



# Poolbewegingen tengevolge van poolvluchtkracht

<https://hdl.handle.net/1874/363584>

1. apr. 1929, 1943

POOLBEWEGINGEN  
TENGEVOLGE  
VAN POOLVLUCHTKRACHT

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3639 9156

ht











POOLBEWEGINGEN TENGEVOLGE VAN  
POOLVLUCHTKRACHT





*Diss Utrecht 1943*

POOLBEWEGINGEN TENGEVOLGE VAN  
POOLVLUCHTKRACHT

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN  
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE  
AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT,  
OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS  
L. VAN VUUREN, HOOGLEERAAR IN DE  
FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBE-  
GEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN  
SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE  
BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER  
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN  
OP VRIJDAG 14 MEI 1943, DES NAMIDDAGS  
TE 12 UUR

DOOR

HENDRIK KUIPER

GEBOREN TE RHEDEN

1943

N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ  
AMSTERDAM

COLLEGE VAN FAKULTEIT VAN  
HUMANWETENSCHAPPEN

PROEFSTUK

van  
het  
onderzoek  
in  
de  
psychologie  
van  
de  
menschen  
aan  
het  
Nederlandsche  
Psychologisch Instituut  
te Utrecht  
door  
Dr. J. M. G. ...

1920

PROF. DR. ...

... 1920



Aan mijn Ouders.  
Aan mijn Vrouw.

Vóór alles is het mij een behoefte, te getuigen van mijn groote dankbaarheid aan God, voor de mij geschonken zegeningen gedurende mijn geheele studie.

Mijn ouders, die mij door hun werk in staat stelden te studeeren, weten, dat ik nooit zal vergeten, wat zij voor mij waren.

Hooggeleerde VENING MEINESZ, Hooggeachte Promotor, hetgeen ik aan U te danken heb, is zeer moeilijk onder woorden te brengen. Ik ben U zeer erkentelijk, dat ik onder Uw leiding dit proefschrift heb mogen bewerken. Uw groote kennis van zaken hielp mij over veel moeilijkheden heen. Uw hulp en Uw buitengewone bereidwilligheid, ook bij het afwerken dezer dissertatie zal ik niet licht vergeten. Nooit zal ik U dankbaar genoeg kunnen zijn.

Hooggeleerde SMIT SIBINGA, Gij waart het, die mij in een van onze prettige gesprekken op het onderwerp dezer dissertatie wees.

Hooggeleerde UHLENBECK, Uw colleges en het onder Uw leiding staande seminarium hebben mede door Uw groote didactische gaven, grooten invloed op mijn wetenschappelijk denken gehad.

Hooggeleerde KOKSMA, Uw heldere colleges, in het bijzonder die over de analyse, hebben veel tot mijn kennis bijgedragen.

Hooggeleerde SIZOO, door Uw interessante colleges over de theoretische physica zijt Gij het geweest, die mijn belangstelling voor theoretische onderwerpen hebt gewekt.

Het is ondoenlijk hier verder al degenen te noemen, wien ik dank verschuldigd ben, voor hun medewerking aan mijn opvoeding en vorming.

Ik stel er prijs op hier een woord van dank te brengen aan den Heer L. KOERTS, directeur van de M.T.S. voor Bouwkunde te Amsterdam, wien geen moeite teveel was, als het erom ging, mij tijd te verschaffen voor studie.





## INHOUD

	Blz.
INLEIDING . . . . .	1
HOOFDSTUK I. De poolvluchtkracht . . . . .	4
HOOFDSTUK II. Berekening van het totale draaiingsmoment $M$ , werkende op de siellaag tengevolge van de poolvluchtkracht en de bepaling van de momentane bewegingsrichting van de Noordpool . . . . .	14
HOOFDSTUK III. De poolbeweging . . . . .	26
HOOFDSTUK IV. Discussie van het artikel van MILANKOVITCH . . . . .	52
HOOFDSTUK V. De poolbaan . . . . .	65
HOOFDSTUK VI. Energiebeschouwingen . . . . .	76
SAMENVATTING . . . . .	88





## INLEIDING.

§ 1. Onder de breedte van een plaats op aarde verstaat men het gemiddelde van de hoogten van een circumpolairster bij meridiaandoorgang. Om deze breedte in de practijk te bepalen, meet men ter verkleining van de door refractie ontstane fouten den zeniths-afstand. De breedte is dan het complement van den afstand van het zenith tot de hemelpool (zenith bepaald door de gravitatie ter plaatse). Het in den eersten zin genoemde gemiddelde van de hoogten is klaarblijkelijk de hoogte van de hemelpool (dit is de richting van de aardas).

Het komplement van de breedte van een plaats op aarde is dus de hoek tusschen de gravitatie-richting ter plaatse en de momentane rotatie-as der aarde.

Verandert dus deze hoek, dan moet minstens een van deze richtingen veranderen. Algemeen neemt men tegenwoordig aan, dat alleen een richtingsverandering van de rotatie-as de oorzaak is. Reeds in 1765 is door EULER in zijn „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum” aangetoond, dat op theoretische gronden een periodieke beweging van de momentane rotatie-as te verwachten is. EULER geeft in dit boek een mathematische discussie van het vraagstuk van de rotatie van een vast lichaam om zijn zwaartepunt en beweert nadrukkelijk, dat deze theorie van toepassing is op de aarde. De theorie werd later belangrijk uitgebreid en hoewel de aarde niet als vast lichaam beschouwd kan worden, is de mathematische theorie van het vaste lichaam toch belangrijk als grensgeval van een theorie, welke beter is aangepast bij den werkelijken toestand van de aarde.

De verplaatsing van de pool kan anderzijds bepaald worden, door slechts twee coördinaten en als deze bekend zijn, kunnen alle breedteveranderingen worden vastgelegd. De verandering in breedte zal voor twee stations met dezelfde geografische lengte dezelfde moeten zijn. Bepaalt men nu op twee plaatsen de breedtevariatië, dan geven observaties op een derde, vierde enz. plaats, dus een

onafhankelijk onderzoek van de hypothese, dat alle veranderingen aan een verplaatsing van de aardas moeten worden toegeschreven.

Uit de sinds 1890 door den Internationalen Breedtedienst op verschillende plaatsen gedane waarnemingen is dit werkelijk gebleken. De genoemde hypothese, dat deze breedteveranderingen uitsluitend het gevolg zijn van verandering in den stand van de rotatie-as, is dus in hooge mate waarschijnlijk.

De poolbeweging bleek samengesteld uit twee periodieke bewegingen:

- a. één met periode van 1 jaar, in vorm nagenoeg elliptisch;
- b. één met periode van 14 maanden in vorm tamelijk onregelmatig, echter wijzend op een cirkelvorm.

De amplitude, welke voor de resulterende beweging enkele tientallen van boogsecunden bedraagt, (overeenkomende met een lineaire verplaatsing van ongeveer 10 meter), en de perioden vertoonen kleine continue variaties.

De jaarlijksche beweging verklaart men met behulp van de gedurende de verschillende jaargetijden op aarde plaats vindende kleine massaveranderingen (uitvoerig beschreven in JEFFREYS: *The earth*, hoofdstuk 13. *Variation of latitude*).

De 14 maandelijksche beweging, ook wel Chandler-beweging genoemd, is niet anders dan de reeds genoemde, door EULER afgeleide beweging. De vrije periode van deze beweging wordt alleen bepaald door de eigenschappen van het roteerende lichaam en bedraagt voor de aarde — mits volkomen vast gedacht — 306 dagen (precieser uitgedrukt wordt deze periode alleen bepaald door de hoofdtraagheidsmomenten, zooals o.a. uit de berekeningen van EULER volgt).

De periode wordt bij een volkomen vast lichaam langer, indien dit meer tot den bolvorm nadert. Ook wordt de periode langer indien het lichaam bij dezelfde afplatting niet meer volkomen vast gedacht wordt. Door deze laatste opmerking in rekening te brengen, is CHANDLER in staat geweest, de verlenging van de periode van 306 dagen tot 14 maanden te kunnen verklaren.

Theorie en waarnemingen over deze „breedtevariatie” worden uitvoerig besproken in het artikel van W. D. LAMBERT: *Breiten-schwankungen*, in het *Handbuch der Geophysik* Bd. I Abschnitt VIII.

§ 2. Uit de waarnemingen van den Internationalen Breedtedienst van 1900—1917 leidde LAMBERT bovendien een seculaire beweging van de pool af, in de richting van de meridiaan  $90^\circ$  West, met een jaarlijksche verplaatsing van  $0'',0062$  <sup>1)</sup>).

WANACH leidde uit de waarnemingen van 1900—1926 een seculaire verplaatsing af, groot  $0'',0047 \pm 0'',0007$  jaarlijks (dit is  $14 \text{ cm} \pm 2 \text{ cm}$ ) in de richting  $42^\circ \pm 9^\circ$  West <sup>2)</sup>).

In 500,000 jaar zou dit een verplaatsing van  $1^\circ 30'$  geven. Het is nu deze seculaire verplaatsing van de pool, welke tot een groot aantal geophysische en geologische publicaties aanleiding heeft gegeven, zoowel wat betreft de mogelijkheid, de baan en de gevolgen van een dergelijke poolverplaatsing.

Vooraf de artikelen van MILANKOVITCH in het Handbuch der Geophysik Bd. I Abschnitt VII, Säkulare Polverlagerungen en id. Bd. IX, Lieferung 3, (1938 verschenen): Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate (Kapittel 27 en 29) zijn zeer belangwekkend en hebben veler aandacht getrokken <sup>3)</sup>).

Dit laatste artikel van MILANKOVITCH zal hier hoofdzakelijk aan een discussie worden onderworpen.

<sup>1)</sup> W. D. LAMBERT, The interpretation of Apparent Changes in mean Latitude and the International Latitude Stations. Astron. Journal, Band 34, nr. 904 (1922).

<sup>2)</sup> B. WANACH, Eine fortschreitende Lagenänderung der Erdachse. Zeitschrift für Geophysik, 3, 102, 1927.

<sup>3)</sup> Dit laatstgenoemde artikel was reeds gepubliceerd in Gerlands Beiträge, 1934, Bd. 42, onder den titel: Der Mechanismus der Polverlagerungen und die daraus sich ergebenden Polbahnkurven.



## HOOFDSTUK I.

### De poolvluchtkracht.

§ 3. Volgens de isostasietheorie moet men aannemen dat de buitenste korst der aarde (de siallaag) waarvan men tegenwoordig de dikte op  $\pm 30$  km stelt, in zekeren zin drijft op de daaronder gelegen simalaag. De siallaag wordt als een werkelijk vaste laag beschouwd, de simalaag gedraagt zich als een plastische laag, d.w.z. geeft mee onder de werking van langdurig werkende krachten (en is dus als een soort vloeistof te beschouwen). Om dit straks wiskundig te kunnen beschrijven, moeten wij bovendien aannemen, dat voor elk punt der aardkorst werkelijk hydrostatisch evenwicht bereikt is, dus dat in elk punt de wet van Archimedes geldt. Deze aanname is ook zoo te formuleeren: De siallaag bezit geen buigingsvastheid of, indien wij dit niet streng willen doorvoeren: De siallaag is in stukken te verdeelen, die elk voor zich volkomen in hydrostatisch evenwicht zijn. Wanneer nu de geheele siallaag der aarde (de oceanen inbegrepen), welke laag een kleinere gemiddelde dichtheid zal hebben, dan de gemiddelde dichtheid van het substratum, zich zou verdichten tot de dichtheid van het substratum, dan zou de aardoppervlakte volkomen glad worden. Dit oppervlak zou dan een equipotentiaalvlak zijn van de gravitatie- en middelpuntvliedende krachten en bij benadering den vorm hebben van een afgeplatte omwentelingsellipsoïde. Deze laatste is bekend onder den naam: *normaalellipsoïde*. De vergelijking van de meridiaankromme van deze normaalellipsoïde is:

$$r = a(1 - \beta \sin^2 \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin  $r$  = voerstraal,  $a$  = equatorstraal = halve groote-as  
 $\beta$  = afplatting,  $\varphi$  = geocentrische breedte.

Beschouwen wij nu den werkelijken vorm van de aarde t.o.v. deze ellipsoïde, dan zullen de continenten en de uit sial bestaande oceaans-

bodem, doordat ze kleinere dichtheid hebben, boven deze normaal-ellipsoïde uitstekten.

Snijden wij nu op zeker punt der aarde, waar de sialkorst een plaatselijke dikte  $D$  heeft, een verticaal elementairprisma uit, waarvan het grondvlak ligt tusschen de meridianen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$  en tusschen de breedtecirkels  $\varphi$  en  $\varphi + d\varphi$ , dan is de oppervlakte van het grondvlak daarvan, als wij de afplatting verwaarloozen, voor te stellen door

$$df = r_0^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda \dots \dots \dots (2)$$

waarin  $r_0 =$  gemiddelde aardstraal.

Dit prisma drijft nu op de simalaag en de massa van de weggedrongen sima door het ondergedompelde deel is, als wij de kromming der potentiaalvlakken verwaarloozen, gelijk aan de massa van het geheele prisma (volgens de wet van ARCHIMEDES).

Met behulp hiervan kunnen wij de hoogte  $H$  van het ondergedompelde deel vinden. Zij nl.  $\varrho_0$  de dichtheid der simalaag en  $\varrho_1$  de dichtheid der siallaag, dan geldt dus voor het genoemde prisma de betrekking:

$$\varrho_0 H = \varrho_1 D \dots \dots \dots (3)$$

(feitelijk moet hier nog een factor bij, die de verandering van de versnelling der zwaartekracht met de diepte aangeeft; deze laten wij echter als klein van hoogere orde weg.)

Het zwaartepunt  $S$  van het prisma ligt echter op een zeker afstand boven het metacentrum  $A$  (= zwaartepunt van het ondergedompelde deel).

Uit fig. 1b leest men af, dat deze afstand bedraagt

$$z_0 = \frac{1}{2}(D-H) = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2\varrho_0} D = \frac{1}{4\alpha} D \dots \dots \dots (4)$$

waarin

$$\alpha = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_1)} \dots \dots \dots (5)$$

Dit hoogteverschil  $z_0$  nu, is de oorzaak van een kracht, welke dit elementairprisma van de pool vandaan (dus naar de equator toe)



tracht te verschuiven. Deze kracht is daarom door KÖPPEN de *poolvluchtkracht* genoemd <sup>1)</sup>).

De grootte van de poolvluchtkracht op een massa-element  $d\mu$  is voor het eerst door EÖTVÖS afgeleid in de veronderstelling dat de krachtlijnen in het zwaartekrachtsveld (de loodlijnen op de equipotentiaaloppervlakken) gekromd zijn.

Deze aanname kunnen wij ook zoo formuleeren, dat de equipotentiaalvlakken divergeeren naar de equator toe (m.a.w. als men dichter naar de equator toe den afstand tusschen twee equipotentiaaloppervlakken bepaalt, wordt deze grooter). Nu gaat er een equipotentiaalvlak door het metacentrum  $A$  en een door het zwaartepunt  $Z$  van het reeds vroeger beschouwde elementairprisma.

Op een niveaувlak geldt voor de potentiaal de volgende uitdrukking:

$$W = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3}(C-A)(1-3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi \quad (6)$$

waarin  $f$  = gravitatieconstante;

$M$  = massa van de aarde;

$C$  = traagheidsmoment t.o.v. de rotatie-as der aarde;

$A$  = traagheidsmoment der aarde t.o.v. een as in het equatorvlak, waarbij de aarde als omwentelingsfiguur gedacht wordt;

$\omega$  = rotatiehoeknelheid in radialen/sec.

Wij beschouwen nu het elementairprisma met zwaartepunt in  $Z$  en met massa  $d\mu = \rho_1 Ddf$ .

De kracht per massa-eenheid is grad  $W$ , dus de kracht op  $d\mu$  is voor te stellen door

$$K = \text{grad } W \cdot d\mu \quad (7)$$

Deze kracht grijpt aan in het zwaartepunt  $Z$  van het prisma en heeft een component in de richting loodrecht op de verbindingslijn van  $Z$  met het metacentrum  $A$ . De grootte en richting van deze component zijn als volgt te vinden:

<sup>1)</sup> Met een eenvoudige physicaproof zooals de proef van LELY beschreven in W. WESTPHAL, Physik, 7e und 8e Auflage, pg. 97, is dit verschijnsel experimenteel aan te toonen.

Neem in  $A$  een rechthoekig coördinatensysteem aan, gelegen in het meridiaanvlak van  $A$ , de  $Y$ -as in  $A$  loodrecht op het equipotentiaalvlak door  $A$  en de  $X$ -as als raaklijn aan dat vlak in  $A$ , positief in de richting van de noordpool af.

Daar de equipotentiaalvlakken ongeveer rotatie-ellipsoïden zijn (afgezien van plaatselijke storingen) zal de richting van den te berekenen horizontalen component in het meridiaanvlak door  $A$  (dat is in het aangenomen  $XY$ -vlak) liggen en gericht zijn langs de  $X$ -as.

In  $A$  geldt nu, daar de  $X$ -as in  $A$  raakt aan het equipotentiaalvlak in  $A$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad \dots \quad (8)$$

In het punt  $Z (0, z_0)$  geldt, dat de horizontale component gelijk wordt aan:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) z_0. \quad \dots \quad (9)$$

alle afgeleiden te nemen in  $A$ .

De te bepalen horizontale component in  $Z$  wordt nu:

$$dP = z_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) d\mu = z_0 d\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad \dots \quad (10)$$

Nu is echter

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -g \quad \dots \quad (11)$$

waarin  $g$  = versnelling der zwaartekracht.

Vullen wij dit in in (10) dan gaat deze over in:

$$dP = -z_0 d\mu \frac{\partial g}{\partial x}. \quad \dots \quad (12)$$

Afgezien van kleinen van hogere orde is echter

$$dx = -r \partial \varphi \quad (\text{bij toenemende } \varphi \text{ neemt } x \text{ af}) \quad \dots \quad (13)$$

dus

$$dP = \frac{z_0}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\mu. \quad \dots \quad (14)$$

Met de gemaakte onderstellingen is de poolvluchtkracht dus bepaald door de verandering van  $g$  met de breedte.

De verandering van  $g$  met de breedte  $\varphi$  wordt in de buurt van de aardoppervlakte (waartoe wij het punt  $A$  ook kunnen rekenen) nauwkeurig genoeg voorgesteld door:

$$g = g_a + (g_p - g_a) \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarin  $g_p$  = versnelling der zwaartekracht aan de pool

$g_a$  = versnelling der zwaartekracht aan den equator.

Dan volgt direct:

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (g_p - g_a) \sin 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

zoodat dan de uitdrukking

$$dP = \frac{z_0}{r} (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

de formule voor de poolvluchtkracht voorstelt.

Uit (12) volgt nog: Bij afnemende  $\varphi$  wordt  $dP$  positief, dus volgens (13) ook bij toenemende  $x$ . De  $X$ -as was echter naar den equator gericht, dus de poolvluchtkracht is inderdaad naar den equator toe gericht.

Ieder massa-element van de siallaag ondervindt deze poolvluchtkracht. Deze is het grootst voor een element op  $45^\circ$  breedte nl.

$$dP_{\varphi=45} = \frac{z_0}{r} (g_p - g_a).$$

De hier afgeleide formule is de algemeen gebruikte formule voor de poolvluchtkracht.

*Opmerkingen:* 1. Vullen wij in formule (17) de uitdrukking

$$d\mu = \varrho_1 D r_0^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

in, dan gaat deze over in:

$$dP = \varrho_1 z_0 r_0 D (g_p - g_a) \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad . \quad . \quad (18)$$

Voor een elementairprisma op een bepaalde plaats op aarde (constante  $\varphi$  en  $\lambda$ ) is dus, daar  $r_0$ ,  $\rho_1$ ,  $g_p$  en  $g_a$  constanten zijn de poolvluchtkracht evenredig met het product  $Dz_0$ .

2. Teneinde later te kunnen zien, waar de energie der poolvluchtkracht vandaan komt, willen wij hier nog op het volgende wijzen: De poolvluchtkrachtformule kon worden afgeleid uit het feit, dat de equipotentiaalvlakken van gravitatie- en rotatiekrachten divergeeren naar den equator toe.

Deze divergentie is een gevolg van de afplatting der aarde, welke afplatting weer een gevolg is van de aardrotatie. Genoemde divergentie zou niet bestaan als de equipotentiaalvlakken bollen waren. Hieruit volgt dus, dat de rotatie der aarde tenslotte de energie der poolvluchtkrachten moet leveren, waardoor deze in staat zijn, de siallaag der aarde te verplaatsen. (Zie ook § 10).

§ 4. Volgens opmerking 1 van § 3 is de poolvluchtkracht evenredig met het product  $Dz_0$ . Daar MILANKOVITCH in zijn berekeningen het physische aardoppervlak zoodanig vervormt, dat de continenten een constante hoogte en de oceanen constante diepte krijgen (benevens constante dikte voor den uit sial bestaanden oceaانبodem) kon hij volstaan met deze reeds afgeleide formule voor de poolvluchtkracht, door voor de  $D$  (en dus voor  $z_0 = \frac{1}{4\alpha} D$ ) twee waarden  $D_1$  (voor de continenten) en  $D_2$  (voor den oceaانبodem) te kiezen. Daar in onze berekeningen de hoogte der topografie nauwkeuriger in rekening gebracht zal worden, dan bij MILANKOVITCH gebeurd is, moeten wij eerst een verband afleiden tusschen de hoogte der topografie  $h$  en het product  $Dz_0$  teneinde de formule voor de poolvluchtkracht met behulp van  $h$  uit te kunnen drukken (onder de hoogte der topografie verstaan wij de hoogte boven of beneden zeeniveau).

Wij beschouwen hiertoe de figuren 1a en 1b.



