Afbeelding van bewegingen om een punt in R2, R3 en R4

https://hdl.handle.net/1874/363535

Afbeelding van Bewegingen om een Punt in R_2, R_3 en R_4

door

D. N. LELYVELD

AFBEELDING
VAN BEWEGINGEN OM EEN PUNT
IN R_2, R_3 EN R_4

K 967

Diss. Utrecht 1943

AFBEELDING VAN BEWEGINGEN OM EEN PUNT IN R_2, R_3 EN R_4.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS L. VAN VUUREN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 18 JANUARI 1943, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

DAVID NICOLAAS LELYVELD

GEBOREN TE 's-GRAVENHAGE

AMSTERDAM - H. J. PARIS - MCMXLIII

PROMOTOR: PROF. DR J. A. BARRAU

AAN KONING CHRISTUS

INHOUD

INLEIDING

In Band 32 van Crelle's Journal vindt men een artikel van Cayley getiteld: „Sur quelques propriétés des déterminants gauches", waarin wordt aangetoond, hoe met behulp van scheve determinanten waarvan de elementen der hoofddiagonaal alle gelijk zijn, mits ongelijk nul, orthogonale determinanten kunnen worden opgebouwd, waarvan de elementen rationale functies zijn van $\frac{n(n-1)}{2}$ parameters, als n de orde der determinant is. Cayley laat echter niet zien, hoe men uit een gegeven orthogonale determinant haar parametervoorstelling kan afleiden. In een reeks verhandelingen in de „Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin" (1890) getiteld: „Über orthogonale Systeme" heeft Kronecker op dit tekort gewezen en het werk van Cayley in vele opzichten aangevuld.

In het volgende zullen wij ons aansluiten bij de wijze waarop Kowalewski in zijn „Determinantentheorie" de onderhavige kwestie behandelt. Wij zullen ons beperken tot determinanten van de 2de, 3de en 4de orde, wijl wij deze in onze toepassingen alleen nodig hebben. Bovendien nemen wij aan dat de orthogonale determinanten, die wij gaan beschouwen de waarde 1 hebben en niet nul worden als men de elementen van hun hoofddiagonaal met 1 vermeerdert. Ook zullen wij onderzoeken, wat gedaan kan worden als aan deze laatste voorwaarde niet voldaan is. Het bewijs bij Kowalewski is tweeledig. Hij laat op de eerste plaats zien, dat elke orthogonale determinant, die aan deze twee voorwaarden voldoet, de eigenschap bezit, dat zijn elementen geschreven kunnen worden als rationale functies van $\frac{n(n-1)}{2}$ parameters. In de loop van dit betoog moet gedeeld worden door de determinant, die uit de gegevene ontstaat, door de elementen van zijn hoofddiagonaal met 1 te vermeerderen, zodat dit bewijs zijn geldigheid verliest als die determinant nul is. Vervolgens wordt aangetoond, dat elke determinant, waarvan de elementen op genoemde wijze zijn gebouwd, orthogonaal is en de waarde 1 heeft, waarbij weer door bovenbedoelde determinant gedeeld moet worden. Wijl Kowalewski in het eerste gedeelte van zijn bewijs niet expliciet aangeeft hoe de parameters behorend bij een gegeven orthogonale determinant te schrijven zijn als functies der elementen en wij voor het volgende dit juist nodig hebben zullen wij dus eerst deze formules afleiden.

Wij beschouwen nu eerst een determinant van de tweede orde:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Als deze orthogonaal is en de waarde 1 heeft, moet hij de volgende gedaante hebben:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

waarbij $a^2 + b^2 = 1$. Immers in zo'n determinant is elk element gelijk aan zijn coëfficiënt.

Stellen we nu $\dfrac{b}{1 + a} = t$ dan vinden we na enige herleidingen: $a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ en $b = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ want:

$$\frac{1 - \dfrac{b^2}{(1 + a)^2}}{1 + \dfrac{b^2}{(1 + a)^2}} = \frac{(1 + a)^2 - b^2}{(1 + a)^2 - b^2} = \frac{1 + 2a + 2a^2 - (a^2 + b^2)}{1 + 2a + a^2 + b^2} = \frac{2a\,(1 + a)}{2\,(1 + a)} = a$$

en

$$\frac{2\,\dfrac{b}{1 + a}}{1 + \dfrac{b^2}{(1 + a)^2}} = \frac{2\,(1 + a)\,b}{2\,(1 + a)} = b$$

waarbij gebruik gemaakt is van de relatie: $a^2 + b^2 = 1$. Hadden we de door Kowalewski aangegeven weg gevolgd, dan zouden we gevonden hebben de parameter $\dfrac{b}{2\,(1 + a)}$ en we waren gestoten op de waardeloze identiteiten $a = a$ en $b = b$. We zouden tot het bovenstaande resultaat ook geraakt zijn door te stellen $a = \cos\alpha$ en $b = \sin\alpha$ en daarna beide uit te drukken in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$. Het enige geval waarin hier moeilijkheden optreden is: $a = -1$. Onze determinant wordt dan:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

en is nu niet op de aangegeven wijze voor te stellen. Substitueren we echter in:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$$

$t = \dfrac{\mu}{\lambda}$ dan gaat deze over in:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2} & \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} \\ \dfrac{-2\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} & \dfrac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2} \end{vmatrix}$$

Deze determinant geeft nu alle orthogonale determinanten van de 2e orde, die de waarde 1 hebben, weer; de uitzonderingsdeterminant krijgen we voor $\lambda = 0$.

Beschouwen we vervolgens een determinant van de derde orde:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Als deze orthogonaal is en de waarde 1 heeft, dan vinden we voor:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 \end{vmatrix} = 2\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1)$$

waarbij weer gebruik gemaakt is van de eigenschap, dat in de eerste van de beide bovenstaande determinanten elk element gelijk is aan zijn coëfficiënt. De reciproke van de laatste determinant wordt nu:

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}+a_{22}+a_{33}+1 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} \\ a_{21}-a_{12} & a_{11}+a_{22}+a_{33}+1 & a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{31} & a_{32}-a_{23} & a_{11}+a_{22}+a_{33}+1 \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)\left\{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2+(a_{12}-a_{21})^2+\right.$$
$$\left.+(a_{13}-a_{31})^2+(a_{23}-a_{32})^2\right\}$$

wat echter ook weer gelijk is aan $4\,(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2$. Als nu $a_{11}+a_{22}+a_{33}+1 \neq 0_0$ is de factor tussen accolades gelijk aan: $4\,(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)$

Beschouwen we nu de reciproke van C, die we kortheidshalve zullen schrijven als:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

dan gelden volgens de bekende eigenschappen over de reciproke van eèn determinant *) de volgende gelijkheden:

$$c_{rs} = B a_{rs} \qquad r \neq s \quad \text{en}$$

$$c_{rr} = B\,(a_{rr}+1)$$

Hieruit volgt nu weer mits $B \neq 0$:

$$a_{rs} = \frac{c_{rs}}{B} = \frac{Bc_{rs}}{C}$$

en $$a_{rr} = -1 + \frac{c_{rr}}{B} = -1 + \frac{Bc_{rr}}{C}.$$

Hieruit volgt nu bijvoorbeeld:

$$a_{11} = \frac{2\,(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)\left\{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2+(a_{23}-a_{32})^2\right\}}{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)\left\{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2+(a_{12}-a_{21})^2+(a_{13}-a_{31})^2+(a_{23}-a_{32})^2\right\}} - 1$$

---

*) Zie bijv. Schuh. Lessen over Hogere Algebra. Deel I, 2e druk, blz. 55 en 56 of Kowalewski. Determinantentheorie. § 37, 38, 39.

of $$a_{11} = \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2 + (a_{23}-a_{32})^2-(a_{13}-a_{31})^2-(a_{12}-a_{21})^2}{N}$$

dito $$a_{22} = \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2 - (a_{23}-a_{32})^2 + (a_{13}-a_{31})^2-(a_{12}-a_{21})^2}{N}$$

$$a_{33} = \frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2 - (a_{23}-a_{32})^2 - (a_{13}-a_{31})^2+(a_{12}-a_{21})^2}{N}$$

$$a_{12} = \frac{+2\left\{(a_{12}-a_{21})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1) - (a_{23}-a_{32})(a_{13}-a_{31})\right\}}{N}$$

$$a_{13} = \frac{+2\left\{a_{12}-a_{21})(a_{23}-a_{32}) + (a_{13}-a_{31})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)\right\}}{N}$$

$$a_{23} = \frac{+2\left\{(a_{23}-a_{32})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1) + (a_{12}-a_{21})(a_{13}-a_{31})\right\}}{N}$$

$$a_{21} = \frac{-2\left\{(a_{12}-a_{21})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1) + (a_{13}-a_{31})(a_{23}-a_{32})\right\}}{N}$$

$$a_{31} = \frac{-2\left\{(a_{12}-a_{21})(a_{23}-a_{32}) - (a_{13}-a_{31})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)\right\}}{N}$$

$$a_{32} = \frac{-2\left\{(a_{23}-a_{32})(a_{11}+a_{22}+a_{33}+1) + (a_{13}-a_{31})(a_{12}-a_{21})\right\}}{N}$$

waarbij

$$N = (a_{11}+a_{22}+a_{33}+1)^2 + (a_{23}-a_{32})^2 + (a_{13}-a_{31})^2 + (a_{12}-a_{21})^2$$

Stellen we hierin

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+1 = \lambda$; $a_{23}-a_{32} = \mu$; $a_{13}-a_{31} = \nu$ en $a_{12}-a_{21} = \pi$

dan wordt de algemene voorstelling van een orthogonale determinant, die de waarde 1 heeft en niet nul wordt als men de elementen van haar hoofddiagonaal met 1 vermeerdert:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{2(\lambda\pi-\mu\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{2(\lambda\nu+\mu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \\ \dfrac{-2(\lambda\pi+\mu\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{2(\lambda\mu-\nu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \\ \dfrac{-2(\lambda\nu-\mu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{-2(\lambda\mu+\nu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \dfrac{\lambda^2-\mu^2-\nu^2+\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \end{vmatrix} \qquad 1^{1})$$

Door de tellers en noemers der hierin optredende breuken door λ^2

te delen verkrijgt men de voorstelling in 3 parameters. Ook hier loopt de hele herleiding mis als $a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1 = 0$ want we hebben door $1 + \Sigma a_{11}$ gedeeld. In dit geval zijn alle elementen van de reciproke van de hulpdeterminant nul en wordt de zo juist uitgevoerde herleiding zinloos. We maken nu echter de belangrijke opmerking, dat de uitzonderingsdeterminanten symmetrisch zijn en dus geschreven kunnen worden in de vorm:

$$\begin{vmatrix} x & u & v \\ u & y & w \\ v & w & z \end{vmatrix}$$

Tussen de 6 grootheden u, v, w, x, y, z hebben we nu de volgende 7 relaties:

$$\begin{aligned}
&1)\ x^2 + u^2 + v^2 = 1 \\
&2)\ u^2 + y^2 + w^2 = 1 \\
&3)\ v^2 + w^2 + z^2 = 1 \\
&4)\ ux + uy + vw = 0 \\
&5)\ vx + uw + vz = 0 \\
&6)\ uv + wy + zw = 0 \\
&7)\ x + y + z + 1 = 0
\end{aligned}$$

Op het eerste gezicht schijnt het, dat er geen uitzonderingsdeterminanten mogelijk zijn, omdat we meer vergelijkingen krijgen, dan onbekenden. In het volgende zal echter blijken, dat er afhankelijkheid optreedt.
De 4de, 5de en 6de vergelijking kunnen we aldus schrijven:

$$\begin{array}{rlllll}
8) & ux + uy & & = & -vw \\
9) & vx & + vz & = & -uw \\
10) & wy & + wz & = & -uv
\end{array}$$

Men kan deze opvatten als 3 lineaire vergelijkingen in x, y en z. De determinant van dit stelsel is:

$$\begin{vmatrix} u & u & o \\ v & o & v \\ o & w & w \end{vmatrix} = -2uvw$$

Uit de vergelijkingen 8), 9) en 10) blijkt nu, dat het niet mogelijk is, dat een der grootheden u, v of w nul is, zonder dat tevens ook een der beide andere grootheden nul is. We hebben dus de drie volgende gevallen:

a) Alle grootheden u, v, w, zijn nul.

b) Twee dezer grootheden zijn nul, de derde ongelijk nul.

c) Geen dezer grootheden is nul.

Het eerste geval leert ons, dat slechts drie determinanten mogelijk zijn, n.l.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Deze ontstaan uit determinant 1′ door hierin achtereenvolgens te substitueren:

$$\lambda = \mu = \nu = 0 \ ; \quad \lambda = \mu = \pi = 0 \quad \text{of} \quad \lambda = \nu = \pi = 0$$

In het tweede geval vinden we bijv. uit $\mu = v = 0$ en $w \neq 0$ blijkens 10): $y + z = 0$ dus volgens 7): $x = -1$. We krijgen dan de determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & o & o \\ 0 & y & w \\ 0 & w & -y \end{vmatrix}$$

waarin:

$$\begin{vmatrix} y & w \\ w & -y \end{vmatrix}$$

orthogonaal is en de waarde -1 heeft. Voor deze laatste determinant kunnen we met een lichte wijziging van het resultaat voor de 2de orde schrijven:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\nu^2 - \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\nu\pi}{\nu^2 + \pi^2} \\ \dfrac{2\nu\pi}{\nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-\nu^2 + \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \end{vmatrix}$$

zodat de uitzonderingsdeterminant van de 3de orde voor dit geval wordt:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu^2 - \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\nu\pi}{\nu^2 + \pi^2} \\ 0 & \dfrac{2\nu\pi}{\nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-\nu^2 + \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \end{vmatrix}$$

Deze ontstaat nu weer uit 1') door hierin te stellen: $\lambda = \mu = 0$. Analoog kunnen we te werk gaan in de gevallen $u = w = 0$, $v \neq 0$ en $v = w = 0$, $u \neq 0$.

