explication dans la Théorie à l'égard de la multiplication et de la division avec celle qu'on trouve ici, on pourrait croire de remarquer une certaine différence de principes.

Dans la Théorie se trouve pour règle de la multiplication prenez le produit des facteurs comme absolus et donnez à ce produit pour facteur de direction la somme des directions — Pour règle de la division prenez le quotient des facteurs comme absolus, et donnez à ce quotient pour facteur de direction, la différence des directions du dividende et du diviseur.

La différence n'est qu'apparence dans le cas particulier des pos. et des nég., puisque l'expression prendre une quantité en sens opposé équivaut à ajouter à sa direction la direction de (π) on (180^0) et à la diminuer de cette direction $-(+3) = (+3)\uparrow\pi = 3\uparrow\pi = -3$; $-(-3) = (-3)\uparrow\pi = (3\uparrow\pi)\uparrow\pi = 3\uparrow 2\pi = +3$.

De même il en est avec la division.

Le sens concret dans les opérations appliquées aux quantités pos. et aux nég.

Les quantités complexes abstraites se trouvant isolées ont toujours un sens déterminé, elles se rapportent aux positives qui dans un sens abstrait ne sont que les absolues.

Les concrètes se trouvant isolées n'ont un sens déterminé que par rapport à leur grandeur, leur réalité absolue; se trouvant isolées sans rapport à la concrète positive on ne sait leur relation, leur condition, leur direction.

Les exemples seront rares, s'il y en a, que les quantités se présentent sans que la relation aux positives soit connue ou indiquée.

Une quantité relative sans relation est une contradiction. — Le manque de la relation n'influe cependant point sur la valeur réelle de la quantité ou de la grandeur.

L'addition. $(\pm 8) + (\pm 3) = \pm 11.$

Quelles que soient les grandeurs representées par ces quantités, la somme indiquera le nombres d'unités homogènes aux unités additionnées.

1). $(+8) + (-3) = (+5)$; 2). $(-8) + (+3) = (-5)$.

1)2). Soit que les quantités indiquent des routes; les sommes marqueront les distances du point de départ avec la direction.

Soit que les quantités se rapportent à la possession de quelqu'un; la possession prise comme la base, comme positive; les sommes marquent l'état de la possession.

La soustraction. $(\pm 8) - (\pm 3) = \pm 5)$.

Cet exemple n'aura besoin d'explication.

$$(\pm 5) - (\pm 8) = -(\pm 3) = \mp 3.$$

Quelqu'un a fait la route de 5 Lieues dans la direction du nord $(+5)$ il diminue la distance où il est parvenu de la route de $(+8)$, il parviendra à la distance de 3 Lieues du point de départ dans la direction du sud (-3).

Quelqu'un possède $f(-5)$; la possession étant pos., $f(-5)$ signifiera sa dette; on doit diminuer sa possession de $f(-8)$; le résultat sera qu'il en reste encore $f(-3)$ à soustraire.

En sens concret la chose n'est pas impossible; il demande à un autre $f\,3$ et signe la dette de $f\,3$; sa possession sera $f(+3) + f(-3) = 0$, puis on lui prend les $f(-3)$ à soustraire, le résultat sera qu'il lui reste $f(+3)$.

$$(+8) - (-3) = +11\,; \quad (-8) - (+3) = -11.$$

Prenant le premier exemple dans le sens de l'exemple précédent, le résultat est expliqué.

Le second exemple s'explique de même quand on prend $(-8) =$ une dette de $f\,8 = f(-8)$; prendre à quelqu'un qui ne possède que des dettes une somme positive, c'est augmenter ses dettes $f(-8) - f(+3) = f(-11)$.

Quand on attache à ces exemples le sens de chercher la différence, la distance des grandeurs indiquées, les résultats sont les mêmes et l'application n'a point d'obscurité.

Quelqu'un a fait la route de 8 Lieues à droite; $(+8)$, un autre de 3 Lieues à gauche (-3); ces personnes seront éloignées l'une de l'autre de 11 Lieues; la distance du second au premier sera $(+11)$ Lieues; du premier au second (-11) Lieues.

La multiplication. Le multiplicateur ne peut être qu'un nombre abstrait.

Le facteur de direction dans le multiplicateur ndique la condition, la relation dans laquelle le produit doit être pris.

$$f(+4)(+3) = f(+12);\ f(-4)(+3) = f(-12).$$

Ces exemples ne demandent point d'explication.

$f\,4$ pris trois fois donnent $f\,12$ et comme le multiplicateur indique que la valeur relative doit rester la même, on a $f(\pm 12)$.

$$(+4) \text{ degrés } (-3) = (-12) \text{ degrés.}$$

Quelqu'un monte de 4 degrés $(+4)$; prenant cette ascension 3 fois on a 12 degrés $(+12)$, mais comme cette ascension doit être prise en sens opposé on aura pour produit la descente de 12 degrés (-12).

$$f(-4)(-3) = (+12).$$

Prenez les $f\,4$ trois fois dans la condition opposée à celle où ils se trouvent; prenez les 3 fois en sens opposé de leur valeur relative, etc., etc.

$$f(-4)(-3) = -f(-4)3 = -f(-12) = f(+12).$$

La division. En sens concret les deux expèces de la division, demandent une explication spéciale par rapport aux grandeurs et quantités complexes qui y entrent.

1re Espèce. — Pour trouver la raison entre les grandeurs complexes, pos. ou nég.

$$\frac{+an}{+a} = +n;\ \frac{-an}{-a} = +n.$$

Dans ces exemples, quelles que soient les grandeurs concrètes, elles ont la même valeur relative; le quotient n indique la raison des deux grandeurs.

Le signe de pos. dans le quotient indique que ($\pm a$) est comprise dans ($\pm an$), n fois positivement = directement = réellement.

$$\frac{+an}{-a} = -n\,; \quad \frac{-an}{+a} = -n.$$

Le nombre n se rapporte aux grandeurs prises en sens absolu ; dans les deux exemples ces grandeurs sont opposées, hétérogènes ; le signe de nég. dans ($-n$) indique que les grandeurs opposées ne sont pas comprises *positivement* les unes dans les autres, mais *négativement*, *non directement*, *non réellement*.

2e Espèce. — Une grandeur concrète complexe doit être divisée en parties égales indiquées par le diviseur en nombre complexe.

$$\frac{+an}{+n} = +a\,; \quad \frac{-an}{+n} = +a.$$

Le quotient dans le premier exemple est pos., dans le second nég. cequi est tout naturel, tout réel ; les grandeurs doivent être tout à fait homogènes avec la totalité dont elles sont les parties.

On peut demander quel est le sens, quelle est l'influence du diviseur complexe dans cette espèce de division.

Dans les exemples donnés le nombre n pos. n'est qu'un nombre absolu, le signe de pos. n'est d'aucune influence.

$$\frac{+an}{-n} = -a\,; \quad \frac{-an}{-n} = +a.$$

Ces quotients renferment des absurdités dans le sens de cette espèce de division.

Dans les premiers exemples le diviseur était pos., la signification du nég. doit être derivée de celle du positif.

L'influence du facteur pos. $(+1)$ dans la division $(+n)$ était *nulle*, de là on pourra conclure que l'opposé de *nul* étant *nul*, le sens de pos. et de nég. dans les diviseurs, qui indiquent le nombre des parties dans lequel une grandeur concrète doit être partagée, n'est d'aucune influence, et qu'ainsi ces facteurs de direction dans ce cas sont imaginaires, dans le sens d'aucune valeur.

Ainsi on a: $\frac{\pm an}{\pm n} = \frac{\pm an}{n} = \pm a.$

Dans le cas qu'on insisterait à avoir l'explication, le sens des quotients obtenus par les divisions $(\pm n)$ d'après les règles générales, la réponse serait: les résultats absurdes prouvent la vérité du sens et de l'influence dérivés logiquement par rapport à ces facteurs dans les diviseurs.

Le partage d'une possession ne peut donner des dettes; le partage de dettes ne peut donner une possession.

Duhamel. Des methodes etc. Chap. XIX. De quelques tentatives de démonstration, relatives au calcul des quantités nég. isolées.

Duhamel dit: »Nous n'avons introduit les quantités nég. isolées que pour généraliser des formules et renfermer en un seul les résultats différents de plusieurs calculs analogues; — la généralisation était obtenue à la condition, de les traiter de la même manière que si elles n'étaient pas isolées, par là il n'y avait aucune règle à démontrer pour le calcul, la recherche de ces règles n'aurait eu absolument aucun sens;" — et »des géomètres éminents ont cru possible de démontrer, pour le calcul de ces quantités isolées, des règles qui dispenseraient de toute discussion particulière."

Il dit en finissant: »Nous allons en indiquer quelques unes et on reconnaîtra facilement combien elles sont illusoires."

»*Démonstrations de Laplace.* — Pour soustraire une quantité algebr. d'une autre, on écrit, à la suite de la quantité dont on soustrait, la quantité à soustraire en changeant les signes de tous ses termes, ensuite on fait la réduction."

»Cette règle est évidente quand le nombre à soustraire a le signe $+$: supposons qu'il ait le signe $-$, et que l'on propose de soustraire $-b$ de a; je dis que le résultat de l'opération est $a+b$. — En effet le nombre $a=a+b-b$; en retranchant $-b$ sous cette forme, c'est évidemment effacer $-b$, et alors il reste $a+b$."