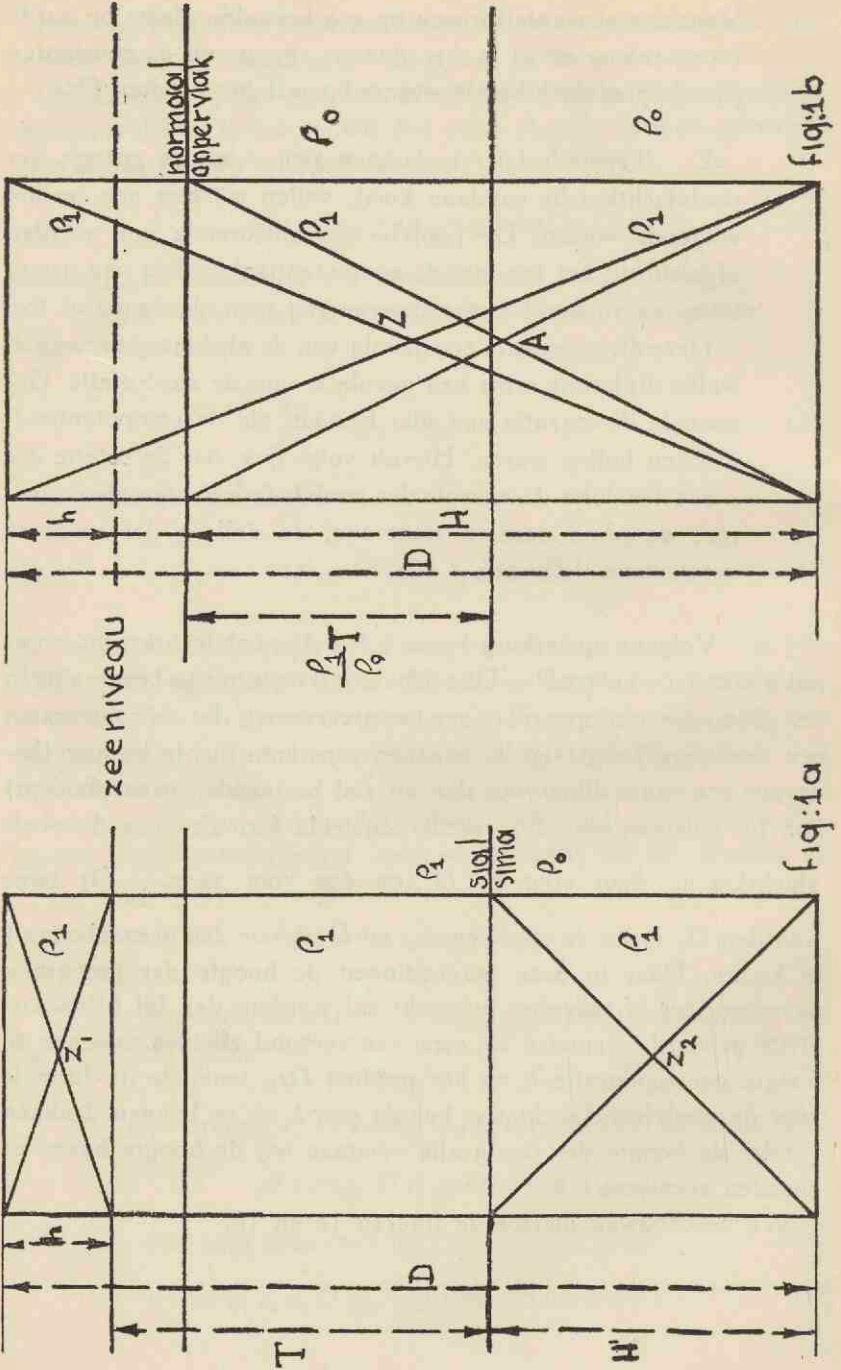


Fig. 1.



Fig. 1a stelt voor: de sialkorst met dikte  $T$  (voor  $h = 0$ ) en dichtheid  $\varrho_1$ . De topografische hoogte  $h$  wordt gecompenseerd door een verticaal daaronder gelegen deel met hoogte  $H'$  zóó, dat in eenzelfde verticale kolom het massa-overschot van de topografie ( $\sim h\varrho_1$ ) gecompenseerd wordt door het massatekort van deze compensatie ( $\sim H'(\varrho_0 - \varrho_1)$ ).

Dan geldt

$$(df=1) \quad h\varrho_1 = H'(\varrho_0 - \varrho_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

dus

$$H' = \frac{\varrho_1}{(\varrho_0 - \varrho_1)} h = \frac{\varrho_0 - \varrho_0 + \varrho_1}{\varrho_0 - \varrho_1} h = \left\{ \frac{\varrho_0}{\varrho_0 - \varrho_1} - 1 \right\} h = (2\alpha - 1) h \quad \left. \vphantom{H'} \right\} \quad (20)$$

(volgens (5)).

Zooals onmiddellijk uit de figuur is af te lezen wordt de afstand

$$z'_0 = Z_1 \quad Z_2 = T + ah. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Fig. 1b stelt voor: Sialprisma met totale hoogte  $D$  drijvende op de simalaag. De dikte  $T$  der korst (uit fig. 1a) wordt als deze korst „condenseert” tot op sima-dichtheid gereduceerd tot  $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} T$  en de bovenzijde van deze gereduceerde korst (oppervlak der normaal-ellipsoïde) ligt dus op een afstand  $\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right) T$  onder zeeniveau.

Het prisma steekt boven dit oppervlak uit over een afstand

$$h + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right) T = h + T \left(\frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0}\right) = h + \frac{T}{2\alpha} \quad (\text{volgens (5)}). \quad (22)$$

$Z$  is het zwaartepunt van het prisma.

A is het metacentrum. Volgens (4) is  $ZA = z_0 = \frac{1}{4a} D$ .

Reeds wisten wij: poolvluchtkracht  $\sim Dz_0 (= D \times \overline{ZA})$  fig. 1b.

Nu is  $\overline{ZA} = \frac{1}{2} (D-H)$  en daar  $H = \frac{\rho_1}{\rho_0} D$  is, dus

$$Dz_0 = \frac{1}{2} D(D-H) = \frac{1}{2} D^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right) = \frac{1}{4a} D^2. \quad (23)$$

Vergelijken wij nu fig. 1b met fig. 1a. In beide figuren is de dikte  $D$  van het sialprisma dezelfde. Uit fig. 1a volgt

$$D = T + h + (2a-1)h \quad \text{of} \quad D = T + 2ah. \quad . \quad . \quad (24)$$

Wij hebben dus nu

$$\left. \begin{aligned} \text{poolvluchtkracht} &\sim Dz_0 \quad \text{of} \\ \text{poolvluchtkracht} &\sim \frac{1}{4a} D^2 = \frac{1}{4a} (T + 2ah)^2 \\ \text{poolvluchtkracht} &\sim \frac{T^2}{4a} + h(T + ah). \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (25)$$

Noemen wij nu  $(T + ah) = z'_0 =$  afstand der zwaartepunten van topografie en compensatie dan gaat de formule voor de poolvluchtkracht op een massa-element  $d\mu$  over in

$$dP = \rho_1 r_0 (g_p - g_a) \left\{ \frac{T^2}{4a} + h z'_0 \right\} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad . \quad (26)$$

Voor een elementairprisma op bepaalde plaats op aarde (constante  $\varphi$ ,  $\lambda$ ) geldt dus: De poolvluchtkracht is te splitsen in 2 gedeelten.

Het eerste gedeelte is een constante (bevat alleen constante factoren).

Het tweede gedeelte is evenredig met het product  $\rho_1 h z'_0$  (dit treedt dus in de plaats van het product  $\rho_1 Dz_0$ ) d.w.z. evenredig met het product van de massa  $\rho_1 h$  der topografie en den verticalen afstand van de zwaartepunten van topografie en compensatie.

*Opmerkingen:* 1. Daar  $z_0 = T + ah$ , waarin  $T$  en  $a$  constanten zijn, is (26) tenslotte alleen nog afhankelijk van de topografische hoogte  $h$  en deze topografische hoogte is dus uiteindelijk de eene grootheid, die voor een bepaalde plaats op aarde de grootte van de poolvluchtkracht bepaalt.

2. Het moment  $dM$  van een op een sialprisma  $d\mu$  werkende poolvluchtkracht  $dP$  ten opzichte van het middelpunt der aarde wordt nu voorgesteld door

$$\begin{aligned} dM &= r_0 dP \\ &= \varrho_1 r_0^2 (g_p - g_a) \left\{ \frac{T^2}{4a} + h z_0' \right\} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (27) \end{aligned}$$

## HOOFDSTUK II.

Berekening van het totale draaiingsmoment  $M$ , werkende op de siallaag tengevolge van de poolvluchtkracht en de bepaling van de momentane bewegingsrichting van de Noordpool.

§ 5. Wij gaan hiertoe uit van (27) welke de grootte aangeeft van het moment dat tengevolge van de poolvluchtkracht op een element  $d\mu$  van de korst werkt.

$$dM = \varrho_1 r_0^2 (g_p - g_a) \left\{ \frac{T^2}{4\alpha} + h z_0' \right\} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (27)$$

waarin dus:  $\varrho_1$  = dichtheid sial  
 $\varrho_0$  = dichtheid sima

$g_p$  en  $g_a$  versnelling der zwaartekracht resp. aan pool en equator.  
 $T$  = dikte siallaag (voor  $h = 0$ ).

$$\alpha = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_1)} \quad h = \text{hoogte topografie.}$$

$z_0' = T + \alpha h$  = afstand van het zwaartepunt der topografie tot het zwaartepunt der compensatie.

$\varphi$  = geocentrische breedte.

$\lambda$  = geografische lengte.

Nemen wij voor het volgende de aarde bolvormig aan, dan moet om het totale moment  $M$  te vinden, (27) dus geïntegreerd worden over het boloppervlak. Echter moeten wij daarbij bedenken, dat  $dP$  een vector is, welke behalve de grootte (26) ook een richting heeft, welke volgens § 3 ligt in het meridiaanvlak van  $d\mu$ , raakt aan de meridiaan door  $d\mu$  en gericht is naar den equator.

Evenzoo is  $dM$  ook een vector en wij moeten dus deze vector-grootheden sommeeren over alle oppervlakte elementen van de bol.

Om deze integratie te kunnen uitvoeren, nemen wij een coördinatenstelsel aan, met den oorsprong in het middelpunt der aarde, de  $Z$ -as in de richting der noordpool, langs de tegenwoordige rotatie-as, de  $X$ -as in het equatorvlak (snijlijn van equatorvlak en nulmeridiaan) en de  $Y$ -as als snijlijn van het equatorvlak en meri-



diaanvlak  $90^\circ$  Oost. Daar voor elk element  $d\mu$  de krachtsvector  $dP$  in het meridiaanvlak van  $d\mu$  valt, ligt dus de vector  $dM$  voor elk element in het equatorvlak. De resultante  $M$  van deze vectoren zal ook in het equatorvlak moeten liggen.

Wanneer wij voor het element  $d\mu$  het betreffende moment door een momentvector voor willen stellen, moeten de draairichting en de momentvector samen een rechtsche schroefbeweging geven, dwz. kijken wij in de richting van den momentvector, dan draait de kracht om  $O$  met de wijzers van het uurwerk mee.

Voor een element  $d\mu$  met geografische coördinaten  $\varphi$  en  $\lambda$  is de vector  $dM$  in het equatorvlak dus in de richting  $(\lambda + 90)$  gericht.

Als tweede stap voor de uitvoering der integratie ontbinden wij dezen vector  $dM$  langs de aangenomen  $X$ - en  $Y$ -as. De vector langs de  $X$ -as wordt voorgesteld door:

$$(dM)_x = dM \cos(\lambda + 90) = -dM \sin \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

De vector langs de  $Y$ -as wordt voorgesteld door:

$$(dM)_y = dM \sin(\lambda + 90) = dM \cos \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Noemen wij in (27):

$$e_1 r_0^2 (g_p - g_a) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

dan krijgen wij:

$$\left. \begin{aligned} (dM)_x &= -C \left\{ \frac{T^2}{4\alpha} + h(T + ah) \right\} \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda \, d\varphi \, d\lambda \\ (dM)_y &= C \left\{ \frac{T^2}{4\alpha} + h(T + ah) \right\} \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda \, d\varphi \, d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

waarin  $h$  een functie is van  $\varphi$  en  $\lambda$ .

Vullen wij deze functie voor  $h$  in, dan vinden wij na integratie dus  $M_x$  en  $M_y$ .

Vooraf merken wij echter op dat in de uitdrukkingen (31) voorkomt een term

$$\left. \begin{aligned} C \frac{T^2}{4\alpha} \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda \, d\varphi \, d\lambda \\ C \frac{T^2}{4\alpha} \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda \, d\varphi \, d\lambda \end{aligned} \right\}$$



Integreeren wij deze uitdrukkingen over den bol dan komt er

$$C \frac{T^2}{4a} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin 2\varphi \cos \varphi \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} d\varphi d\lambda = 0$$

zoals direct blijkt.

De uitdrukkingen (31) zijn dus te vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned} (dM)_x^* &= -C \{ h(T + ah) \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda \} \\ (dM)_y^* &= C \{ h(T + ah) \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda \} \end{aligned} \quad (32)$$

waarin \* aanduidt, dat overal het gedeelte, dat bij integratie nul oplevert uit (31) is weggelaten.

§ 6. Reeds is opgemerkt:  $h = h(\varphi, \lambda)$ . Welke deze functie is, is echter bekend. MILANKOVITCH heeft in zijn berekeningen deze functie als constant gekozen over de continenten en ook (met een andere constante) over de oceanen, waarbij veel schattingen en afrondingen gemaakt moeten worden en dus twijfel aan de nauwkeurigheid kan ontstaan.

De  $h = h(\varphi, \lambda)$  is namelijk bekend in den vorm van de PREY-ontwikkeling van de topografie naar bolfuncties tot en met de 16e orde.

Wat de theorie der bolfuncties betreft, willen wij verwijzen naar boeken over de hoogere analyse, o.a. WHITTAKER-WATSON: Modern Analysis en wat betreft de PREY-ontwikkeling naar de oorspronkelijke publicatie van PREY<sup>1)</sup>.

Hoewel PREY de bolfunctie-ontwikkeling geeft tot en met de 16e orde, kunnen wij volstaan met uitsluitend de bolfuncties van de 2e orde te nemen. De reden hiervoor is, dat volgens een stelling uit de hoogere analyse de integralen van producten van bolfuncties van verschillende orde berekend over den bol steeds nul als uitkomst geven. Nu komen in  $(dM)_x^*$  en  $(dM)_y^*$  voor de factoren resp.

$$\sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda \quad \text{en} \quad \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

<sup>1)</sup> A. PREY, Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach kugelfunktionen bis zur 16 Ordnung. Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen. Math. phys. klasse Neue Folge, Bd. XI, 1.

welke beide uitdrukkingen bolfuncties van de tweede orde bevatten. Als wij deze factoren dus vermenigvuldigen met alle termen van de  $h$  ontwikkeling (welke een reeks bolfuncties vormt van de nulde tot en met de 16e orde) en daarna integreeren over den bol, dan worden alle integralen nul, uitgezonderd die welke ontstaan door de factoren (33) met de tweede orde bolfunctie-term van de  $h$ -ontwikkeling te vermenigvuldigen. Deze opmerking is dus van groot belang bij deze berekeningen.

§ 7. Beschouwen wij de uitdrukkingen (32) voor  $(dM)_x^*$  en  $(dM)_y^*$  nader, dan kunnen wij deze schrijven als:

$$\begin{aligned} (dM)_x^* &= -C \{ Th + ah^2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda \} \\ (dM)_y^* &= C \{ Th + ah^2 \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda \} \end{aligned} \quad (34)$$

dus termen lineair in  $h$  en quadratisch in  $h$ .

Wij zullen zoowel  $h$  als  $h^2$  naar bolfuncties moeten ontwikkelen. De ontwikkeling voor  $h^2$  bijvoorbeeld, luidt als volgt:

$$\begin{aligned} h^2 &= A_{00} + A_{10} \cos \delta + (A_{11} \cos \lambda + B_{11} \sin \lambda) \sin \delta + \\ &+ A_{20} \times \frac{1}{2} (3 \cos^2 \delta - 1) + (A_{21} \cos \lambda + B_{21} \sin \lambda) 3 \sin \delta \cos \delta + \\ &+ (A_{22} \cos 2\lambda + B_{22} \sin 2\lambda) 3 \sin^2 \delta \end{aligned} \quad (35)$$

waarin  $\lambda =$  geogr. lengte en  $\delta =$  complement van de geografische breedte  $= (90 - \varphi)$ . Voeren wij  $\varphi$  en  $\lambda$  als veranderlijken in, dan komt er:

$$\begin{aligned} h^2 &= A_{00} + A_{10} \sin \varphi + (A_{11} \cos \lambda + B_{11} \sin \lambda) \cos \varphi + \\ &+ A_{20} \times \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1) + (A_{21} \cos \lambda + B_{21} \sin \lambda) 3 \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ (A_{22} \cos 2\lambda + B_{22} \sin 2\lambda) 3 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{h^2} \right\}$$

Voor de  $h$ -ontwikkeling krijgen wij een soortgelijke reeks, alleen worden de coëfficiënten  $A_{00}$  t/m  $B_{22}$  anders, en die zullen wij met accenten ( $A'_{00}$  t/m  $B'_{22}$ ) aanduiden.

Voor deze ontwikkeling van  $h$  zijn de constanten berekend door PREY. In onze berekening moeten wij echter deze PREY-constanten op een bepaalde manier combineren. PREY geeft namelijk o.a. een ontwikkeling  $A$  (van de lithosfeer) en een ontwikkeling  $B$  (van de

hydrosfeer). Wij hebben echter niet te maken met de hoogten der topografie, zooals PREY, maar met de massa's.

Een prisma uit het continent genomen, geeft geen moeilijkheden, daar daarbij alleen de dichtheid  $\rho_1$  een rol speelt. Bij een prisma uit de oceaan komen echter twee verschillende dichtheden voor, n.l.  $\rho_1$  voor het water en  $\rho_w$  voor den (naar wij aannemen) uit sial bestaanden bodem.

Wanneer wij nu het zeewater van dichtheid  $\rho_w$  „verdichten” tot sialdichtheid  $\rho_1$  dan kunnen wij de zeediepten voorstellen door

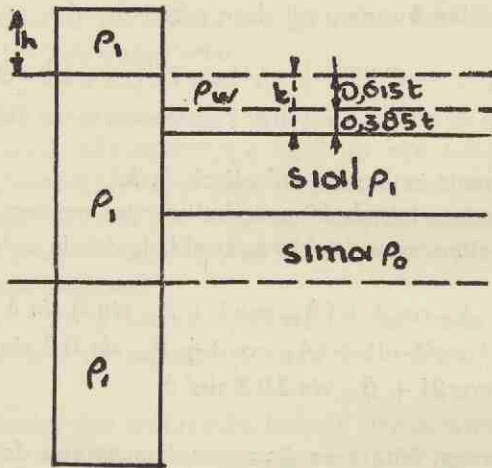


Fig. 2.

een sialtekort (fig. 2). Nemen wij nu aan  $\rho_1 = 2,67$  en  $\rho_w = 1,028$  dan wordt een waterlaag van dikte  $t$  vervangen door een siallaag ter dikte  $\frac{1,028}{2,67} t = 0,385 t$ .

Wij kunnen ook zeggen dat de zeedepte  $t$  een sialtekort van dikte  $(t - 0,385 t) = 0,615 t$  veroorzaakt.

Volgens het bovenstaande moeten wij, als wij het zeewater in rekening brengen, om alles in de sialdichtheid uit te kunnen drukken, nemen: (land + 0,615 zee) dus de coëfficiënten uit de PREY-ontwikkeling als volgt combineren: coëfficiënt uit A-ontwikkeling — 0,385 maal den overeenkomstigen coëfficiënt uit B-ontwikkeling, kort:  $(A - 0,385 B)$ .



Voor de ontwikkeling van  $h$  worden de genoemde coëfficiënten, uitgedrukt in km:

$$\begin{array}{lll}
 A'_{00} = -1,407 & A'_{10} = +0,83560 & A'_{20} = +0,73450 \\
 & A'_{11} = +0,74251 & A'_{21} = +0,28345 \\
 & B'_{11} = +0,44731 & B'_{21} = +0,31721 \\
 & & A'_{22} = -0,17868 \\
 & & B'_{22} = -0,03925.
 \end{array}$$

Voor de  $h^2$ -ontwikkeling zijn de coëfficiënten niet uit de PREY-ontwikkeling te halen. Deze coëfficiënten zijn echter:  $(\text{land} + 0,615 \text{ zee})^2 = (A - 0,385 B)^2$  en hun waarden <sup>1)</sup>, uitgedrukt in km<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{lll}
 A_{00} = +4,310 & A_{10} = -1,441 & A_{20} = -1,788 \\
 & A_{11} = -2,007 & A_{21} = -0,905 \\
 & B_{11} = -0,554 & B_{21} = -0,346 \\
 & & A_{22} = +0,449 \\
 & & B_{22} = +0,275.
 \end{array}$$

§ 8. Nu wij  $h$  en  $h^2$  als functies van  $\lambda$  en  $\varphi$  kennen, rest ons tenslotte te berekenen:

$$M_x = \iint (dM)_x^* = - \iint C T h \sin 2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda - \left. \begin{array}{l} \\ - \iint C a h^2 \sin 2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda \end{array} \right\} (36)$$

$$M_y = \iint (dM)_y^* = \left. \begin{array}{l} \iint C T h \sin 2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda + \\ + \iint C a h^2 \sin 2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda \end{array} \right\} (37)$$

Na invulling der reeksontwikkelingen voor  $h$  en  $h^2$  blijven ter bepaling van  $M_y$  de volgende integralen van de  $h^2$  ontwikkeling over (en soortgelijke van de  $h$  ontwikkeling, waarvan wij dus de uitkomsten meteen vinden):

<sup>1)</sup> Deze coëfficiënten ontleen ik aan een artikel van Prof. Dr. Ir. F. A. VENING MEINESZ, „The indirect isostatic or Bowie Reduction and the Equilibrium Figure of the Earth”, wat eerlang in het „Bulletin Géodésique” zal verschijnen.

$$\begin{aligned}
& \int A_{00} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda = 0^*)^1) \\
& \int A_{10} \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int A_{11} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \cos^2 \lambda d\lambda = \pi A_{11} \int \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 0^{**}) \\
& \int B_{11} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int \frac{3}{2} A_{20} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& - \int \frac{1}{2} A_{20} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{21} \sin 2\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \cos^2 \lambda d\lambda = 3\pi A_{21} \int \sin 2\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\
& \quad = 3\pi A_{21} \times \frac{8}{15} = \frac{8}{5} \pi A_{21} \\
& \int 3 B_{21} \sin 2\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{22} \sin 2\varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \cos 2\lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{22} \sin 2\varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin 2\lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*)
\end{aligned}$$

Reeds wisten wij uit een algemeene opmerking over de bolfuncties dat het resultaat der eerste 4 integralen nul moest zijn. Uit bovenstaande uitkomsten volgt dan tenslotte, daar de  $h$ -reeks op dezelfde wijze als eenigste uitkomst geeft  $\frac{8}{5} \pi A'_{21}$ , dat

$$\begin{aligned}
M_y = CT \int \int h \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda + \\
+ C\alpha \int \int h^2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda = CT \frac{8}{5} \pi A'_{21} + \left. \begin{aligned} & + C\alpha \frac{8}{5} \pi A_{21} = \frac{8}{5} \pi C (TA'_{21} + \alpha A_{21}). \end{aligned} \right\} (37a)
\end{aligned}$$

Op soortgelijke wijze krijgen wij ter berekening van  $M_x$  voor de  $h^2$ -ontwikkeling de volgende integralen:

$$\begin{aligned}
& \int A_{00} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int A_{10} \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int A_{11} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int B_{11} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin^2 \lambda d\lambda = \pi B_{11} \int \sin 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 0^{**}) \\
& \int \frac{3}{2} A_{20} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda = 0^*) \\
& - \int \frac{1}{2} A_{20} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{21} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{21} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin^2 \lambda d\lambda = 3\pi B_{21} \int \sin 2\varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\
& \quad = 3\pi B_{21} \times \frac{8}{15} = \frac{8}{5} \pi B_{21} \\
& \int 3 A_{22} \sin 2\varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos 2\lambda d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{22} \sin 2\varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \sin 2\lambda d\lambda = 0^*)
\end{aligned}$$

1) Alle in dit hoofdstuk voorkomende integralen hebben tot integratiegrenzen:

$$-\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi.$$

\*) beteekent dat de betreffende integraal nul wordt door de integratie naar  $\lambda$ .

\*\*\*) beteekent dat de betreffende integraal nul wordt door de integratie naar  $\varphi$ .