Er blijft nu nog het derde geval over. Lossen we nu uit 8), 9) en 10) op de x, y en z dan vinden we:

$$x = \frac{-u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2}{-2uvw}$$

$$y = \frac{u^2v^2 - u^2w^2 + v^2w^2}{-2uvw}$$

$$z = \frac{u^2v^2 + u^2w^2 - v^2w^2}{-2uvw}.$$

Het blijkt nu dat 1) ; 2) ; 3) en 7) afhankelijk zijn. Ze gaan alle vier over in: $u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = 2uvw$. We hebben onverwacht zelfs 2 graden van vrijheid. Onze determinant wordt nu:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{u^2v^2 - u^2w^2 - v^2w^2}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{2u^2vw}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{2uv^2w}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} \\ \dfrac{2u^2vw}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{-u^2v^2 + u^2w^2 - v^2w^2}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{2uvw^2}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} \\ \dfrac{2uv^2w}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{2uvw^2}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} & \dfrac{-u^2v^2 - u^2w^2 + v^2w^2}{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2} \end{vmatrix}$$

Stellen we hierin nu: $uv = \mu$; $-uw = \nu$ en $vw = \pi$ dan gaat deze over in:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mu^2 - \nu^2 - \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-2\mu\nu}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\mu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \\ \dfrac{-2\mu\nu}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-\mu^2 + \nu^2 - \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-2\nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \\ \dfrac{2\mu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-2\nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-\mu^2 - \nu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \end{vmatrix}$$

Deze ontstaat uit 1') door hierin te substitueeren $\lambda = 0$.
De determinant 1') geeft dus alle orthogonale determinanten weer van de 3de orde die de waarde 1 hebben. De voorwaarde, dat de determinant, die ontstaat door de elementen der hoofddiagonaal met 1 te vermeerderen niet nul mag zijn, blijkt ook hier, evenals in het geval van de 2de orde, overbodig te zijn.
Beschouwen we nu nog het geval van de 4de orde. We hebben dan de orthogonale determinant van de waarde 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

De hulpdeterminant wordt in dit geval:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+1 \end{vmatrix} =$$

$$2(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+1+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}+a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})$$

De reciproke hiervan wordt nu:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \pi \\ -\mu & \lambda & \varrho & \sigma \\ -\nu & -\varrho & \lambda & \tau \\ -\pi & -\sigma & -\tau & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^4 + (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 + (\mu\tau - \nu\sigma + \pi\varrho)^2 = 8\lambda^3$$

waarin

$$\lambda = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + 1 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} + \\ - a_{13}a_{31} + a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}$$

$$\mu = a_{12} - a_{21} - a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{44} + a_{24}a_{41}$$

$$\nu = a_{13} - a_{31} + a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} + a_{34}a_{41} - a_{31}a_{44}$$

$$\pi = a_{14} - a_{41} + a_{21}a_{42} - a_{22}a_{41} + a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}$$

$$\varrho = a_{23} - a_{32} - a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} - a_{32}a_{44} + a_{34}a_{42}$$

$$\sigma = a_{24} - a_{42} - a_{11}a_{42} + a_{12}a_{41} + a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42}$$

$$\tau = a_{34} - a_{43} - a_{11}a_{43} + a_{13}a_{41} - a_{22}a_{43} + a_{23}a_{42}$$

Op dezelfde wijze als bij de 3de orde vinden we nu:

$$a_{11} = \frac{\lambda^4 - (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 - \sigma^2 - \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2}{N}$$

$$a_{22} = \frac{\lambda^4 - (\mu^2 - \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 - \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2}{N}$$

$$a_{33} = \frac{\lambda^4 - (-\mu^2 + \nu^2 - \pi^2 + \varrho^2 - \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2}{N}$$

$$a_{44} = \frac{\lambda^4 - (-\mu^2 - \nu^2 + \pi^2 - \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2}{N}$$

$$a_{12} = \frac{2\lambda\,\{\mu\lambda^2 - (\nu\varrho + \pi\sigma)\,\lambda + \tau\triangle\}}{N}$$

$$a_{13} = \frac{2\lambda\,\{\nu\lambda^2 + (\mu\varrho - \pi\tau)\,\lambda - \sigma\triangle\}}{N}$$

$$a_{14} = \frac{2\lambda\,\{\pi\lambda^2 + (\mu\sigma + \nu\tau)\,\lambda + \varrho\triangle\}}{N}$$

$$a_{21} = \frac{-2\lambda\,\{\mu\lambda^2 + (\nu\varrho + \pi\sigma)\,\lambda - \tau\triangle\}}{N}$$

$$a_{23} = \frac{2\lambda\,\{\varrho\lambda^2 - (\mu\nu + \sigma\tau)\,\lambda - \pi\triangle\}}{N}$$

$$a_{24} = \frac{2\lambda\,\{\sigma\lambda^2 - (\mu\pi - \varrho\tau)\,\lambda - \nu\triangle\}}{N}$$

$$a_{31} = \frac{-2\lambda\,\{\nu\lambda^2 - (\mu\varrho - \pi\tau)\,\lambda - \sigma\triangle\}}{N}$$

$$a_{32} = \frac{-2\lambda\,\{\varrho\lambda^2 + (\mu\nu + \sigma\tau)\,\lambda + \pi\triangle\}}{N}$$

$$a_{34} = \frac{2\lambda\,\{\tau\lambda^2 - (\nu\pi + \varrho\sigma)\,\lambda - \mu\triangle\}}{N}$$

$$a_{41} = \frac{-2\lambda\,\{\pi\lambda^2 - (\mu\sigma + \nu\tau)\,\lambda - \varrho\triangle\}}{N}$$

$$a_{42} = \frac{-2\lambda\,\{\sigma\lambda^2 + (\mu\pi - \varrho\tau)\,\lambda - \nu\triangle\}}{N}$$

$$a_{43} = \frac{-2\lambda\,\{\tau\lambda^2 + (\nu\pi + \varrho\sigma)\,\lambda - \mu\triangle\}}{N}$$

waarin

$$\triangle = \mu\tau - \nu\sigma + \pi\varrho \text{ en } N = \lambda^4 + (\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2)\,\lambda^2 + \triangle^2$$

Hierbij is weer ondersteld $\lambda \neq 0$. Delen we nu al deze uitdrukkingen door λ, dan vinden we de uitdrukkingen voor de elementen der orthogonale determinant in 6 parameters.
Is echter $\lambda = 0$ dan vinden we analoog met het geval voor de determinanten van de 3de orde volgens een eigenschap van Siacci, dat nu ook weer alle elementen in de reciproke van de hulpdeterminant nul zijn. Ook nu verliezen weer alle uit te voeren delingen hun zin.
Tussen de 16 elementen van de orthogonale determinant van de 4de orde bestaan nu de volgende 11 relaties:

1) $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 = 1$

2) $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 = 1$

3) $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1$

4) $a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1$

5) $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{14}a_{24} = 0$

6) $a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{34} = 0$

7) $a_{11}a_{41} + a_{12}a_{42} + a_{13}a_{43} + a_{14}a_{44} = 0$

8) $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{34} = 0$

9) $a_{21}a_{41} + a_{22}a_{42} + a_{23}a_{43} + a_{24}a_{44} = 0$

10) $a_{31}a_{41} + a_{32}a_{42} + a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} = 0$

11) $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + 1 + a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} +$
$+ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

Er zijn dus 5 graden van vrijheid.
We zoeken nu die uitzonderingsdeterminanten, welke symmetrisch zijn. Dan gaat 11) over in:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{11}a_{44} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22} = a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 - 1$$

Dus in:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{11}^2 + a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{44} = 0$$

of in: $$(a_{11} + 1)\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = 0$$

Er zijn dus twee mogelijkheden: òf wel $a_{11} = -1$, òf wel

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0.$$

Natuurlijk hadden we 11 even goed kunnen herleiden tot:

$$(a_{22} + 1)\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = 0 \quad \text{òf tot:}$$
$$(a_{33} + 1)\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = 0 \quad \text{òf tot:}$$
$$(a_{44} + 1)\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) = 0.$$

Opgemerkt dient te worden, dat bij elk van deze herleidingen slechts gedeeltelijk van de symmetrie gebruik wordt gemaakt. Bij de eerste herleiding slechts van het feit, dat de elementen in de eerste rij en de eerste kolom symmetrisch zijn. Analoog voor de andere gevallen. De hier af te leiden resultaten zijn dus ruimer van toepassing dan enkel op symmetrische determinanten.

Onderzoeken we nu eerst het geval $a_{11} = -1$ en beperken we ons tot het reëele gebied, dan krijgen we onmiddellijk $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ Onze determinant wordt nu dus:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Hierin is

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

orthogonaal en heeft de waarde -1. We kunnen dus met een lichte wijziging van 1') voor deze determinant schrijven:

$$\begin{vmatrix} \frac{-\lambda^2-\mu^2-\nu^2-\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda^2-\mu^2+\nu^2+\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{-2\,(\lambda\pi-\mu\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{-2\,(\lambda\nu+\mu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \\ 0 & \frac{2\,(\lambda\pi+\mu\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{-\lambda^2+\mu^2-\nu^2+\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{-2\,(\lambda\mu-\nu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \\ 0 & \frac{2\,(\lambda\nu-\mu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{2\,(\lambda\mu+\nu\pi)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} & \frac{-\lambda^2+\mu^2+\nu^2-\pi^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2} \end{vmatrix} \quad 2'$$

Hierbij zijn de elementen van $1'$ alle van teken veranderd. Voor dit geval hebben we dus een parametervoorstelling gevonden. Analoge voorstellingen vinden we in de drie andere gevallen. De Cayleyse voorstelling voor determinanten van de 4de orde gaat echter niet in deze over als we daarin $\lambda = 0$ stellen, immers als nu bovendien $\triangle \neq 0$ is vinden we slechts de determinant:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Deze komt nog uit de bovenstaande te voorschijn, door hierin te stellen $\mu = \nu = M = 0$.
Nemen we echter in de Cayleyse voorstelling van de 3e orde behalve $\lambda = 0$ ook nog $\triangle = 0$ dan kunnen we hieruit de bovenstaande speciale voorstelling niet meer afleiden.
Door de limietovergang $\lambda \to 0$ vinden we dan n.l. uit de Cayleyse determinant.

$$\begin{vmatrix} \frac{-\mu^2-\nu^2-\pi^2+\varrho^2+\sigma^2+\tau^2}{N} & \frac{-2(\nu\varrho+\pi\sigma)}{N} & \frac{2(\mu\varrho-\pi\tau)}{N} & \frac{2(\mu\sigma+\nu\tau)}{N} \\ \frac{-2(\nu\varrho+\pi\sigma)}{N} & \frac{-\mu^2+\nu^2+\pi^2-\varrho^2-\sigma^2+\tau^2}{N} & \frac{-2(\mu\nu+\sigma\tau)}{N} & \frac{-2(\mu\pi-\sigma\tau)}{N} \\ \frac{2(\mu\varrho-\pi\tau)}{N} & \frac{-2(\mu\nu+\sigma\tau)}{N} & \frac{\mu^2-\nu^2+\pi^2-\varrho^2+\sigma^2-\tau^2}{N} & \frac{-2(\nu\pi+\varrho\sigma)}{N} \\ \frac{2(\mu\sigma+\nu\tau)}{N} & \frac{-2(\mu\pi-\sigma\tau)}{N} & \frac{-2(\nu\pi+\varrho\sigma)}{N} & \frac{\mu^2+\nu^2-\pi^2+\varrho^2-\sigma^2-\tau^2}{N} \end{vmatrix}$$

waarin $\qquad N = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2$

Deze speciale Cayleyse voorstelling is echter symmetrisch terwijl de door mij bedachte dit niet behoeft te zijn. Hiermede is bewezen dat de Cayleyse voorstelling niet alle orthogonale determinanten van de vierde orde kan weergeven.
Beschouwen we nu het geval $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0$ waarbij $a_{11} \neq -1$ en beperken we ons nu tot symmetrische uitzonderingsdeterminanten. De vergelijkingen $5 - 10$ gaan nu over in:

$$
\begin{array}{lllll}
12) & a_{12}a_{11} + a_{12}a_{22} & & = & -a_{13}a_{23} - a_{14}a_{24} \\
13) & a_{13}a_{11} & + a_{13}a_{33} & = & -a_{12}a_{23} - a_{14}a_{34} \\
14) & a_{14}a_{22} & + a_{14}a_{33} & = & a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} \\
15) & a_{23}a_{22} & + a_{23}a_{33} & = & -a_{12}a_{13} - a_{24}a_{34} \\
16) & a_{24}a_{11} & + a_{24}a_{33} & = & a_{12}a_{14} + a_{23}a_{34} \\
17) & a_{34}a_{11} + a_{34}a_{22} & & = & a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24}
\end{array}
$$

Deze kunnen we opvatten als 6 lineaire vergelijkingen in de drie onbekenden a_{11}, a_{22} en a_{33}. Opdat deze 6 vergelijkingen afhankelijk zijn, moet volgens Rouché voldaan zijn aan drie voorwaarden, die zich hier merkwaardiger wijze tot een herleiden n.l.

$$a_{12}a_{13}a_{14} + a_{12}a_{23}a_{24} + a_{13}a_{23}a_{34} + a_{14}a_{24}a_{34} = 0 \qquad a)$$

Van alle symmetrische uitzonderingsdeterminanten moeten dus de elementen rechts van de hoofddiagonaal aan deze relatie voldoen.

We lossen nu het stelsel 13), 14) en 15) op. De determinant van dit stelsel is $-2a_{12}a_{13}a_{14}$. Onderstellen we deze ongelijk nul dan vinden we:

$$a_{11} = \frac{a_{12}^2a_{13}a_{24} + a_{12}^2a_{14}a_{23} + a_{12}a_{13}^2a_{34} + a_{12}a_{14}^2a_{34} + a_{13}^2a_{14}a_{23} + a_{13}a_{14}^2a_{24}}{-2a_{12}a_{13}a_{14}}$$

$$a_{22} = \frac{-a_{12}^2a_{13}a_{24} - a_{12}^2a_{14}a_{23} - a_{12}a_{13}^2a_{34} - a_{12}a_{14}^2a_{34} + a_{13}^2a_{14}a_{23} + a_{13}a_{14}^2a_{24}}{-2a_{12}a_{13}a_{14}}$$

$$a_{33} = \frac{-a_{12}^2a_{13}a_{24} + a_{12}^2a_{14}a_{23} - a_{12}a_{13}^2a_{34} + a_{12}a_{14}^2a_{34} - a_{13}^2a_{14}a_{23} - a_{13}a_{14}^2a_{24}}{-2a_{12}a_{13}a_{14}}$$

$$a_{44} = \frac{a_{12}^2a_{13}a_{24} - a_{12}^2a_{14}a_{23} + a_{12}a_{13}^2a_{34} - a_{12}a_{14}^2a_{34} - a_{13}^2a_{14}a_{23} - a_{13}a_{14}^2a_{24}}{-2a_{12}a_{13}a_{14}}$$

Waarbij nu behalve aan a) ook nog voldaan moet zijn aan:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 = 1$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 = 1$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1$$

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 + a_{44}^2 = 1$$

Analoog als bij de derde orde kunnen nu beschouwd worden de gevallen, waarin $a_{12}a_{13}a_{14} = 0$.
Ook kunnen op soortgelijke wijze scheefsymmetrische uitzonderingsdeterminanten worden uitgedrukt in de elementen rechts van de hoofddiagonaal. We verwijderen ons daarbij uit den aard der zaak steeds meer van de Cayleyse voorstellingswijze.
Het is mij echter niet mogen gelukken een algemene voorstelling te vinden voor alle uitzonderingsdeterminanten.

AFBEELDING VAN
BEWEGINGEN OM EEN VAST PUNT IN TWEE-, DRIE- EN VIERDIMENSIONALE RUIMTEN.