Duhamel: »Dans tout cela Laplace suppose les quantités nég. isolées, et si d'abord il considère la soustraction d'un polynome, il l'abandonne aussitôt pour se demander comment soustraire $-b$ de a, question qui n'a aucun sens. Pour y répondre, il ajoute et retranche b de a, cequi lui donne $a+b-b$ et il regarde comme évident que retrancher $-b$ c'est l'effacer, ce qui est un non sens double, car c'est d'abord supposer qu'on attache un sens à la soustraction de $-b$, qui n'en a aucun, et ensuite que la soustraction algébr. soit la suppression n'on pas d'un nombre, mais d'une opération."

On trouve dans cequi est dit au commencement de cet essai la réponse à toutes ces objections de Duhamel; ce qui est dit sur les polynomes marque que la suppression de — b n'est pas toujours la suppression d'une opération, mais qu'elle peut être regardée encore comme la soustraction d'un nombre nég. d'après la manière qu'on regarde le polynome.

Laplace: »Quant au signe du produit dans la multiplication, il doit être pos. ou nég. etc. Cette règle présente quelques difficultés; on a de la peine à concevoir que le produit de — a par — b soit le même qui celui de a par b.

»Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit de — a par + b est — ab, puisque ce produit n'est que — a répété autant de fois qu'il y a d'unités dans b. — Nous observerons ensuite que le produit de — a par b — b est nul, puisque le multiplicateur est nul; ainsi le produit de — a par + b étant — ab, le produit de — a par — b doit être d'un signe contraire ou égal à + ab, pour le détruire."

»Duhamel: Cette démonstration pèche d'abord comme la précédente, en ce qu'on se propose de multiplier — a, cequi n'a pas de sens. Et ensuite en prenant pour multiplicateur b — b qui est un polynome, la quantité nég. — b n'est plus isolée: de telle sorte que s'il prit un multiplicande réel, p. ex. m — a, il aurait démontré que — a multiplié par — b donne un terme + ab au produit, quand — a et — b sont des termes de facteurs polynomes. Il ne prend donc même pas la question qu'il annonçait, savoir: la multiplication de deux quantités nég. isolées."

Il ne sera nécessaire d'ajouter encore quelque chose à cequi est dit, pour répondre aux objections de Duhamel.

Quant à la division Laplace dit que la règle des signes résulte de ce que le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende.

Duhamel: »Quant à la division de deux monômes, dont l'un au moins est nég., c'est de même une opération qui n'a pas de sens et qu'il ramène à la multiplication d'après la définition qu'on en donne quand elle signifie quelque chose."

L'auteur croit avoir dit assez sur la division pour en analyser et en expliquer le sens dans les différents cas et les différentes espèces.

Conclusion de Duhamel. — »Et nous dirons généralement que toute démonstration de règles sur les quantités nég. isolées ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithm. sur des choses, qui ne sont pas des nombres et n'ont aucune existence réelle."

Le traité sur les quantités pos. et les nég. montre combien les opinions de Duhamel sont opposées à celles de l'auteur.

Dr. O. Hesse vient de publier ses principes sur le même sujet dans son livre: *Die vier Species* 1872. — L'auteur a comparé ces principes avec ceux de la Théorie et avec ceux, expliqués dans le traité précédent; ces principes diffèrent beaucoup; l'auteur n'y a pas trouvé des raisons pour changer ses principes.

Sur les quantités imaginaires. — Duhamel a voué une étude considérable à ces quantités dans son oeuvre: *des Méthodes dans les sciences de raisonnement.* II *et* III *parties.*

Il considère ces quantités comme *véritablement imaginaires*, *vides de sens;* il les taxe comme des *simulacres de quantités* et les regarde de même nature dans toutes les Fonctions où elles se trouvent.

Il applique à ces quantités dans les différentes opérations les mêmes règles qu'aux quantités réelles.

Partout il répète que ces quantités ne sont qu'imaginaires et qu'on doit se garder d'attacher des idées de réalité à ces quantités et aux solutions, qui résultent de l'application des règles à ces quantités.

Duhamel dit: II, page 144 etc. »Les plus grands géomètres n'ont pas été exempts du préjugé, qui fait regarder l'analyse algébrique comme une sorte d'oracle, qui ne fait pas toujours des réponses intelligibles, mais dont les énigmes doivent toujours renfermer un sens dont il faut s'étudier à pénétrer le mystère."

Duhamel continue: »La vérité est que l'analyse ou la synthèse que l'on a employée, ayant procédé par des déductions ou réductions *que l'on a dû comprendre à mesure qu'on les a faites*, il n'a dû s'introduire rien de mystérieux."

»Les formes bizarres auxquelles le raisonnement arrive quelquefois à la fin, ont été créées par lui sans qu'il s'en doutât, et il se croit obligé d'expliquer leur existence, qu'il admet comme incontestables et dont il veut se rendre compte *à priori*."

»Ces aberrations ne sont pas rares et les quantités nég. et imaginaires en offrent de nombreux exemples."

»Nous pensons qu'un esprit simple mais rigoureux, qui n'avancera jamais qu'en se rendant bien compte de la déduction ou de la réduction par laquelle il passe, n'éprouvera aucune de ces surprises qui causent quelquefois tant de tourment. Il pourra marcher plus lentement;

mais il échappera à toutes les obscurités, dont l'autre se trouvera longtemps peut-être embarrassé."

Après avoir lu comment les quantités imaginaires sont taxées par *Duhamel*; après avoir lu, qu'on doit appliquer à ces quantités les mêmes règles qu'aux réelles, on doit avouer ne pas comprendre comment on peut se rendre bien compte des déductions et des réductions par lesquelles on passe; comment on peut échapper à ces aberrations, à toutes les obscurités dont on se trouvera embarrassé.

Quand on ne comprend pas les quantités sur lesquelles on opère; quand on applique à ces quantités des règles sans savoir si cette application est juste, qu'est-ce-qu'on peut tirer des formes bizarres auxquelles on arrive; quelle signification, quel sens peut-on y attacher?

Duhamel *des équations du second degré.* II, *chap.* XX, *page* 171 *etc.* — Duhamel dit à l'égard des racines en formes complexes de ces équations: »qu'il peut se présenter des circonstances d'un genre différent et qui pourraient laisser quelque obscurité dans l'esprit, si l'on ne se rendait pas bien compte tout d'abord de la manière dont elles doivent être entendues."

De l'équation $2x - x^2 = 5$;
il obtient $(x - 1)^2 = - 4$.

Duhamel: »Or avant d'aller plus loin, on reconnait qu'aucun nombre pos. ou nég. mis pour x ne peut rendre égaux les membres de cette dernière équation.

»D'où il suit qu'aucun des moyens de solution ne s'appliquerait ici. — On pourrait s'arrêter là et on ne rencontrerait ainsi ni difficultés, ni la moindre obscurité."

De cequi précède il suit que Duhamel ne reconnait de valeur réelle que la pos. et la nég.

Duhamel: »Or si l'on veut continuer le calcul sur l'équation $(x-1)^2 = -4$, on aura : $x = 1 + \sqrt{-4}$; *expression insignifiante.*"

Duhamel termine le chapitre sur ces équations en disant : »et nous ne pensons pas qu'après les observations que nous avons faites, il puisse rester à ce sujet la moindre obscurité sur les formes réelles nég. ou imaginaires."

Pour réponse à ceque Duhamel dit sur ces équations et les racines, il sera à propos d'insérer ici quelques idées sur ces équations et la signification des racines.

Toute équation peut être regardée de deux manières ; d'abord comme renfermant des nombres *absolus*, puis comme renfermant des nombres *complexes.*

Dans l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, on peut prendre les nombres comme absolus et les signes pour indiquer les opérations.

Par la réduction on obtient : $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$;

$$(x - \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\,;\ (\tfrac{3}{2} - x)^2 = \tfrac{1}{4}\,;$$

cequi donne $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} - x = \frac{1}{2}$ et $x - 2$; $x - 1$. Ainsi les racines de l'équation sont les deux nombres absolus 2 et 1 ; les deux facteurs du premier membre de l'équation $(x-2)(x-1) = 0$.

L'équation prise en nombres complexes a les mêmes racines.

$x^2 - 4x - 5 = 0$. Se réduit en $(x-5)(x+1) = 0$.

Prise en sens *absolu* l'équation n'a qu'une seule racine $x = 5$, puisqu'on n'a point de valeur absolue pour x qui rendra le second facteur $x + 1 = 0$.

En sens *complexe* l'équation a deux racines $x = +5$; $x = -1$ et l'équation est proprement $x^2{\uparrow}0 + 4x{\uparrow}\pi + 5{\uparrow}\pi = 0$.

$x^2 + 3x + 2 = 0$. En sens absolu l'équation n'a point de racines ; l'équation est impossible, puisque la somme de nombres absolus ne peut être égale à Zéro.

En sens complexe l'équation a deux racines, $x = -2$; $x = -1$; $(x + 2)(x + 1) = 0$.

$x^2 + 2x + 5 = 0$. En sens *absolu*, l'équation est impossible ; en sens *complexe*, elle a deux racines

$$x = -1 \pm \sqrt{-1}.2.$$

Ces racines sont regardées comme des *expressions insignifiantes*, l'équation comme impossible.

Pour réaliser les nombres soit *absolus*, soit *complexes* on doit prendre pour unité quelque grandeur concrète.

La Fig. 18 servira pour montrer la réalité des racines et de l'équation prises en sens complexe.