De reeksontwikkeling voor  $h$  geeft aanleiding tot een aantal soortgelijke integralen met uiteindelijke uitkomst  $\frac{8}{5}\pi B'_{21}$ . Hieruit volgt dan tenslotte:

$$\left. \begin{aligned} M_x = & -CT \iint h \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda - \\ & -Ca \iint h^2 \sin 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda = \\ & -CT \cdot \frac{8}{5}\pi B'_{21} - Ca \cdot \frac{8}{5}\pi B'_{21} = \underline{\underline{-\frac{8}{5}\pi C(TB'_{21} + aB'_{21})}}. \end{aligned} \right\} (36a)$$

Voor wij overgaan tot de numerieke berekening van het uiteindelijke totaalmoment op de sialkorst uitgeoefend, merken wij op, dat er in beide reeksen integralen slechts één integraal is die tenslotte *niet* tot de uitkomst nul voert.

Bedoelde integraal is namelijk:

$$\begin{aligned} \int \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi &= 2 \int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= 2 \int \cos^3 \varphi d\varphi - 2 \int \cos^5 \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

nu is

$$\int \cos^n \varphi = \frac{1}{n} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \varphi d\varphi$$

dus

$$\int \cos^5 \varphi = \frac{1}{5} \cos^4 \varphi \sin \varphi + \frac{4}{5} \int \cos^3 \varphi d\varphi,$$

waarin als wij de grenzen  $-\frac{1}{2}\pi$  en  $+\frac{1}{2}\pi$  invullen, de eerste term nul wordt. Onze oorspronkelijke integraal wordt dan:

$$2 \int \cos^3 \varphi d\varphi - \frac{8}{5} \int \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{5} \int \cos^3 \varphi d\varphi.$$

Volgens de formule voor  $\int \cos^n \varphi d\varphi$  kunnen wij voor  $\int \cos^3 \varphi d\varphi$  schrijven  $\frac{2}{5} \int \cos \varphi d\varphi$  (waarbij de eerste term, die weer nul wordt, meteen is weggelaten).

Tenslotte komt er dan

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \int \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{15} \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{8}{15},$$

waarmee de geheele integratie is uitgevoerd.

## § 9. Numerieke berekening van het moment.

Reeds is gevonden:

$$M_x = -\frac{8}{5} \pi C (TB'_{21} + \alpha B_{21}) \quad . \quad . \quad . \quad (36a)$$

$$M_y = \frac{8}{5} \pi C (TA'_{21} + \alpha A_{21}) \quad . \quad . \quad . \quad (37a)$$

Laten wij  $C$  voorloopig als constante staan en substitueeren

$$T = 30 \text{ km} \quad \alpha = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_1)} = \frac{3,27}{2(3,27 - 2,67)} = \frac{3,27}{1,2} = 2,725$$

$$B'_{21} = 0,31721 \text{ km} \quad B_{21} = -0,346 \text{ km}^2$$

$$A'_{21} = 0,28353 \text{ km} \quad A_{21} = -0,905 \text{ km}^2.$$

dan wordt:

$$M_x = -\frac{8}{5} \pi C (30 \times 0,31721 + 2,725 \times -0,346) =$$

$$= -\frac{8}{5} \pi C \times 8,5734 = -43,073 C.$$

$$M_y = \frac{8}{5} \pi C (30 \times 0,28353 + 2,725 \times -0,905) =$$

$$= \frac{8}{5} \pi C \times 6,0938 = 30,344 C.$$

Tenslotte volgt hieruit

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = C \sqrt{2776} = 52,68 C.$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{M_x}{M_y} = -\frac{43,073}{30,344} = -\frac{1}{0,7044} \quad \lambda = 144^\circ 50' \text{ O.L.} \quad \left. \vphantom{\operatorname{tg} \lambda} \right\} (38)$$

Dit is dus de richting van den resulteerenden koppelvector. De bewegingsrichting van de korst geschiedt in een meridiaanvlak loodrecht op dezen vector. Met behulp van de tekenafpraak van den koppelvector volgt dan, dat de bewegingsrichting van de korst over het substratum ter plaatse van de Noordpool geschiedt in de richting

$$\lambda = 54^\circ 50' \text{ O.L.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

De bewegingsrichting van de pool over de korst verschilt  $180^\circ$  hiermede en geschiedt dus in de richting

$$\lambda = 125^\circ 10' \text{ W.L.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Dit is dus de momentane bewegingsrichting van de Noordpool tengevolge van het door de poolvluchtkracht uitgeoefende totale moment.

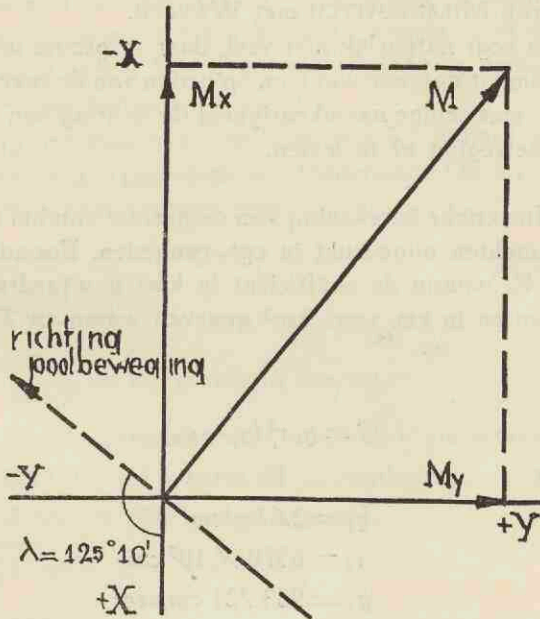


Fig. 3.

*Opmerking:* De gevonden bewegingsrichting is praktisch tegengesteld aan de door MILANKOVITCH gevonden momentane bewegingsrichting.

Als zoodanig komt echter ons resultaat meer overeen met dat, wat men van tevoren zou aanvoelen. Bekijkt men namelijk de globe, dan doet het vreemd aan, dat de pool tengevolge van de poolvluchtkracht zich juist naar het Europeesch-Aziatische continent zou bewegen en daar tenslotte tot rust komen. Dat aan dit resultaat van MILANKOVITCH getwijfeld moet worden, is reeds opgemerkt door SCHWINNER<sup>1)</sup> en KIRSCH<sup>2)</sup>.

Bovendien stemt het door ons gevonden resultaat betrek-

<sup>1)</sup> R. SCHWINNER, Lehrbuch der phys. Geologie, Bd. I, pag. 239.

<sup>2)</sup> G. KIRSCH, Geomechanik, pag. 100.

kelijk goed overeen met de door LAMBERT gevonden waarde, uit de breedtevariatië ( $\lambda = 90^\circ$  W.L.) terwijl ons resultaat met de bepalingen van WANACH iets beter overeenstemt dan dat van MILANKOVITCH met WANACH.

Dit zegt natuurlijk niet veel, daar er groote moeilijkheden zijn om uit datgene wat men op heden van de breedtevariatië weet, met eenige nauwkeurigheid de richting van de seculaire poolbeweging af te leiden.

§ 10. Numerieke berekening van de grootte van het moment der poolvluchtkrachten uitgedrukt in cgs.-eenheden. Formule (38) gaf  $M = 52,68 C$ , waarin de coëfficiënt in  $\text{km}^2$  is uitgedrukt daar de PREY-constanten in km, resp.  $\text{km}^2$  gegeven waren en  $T$  in km was uitgedrukt.

Nu is

$$C = \rho_1 r_0^2 (g_p - g_a).$$

Neem nu

$$\rho_1 = 2,67 \text{ g/cm}^3$$

$$r_0 = 6370 \times 10^5 \text{ cm}$$

$$g_p = 983,221 \text{ cm/sec}^2$$

$$g_a = 978,049 \text{ cm/sec}^2$$

---


$$g_p - g_a = 5,172 \text{ cm/sec}^2$$

Dan wordt

$$C = 2,67 \times (6370 \times 10^5)^2 \times 5,172 \text{ dyne/cm},$$

dus

$$M = 2,67 \times 5,172 \times 637^2 \times 10^{12} \times 52,68 \times 10^{10} \text{ dyne cm} =$$

$$= 296 \times 10^{28} \text{ dyne cm} = \approx 3 \times 10^{30} \text{ dyne cm}.$$

Wij kunnen nu tevens iets zeggen over de benodigde energie. Neem aan, de korst draait over een kleinen hoek  $\gamma$  (radialen) zoodat wij kunnen aannemen, dat het moment over die draaiing constant van grootte blijft.

Voor een rotatie over  $\gamma$  radialen verrichten de poolvluchtkrachten dus een energie van  $M\gamma$  ergen. Draait de pool van uit zijn tegen-



woordigen stand over een hoek van 0,1 radiaal ( $= \pm 5^\circ,7$ ) dan is daarvoor een energie nodig (geleverd door de poolvluchtkrachten) van  $3 \times 10^{30} \times 0,1 = 3 \times 10^{29}$  erg.

Reeds is opgemerkt, dat door de divergentie der equipotentiaaloppervlakken de poolvluchtkracht zijn energie verkrijgt uit de energie der aardrotatie. Wij gaan nu na of dit in verband met de grootte der energiebedragen mogelijk is.

Bij draaiing der pool over een hoek van 0,1 radiaal was nodig:  $E_p = 3 \times 10^{29}$  erg. (poolvluchtkrachtenergie). De levende kracht der aardrotatie wordt gegeven door

$$L = \frac{1}{2} C \omega^2$$

waarin:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = \text{hoeksnelheid der rotatie,}$$

$C =$  traagheidsmoment der aarde t.o.v. de rotatie-as,

$C = 0,3371 r_0^2 M$  waarin  $M =$  aardmassa,

$C = 8,2012 \times 10^{44}$  grammassa  $\text{cm}^2$ .

dus  $L = \frac{1}{2} C \omega^2 = 2,16 \times 10^{36}$  erg.

Hieruit volgt

$$\frac{E_p}{L} = \frac{3 \times 10^{29}}{2,16 \times 10^{36}} = 1,4 \times 10^{-7}.$$

Dit beteekent dus: Indien de energie der poolvluchtkracht inderdaad geleverd wordt, doordat de levende kracht der aardrotatie verminderd wordt, dan is deze vermindering bij een draaiing der pool over 0,1 rad (waarvoor misschien een tijd van enkele millioenen jaren nodig is) ongeveer één tien-millioenste van de tegenwoordige energie der aardrotatie. Die verandering zal dan een overeenkomstige vertraging der rotatiesnelheid, dus verlenging van den dagtengevolge hebben. De grootte van die verlenging is zoodanig, dat men deze mogelijkheid gerust kan toelaten.

### HOOFDSTUK III.

#### De poolbeweging.

§ 11. Om de poolbeweging, welke de pool tengevolge van de poolvluchtkrachten volvoert, waarvan wij in het vorige hoofdstuk in één punt de richting bepaald hebben, nu volledig af te leiden, maken wij zoo ruim mogelijk gebruik van de theoretische beschouwingen die MILANKOVITCH in het Handbuch der Geophysik Band IX heeft afgeleid, omdat, zooals reeds in het voorgaande bleek, er iets moet haperen aan de door MILANKOVITCH gevonden bewegingsrichting en wij op deze wijze het snelst kunnen inzien waardoor dit ontstond.

Bij de berekening zullen wij slechts op één punt van de door MILANKOVITCH gegeven berekeningen afwijken. Wij zullen hier namelijk ook de PREY-ontwikkeling invoeren, inplaats van de 2 constanten  $c_1$  en  $c_2$  (één voor de continenten en één voor de uit sial bestaande oceaانبodem) <sup>1)</sup>, daar wij van meening zijn dat de resultaten hierdoor nauwkeuriger worden, hoewel wij door deze verandering aan te brengen niet moeten verwachten, het verschil van  $180^\circ$  in bewegingsrichting te zullen kunnen verklaren.

§ 12. Het moment  $dM$  van de op een sialelement  $d\mu$  werkende poolvluchtkracht werd voorgesteld door

$$dM = r_0 dP = z_0 (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu \quad . \quad . \quad (42)$$

Om dit moment vectorieel te kunnen voorstellen, leggen wij in het middelpunt der aarde den oorsprong van een rechts coördinatenstelsel met de  $Z$ -as langs de tegenwoordige rotatie-as naar het Noorden gericht en de  $Y$ -as in het meridiaanvlak van  $d\mu$ , de  $X$ -as loodrecht op dit vlak. Het  $XY$ -vlak is dus het equatorvlak. Noemen wij de respectievelijke eenheidsvectoren  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , dan moet, daar  $\vec{i}$  loodrecht op het meridiaanvlak van  $d\mu$  staat en wij een vector moeten hebben, die volgens de schroefrichting bij de draairichting past, deze vector  $d\vec{M}$  de richting  $-\vec{i}$  hebben. Dus geldt:

$$d\vec{M} = -z_0 (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu \vec{i} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

<sup>1)</sup> Zie § 6.

Integreeren wij dit moment over de geheele siallaag, dan vinden wij het totale moment van de op de siallaag werkende poolvluchtkrachten.

Om deze integratie uit te voeren, handelt MILANKOVITCH dan als volgt:

Leg door den oorsprong van het zoo juist ingevoerde assenstelsel een willekeurige as  $\xi$ . De hoek tusschen  $\xi$  en de voerstraal naar  $d\mu$  zij  $\theta$ . Het traagheidsmoment van het element  $d\mu$  ten opzichte van de  $\xi$ -as is, als wij de massa van  $d\mu$  in het zwaartepunt geconcentreerd denken (afstand  $O$  tot zwaartepunt is  $r + z_0$ ):

$$(r + z_0)^2 \sin^2 \theta d\mu$$

of daar  $z_0 \ll r$  is kunnen wij hiervoor schrijven

$$(r^2 + 2z_0 r) \sin^2 \theta d\mu.$$

Denken wij ons nu de massa van  $d\mu$  gecondenseerd tot de dichtheid van het substratum, dan komt het zwaartepunt te liggen op een afstand  $r$  van het middelpunt der aarde, namelijk in het vroeger reeds beschouwde metacentrum en in dat geval wordt het traagheidsmoment van  $d\mu$  ten opzichte van de  $\xi$ -as voorgesteld door:

$$r^2 \sin^2 \theta d\mu.$$

Door het feit dus, dat de korst een andere dichtheid heeft dan het substratum, waardoor er tusschen het zwaartepunt en metacentrum van een sialprisma een afstand  $z_0$  ontstaat (voor elk element verschillend) ontstaat er dus een verandering van traagheidsmoment van elk element  $d\mu$  ten opzichte van een willekeurige  $\xi$ -as ten bedrage van

$$d\Omega = 2z_0 r \sin^2 \theta d\mu \dots \dots \dots (44)$$

Brengen wij nu ter plaatse van  $d\mu$  een massa hoeveelheid  $\frac{2z_0}{r} d\mu$  aan, dan is het traagheidsmoment daarvan, ten opzichte van de  $\xi$ -as juist gelijk aan (44).

Het ontstaan van het verschil (44) is dus te beschrijven door elke massa  $d\mu$  te vervangen door de massa  $\frac{2z_0}{r} d\mu$  en daarvan



het traagheidsmoment ten opzichte van de  $\xi$ -as te bepalen. Wij krijgen op deze wijze een „gereduceerde sialschaal” waarvan het traagheidsmoment van een element  $d\mu$  ten opzichte van de  $\xi$ -as door (44) gegeven wordt. Daar de totale siallaag der aarde boven de normaalellipsoïde uitsteekt, heeft dit dus tengevolge dat het traagheidsmoment van deze ellipsoïde ten opzichte van de  $\xi$ -as met een waarde  $\Omega$  verandert. Deze  $\Omega$  is te vinden, door (44) te integreeren over den bol.

Volgens het voorgaande kunnen wij de grootheid  $\Omega$  ook vinden door de massa van de siallaag der aarde op elke plaats te vermenigvuldigen met den factor  $\frac{2z_0}{r}$  (welke factor voor elk punt der aardoppervlakte een andere is) en het traagheidsmoment van de op deze wijze gereduceerde sialschaal ten opzichte van de  $\xi$ -as te bepalen.

Hiermee is dan de grootheid  $\Omega$ , die door MILANKOVITCH het isostatische traagheidsmoment der sialschaal genoemd is, dus bepaald.

Aan elke door het middelpunt der aarde gaande  $\xi$ -as komt nu een bepaalde  $d\Omega$  toe, dat wil zeggen, aan elk punt  $P$  der aardoppervlakte (zie fig. 4) behoort een bepaalde waarde  $d\Omega$  van het traagheidsmoment van een zich in een punt  $Q$  bevindende massa  $\frac{2z_0}{r} d\mu$  ten opzichte van den door  $P$  gaande voerstraal.

Op deze wijze wordt de aardoppervlakte tot een scalairveld van de grootheid  $d\Omega$ .

Wij vragen nu naar de grootte van den gradiënt van dit scalaire veld ter plaatse van de tegenwoordige noordpool. Uit symmetrie-overwegingen moet deze gradiënt in het meridiaanvlak van  $d\mu$  vallen, dat beteekent, de richting  $-\vec{j}$  hebben en de grootte:

$$\frac{\partial}{\partial s}(d\Omega) = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} d\Omega \right\}_{\theta=90-\varphi} \dots \dots (45)$$

Hierin moet voor  $r$  worden ingevuld de aardstraal  $a(1-\beta)$  daar het hier om de plaats van de Noordpool gaat, terwijl na uitvoering der partieele differentiatie in het rechterlid, voor de in deze afge-



leide voorkomende  $r$  de uitdrukking

$$r = a(1 - \beta \sin^2 \varphi)$$

moet worden ingevuld.

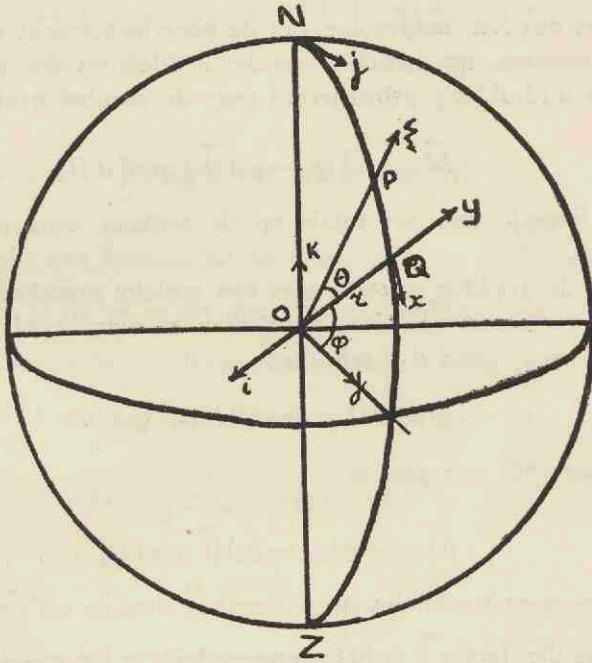


Fig. 4.

Men vindt dan:

$$\text{grad } d\Omega = -2z_0 \frac{1 - \beta \sin^2 \varphi}{1 - \beta} \sin 2\varphi d\mu \vec{j} \quad . . . \quad (46)$$

Daar  $\beta$  klein is ( $\pm 1/300$ ) kunnen wij de termen met  $\beta$  ten opzichte van de eenheid verwaarloozen, zoodat (46) overgaat in

$$\text{grad } d\Omega = -2z_0 \sin 2\varphi d\mu \vec{j} \quad . . . \quad (47)$$

Vermenigvuldigen wij beide leden van (47) vectorieel met  $\vec{k}$  dan krijgen wij, daar  $\vec{k} \vec{j} = -\vec{j} \vec{k} = -\vec{i}$  is:

$$\vec{k} \text{ grad } d\Omega = 2z_0 \sin 2\varphi d\mu \vec{i} \quad . . . \quad (48)$$

Wij vullen nu het rechterlid van (48) in, in de reeds gevonden uitdrukking voor  $dM$  (42). Dan gaat deze over in

$$d\vec{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a) [\vec{k} \text{ grad } d\Omega] \dots \dots (49)$$

Dit is dus het, tengevolge van de poolvluchtkracht op  $d\mu$  werkende moment, ten opzichte van het middelpunt der aarde.

Deze uitdrukking geïntegreerd over de aardbol geeft dan

$$\vec{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a) [\vec{k} \int \text{ grad } d\Omega] \dots \dots (50)$$

welke formule dan het totale op de siallaag werkende moment voorstelt.

Daar de gradiënt van een som van scalaire grootheden gelijk is aan de vectorsom van deze gradiënten en omgekeerd, kunnen wij in (50) voor  $\int \text{ grad } d\Omega$  schrijven

$$\int \text{ grad } d\Omega = \text{ grad } \int d\Omega = \text{ grad } \Omega$$

waardoor (50) overgaat in

$$\vec{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a) [\vec{k} \text{ grad } \Omega] \dots \dots (51)$$

Dit moment tracht dus de sialkorst te draaien om een as, welke vanwege den factor  $\vec{k}$  in het vectorproduct, in het equatorvlak moet liggen.

§ 13. Daar deze beweging van de korst slechts langzaam kan geschieden, kunnen wij aannemen, dat de rotatiesnelheid  $\vec{\omega}$  van deze beweging evenredig is met het moment  $\vec{M}$ , zoodat geldt

$$\vec{\omega} = -\frac{m}{2}(g_p - g_a) [\vec{k} \text{ grad } \Omega] \dots \dots (52)$$

waarin  $m$  een evenredigheidsfactor is.

Tengevolge hiervan zal elk punt der siallaag zich met een snelheid  $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$  over de onderlaag bewegen, waarbij  $r$  de voerstraal naar het beschouwde punt voorstelt. Voor de noordpool kunnen

wij  $\vec{r}$  vervangen door  $r_0 \vec{k}$ , dus

$$\vec{v} = r_0 [\vec{\omega} \vec{k}] \dots \dots \dots (53)$$

De pool der aarde beweegt zich met de tegengestelde snelheid  $\vec{v} = r_0 [\vec{k} \vec{\omega}]$  relatief de korst. De snelheid der poolverschuiving is dus bepaald door

$$\vec{v} = -\frac{m}{2} r_0 (g_a - g_p) [\vec{k} [\vec{k} \text{ grad } \Omega]] \dots \dots (54)$$

Daar volgens een formule uit de vectorrekening geldt  $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{c} \vec{a}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b})$  en in dit geval in de noordpool de vectoren  $\text{grad } \Omega$  en  $\vec{k}$  loodrecht op elkaar staan, waardoor het scalaire product  $(\text{grad } \Omega \vec{k}) = 0$  is, volgt hieruit:

$$\vec{v} = +\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) \text{ grad } \Omega \dots \dots \dots (55)$$

of als wij  $\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) = n$  stellen

$$\vec{v} = n \text{ grad } \Omega \dots \dots \dots (56)$$

De vectorvergelijking (56) is de grondvergelijking der seculaire poolbeweging. Deze vergelijking zegt dus dat de snelheid gericht is volgens den gradiënt van het  $\Omega$ -veld. Bovendien kunnen wij hiermee als de  $n$  bekend is, de grootte van de snelheid bepalen.

De vector  $\vec{v}$  valt dus in elk punt langs den gradiënt van het  $\Omega$ -veld, dus de baan van de pool is een „krachtlijn” in dit veld.