A. Tweedimensionaal.

We denken ons een vlak R_2 en hierin een vast punt O. We laten dit vlak in zich zelf draaien om het punt O. We kunnen dit voorstellen als een beweging van een veranderlijke R_2' in de vaste R_2 waarbij het punt O niet van plaats verandert. Om deze bewegingen te beschrijven kiezen we in R_2 met O als oorsprong een vast Cartesiaans coördinatenstel $\{XY\}$ en in R_2' een dito $\{X'Y'\}$ ook met O als oorsprong. De samenhang tussen beide stelsels wordt gegeven door de vergelijkingen:

$$X = a_{11}X' + a_{12}Y'$$
$$Y = a_{21}X' + a_{22}Y'$$

Hierin is de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

orthogonaal en heeft de waarde 1, als we beide stelsels in dezelfde zin kiezen. Deze determinant karakteriseert de diverse standen van het veranderlijke vlak ten opzichte van het vaste vlak. De determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

geeft de stand aan, waarbij in beide vlakken de gelijknamige assen samenvallen. Deze stand zullen we aanduiden als de aanvangsstand. Blijkens de inleiding kan de eerste van de twee bovenstaande determinanten worden geschreven als:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} & \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \\[2ex] \dfrac{-2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2} & \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \end{vmatrix}$$

Hieruit blijkt, dat de standen van het veranderlijke vlak kunnen worden afgebeeld op de punten van een rechte lijn, door middel van de homogene coördinaten $\{\lambda, \mu\}$. De oorsprong op die rechte lijn beeldt dan de aanvangsstand uit. Iedere stand van het veranderlijke vlak correspondeert met één punt van de beeldrechte en ieder punt van de beeldrechte geeft één stand van het veranderlijke vlak. Schrijven we de laatste determinant in niet homogene vorm:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$$

waarin $t = \dfrac{\mu}{\lambda}$ dan vinden we, dat die stand van R_2'' die uit de aanvangsstand is ontstaan door rotatie over de hoek α wordt afgebeeld door het punt $\{-\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha, 1\}$ op de beeldrechte. De rotatie over 180° wordt dan afgebeeld op het oneigenlijke punt van die beeldrechte, wat weer in overeenstemming is met het in de inleiding gevonden resultaat, dat de uitzonderingsdeterminant

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

uit de algemene voorstellingswijze in λ, μ was af te leiden door te stellen $\lambda = 0$.
Roteert het veranderlijke vlak eenparig om het punt O, dan zal het beeldpunt de beeldrechte doorlopen, echter niet met eenparige snelheid.

B. Driedimensionaal.

Op overeenkomstige wijze kunnen we de bewegingen nagaan in een driedimensionale ruimte R_3. We denken ons dan een veranderlijke R_3' die beweegt in de vaste R_3 en waarbij weer het punt O op zijn plaats blijft. Ook nu kunnen we deze bewegingen beschrijven door het kiezen van een vast Cartesiaans coördinatenstelsel $\{XYZ\}$ in R_3 met O als oorsprong en een dito $\{X'Y'Z'\}$ in R_3'. De samenhang tussen beide stelsels wordt nu gegeven door de vergelijkingen:

$$X = a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z'$$
$$Y = a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}Z'$$
$$Z = a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}Z'$$

Ook hier is weer de determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

die de standen van de veranderlijke ruimte R_3' karakteriseert ten opzichte van de vaste ruimte R_3 orthogonaal en heeft de waarde 1, als we beide stelsels in dezelfde zin nemen. De determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

geeft de stand aan, waarbij de assen in R_3' met de gelijknamige assen in R_3 samenvallen. Deze stand zullen we weer aanduiden als de aanvangsstand. Volgens de inleiding kan de eerste determinant in parametervorm worden gebracht en neemt dan de gedaante aan:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \pi^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\,(\lambda\pi - \mu\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\,(\lambda\nu + \mu\pi)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \\[2ex] \dfrac{-2\,(\lambda\pi + \mu\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - \pi^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{2\,(\lambda\mu - \nu\pi)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \\[2ex] \dfrac{-2\,(\lambda\nu - \mu\pi)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{-2\,(\lambda\mu + \nu\pi)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2} & \dfrac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \pi^2}{\lambda^2 + \pi^2 + \nu^2 + \pi^2} \end{vmatrix}$$

Deze voorstelling is algemeen, zoals we in de inleiding gezien hebben. We kunnen dus de standen van de veranderlijke R_3' ten opzichte van de vaste R_3 afbeelden op de punten van een driedimensionale beeldruimte R_3'' (λ, μ, ν, π) waarin λ de homogeniseringscoördinaat is. Iedere stand van R_3' geeft één punt van R_3'', want de λ, μ, ν en π zijn door de a's volkomen bepaald. Ieder punt van de beeldruimte R_3'' wijst omgekeerd één stand van R_3' ten opzichte van R_3 aan, want de a's zijn rationale functies van de parameters λ, μ, ν en π. De correspondentie is dus één-éénduidig. De oorsprong van R_3'' $\{\lambda, \mu, \nu, \pi\} = \{1, 0, 0, 0\}$ geeft de tweede van bovenstaande determinanten aan en wijst dus de aanvangsstand aan. De punten van de π as, waarvoor dus $\mu = \nu = 0$ geven de standen aan:

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2 - \pi^2}{\lambda^2 + \pi^2} & \frac{2\lambda\pi}{\lambda^2 + \pi^2} & 0 \\ \frac{-2\lambda\pi}{\lambda^2 + \pi^2} & \frac{\lambda^2 - \pi^2}{\lambda^2 + \pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Delen we nu de tellers en noemers door λ^2 en stellen we vervolgens $\frac{\mu}{\lambda} = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ dan gaat deze determinant over in:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Hieruit blijkt, dat de punten van de π as de standen aangeven, die door wenteling van R_3' om de Z as van R_3 uit de aanvangsstand ontstaan. Analoge beschouwingen gelden voor de punten van de μ as en de ν as. Het oneigenlijke punt van de π as wijst die stand van R_3' aan die door rotatie over 180° om de Z as van R_3 uit de aanvangsstand ontstaat. Dit is weer in overeenstemming met het in de inleiding gevondene, waar bleek, dat de uitzonderingsdeterminanten alle correspondeerden met $\lambda = 0$. De hiermee overeenstemmende standen moeten dus hun beeldpunten vinden in het oneigenlijke vlak van de beeld R_3''.

Gaan we nu in de beeldruimte over op niet homogene coördinaten en stellen we hiertoe $\frac{\mu}{\lambda} = m$, $\frac{\nu}{\lambda} = n$ en $\frac{\pi}{\lambda} = p$ en vragen we ons nu af, welke beweging van R_3' ten opzichte van R_3 wordt afgebeeld door de rechte l: $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{c} = u$ van de beeldruimte R_3''. We gaan hiertoe na, het snijpunt van de X' as van R_3' met de bol $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ om O in R_3. We vinden als meetkundige plaats van dit snijpunt in parametervorm:

$$X = \frac{1 + (a^2 - b^2 - c^2)\, u^2}{1 + (a^2 + b^2 + c^2)\, u^2}$$

$$Y = \frac{-2\,(cu + abu^2)}{1 + (a^2 + b^2 + c^2)\, u^3}$$

$$Z = \frac{-2\,(bu - acu^2)}{1 + (a^2 + b^2 + c^2)\, u^2}$$

Dit is een vlakke kromme op de eenheidsbol om O, dus een cirkel. Trachten we het vlak van deze cirkel te bepalen en stellen we dit hiertoe:

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

We moeten nu A, B, C en D oplossen uit de vergelijkingen:

$$\begin{array}{lllll} A & & & + D & = 0 \\ & -2cB & -2bC & & = 0 \\ (a^2 - b^2 - c^2)\, A & -2abB & + 2acC & + (a^2 + b^2 + c^2)\, D & = 0 \end{array}$$

Laten we l niet met een der assen M, N of P samenvallen, dan is de rang van de matrix der coëfficiënten:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2c & -2b & 0 \\ a^2 - b^2 - c^2 & -2ab & +2ac & a^2 + b^2 + c^2 \end{array} \right\|$$

drie, wat blijkt als we haar vervangen door:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ a^2 - b^2 - c^2 & -2ab & +2ac & 2\,(b^2 + c^2) \end{array} \right\|$$

Hiervan zijn n.l. de determinanten van de 3de orde gevormd uit de 1e, 2e en 4e kolom alsmede die uit de 1e, 3e en 4e kolom respectievelijk: $2c\,(b^2 + c^2)$ en $2b\,(b^2 + c^2)$ en dus niet beide tegelijk nul. De loodlijn uit O op 't vlak $AX + BY + CZ + D = 0$ wordt nu:

$$\frac{X}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & b & 0 \\ -2ab & +2ac & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a^2-b^2-c^2 & 2ac & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{Z}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ a^2-b^2-c^2 & -2ab & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}}$$

of na herleiding:

$$\frac{X}{a\,(b^2+c^2)} = \frac{Y}{-b\,(b^2+c^2)} = \frac{Z}{c\,(b^2+c^2)}.$$

Analoog vinden we voor de snijpunten der Y' en Z' as met de eenheidsbol om O in R_3 cirkels, waarvan de loodlijnen uit O op hun vlakken neergelaten tot vergelijkingen hebben:

$$\frac{X}{a\,(a^2+c^2)} = \frac{Y}{-b\,(a^2+c^2)} = \frac{Z}{c\,(a^2+c^2)} \text{ of}$$

$$\frac{X}{a\,(a^2+b^2)} = \frac{Y}{-b\,(a^2+b^2)} = \frac{Z}{c\,(a^2+b^2)}.$$

Bepalen we ons nu tot reëele rechten in de beeldruimte R_3'', dan komen we tot de volgende stelling:

Een rechte l: $\dfrac{m}{a} = \dfrac{n}{b} = \dfrac{p}{c}$ *door de oorsprong in de beeldruimte* R_3'' *geeft de standen aan, die* R_3' *inneemt bij wenteling uit de aanvangsstand om de rechte* l_0 *in* R_3, *die tot vergelijking heeft*: $\dfrac{X}{a} = \dfrac{Y}{-b} = \dfrac{Z}{c}$.

We vragen ons vervolgens af, welke beweging wordt afgebeeld door een willekeurige rechte l van de beeldruimte R_3'', nu niet door de oorsprong. Zij l gegeven door de vergelijkingen:

$$Am + Bn + Cp + D = 0$$

$$A_1m + B_1n + C_1p + D_1 = 0$$

Dus: $m = \dfrac{\begin{vmatrix} -Cp - D & B \\ -C_1p - D_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$ $\qquad n = -\dfrac{\begin{vmatrix} A & -Cp - D \\ A_1 & -C_1p - D_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$

of in Plückerse notatie:

$$m = \frac{\pi_{23}p + \pi_{24}}{\pi_{12}} \text{ en } n = \frac{\pi_{31}p - \pi_{14}}{\pi_{12}}$$

Beschouwen we nu het snijpunt der Z' as van R_3' met de eenheidsbol om O in R_3.

We krijgen dan:

$$X = \frac{2\,(n + mp)}{1 + m^2 + n^2 + p^2}$$

$$Y = \frac{2\,(m - np)}{1 + m^2 + n^2 + p^2}$$

$$Z = \frac{1 - m^2 - n^2 + p^2}{1 + m^2 + n^2 + p^2}.$$

Substitueren we hierin de uitdrukkingen voor m en n in p en de ascoördinaten van l dan vinden we:

$$X = \frac{-2\pi_{12}\pi_{14} + 2\pi_{12}\,(\pi_{31} + \pi_{24})\,p + 2\pi_{12}\pi_{23}p^2}{{\pi_{12}}^2 + {\pi_{24}}^2 + {\pi_{14}}^2 + 2\,(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,p + ({\pi_{23}}^2 + {\pi_{31}}^2 + {\pi_{12}}^2)\,p^2}$$

$$Y = \frac{2\pi_{12}\pi_{24} + 2\pi_{12}(\pi_{23} + \pi_{14})p - 2\pi_{12}\pi_{31}p^2}{{\pi_{12}}^2 + {\pi_{24}}^2 + {\pi_{14}}^2 + 2\,(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,p + ({\pi_{23}}^2 + {\pi_{31}}^2 + {\pi_{12}}^2)\,p^2}$$

$$Z = \frac{{\pi_{12}}^2 - {\pi_{24}}^2 - {\pi_{14}}^2 - 2\,(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,p + ({\pi_{12}}^2 - {\pi_{23}}^2 - {\pi_{31}}^2)\,p^2}{{\pi_{12}}^2 + {\pi_{24}}^2 + {\pi_{14}}^2 + 2\,(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,p + ({\pi_{23}}^2 + {\pi_{31}}^2 + {\pi_{12}}^2)\,p^2}$$

Dit is weer een 2e graadskromme op de eenheidsbol, dus een cirkel. Het vlak van deze cirkel $AX + BY + CZ + D = 0$ bepalen we uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -2\pi_{12}\pi_{14}\,A + 2\pi_{12}\pi_{24}\,B + ({\pi_{12}}^2 - {\pi_{24}}^2 - {\pi_{14}}^2)\,C &+ \\ + ({\pi_{12}}^2 + {\pi_{24}}^2 + {\pi_{14}}^2)\,D &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{12}\,(\pi_{31} + \pi_{24})\,A + \pi_{12}\,(\pi_{23} + \pi_{14})\,B - (\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,C &+ \\ + (\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})\,D &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi_{12}\pi_{23}\,A - 2\pi_{12}\pi_{31}\,B + ({\pi_{12}}^2 - {\pi_{23}}^2 - {\pi_{31}}^2)\,C &+ \\ + ({\pi_{23}}^2 + {\pi_{31}}^2 + {\pi_{12}}^2)\,D &= 0 \end{aligned}$$

De loodlijn uit O op dit vlak neergelaten wordt nu:

$$\frac{X}{-\begin{vmatrix} 2\pi_{12}\pi_{24} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ \pi_{12}(\pi_{23}+\pi_{14}) & 0 & \pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14} \\ -2\pi_{12}\pi_{31} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} -2\pi_{12}\pi_{14} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ \pi_{12}(\pi_{31}+\pi_{24}) & 0 & \pi_{23}\pi_{23}-\pi_{31}\pi_{14} \\ 2\pi_{12}\pi_{23} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{Z}{-\begin{vmatrix} -2\pi_{12}\pi_{14} & 2\pi_{12}\pi_{24} & \pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ \pi_{12}(\pi_{31}+\pi_{24}) & \pi_{12}(\pi_{23}+\pi_{14}) & \pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14} \\ \pi_{12}\pi_{23} & -\pi_{12}\pi_{31} & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2+\pi_{12}^2 \end{vmatrix}}$$