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \text{ ou } x^2\uparrow 0 + 2x\uparrow 0 + 5\uparrow 0 = 0.$$

$$x = 1\uparrow\pi + 2\uparrow\tfrac{\pi}{2},\ x = 1\uparrow\pi + 2\uparrow(\pi.\tfrac{\pi}{2}).$$

En réduisant les racines complexes en nombres complexes, on a encore:

$$x = -1 \pm \sqrt{-1}.2 = \sqrt{5}\uparrow \text{arc tang}\frac{\pm 2}{-1}.$$

Soit arc tang $\frac{\pm 2}{-1} = \pm\varphi$.

Dans la Fig. 18 (0) soit l'origine ;

OC sera $= -1$; CB $= + \sqrt{-1}.2$; CB$' = - \sqrt{-1}.2$ les valeurs complexes sont marquées par:

$$\text{OB}, \text{OB}' = \sqrt{5}\uparrow \text{arc tang}\frac{\pm 2}{-1} = \sqrt{5}\uparrow\pm\varphi.$$

ainsi x = OC + CB = OB; x = OC + CB$'$ = OB$'$.

Pour prouver encore que ces racines sont en réalité les racines de l'équation, on a en prenant la racine

$$x = -1 + \sqrt{-1}.2.$$

$$x^2 = (-1 + \sqrt{-1}.2)^2 = -3 - \sqrt{-1}.4 = 5\uparrow 2\varphi.$$

$$2x = 2\{-1 + \sqrt{-1}.2\} = -2 + \sqrt{-1}.4 =$$

$$2\sqrt{5}\uparrow \text{arc tang}\,\frac{4}{-2}.$$

Dans la Fig.   on a :

$$-3 - \sqrt{-1}.4 = \text{OD} + \text{DE}\,;\ 5\uparrow 2\varphi = \text{OE}.$$

$$-2 + \sqrt{-1}.4 = \text{EF} + \text{FG}\,;\ 2\sqrt{5}\uparrow \text{arc tang}\,\frac{4}{-2} = \text{EG}\,;$$

$$+5 = \text{GO}.$$

De sorte que l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$, est représentée par la ligne OD + DE + EF + FG + GO = 0 ou encore par OE + EG + GO = 0.

Pour prouver encore que l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$, et les racines $x = -1 \pm \sqrt{-1}.2$ ne sont pas des *expressions insignifiantes*, il sera à propos de leur donner un sens concret.

Quelqu'un a fait une route exprimée par l'équation donnée, dans laquelle x désigne la vîtesse, le mouvement par heure. — On demande la vîtesse et la route parcourue ?

La solution et l'explication donnée prouvent la réalité des racines complexes et de l'équation dont elles sont tirées.

La question principale dans les équations du second degré c'est de savoir en quel sens elles doivent être prises ; si c'est en sens *absolu* on s'arrête, quand on voit que la solution ne peut donner des racines à valeur absolue ; si c'est en sens *complexe*, non seulement les racines négatives, mais encore toutes les racines complexes sont de vraies racines de l'équation, qui représentent des expressions dont on peut toujours donner la signification et montrer la réalité.

Quand l'équation n'est pas donnée mais tirée d'un problême on peut toujours savoir d'avance dans quel sens l'équation doit être prise et l'on s'arrête quand on est sûr que l'équation, en sens *absolu*, ne donnera de racine *absolu* ; quand c'est en sens *complexe* on cherche les racines et l'on tache de déterminer la signification concrète des racines. Dans le morceau suivant qui traitera la signification concrète des quantités imaginaires, il sera donné quelques idées sur ce point important.

L'auteur termine cequ'il a dit sur les équations du second degré avec les paroles de Duhamel : nous ne pensons pas qu'après les observations que nous avons faites il puisse rester à ce sujet la moindre obscurité sur les racines de ces équations — mais il ne comprend pas comment Duhamel a pu se servir de ces paroles.

Pourtant on peut le comprendre. — Duhamel regarde les quantités nég. isolées comme vide de sens, de même il en est des quantités imaginaires ; la base des imaginaires est : $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Il applique à ces quantités dans toutes les fonctions où elles se trouvent les règles des quantités réelles et pour le reste il ne se soucie du sens des résultats ; ces quantités sont vides de sens et les règles sont suivies machinalement.

Duhamel, III, page 393 etc.

Des Fonctions transcendantes de quantités imaginaires.

Des principes de la Théorie et des opinions de Duhamel tirées de son Oeuvre, il est clair que les idées sur ce sujet sont toutes divergentes.

L'auteur le juge à propos de compléter et d'expliquer encore les idées contenues dans la Théorie, pourqu'on soit en état de décider s'il est nécessaire de continuer toujours à considérer les quantités dites imaginaires sous le point de vue indiqué par Duhamel et d'autres dans toutes les Fonctions où elles se trouvent.

La base de ces Fonctions de quantités imaginaires est renfermée dans les Formules :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\text{Sin } x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

De ces formules on a derivé les suivantes :

$$e^{\sqrt{-1}.x} = 1 + \sqrt{-1}.x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{\sqrt{-1}.x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

$$e^{\sqrt{-1}.x} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x.$$

$$\sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}.x} - e^{-\sqrt{-1}.x}}{2\sqrt{-1}};\ \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}.x} + e^{-\sqrt{-1}.x}}{2}.$$

De $e^{\sqrt{-1}.x} = 1\,(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x) = 1 \uparrow x$, il est dérivé la valeur de $\sqrt{-1}.x$ et la signification de $\sqrt{-1}$ dans les exp.

L'exp. $\sqrt{-1}.x$ ne sert qu'à marquer la direction des unités dans la valeur absolue des puissances, auxquelles il est uni.

Dans la Théorie il est dit que x marquait les degrés de la direction, l'application du calcul prouve que x indique l'arc de la direction exprimé *en unités du rayon du cercle.*

Cauchy regarde la série de $e^{\sqrt{-1}.x}$ comme renfermant la *définition* de ces Fonct. expon.

Après avoir trouvé la signification de $\sqrt{-1}$, on pourra au contraire regarder les Fonct. $e^{\sqrt{-1}.x}$ comme donnant la *valeur* de ces séries.

Encore dans la Formule dite de Montucla et dans d'autres on trouve quelquefois l'exp. $\sqrt{-1}$, il sera à propos d'en prouver d'abord la valeur.

$$e^{\sqrt{-1}.x} = 1\,(\cos x + \sqrt{-1}.\ \sin x) = 1 \uparrow x$$

ainsi $e^{\sqrt{-1}} = 1\,(\cos 0 + \sqrt{-1}.\ \sin 0) = 1 \uparrow 0 = 1.$

$\sqrt{-1}$ n'étant qu'un *indice* non suivi de la grandeur de la direction, il en suit qu'il n'y a pas de direction, de sorte que les unités sont absolues ou si l'on veut pos.

L'application du calcul prouve la vérité de la conclusion.

Pour prouver que la Fonction $e^{\sqrt{-1}.x}$ prise dans le sens indiqué donne la valeur de cette série, on n'a qu'à donner à x des valeurs déterminées et trouver ainsi par le calcul la valeur de la série.

Soit $x = \pi$; on a: $e^{\sqrt{-1}.\pi} = 1\,(\cos \pi + \sqrt{-1}.\ \sin \pi) =$

$$1\,(-1 + \sqrt{-1}.\,0) = -1 = 1 \uparrow \pi.$$

En substituant la valeur de $\pi = 3{,}14159$ dans

$$e^{\sqrt{-1}.\pi} = 1 + \sqrt{-1}.\,\pi - \frac{\pi^2}{1.2} - \frac{\sqrt{-1}.\,\pi^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on trouvera par le calcul que la somme des termes avec le facteur $\sqrt{-1}$ est $= 0$; que la somme des autres $= -1$.

Donnant à x la valeur de $\frac{\pi}{2} = \frac{3{,}14159}{2}$, on a :

$$e^{\sqrt{-1}.\frac{\pi}{2}} = 1\,(\cos \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{-1}.\,\sin \tfrac{\pi}{2}) = 1\,(0 + \sqrt{-1}.\,1) =$$

$$\sqrt{-1} = 1 \uparrow \tfrac{\pi}{2}.$$

Par le calcul on trouvera que la somme des termes de la série, qui n'ont pas le facteur $\sqrt{-1}$ est $= 0$, et que la somme des autres est $= \sqrt{-1}.\,1$.

Pour prouver la conclusion sur $\sqrt{-1}$, on a :

$$e^{\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1}.\,0 - \frac{0}{1.2} - \frac{\sqrt{-1}.\,0}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\ \text{etc.} =$$

$$1 = +1$$

quand on regarde $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\,1$; on a :

$$e^{\sqrt{-1}} = 1\,(\cos 1 + \sqrt{-1}.\ \sin 1) = 1 \uparrow 1\ ;$$

$$\text{arc } 1 = \text{arc } 57^{0}17'44{,}8'';$$

$$e^{\sqrt{-1}.1} = 1 + \sqrt{-1} - \frac{1}{1.2} - \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3} - + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Par le calcul on trouve la valeur indiquée de la série.