Welke van de oneindig vele krachtlijnen de werkelijke baan is, wordt door de tegenwoordige Noordpool bepaald. De baan staat loodrecht op de equipotentiaallijnen (lijnen van gelijke  $\Omega$ ) of ook zoo uitgedrukt:

De banen zijn de orthogonaal trajectoriën van de lijnen van gelijk traagheidsmoment.

*Opmerking:* MILANKOVITCH vermeldt dat er van bovenstaande grondvergelijking drie afleidingen bestaan. Deze zijn

a. de afleiding uit Handbuch der Geophysik Band IX Lieferung 3, welke hier is weergegeven,

b. de afleiding uit id. Bd I, Abschnitt VII,

c. een afleiding met behulp van de dynamische vergelijkingen van de rotatie<sup>1)</sup>).

§ 14. Wij gaan nu over tot de berekening van den analytischen vorm van het in de vorige paragrafen gedefinieerde  $\Omega$ -veld. Wij zullen hierbij dus in zooverre van de berekeningen van MILANKOVITCH afwijken, dat wij ook hier de PREY-ontwikkeling naar bol-functies invoeren in onze berekeningen. In deze ontwikkeling bezitten wij namelijk een wiskundige voorstelling van de sialbedekking der aarde, met behulp waarvan wij het  $\Omega$ -veld zullen kunnen berekenen.

Wij maken gebruik van het reeds vroeger ingevoerde coördinaten-systeem met den oorsprong in het middelpunt der aarde en het  $XY$ -vlak als equatorvlak. De  $X$ -as ligt in den nulmeridiaan, de  $Y$ -as  $90^\circ$  Oost, de  $Z$ -as is gericht naar de Noordpool.

Stel de geocentrische breedte van een punt  $\varphi$ , de geografische lengte  $\lambda$  en  $r_0$  de gemiddelde lengte van den aardstraal.

Tusschen de poolcoördinaten en de rechthoekige coördinaten bestaan de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r_0 \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

Op zeker punt der aardoppervlakte met coördinaten  $(r_0, \varphi, \lambda)$  of  $(x, y, z)$  brengen wij een sialprisma aan, waarvan de massa is voor te stellen door

$$d\mu = \rho_1 D r_0^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda.$$

<sup>1)</sup> BILIMOVITCH, Zum Mechanismus der Polverlagerungen. Publ. mathématiques de l'Université de Belgrade, Tome II 1934.



Deze massa voorzien wij van den coëfficiënt  $\frac{2z_0}{r_0}$ , volgens het „recept” van § 12 en kunnen dan voor de op deze wijze gereduceerde massa de traagheidsmomenten en deviatie momenten bepalen ten opzichte van de assen van het aangegeven coördinatensysteem.

Wij vinden dan de volgende uitdrukkingen:

a. voor de traagheidsmomenten:

$$\left. \begin{aligned} dI_x &= (y^2 + z^2) \frac{2z_0}{r_0} d\mu \\ dI_y &= (z^2 + x^2) \frac{2z_0}{r_0} d\mu \\ dI_z &= (x^2 + y^2) \frac{2z_0}{r_0} d\mu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

b. voor de deviatie momenten:

$$\left. \begin{aligned} dA_x &= yz \frac{2z_0}{r_0} d\mu \\ dA_y &= xz \frac{2z_0}{r_0} d\mu \\ dA_z &= yx \frac{2z_0}{r_0} d\mu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Gaan wij met behulp van (57) op poolcoördinaten over dan krijgen wij als wij de uitdrukking  $2\varrho_1 Dz_0 r_0^3 = c$  stellen, de volgende formules:

$$\left. \begin{aligned} dI_x &= c (\cos^3 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi \cos \lambda) d\varphi d\lambda \\ dI_y &= c (\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda) d\varphi d\lambda \\ dI_z &= c \cos^3 \varphi d\varphi d\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots (58a)$$

$$\left. \begin{aligned} dA_x &= c \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda \\ dA_y &= c \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda \\ dA_z &= c \cos^3 \varphi \sin \lambda \cos \lambda d\varphi d\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59a)$$

Integreeren wij deze grootheden over de geheele sialbedekking, dan stellen de uitkomsten voor de traagheids- en deviatiemomenten van de siallaag ten opzichte van de assen van het gekozen coördinatenstelsel. De waarde  $\Omega$  van het traagheidsmoment ten opzichte van een willekeurige as  $\xi$ , die respectievelijk de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  met de  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ -as insluit, kunnen wij vinden door te bedenken dat

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\xi} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 A_x \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2 A_y \cos \gamma \cos \alpha - 2 A_z \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \right\} (60)$$

Daar  $x = r_0 \cos \alpha$   
 $y = r_0 \cos \beta$   
 $z = r_0 \cos \gamma$  en wij in formule (57) een verband hebben tusschen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en de  $\varphi$  en  $\lambda$  van de  $\xi$ -as, kunnen wij dus schrijven

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \beta &= \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \gamma &= \sin \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

Deze waarden gesubstitueerd in (60) geeft dan

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\xi} = I_x \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + I_y \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + I_z \sin^2 \varphi - \\ - A_x \sin 2\varphi \sin \lambda - A_y \sin 2\varphi \cos \lambda - A_z \cos^2 \varphi \sin 2\lambda \end{aligned} \right\} (60a)$$

Hiermee is dan het  $\Omega$ -veld bekend, daar wij in elk punt de  $\Omega$  kunnen berekenen. In de volgende berekeningen is, zooals reeds is aangegeven, steeds de  $r_0$  gebruikt inplaats van de  $r$ . Gemakkelijk is in te zien (dit volgt uit  $r = r_0 (1 - \beta \sin^2 \varphi)$ ) dat de fouten die hierdoor ontstaan kleiner dan 1 % zijn.

§ 15. De bovengenoemde integraties van de uitdrukkingen (58a) en (59a) worden nu door MILANKOVITCH als volgt uitgevoerd:

De continenten worden van hun uitsteeksels en inzinkingen ontdaan door deze als het ware vlak te strijken, waardoor hun contouren geheel anders worden dan in werkelijkheid. De continenten krijgen dan een uniforme dikte  $D_1$  en een dichtheid  $\varrho_1$ .

De dikten der oceaانبodems worden ook constant aangenomen ( $D_2$ ) terwijl hiervoor een andere dichtheid  $\varrho_2$  gebruikt wordt.

Inplaats van de eene waarde  $c$ , welke niet constant is, krijgt MILANKOVITCH nu twee waarden

$$c_1 = 2 \varrho_1 D_1 z_{01} r_0^3 \text{ (voor de continenten)}$$

$$c_2 = 2 \varrho_2 D_2 z_{02} r_0^3 \text{ (voor de oceaانبodems)}$$

welke beide wèl constanten zijn daar  $D_1$ ,  $z_{01}$ ,  $D_2$  en  $z_{02}$  alle constant zijn. Verder laat MILANKOVITCH zien dat men de verschillende deelen der aarde antipodisch verplaatsen mag. Door zoo te handelen worden de integralen nu alleen afhankelijk van de integratiegrenzen en deze worden bij MILANKOVITCH uiteindelijk bepaald door de contouren der vlakgestreken continenten. Deze wijze van berekenen is een betrekkelijk ruwe benadering en zal dus niet tot een zuivere uitkomst kunnen voeren. Door gebruik te maken van de PREY-ontwikkelingen kunnen wij de geheele vervorming der continenten achterwege laten; weliswaar krijgen wij nu veel integraties uit te voeren, maar de wijze van berekenen is beter en uit wiskundig oogpunt eleganter en in principe eenvoudiger.

§ 16. Nu kunnen wij overgaan tot de numerieke berekening van de traagheids- en deviatiemomenten van de siallaag ten opzichte van de  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ -as. Reeds is vermeld dat de factor  $c = 2 \varrho_1 D z_0 r_0^3$  niet constant is, daar  $D$  en  $z_0$  afhankelijk zijn van de hoogte der topografie.

Ook is gebleken, dat  $D z_0 = \frac{1}{4a} T^2 + h (T + a h)$ . Dus

$$c = 2 \varrho r_0^3 \left\{ \frac{T^2}{4a} + T h + a h^2 \right\} \dots \dots \dots (63)$$

Nu kunnen wij den factor  $\frac{T^2}{4a}$  bij de integraties niet weglaten, daar de goniometrische vormen geen bolfuncties zijn. Wij zullen dus alle voorkomende integralen berekenen, hoewel wij kunnen vermoeden dat er wel onder zullen zijn, die nul opleveren.

Vullen wij in de uitdrukking voor  $c$  nu voor  $h$  en  $h^2$  de PREY-ontwikkelingen in, welke in hoofdstuk II reeds uitvoerig vermeld zijn. Tevens zijn daar de te gebruiken constanten opgesomd.

In de berekeningen worden de integraties over de termen der

$h$  reeks dezelfde als die over de termen der  $h^2$  reeks, alleen met andere PREY-coëfficiënten.

Berekeningen: <sup>1)</sup>

Voor  $dI_x$  is te schrijven:

$$\begin{aligned} & c' (\cos^3 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi d\lambda + \\ & + c'' (\cos^3 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi \cos \varphi) h d\varphi d\lambda + \\ & + c''' (\cos^3 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi \cos \varphi) h^2 d\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

Hierin is zooals gemakkelijk is na te gaan:

$$c' = 2\varrho r_0^3 \times \frac{T^2}{4a}, \quad c'' = 2\varrho r_0^3 T \quad \text{en} \quad c''' = 2\varrho r_0^3 a.$$

De eerste term in de uitdrukking geeft aanleiding tot de volgende integralen:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin^2 \lambda d\lambda &= \pi \int \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi \\ \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \int d\lambda &= 2\pi \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

De tweede en derde term geven elk aanleiding tot 20 integralen. Er zijn n.l. 9 PREY-constanten in elke ontwikkeling (tot en met de tweede orde) waarvan er één  $A_{20}$  (en  $A'_{20}$ ) met een tweeterm vermenigvuldigd wordt. Dit geeft dus 10 termen, die elk met den uit twee termen bestaanden goniometrischen vorm in de uitdrukking voor  $dI_x$  vermenigvuldigd moeten worden.

Wij geven hier alleen de uitwerking van de integralen van de  $h^2$  reeks, daar die voor de  $h$  reeks hieraan gelijk worden (alleen de PREY-coëfficiënten worden van ' voorzien).

<sup>1)</sup> Alle in dit hoofdstuk voorkomende integralen hebben tot integratiegrenzen:

$$-\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi.$$



$$\begin{aligned}
\int A_{00} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \, d\lambda &= \pi A_{00} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi A_{00}. \\
\int A_{00} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda &= 2\pi A_{00} \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi A_{00}. \\
\int A_{10} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \, d\lambda &= \pi A_{10} \int \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0^{**}) \\
\int A_{10} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda &= 2\pi A_{10} \int \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0^{**}) \\
\int A_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int A_{11} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int B_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \sin^3 \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int B_{11} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int \frac{3}{2} A_{20} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \, d\lambda &= \frac{3}{2} \pi A_{20} \int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{3}{2} \pi A_{20} \times \frac{1}{5} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} \pi A_{20} \\
\int \frac{3}{2} A_{20} \sin^4 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda &= 3\pi A_{20} \int \sin^4 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{6}{5} \pi A_{20} \\
\int -\frac{1}{2} A_{20} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \, d\lambda &= -\frac{1}{2} \pi A_{20} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = -\frac{3}{5} \pi A_{20} \\
\int -\frac{1}{2} A_{20} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda &= -\pi A_{20} \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{2}{3} \pi A_{20} \\
\int 3 A_{21} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 A_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \sin^2 \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 B_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \sin^3 \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 B_{21} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 A_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \sin^2 \lambda \, d\lambda &= -\frac{3}{2} \pi A_{22} \int \cos^5 \varphi \, d\varphi = \\
&= -\frac{3}{2} \pi A_{22} \times \frac{1}{6} = -\frac{8}{5} \pi A_{22} \\
\int 3 A_{22} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 B_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \sin^2 \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\
\int 3 B_{22} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \, d\lambda &= 0^*)
\end{aligned}$$

Op soortgelijke wijze vinden wij:

$$\begin{aligned}
dI_y &= c' (\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda) \, d\varphi \, d\lambda + \\
&+ c'' (\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda) \, h \, d\varphi \, d\lambda + \\
&+ c''' (\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \lambda) \, h^2 \, d\varphi \, d\lambda
\end{aligned}$$

met als integralen voor den eersten term

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda &= 2\pi \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi \\
\int \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda &= \pi \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi.
\end{aligned}$$

Beide andere termen geven weer (alleen voor den derden term neergeschreven)

$$\begin{aligned}
& \int A_{00} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda = 2\pi A_{00} \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi A_{00} \\
& \int A_{00} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda = \pi A_{00} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi A_{00} \\
& \int A_{10} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda = 2\pi A_{10} \int \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0^{**}) \\
& \int A_{10} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda = \pi A_{10} \int \cos^5 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0^{**}) \\
& \int A_{11} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int A_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \cos^3 \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int B_{11} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int B_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \sin \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int \frac{3}{2} A_{20} \sin^4 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda = 3\pi A_{20} \int \sin^4 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{6}{5} \pi A_{20} \\
& \int \frac{3}{2} A_{20} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda = \frac{3}{2} \pi A_{20} \int \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \\
& \quad = \frac{3}{2} \pi A_{20} \times \frac{4}{15} = \frac{2}{5} \pi A_{20} \\
& \int -\frac{1}{2} A_{20} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int d\lambda = -\pi A_{20} \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{2}{3} \pi A_{20} \\
& \int -\frac{1}{2} A_{20} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda = -\frac{1}{2} \pi A_{20} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = -\frac{2}{3} \pi A_{20} \\
& \int 3 A_{21} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos^3 \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{21} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \sin \lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{22} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 A_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \cos^2 \lambda \, d\lambda = \frac{3}{2} \pi A_{22} \int \cos^5 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{5} \pi A_{22} \\
& \int 3 B_{22} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \, d\lambda = 0^*) \\
& \int 3 B_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \cos^2 \lambda \, d\lambda = 0^*)
\end{aligned}$$

Evenzoo kunnen wij voor  $dI_z$  schrijven:

$$dI_z = c' \cos^3 \varphi \, d\varphi \, d\lambda + c'' \cos^3 \varphi \, h \, d\varphi \, d\lambda + c''' \cos^3 \varphi \, h^2 \, d\varphi \, d\lambda.$$

De eerste term geeft als integraal:

$$\int \cos^3 \varphi \, d\varphi \int d\lambda = 2\pi \int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \pi.$$

Beide andere termen geven elk aanleiding tot 10 integralen waarvan die voor den derden term worden:

$$\begin{aligned} \int A_{00} \cos^3 \varphi d\varphi \int d\lambda &= 2\pi A_{00} \int \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{3}\pi A_{00} \\ \int A_{10} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \int d\lambda &= 2\pi A_{10} \int \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0^{**}) \\ \int A_{11} \cos^4 \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int B_{11} \cos^4 \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int \frac{3}{2} A_{20} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int d\lambda &= 3\pi A_{20} \int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4}{15} \times 3\pi A_{20} = \frac{4}{5}\pi A_{20} \\ \int -\frac{1}{2} A_{20} \cos^3 \varphi d\varphi \int d\lambda &= -\pi A_{20} \int \cos^3 \varphi d\varphi = -\frac{4}{3}\pi A_{20} \\ \int 3 A_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \cos \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{22} \cos^5 \varphi d\varphi \int \cos 2\lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{22} \cos^5 \varphi d\varphi \int \sin 2\lambda d\lambda &= 0^*) \end{aligned}$$

Ook de  $dA_x$ ,  $dA_y$  en  $dA_z$  kunnen wij op soortgelijke wijze in drietermen opschrijven. De eerste term geeft dan bij elk van die vormen aanleiding tot één integraal. Beide andere termen leveren elk 10 integralen, waarvan wij steeds alleen die voor den derden term vermelden.

Als integralen bij  $dA_x$  krijgen wij dan:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{00} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{10} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^{**}) \\ \int A_{11} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int B_{11} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \int \sin^2 \lambda d\lambda &= \pi B_{11} \int \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0^{**}) \\ \int \frac{3}{2} A_{20} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int -\frac{1}{2} A_{20} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{21} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{21} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int \sin^2 \lambda d\lambda &= 3\pi B_{21} \int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= 3\pi B_{21} \times \frac{1}{5} \int \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{5}\pi B_{21} \\ \int 3 A_{22} \sin \varphi \cos^4 \varphi d\varphi \int \cos 2\lambda \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{22} \sin \varphi \cos^4 \varphi d\varphi \int \sin 2\lambda \sin \lambda d\lambda &= 0^*) \end{aligned}$$

Als integralen bij  $dA_y$  krijgen wij dan:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{00} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{10} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{11} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda &= \pi A_{11} \int \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0^{**}) \\ \int B_{11} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int \frac{3}{2} A_{20} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int -\frac{1}{2} A_{20} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{21} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \, d\lambda &= 3\pi A_{21} \int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{5}\pi A_{21} \\ \int 3 B_{21} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{22} \sin \varphi \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{22} \sin \varphi \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Als integralen bij  $dA_z$  krijgen wij dan:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{00} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{10} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int A_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \sin \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int B_{11} \cos^4 \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \sin^2 \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int \frac{3}{2} A_{20} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int -\frac{1}{2} A_{20} \cos^3 \varphi \, d\varphi \int \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos^2 \lambda \sin \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{21} \cos^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int \cos \lambda \sin^2 \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 A_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \cos 2\lambda \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 0^*) \\ \int 3 B_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int \sin 2\lambda \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda &= 3 \int B_{22} \cos^5 \varphi \, d\varphi \cdot \frac{1}{2} \int \sin^2 2\lambda \, d\lambda = \\ &= \frac{3}{2} \pi B_{22} \int \cos^5 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{5} \pi B_{22}. \end{aligned}$$

Hiermee zijn alle integraties van de traagheids- en deviatie-momenten uitgevoerd.

Wij gaan nu de uitkomsten van deze integraties invullen in de formules voor  $I_{xyz}$  en  $A_{xyz}$ .

\*) beteekent dat de betreffende integraal nul wordt door de integratie naar  $\lambda$ .

\*\*\*) beteekent dat de betreffende integraal nul wordt door de integratie naar  $\varphi$ .



§ 17. Substitueeren wij de uitkomsten van de vorige paragraaf in de formules voor de geïntegreerde linkerleden, dan krijgen wij:

$$\begin{aligned}
 I_x &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ \frac{8}{3} \pi \times \frac{T^2}{4a} + T \left( \frac{8}{3} \pi A'_{00} + \frac{4}{15} \pi A'_{20} - \frac{8}{5} \pi A'_{22} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + a \left( \frac{8}{3} \pi A_{00} + \frac{4}{15} \pi A_{20} - \frac{8}{5} \pi A_{22} \right) \right], \\
 I_y &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ \frac{8}{3} \pi \times \frac{T^2}{4a} + T \left( \frac{8}{3} \pi A'_{00} + \frac{4}{15} \pi A'_{20} + \frac{8}{5} \pi A'_{22} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + a \left( \frac{8}{3} \pi A_{00} + \frac{4}{15} \pi A_{20} + \frac{8}{5} \pi A_{22} \right) \right] \\
 I_z &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ \frac{8}{3} \pi \times \frac{T^2}{4a} + T \left( \frac{8}{3} \pi A'_{00} - \frac{8}{15} \pi A'_{20} \right) + a \left( \frac{8}{3} \pi A_{00} - \frac{8}{15} \pi A_{20} \right) \right] \\
 A_x &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ T \times \frac{4}{5} \pi B'_{21} + a \times \frac{4}{5} \pi B_{21} \right] \\
 A_y &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ T \times \frac{4}{5} \pi A'_{21} + a \times \frac{4}{5} \pi A_{21} \right] \\
 A_z &= 2 \varrho_1 r_0^3 \left[ T \times \frac{8}{5} \pi B'_{22} + a \times \frac{8}{5} \pi B_{22} \right].
 \end{aligned}$$

Vullen wij in het bovenstaande in, de waarden der PREY-constanten uit het tweede hoofdstuk en voor  $T = 30$  km en  $a = 2,725$  dan komen wij tot de volgende resultaten (eerst overal  $\pi$  buiten [] gehaald)

$$\begin{aligned}
 I_x &= 2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 150,00 & A_x &= 2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 6,86 \\
 I_y &= 2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 136,75 & A_y &= 2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 4,83 \\
 I_z &= 2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 129,60 & A_z &= -2 \pi \varrho_1 r_0^3 \times 0,69.
 \end{aligned}$$

Om de waarden hiervan in cgs-eenheden te kunnen uitdrukken, merken wij op dat alle cijferfactoren in  $\text{km}^2$  zijn opgegeven (immers  $T$  in km en de PREY-coëfficiënten resp. in km en  $\text{km}^2$ ) en dus met  $10^{10}$  vermenigvuldigd moeten worden om in  $\text{cm}^2$  te zijn uitgedrukt.

De factor  $2 \pi \varrho_1 r_0^3$  wordt na substitutie van  $\varrho_1 = 267$  g/cm<sup>3</sup> en  $r_0 = 6370 \times 10^5$  cm gelijk aan  $4,334 \times 10^{27}$  grammassa.

Hieruit volgen dan, voor de  $I_{xyz}$  en  $A_{xyz}$ , de volgende waarden uitgedrukt in  $\text{gm}^2$ :

$$\begin{aligned}
 I_x &= 6,5 \times 10^{39} & A_x &= 0,3 \times 10^{39} \\
 I_y &= 5,9 \times 10^{39} & A_y &= 0,2 \times 10^{39} \\
 I_z &= 5,6 \times 10^{39} & A_z &= -0,03 \times 10^{39}.
 \end{aligned}$$

Hiermee kennen wij dus de isostatische traagheids- en deviatie-momenten van de sialschaal ten opzichte van 3 onderling loodrechte assen en daarmede is in verband met (60a) het  $\Omega$ -veld bekend.

§ 18. Wij gaan nu na de ligging van de hoofdtraagheidsassen en de traagheidspolen (de snijpunten van de hoofdtraagheidsassen met den aardbol). De coördinaten der polen laten zich als volgt gemakkelijk bepalen:

De scalaire waarde  $\Omega$  bereikt in de traagheidspolen zijn extreme waarden, dus de coördinaten  $\lambda$  en  $\varphi$  van die polen moeten voldoen aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0. \quad \dots \quad (65a, b)$$

Substitueeren wij (60a) in (65a, b) dan krijgen wij uit (65a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0 = & -I_x \sin 2\varphi \cos^2 \lambda - I_y \sin 2\varphi \sin^2 \lambda + I_z \sin 2\varphi - \\ & - 2 A_x \cos 2\varphi \sin \lambda - 2 A_y \cos 2\varphi \cos \lambda + 2 A_z \sin 2\varphi \sin 2\lambda. \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi [-I_x \cos^2 \lambda - I_y \sin^2 \lambda + I_z + A_z \sin 2\lambda] = \\ 2 \cos 2\varphi [A_x \sin \lambda + A_y \cos \lambda] \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 A_x \sin \lambda + 2 A_y \cos \lambda}{-I_x \cos^2 \lambda - I_y \sin^2 \lambda + I_z + A_z \sin 2\lambda} \quad \left. \right\} \quad (66)$$

en uit (65b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0 = & -I_x \sin 2\lambda \cos^2 \varphi + I_y \sin 2\lambda \cos^2 \varphi - A_x \cos \lambda \sin 2\varphi + \\ & + A_y \sin \lambda \sin 2\varphi - 2 A_z \cos 2\lambda \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} \cos \varphi [-I_x \sin 2\lambda + I_y \sin 2\lambda - 2 A_z \cos 2\lambda] = \\ = \sin \varphi [2 A_x \cos \lambda - 2 A_y \sin \lambda] \end{aligned}$$

of

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(I_x - I_y) \sin 2\lambda + 2 A_z \cos 2\lambda}{-2 A_x \cos \lambda + 2 A_y \sin \lambda} \quad \dots \quad (67)$$

Wij vullen nu de waarden voor  $I_{x,y,z}$  en  $A_{x,y,z}$  in (laten echter overal de constante  $2\pi \rho_1 r_0^3$  weg, daar wij alle termen door dien factor kunnen deelen).