Na enige herleidingen en met gebruikmaking van de fundamentaal-relatie: $\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{14}\pi_{23}=0$ vindt men hieruit:

$$\frac{X}{2\pi_{12}^3(\pi_{23}-\pi_{14})\{(\pi_{14}+\pi_{23})^2+(\pi_{24}+\pi_{31})^2\}} =$$

$$= \frac{Y}{2\pi_{12}^3(\pi_{24}-\pi_{31})\{(\pi_{14}+\pi_{23})^2+(\pi_{24}+\pi_{31})^2\}} =$$

$$= \frac{Z}{2\pi_{12}^3(\pi_{12}-\pi_{34})\{(\pi_{14}+\pi_{23})^2+(\pi_{24}+\pi_{31})^2\}}$$

Als nu $\pi_{12}\neq 0$ en $\pi_{14}\neq -\pi_{23}$ of $\pi_{24}\neq -\pi_{31}$ dan vinden we dus:

$$\frac{X}{\pi_{23}-\pi_{14}} = \frac{Y}{\pi_{24}-\pi_{31}} = \frac{Z}{\pi_{12}-\pi_{34}}. \qquad (1)$$

Analoog vinden we voor de snijpunten der X' as en Y' as van R_3' met de eenheidsbol om O in R_3 cirkels, waarvan de loodlijnen uit O op hun vlakken neergelaten tot vergelijkingen hebben:

$$\frac{X}{2\pi_{12}^3(\pi_{23}-\pi_{14})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{31}+\pi_{24})^2\}} =$$

$$= \frac{Y}{2\pi_{12}^3(\pi_{24}-\pi_{31})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^3+(\pi_{31}+\pi_{24})^2\}} =$$

$$= \frac{Z}{2\pi_{12}^3(\pi_{12}-\pi_{34})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{31}+\pi_{24})^2\}}$$

en

$$\frac{X}{2\pi_{12}^3(\pi_{23}-\pi_{14})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{14}+\pi_{23})^2\}}=$$

$$=\frac{Y}{2\pi_{12}^3(\pi_{24}-\pi_{31})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{14}+\pi_{23})^2\}}=$$

$$=\frac{Z}{2\pi_{12}^3(\pi_{12}-\pi_{34})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{14}+\pi_{23})^2\}}.$$

We vinden nu de volgende stelling:

Een willekeurige rechte l in R_3'' beeldt de standen uit van R_3' ten opzichte van R_3, die uit een zekere stand verkregen worden door rotatie om een as door O in R_3.

Voor de beginstand kan men nu elk der ∞^1 standen nemen die door de punten van l worden gekarakteriseerd. Gaat l niet door O in R_3'' dan behoort hier niet de aanvangsstand toe.

De vergelijkingen (1) leren ons uit de gegeven rechte l de rotatieas af te leiden. Omgekeerd echter blijkt, dat bij een gegeven rotatie as

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c} \text{ in } R_3 \text{ de rechten } \frac{\pi_{23}-\pi_{14}}{a}=\frac{\pi_{24}-\pi_{31}}{b}=\frac{\pi_{12}-\pi_{34}}{c} \quad (2)$$

in de beeldruimte R_3'' behoren, die alle een rotatie om die as aangeven. Al die rechten in R_3'' vormen blijkens de vergelijkingen (2) een congruentie. Dit is in overeenstemming met de omstandigheid, dat in R_3'' zich ∞^4 rechten bevinden, terwijl in R_3 het aantal rechten door O ∞^2 bedraagt. Met iedere rechte door O in R_3 komen dus ∞^2 rechten in R_3'' overeen.

Om de richtlijnen van de congruentie (2) te bepalen, schrijven we haar liever in lijncoördinaten.

$$\begin{aligned} &ap_{12} &&+ cp_{14} - cp_{23} && - ap_{34} = 0 \\ &bp_{12} + cp_{31} && && - cp_{24} - bp_{34} = 0 \end{aligned}$$

We vermenigvuldigen de eerste vergelijking met λ en de tweede met μ en bepalen λ en μ zodanig, dat:

$$(a^2+c^2)\,\lambda^2 + 2ab\lambda\mu + (b^2+c^2)\,\mu^2 = 0 \quad (3)$$

Als nu $(\lambda_1\mu_1)$ en (λ_2, μ_2) de wortels van (3) voorstellen, vinden we de speciale complexen:

$$(a\lambda_1 + b\mu_1)p_{12} + c\mu_1 p_{31} + c\lambda_1 p_{14} - c\lambda_1 p_{23} - c\mu_1 p_{24} - (a\lambda_1 + b\mu_1)p_{34} = 0$$

en

$$(a\lambda_2 + b\mu_2)p_{12} + c\mu_2 p_{31} + c\lambda_2 p_{14} - c\lambda_2 p_{23} - c\mu_2 p_{24} - (a\lambda_2 + b\mu_2)p_{34} = 0$$

Omdat de discriminant van (3): $a^2b^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)$ kleiner is dan nul zijn $(\lambda_1\mu_1)$ en $(\lambda_2\mu_2)$ toegevoegd complex en dito de richtlijnen van onze congruentie. Onder de rechten der congruentie (2) is er een door O'' (oorsprong in R_3'') n.l.:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{-b} = \frac{p}{c} \qquad (4)$$

Uit (3) volgt:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{-ab + ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a^2 + c^2} \text{ en } \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{-ab - ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a^2 + c^2}$$

en hieruit volgen de lijncoördinaten der beide richtlijnen:

$$\{-bc - ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};\quad -(a^2 + c^2);\quad ab - ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$
$$-ab + ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};\quad a^2 + c^2;\quad bc + ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$$

$$\{-bc + ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};\quad -(a^2 + c^2);\quad ab + ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$
$$-ab - ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};\quad a^2 + c^2;\quad bc - ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$$

We bewijzen nu de volgende stelling:

De beide richtlijnen der congruentie (2) *vormen een paar beschrijvende lijnen van een der regelscharen op de kwadriek* $m^2 + n^2 + p^2 + 1 = 0$ *in de punten, waar de rechte* (4) *de genoemde kwadriek snijdt.*

De rechte (4) snijdt n.l. $m^2 + n^2 + p^2 + 1 = 0$ in de punten:

$$\{ai,\quad -bi,\quad ci,\quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\} \text{ en}$$
$$\{-ai,\quad bi,\quad -ci,\quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$$

De beide regelscharen zijn:

$$\left.\begin{aligned} m + ip &= \lambda(n + i) \\ \lambda(m - ip) &= -n + i \end{aligned}\right\} \text{ en}$$

$$\left.\begin{aligned} m + ip &= \mu(-n + i) \\ \mu(m - ip) &= n + i. \end{aligned}\right\}$$

Voor de rechten door de genoemde snijpunten vinden we nu:

$$\lambda_1 = \frac{(a + ci)\,(b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})}{a^2 + c^2}$$

$$\mu_1 = \frac{(a + ci)\,(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})}{a^2 + c^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(-a - ci)\,(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})}{a^2 + c^2}$$

$$\mu_2 = \frac{(-a - ci)\,(b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})}{a^2 + c^2}.$$

Substitueren we dit in de vergelijkingen der bedoelde regelscharen, dan vinden we achtereenvolgens:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & (-a - ci)\,f_1 & i & (-ai + c)\,f_1 \\ (a + ci)\,f_1 & 1 & (-ai + c)\,f_1 & -i \end{matrix} \right\| \quad \text{en}$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & (a + ci)\,f_2 & i & (-ai + c)\,f_2 \\ (a + ci)\,f_2 & -1 & (-ai + c)\,f_2 & -i \end{matrix} \right\|$$

voor λ_1 en μ_1 ; f_1 en f_2 zijn hierbij respectievelijk

$$\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a^2 + c^2} \quad \text{en} \quad \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a^2 + c^2}.$$

We vinden nu dat de tweede matrix juist de eerste der bedoelde richtlijnen geeft. Analoog voor λ_2 en μ_2.

We kunnen nu ons de vraag stellen: Hoe ziet een waarnemer, die met de bewegende R_3' wordt meegevoerd de standen van R_3 ten opzichte van R_3'?

We denken ons hiertoe de eenheidsbol om O in R_3' en bepalen het snijpunt hiervan met de X as van R_3. We vinden nu:

$$X' = \frac{1 + m^2 - n^2 - p^2}{1 + m^2 + n^2 + p^2}$$

$$Y' = \frac{2\,(p - mn)}{1 + m^2 + n^2 + p^2}$$

$$Z' = \frac{2\,(n + mp)}{1 + m^2 + n^2 + p^2}.$$

Nemen we weer in de beeldruimte R_3'' de rechte l:

$$m = \frac{\pi_{23}p + \pi_{24}}{\pi_{12}}; \quad n = \frac{\pi_{13}p - \pi_{14}}{\pi_{12}}.$$

We krijgen nu na substitutie:

$$X' = \frac{\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 - \pi_{14}^2 + 2(\pi_{23}\pi_{24} + \pi_{31}\pi_{14})p + (\pi_{23}^2 - \pi_{31}^2 - \pi_{12}^2)p^2}{\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 + 2(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})p + (\pi_{23}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{12}^2)p^2}$$

$$Y' = \frac{2\pi_{14}\pi_{24} + 2(\pi_{14}\pi_{23} - \pi_{24}\pi_{31} + \pi_{12}^2)p - 2\pi_{23}\pi_{31}p^2}{\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 + 2(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})p + (\pi_{23}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{12}^2)p^2}$$

$$Z' = \frac{-2\pi_{12}\pi_{14} + 2\pi_{12}(\pi_{31} + \pi_{24})p + 2\pi_{12}\pi_{23}p^2}{\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 + 2(\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})p + (\pi_{23}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{12}^2)p^2}$$

Dit is weer een 2e graadskromme op die eenheidsbol, dus een cirkel. Het vlak van deze cirkel $AX' + BY' + CZ' + D = 0$ bepalen we nu uit de vergelijkingen:

$$(\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 - \pi_{14}^2)A + 2\pi_{14}\pi_{24}B - 2\pi_{12}\pi_{14}C + \\ + (\pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2)D = 0$$

$$(\pi_{23}\pi_{24} + \pi_{31}\pi_{14})A + (\pi_{14}\pi_{23} - \pi_{24}\pi_{31} + \pi_{12}^2)B + \pi_{12}(\pi_{31} + \pi_{24})C + \\ + (\pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14})D = 0$$

$$(\pi_{23}^2 - \pi_{31}^2 - \pi_{12}^2)A - 2\pi_{23}\pi_{31}B + 2\pi_{12}\pi_{23}C + \\ + (\pi_{12}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{23}^2)D = 0.$$

De loodlijn uit O op dit vlak neergelaten wordt nu:

$$\frac{X'}{\begin{vmatrix} -2\pi_{12}\pi_{24} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}(\pi_{23} - \pi_{14}) & 0 & \pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14} \\ -2\pi_{12}\pi_{31} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{23}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{12}^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{Y'}{\begin{vmatrix} 2\pi_{12}\pi_{14} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}(\pi_{31} - \pi_{24}) & 0 & \pi_{23}\pi_{24} - \pi_{14}\pi_{31} \\ 2\pi_{12}\pi_{23} & 2\pi_{12}^2 & \pi_{12}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{24}^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{Z'}{\begin{vmatrix} 2\pi_{12}\pi_{14} & -2\pi_{12}\pi_{24} & \pi_{12}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}(\pi_{31} - \pi_{24}) & -\pi_{12}(\pi_{23} - \pi_{14}) & \pi_{23}\pi_{24} - \pi_{31}\pi_{14} \\ 2\pi_{12}\pi_{23} & -\pi_{12}\pi_{31} & \pi_{23}^2 + \pi_{31}^2 + \pi_{12}^2 \end{vmatrix}}$$

of na uitwerking, onder toepassing van de fundamentaalrelatie:

$$\frac{X'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{14}+\pi_{23})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{31}-\pi_{24})^2\}} =$$
$$= \frac{Y'}{2\pi_{12}^3(\pi_{31}+\pi_{24})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{31}-\pi_{24})^2\}} =$$
$$= \frac{Z'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{12}+\pi_{34})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{31}-\pi_{24})^2\}}.$$

Als nu $\pi_{12} \neq 0$ en $\pi_{12} \neq \pi_{34}$ of $\pi_{31} \neq \pi_{24}$ dan vinden we:

$$\frac{X'}{\pi_{14}+\pi_{23}} = \frac{Y'}{-\pi_{31}-\pi_{24}} = \frac{Z'}{\pi_{12}+\pi_{34}} \tag{5}$$

Analoog vinden we voor de snijpunten der Y as en Z as van R_3 met de eenheidsbol om O in R_3' cirkels, waarvan de loodlijnen uit O op hun vlakken neergelaten tot vergelijkingen hebben:

$$\frac{X'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{14}+\pi_{23})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{14}-\pi_{23})^2\}} =$$
$$= \frac{Y'}{2\pi_{12}^3(\pi_{31}+\pi_{24})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{14}-\pi_{23})^2\}} =$$
$$= \frac{Z'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{12}+\pi_{34})\{(\pi_{12}-\pi_{34})^2+(\pi_{14}-\pi_{23})^2\}}$$

en

$$\frac{X'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{23}+\pi_{14})\{(\pi_{23}-\pi_{14})^2+(\pi_{31}-\pi_{24})^2\}} =$$
$$= \frac{Y'}{2\pi_{12}^3(\pi_{31}+\pi_{24})\{(\pi_{31}-\pi_{24})^2+(\pi_{23}-\pi_{14})^2\}} =$$
$$= \frac{Z'}{-2\pi_{12}^3(\pi_{12}+\pi_{34})\{(\pi_{31}-\pi_{24})^2+(\pi_{23}-\pi_{14})^2\}}.$$

We vinden nu de volgende stelling:

Als R_3' wentelt ten opzichte van R_3 om een as door O in R_3 dan roteert R_3 ten opzichte van R_3' om een as door O in R_3'.