En substituant pour $\sqrt{-1}.x$, $x + \sqrt{-1}.y$, on aura:

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = e^x\!\uparrow\! y.$$

La série sera $e^{x+\sqrt{-1}.y} =$

$$1 + x + \sqrt{-1}.y + \frac{(x+\sqrt{-1}.y)^2}{1.2} + \frac{(x+\sqrt{-1}.y)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Quand on voudrait trouver par le calcul, x et y étant des nombres déterminés, la valeur de $e^{x+\sqrt{-1}.y}$, le travail serait plus compliqué, mais non impossible; ce travail n'est pas nécessaire puisqu'on sait que $e^{x+\sqrt{-1}.y}$ est $= e^x\!\uparrow\! y$, et que la série de $e^{x+\sqrt{-1}.y}$ est le produit des séries de e^x et $e^{\sqrt{-1}.y}$.

Remarques. — Il ne sera donc pas hasardé de prétendre que la signification de $\sqrt{-1}$ n'est autre qu'un *indice*, marquant la direction; la signification trouvée, les exp. $\sqrt{-1}.x$ ne sont pas vides de sens; ils servent à indiquer la direction, comme il est dit, et par là il est prouvé qu'il est absurde de les regarder encore dans le sens des exp. primitifs, de dire $e^{\sqrt{-x}}$ signifie la quantité absolue e élevée à la puissance $\sqrt{-1}.x$.

La signification de $\sqrt{-1}$ dans ces Fonctions étant connue, il est absurde d'appliquer à ces exp. les règles des exp. primitifs.

$$(e^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e};\ (e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x} = e^{-x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Dans $(e^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}}$, $\sqrt{-1}$ n'est que $\uparrow =$ direction; qu'est-ce donc que $\uparrow . \uparrow$ ou direction $\times$ direction?

Certainement non $\uparrow . \uparrow = -1$.

Dans $(e^{\sqrt{-1}.x})^{\sqrt{-1}.x}$, $\sqrt{-1}.x$ n'est que $\uparrow x$; qu'est-ce que $\uparrow x . \uparrow x =$ direction $x \times$ direction x?

Certainement non $-x^2 = \frac{1}{x^2}$.

$\uparrow x \,.\, \uparrow x$ ne doit pas être confondu avec $1\uparrow x \,.\, 1\uparrow x$. $\uparrow x \,.\, \uparrow x$ est vide de sens, on pourrait tout au plus regarder le second facteur comme sans influence; dans ce cas $\uparrow x \,.\, \uparrow x$ sera $= \uparrow x$; $1\uparrow x \,.\, 1\uparrow x$ représente le produit d'unités complexes, le produit est $= 1\uparrow 2x$.

Par la substitution les formes $\sqrt{-1}\,.\,x$ sont introduites dans les Fonctions expon. et ont acquis une signification particulière, cependant dans les séries qui représentent la valeur de ces Fonctions ces formes conservent la signification primitive qu'elles ont dans les Fonctions ordinaires, comme il est prouvé par le calcul avec $e^{\sqrt{-1}\,.\,x} =$ la série; la signification et la valeur de ces formes dépend des Fonctions, où elles se trouvent.

Dans $e^{\sqrt{-1}\,.\,x} = e^0 \uparrow x$, $\sqrt{-1}\,.\,x = \text{arc}\, x = \uparrow x$; dans les Fonctions ordinaires $\sqrt{-1}\,.\,x = x\uparrow\frac{\pi}{2}$.

Par là il est clair qu'on ne doit appliquer aux mêmes formes, qui se trouvent en différentes Fonctions les mêmes règles.

$-x = \sqrt{-1}\,.\,x \,.\, \sqrt{-1}$; cependant il est fautif de mettre $e^{-x} = (e^{\sqrt{-1}\,.\,x})^{\sqrt{-1}}$ ou $= (e^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}\,.\,x}$.

$(e^{\sqrt{-1}\,.\,x})^{\sqrt{-1}} = (1\uparrow x)^{\sqrt{-1}} = (1\uparrow x)^{0+\sqrt{-1}\,.\,0} = 1\uparrow 0 = 1$.

$(e^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}\,.\,x} = (e^{0+\sqrt{-1}\,.\,0})^{\sqrt{-1}\,.\,x} = 1^{\sqrt{-1}\,.\,x} = 1\uparrow x$.

$e^{\sqrt{-1}\,(\sqrt{-1}\,.\,x)} = e^{0+\sqrt{-1}\,(\sqrt{-1}\,.\,x)} = 1\uparrow\sqrt{-1}\,.\,x =$

$$1\,(\cos\sqrt{-1}\,.\,x + \sqrt{-1}\,.\,\sin\sqrt{-1}\,.\,x) = 1.$$

De ces exemples on voit encore que:

$$(e^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}\,.\,x} \text{ n'est pas } = (e^{\sqrt{-1}\,.\,x})^{\sqrt{-1}}.$$

Par l'application des règles ordinaires à ces exp. imaginaires on obtient des absurdités ou du moins des expressions vides de sens.

$$\text{Cos}\,(\sqrt{-1}\,.\,x) = \frac{e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}\,.\,x)} + e^{\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}\,.\,x)}}{2} =$$

$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$; dans $e^{\sqrt{-1}(\sqrt{-1}\,.\,x)}$, $\sqrt{-1}\,(\sqrt{-1}\,.\,x)$ est $=$

$$\uparrow(\sqrt{-1}\,.\,x) \text{ non } = -x.$$

Dans la Théorie il est prouvé que $\sqrt{-1}.x$ dans le sens de arc du cercle est véritablement imaginaire.

Un autre point important c'est de prouver ou du moins de donner des raisons non arbitraires, non sans fond, que les exp. $\sqrt{-1}.x$ sont indépendants de la valeur de e, et que $e^{\sqrt{-1}.x} = a^{\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x$.

Cette opinion est en contradiction avec celle des mathématiciens, qui tous sont d'opinion, qu'on doit suivre le principe renfermé en $a^{\sqrt{-1}.x} = e^{\sqrt{-1}.xL.a.}$.

L'exp. $\sqrt{-1}.x = 0 + \sqrt{-1}.x = 0 + \uparrow x$.

$-1 = 1\uparrow\pi = e^0\uparrow\pi = e^{0+\sqrt{-1}.\pi} = e^{\sqrt{-1}.\pi}$.

$-1 = 1\uparrow\pi = a^0\uparrow\pi$ pourquoi non $= a^{0+\sqrt{-1}.\pi} = a^{\sqrt{-1}.\pi}$?

La seule raison que les mathématciens peuvent donner pour leur opinion c'est que l'exp. $\sqrt{-1}.x$ est entré dans les Fonctions exp. par $e^{\sqrt{-1}.x}$.

Pourquoi tiennent-ils à cette base absolue e? Quand ils sauront que ces exp. ne sont pas vides de sens, ne sont pas imaginaires; quand ils sauront que $\sqrt{-1}$ n'est qu'un *indice* $= \uparrow$, continueront-ils de tenir encore à l'opinion que ces exposants dépendent de la base de la même manière que les exposants primitifs, absolus?

Les bases a, e sont des nombres *absolus*, on demande avec raison, quelle influence ces nombres *absolus* peuvent avoir sur la direction des nombres *complexes* dont ils doivent représenter la valeur absolue en puissances?

Soit donnée la quantité absolue A; qu'on veut transformer en puissances de a et de e, on aura $A = a^x = e^y$.

Quand cette quantité n'était pas absolue, mais complexe $= -A = A\uparrow\pi$, il serait impossible d'en trouver la puissance pour la base a ou e.

Par la Fonction $e^{\sqrt{-1}.x} = e^0 \uparrow x = 1 \uparrow x$ on a le moyen indiqué par l'analyse de marquer dans les puissances par le signe $\sqrt{-1}$ suivi de la grandeur de l'arc, la direction des *unités* renfermées dans le nombre complexe; pourquoi l'emploi de ce signe doit être restreint au nombre *absolu* e, qui comme tout autre nombre absolu ne peut avoir de l'influence sur la direction, surtout encore puisque l'exposant $\sqrt{-1}.x = 0 + \sqrt{-1}.x$ ne se rapporte par sa valeur de 0 dans le sens des exposants primitifs qu'à l'unité ?

La valeur *absolue* de $e^{\sqrt{-1}.x} = a^{\sqrt{-1}.x} = 1$.

A étant $= a^x = e^y$, on aura $-A = e^{y+\sqrt{-1}.\pi}$ parceque chaque unité de $-A$ est $= 1\uparrow\pi$ et par conséquent $-A = e^{y+\sqrt{-1}.\pi} = e^y\uparrow\pi$; pourquoi $-A = e^y\uparrow\pi = a^x\uparrow\pi$ ne serait pas $= a^{x+\sqrt{-1}.\pi}$?

Tout autre il en serait quand les bases a, e étairent des nombres complexes, dans ce cas on n'aurait pas $-A = e^{y+\sqrt{-1}.\pi} = a^{+\sqrt{-1}.\pi}$.

Soient les bases complexes $a\uparrow\frac{1}{2}$, $e\uparrow\frac{1}{3}$, et qu'on demande les puissances pour ces bases de $A\uparrow 3$.