Dan blijven over de beide vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{13,72 \sin \lambda + 9,66 \cos \lambda}{-150 \cos^2 \lambda - 136,75 \sin^2 \lambda + 129,6 - 0,69 \sin 2\lambda} = \\ &= \frac{13,72 \sin \lambda + 9,66 \cos \lambda}{-7,15 - 13,25 \cos^2 \lambda - 0,69 \sin 2\lambda} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\text{en} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{13,25 \sin 2\lambda - 1,38 \cos 2\lambda}{-13,72 \cos \lambda + 9,66 \sin \lambda} \quad (69)$$

De coördinaten  $\varphi$  en  $\lambda$  die aan deze beide vergelijkingen voldoen zijn de coördinaten der traagheidspolen.

De vergelijkingen 68 en 69 kan men het beste grafisch oplossen. Men kiest voor  $\lambda$  waarden van  $-180^\circ$  tot  $+180^\circ$  telkens om de  $10^\circ$  en rekt de bijbehorende  $\varphi$  uit, uit beide vergelijkingen. (Doordat (68) en (69) periodieke functies zijn kan men eventueel volstaan met de waarden voor  $\lambda$  uit het gebied  $0 \leq \lambda \leq 180^\circ$ .)

In tabel I (zie pag. 46) zijn verschillende punten van de kromme vermeld waarna deze waarden in figuur 5 (zie pag. 45) grafisch zijn uitgezet. De snijpunten der krommen bepalen nu de  $\varphi$  en  $\lambda$  van de gezochte traagheidspolen. De getrokken lijn stelt (69), de streepjeslijn (68) voor.

Zooals te verwachten was krijgen wij 6 traagheidspolen, die op den bol twee aan twee diametraal tegenover elkaar liggen. Drie dezer polen liggen op het Noordelijk Halfron, de andere drie op het Zuidelijk Halfron.

Vinden wij het aflezen der coördinaten uit figuur 5 niet nauwkeurig genoeg, dan kunnen wij door analytische berekening in de buurt van de gevonden oplossingen, preciesere waarden vinden uit (68) en (69).

Wij moeten echter wel bedenken dat het niet noodzakelijk is de coördinaten der traagheidspolen tot op minuten en seconden nauwkeurig te berekenen. In het voorgaande zijn namelijk verschillende onderstellingen gemaakt, die elk voor zich aanleiding tot fouten geven. Wij hebben ons beperkt tot een nauwkeurigheid van 0,1 graad.



Voor de traagheidspolen vinden wij dan de volgende coördinaten (opgegeven tot in tiende graden nauwkeurig, de graden afgelezen uit figuur 5, de onderdeelen berekend met (68) en (69)):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = + 59^{\circ},2 \\ \lambda_1 = + 72^{\circ},7 \end{array} \right\} \text{ten Noorden van Omsk.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_2 = + 26^{\circ},0 \\ \lambda_2 = - 72^{\circ},4 \end{array} \right\} \text{ten N.O. Bahama eilanden.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_3 = + 15^{\circ},2 \\ \lambda_3 = - 170^{\circ},1 \end{array} \right\} \text{ten Z. van Johnston (Hawai).}$$

Deze drie liggen dus op het Noordelijk Halfrond.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_4 = - 59^{\circ},2 \\ \lambda_4 = - 107^{\circ},3 \end{array} \right\} \text{Zuidelijke IJszee.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_5 = - 26^{\circ},0 \\ \lambda_5 = + 107^{\circ},6 \end{array} \right\} \text{ten W. van Australië.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_6 = - 15^{\circ},2 \\ \lambda_6 = + 9^{\circ},9 \end{array} \right\} \text{ten W. van Afrika.}$$

Deze drie liggen op het Zuidelijk Halfrond.

(70)

Positieve  $\varphi$  beteekent n.l. Noordelijk Halfrond.

Positieve  $\lambda$  beteekent Ooster lengte.

Bovengenoemde 6 polen verdeelen de aardoppervlakte in acht congruente rechthoekige gelijkzijdige boldriehoeken. De baan der Noordpool zal gelegen moeten zijn in dien driehoek die de eerstgenoemde drie polen tot hoekpunten heeft, omdat daarin de tegenwoordige Noordpool ligt en uit de eigenschappen van het  $\Omega$ -veld volgt dat de baan niet één der zijden van die driehoeken kan snijden. Nu valt nog na te gaan hoe deze baan precies verloopt. Wel hebben wij hier evenals MILANKOVITCH het resultaat, dat de pool zich over een afstand van hoogstens 90 booggraden kan verplaatsen.



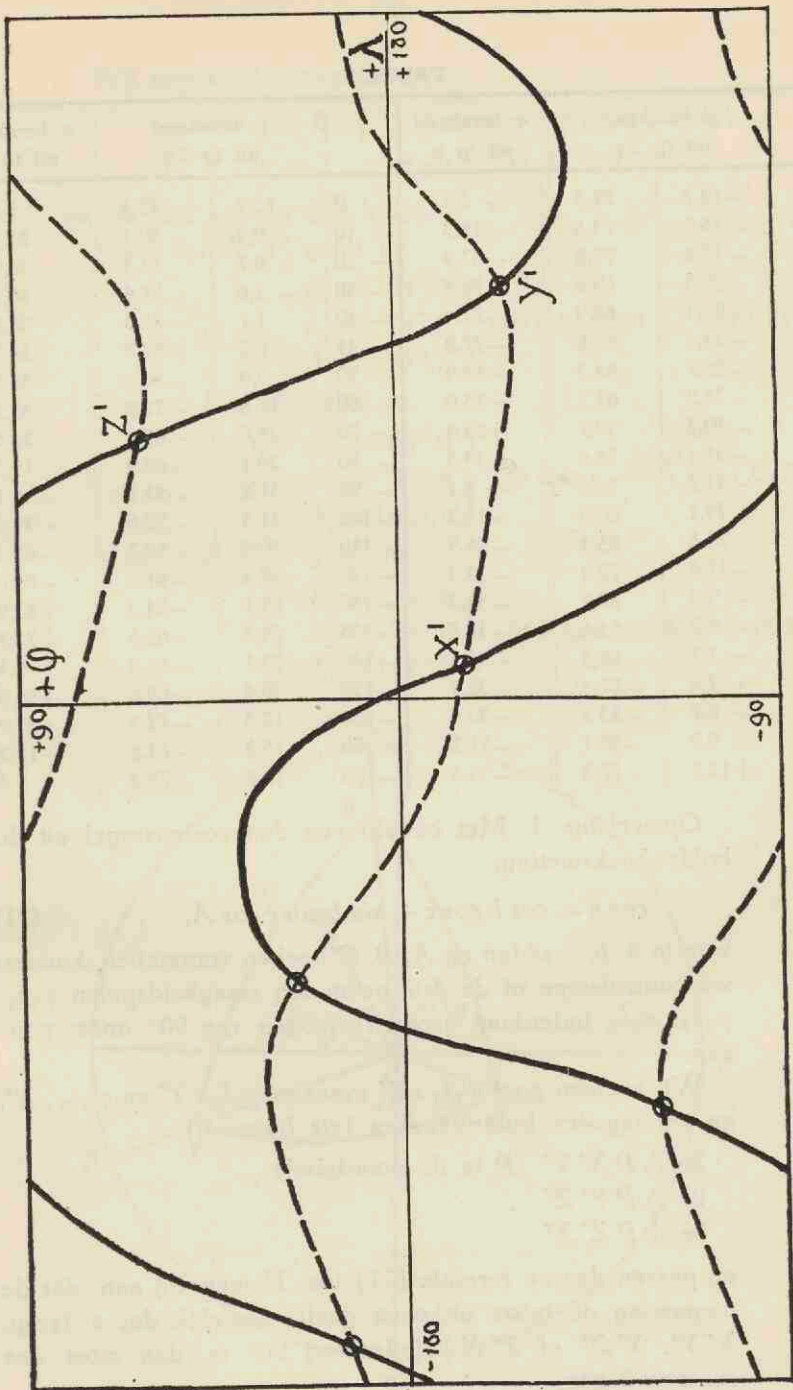


Fig. 5.

TABEL I.

$\lambda$	$\varphi$ berekend uit $\operatorname{tg} 2\varphi$		$\varphi$ berekend uit $\operatorname{tg} \varphi$	$\lambda$	$\varphi$ berekend uit $\operatorname{tg} 2\varphi$		$\varphi$ berekend uit $\operatorname{tg} \varphi$
0	-12,7	77,3	+ 5,8	0	-12,7	77,3	5,8
10	-15,2	74,8	-15,3	- 10	- 9,9	80,1	21,1
20	-17,8	72,2	-37,9	- 20	- 6,7	83,3	30,6
30	-20,4	69,6	-56,8	- 30	- 2,6	87,4	36,1
40	-23,1	66,9	-71,4	- 40	1,7	-88,3	38,5
45	-24,4	65,6	-77,8	- 45	6,2	-83,8	38,7
50	-25,7	64,3	-83,9	- 50	9,9	-80,1	38,3
60	-28,3	61,7	+83,0	- 60	17,8	-72,2	35,3
70	-30,3	59,7	+65,4	- 70	24,6	-65,4	28,5
80	-31,4	58,6	+39,3	- 80	29,1	-60,9	15,2
90	-31,2	58,8	+ 8,1	- 90	31,2	-58,8	- 8,1
100	-29,1	60,9	-15,2	-100	31,4	-58,6	-39,3
110	-24,6	65,4	-28,5	-110	30,3	-59,7	-65,4
120	-17,8	72,2	-35,3	-120	28,3	-61,7	-83,0
130	- 9,9	80,1	-38,3	-130	25,7	-64,3	+83,9
135	- 6,2	83,8	-38,7	-135	24,4	-65,6	+77,8
140	- 1,7	88,3	-38,5	-140	23,1	-66,9	+71,4
150	+ 2,6	-87,4	-36,1	-150	20,4	-69,6	+56,8
160	+ 6,7	-83,3	-30,6	-160	17,8	-72,2	+37,9
170	+ 9,9	-80,1	-21,1	-170	15,2	-74,8	+15,3
180	+12,7	-77,3	- 5,8	-180	12,7	-77,3	- 5,8

*Opmerking:* 1. Met behulp van den cosinusregel uit de boldriehoeksmeting:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad . \quad . \quad (71)$$

waarin  $a, b, c$  zijden en  $A, B, C$  hoeken voorstellen, kunnen wij controleeren of de drie gevonden traagheidspolen  $\varphi_1\lambda_1$ ;  $\varphi_2\lambda_2$ ;  $\varphi_3\lambda_3$  inderdaad grootcirkelbogen van  $90^\circ$  onderspannen.

Wij noemen pool  $\varphi_1\lambda_1 : Z'$  evenzoo  $\varphi_2\lambda_2 : Y'$  en  $\varphi_3\lambda_3 : X'$ , en vormen drie boldriehoeken (zie figuur 6)

1e  $\triangle P X' Y'$  ( $P$  is de noordpool)

2e  $\triangle P Y' Z'$

3e  $\triangle P Z' X'$

en passen daarop formule (71) toe. Nemen wij aan, dat de toepassing de juiste uitkomst geeft, namelijk dat  $a$  (resp.  $X' Y'$ ,  $Y' Z'$  of  $Z' X'$ ) inderdaad  $90^\circ$  is, dan moet dus  $\cos a = 0$  zijn.

Wij moeten dus nagaan of

$$\cos a = 0 = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

of  $|tg b tg c \cos A| = 1$

en dit voor elk der drie hoeken.

Voor  $\triangle P X' Y'$  geldt nu

$$\left. \begin{array}{l} b = 64^{\circ},0 \\ c = 74^{\circ},8 \\ A = 97^{\circ},7 \end{array} \right\} |tg b tg c \cos A| = 1,011$$

Voor  $\triangle P Y' Z'$  geldt nu

$$\left. \begin{array}{l} b = 64^{\circ},0 \\ c = 30^{\circ},8 \\ A = 145^{\circ},1 \end{array} \right\} |tg b tg c \cos A| = 1,022$$

Voor  $\triangle P Z' Y'$  geldt nu

$$\left. \begin{array}{l} b = 30^{\circ},8 \\ c = 74^{\circ},8 \\ A = 117^{\circ},2 \end{array} \right\} |tg b tg c \cos A| = 1,003.$$

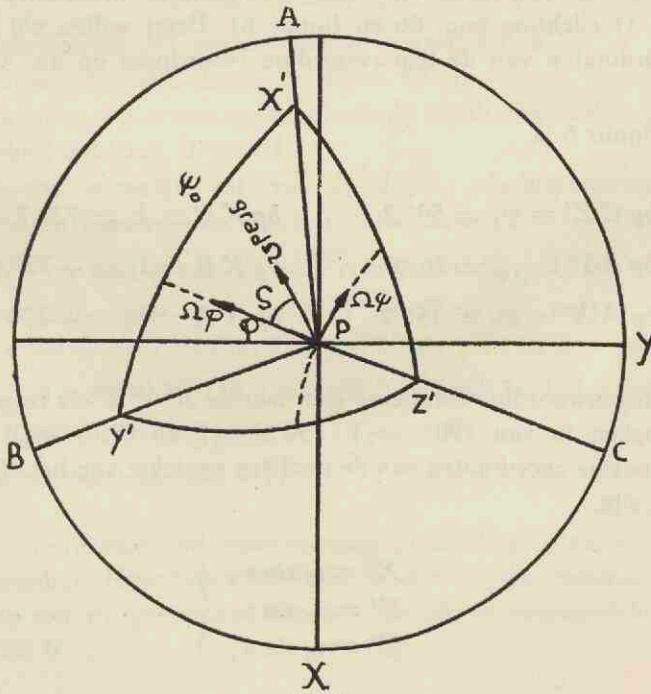


Fig. 6.

Op grond van deze uitkomsten kunnen wij zeggen, dat de traagheidspolen inderdaad bogen van  $90^\circ$  onderspannen.

§ 19. Leggen wij nu door de gevonden traagheidspolen de traagheidsassen, die wij als  $X' Y'$  en  $Z'$ -as zullen aanduiden (de  $X'$ -as naar  $\varphi_3 \lambda_3$ , de  $Y'$ -as naar  $\varphi_2 \lambda_2$  en de  $Z'$ -as naar  $\varphi_1 \lambda_1$ ) dan kunnen wij nu de waarden der hoofdtraagheidsmomenten berekenen, door in (60a) in te vullen de coördinaten van de traagheidspolen.

Als resultaat vinden wij dan

$$\left. \begin{aligned} I_{x'} &= 124,9 \times 2\pi \rho r_0^3 = 5,4 \times 10^{39} \text{ gr cm}^2 \\ I_{y'} &= 139,9 \times 2\pi \rho r_0^3 = 6,06 \times 10^{39} \text{ gr cm}^2 \\ I_{z'} &= 151,4 \times 2\pi \rho r_0^3 = 6,56 \times 10^{39} \text{ gr cm}^2. \end{aligned} \right\} \dots (72)$$

§ 20. In het  $X' Y' Z'$ -stelsel kunnen wij ook coördinaten  $\phi$  en  $\psi$  invoeren die respectievelijk breedte en lengte voorstellen in dat stelsel (toelichting pag. 66 en figuur 6). Eerst willen wij bepalen de coördinaten van de tegenwoordige Noordpool op dit  $X' Y' Z'$ -stelsel.

In figuur 6 is

$$\begin{aligned} \text{bg } C Z' &= \varphi_1 = 59^\circ,2; & \text{bg } X C &= \lambda_1 = 72^\circ,7; \\ \text{bg } B Y' &= \varphi_2 = 26^\circ,0; & \text{bg } X B &= \lambda_2 = -72^\circ,4; \\ \text{bg } A X' &= \varphi_3 = 15^\circ,2; & \text{bg } X A &= \lambda_3 = -170^\circ,1. \end{aligned}$$

De tegenwoordige rotatie-as sluit met de  $X' Y' Z'$ -as respectievelijk hoeken in van  $(90^\circ - \varphi_3)$ ,  $(90^\circ - \varphi_2)$  en  $(90^\circ - \varphi_1)$  dus de rechthoekige coördinaten van de pool ten opzichte van het  $X' Y' Z'$ -stelsel zijn:

$$\left. \begin{aligned} X' &= r_0 \sin \varphi_3 \\ Y' &= r_0 \sin \varphi_2 \\ Z' &= r_0 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (73)$$



Stel de bolcoördinaten der pool in het  $X' Y' Z'$ -stelsel zijn  $\Phi_0$  en  $\Psi_0$ , dan geldt ook

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \cos \Phi_0 \cos \Psi_0 \\ y &= r_0 \cos \Phi_0 \sin \Psi_0 \\ z &= r_0 \sin \Phi_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (74)$$

Uit (73) en (74) volgt:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \sin \Phi_0 \\ \sin \varphi_2 &= \cos \Phi_0 \sin \Psi_0 \\ \sin \varphi_3 &= \cos \Phi_0 \cos \Psi_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (75)$$

waaruit in de eerste plaats:

$$\Phi_0 = \varphi_1 = 59^\circ,2 \dots \dots \dots (76)$$

Deelen wij beide andere vergelijkingen op elkaar, dan krijgen wij:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Psi_0 &= \frac{\sin 26^\circ}{\sin 15^\circ,2} = 1,672 \\ \text{of } \Psi_0 &= 59^\circ,2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77)$$

De coördinaten der tegenwoordige noordpool in het  $X' Y' Z'$ -stelsel opgegeven, zijn dus  $\Phi_0 = \Psi_0 = 59^\circ,2$ .

Hier hebben wij tevens gelegenheid de resultaten aan te passen bij die van hoofdstuk II en III.

Gaan wij namelijk uit van  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ ,  $I_{z'}$  als hoofdtraagheidsmomenten en bepalen dan  $I_{NP}$  met de formule:

$$I_{NP} = I_{x'} \cos^2 \Phi_0 \cos^2 \Psi_0 + I_{y'} \cos^2 \Phi_0 \sin^2 \Psi_0 + I_{z'} \sin^2 \Phi_0$$

(de deviatie momenten t.o.v. de  $X' Y'$  en  $Z'$ -as zijn nul).

Vullen wij de waarden uit (72), (76) en (77) in dan volgt

$$\begin{aligned} I_{NP} &= 151,4 \cos^4 59^\circ,2 + 139,9 \cos^2 59^\circ,2 \sin^2 59^\circ,2 + 124,9 \sin^2 59^\circ,2 \\ &= 129,6 (\times 2 \pi \varrho_1 r_0^3) = I_z. \end{aligned}$$

Dit is het resultaat van § 17.

§ 20. Berekenen wij tenslotte nog grad  $\Omega$  ter plaatse van de tegenwoordige Noordpool teneinde te zien of dit resultaat overeenstemt met de gevonden waarde voor de bewegingsrichting in hoofdstuk II.

Wij handelen als volgt:

$$\frac{\partial \Omega_{NP}}{r_0 \partial \phi} = -I_{x'} \sin 2\phi \cos^2 \Psi - I_{y'} \sin 2\phi \sin^2 \Psi + I_{z'} \sin 2\phi$$

wat na invulling der waarden uit (72), (76) en (77) oplevert:

$$\frac{\partial \Omega_{NP}}{r_0 \partial \phi} = -14,64 \times 2\pi \varrho_1 r_0^2 \dots \dots \dots (78)$$

gericht volgens afnemende  $\phi$  (in fig. 6 aangeduid met  $\Omega_\phi$ ).

$$\frac{\partial \Omega_{NP}}{r_0 \cos \phi \partial \Psi} = \frac{\sin 2\Psi \cos \phi}{r_0} (I_{y'} - I_{x'})$$

hetgeen na invulling van (72), (76) en (77) overgaat in:

$$\frac{\partial \Omega_{NP}}{r_0 \cos \phi \partial \Psi} = -5,19 \times 2\pi \varrho_1 r_0^2 \dots \dots \dots (79)$$

dus deze component is gericht volgens afnemende  $\Psi$  (in fig. 6 aangeduid met  $\Omega_\Psi$ ).

Hieruit volgt al direct, dat de pool zijn baan moet doorlopen van  $Z'$  naar  $X'$  toe.

$$\text{grad } \Omega = -15,53 \times 2\pi \varrho_1 r_0^2 \dots \dots \dots (80)$$

en dit geeft daar  $M = -\frac{1}{2} (g_p - g_a)$  grad  $\Omega$  is, na invulling van alle waarden  $M = 2,9 \times 10^{30}$  dyne cm (stemt overeen met de waarde van § 10).

Was de konstante  $n$  uit formule (56) bekend, dan konden wij de grootte van de snelheid bepalen.

Voor de richting der poolbeweging in het  $(\phi, \Psi)$  stelsel volgt:  
 $\text{tg } \zeta = \frac{5,19}{14,64}$  dus  $\zeta = 19^\circ,5$ .

Dit is de hoek tusschen grad  $\Omega$  en de grootcirkelboog door  $Z'$  en  $N$ .

Boltrigonometrisch kunnen wij nu uit den rechthoekigen boldrie-hoek  $GPY'$  van figuur 6 den hoek  $GPY'$  berekenen met den sinusregel

$$\frac{\sin \angle GPY'}{\sin \text{bg } GY'} = \frac{\sin \angle PGY'}{\sin \text{bg } PY'}$$

$$\frac{\sin \angle GPY'}{\sin (90 - 59,2)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 64^\circ}$$

waaruit volgt  $\angle G P Y' = 34^{\circ}.4$ . De hoek tusschen grad  $\Omega$  en de  $X$ -as (de lijn  $P X$  uit figuur 6) is nu gelijk aan

$$\begin{aligned} \angle X P Y' + \angle Y' P G + \angle G P (\text{grad } \Omega) = \\ 72^{\circ}.4 + 34^{\circ}.4 + 19^{\circ}.5 = 126^{\circ}.3. \end{aligned}$$

Vergelijken wij deze waarde met de uitkomst van § 9 dan is er dus een afwijking van slechts  $1^{\circ}$ .

Wij hebben hier dus op een tweede manier de richting der poolbeweging berekend.

## HOOFDSTUK IV.

### Discussie van het artikel van MILANKOVITCH.

§ 21. Voor wij nader ingaan op de bepaling van de poolbaan, willen wij hier nogmaals opmerken, dat er op twee punten een afwijking bestaat tusschen de berekeningen van MILANKOVITCH en die van ons.