De vergelijkingen (5) leren ons uit de gegeven rechte l in R_3'' de rotatieas in R_3' af te leiden. Omgekeerd echter blijkt, dat bij een gegeven rotatieas

$$\frac{X'}{a} = \frac{Y'}{b} = \frac{Z'}{c} \text{ in } R_3'$$

de rechten

$$\frac{\pi_{14} + \pi_{23}}{a} = \frac{\pi_{31} + \pi_{24}}{-b} = \frac{\pi_{12} + \pi_{34}}{c}$$

in de beeldruimte R_3'' behoren, die alle een rotatie om die as betekenen. Deze rechten vormen ook een congruentie. We bepalen ook nu weer de richtlijnen van deze congruentie.

$$\begin{aligned} &ap_{12} \qquad\qquad - cp_{14} - cp_{23} \qquad\qquad + ap_{34} = 0 \\ &bp_{12} + cp_{31} \qquad\qquad\qquad\qquad + cp_{24} + bp_{34} = 0. \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze, als bij de vorige congruentie vinden we λ en μ ter bepaling van de speciale complexen uit

$$(a^2 + c^2)\,\lambda^2 + 2ab\lambda\mu + (b^2 + c^2)\,\mu^2 = 0$$

Dit is dezelfde vergelijking als (3). Ook nu behoort tot de congruentie (5) weer de rechte

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{-b} = \frac{p}{c} \text{ door } O'' \text{ in } R_3''.$$

Als lijncoördinaten der richtlijnen vinden we nu:

$$\{bc + ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;\, a^2 + c^2\,;\, -ab + ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;$$
$$-ab + ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;\, a^2 + c^2\,;\, bc + ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\} \text{ en}$$
$$\{bc - ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;\, a^2 + c^2\,;\, -ab - ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;$$
$$-ab - ci\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,;\, a^2 + c^2\,;\, bc - ai\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}$$

Hieruit volgt nu weer deze stelling, die nauw met de voorlaatste samenhangt:

De beide richtlijnen der congruentie 5 *vormen een paar beschrijvende lijnen van de tweede der regelscharen op de kwadriek*

$$m^2 + n^2 + p^2 + 1 = 0$$

in de punten, waar de rechte (4) *deze kwadriek snijdt.*

We vinden n.l. dat

$$\left\| \begin{matrix} 1 & ;\ (-a - ci)\,t_1\ ; & i & ;\ (-ai + c)\,t_1 \\ (a + ci)\,t_1 & 1 & (-ai + c)\,t_1 & -i \end{matrix} \right\|$$

de tweede der bovenstaande richtlijnen geeft. Hierbij heeft f_1 weer dezelfde betekenis als te voren. Analoog kunnen we te werk gaan voor de eerste der hier bedoelde richtlijnen.

Bij het opsporen der vlakken van de hier optredende cirkels moesten een 24 tal determinanten in factoren worden ontbonden. De hiervoor benodigde herleidingen waren nogal langdurig, waarom we ze hier niet hebben opgenomen. Als voorbeeld zullen we er hier echter een weergeven:

$$-\begin{vmatrix} 2\pi_{14}\pi_{24} & 2\pi_{12}\pi_{14} & \pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ -2(\pi_{12}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}\pi_{31}) & 2\pi_{12}(\pi_{24}-\pi_{31}) & 2(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) \\ -2\pi_{23}\pi_{31} & 2\pi_{12}\pi_{13} & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2+\pi_{12}^2 \end{vmatrix} =$$

$$-4\pi_{12}\begin{vmatrix} \pi_{14}\pi_{24} & \pi_{14} & \pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}\pi_{31} & \pi_{24}-\pi_{31} & 2(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) \\ -\pi_{23}\pi_{24} & \pi_{23} & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2+\pi_{12}^2 \end{vmatrix} =$$

$$-4\pi_{12}\begin{vmatrix} 0 & \pi_{14} & \pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2 & \pi_{24}-\pi_{31} & 2(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) \\ -\pi_{23}(\pi_{31}+\pi_{24}) & \pi_{23} & \pi_{23}^2+\pi_{31}^2+\pi_{12}^2 \end{vmatrix} =$$

$$-4\pi_{12}\begin{vmatrix} 0 & \pi_{14} & \pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2 \\ -\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2 & \pi_{24}-\pi_{31} & 2(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) \\ -\pi_{23}(\pi_{31}+\pi_{24}) & \pi_{23}-\pi_{14} & \pi_{23}^2-\pi_{14}^2+\pi_{31}^2-\pi_{24}^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} 4\pi_{12}\,[&2\pi_{14}\pi_{23}(\pi_{31}+\pi_{24})(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) + \\ &+(\pi_{14}-\pi_{23})(\pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2)(-\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2) + \\ &-\pi_{23}(\pi_{24}^2-\pi_{31}^2)(\pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2) + \\ &+\pi_{14}(-\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2)(\pi_{23}^2-\pi_{14}^2) + \\ &+\pi_{14}(-\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2)(\pi_{31}^2-\pi_{24}^2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})\,[&(\pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2)(\pi_{12}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}^2) + \\ &-(\pi_{12}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}^2)(\pi_{14}\pi_{23}+\pi_{14}^2)] + \\ &+4\pi_{12}(\pi_{31}+\pi_{24})[2\pi_{14}\pi_{23}(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{24}) + \\ &+\pi_{23}(\pi_{31}-\pi_{24})(\pi_{12}^2+\pi_{24}^2+\pi_{14}^2) + \\ &+\pi_{14}(\pi_{31}-\pi_{24})(-\pi_{12}^2+\pi_{23}\pi_{14}-\pi_{24}^2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\pi_{21}(\pi_{23}-\pi_{14})&(\pi_{12}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24})^2 + \\ &+4\pi_{12}(\pi_{31}+\pi_{24})[2\pi_{14}\pi_{23}(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14}) + \\ &+(\pi_{31}-\pi_{24})(\pi_{23}-\pi_{14})(\pi_{12}^2+\pi_{24}^2)+\pi_{23}\pi_{14}^2(\pi_{31}-\pi_{24}) + \\ &+\pi_{14}^2\pi_{23}(\pi_{31}-\pi_{24})] = \end{aligned}$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})(\pi_{12}{}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}{}^2)+$$
$$+\,4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})(\pi_{12}{}^2+\pi_{24}{}^2)(\pi_{31}{}^2-\pi_{24}{}^2)+$$
$$+\,4\pi_{12}(\pi_{31}+\pi_{24})[2\pi_{14}\pi_{23}(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{31}\pi_{14})+2\pi_{14}{}^2\pi_{23}(\pi_{31}-\pi_{24})]=$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})[\pi_{12}{}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}{}^2)^2+(\pi_{14}{}^2+\pi_{24}{}^2)(\pi_{31}{}^2-\pi_{24}{}^2)]+$$
$$+\,8\pi_{12}\pi_{14}\pi_{23}(\pi_{31}+\pi_{24})(\pi_{23}\pi_{24}-\pi_{14}\pi_{24})=$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})[(\pi_{12}{}^2-\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{24}{}^2)^2+(\pi_{12}{}^2+\pi_{24}{}^2)(\pi_{31}{}^2-\pi_{24}{}^2)+$$
$$+\,2\pi_{14}\pi_{23}\pi_{24}(\pi_{31}+\pi_{24})]=$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})[(\pi_{12}{}^2+\pi_{24}{}^2)(\pi_{12}{}^2-2\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}{}^2)+\pi_{23}{}^2\pi_{14}{}^2+$$
$$+\,2\pi_{14}\pi_{23}\pi_{24}(\pi_{31}+\pi_{24})]=$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})[\pi_{12}{}^2(\pi_{12}{}^2-2\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}{}^2+\pi_{24}{}^2)+(\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{23}\pi_{14})^2]=$$

$$4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})[\pi_{12}{}^2(\pi_{12}{}^2-2\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}{}^2+\pi_{24}{}^2)+(\pi_{41}\pi_{24}+\pi_{23}\pi_{14})]=$$
$$=4\pi_{12}(\pi_{23}-\pi_{14})\times\pi_{12}{}^2(\pi_{12}{}^2-2\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}{}^2+\pi_{24}{}^2+\pi_{34}{}^2)=$$
$$=4\pi_{12}{}^3(\pi_{23}-\pi_{14})(\pi_{12}{}^2+2\pi_{12}\pi_{34}+2\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{31}{}^2+\pi_{24}{}^2+\pi_{34}{}^2)=$$

$$4\pi_{12}{}^3(\pi_{23}-\pi_{14})\{(\pi_{12}+\pi_{34})^2+(\pi_{31}+\pi_{24})^2\}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de fundamentaalrelatie

$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{14}\pi_{23}=0$$

Analoog de 23 andere.

Men kan tot de resultaten, die hier zijn afgeleid gedeeltelijk ook op een andere wijze komen. De determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

geeft de aanvangsstand aan, waarbij de assen in R_3' samenvallen met de gelijknamige assen in R_3. Deze stand wordt afgebeeld op het punt $\{1, 0, 0, 0\}$ van de beeldruimte, d.w.z. op de oorsprong O'' van R_3''. Laten we nu R_3' wentelen om de Z as van R_3 over een hoek α, hierbij uitgaande van de aanvangsstand, dan vinden we de nieuwe stand van R_3' uit:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

De coördinaten van deze nieuwe stand zijn

$$\lambda = 2\cos\alpha + 2;\ \mu = 0;\ \nu = 0;\ \pi = -2\sin\alpha.$$

Hieruit volgt, dat het beeldpunt bij variërende α de P as der beeldruimte doorloopt. Analoge beschouwingen gelden voor de rotaties om de X as en de Y as. Als $\alpha = 180^\circ$ worden alle coördinaten nul. Deze stand wordt gekarakteriseerd door:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Deze determinant ontstaat door in de algemene gedaante van de orthogonale determinant van de 3de orde te substitueren:

$$\lambda = \mu = \nu = 0 \ ; \ \pi \neq 0.$$

Deze stand wordt dus uitgebeeld door het oneigenlijke punt van de P as der beeldruimte, wat geheel aansluit bij

$$p = \frac{-2 \sin \alpha}{2 + 2 \cos \alpha} = - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Nu gaan we weer uit van de beginstand, waarbij beide assenstelsels samenvallen, maar draaien nu om een willekeurige rechte door O in R_3. We denken ons de eenheidsbol om O in R_3. De snijpunten der assen van R_3 en de rotatieas met deze bol zijn respectievelijk X, Y, Z, P. De hoeken XOP, YOP, ZOP noemen we a, b en c; de standhoeken der tweevlakshoeken

$$X\,(OP)\,Y \ ; \ X\,(OP)\,Z \ ; \ Y\,(OP)\,Z$$

noemen we achtereenvolgens C, B en A. Draaien we nu R_3' uit de aanvangsstand in positieve zin over een hoek α, dan vinden we de nieuwe stand van R_3' ten opzichte van R_3 uit de determinant:

$$\begin{vmatrix} \cos^2 a + \sin^2 a \cos \alpha & \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos (C+\alpha) & \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos (B-\alpha) \\ \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos (C-\alpha) & \cos^2 b + \sin^2 b \cos \alpha & \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos (A+\alpha) \\ \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos (B+\alpha) & \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos (A-\alpha) & \cos^2 c + \sin^2 c \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Hieruit vinden we:

$\lambda = 2\,(1 + \cos \alpha) = 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$

$\mu = -2 \sin b \sin c \sin \alpha \sin A = -2 \sin \alpha \cos a = -4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos a$

$\nu = +2 \sin a \sin c \sin \alpha \sin B = +2 \sin \alpha \cos b = +4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos b$

$\pi = -2 \sin a \sin b \sin \alpha \sin C = -2 \sin \alpha \cos c = -4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos b.$

Hierbij is op het volgende te letten. Verlengt men in de boldriehoek XYZ de boog XP tot zij de zijde YZ in D snijdt dan vinden we nu

$$\sin A = \frac{\sin PZD}{\sin b} = \frac{\sin PD}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a}{\sin b \sin c} \text{ enz.}$$

Uit dit alles volgt nu, dat de standen van R_3' ten opzichte van R_3 die verkregen worden door draaiing om de rechte

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c}$$

van R_3 worden afgebeeld op de punten van de rechte

$$\frac{m}{\cos a} = \frac{n}{-\cos b} = \frac{p}{\cos c}$$

van de beeldruimte R_3'', wat geheel in overeenstemming is, met het vroeger verkregen resultaat. Ook nu worden λ, μ, ν en π alle nul voor $\alpha = 180°$. De determinant die deze stand van R_3' aangeeft wordt nu:

$$\begin{vmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C & \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B \\ \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C & \cos^2 b - \sin^2 b & \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A \\ \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B & \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A & \cos^2 c - \sin^2 c \end{vmatrix}$$

wat in verband met de omstandigheid, dat de boldriehoek rechtzijdig is, zich laat herleiden tot:

$$A \begin{vmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & 2 \cos a \cos b & 2 \cos a \cos c \\ 2 \cos a \cos b & \cos^2 b - \sin^2 b & 2 \cos b \cos c \\ 2 \cos a \cos c & 2 \cos b \cos c & \cos^2 c - \sin^2 c \end{vmatrix}$$

De parametervoorstelling van Cayley is nu niet zonder meer bruikbaar; we moeten dus nu ons bedienen van de bijzondere voorstelling voor het uitzonderingsgeval.

Stellen we de elementen rechts van de hoofddiagonaal u, v, w, dan vinden we voor de coördinaten die deze stand afbeelden:

$$
\begin{aligned}
uv &= 4 \cos^2 a \cos b \cos c \\
-uw &= -4 \cos a \cos^2 b \cos c \\
vw &= 4 \cos a \cos b \cos^2 c
\end{aligned}
$$

of in aansluiting op het oorspronkelijke coördinatenstelsel:

$$\lambda = 0, \ \mu = \cos a \ ; \ \nu = -\cos b \ ; \ \pi = \cos c$$

Deze stand kunnen we dus afbeelden op het oneigenlijke punt van de rechte

$$\frac{m}{\cos a} = \frac{n}{-\cos b} = \frac{p}{\cos c}$$

van de beeldruimte R_3'' wat weer in overeenstemming is met de omstandigheid dat de stand die ontstaan was door rotatie over de hoek α werd afgebeeld op het punt van die rechte, dat men verkreeg door in positieve zin een stuk $-\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ op de beeldrechte af te passen. Beschouwen we omgekeerd de rechte

$$\frac{m}{\cos a} = \frac{n}{-\cos b} = \frac{p}{\cos c}$$

in de beeldruimte R_3'' en passen we hierop in positieve zin een stuk $-\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ af dan beantwoordt aan het aldus verkregen beeldpunt de stand gekarakteriseerd door:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{1 + (\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{-2 \cos c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos a \cos b \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{2 \cos b \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos a \cos c \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} \\[2ex]
\dfrac{2 \cos c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos a \cos b \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{1 + (-\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{-2 \cos a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos b \cos c \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} \\[2ex]
\dfrac{-2 \cos b \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos a \cos c \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{2 \cos a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cos b \cos c \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} & \dfrac{1 + (-\cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 c) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}
\end{vmatrix}
$$

Hieruit vinden we na enige herleiding weer:

$$\begin{vmatrix} \cos^2 a+\sin^2 a \sin \alpha & \cos a \cos b+\sin a \sin b \cos (C+\alpha) & \cos a \cos c+\sin a \sin c \cos (B-\alpha) \\ \cos a \cos b+\sin a \sin b \cos (C-\alpha) & \cos^2 b+\sin^2 b \sin \alpha & \cos b \cos c+\sin b \sin c \cos (A+\alpha) \\ \cos a \cos c+\sin a \sin c \cos (B+\alpha) & \cos b \cos c+\sin b \sin c \cos (A-\alpha) & \cos^2 c+\sin^2 c \sin \alpha \end{vmatrix}$$

waaruit weer blijkt dat de punten van deze rechte de standen van R_3' weergeven, verkregen uit de aanvangsstand door rotatie om de rechte

$$\frac{X}{\cos a}=\frac{Y}{\cos b}=\frac{Z}{\cos c} \text{ van } R_3$$

Laten we gemakshalve de M, N en P as van R_3'' vallen langs de X, Y, Z as van R_3 zodat R_3 en R_3'' geheel samenvallen, dan vinden we dus de beeldpunten der standen van R_3' door OP te spiegelen in het YZ (NP) vlak en vervolgens op de gespiegelde rechte stukken $-\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ af te passen van af de oorsprong, als α de draaiingshoek om OP is.