Supposé $A = a^6 = e^8$, on aurait:

$A\uparrow 3 = (a\uparrow\frac{1}{2})^6 = (a^{1+\sqrt{-1}.\frac{1}{2}})^6 = a^{6+\sqrt{-1}.3} = a^6\uparrow 3.$

mais puisque $(e\uparrow\frac{1}{3})^8 = e^8\uparrow\frac{8}{3}$ n'est pas $= A\uparrow 3$, on aura pour compléter la direction $\uparrow 3$:

$$A\uparrow 3 = (e\uparrow\tfrac{1}{3})^{8+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}} = (e^{1+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}})^{8+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}} =$$
$$(e^{1+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}})^8 . (e^{1+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}})^{\sqrt{-1}.\frac{1}{3}} =$$
$$e^{8+\sqrt{-1}.\frac{8}{3}} . (e^{1+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}})^{0+\sqrt{-1}.\frac{1}{3}} =$$
$$e^8\uparrow\tfrac{8}{3} . 1\uparrow\tfrac{1}{3} = e^8\uparrow\tfrac{9}{3} = A\uparrow 3.$$

Ces opinions mènent aux distinctions suivantes:

$$(e^2)^{\sqrt{-1}.x} = (e^2)^{0+\sqrt{-1}.x} = 1\uparrow x;$$
$$(e^{\sqrt{-1}.x})^2 = (1\uparrow x)^2 \qquad = 1\uparrow 2x;$$

$$e^{2 + \sqrt{-1}.x} = e^2 \uparrow x\,;$$

$$e^{2 + \sqrt{-1}.x.} = (e^{1 + \sqrt{-1}.\frac{x}{2}})^2 = (e \uparrow \tfrac{x}{2})^2 = e^2 \uparrow x.$$

Comment ces opinions seront-elles reçues ?

La Théorie et ce qui précède renferme le fond, les raisons de ces principes; on demandera : quel sera le profit, quelle sera l'influence de ces principes ?

D'abord on n'aura plus à faire avec des expressions *vides de sens*, *impossibles*, *imaginaires ;* — connaissant ces quantités, ces Fonctions on saura si les opérations appliquées à ces grandeurs sont exactes ; on saura que ce ne sont plus des simulacres d'opérations; que les résultats ne sont pas *vides de sens ;* on saura cequ'on fait ; on pourra à tout moment vérifier les formules non bizarres qu'on obtient.

La connaissance de ces Fonctions permet de faire des distinctions qu'on ne pouvait faire au-paravant ; cequi suit prouvera encore quelle est la signification et la valeur des formules compliquées, qu'on a obtenues en opérant machinalement ; combien ces formules bizarres peuvent être simplifiées pour avoir leur sens véritable ; combien elles doivent être transformées pour bannir les absurdités ou les superfluités qu'elles renferment.

Il ne sera nécessaire de transcrire ceque Duhamel dit sur ce même sujet ; les opinions de Duhamel sont celles qu'on rencontre presque ou bien généralement.

Les principes donnés contiennent la critique, la réfutation des principes généralement suivis, ou simplement *les objections qu'on peut faire à ces principes.*

Sur la généralisation. Duhamel donne pour raison de l'application des règles des quantités réelles à toutes les quantités, les avantages de la généralisation.

Qu'est-ceque la généralisation? Appliquer des règles générales n'est pas *généraliser*; la généralisation implique donc quelque chose d'arbitraire, c'est appliquer des règles dans des cas où l'on ne sait pas si les choses sont analogues.

Les suites ne doivent point étonner, savoir qu'on a appliqué des règles à des quantités de nature toute différente de celles qui sont soumises à ces règles, et que les résultats de cette généralisation sont vides de sens contradictoires ou absurdes.

Par l'analyse on a essayé de trouver la signification et la valeur des nombres complexes dans les différentes Fonctions; par cette analyse on a trouvé quelles quantités complexes sont de la même nature, par conséquent que les règles connues sont applicables à toutes ces quantités analogues, que ces règles sont générales dans ces cas; en les appliquant on ne généralise point, on ne fait qu'agir conséquemment.

Les principes de la Théorie, loin de priver de ces avantages, servent au contraire à les assurer, et à garanter contre des applications inexactes.

L'application d'après les principes de la Théorie n'est ni machinale, ni arbitraire, ni conventionnelle.

Il est prouvé que les quantités complexes dans les Fonctions ordinaires sont *toutes de même nature*, ainsi les règles des quantités pos, et nég. trouvent aussi leur application aux quantités dites imaginaires sans qu'on ait besoin de prouver premièrement la justesse de ces règles dans ces cas analogues.

L'analyse a trouvé le sens des exp. imaginaires et par là il est prouvé que ces exp. sont de nature toute différente et que par là les règles des exposants primitifs ou on nombres absolus ne sont pas applicables à ces exp. non analogues.

Après avoir trouvé le sens de ces exp. imaginaires et les règles qu'ils suivent, on ne généralise pas en appliquant ces règles aux cas analogues, ces règles sont générales.

De même il en est avec les Fonctions goniom. et cyclom. en éloignant donc la généralisation, on ne se prive pas des avantages ; on ne fait que se garantir des inexactitudes.

L'analyse des exemples, des Formules qui se trouvent dans *Duhamel* prouvera la valeur de cette assertion.

Duhamel, III, page 396 etc.

Exponentielles et Logarithmes imaginaires.

L'application des principes de la Théorie aux exemples qui se trouvent dans *Duh.*, pourra servir de parallèle aux démonstrations dans ces §§ suivants.

§ 310. $e^{a+\sqrt{-1}.b} \,.\, e^{a'+\sqrt{-1}.b'} = e^{a}\uparrow b \,.\, e^{a'}\uparrow b' =$

$$e^{a+a'}\uparrow b.b' = e^{a+a'+\sqrt{-1}.b.b'}.$$

§ 313. **Expressions des exponentielles imaginaires etc. Formules générales des Log. de toutes les quantités réelles ou imaginaires.**

Au lieu de transcrire Duhamel, il suffira de donner cequi est nécessaire pour servir de parallèle à l'application de la Théorie.

$$e^{x+\sqrt{-1}.y} = e^{x}.e^{\sqrt{-1}.y} = e^{x}(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)$$

$$\text{pour } x = 0 \,;\, e^{\sqrt{-1}.y} = 1\,(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)$$

$$\sqrt{-1}.y = 0 + \uparrow y = L\,1\,(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = L.1\uparrow y.$$

Pour $y = 2n\pi$; $\cos y = 1$; $\sin y = 0$.

$$e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1 \;;\; \sqrt{-1}.2n\pi = L.1.$$

La Théorie : $e^{\sqrt{-1}.2n\pi} = e^{0+\sqrt{-1}.2n\pi} = e^{0}\uparrow 2n\pi =$

$$e^{0}\uparrow_{0} = 1.$$

$$\text{Log} + 1 = 0 + \uparrow 2n\pi = 0 + \uparrow 0.$$

La signification et la valeur des directions est expliquée et prouvée.

De même $L. - 1 = \sqrt{-1}\,(2n+1)\pi$ signifiera :

$$L. - 1 = 0 + \uparrow(2n+1)\pi = 0 + \uparrow\pi.$$

---

§ 314. **Formule de tous les Log. d'une expression imaginaire** $a + \sqrt{-1}.b$.

Duh. obtient :

$$L.(a + \sqrt{-1}.b) = L.\rho + (\theta + 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

Cette formule est obtenue par un calcul bien long.

La Théorie: $L.(a \pm \sqrt{-1}.b) =$

$L.\sqrt{(a^2 + b^2)}\uparrow \text{arc tang}\,\frac{\pm b}{a} = L.\rho\uparrow\pm\theta$; la direction *indirecte* $(\pm\theta + 2n\pi)$ n'a que la valeur *directe, vraie* de $\uparrow\pm\theta$.

§ 315. Il serait trop long de transcrire tout le calcul de Duh. pour avoir le Log. de $(a + \sqrt{-1}.b)^{m+\sqrt{-1}.n}$, il suffira de n'écrire que le résultat.

$$L.(a + \sqrt{-1}.\,b)^{m+\sqrt{-1}.n} =$$

$$m\,L.\rho - n(\theta + 2k\pi) + \sqrt{-1}\,\{n\,L.\rho + m(\theta + 2k\pi) + 2k\pi\}.$$

La Théorie: $a + \sqrt{-1}.b = \sqrt{(a^2+b^2)}\uparrow \text{arc tang}\,\frac{b}{a} = \rho\uparrow\theta$.

$a + \sqrt{-1}.\,b)^{m+\sqrt{-1}.n} = (\rho\uparrow\theta)^{m+\sqrt{-1}.n} =$

$(\rho\uparrow\theta)^{m}.(\rho\uparrow\theta)^{\sqrt{-1}.n} = \rho^{m}\uparrow m\theta.\,1\uparrow n = \rho^{m}\uparrow(m\theta.\,n)$.

$L.(a + \sqrt{-1}.\,b)^{m+\sqrt{-1}.n} = m\,L.\rho + \uparrow(m\theta.\,n)$.

$(a + \sqrt{-1}.\,b)^{m+\sqrt{-1}.n} = e^{m\,L.\rho + \sqrt{-1}\,(m\theta.\,n)}$.

De cette expression Duh. parvient au cas particulier, la Formule de Montucla, par la supposition de

$$a = 0,\ b = 1,\ m = 0,\ n = 1.$$

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 2k\pi\sqrt{-1}},$$

et $L.(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = -(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 2k\pi\sqrt{-1}.$

La Théorie: Par la supposition de $n = 1$, on a:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}.1} = 1\uparrow\tfrac{\pi}{2})^{\sqrt{-1}.1} =$$
$$(1\uparrow\tfrac{\pi}{2})^{0+\sqrt{-1}.1} = 1\uparrow 1.$$

Log. $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = L.1\uparrow 1 = L.1 + \uparrow 1 = 0 + \uparrow 1.$

Autrement on a:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (1\uparrow\tfrac{\pi}{2})^{\sqrt{-1}} = 1\uparrow 0 = 1.$$

$$\text{Log.}\ (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = L.1\uparrow 0 = 0 + \uparrow 0.$$

---

§ 316. *Développement en Série du Log. d'une quantité imaginaire.*

Duhamel: »Nous avons vu que toute expression imaginaire $(a + \sqrt{-1}.b)$ a un Log. de même forme.''