1e. De gevonden traagheidspolen liggen anders (de verschillen belooopen afstanden van  $\pm 10$  booggraden zoowel in lengte als in breedte). Dit moet toegeschreven worden aan het reeds eerder vermelde feit, dat MILANKOVITCH de topografie der aarde in zijn berekeningen zéér gewijzigd meeneemt, terwijl wij gebruik gemaakt hebben van de PREY-ontwikkeling naar bolfuncties, zoodat wij door toepassing daarvan betere resultaten kunnen verwachten.

2e. De door MILANKOVITCH gevonden richting der poolbeweging is van de door hem bepaalde traagheidspool bij Hawaï naar de door hem bepaalde traagheidspool bij Petsjora. Wij hebben een beweging gevonden, juist in tegenovergestelden zin. Dat de richting bij MILANKOVITCH verkeerd moet zijn blijkt direct bij een blik op de globe. Het eindpunt der poolbaan kan onmogelijk in Siberië liggen, daar in dit geval de pool juist in het grootste continent ligt, terwijl dit continent ten gevolge van de poolvluchtkracht naar den equator toe gedreven zou worden. Op deze wijze kan de toestand niet stabiel zijn.

Het eindpunt van de poolbaan in den Stillen Oceaan lijkt veel juister, daar dan de continenten meerendeels gegroepeerd liggen om een equator die bij die pool behoort. Op deze onjuistheid van het resultaat van MILANKOVITCH is reeds door sommige schrijvers gewezen (noot bij pag. 23).

Gaan wij nader erop in, hoe MILANKOVITCH tot zijn resultaat komt, dan blijkt, dat bij hem de grootste traagheidsas (dus met het kleinste moment) naar Hawaï gericht is en de kleinste traagheidsas (dus met het grootste moment) naar Petsjora. Dit resultaat is tegengesteld aan dat van ons. Het bleek nu, dat MILANKOVITCH tot zijn



resultaat gekomen is door op één punt in zijn mathematische afleidingen een geologisch argument te berde te brengen, waaruit ten slotte conclusies volgen, welke volkomen in strijd blijken te zijn, met onderstellingen en resultaten op andere gebieden der geophysica. Het is daarom noodzakelijk, dit punt nader te beschouwen.

§ 22. Op bladzijde 629 van het „Handbuch der Geophysik“, Band IX, schrijft MILANKOVITCH aldus:

„Wie tief die Kontinentalschollen, und auch der sialische, besser gesagt der als fest zu betrachtende Boden der Ozeane in ihre fluidale Unterlage eingebettet sind, kann nicht mit Sicherheit angegeben werden. Diesbezüglich sind wir zu vorläufigen Annahmen gezwungen, von welchen wir uns in der Folge groszenteils freimachen werden.

Wir nehmen vor allem an, dass die Kontinentalschollen überall dieselbe Dichte  $\varrho_1$  und überall dieselbe Mächtigkeit  $D_1$  besitzen, desgleichen soll der als fest zu betrachtende Boden der Ozeane überall dieselbe Dichte  $\varrho_2$  und dieselbe Mächtigkeit  $D_2$  aufweisen. Danach kann die Sialdecke der Erde in zwei Teile zergliedert gedacht werden, in die Kontinentalbelegung, für welche  $c$  ist

$$c_1 = 2 \varrho_1 D_1 z_{01} r_0^3$$

zu setzen ist und in die Ozeandeeke, für welche  $c$  ist

$$c_2 = 2 \varrho_2 D_2 z_{02} r_0^3$$

zu setzen ist, wobei  $z_{01}$  und  $z_{02}$  gegeben sind durch

$$z_{01} = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2 \varrho_0} D_1 \quad z_{02} = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2 \varrho_0} D_2$$

$c_1$  und  $c_2$  sind also zwei verschiedene konstante Gröszen."

*Opmerkingen:* 1. Deze  $c_1$  en  $c_2$  komen bij MILANKOVITCH voor, zooals reeds is vermeld, bij de berekening der traagheidsmomenten, waarbij wij de PREY-ontwikkeling hebben gebruikt. De in die traagheidsmomenten optredende factor  $c$  is een functie van  $\varphi$  en  $\lambda$  en bij onze berekening een continue functie van die grootheden. Bij MILANKOVITCH is  $c$  weliswaar een functie van  $\varphi$  en  $\lambda$ , die echter op de continenten steeds de waarde  $c_1$ , op de oceanen de waarde  $c_2$  heeft.

2. Met de gemaakte aannamen toont MILANKOVITCH aan, dat de ligging van de traagheidspolen alleen bepaald wordt door de contouren der „vlakgestreken” continenten terwijl de grootte der momenten — en dat is het belangrijkste — van de verhouding van  $c_1$  tot  $c_2$  afhangen.

Nadat MILANKOVITCH de ligging der traagheidspolen heeft afgeleid en vermeld heeft, dat de baan der pool moet verlopen tusschen de traagheidspool bij Hawaï en die bij Petsjora, omdat onafhankelijk van de verhouding van  $c_1$  en  $c_2$  de middelste traagheidspool in de buurt van de Bahama-eilanden moet liggen, bepaalt hij de richting waarin de pool langs die baan moet loopen, of ook gezegd, waar de grootste traagheidspool zich moet bevinden door de volgende redeneering (bladzijde 681, Band IX):

„Die Ergebnisse der geologischen Forschung sprechen unzweideutig dafür, dasz sich der Nordpol von Hawaï gegen Siberien hat bewegen müssen, weshalb  $c_2 > c_1$  zu setzen ist.”

*Opmerking:* Is namelijk op de een of andere wijze — hier, door in een wiskundige afleiding het geologische resultaat in te voeren, dat men juist zou willen afleiden — de ligging van de grootste traagheidspool bepaald (dit volgt onmiddellijk met behulp van  $\vec{v} = \text{grad } \Omega$  uit de bewegingsrichting) dan volgt namelijk uit de berekeningen van MILANKOVITCH iets over de verhouding van de grootten van  $c_2$  en  $c_1$ .

MILANKOVITCH vervolgt dan:

„Dies bedeutet dasz die Trennungsschicht zwischen der beweglichen Kruste der Erde und ihrem Kern, aber besonders jene unter dem Meere gelegene, sehr tief liegt.”

Nadere berekeningen, die wij in de volgende paragraaf zullen uitwerken, laten zien, dat men hierdoor tot conclusies komt voor de korstdikte, welke in strijd zijn met de resultaten op andere gebieden der geophysica.

Heel eigenaardig doet na deze beschouwingen wel aan, de vergelijking die MILANKOVITCH dan tenslotte maakt tusschen zijn resultaat en de paleoklimatologische onderzoeken over de poolbeweging, o.a. van KÖPPEN en WEGENER. Hij vindt namelijk, dat



de poolbaan uit deze onderzoekingen practisch volkomen met zijn resultaat overeenstemt en zegt dan op pag. 687:

„Ohne diese ausgezeichnete Übereinstimmung, die wohl auf einem glücklichen Zufall beruht zu überschätzen, kann gesagt werden, dasz die hier aus der Konfiguration der Erdkruste berechnete Bahn der beiden Pole der Erde mit den bisherigen Ergebnissen der geologischen Forschung in Einklang steht. Diese Übereinstimmung ermöglicht, die der Berechnung zugrunde gelegte Zeiteinheit im absolutem Masse auszudrücken um auf diese Weise einen Einblick, auch in den zeitlichen Verlauf der Polverlagerungen zu gewinnen.“

Voordat wij aantoonen dat dit „glückliche Zufall“ op een onderstelling berust die tot moeilijk aanvaardbare conclusies voert, willen wij even opmerken, dat dus de door ons gevonden bewegingsrichting noodzakelijkerwijs in strijd is met de „bisherige Ergebnisse der geologischen Forschung“.

In de eerste plaats kunnen wij echter uit het feit, dat MILANKOVITCH hier het woord „bisherig“ gebruikt concludeeren, dat hij de mogelijkheid *niet* uitsluit, dat men over eenigen tijd, als er meer paleoklimatologische data ter beschikking staan een andere „geologische poolbaan“ zou kunnen vinden. In de tweede plaats merken wij op, dat, zelfs indien in de toekomst de „geologische poolbaan“ geen wijziging mocht ondergaan en onze resultaten in strijd zijn met die der geologie, wij hier uitsluitend discussieeren een poolbaan, zooals deze tengevolge van poolvluchtkrachten ontstaat. Uit deze tegenspraak moet dan volgen, aangenomen, dat zoowel de geologisch bepaalde poolbaan als de hier berekende baan tengevolge der poolvluchtkrachten juist zijn, er andere oorzaken moeten bestaan die de pool niet doen bewegen langs de door ons berekende poolbaan, maar dat de baan de resultante is van verschillende oorzaken, waarvan wij hier dan slechts één, namelijk de poolvluchtkracht, besproken hebben.

Bovendien komt hier nog bij en wij wijzen daarop nog in het volgende hoofdstuk, dat bij deze berekeningen is aangenomen, dat het  $\Omega$ -veld niet met den tijd verandert. In den loop der geologische perioden zal ongetwijfeld dit  $\Omega$ -veld wel verandering hebben ondergaan, hoewel men wel moet bedenken, dat bijvoorbeeld de gebergtevorming in een bepaald gebied de ligging van de traagheidspolen

en dus de poolbaan zelf maar weinig beïnvloedt<sup>1)</sup>.

Tenslotte is het in verband met energiekwesties, waarop wij in het laatste hoofdstuk nader zullen ingaan, niet eens zeker, dat de pool inderdaad bewegen kan tengevolge van de poolvluchtkrachten. Hoewel a priori de mogelijkheid bestaat, dat de pool in een constant  $\Omega$ -veld een baan van 90 hooggraden aflegt, is het best mogelijk, dat de beschikbare energie slechts voldoende is, om de pool over een gedeelte van die 90° te doen bewegen, of zelfs, dat de beschikbare energie ten opzichte van de te gebruiken energiehoeveelheden zó klein is, dat de pool slechts weinig gaat bewegen.

§ 23. Om af te leiden, waartoe de aanname van MILANKOVITCH  $c_2 > c_1$  leidt, gaan wij als volgt te werk:

$$c_2 \text{ was de afkorting voor } 2 \varrho_2 D_2 z_{02} r_0^3 \text{ en} \\ c_1 \text{ voor } 2 \varrho_1 D_1 z_{01} r_0^3.$$

Evenals MILANKOVITCH nemen wij een constante hoogte van het continent aan en stellen de topografische hoogte  $h = 500$  meter. Als dichtheid van het continent gebruiken wij  $\varrho_1 = 2,67$ . Als constante zeediepte kiezen wij 4 km en de dichtheid van den sialbodem der oceanen stellen wij  $\varrho_2$  en nemen daarvoor voorloopig geen getal aan. De dikte  $T$  van de korst zij ook onbekend, daar wij juist willen aantonen, dat uit de aanname  $c_2 > c_1$  volgt, dat wij dan voor  $T$  waarden vinden, grooter dan de 30 km, die men tegenwoordig vrij algemeen als de meest waarschijnlijke waarde voor de dikte van de sialkorst aanneemt.

Er geldt nu voor het continent:

$$a_1 = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_1)} = 2,725.$$

Stellen wij

$$\frac{1}{2} \frac{c_1}{r_0^3} = \varrho_1 z_{01} D_1 = c'_1$$

en evenzoo

$$\frac{1}{2} \frac{c_2}{r_0^3} = \varrho_2 z_{02} D_2 = c'_2$$

<sup>1)</sup> Zie hierover o.a. R. SCHWINNER, Lehrbuch der physikalischen Geologie. Bd I, pag. 242.



dan volgt dus voor

$$c'_1 = \varrho_1 z_{01} D_1 = \varrho_1 \frac{1}{4a_1} D_1^2 \text{ daar } z_{01} = \frac{1}{4a_1} D_1.$$

Reeds is met behulp van figuur 2 gevonden

$$D_1 = T + 2a_1 h.$$

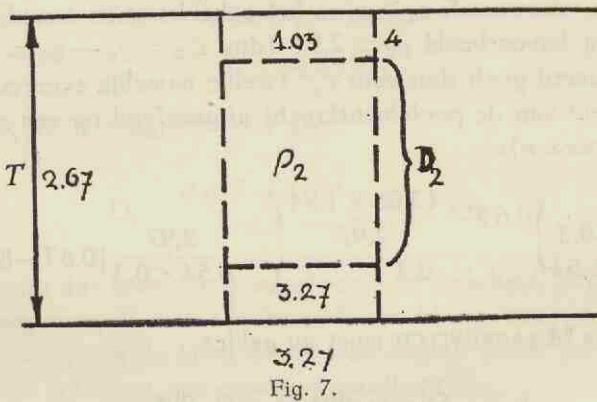
Dus volgt

$$c'_1 = \varrho_1 \frac{1}{4a_1} D_1^2 = \frac{\varrho_1}{4a_1} (T + 2a_1 h)^2$$

of na substitutie van de getalwaarden voor  $\varrho_1 a_1$  en  $h$ :

$$c'_1 = \frac{2,67}{10,9} (T + 2,725)^2 = 0,245 (T + 2,725)^2 \quad . \quad (80)$$

Om de  $c'_2 = \varrho_2 z_{02} D_2$  te vinden, moeten wij eerst de  $D_2$  uitdrukken in de  $T$  en  $\varrho_2$  (c.q.  $a_2$ ). Wij bekijken hiervoor figuur 7.



De diepte  $t = 4$  km van den oceaan (dichtheid 1,028) wordt na herleiding tot op dichtheid  $\varrho_2$ :

$$4 \times \frac{(\varrho_2 - 1,028)}{\varrho_2}$$

Verder blijkt direct uit deze figuur de volgende vergelijking:

$$T \times 2,67 = D_2 \varrho_2 + \left\{ T - D_2 - \frac{4(\varrho_2 - 1,028)}{\varrho_2} \right\} \times 3,27 \quad (81)$$

of

$$D_2 = \frac{0,6 T - \frac{13,08 (\varrho_2 - 1,028)}{\varrho_2}}{3,27 - \varrho_2} \dots \dots (82)$$

nadat weer alle bekende grootheden ingevuld zijn.

$c'_2$  wordt dan, daar  $z_{02} = \frac{1}{4a_2} D_2$  is, gelijk aan  $\frac{\varrho_2}{4a_2} D_2^2$ .

Hierin is

$$\frac{1}{4a_2} = \frac{\varrho_0 - \varrho_2}{2\varrho_0} = \frac{3,27 - \varrho_2}{6,54}.$$

Dus

$$c'_1 = \varrho_2 \times \frac{3,27 - \varrho_2}{6,54} \times D_2^2 \dots \dots (83)$$

Voor  $\varrho_2$  hebben wij een grootere waarde te kiezen dan  $\varrho_1$ , omdat anders de voorwaarde  $c_2 > c_1$  in het geheel niet te vervullen is. Nu kiezen wij bijvoorbeeld  $\varrho_2 = 2,97$  (dus  $\Delta_2 = \varrho_0 - \varrho_2 = 0,3$ ). Dit gesubstitueerd geeft dan voor  $c'_2$  (welke namelijk evenredig is met het moment van de poolvluchtkracht uitgeoefend op een sialprisma van den oceaan):

$$c'_2 = 2,97 \times \frac{0,3}{6,54} \left\{ \frac{0,6 T - \frac{13,08 \times 1,94}{2,97}}{0,3} \right\}^2 = \frac{2,97}{6,54 \times 0,3} \{0,6 T - 8,544\}^2. (84)$$

Volgens MILANKOVITCH moet nu gelden

$$c_2 > c_1 \text{ dus } c'_2 > c'_1 \text{ dus}$$

$$\frac{2,97}{6,54 \times 0,3} \{0,6 T - 8,544\}^2 > 0,245 \{T + 2,725\}^2. \dots (85)$$

Na herleiding geeft dit als oplossing

$$T > 48,7 \text{ km.} \dots \dots (86)$$

Hieraan beantwoordt een dikte van de continentale korst:

$$D_1 = T + 2 a h = 48,7 + 2,725 = 51,4 \text{ km}$$

en een dikte voor den oceaانبodem

$$D_2 = \frac{0,6 T - 8,544}{0,3} = 2 T - 28,48 = 97,4 - 28,5 = 68,9 \text{ km.}$$

De gevonden dikten zijn aanmerkelijk grooter dan de algemeen aangenomen waarden.

Kiezen wij als tweede geval  $\varrho_2 = 3,07$  (dus  $\Delta_2 = 0,2$ ).

Op soortgelijke wijze als in het eerste geval vinden wij:

$$c_1' = 0,245 (T + 2,725)^2$$

$$c_2' = \frac{3,07}{6,54 \times 0,2} \{0,6 T - 8,691\}^2$$

dus, daar  $c_2 > c_1$  moet zijn:

$$\frac{3,07}{6,54 \times 0,2} \{0,6 T - 8,691\}^2 > 0,245 (T + 2,725)^2$$

waaruit na herleiding en oplossing volgt:

$$T > 34,55 \text{ km} \dots \dots \dots (87)$$

en dus  $D_1 = T + 2a_1 h > 37,3 \text{ km.}$

$$D_2 = \frac{0,6 T - 8,691}{0,2} > 60,2 \text{ km.}$$

Nemen wij dus voor den oceaانبodem de dichtheid 3,07 aan, dan kunnen wij voor  $T$  met een betrekkelijk kleine waarde volstaan, alleen de dikte van de korst onder den oceaan wordt veel grooter, zoodat deze uitkomst ook niet aanvaardbaar is.

*Opmerking:* Het verband tusschen  $D_1$  en  $D_2$  (dus zonder iets over  $T$  te zeggen) is eveneens te vinden op de volgende manier:

$$2 \varrho_2 D_2 z_{02} r_0^3 > 2 \varrho_1 D_1 z_{01} r_0^3$$

$$\varrho_2 D_2 z_{02} > \varrho_1 D_1 z_{01}$$

$$\frac{\varrho_2 D_2^2}{4 a_2} > \frac{\varrho_1 D_1^2}{4 a_1}$$

$$D_2^2 > \frac{\varrho_1 a_2}{\varrho_2 a_1} D_1^2 \text{ of } D_2 > D_1 \sqrt{\frac{\varrho_1 a_2}{\varrho_2 a_1}}$$

Nu is

$$a_1 = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_1)} \text{ en } a_2 = \frac{\varrho_0}{2(\varrho_0 - \varrho_2)} \text{ dus } a_2/a_1 = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0 - \varrho_2}.$$

Substitueer  $\varrho_1 = 2,67$  en  $\varrho_0 = 3,27$ .

Kies 1e.  $\varrho_2 = 2,97$ . Dit geeft  $\frac{a_2}{a_1} = 2$ .

en dus  $D_2 > \sqrt{2 \times \frac{2,67}{2,97}} \cdot D_1$  of  $D_2 > 1,34 D_1$ .

Nemen wij  $D_1 = 51,4$  km (zie boven) dan is  $D_2 > 69$  km.

Kies 2e.  $\varrho_2 = 3,07$ , dan is  $\frac{a_2}{a_1} = 3$

en  $D_2 > D_1 \sqrt{3 \times \frac{2,67}{3,07}}$  of  $D_2 > 1,62 D_1$ .

Nemen wij  $D_1 = 37,3$  km, dan volgt  $D_2 > 60$  km.

De langs dezen weg gevonden waarden voor  $T$ ,  $D_1$  en  $D_2$  zijn niet in overeenstemming te brengen met de uit de zwaartekrachtresultaten gevolgde inzichten.

§ 24. Wij zullen thans probeeren, door de aannamen van MILANKOVITCH iets te wijzigen en algemeener op te zetten, of het met behoud van  $c_2 > c_1$  mogelijk is, tot aanvaardbare onderstellingen omtrent  $T$ ,  $D_1$  en  $D_2$  te komen.

Wij nemen inplaats van constante dichtheid  $\varrho_1$  bij continent en idem  $\varrho_2$  bij den oceaانبodem nu zoowel bij continent als bij den oceaانبodem twee lagen aan, de bovenste met dichtheid  $\varrho_1$ , de onderste met dichtheid  $\varrho_2$ . In de sialkorst komt dus een dichtheids-sprong voor. Deze aanname is in goede overeenstemming met de uit de seismologie <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup> en de gravimetrie <sup>3)</sup> gewonnen inzichten. De dikten van beide lagen onder continent en oceaan nemen wij

<sup>1)</sup> B. GUTENBERG and C. F. RICHTER, Bearbeitung von Aufzeichnungen einiger Weltbeken, Senckeberg, naturf. Ges. Abh. 40, 57 (1925).

<sup>2)</sup> P. BYERLY, The dispersion of seismic waves of the Love type and the thickness of the surface layer of the Earth under the Pacific, Gerl. Beitr. Geophysik 26, 156—157 (1930).

<sup>3)</sup> F. A. VENING MEINESZ, Gravity over the continental edges. Proceedings Ned. Akad. v. Wetenschappen, Vol. XLIV, No. 8, 1941.



verschillend aan. Het besprokene in § 23 is dan, zooals direct blijkt als grensgeval in dit meer algemeene geval begrepen.

Voor het continent nemen wij dus aan: De korst bestaat uit twee lagen, één (de bovenste) van dichtheid 2,67 en dikte  $T_1$ , en de onderste van dichtheid  $\rho_2$  en dikte  $H_1$ .

Voor den oceaانبodem geldt hetzelfde wat de dichtheden betreft; de dikten der lagen stellen wij op  $T_2$  en  $H_2$  (wij denken ons eerst het zeewater gecondenseerd tot dichtheid 2,67, hetgeen dus een diepte geeft van: oorspronkelijke diepte vermenigvuldigd met  $\frac{1,03}{2,67}$ ).

Voor het continent geldt, vergelijkende met een laag waar het substratum onbedekt is, fig. 8.

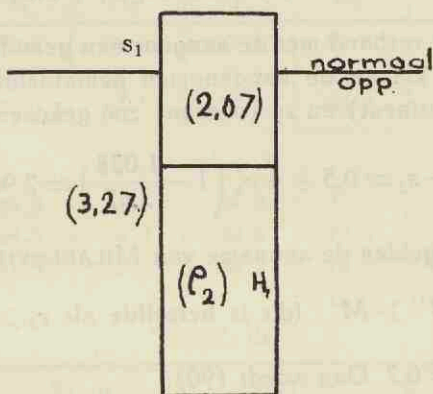


Fig. 8.