Gaan we in plaats van uit de aanvangsstand van R_3' uit van een willekeurige stand van R_3' gegeven door:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}$$

en laten we nu weer R_3' wentelen om de as OP, dan kunnen we ons afvragen welke beeldpunten van R_3' met deze standen corresponderen. Deze beginstand wordt afgebeeld door een eigenlijk of oneigenlijk punt van R_3'' al naarmate deze determinant niet of wel in de uitzonderingspositie verkeert. In elk geval is het beeldpunt volkomen bepaald. Wijl een analytische behandeling nu wat stroef wordt, gaan we liever meetkundig te werk en bedienen ons hierbij van de bekende eigenschappen der mechanica. De hierboven aangegeven beginstand kan uit de aanvangsstand worden verkregen door R_3' te wentelen om een as OQ over een hoek β welke door beide standen volkomen vastgelegd zijn. Nu kan men de rotatie over β om OQ gevolgd door die over α om OP vervangen door een rotatie om een as OR, welke op de bekende wijze uit OQ en OP en de hoeken α en β kan worden afgeleid, over een hoek γ, die zoals eenvoudig af te leiden is uit α en β verkregen wordt volgens de formule:

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta - \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos POQ$$

Spiegelen we nu OP, OQ en OR in het YZ vlak en passen we op de gespiegelde rechten stukken OP', OQ' en OR' af respectievelijk $-\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha$, $-\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta$, $-\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma$ dan krijgen we de beeldpunten der standen door genoemde rotaties verkregen. Bovendien passen we op laatstgenoemde rechten ook nog stukken

$$OP_2 = OQ_2 = OR_2 = 1 \text{ af.}$$

Houden we nu β vast en laten we α lopen van 0°—360° dan zal het vlak OQ_2R_2 niet van stand veranderen. Denken we ons de eenheidsbol om O en laten we in de boldriehoek $P_2Q_2R_2$ de loodboog P_2S_2 neer op Q_2R_2 en stellen deze δ.
Projecteren we nu R' in S' op OS_2 dan zal de projecterende loodlijn $R'S'$ constant van lengte zijn n.l. $\operatorname{tg} \delta$ want $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma \sin R_2OS_2$. Hieruit volgt dat het punt R' een rechte doorloopt in het vlak OQ_2S_2 welke evenwijdig loopt met OS_2 en die gaat door 't punt Q'. Eenvoudig is in te zien, dat $2 \times \angle Q_2P_2S_2$ de rotatiehoek aangeeft, welke correspondeert met het oneigenlijke punt der beeldrechte. Er zijn ∞^3 aanvangsstanden. Toch krijgen we bij elke rotatieas maar ∞^2 beeldrechten, want ∞^1 standen geven telkens weer dezelfde beeldrechte. Immers uitgaande van een willekeurige beginstand van R_3' zullen alle standen die hieruit verkregen worden door rotatie om een bepaalde as, dezelfde reeks standen opleveren, als zij op hun beurt als uitgangsstand worden gekozen.

C. Vierdimensionaal.

We zullen nu de bewegingen nagaan in een vierdimensionale ruimte R_4. We denken ons daartoe een veranderlijke R_4' die beweegt in de vaste R_4 en waarbij ook nu het punt O op zijn plaats blijft. Weer kunnen we deze bewegingen beschrijven, door het kiezen van een vast Cartesiaans coördinatenstelsel $\{X, Y, Z, T\}$ in R_4 met O als oorsprong en een dito $\{X'Y'Z'T'\}$ in R_4'. De samenhang tussen beide wordt gegeven door de vergelijkingen:

$$X = a_{11}\,X' + a_{12}\,Y' + a_{13}\,Z' + a_{14}\,T'$$
$$Y = a_{21}\,X' + a_{22}\,Y' + a_{23}\,Z' + a_{24}\,T'$$
$$Z = a_{31}\,X' + a_{32}\,Y' + a_{33}\,Z' + a_{34}\,T'$$
$$T = a_{41}\,X' + a_{42}\,Y' + a_{43}\,Z' + a_{44}\,T'$$

Hierin zijn a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} enz. de cosinussen der hoeken, die de X', Y', Z', T' assen achtereenvolgens maken met de X, Y, Z, T assen. Denken we ons beide assenstelsels in denzelfden zin gekozen, dan zal de determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

die orthogonaal is de waarde 1 hebben. Als nu deze determinant niet nul wordt, wanneer we de elementen van zijn hoofddiagonaal met 1 vermeerderen, laten zijn elementen volgens de inleiding zich uitdrukken als rationale functies van 6 parameters en zijn dus de hiermee corresponderende standen afbeeldbaar op de punten van een zesdimensionale beeldruimte R_6 en wel op de eigenlijke punten hiervan. De overige determinanten karakteriseren standen, die we in de loop van het volgende per definitie zullen toevoegen aan punten van de oneigenlijke R_5 van de beeld R_6. De bedoelde parametervoorstelling voor bovenstaande determinant is:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & {}_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

Hierin is:

$$A_{11} = \frac{1 - m^2 - n^2 - p^2 + r^2 + s^2 + t^2 - k^2}{N} \qquad A_{12} = \frac{2\,\{m - (nr + ps) + tk\}}{N}$$

$$A_{13} = \frac{2\,\{n + (mr - pt) - sk\}}{N} \qquad A_{14} = \frac{2\,\{p + (ms + nt) + rk\}}{N}$$

$$A =_{21} \frac{2\,\{-m - (nr + ps) - tk\}}{N} \qquad A_{22} = \frac{1 - m^2 + n^2 + p^2 - r^2 - s^2 + t^2 - k^2}{N}$$

$$A_{23} = \frac{2\,\{r - (mn + st) + pk\}}{N} \qquad A_{24} = \frac{2\,\{s - (mp - rt) - nk\}}{N}$$

$$A_{31} = \frac{2\{-n + (mr - pt) - sk\}}{N} \qquad A_{32} = \frac{2\{-r - (mn + st) - pk\}}{N}$$

$$A_{33} = \frac{1 + m^2 - n^2 + p^2 - r^2 + s^2 - t^2 - k^2}{N} \qquad A_{34} = \frac{2\{t - (np + rs) + mk\}}{N}$$

$$A_{41} = \frac{2\{-p + (ms + nt) - rk\}}{N} \qquad A_{42} = \frac{2\{-s - (mp - rt) + nk\}}{N}$$

$$A_{43} = \frac{2\{-t - (mp + rs) - mk\}}{N} \qquad A_{44} = \frac{1 + m^2 + n^2 - p^2 + r^2 - s^2 - t^2 - k^2}{N}$$

waarin

$k = mt - ns + pr$ en $N = 1 + m^2 + n^2 + p^2 + r^2 + s^2 + t^2 + k^2$

en waarbij:

$$m = \frac{\mu}{\lambda}, \; n = \frac{\nu}{\lambda} \; ; \; p = \frac{\pi}{\lambda} \; ; \; r = \frac{\varrho}{\lambda} \; ; \; s = \frac{\sigma}{\lambda} \text{ en } t = \frac{\tau}{\lambda}.$$

Hierbij hangen λ, μ, ν, π, ϱ, σ, τ op de in de inleiding genoemde wijze samen met de elementen van de eerstgenoemde determinant. Kiezen we nu in de beeld R_6 een Cartesiaans coördinatenstelsel (m, n, p, r, s, t) dan geeft de oorsprong van R_6 de volgende determinant weer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Deze karakteriseert die stand van R_4' ten opzichte van R_4, waarbij de assen van R_4' vallen langs de gelijknamige assen van R_4. We zullen deze stand van R_4' weer de aanvangsstand noemen.
Beschouwen we nu de eigenlijke punten van de M as van R_6 waarvoor geldt: $n = p = r = s = t = 0$, dan krijgen we na substitutie de determinant:

$$\begin{vmatrix} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} & \frac{2m}{1 + m^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2m}{1 + m^2} & \frac{1 - m^2}{1 + m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Stellen we nu $m = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ dan gaat bovenstaande determinant over in:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Hieruit blijkt, dat de eigenlijke punten van de M as van R_6 die standen van R_4' ten opzichte van R_4 aangeven, die door rotatie van R_4' om het ZT vlak van R_4 over een willekeurige hoek α uit de aanvangsstand van R_4' worden verkregen, mits $\alpha \neq 180°$ is of een oneven veelvoud hiervan. Uit een door Siacci voor de uitzonderingsdeterminanten gevonden eigenschap volgt, dat er in dit geval slechts één uitzonderingsgeval is n.l.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Men kan deze door limietovergang uit de vorige vinden door hierin $\frac{1}{2}\alpha$ tot 90° te laten naderen. Het ligt nu voor de hand, de door deze determinant gekarakteriseerde stand van R_4' op het oneigenlijke punt van de M as van R_6 af te beelden. Omgekeerd volgt nu, dat alle standen van R_4' die door rotatie van R_4' uit de aanvangsstand zijn afgeleid, hun beeldpunt vinden op de M as van R_6. Analoge beschouwingen gelden voor de punten der N, P, R, S en T as van R_6 die rotaties aangeven om de 5 overige coördinaatvlakken van R_4. We vinden hierbij achtereenvolgens: N as rotatie om YT vlak; P as: rotatie om YZ vlak; R as: rotatie om XT vlak; S as: rotatie om XZ vlak en T as rotatie om XY vlak en omgekeerd. Opgemerkt kan nog worden, dat de hierbij optredende 6 uitzonderingsdeterminanten, o.a. de bovenstaande, alle van het model 2′ zijn besproken in de inleiding.

Beschouwen we vervolgens een willekeurige rechte l door O in R_6 niet met een der coördinaatassen van R_6 samenvallend, bijvoorbeeld

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{c} = \frac{r}{d} = \frac{s}{f} = \frac{t}{g} = u$$

en vragen we ons af welke beweging van R_4' ten opzichte van R_4 door de rechte l wordt afgebeeld, ons hierbij voorlopig beperkend tot haar eigenlijke punten. Gaan we hiertoe nu na het snijpunt der X' as van R_4' met de eenheidshypersfeer om O in R_4:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1$$

We vinden als meetkundige plaats van dit snijpunt in parametervorm:

$$X = \frac{1 + (-a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2 - (ag - bf + cd)^2\,u^4}{1 + (\;\;a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2 + (ag - bf + cd)^2\,u^4}$$

$$Y = \frac{-2au - 2\,(bd + cf)\,u^2 - 2g\,(ag - bf + cd)\,u^3}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2 + (ag - bf + cd)^2\,u^4}$$

$$Z = \frac{-2bu + 2\,(ad - cg)\,u^2 + 2f\,(ag - bf + cd)\,u^3}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2 + (ag - bf + cd)^2\,u^4}$$

$$T = \frac{-2cu + 2\,(af + bg)\,u^2 - 2d\,(ag - bf + cd)\,u^3}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2 + (ag - bf + cd)^2\,u^4}.$$

Dit wordt een vierdegraadskromme op de eenheidshypersfeer tenzij $ag - bf + cd = 0$ in welk geval een cirkel te voorschijn komt. Een bijzondere rol spelen dus die rechten in R_6, die liggen op de tweedegraads vijfdimensionale kegel $mt - ns + pr = 0$. Tot deze kegel behoren bijvoorbeeld alle coördinaatassen van het (m, n, p, r, s, t) stelsel in R_6 welke assen rotaties aanwezen om de coördinaatvlakken van R_4. Voor de rechten van deze kegel wordt de kromme hierboven:

$$X = \frac{1 + (-a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2}$$

$$Y = \frac{-2au - 2\,(bd + cf)\,u^2}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2}$$

$$Z = \frac{-2bu + 2\,(ad - cg)\,u^2}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2}$$

$$T = \frac{-2cu + 2\,(af + bg)\,u^2}{1 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,u^2}.$$

We trachten nu het vlak van deze cirkel te bepalen. Hiertoe zoeken we die drie-dimensionale ruimten

$$AX + BY + CZ + DT + E = 0$$

waaraan identiek voldaan wordt door de punten hierboven in parametervorm gegeven.
We krijgen dan voor A, B, C; D en E het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} &A + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + E = 0 \\ &\qquad aB \quad + bC \quad + cD \qquad\qquad = 0 \\ &(-a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,A - 2\,(bd + cf)\,B + 2\,(ad - fg)\,C + \\ &\quad + 2\,(af + bg)\,D + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,E = 0 \end{aligned}$$

Dit zijn 3 lineaire vergelijkingen in 5 homogene onbekenden. Er zijn dus $(5 - r)$ onafhankelijke oplossingen, waarin r de rang is van de matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 1 \\ 0 & ; & a & ; & b & ; & c & ; & 0 \\ -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2 & ; & -2\,(bd + cf) & ; & 2\,(ad - fg) & ; & 2\,(af + bg) & ; & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 \end{matrix} \right\|$$

welke gelijk is aan die van de matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & a & ; & b & ; & c & ; & 0 \\ -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2 & ; & -2\,(bd + cf) & ; & 2\,(ad - cg) & ; & 2\,(af + bg) & ; & 2\,(a^2 + b^2 + c^2) \end{matrix} \right\|$$

of wel die van de matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & a & ; & b & ; & c & ; & 0 \\ 0 & ; & -bd - cf & ; & ad - cg & ; & af + bg & ; & a^2 + b^2 + c^2 \end{matrix} \right\|$$

We kunnen in plaats hiervan nu ook wel de rang $r - 1$ bepalen van de matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a & ; & b & ; & c & ; & 0 \\ -bd-cf & ; & ad-cg & ; & af+bg & ; & a^2+b^2+c^2 \end{matrix} \right\|$$

Deze matrix heeft de rang 2, tenzij $a^2+b^2+c^2=0$ of als we ons beperken tot reëele rechten: tenzij $a=b=c=0$ in welk geval de genoemde cirkel inschrompelt tot een punt en de X' as blijkbaar in rust verkeert. Alle rechten door O in R_6 waarvoor $m=n=p=0$ vertonen deze merkwaardigheid; het zijn de rechten door O in de R, S, T zij R_3's van R_6. In dit geval zoeken we echter de meetkundige plaats van het snijpunt bijv. van de Y' as met de eenheidshypersfeer. Hiervoor vinden we:

$$X=\frac{2au-2(bd+cf)u^2}{1+(a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2)u^2}$$

$$Y=\frac{1+(-a^2+b^2+c^2-d^2-f^2+g^2)u^2}{1+(a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2)u^2}$$

$$Z=\frac{-2du-2(ab+fg)u^2}{1+(a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2)u^2}$$

$$T=\frac{-2fu-2(ac-dg)u^2}{1+(a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2)u^2}.$$

Dit wordt weer een cirkel, tenzij opnieuw gelijktijdig behalve $a=0$ ook nog $d=f=0$, welk geval we uitsluiten, omdat we veronderstelden, dat l niet samenviel met een der coördinaatassen. Hieruit blijkt, dat we zonder aan de algemeenheid schade te doen, kunnen overgaan tot 't geval, dat niet gelijktijdig $a=b=c=0$ De rang van eerstgenoemde matrix is nu drie. We vinden voor A, B, C, D en E twee onafhankelijke oplossingen plus hun lineaire afgeleiden. Het vlak van die cirkel is dus volkomen bepaald evenals het loodvlak door O hierop. Wanneer dus het beeldpunt de rechte l doorloopt, passeert R_4' van uit de aanvangsstand een rij standen, zodanig dat het snijpunt der X' as met de eenheidshypersfeer een cirkel om dit loodvlak doorloopt.