La Théorie: De même forme *quant à l'extérieur.*

Soit $a + \sqrt{-1}.b = e^{m+\sqrt{-1}.n}$,

on a: $L.(a + \sqrt{-1}.b) = m + \sqrt{-1}.n = m + \uparrow n.$ Tout autre il en est, quand on observe la valeur, la signification des termes de ces formes.

Dans $a + \sqrt{-1}.b$, a et b ne sont que des nombres *abstraits*, dans $m + \sqrt{-1}.n$, m est un nombre *abstrait*, n au contraire est un nombre *concret.*

Dans $a + \sqrt{-1}.b = e^{m+\sqrt{-1}.n} = e^m\uparrow n =$
$$e^m(\cos n + \sqrt{-1}.\sin n),$$
on voit que n indique la grandeur de l'arc en unités du rayon du cercle; ce nombre *concret* n'ajoute rien à la

valeur du Log, qui n'est autre qu'un nombre *abstrait.*

Il est prouvé que $e^{m + \sqrt{-1}.n}$ n'est que $e^m . e^{\sqrt{-1}.n} = e^m . e^{0 + \sqrt{-1}.n}$, cequi montre que par rapport au Log. $\sqrt{-1}.n$ n'a que la valeur de Zéro.

Quand on connait le sens des quantités imaginaires et des formes complexes dans les Fonctions ordinaires, on sait que ces quantités sont de même nature que les autres quantités complexes *dites réelles* et que par conséquent il est superflu d'en vouloir prouver encore le sens par le développement en séries.

---

§ 317. *Duhamel :* »Nous pouvons déduire de la Forme $L.(1 + \sqrt{-1}.x) =$ *la série*, un développement important celui d'un arc au moyen de sa tangente."

Cette déduction importante a été faite sans les quantités imaginaires, pourquoi donc vanter cette déduction à l'aide de quantités imaginaires qu'on taxe comme telles, mais qui ne le sont pas.

Pour celui qui connait la valeur des quantités qui se présentent dans ces déductions, l'analyse algébrique montre des beautés, des perfections, qui portent à l'admiration de cette science, à *une admiration non aveugle.*

Pour le reste tout cequi se trouve dans ce § et le suivant pour prouver les formules suivantes est superflu, parceque, connaissant les quantités qu'on substitue, on sait qu'on ne substitue que des quantités de même espèce et qu'ainsi l'analogie suffit pour être sûr de l'exactitude.

---

§ Quand α tend vers Zéro, on a : Lim. $\frac{L.(1 + \alpha)}{\alpha} = 1$ de même il en est avec :

$$\frac{L.(1+\sqrt{-1}.x)}{\sqrt{-1}.x} \;;\; \frac{L.(1+a+\sqrt{-1}.b)}{a+\sqrt{-1}.b} \text{ etc.,}$$

cequi est sans contredit, sans démonstration, puisque par la connaissance des quantités ces choses sont analogues.

La conclusion que Duhamel fait suivre à cette partie demande une analyse particulière.

§ 320, page 412. — »Il serait superflu de multiplier »davantage les exemples sur le calcul des exponentielles »et des log. des quantités imaginaires."

»Les contradictions que l'on pourra quelquefois rencon- »trer ne seront qu'apparentes et tiendront à ceque l'on »aura oublié qu'une quantité quelconque réelle ou imagi- »naire à une infinité de Log. — Il n'y aura donc pas »lieu de s'étonner si deux calculs conduisent à des expres- »sions différentes pour le Log. d'une même quantité; il »suffira, pourqu'il n'y ait pas contradiction, que ces ex- »pressions différentes soient comprises dans la formule »générale des Log. d'une même quantité."

Ce passage a un sens double. Il est vrai, quand on entend par contradictions apparentes des contradictions qui ne sont pas des contradictions; et quand on entend de même par une infinité de Log., des Log. qui ne sont autre qu'en apparence, qui réellement ne sont qu'*un*.

Dans ce cas seul le passage est vrai et tous les Log. différents en apparence, ne diffèrent pas réellement et sont compris dans la formule générale des Log.

Tout autre il en est quand on entend par une infinité de Log., une infinité de Log., qui diffèrent réellement les uns des autres; cequi n'est pas, comme il est prouvé de différentes manières.

Tout autre il en est, quand on entend par rapport à l'autre idée, qu'il n'y aura pas lieu de s'étonner que le calcul du Log. d'un nombre ne conduit pas d'abord à celui, qu'on obtient par un autre calcul, puisque le nombre infini de Log. différents, renferme tous les deux.

Cequi suit prouve que la dernière opinion est celle de Duhamel.

»Ainsi le Log. d'une puissance n'est pas nécessairement »le produit du Log. de la quantité par le degré de la »puissance, vu qu'on peut prendre des valeurs inégales »pour les Log. des facteurs égaux.

»Si par ex. on considère un nombre positif (a), et qu'on »désigne par $(L. a)$ son Log réel, le Log. de (a^2) ou de »(aa) n'est pas nécessairement $(2\ L. a)$ parceque les Log. »des deux facteurs sont $L. a \pm 2n\pi \sqrt{-1}$ pour le pre- »mier, et $L. a \pm 2n'\pi \sqrt{-1}$ pour le second, les nombres »entiers n et n' pouvant être différents."

»Le Log. du produit (a^2) est donc d'après la règle »demontrée $2\ L. a \pm 2(n + n')\ \pi \sqrt{-1}$ et $2\ l. a$ n'est »qu'une valeur particulière."

»Voici maintenant une des difficultés qu'on a élevées sur »l'emploi des Log. des quantités qui ne sont pas des nom- »bres réels et positifs. — On a dit (a^2) est le carré de »$(-a)$ aussi bien que de $(+a)$; son Log. est donc aussi »bien $2\ L. (-a)$ que $(2\ L. a)$, donc $L. (-a) = (L. a)$, »cequi est faux."

»Mais Euler a très bien levé cette difficulté en faisant »remarquer que le Log. de (a^2) n'est nécessairement ni »$(2\ L. a)$ ni $(2\ L. -a)$ et que par conséquent on ne peut »conclure $(L. a) = L. (-a)$ etc."

Reponse. — *Le Log. d'une puissance est nécessairement le produit du Log. de la quantité par le degré de la puissance.*

$$L. a^2 = 2\ L. a.$$

$$\text{Soit } L. a = L. a + \sqrt{-1}.\ 2n\pi$$

$$\text{et} \quad L.a = L.a + \sqrt{-1}.2n'\pi.$$

$$\text{On a : } 2L.a = 2L.a + \sqrt{-1}.2(n+n')\pi.$$

Quelle que soit la valeur de n et de n' toujours $2(n+n')\pi$ sera égal à $(2k\pi)$, quand on prend $k=(n+n')$; par conséquent on aura :

$$2L.a = 2L.a + \sqrt{-1}\ 2k\pi = 2L.a + \sqrt{-1}.0 = 2L.a.$$

La signification de la direction *indirecte* $2k\pi$ n'est autre que la direction *positive* $= \uparrow 0 = +$.

Cette difficulté n'est que la suite des notions inexactes qu'on donne des Log., suites toutes naturelles de ne pas avoir compris la signification des directions *directes* et *indirectes*, de ne pas avoir compris le vrai sens des expressions imaginaires et la valeur des signes, qui y entrent, et par là le vrai sens des Log. comme exposants, dans les formes, qui expriment les valeurs complexes des quantités.

On oublie toujours que les véritables Log. ne sont que des nombres abstraits absolus simplement complexes dans le sens de positif et de négatif; se rapportant aux opérations et *que les Log. n'influent en rien sur les directions.*

a^2 est le carré de $(-a)$ et de $(+a)$, son Log. est donc aussi bien $2L.(-a)$ que $2L.a$ ou $2L.(+a)$.

Il est faux que $L.(-a)$ est $= L.(+a)$ ou $L.a$.

Démonstration. $L.(-a) = L.a\uparrow\pi = L.a + \uparrow\pi$.

$L.(-a)^2 = L.(a\uparrow\pi)^2 = L.a^2\uparrow 2\pi = 2L.(-a) = 2L.(a\uparrow\pi) = 2L.a + \uparrow 2\pi = 2L.a + \uparrow 0 = 2L.a.$

$$L.(+a) = L.(a\uparrow 0) = L.a + \uparrow 0.$$

$$L.(+a)^2 = L.(a\uparrow 0)^2 = L.a^2\uparrow 0 = 2L.a + \uparrow 0 = 2L.a.$$

Euler eût levé la difficulté, s'il avait su dire : le Log. de a^2 est nécessairement $2L.a$ et $2L.-a$, car :

$$L.a^2 = 2L.a = 2L.-a \text{; mais}$$

$$L.a = L.a + \uparrow 0\text{; } L.-a = L.a + \uparrow\pi.$$

En réponse à toutes ces difficultés apparentes il suffira de rappeler, que l'on peut parvenir au même lieu par des routes différentes; qu'on peut avoir le même résultat obtenu ou dérivé de différentes choses.

Il sera dit assez pour faire comprendre les principes de la Théorie sur ce sujet.