Daaruit volgt dan:

$$s_1 = \frac{0,6}{3,27} T_1 + \frac{A_2}{3,27} H_1$$

$$A_2 = 3,27 - \rho_2.$$

Het zwaartepuntshoogteverschil voor de  $H_1$ -laag wordt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_2}{3,27} H_1$$

en voor de  $T_1$ -laag:

$$\frac{A_2}{3,27} H_1 + \frac{1}{2} \times \frac{0,6}{3,27} T_1.$$

De poolvluchtkracht voor een korstkolom is dus evenredig aan

$$M' = \varrho_1 H_1 \times \frac{1}{3} \frac{A_2}{3,27} H_1 + 2,67 T_1 \times \left( \frac{A_2}{3,27} H_1 + \frac{0,3}{3,27} T_1 \right)$$

of

$$M' = 0,1529 \varrho_2 A_2 H_1^2 + 0,817 A_2 H_1 T_1 + 0,245 T_1^2.$$

Nemen wij  $\Delta_2 = 0,2$  dan wordt dit:

$$M' = 0,0939 H_1^2 + 0,1634 H_1 T_1 + 0,245 T_1^2. \quad \dots (88)$$

Nemen wij  $\Delta_2 = 0,3$  dan wordt dit:

$$M' = 0,1362 H_1^2 + 0,245 H_1 T_1 + 0,245 T_1^2. \quad \dots (89)$$

Nu moeten in verband met de aangenomen gemiddelde continent-hoogte van 0,5 km en de aangenomen gemiddelde zeediepte van 4 km de  $s_1$  (continent) en  $s_2$  (ocean) zoo gekozen worden, dat

$$s_1 - s_2 = 0,5 + 4 \times \left( 1 - \frac{1,028}{2,67} \right) = 2,96. \quad \dots (90)$$

Verder moet gelden de aanname van MILANKOVITCH:

$$M'' > M' \quad (\text{dit is hetzelfde als } c_2 > c_1). \quad \dots (91)$$

Kies nu  $\Delta_2 = 0,2$ . Dan wordt (90):

$$0,1835 (T_1 - T_2) + 0,0612 (H_1 - H_2) = 2,96$$

$$\text{of} \quad 3 (T_1 - T_2) + (H_1 - H_2) = 48,4$$

en de grenswaarde bij 91 (dus voor gelijkteeken) geeft in dit geval:

$$0,0939(H_1^2 - H_2^2) + 0,1634(H_1 T_1 - H_2 T_2) + 0,245(T_1^2 - T_2^2) = 0.$$

Kies nu  $\Delta_2 = 0,3$ . Dan wordt (90) na herleiding

$$2 (T_1 - T_2) + (H_1 - H_2) = 32,26$$

en de grens waarde (91) geeft:

$$0,1362(H_1^2 - H_2^2) + 0,245(H_1 T_1 - H_2 T_2) + 0,245(T_1^2 - T_2^2) = 0.$$

Van de vier grootheden  $H_1 T_1 H_2 T_2$  kunnen wij er dus steeds twee kiezen. Beide andere volgen dan uit bovenstaande vergelijkingen.

In tabel II zijn verwerkt, zoowel voor  $\Delta_2 = 0,2$  en  $\Delta = 0,3$  de berekende waarden van  $T_1$  en  $H_2$  onder aangenomen waardencombinaties voor  $T_2$  (resp. 0, 5 en 10 km) en  $H_1$  (0, 10 en 20 km).

In tabel III is dan aangegeven, hoe de totale dikten voor continent ( $D_1 = T_1 + H_1$ ) en voor oceaانبodem ( $D_2 = T_2 + H_2$ ) zich gedragen bij de keuze van  $T_2$  en  $H_1$ .

TABEL II.

$A_2=0.2$	$T_2=0$		$T_2=5$		$T_2=10$	
	$T_1$	$H_2$	$T_1$	$H_2$	$T_1$	$H_2$
$H_1 = 5$	35.0	56.6	42.4	63.8	49.5	70.1
$H_1 = 10$	32.1	57.8	39.5	65.1	46.5	71.1
$H_1 = 20$	30.0	61.1	37.2	68.2	44.1	73.9
$A_2=0.3$						
$H_1 = 5$	49.0	65.7	57.0	71.7	64.7	77.1
$H_1 = 10$	44.5	66.9	52.6	72.8	60.2	78.1
$H_1 = 20$	41.3	70.3	49.2	76.1	56.6	80.9

TABEL III.

$A_2=0.2$	$T_2=0$		$T_2=5$		$T_2=10$	
	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$
$H_1 = 5$	35.0	56.6	42.4	68.8	49.5	80.1
$H_1 = 10$	42.1	57.8	49.5	70.1	56.5	81.1
$H_1 = 20$	50.0	61.6	57.2	73.2	64.1	83.9
$A_2=0.3$						
$H_1 = 5$	49.0	65.7	57.0	76.7	64.7	87.1
$H_1 = 10$	54.5	66.9	62.6	77.8	70.2	88.1
$H_1 = 20$	61.3	70.3	69.2	81.1	76.6	90.9

Uit deze tabellen blijkt, dat het in verband met de waarden die men voor  $D_1$  en  $D_2$  vindt, niet mogelijk is met deze aannamen over de siallaag tot bevredigende waarden te komen; het is namelijk vol-

komen onwaarschijnlijk te achten, dat de dikte  $D_2$  van de tweede korstlaag onder de oceanen zoo belangrijk veel grooter zou zijn dan onder de continenten.

Hieruit volgt dus, dat de conclusie van MILANKOVITCH, dat  $c_2 > c_1$  is, verworpen moet worden. Nemen wij  $c_2 > c_1$  dan is de richting van de poolbeweging ook bij MILANKOVITCH van Siberië naar Hawaiï gericht.

*Opmerkingen:* 1. De berekening van § 23 is begrepen in die van § 24 door te kiezen  $H_1 = 0$  en  $T_2 = 0$ .

2. In beide methoden (die van § 23 en § 24) is een klein verschil in reductie van de dichtheid van het zeewater. In § 23 is de zeediepte gereduceerd door het zeewater te „condenseeren” tot de dichtheid  $\rho_2$  ( $> 2,67$ ) en in § 24 tot een dichtheid 2,67, onafhankelijk dus van de dichtheid  $\rho_2$  van den zeebodem. Onmiddellijk is in te zien, dat dit op de eindberekeningen slechts een zeer gering verschil geeft, dat niet in de opgegeven eerste decimaal tot uiting komt.

De eindconclusie van deze berekeningen is dus, dat er eigenlijk overeenstemming bestaat tusschen onze berekeningen en die van MILANKOVITCH, wat betreft de richting van de poolbeweging. Op de vraag of de gevonden resultaten al of niet overeenstemmen met de data uit de paleoklimatologie willen wij hier niet ingaan.



## HOOFDSTUK V.

### De poolbaan.

§ 25. De zes gevonden traagheidspolen verdeelen het boloppervlak in acht congruente rechthoekige gelijkzijdige driehoeken. De baan van de noordpool verloopt in dien driehoek, welke tot hoekpunten heeft  $(\varphi_1 \lambda_1)$   $(\varphi_2 \lambda_2)$  en  $(\varphi_3 \lambda_3)$  en zal één van de vectorlijnen van grad  $\Omega$  moeten zijn en wel die, welke in den genoemden driehoek door de tegenwoordige noordpool gaat. Wij geven hier de afleiding van de vergelijking van de poolbaan volgens MILANKOVITCH daar de door ons gevonden poolbaan slechts weinig afwijkt van de door MILANKOVITCH gevonden baan.

De poolbaan, waarvan hier de vergelijking wordt bepaald, is de zoogenaamde ongestoorde poolbaan, welke ontstaat als wij aannemen, dat het  $\Omega$  veld niet met den tijd verandert.

Om de vergelijking van de poolbaan af te leiden, gebruiken wij het assenstelsel van figuur 5, dus de  $Z'$ -as in de richting van  $(\varphi_1 \lambda_1)$ , de richting van het minimale hoofdtraagheidsmoment. De vectorlijnen van grad  $\Omega$  verloop nu binnen den boldriehoek  $X'Y'Z'$  en beginnen alle in het punt  $Z'$  en eindigen alle in het punt  $X'$ . In het begin raken deze aan de grootcirkelboog  $Y'Z'$ , in het eind aan de grootcirkelboog  $Y'X'$ .

In de beide eindpunten bereikt  $\Omega$  extreme waarden, dus in die punten is grad  $\Omega = 0$  en ook de snelheid van de poolbeweging. De genoemde punten  $X'$  en  $Z'$  stellen dus twee evenwichtstoestanden voor en wel  $Z'$  den labielen en  $X'$  den stabielen toestand. Is de pool oorspronkelijk in het punt  $Z'$  geweest dan zal de pool dit labiele punt tengevolge van een of andere evenwichtsstoring verlaten hebben en loopt nu langs een vectorlijn, tot zijn beweging tenslotte in het punt  $X'$  eindigt.

De snelheid, in het begin nul, wordt steeds grooter, gaat door een maximum en neemt dan weer af naar nul. Het zal dus een oneindig langen tijd duren voor de pool in het punt  $X'$  is aangekomen.

Zijn nu  $\phi$  en  $\psi$  de poolcoördinaten (breedte en lengte) ten opzichte van het  $X' Y' Z'$ -stelsel (zie fig. 5) waarbij  $\phi$  de hoek is dien de voerstraal naar het beschouwde punt maakt met het  $X' Y'$ -vlak (dus  $\phi$  is de breedte in het  $X' Y' Z'$ -stelsel) terwijl  $\psi$  de hoek is, welke de projectie van dien voerstraal op het  $X' Y'$ -vlak maakt met de  $X'$ -as (dus  $\psi$  is de lengte in het  $X' Y' Z'$ -stelsel). Nemen wij nu in het willekeurige punt  $M (\phi, \psi)$  der poolbaan den oorsprong van een vlak rechthoekig coördinatenstelsel aan, welks vlak den aardbol raakt in  $M$ , waarvan de  $\xi$ -as raakt aan den grootcirkel door  $M$  en  $Z'$  ( $\xi$  is positief in de richting van toenemende  $\phi$ ) terwijl de  $\eta$ -as loodrecht op deze  $\xi$ -as staat en gericht is volgens toenemende  $\psi$ .

Dan geldt :

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= r_0 d\phi \\ d\eta &= r_0 \cos \phi d\psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92)$$

De in die richtingen vallende snelheidscomponenten worden dan:

$$\frac{d\xi}{dt} = r_0 \frac{d\phi}{dt} \text{ en } \frac{d\eta}{dt} = r_0 \cos \phi \frac{d\psi}{dt} \dots \dots \dots (93)$$

Noemen wij de eenheidsvectoren in  $\xi$ - en  $\eta$ -richting respectievelijk  $\vec{i}$  en  $\vec{j}$  dan is daar

$$\vec{v} = \frac{d\xi}{dt} \vec{i} + \frac{d\eta}{dt} \vec{j} \text{ en } \text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \vec{j} \dots \dots (94)$$

de grondvergelijking der poolbeweging

$$\vec{v} = n \text{ grad } \Omega$$

te schrijven als :

$$\frac{d\xi}{dt} \vec{i} + \frac{d\eta}{dt} \vec{j} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \vec{i} + n \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \vec{j} \dots \dots \dots (95)$$

Vermenigvuldigen wij deze vectorvergelijking scalair met  $\vec{i}$ , dan komt er

$$\frac{d\xi}{dt} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \dots \dots \dots (95a)$$

terwijl scalaire vermenigvuldiging van (95) met  $\vec{j}$  voert tot:

$$\frac{d\eta}{dt} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \dots \dots \dots (95b)$$

Uit (93) volgt dan met (95a, b) en (92)

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{n}{r_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \text{ en } \frac{d\Psi}{dt} = \frac{n}{r_0^2} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} \dots \dots (96)$$

dus

$$\frac{d\Psi}{d\phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \phi}} \dots \dots \dots (97)$$

Het traagheidsmoment  $\Omega$  ten opzichte van de lijn  $OM$  krijgen wij door in (60a) voor  $I_x, I_y$  en  $I_z$  respectievelijk te nemen de hoofdtraagheidsmomenten  $I_{x'}, I_{y'}$  en  $I_{z'}$ , inplaats van  $\varphi$  en  $\lambda$  de  $\phi$  en  $\Psi$  en  $A_x = A_y = A_z = 0$  te stellen.

Wij vinden dan:

$$\Omega_{OM} = I_{x'} \cos^2 \phi \cos^2 \Psi + I_{y'} \cos^2 \phi \sin^2 \Psi + I_{z'} \sin^2 \phi \dots (98)$$

Dit gesubstitueerd in (97) geeft:

$$\frac{d\Psi}{d\phi} = \frac{(I_{y'} - I_{x'}) \sin 2\Psi}{(I_{z'} - I_{y'} \sin^2 \Psi - I_{x'} \cos^2 \Psi) \sin \phi} \dots (99)$$

Noemen wij ter afkorting

$$\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{y'} - I_{x'}} = k \dots \dots \dots (100)$$

dan kunnen wij na eenige herleiding voor (99) schrijven

$$k \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Psi d\Psi = \frac{d\phi}{\sin 2\phi} \dots \dots (101)$$

Dit is dan de differentiaalvergelijking der poolbaankromme.

Daar

$$\int \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \Psi + C$$

$$\int \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \Phi + C$$

$$\int \operatorname{tg} \Psi d\Psi = -\ln \cos \Psi + C$$

volgt door integratie van (101) de vergelijking

$$k \ln \operatorname{tg} \Psi + \ln \cos \Psi = \ln \operatorname{tg} \Phi + \ln C \quad \dots \quad (102)$$

$$\cos \Psi \operatorname{tg}^k \Psi = C_1 \operatorname{tg} \Phi \quad \dots \quad (103)$$

als vergelijking der poolbaankromme in het  $(\Phi \Psi)$  stelsel. De constante  $C_1$  wordt bepaald doordat deze kromme door de tegenwoordige noordpool moet gaan. De tegenwoordige noordpool heeft in het  $X' Y' Z'$ -stelsel de coördinaten  $\Phi_0$  en  $\Psi_0$  (zie § 20) welke dus aan (103) moeten voldoen.

Substitutie geeft dan

$$C_1 = \frac{\cos \Psi_0 \operatorname{tg}^k \Psi_0}{\operatorname{tg} \Phi_0} \quad \dots \quad (104)$$

waarin  $k$  bepaald is door (100) en volgens de berekening in § 20  $\Phi_0 = \Psi_0 = 59^\circ, 2$ .

*Opmerking:* Door uit te gaan van (96) en (98) geeft MILANKOVITCH verder nog een afleiding over de seculaire beweging van de pool langs de poolbaan, dus een verband tusschen plaats en tijd. Hierin zit dan een voorloopig onbekende „tijdschaal” welke later, doordat de poolbaan bij MILANKOVITCH overeenkwam met de „geologische poolbaan” met een „schaalwaarde” kon worden aangegeven en dus de plaats op zekeren tijd bekend werd. Daar wij in onze berekening geen overeenstemming hebben met de „geologische poolbaan” heeft deze afleiding voor ons geen zin, daar wij toch met een onbekende „schaalwaarde” voor de tijdschaal blijven zitten.



§ 26. De numerieke berekening van de baan in het  $(\phi\Psi)$  stelsel kan nu volgen.

De  $X'$ -as snijdt den aardbol in het punt  $\varphi_3 = 15^\circ,2$ ,  $\lambda_3 = -170^\circ,1$ .

De  $Y'$ -as snijdt den aardbol in het punt  $\varphi_2 = 26^\circ,0$ ,  $\lambda_2 = -72^\circ,4$ .

De  $Z'$ -as snijdt den aardbol in het punt  $\varphi_1 = 59^\circ,2$ ,  $\lambda_1 = 72^\circ,7$ .

De bijbehorende hoofdtraagheidsmomenten zijn (weggelaten de factor  $2\pi \rho_1 r_0^3 \times 10^{10}$ ):

$$I_{x'} = 151,4; \quad I_{y'} = 139,9; \quad I_{z'} = 124,9.$$

In de eerste plaats volgt nu uit (100):

$$k = \frac{26,5}{11,5} = 2,304 \text{ (afgerond op 2,3).}$$

In de tweede plaats is, daar  $\phi_0 = \Psi_0 = 59^\circ,2$  de  $C_1$  te berekenen:

$$\begin{aligned} \log C_1 &= \log \cos 59^\circ,2 + 2,3 \log \operatorname{tg} 59^\circ,2 - \log \operatorname{tg} 59^\circ,2 \\ &= \log \cos 59^\circ,2 + 1,3 \log \operatorname{tg} 59^\circ,2 = 0,00138. \end{aligned}$$

TABEL IV.

$\psi$	$\Phi$	$\varphi$	$\lambda$
0	0,0	15,2	-170,1
5	0,2	17,6	-165,5
10	1,0	20,5	-161,1
15	2,6	24,0	-156,9
20	5,2	28,2	-152,8
25	8,9	33,4	-148,9
30	13,7	39,6	-145,0
35	19,8	46,9	-141,5
40	27,0	55,2	-138,0
45	35,2	64,1	-134,6
50	43,6	73,4	-131,5
55	52,4	82,8	-127,5
60	60,4	88,8	-126,2
65	67,7	81,1	58,2
70	74,0	74,6	61,2
75	79,4	69,3	64,5
80	83,9	64,9	67,6
85	87,6	61,5	70,5
90	90,0	59,2	72,7

$C_1 = 1,0032$  (afgerond 1). In de verdere berekeningen, die logaritmisch gebeuren, komt alleen  $\log C_1$  voor. Van de  $\phi \Psi$  baan kunnen wij nu zooveel coördinaten van de punten berekenen als wij willen, door in de formule

$$\cos \Psi \operatorname{tg}^2 \Psi = \operatorname{tg} \Phi$$

bijvoorbeeld voor  $\Psi$  achtereenvolgens in te vullen de waarden  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  enz. t/m  $90^\circ$  en de bijbehorende  $\Phi$  te berekenen.

Deze punten zijn gegeven in tabel IV.

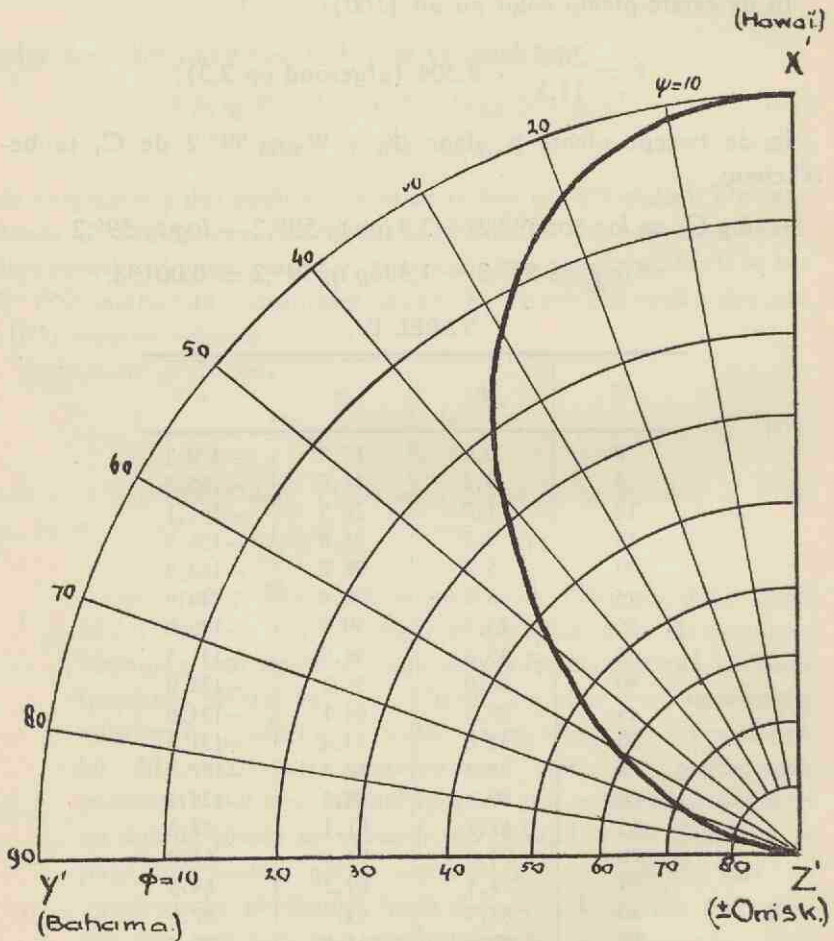


Fig. 9.

Verder geeft figuur 9 de baan geteekend in het  $\phi$ ,  $\psi$ -stelsel terwijl figuur 10 de coördinaten  $\phi$  en  $\psi$  uit tabel IV weergeeft in een rechthoekig assenstelsel, daar wij dit in de volgende paragraaf

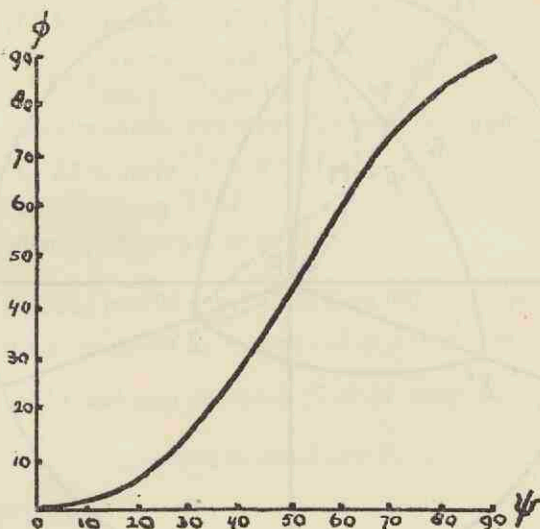


Fig. 10.

kunnen gebruiken. Bovendien heeft figuur 10 dit voordeel, dat wij als controle kunnen zien, of de kromme een vloeiend verloop heeft en als wij willen interpoleeren, kunnen wij dit beter doen in figuur 10, dan in figuur 9.

§ 27. Het is practisch niet mogelijk, de vergelijking der poolbaan-kromme om te zetten vanuit de  $(\phi \psi)$  coördinaten in een vergelijking in  $\varphi$  en  $\lambda$  als coördinaten. Om de uitkomsten van dit hoofdstuk te kunnen vergelijken met die uit de vorige hoofdstukken, is het wel gewenscht enkele punten der baan vanuit de  $(\phi \psi)$  coördinaten op de  $(\varphi \lambda)$  coördinaten om te rekenen. Dit kan op de volgende wijze.

Beschouw fig. 11. Hierin zijn in projectie op het aardequatorvlak geteekend het  $XYZ$ -assenstelsel en het  $X'Y'Z'$ -assenstelsel.  $P$  is de projectie der tegenwoordige Noordpool. De lijn  $Z'PMX'$  stelt de poolbaan voor, waarvan  $M$  een willekeurig punt is met

coördinaten  $(\varphi \Psi)$  welke wij in  $\varphi$  en  $\lambda$  willen omzetten. De  $\varphi$ -coördinaat van  $M$  wordt voorgesteld door boog  $MM'$  en de  $\Psi$ -coör-

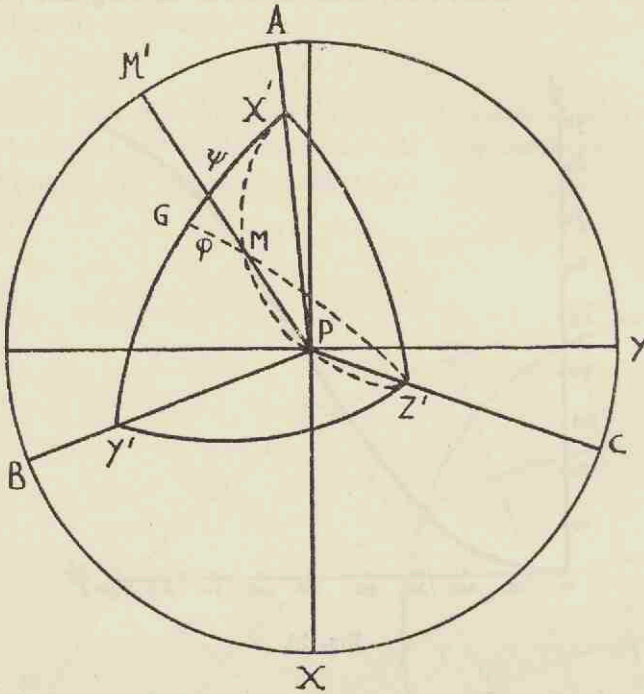


Fig. 11.

dinaat door boog  $XC Y A M'$ . Deze beide coördinaten zijn met eenige boldriehoeksmeting te berekenen.