Een nadere beschouwing van de eerste matrix leert ons nu, dat het vlak van deze cirkel, die we gemakshalve de X' cirkel zullen noemen gaat door de punten:

$$\{1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1\}$$
$$\{0, \quad a, \quad b, \quad c, \quad 0\}$$
$$\{-a^2-b^2-c^2+d^2+f^2+g^2, \quad -2(bd+cf), \quad 2(ad-cg),$$
$$2(af+bg), \quad a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2\}$$

van R_4. Dit vlak snijdt de oneigenlijke R_3 van R_4 dus volgens de verbindingslijn van de punten:

$$\{0, a, b, c, 0\} \text{ en}$$
$$\{a^2+b^2+c^2, \quad bd+cf, \quad -ad+cg, \quad -af-bg, \; 0\}$$

Evenzo vinden we voor het vlak van de Y_0 cirkel de vergelijkingen:

$$B + \qquad\qquad + E = 0$$
$$aA + \qquad -dC + \quad -eD \quad = 0$$
$$-(2bd+cf)A + (-a^2+b^2+c^2-d^2-f^2-g^2)B - 2(ab+fg)C -$$
$$-2(ac-dg)D + (a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2)E = 0.$$

Analoge beschouwingen leren ons weer, dat ook hier de matrix van de coëfficiënten de rang drie heeft. Ook hier is dit vlak en zijn loodvlak door O weer volkomen bepaald.
Het blijkt nu te gaan door de punten:

$$\{0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1\}$$
$$\{a, \quad 0, \quad -d, \quad -e, \quad 0\}$$
$$\{-2(bd+cf)\,; \quad -a^2+b^2+c^2-d^2-f^2+g^2\,; \quad -2(ab+fg)\,;$$
$$-2(ac-dg)\,; \quad a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2\}$$

De oneigenlijke rechte van dit vlak is nu bepaald door de punten:

$\{a, 0, -d, -f, 0\}$ en $\{bd+cf, a^2+d^2+f^2, ab+fg, ac-dg, \; 0\}$

Op overeenkomstige wijze vinden we voor de oneigenlijke rechte van het vlak van de Z' cirkel, een rechte door de punten:

$\{b, d, 0, -g, 0\}$ en $\{-ad+cg, ab+fg, b^2+d^2+g^2, bc+df, 0\}$

en ten slotte voor het vlak van de T' cirkel de rechte door:

$\{c, f, g, 0, 0\}$ en $\{-af-bg, ac-dg, bc+df, c^2+f^2+g^2, 0\}$

We tonen nu aan, dat deze acht oneigenlijke punten op dezelfde rechte liggen.

Hiertoe bepalen we de rang van de matrix:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 \;; & a \;; & b \;; & c \\ -a \;; & 0 \;; & d \;; & f \\ -b \;; & -d \;; & 0 \;; & g \\ -c \;; & -f \;; & -g \;; & 0 \\ a^2+b^2+c^2 \;; & bd+cf \;; & -ad+cg \;; & -af-bg \\ bd+cf \;; & a^2+d^2+f^2 \;; & ab+fg \;; & ac-dg \\ -ad+cg \;; & ab+fg \;; & b^2+d^2+g^2 \;; & bc+df \\ -af-bg \;; & ac-dg \;; & bc+df \;; & c^2+f^2+g^2 \end{array} \right\|$$

door optelling en aftrekking van rijen; na eerst met geschikte factoren vermenigvuldigd te hebben, laat deze matrix zich zonder rangverandering herleiden tot de volgende:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \\ c^2 & cf & cg & 0 \\ 0 & a^2 & ab & ac \\ 0 & ab & b^2 & bc \\ 0 & ac & bc & c^2 \end{array} \right\|$$

Hiervan blijken de laatste vier rijen afhankelijk te zijn van de eerste vier, zodat we slechts de rang behoeven te bepalen van de scheef-symmetrische matrix:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{array} \right\|$$

welke rang twee is, omdat $ag - bf + cd = 0$ en niet alle elementen van de matrix nul zijn. Hiermede is bewezen, dat de snijpunten der X', Y', Z' en T' assen met de eenheidshypersfeer om O in R_4 zich bewegen in evenwijdige vlakken. We bepalen nu eerst het loodvlak door O hierop. Daartoe zoeken we de poolrechte in de oneigenlijke R_3 van R_4 ten opzichte van de isotrope bol

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$$

in die R_3 van de gemeenschappelijke oneindig verre rechte der vlakken van de X', Y', Z' en T' cirkels. Deze poolrechte wordt bepaald door twee onafhankelijke vergelijkingen van de volgende vier afhankelijke:

$$\begin{array}{llll} & aY + bZ + cT & = 0 \\ -aX & + dZ + fT & = 0 \\ -bX - dZ & + gT & = 0 \\ -cX - fY - gZ & & = 0 \end{array}$$

Diezelfde twee vergelijkingen geven het vlak door O en deze rechte in R_4 aan, dus het gevraagde vlak. Men kan dus met 2 van deze 4 vergelijkingen volstaan. We geven ze echter alle vier, wijl niet *a* priori te zeggen valt, welke twee onafhankelijk van elkaar zijn. Is bijv. $a \neq 0$ en zijn de overige grootheden b, c, d, f en g alle nul, dan vinden we in overeenstemming met het vroeger afgeleide, dat bij de M as van R_6 behoort het ZT vlak van R_4. Analoog voor de andere assen in R_6. Kiezen we nu de greep $\{a, b, c, d, f, g\}$ zó dat $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2 = 1$, terwijl natuurlijk $ag - bf + cd = 0$ en onderstellen we, wat we zonder aan de algemeenheid te kort te doen mogen aannemen $a \neq 0$, immers de grootheden $a - g$, spelen dezelfde rol, en passen we op de rechte l in R_6 van de oorsprong af in positieve zin een stuk $-2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ af en bepalen we nu de stand van R_4' ten opzichte van R_4 die hierbij behoort, dan krijgen we voor het snijpunt der X' as van R_4' met de eenheidshypersfeer om O in R_4:

$$X = \frac{1 + (-a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + f^2 + g^2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

$$Y = \frac{2a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - 2\,(bd + cf) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

$$Z = \frac{2b \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2\,(ad - cg) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

$$T = \frac{2c \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + 2\,(af + bg) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

Voor de R_3 door het vlak:

$$\begin{aligned} aY + bZ + cT &= 0 \\ -aX \qquad + dZ + fT &= 0 \end{aligned}$$

en de X as van R_4 vinden we:

$$aY + bZ + cT = 0$$

Voor de R_3 door datzelfde vlak en de X' as van R_4' vinden we:

$$-a\lambda X + aY + (b + \lambda d)\, Z + (c + \lambda f)\, T = 0$$

waarin

$$\lambda = \frac{2\,(a^2 + b^2 + c^2)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{a - 2\,(bd + cf)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha - a\,\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Voor de hoek tussen deze twee R_3 krijgen we:

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b\,(b + \lambda d) + c\,(c + \lambda f)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2\lambda^2 + a^2 + (b + \lambda d)^2 + (c + \lambda f)^2}}.$$

Substitueren we hierin de gevonden waarde van λ, dan vinden we na enige herleidingen:

$$\cos\varphi = \frac{a\left(1 - \mathrm{tg}^2\,\dfrac{\alpha}{2}\right)}{a\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \cos\alpha.$$

Ditzelfde resultaat vinden we, als we de hoek bepalen tussen de twee R_3' door dit vlak en respectievelijk de Y as van R_4 en de Y' as van R_4' enz. Hiermede hebben we de volgende stelling bewezen:

De rechten in de beeldruimte R_6, die door de oorsprong hiervan gaan en liggen op de tweedegraadsvijfdimensionale kegel $mt - ns + pr = 0$ geven rotaties weer in R_4 om vlakken door de oorsprong hiervan; hierbij gaat R_4' uit van de aanvangsstand.

De overige rechten door O in R_6 beelden zeker geen rotaties om een vlak af, immers de snijpunten der X', Y', Z' en T' assen van R_4' met de eenheidshypersfeer om O in R_4 beschrijven dan vierdegraadsruimtekrommen. In een geval loopt bij elke rotatie om een vlak de afbeelding spaak. Als we n.l. de wenteling uit de aanvangsstand over 180° krijgen. De parametervoorstelling der determinant, die deze stand uitbeelden moet, verliest haar zin. In dit geval voegen we aan die determinant per definitie toe het oneindig verre punt der beeldrechte.

We gaan nu na welke beeldrechte in R_6 door O behoort bij de rotatie om een willekeurig vlak in R_4 door de oorsprong. Zij dit vlak gegeven door de beide vergelijkingen:

$$A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T = 0$$
$$A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2T = 0$$

Door beurtelings hieruit de X, Y, Z en T te elimineren vinden we de vier volgende afhankelijke vergelijkingen:

$$\begin{array}{rrrrl} & \pi_{12}Y & + \pi_{13}Z & + \pi_{14}T & = 0 \\ -\pi_{12}X & & + \pi_{23}Z & + \pi_{24}T & = 0 \\ -\pi_{13}X & - \pi_{23}Y & & + \pi_{34}T & = 0 \\ -\pi_{14}X & - \pi_{24}Y & - \pi_{34}Z & & = 0 \end{array}$$

waarin π_{12}, π_{13}, π_{14}, enz. de ascoördinaten zijn van de oneigenlijke rechte van dit vlak. Vergelijken we dit met het vroeger gevonden resultaat, dan krijgen we de volgende stelling:

Bij het vlak $\{\pi_{12} \ldots . \pi_{34}\}$ *als rotatievlak in* R_4 *behoort in* R_6 *de beeldrechte*

$$\frac{m}{\pi_{12}} = \frac{n}{\pi_{13}} = \frac{p}{\pi_{14}} = \frac{r}{\pi_{23}} = \frac{s}{\pi_{24}} = \frac{t}{\pi_{34}}.$$

We vinden nu in de fundamentaalrelatie $\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{31}\pi_{24} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$ tussen de Plücker'sche ascoördinaten terug de vijfdimensionale tweedegraadskegel $mt - ns + pr = 0$ waartoe de beeldrechten behoren, welke rotaties om een vlak van R_4 door O aangeven. Het is nu ook duidelijk waarom wij in R_6 slechts de rechten van deze kegel vinden. Er zijn n.l. niet meer vlakken door O in R_4.

De ruimten van een even aantal afmetingen staan in zeker opzicht achter bij die van een oneven aantal afmetingen. We lichten dit eerst toe aan R_3 en R_4 en zullen daarna algemeen formuleren en bewijzen.

We konden in R_3 van een willekeurige stand:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

komen naar een andere:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

door rotatie over een bepaalde hoek om een volkomen bepaalde as door de oorsprong. In de vierdimensionale ruimte gaat dit niet meer. We konden van de beginstand door rotatie over een bepaalde hoek om een vlak door O slechts komen tot die standen, welker beeldpunten liggen op de reeds meergenoemde kegel in R_6. Dit hangt hiermee samen. Bepalen we in R_3 de middelloodvlakken van de verbindingslijnen van de snijpunten XX', YY', ZZ', der assen van het vaste stelsel in R_3 en de overeenkomstige assen van de bewegende R_3' met de eenheidsbol om O in R_3, dan gaan deze middelloodvlakken door een lijn. Doen we het analoge in R_4 dan vinden we, dat de middelloodruimten van XX', YY', ZZ' en TT' slechts in bepaalde omstandigheden meer dan één punt gemeen hebben. Zij die willekeurige stand, ten aanzien van de aanvangsstand gekarakteriseerd door de determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

dan vinden we voor d middellood R_3 van XX':

$$(X-1)^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = (X-a_{11})^2 + (Y-a_{21})^2 + \\ + (Z-a_{31})^2 + (T-a_{41})^2$$

We krijgen dus voor deze middelloodruimte na herleiding en voor de 3 analoge:

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)\,X + a_{21}Y + a_{31}Z + a_{41}T &= 0 \\ a_{12}X + (a_{22}-1)\,Y + a_{32}Z + a_{42}T &= 0 \\ a_{13}X + a_{23}Y + (a_{33}-1)\,Z + a_{43}T &= 0 \\ a_{14}X + a_{24}Y + a_{34}Z + (a_{44}-1)\,T &= 0. \end{aligned}$$

Nu is echter de rang van de matrix:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & a_{31} & a_{41}-1 \\ a_{12} & a_{22}-1 & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-1 & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}-1 \end{Vmatrix}$$

vier, tenzij $1-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})+A_{12}+A_{13}+A_{14}=0$
waarin

$$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en analoog voor A_{13} en A_{14}.
Wanneer nu de elementen van de matrix aan deze voorwaarde voldoen, dan is de rang van de matrix evenwel niet drie, maar daalt af tot twee. We komen nu tot de volgende merkwaardige stelling:
De middellood R_3's van XX', YY', ZZ' en TT' gaan of slechts door één punt O of wel zij gaan door een vlak door O.
De hier gevonden resultaten laten zich nu eenvoudig uitbreiden op een R_{2n+1} en een R_{2n}. We vinden dan de volgende algemene eigenschap:
In R_{2n+1} gaan de overeenkomstige middellood R_{2n}'s door een rechte. In R_{2n} gaan zij of slechts door één punt of zij snijden elkaar minstens in een vlak.
Het bewijs hiervan berust op een tweetal eigenschappen van de orthogonale determinanten. De eerste gevonden door Brioschi luidt: De vergelijking:

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots\dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}=0$$

heeft als n oneven is, de wortel -1. De tweede eigenschap is een uitbreiding van een door Stieltjes gegeven stelling: Zijn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\dots\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2}\dots\dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

orthogonale determinanten, die de waarde 1 hebben en is:

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} + b_{n2} & a_{22} + b_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} + n_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

dan zullen ook alle minoren van de orde $n - 1$ in R nul zijn. We nemen nu als n even is voor de tweede determinant hierboven de volgende:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & -1 \end{vmatrix}$$

Hiermede is de juistheid van bovengenoemde eigenschap aangetoond. Waar de meest elementaire beweging in R_n om een vast punt, de rotatie om een R_{n-2} door dat punt is, volgt hieruit, dat de mogelijkheid om twee standen van zo'n beweeglijke R_n' ten opzichte van een vaste R_n in elkaar over te voeren door rotatie om een R_{n-2} door de oorsprong nog meer beperkingen zal eisen, dan dit in R_4 reeds het geval bleek te zijn, terwijl daarentegen die overgang in R_3 altijd mogelijk was.