La conclusion est: quand on ne comprend pas les choses, on ne comprend pas les résultats qui en dérivent; on ne comprend pas le véritable sens des conclusions qu'on en tire.

---

§ 322. **Expression des sinus et cosinus au moyen d'exponentielles.**

Duhamel prouve dans *la Première Partie des Méthodes etc.* § 15, *page* 26, que du *faux* on peut quelquefois déduire le *vrai.*

Les expressions des sinus et cosinus au moyen d'exponentielles, prouvent qu'en appliquant aux quantités inconnues les règles des quantités connues, on peut quelquefois du *vraiment* imaginaire déduire le réel:

$$\cos(\sqrt{-1}.\,x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2};\ \sin(\sqrt{-1}.\,x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2\sqrt{-1}};$$

mais ce résultat bienque réel en apparence, est faux puisque la déduction est inexacte; le véritable imaginaire ne produit pas la réalité.

Et pour en finir avec les Méthodes; le résultat des études attentives sur le sujet des imaginaires diffère beaucoup de ceque Duhamel s'imagine devoir en être le résultat.

Le résultat n'est point: Méthodes III, § 291, »tout cela est évident et incontestable''; on se demande avec raison: à quoi peuvent servir ces fictions de calculs, qui ne sont pour la plupart qu'un amusement bizarre, qu'un travail imaginaire, n'offrant de remarquable que la complexité du résultat obtenu d'une multitude de matériaux combinés régulièrement sur une base arbitraire ?

Y a-t-il autre chose que dans ces jeux d'enfants, où avec un grand nombre de pièces de toutes formes, on parvient à construire des figures, qui surprennent par leur élégance (?) et leur régularité (?) ?

A ces questions qu'il était naturel de se faire, l'auteur a répondu d'après les principes de sa Théorie.

Sur la signification concrète des quantités imaginaires et des formes complexes.

L'Histoire des mathématiques apprend que bien longtemps dans la solution des problêmes les résultats en nombres *fractionnaires* on en *négatifs* étaient regardés en général comme l'indice de l'impossibilité de la demande.

Maintenant encore les résultats en nombres *imaginaires* ou en *formes complexes* sont considérés comme la marque que le problême est imaginaire, impossible.

Dans la Théorie non seulement la signification et la valeur de ces quantités est determinée en sens abstrait, mais encore l'exemple de $f\sqrt[8]{-1}.100$ et le résultat complexe d'une équation du second degré ont montré que ces expressions ne sont pas imaginaires, au contraire qu'elles renferment en sens concret des valeurs réelles.

La Théorie a prouvé que toutes les quantités complexes peuvent être réduites en nombres imaginaires ou en formes complexes, il suffira donc de voir s'il n'est possible de trouver, de déterminer la valeur concrète de ces quantités, taxées encore comme vides de sens, comme indices de l'impossibilité des problêmes dont elles sont les résultats.

Dans la Mécanique les formes sont pour la plupart des grandeurs complexes renfermant les deux éléments qui se rapportent aux deux facteurs dans les nombres complexes, savoir la *force absolue* et *la direction de la force.*

Chaque force complexe peut être réduite en deux forces qu'on peut exprimer par une forme complexe.

Fig. 12. Soit Oe la direction positive; OB, OC, OD, OE, des lignes complexes, représentant des forces agissant sur le corps O.

Chaque force peut être réduite dans les deux forces représentées dan la Figure.

$$OB = Ob + \sqrt{-1}.\, bB \;;\; OC = Oc + \sqrt{-1}.\, cC\,;$$
$$OD = Od + \sqrt{-1}.\, dB \;;\; OE = Oe + \sqrt{-1}.\, eE.$$

Il est clair de quelle manière on peut trouver la résultante de ces forces; quand on n'observe que la direction positive, $Ob + Oc + Od + Oe$ sera la résultante positive des forces données.

La résultante totale sera:

$$(Ob + Oc + Od + Oe) + \sqrt{-1}\ (bB + cC + dD + eE) =$$
$$\sqrt{\left\{(Ob + Oc + Od + Oe)^2 + (bB + cC + dD + eE)^2\right\}}$$
$$\uparrow \text{arc tang}\ \frac{bB + cC + dD + eE}{Ob + Oc + Od + Oc}.$$

Les forces $\sqrt{-1}.\, bB$, $\sqrt{-1}.\, cC$ etc. sont-elles réellement imaginaires, sont-elles vides de sens, sont-elles *absolument* nulles?

Elles ne sont nulles que dans le cas que la direction pos. est la seule qui est observée; dans le cas que le corps O ne peut être remué que dans la direction pos.

Dans ce cas ces forces sont sans effet, mais non vides de sens, non imaginaires.

La construction de la résultante complexe de ces forces est toute claire; dans le cas que la direction pos. n'est pas la seule qui est observée, la grandeur et la direction de cette force totale prouve que les forces imaginaires ne sont pas sans réalité.

Ainsi les grandeurs imaginaires ne sont pas vides de sens, ne sont pas absolument imaginaires, nulles, ce n'est que les circonstances ou les limitations particulières qui les rendent *relativement* nulles.

Une autre question sur les grandeurs complexes c'est: une grandeur complexe est égale à deux autres grandeurs exprimées dans une forme complexe, comment cette égalité doit être entendue?

La grandeur complexe prise en sens *absolu* est-elle égale à la somme des deux autres grandeurs prises également en sens *absolu*?

La grandeur complexe renferme implicitement non explicitement les deux autres grandeurs; Fig. 12.

OB renferme implicitement Ob et bB, cequi est montré par la réduction et ainsi avec toutes ces autres grandeurs.

Par la distance d'un lieu à un autre on entend dans les mathématiques la longueur de la ligne droite.

Pour parvenir d'un lieu à un autre on ne peut pas toujours suivre la ligne droite.

Quand la distance de deux places est A et le temps employé pour y parvenir B, la vitesse absolue $\frac{A}{B}$ ne suffira pas toujours pour atteindre le but.

Supposé la vitesse exprimée par $a + \sqrt{-1}.\, b$, la vitesse absolue sera $a + b$, mais la longueur $\sqrt{-1}.b$ sera pour ainsi dire un chemin perdu, puisque la vitesse $a + b$ n'aura servi qu'à l'approcher de la longueur a du but, ainsi $a = \frac{A}{B}$.

Si la vitesse a été $R\uparrow\varphi$, R marquera la vitesse absolue, $\uparrow\varphi$ indiquera la direction avec la distance positive, la ligne directe au but.

Fig. 13. $R\uparrow\varphi = a + \sqrt{-1}.b$; $\sqrt{-1}.b$ sera nul par rapport à la distance positive, la grandeur imaginaire est nulle *relativement* mais non *absolument*.

Soit la distance directe, positive A; la vitesse complexe $R\uparrow\varphi$; dans combien de temps il arrivera?

$R\uparrow\varphi = a + \sqrt{-1}.b$, ainsi le temps sera $\frac{A}{a}$.

Quelqu'un se rend à la même place avec la vitesse complexe R; il emploie m minutes; par quelle forme sa vitesse sera exprimée?

On aura $R\uparrow x = \frac{A}{m} = Or$; Fig. 13.

Ainsi $\sqrt{(R^2 - Or^2)} = rS$ sera la vitesse perdue, et la direction de R sera $\uparrow$arc tang $\frac{rS}{Or}$.

Un autre se rend au même lieu avec la vitesse $x\uparrow\pi$, quand il y parviendra?

$\frac{A}{x\uparrow\pi} = \frac{A}{-x} =$ Un temps nég. dont la signification est connue.

Quand la vitesse était $x\uparrow\frac{\pi}{2}$?

$\frac{A}{x\uparrow\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{\sqrt{-1}.x} = \frac{\sqrt{-1}.A}{-x} = \sqrt{-1}.\frac{A}{x}$; on ne connait qu'un temps pos. et nég., ainsi ce temps indiqué est véritablement imaginaire et la chose est impossible.

Les figures qui representeraient ces problêmes, montreraient le sens de ces résultats.

La Fig. 17 représente un autre exemple.

La distance OA $= 10$; la vitesse OC $= 4$; le temps $= 5$.

L'équation serait $10 = 4.5$; prenant la vitesse en sens complexe $4 \uparrow x$, l'équation sera $5.4 \uparrow x = 10$; $\uparrow x = \frac{10}{4.5} = \frac{1}{2}$.

$$\uparrow x = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x.$$

Ainsi on a $\cos x + \sqrt{-1}.\sin x = \frac{1}{2}$; cette équation renferme les suivantes :

$$\cos x = \tfrac{1}{2}. \qquad \sqrt{-1}.\sin x = 0.$$

Ainsi $\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^0$.

On a mis $\sqrt{-1}.\sin x = 0$; la raison en est que $\frac{1}{2}$ doit être consideré comme $\frac{1}{2} + \sqrt{-1}.0$.

$OB \uparrow 60^0$ marque la route complexe, dont la valeur en route directe positive n'est que $OA \uparrow 0$.

Problême. — On demande la longueur et la largeur d'un rectangle dont la circonférence est 72 mêtres ; quand on ajoute 4 mêtres à la longueur et diminue la largeur de 4 le contenu sera 340 mêtres ?

L'équation sera $(x - 4)(40 - x) = 340$

$$\text{et} \quad x = 22 \pm \sqrt{-1}.4.$$

Le problême est-il impossible, parceque le résultat est en forme complexe ; x représente une ligne ; une ligne en forme complexe est-elle imaginaire, impossible ?