Een andere wijze om dit te controleren is van Dr. J. A. Barrau. Deze redeneert aldus: De vrijheidsgraad van een vlak door de oorsprong is vier, voegen we hierbij die van de rotatiehoek dan komen we slechts tot vijf, terwijl de vrijheidsgraad der standen in R_4 bij vaste oorsprong 6 is. Het zal dus niet zonder meer mogelijk zijn om van de aanvangsstand naar een willekeurige stand van R_4' te komen door rotatie om een vlak door de oorsprong.

We gaan nu over tot een bespreking der rechten in R_6 door O buiten de kegel $mt - ns + pr = 0$. We kiezen hiertoe eerst een rechte door O in het MT vlak van R_6 waarvan alleen de M as en de T as op die kegel liggen. We krijgen zo'n rechte door te stellen $m = p = r = s = 0$ en $m = kt$ waarin $k \neq 0$. De standen door de eigenlijke punten van zo'n rechte afgebeeld worden gekarakteriseerd door de determinant:

$$\begin{vmatrix} \frac{1-m^2+t^2-m^2t^2}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & \frac{2m\,(1+t^2)}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2m\,(1+t^2)}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & \frac{1-m^2+t^2-m^2t^2}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+m^2-t^2-m^2t^2}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & \frac{2t\,(1+m^2)}{1+m^2+t^2+m^2t^2} \\ 0 & 0 & \frac{-2t\,(1+m^2)}{1+m^2+t^2+m^2t^2} & \frac{1+m^2-t^2-m^2t^2}{1+m^2+t^2+m^2t^2} \end{vmatrix}$$

waarin $m = kt$. We krijgen nu na vereenvoudiging:

$$\begin{vmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2m}{1+m^2} & \frac{1-m^2}{1+m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & 0 & \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$$

waarin $m = kt$. Stellen we nu hierin $m = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ en $t = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ dan gaat bovenstaande determinant over in:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

Voor deze laatste determinant kunnen we zowel schrijven $P \times Q$ als ook $Q \times P$ waarin:

$$P = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

waarbij de vermenigvuldiging uit te voeren is door rijen van de eerste determinant te vermenigvuldigen met kolommen van de tweede. Verder zijn dan α en β gebonden door de relatie $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$. We vinden dus de volgende stelling:

De eigenlijke punten van de rechten in R_6 door O gelegen in het MT vlak beelden de standen uit van R_4' ten opzichte van R_4, die uit de aanvangsstand verkregen zijn door dubbeldraaiingen om ZT vlak en XY vlak van R_4.

Deze rotaties zijn blijkbaar verwisselbaar. Verder is de verhouding der tangenten van de halve rotatiehoeken gelijk aan de verhouding van de m en t coördinaten van de beeldpunten. Voor een bepaalde α en β krijgen we het beeldpunt, door op de beeldrechte af te passen een stuk $-\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\beta}$.

Overeenkomstige redeneringen gelden voor de rechten van het NS vlak en PR vlak voor zover zij door O gaan. Aan het oneigenlijke punt van zo'n rechte voegen wij weer per definitie die stand van R_4' toe, die uit de aanvangsstand verkregen wordt door dubbelrotatie over 180°.

We gaan nu nog na, welke baan een willekeurig punt X', Y', Z' T' van R_4' ten opzichte van R_4 beschrijft bij deze beweging. We vinden nu:

$$X = \frac{(1+t^2)\{(1-k^2t^2)X' + 2ktY'\}}{(1+k^2t^2)(1+t^2)}$$

$$Y = \frac{(1+t^2)\{-2ktX' + (1-k^2t^2)Y'\}}{(1+k^2t^2)(1+t^2)}$$

$$Z = \frac{(1+k^2t^2)\{(1-t^2)Z' + 2tT'\}}{(1+k^2t^2)(1+t^2)}$$

$$T = \frac{(1+k^2t^2)\{-2tZ' + (1-t^2)T'\}}{(1+k^2t^2)(1+t^2)}.$$

Dit is een 4e graadsruimtekromme, want een willekeurige R_3 wordt hierdoor gesneden in 4 punten. De oneigenlijke R_3 wordt gesneden in de punten $t = +i$, $t = -i$, $t = +\frac{i}{k}$ en $t = -\frac{i}{k}$.

Hieruit volgt weer deze stelling:

Alle punten van R_4', die liggen in een vlak evenwijdig met $OX'Y'$, beschrijven krommen die door 2 vaste punten gaan.

Analoog voor alle punten van R_4' in een vlak evenwijdig met $OZ'T'$. Voor $k = \pm 1$ worden deze punten zelfs dubbelpunten.

Omgekeerd zal een dubbelrotatie om het ZT vlak (respectievelijk XY vlak) van R_4 over hoeken α en β zijn beeldpunt vinden in het punt van R_6 dat correspondeert met de determinant:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

Volgens de inleiding vinden we hiervoor het punt:

$$m = \frac{-2\sin\alpha\,(1+\cos\beta)}{2\,(1+\cos\alpha)\,(1+\cos\beta)};\quad n = 0;\quad p = 0;\quad r = 0;$$

$$s = 0;\quad t = \frac{-2\sin\beta\,(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\,(1+\cos\beta)}.$$

We krijgen dus de greep:

$$\{-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\}$$

wat geheel in overeenstemming is met het voorafgaande resultaat. De enkelvoudige rotaties daarentegen om ZT vlak over de hoek α en om het XY vlak over de hoek β vinden hun beeldpunten respectievelijk in:

$$\{-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\} \text{ en } \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\}$$

Beschouwen we nu een willekeurig vlak in R_4 door O:

$$A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T = 0$$
$$A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2T = 0$$

Het loodvlak in O hierop geschreven in parametervorm wordt nu

$$\frac{X}{T} = \frac{A_1\lambda + A_2}{D_1\lambda + D_2}$$
$$\frac{Y}{T} = \frac{B_1\lambda + B_2}{D_1\lambda + D_2}$$
$$\frac{Z}{T} = \frac{C_1\lambda + C_2}{D_1\lambda + D_2}$$

of na eliminatie van λ:

$$(B_1D_2 - B_2D_1)\,X - (A_1D_2 - A_2D_1)\,Y \qquad + (A_1B_2 - A_2B_1)\,T = 0$$
$$(C_1D_2 - C_2D_1)\,X \qquad - (A_1D_2 - A_2D_1)\,Z + (A_1C_2 - A_2C_1)\,T = 0$$

In Plückerse notatie vinden we, dat bij het vlak door O in R_4:

$$\begin{array}{rrrrl} & \pi_{12}Y & +\pi_{13}Z & +\pi_{14}T & =0 \\ -\pi_{12}X & & +\pi_{23}Z & +\pi_{24}T & =0 \\ -\pi_{13}X & -\pi_{23}Y & & +\pi_{34}T & =0 \\ -\pi_{14}X & -\pi_{24}Y & -\pi_{34}Z & & =0 \end{array}$$

behoort het loodvlak door O in R_4:

$$\begin{array}{rrrrl} & -\pi_{34}Y & +\pi_{24}Z & -\pi_{23}T & =0 \\ \pi_{34}X & & -\pi_{14}Z & +\pi_{13}T & =0 \\ -\pi_{24}X & +\pi_{14}Y & & -\pi_{12}T & =0 \\ \pi_{23}X & -\pi_{13}Y & +\pi_{12}Z & & =0 \end{array}$$

Nu behoort bij een rotatie om het eerste vlak de beeldrechte:

$$\frac{m}{\pi_{12}} = \frac{n}{\pi_{13}} = \frac{p}{\pi_{14}} = \frac{r}{\pi_{23}} = \frac{s}{\pi_{24}} = \frac{t}{\pi_{34}}$$

in R_6 terwijl voor de rotatie om het loodvlak op het eerste vlak de beeldrechte

$$\frac{m}{\pi_{34}} = \frac{n}{-\pi_{24}} = \frac{p}{\pi_{23}} = \frac{r}{\pi_{14}} = \frac{s}{-\pi_{13}} = \frac{t}{\pi_{12}}$$

in R_6 gevonden wordt. Hierbij is weer gebruik gemaakt van de fundamentaalrelatie.

Deze beide beeldrechten staan loodrecht op elkaar, want hun oneigenlijke punten zijn geconjugeerd ten opzichte van de isotrope V_5^2: $m^2 + n^2 + p^2 + r^2 + s^2 + t^2 = 0$ in de oneigenlijke R_5 van de beeld R_6. We komen nu tot het volgende merkwaardige resultaat: Wenst men de standen van R_4' verkregen uit de aanvangsstand door dubbelrotatie om een vlak van R_4 door O af te beelden op punten van vlakken door O in R_6 dan komen hiervoor alleen in aanmerking die vlakken door de oorsprong van de beeldruimte, die de kegel $mt - ns + pr = 0$ snijden volgens geconjugeerde rechten. Hierbij noemen we de rechte

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{c} = \frac{r}{d} = \frac{s}{f} = \frac{t}{g}.$$

geconjugeerd aan de rechte

$$\frac{m}{g} = \frac{n}{-f} = \frac{p}{d} = \frac{r}{c} = \frac{s}{-b} = \frac{t}{a}$$

Wijl nu langzamerhand de orthogonale determinant van de vierde orde in de Cayleyse parametervorm haar hanteerbaarheid verliest is het gewenst de gevonden afbeelding enigszins te wijzigen en daarna aan te vullen. De stand van R_4' ten opzichte van R_4 verkregen uit de aanvangsstand door rotatie om een vlak

$$(\pi_{12}, \pi_{31}, \ldots . \pi_{34})$$

door de oorsprong van R_4, over een hoek α beelden we af op een punt van de rechte

$$\frac{m}{\pi_{12}} = \frac{n}{\pi_{31}} = \frac{p}{\pi_{41}} = \frac{r}{\pi_{23}} = \frac{s}{\pi_{24}} = \frac{t}{\pi_{34}}$$

in R_6 welk punt we verkrijgen door op deze rechte in positieve zin een stuk tg $\frac{1}{2}\alpha$ af te passen. Het oneigenlijke punt van de beeldrechte beeldt die stand af, welke we uit de aanvangsstand verkrijgen door rotatie over 180°. Op deze wijze verkrijgen we als beeldrechten de beschrijvenden door de oorsprong van de kegel Ω:

$$mt + ns + pr = 0 \text{ in } R_6$$

De standen van R_4' uit de aanvangsstand verkregen door dubbelrotaties om een vlak $(\pi_{12}, \pi_{31} \ldots . \pi_{34})$ van R_4, gaande door de oorsprong over hoeken α en β beelden we af op punten van dat vlak van R_6 hetwelk de beide beschrijvenden van Ω bevat die behoren bij dat vlak van R_4 en zijn loodvlak en wel op die punten, die we verkrijgen door in dat vlak van R_6 op die rechten stukken tg $\frac{1}{2}\alpha$ en tg $\frac{1}{2}\beta$ af te passen en daarna in de verkregen punten loodlijnen op de rechten op te richten in dat vlak; het snijpunt dezer loodlijnen is dan het bedoelde beeldpunt.

STELLINGEN.

I

De critiek van NORT op de stertellingen van HENIE is niet geheel gerechtvaardigd.

The Harvard Map of the Sky and the Milky Way by H. NORT. Recherches astronomiques de l'Observatoire d' Utrecht VII.

II

Ten onrechte verwaarloost BALL bij: „The reduction to the equator" de term $-\frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\Theta \, \mathrm{tg}^{6} \frac{1}{2}\omega$, die van dezelfde orde is, als de term $-\frac{1}{3} \sin 6\Theta \, \mathrm{tg}^{6} \frac{1}{2}\omega$, waarmee hij de ontwikkeling à $-\Theta$ besluit.

R. S. BALL, A. treatise on Spherical Astronomy, Hoofdstuk X, blz. 227.

III

De manier waarop SCHUH de eliminatiemethoden door middel van symmetrische functies en die volgens SYLVESTER behandelt is niet in alle opzichten bevredigend. Er wordt niet aangetoond, dat de resultante op de ene manier verkregen, dezelfde is als die volgens de andere methode.

SCHUH, Lessen over Hogere Algebra II, § 111 en § 124.

IV

De wijze waarop KOWALEWSKI betoogt, dat er slechts een „uitzonderingsdeterminant" van de 2de orde bestaat, is nodeloos omslachtig.

G. KOWALEWSKI, Einführung in die Determinantentheorie, blz. 176.

V

Heeft men in een plat vlak een driehoek ABC, waarvan A en B

vast liggen en C een algebraische kromme C_n doorloopt, dan beschrijft het hoogtepunt van die driehoek een C_{2n}.
Gaat die C_n niet door A en B dan zijn deze punten n voudig voor de C_{2n}. Zijn het echter k- en $l$voudige punten van de C_n, dan is de C_{2n} ontaard en bevat de loodlijnen in A en B op ABachtereenvolgens k en l maal.
Evenzo zal de C_{2n} ontaard zijn als de C_n het oneig. punt van de rechten loodrecht op AB als m-voudig punt bevat. De C_{2n} bestaat dan uit een C_{2n-m} en m maal de rechte AB.

VI

De bewering: Lim $R_n a^n = 0$ als R een$_n$ reële variant voorstelt en a een positeif getal is < 1, is onjuist evenals de uitbreiding hiervan op een complexe variant R_n en een complexe veranderlijke a waarvan de modulus < 1 is.

SCHUH, Lessen over Hogere Algebra, Dl III, blz. 28.

VII

Het betoog, waardoor BOUMAN tracht aan te tonen, dat de cylindrische beeldvarieteit B van de graad 64 is, is niet geheel volledig.

J. N. BOUMAN, Kinematische Projectie, blz. 43 en 44.

VIII

De manier waarop BETH bewijst, dat bij de door hem bedachte afbeelding van de standen van een vast lichaam een beeldrechte de wenteling om een vaste as voorstelt is niet geheel correct.

H. J. BETH, Nogmaals de afbeelding der bewegingen volgens STUDY. Christiaan Huygens, 18de jaargang, No. IV, blz. 145.

IX

De vrije bewegingen in R_3 laten zich afbeelden in R_6, die in R_4 op een R_{10}.