Le problême est impossible non parceque le résultat a une forme complexe, mais parceque dans le cas énoncé le résultat, pourque le problême fût possible, devrait être un nombre absolu.

L'équation $(x - 4)(40 - x) = 340$ n'est pas une équation à quantités complexes, mais à quantités absolues, les signes — ne marquent pas des quantités nég. mais des opérations.

Problême. — Deux couriers se rendent au même instant de A à B; la vitesse de l'un est $\frac{1}{4}$ lieue plus grande que celle de l'autre par heure ; la distance de A à B est $18\frac{1}{8}$ Lieues, encore il est dit que le second arrive à B 2 heures avant le premier.

On demande la vitesse et le temps ?

Soit la vitesse de l'un x; l'équation sera :

$$\frac{18\frac{1}{8}}{x+\frac{1}{4}} = \frac{18\frac{1}{8}}{x} + 2.$$

Supposé qu'on n'ait pas remarqué l'absurdité de la demande, on trouvera pour l'inconnu :

$$x = -\tfrac{1}{8} + \sqrt{-1}.\tfrac{3}{2}\ ;\ x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \sqrt{-1}.\tfrac{3}{2}.$$

Ces formes étant complexes ne décident pas comme telles l'impossibilité de la question.

Pour avoir le temps, on obtient :

$$\frac{18\frac{1}{8}}{-\frac{1}{8}+\sqrt{-1}.\frac{3}{2}} = -1 - \sqrt{-1}.12;$$

$$\frac{18\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\sqrt{-1}.\frac{3}{2}} = 1 - \sqrt{-1}.12.$$

La différence de ces temps est de 2 heures ; mais les formes complexes pour indiquer le temps montrent l'impossibilité, puisque le temps ne peut être que pos et nég., tout autre temps est impossible, imaginaire.

Les nombres complexes et les formes complexes ne renferment pas comme par exception un sens réel, quand ils se rapportent aux grandeurs concrètes, citées dans les exemples précédents ; dans beaucoup d'autres cas ces quantités ont un sens réel quand elles désignent des grandeurs de tout autre espèce.

La possession de quelqu'un consiste en effets publics ; supposé qu'il possède :

f 10000 à 90 pC. ; f 5000 à 80 pC. ; f 6000 à 66 pC.

Cette possession pourra être exprimée de la manière suivante :

$$10000\,(90 + \sqrt{-1}.\,10);\ 5000\,(80 + \sqrt{-1}.\,20);$$
$$6000\,(66 + \sqrt{-1}.\,34).$$

La somme des positives donne sa possession présente actuelle ; la somme des imaginaires représente une valeur relative qui actuellement n'a point de valeur.

Quand on demande si ces grandeurs imaginaires ont la valeur *absolue* de Zéro ; la réponse sera que cette valeur relative se rapporte aux circonstances et pour le présent est nulle, mais qu'elle peut changer avec les circonstances et le temps.

Les possessions de deux personnes dont l'une possède $90 + \sqrt{-1}.\,10$ et l'autre 90 ne sont donc pas absolument identiques.

Encore la possession de quelqu'un étant $a + \sqrt{-1}.\,b$, a signifiera sa possession réelle, tandis que $\sqrt{-1}.\,b$ pourra être regardé comme une somme qu'on lui a prêtée pour un temps.

Un rentier a placé son argent à raison de 5 pC. ; par rapport aux intérêts son capital peut être exprimé par $m + \sqrt{-1} . n$, signifiant que son capital est $m + n$, que m seul a donne l'intérêt, et que n n'a pas été placé.

Un marchand de vin a mêlé des vins de différente valeur. 100 Litres à $f\,3$; 50 Litres à $f\,1$; 100 Litres d'eau. Supposé le prix du vin pur à $f\,4$.

La Fig. 14 représente la solution de ce problême.

OA représente la valeur de 100 Litres à $f\,4$.

OB marquera les 100 Litres à $f\,3$, Ob sera la valeur;
OC » 100 Litres à $f\,1$, OC′ sera 50 Litres à $f\,1$;
Oc la valeur de 100 Litres à $f\,1$, Oc' la valeur de 50 Litres à $f\,1$;
OD marquera les 100 Litres d'eau, la valeur est $= 0$.
La ligne OD′ représente la grandeur complexe, le vin mêlé; Oc'' en représente la valeur.

Quelqu'un a les marchandises brutes exprimées par le nombre complexe $a\uparrow\varphi$, dont le tare total est b; on demande d'abord le total des marchandises sans tare; puis le tare et les marchandises sans tare contenues en $100\uparrow\varphi$.

Fig. 15. $\mathrm{OB} = a\uparrow\varphi = a\,(\cos\varphi + \sqrt{-1} . \sin\varphi)$.

$$\mathrm{O}b = a\cos\varphi;\ \mathrm{B}b = \sqrt{-1} . a\sin\varphi = b.$$

$\mathrm{OC} = 100\uparrow\varphi = 100\,(\cos\varphi + \sqrt{-1} . \sin\varphi)$.

$\mathrm{O}c = 100\cos\varphi;\ \mathrm{C}c = \sqrt{-1} . 100\sin\varphi$.

Fig. 16. Autre exemple. $\mathrm{OB}\uparrow x$, marchandises brutes $=$

$$\mathrm{OB}\,(\cos x + \sqrt{-1} . \sin x) = \mathrm{O}b + \sqrt{-1} . \mathrm{B}b.$$

On en tire d'abord les brutes $\mathrm{O}c\uparrow y =$

$$\mathrm{O}c\,(\cos y + \sqrt{-1} . \sin y) = \mathrm{O}c + \sqrt{-1} . \mathrm{C}c.$$

Puis $OD\uparrow z = OD(\cos z + \sqrt{-1}.\sin z) = Od + \sqrt{-1}.Dd$.

Ob étant $= Oc + Od$, il en suit que toutes les marchandises sans tare en sont tirées ; mais comme Bb le tare total surpasse de BD', le tare $Cc + Dd$ contenu en OC et OD, le reste $BD' = OE$ est de nulle valeur.

On a donc $OB\uparrow x = Oc\uparrow y + OD\uparrow z + OE\uparrow\frac{\pi}{2}$;
ou $Ob + \sqrt{-1}.Bb = (Oc + Od) + \sqrt{-1}.(Cc + Dd + OE)$.

Il est déjà remarqué que les quantités complexes renferment implicitement non explicitement les quantités dans lesquelles elles peuvent être transformées ; ainsi dans les exemples donnés OB est $= Ob + \sqrt{-1}.Bb$, mais non $OB = Ob + Bb$ et de même avec toutes les autres quantités ou grandeurs complexes.

Pour achever un ouvrage on a employé des ouvriers à forces inégales, savoir : 10 ouvriers complets ; 5 dont les forces peuvent être exprimées par $\frac{3}{4}$, 8 par $\frac{5}{6}$ et 4 dont les forces sont $\frac{1}{2}$.

Les expressions algébriques suivantes donneront les travaux partiels et la totalité.

10 ouvriers complets $= 10$.

5 à $\frac{3}{4}$ $= 5(\frac{3}{4} + \sqrt{-1}.\frac{1}{4})$.

8 à $\frac{5}{6}$ $= 8(\frac{5}{6} + \sqrt{-1}.\frac{1}{6})$.

4 à $\frac{1}{2}$ $= 4(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}.\frac{1}{2})$.

Le total sera $(10 + 3\frac{3}{4} + 6\frac{2}{3} + 2) + \sqrt{-1}.(1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} + 2)$.

Le total en forme complexe pourra être transformée en quantité complexe.

Le travail prêté par quelqu'un à un ouvrage est $a\uparrow 120$; quelle en est la valeur ?

$a\uparrow 120 = a\,(\cos 120 + \sqrt{-1}.\sin 120)$; $a \cos 120$ a une valeur négative, cequi signifie un travail anti-profitable; $\sqrt{-1}.\, a \sin 120$ signifie un travail de nulle valeur positive, réelle; ainsi $a\uparrow 120$ = une valeur nég. + une valeur non réelle.

Le temps employé à un ouvrage est exprimé par $a\uparrow\varphi$. $a\uparrow\varphi = a\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi = a\cos\varphi + \sqrt{-1}.\,a\sin\varphi$. $a\cos\varphi$ signifiera le temps qu'on aura travaillé; $\sqrt{-1}.\,a\sin\varphi$ le temps qu'on n'aura rien fait.

Les ouvriers qui ont été employés durant un certain temps, sont indiqués par $\sqrt[6]{-1}.\,a$.

$$\sqrt[6]{-1}.\,a = a\uparrow 30 = a\,(\cos 30 + \sqrt{-1}.\sin 30).$$

$a \cos 30$ = ouvriers qui ont travaillé ;

$\sqrt{-1}.\,a \sin 30$ = » qui n'ont rien fait.

Cequi précède ne renferme que quelques idées sur les nombres complexes et les formes complexes en sens concret ; — ces idées doivent-elles être jugées vides de sens; ne prouvent-elles qu'il est injuste de taxer en général ces quantités ou ces grandeurs comme vides de sens, sans réalité ; ne serait-il possible d'en tirer des avantages en les introduisant dans l'algèbre pour marquer des valeurs relatives, dans les équations. — Il ne sera pas hasardé de prétendre que l'explication donnée des résultats sous ces formes dans la solution des équations n'est pas sans fond, sans raison.