Verder is in deze figuur

$$\begin{array}{ll} \angle XPC = \lambda_1 & \text{boog } CZ' = \varphi_1 \\ \angle XPB = \lambda_2 & \text{boog } BY' = \varphi_2 \\ \angle XPA = \lambda_3 & \text{boog } AX' = \varphi_3 \end{array}$$

en tevens

$$\begin{array}{l} \text{boog } PX' = 90 - \varphi_1 \\ \text{boog } PY' = 90 - \varphi_2 \\ \text{boog } PZ' = 90 - \varphi_3 \\ \text{boog } PM = 90 - \varphi. \end{array}$$



Beschouw nu

1e  $\triangle M X' G$  waarin  $\angle G X' M = a$ .

Hierin geldt  $tg a = \frac{tg \Phi}{\sin \Psi}$ .

2e  $\triangle P X' Y'$  waarin  $\angle P X' Y' = \beta$ .

Dan is  $\cos \beta = \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{\sin 26}{\cos 15,2} \rightarrow \beta = 63^\circ$ .

$\beta$  is een vaste waarde, onafhankelijk van de ligging van  $M$ .

3e  $\triangle P X' M$  waarin  $\angle P X' M = \beta - a$ .

Noem grootcirkelboog  $X'M$ :  $\xi$ .

Volgens den cosinusregel geldt dan

$$\left. \begin{aligned} \cos(90 - \varphi) &= \cos \xi \cos(90 - \varphi_1) + \sin \xi \sin(90 - \varphi_1) \cos(\beta - a) \\ \text{of} \quad \sin \varphi &= \cos \xi \sin \varphi_1 + \sin \xi \cos \varphi_1 \cos(\beta - a). \end{aligned} \right\} (105)$$

Uit den rechthoekigen driehoek  $G X' M$  volgt nu

$$\cos \xi = \cos \Phi \cos \Psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Uit (105) volgt:

$$\sin \varphi = \cos \xi \{ \sin \varphi_1 + tg \xi \cos \varphi_1 \cos(\beta - a) \}. \quad . \quad . \quad (107)$$

Stel

$$tg \xi \cos(\beta - a) = tg \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

dan wordt (107)

$$\sin \varphi = \frac{\cos \xi \sin(\varphi_1 + \gamma)}{tg \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

waarmee  $\varphi$  te berekenen is.

De waarde van  $\lambda$  volgt uit  $\triangle P X' M$  door toepassen van den sinusregel:

$$\sin(\lambda - \lambda_1) = \frac{\sin \xi}{\cos \varphi} \sin(\beta - a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Als met (109) de  $\varphi$  bepaald is vinden wij hiermee de  $\lambda$  waardoor de geografische coördinaten van  $M$  bekend zijn.

*Opmerkingen:* 1. In tabel IV zijn naast de waarden van  $\varphi$  en  $\Psi$  de bijbehorende waarden van  $\varphi$  en  $\lambda$  ingevuld, waardoor van een aantal punten der poolbaan de geografische coördinaten bekend zijn.

2. Daar voor  $\varphi = 90^\circ$  de  $\lambda$  onbepaald wordt en het in verband met de resultaten van hoofdstuk II en III wenschelijk is hiermee de richting der poolbaan te controleeren, zijn de

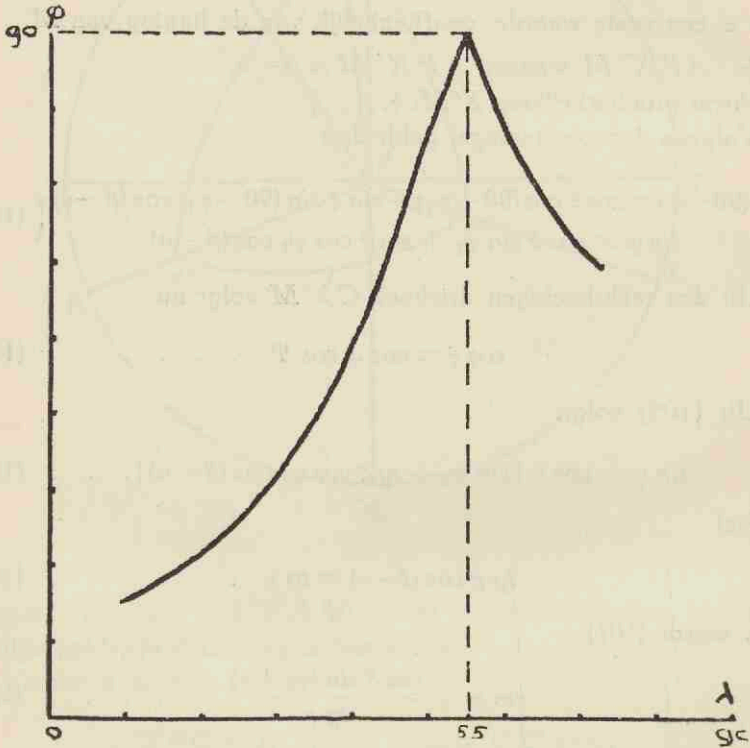


Fig. 12.

berekende coördinaten  $\varphi$  en  $\lambda$  van de poolbaan in fig. 12 in een rechthoekig stelsel uitgezet, waarbij als de  $\lambda$  in het derde quadrant viel de waarde  $(\lambda - 180)$  is uitgezet (dit is gebeurd voor het linkerdeel der kromme uit figuur 12). Beide takken van de zoo verkregen kromme moeten elkaar snijden voor  $\varphi = 90^\circ$ . Als waarde voor de bij het snijpunt behooren-

de  $\lambda$  vinden wij  $\lambda = 55^\circ$ , dus omgezet in het derde quadrant  $125^\circ W.L.$  Deze richting komt overeen met die in hoofdstuk II en III gevonden. Schrijven wij de resultaten bij elkaar:

Uit hoofdstuk II:  $\lambda = 125^\circ,2 W.L.$

Uit hoofdstuk III:  $\lambda = 126^\circ,3 W.L.$

Uit hoofdstuk V:  $\lambda = 125^\circ,0 W.L.$

De gemiddelde waarde ligt dus bij  $\lambda = 125^\circ,5 W.L.$  en dit is dan de richting waarin de pool zich momenteel tengevolge van de poolvluchtkracht beweegt.

## HOOFDSTUK VI.

### Energiebeschouwingen.

§ 28. Bij de afleiding van de formule voor de poolvluchtkrachtmomenten is reeds gewezen op het feit, dat de energie voor de poolvluchtkracht afkomstig moet zijn van de rotatie der aarde.

De vraag is nu echter nog open, of de voor de poolvluchtkracht beschikbare hoeveelheid energie voldoende groot is om de energie, die bij de beweging van de korst door verschillende oorzaken verbruikt wordt, te compenseeren.

Een eerste oorzaak van energieverbruik is de wrijving, die op moet treden tusschen de korst en het substratum. Om over de grootte hiervan een schatting te kunnen maken, moet men de grootte-orde kennen van de viscositeitscoëfficiënt van het substratum. Hierover zullen wij aan het einde van dit hoofdstuk iets zeggen, maar nu een tweede oorzaak, namelijk de deformatie die de korst bij de draaiing ondergaat, nader bekijken.

Immers is de korst aan de polen afgeplat en vertoont bij benadering den vorm van een afgeplatte omwentelingsellipsoïde. Leggen wij nu de plaats van de pool vast op het substratum, dan zullen bij draaiing van de korst over deze pool heen andere punten van de korst boven de pool komen, terwijl de oorspronkelijk afgeplatte plaats van de korst ergens anders terecht komt. Daar wij mogen aannemen, dat de korst geen buigingsvastheid bezit, zullen die punten der korst, die bij draaiing boven de pool komen, een daling ondergaan, terwijl de punten die de afplatting vormen, op andere plaatsen gekomen, zullen gaan rijzen, waarmee dus plausibel gemaakt is, dat de korst een deformatie zal moeten ondergaan.

Over de grootte van de bij deze deformatie optredende deformatie-energie valt nu met betrekkelijk groote nauwkeurigheid iets te zeggen en wij zullen nu eerst die deformatie-energie berekenen en deze daarna vergelijken met de energie die tengevolge van de poolvluchtkracht beschikbaar is.



§ 29. Het meetkundige gedeelte van de berekening van de deformatie-energie.

Wij denken ons de aardkorst in den vorm van een afgeplatte ellipsoïde (figuur 13). In deze figuur is een meridiaandoorsnede geteekend van de korst, waarbij de  $Y$ -as loodrecht het vlak van teekening is genomen. Deze ellipsoïde laten wij over een hoek  $\gamma$  om de  $Y$ -as roteeren, waarbij de pool zich verplaatst in het geteekende

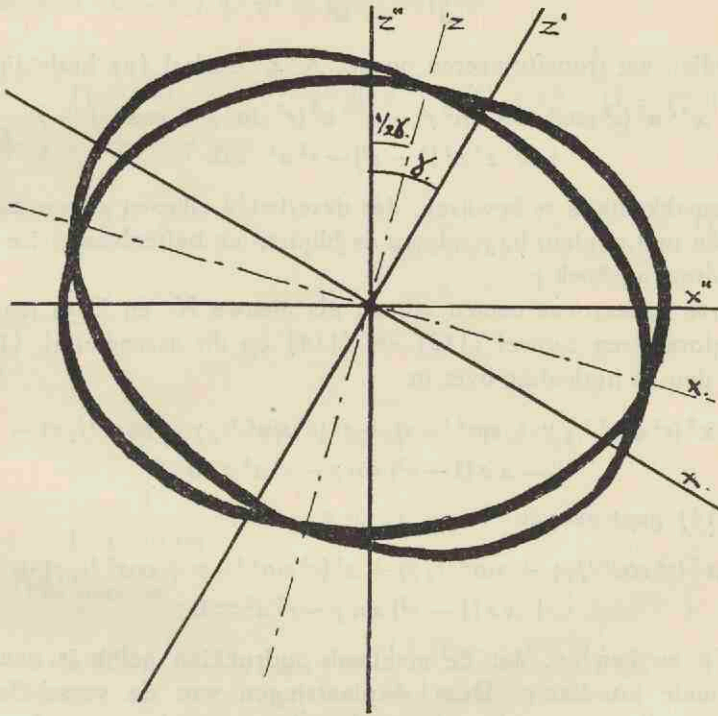


Fig. 13.

meridiaanvlak. In figuur 13 is tevens aangegeven de meridiaandoorsnede als deze over een hoek  $\gamma$  gewenteld is. Wij noemen de groote as  $a$ , de kleine as  $\varepsilon a$  en de as loodrecht het vlak van teekening  $b$ .  $\varepsilon$  is een getal iets kleiner dan 1.

De vergelijking van de niet-geroteerde ellipsoïde op het  $X'' Y Z''$ -stelsel is dan:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z''^2}{\varepsilon^2 a^2} = 1 \dots \dots \dots (111)$$

De meridiaandoorsnede heeft dus tot vergelijking

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{z''^2}{\varepsilon^2 a^2} = 1. \quad \dots \quad (112)$$

De vergelijking van de geroteerde meridiaandoorsnede luidt (op eigen assen  $X'Z'$ )

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{\varepsilon^2 a^2} = 1. \quad \dots \quad (113)$$

of indien wij transformeeren op het  $X''Z''$ -stelsel (na herleiding):

$$\left. \begin{aligned} x''^2 a^2 (\varepsilon^2 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + z''^2 a^2 (\varepsilon^2 \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \\ + x'' z'' a^2 (1 - \varepsilon^2) - \varepsilon^2 a^4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Gemakkelijk is te bewijzen, dat deze beide ellipsen elkaar zullen snijden in 4 punten, liggende op de binnen- en buitenbissectrice van den draaiingshoek  $\gamma$ .

Deze bissectrices nemen wij nu als nieuwe  $X$ - en  $Z$ -as aan en transformeeren zoowel (112) als (114) op dit assenstelsel. (112) gaat dan na herleiding over in

$$\begin{aligned} x^2 (\varepsilon^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma + \sin^2 \frac{1}{2} \gamma) + z^2 (\varepsilon^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma) - \\ - xz (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma - \varepsilon^2 a^2 = 0 \end{aligned}$$

(114) gaat over in

$$\begin{aligned} x^2 (\varepsilon^2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma + \sin^2 \frac{1}{2} \gamma) + z^2 (\varepsilon^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma) + \\ + xz (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma - \varepsilon^2 a^2 = 0. \end{aligned}$$

Wij merken op, dat de maximale indrukking gelijk is aan de maximale uitrekking. Deze verplaatsingen van de verschillende punten zullen wij steeds meten in de richting van de voerstralen van die punten, dus langs de lijnen  $z = p x$ . De maximale verplaatsingen liggen dus op de lijnen  $z = \pm x$ . Wij berekenen nu de maximale verplaatsing als functie van den draaiingshoek  $\gamma$ .

Dus snijden wij (115) en (116) met de lijn  $z = x$ .

Uit (115) krijgen wij dan in het eerste quadrant als coördinaten van het snijpunt:

$$x_1 = z_1 = \frac{\varepsilon a}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) - (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma}} \quad \dots \quad (117)$$

Op dezelfde wijze krijgen wij uit (116) in het eerste quadrant als coördinaten van het snijpunt:

$$x_2 = z_2 = \frac{\varepsilon a}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) + (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma}} \quad \dots \quad (118)$$

Daar het verschil in  $x$ -coördinaten ( $x_1 - x_2$ ) gelijk is aan het verschil in  $z$ -coördinaten ( $z_1 - z_2$ ), is de maximale verplaatsing dus te geven door  $(x_1 - x_2) \sqrt{2}$  of uitgeschreven:

$$V(\gamma) = \varepsilon a \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) - (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2) + (1 - \varepsilon^2) \sin \gamma}} \right\} \quad (119)$$

Hiervoor schrijven wij:

$$V(\gamma) = \varepsilon a \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - a \sin \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{1 + a \sin \gamma}} \right\} \quad (119a)$$

waarin  $a = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$

Daar

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a \sin \gamma}} = (1 - a \sin \gamma)^{-1/2} = 1 + 1/2 a \sin \gamma$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a \sin \gamma}} = (1 + a \sin \gamma)^{-1/2} = 1 - 1/2 a \sin \gamma$$

gaat 119a over in

$$V(\gamma) = \varepsilon a \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} a \sin \gamma = \frac{\varepsilon \sqrt{2} (1 - \varepsilon) (1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon^2) \sqrt{1 + \varepsilon^2}} a \sin \gamma. \quad (119b)$$

Nu is  $\varepsilon$  bijna gelijk aan 1. Wij vervangen nu in (119b) overal de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon^2$  door 1, behalve natuurlijk in den factor  $(1 - \varepsilon)$ . Echter is  $1 - \varepsilon = \beta$  (afplatting), dus gaat (119b) over in

$$V(\gamma) = \beta a \sin \gamma \quad (\text{zie verder } \S 33) \quad \dots \quad (119c)$$

§ 30. Wij nemen nu voor de ellipsoïde uit de vorige paragraaf de aardkorst aan, dus wij kunnen  $\varepsilon = \frac{296}{297} = 0,996633$  stellen. Wij berekenen dan numeriek voor enkele waarden van  $\gamma$  de maximale indrukking en uitrekking met formule (119c) uitgedrukt in  $a$ .

Wij vinden:

$\gamma$	$V(\gamma)$
$10^\circ$	$6 \times 10^{-4} a$
$30^\circ$	$17 \times 10^{-4} a$
$60^\circ$	$29 \times 10^{-4} a$
$90^\circ$	$34 \times 10^{-4} a$

Met behulp van deze punten is  $V(\gamma)$  geteekend in figuur 14.

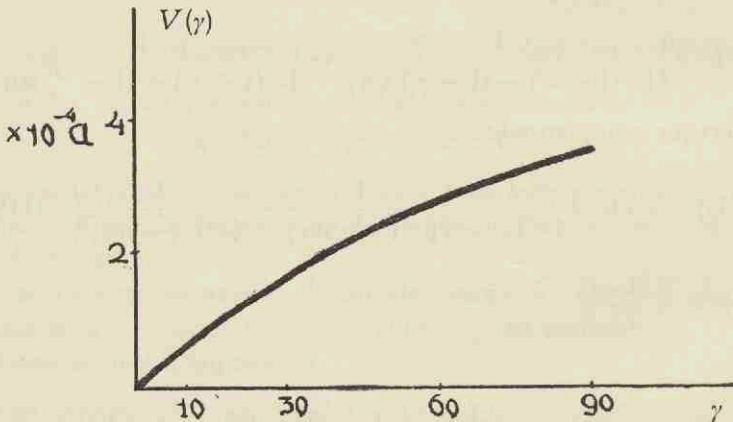


Fig. 14.

§ 31. In paragraaf 10 hebben wij gevonden, dat bij een rotatie van de korst over een hoek  $\gamma$  de poolvluchtkracht aan arbeid een bedrag  $M\gamma$  verricht, aangenomen dat  $\gamma$  zoo klein is, dat  $M$  gedurende die draaiing constant genomen mag worden.

Wij weten echter dat  $M$  evenredig is met grad  $\Omega$ .

Deze grad  $\Omega$  is in het punt  $\varphi_1 \lambda_1$  gelijk aan nul, evenzoo in het punt  $\varphi_3 \lambda_3$  en in andere punten een functie van de coördinaten  $\varphi$  en  $\lambda$ , welke een maximumwaarde heeft (ongeveer in het midden van de poolbaan tusschen  $\varphi_1 \lambda_1$  en  $\varphi_3 \lambda_3$ ).

Nemen wij nu eens aan, dat de pool inderdaad begonnen is in het punt  $\varphi_1 \lambda_1$  (zeker is dit niet) en daar vandaan naar haar tegenwoordige plaats gegaan is, *niet* langs de berekende baan, maar langs den grootcirkelboog door  $\varphi_1 \lambda_1$  en de tegenwoordige pool.

Voor dit eerste gedeelte der baan maakt deze onderstelling weinig verschil.



Wij kunnen dan aanemen, dat de grad  $\Omega$ , dus ook de  $M$  alleen afhankelijk is van de  $\varphi$  (de breedte in het  $X' Y' Z'$ -stelsel), dus ook alleen van den draaiingshoek  $\gamma$ , die dan gelijk is aan de afname der breedte  $\varphi$ .

In dit geval is in verband met het bovenstaande voor het moment te schrijven

$$M = M_{\max} \sin 2 \gamma, \quad . . . . . (120)$$

waarin  $M$  is het moment der poolvluchtkrachten in zeker punt tusschen  $\varphi_1 \lambda_1$  (dit punt zelf inbegrepen) en de tegenwoordige plaats en  $M_{\max}$  het grootste moment, dat in eenig punt van de geheele baan optreden kan.

Uit figuur 11 blijkt, dat de lengte van den grootcirkelboog  $PZ' = (90 - \varphi_1) = \pm 30^\circ$ .

In § 10 is echter het tegenwoordige moment berekend, dus het moment na een draaiing over  $\gamma_1 = 30^\circ$ .

Dit moment bedraagt  $3 \times 10^{30}$  dyne cm.

Substitueeren wij dit in (120) en voor  $\gamma_1 = 30^\circ$  dan komt er

$$3 \times 10^{30} = M_{\max} \sin 60^\circ. \quad . . . . . (121)$$

$$\text{Dus } M_{\max} = \frac{3 \times 10^{30}}{1/2 \sqrt{3}} = 2 \sqrt{3} \times 10^{30} \text{ dyne cm.}$$

De uitdrukking voor het moment bij de draaiing van  $\varphi_1 \lambda_1$  tot de tegenwoordige plaats wordt dan

$$M = 2 \sqrt{3} \times 10^{30} \sin 2 \gamma. \quad . . . . . (122)$$

De verrichte arbeid bij draaiing over een hoek  $d\gamma$  is

$$dA = M d\gamma = 2 \sqrt{3} \times 10^{30} \sin 2 \gamma d\gamma. \quad . . . (123)$$

Bij de draaiing over een hoek  $\gamma_1$  is dus aan arbeid verricht

$$A = \int_0^{\gamma_1} M d\gamma = \int_0^{\gamma_1} 2 \sqrt{3} \times 10^{30} \sin 2 \gamma d\gamma \left. \vphantom{\int_0^{\gamma_1}} \right\} . \quad (124 A)$$

$$= 2 \sqrt{3} \times 10^{30} \sin^2 \gamma_1 \text{ erg.}$$

Indien de pool niet  $(\varphi_1 \lambda_1)$  als beginpunt heeft gehad, maar een beginstand op een hoekafstand  $\gamma_0$  van het punt  $(\varphi_1 \lambda_1)$ , dan is aan arbeid verricht:

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\sqrt{3} \times 10^{30} (\sin^2 \gamma_1 - \sin^2 \gamma_0) \text{ erg} \\ &= 2\sqrt{3} \times 10^{30} \sin(\gamma_1 + \gamma_0) \sin(\gamma_1 - \gamma_0) \text{ erg.} \end{aligned} \right\} \quad (124B)$$

Bij de draaiing van  $0^\circ$  tot  $30^\circ$ , dus over den afstand die de pool hoogstens gedraaid kan zijn, zou deze arbeid dus zijn

$$2\sqrt{3} \times 10^{30} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times 10^{30} \text{ erg.}$$

§ 32. Om de deformatie-energie te berekenen, die ontstaat bij een bepaalde deformatie, gaan wij uit van het volgende:

Bij het te deformeeren lichaam nemen wij een  $XYZ$ -assenstelsel aan. Wij beschouwen een punt met coördinaten  $x y z$ . Dit punt ondergaat bij de deformatie een verplaatsing, waarvan wij de componenten in de richtingen der  $XYZ$ -as respectievelijk  $u v w$  noemen.

De specifieke verplaatsingen in de richting der assen worden dan resp.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots \quad (125)$$

De oorspronkelijk rechte hoeken ondergaan een verandering. Deze hoekverandering wordt volgens de elasticiteitsleer gegeven door de volgende uitdrukkingen

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (126)$$

Voor lichamen die de wet van HOOKE volgen geeft de elasticiteitsleer bovendien als verband tusschen de verplaatsing en de spanningen in een punt, welke die verplaatsing veroorzaken:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (127)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_x}{G} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\tau_y}{G} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\tau_z}{G} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (128)$$

In deze formules zijn  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\sigma_z$  normaalspanningen op oppervlakjes gekozen loodrecht respectievelijk  $X$ -,  $Y$ - en  $Z$ -as en  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  en  $\tau_z$  schuifspanningen op die oppervlakjes.

$E$  is de elasticiteitsmodulus.

$G$  is de glijdingsmodulus.

$m$  de constante van POISSON.

Uit deze grondvergelijkingen volgt nu voor den vormveranderingsarbeid:

$$\Delta A = \Delta V \left\{ \frac{m+1}{2mE} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2mE} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \right\}. \quad (129)$$

waarin  $p_x$ ,  $p_y$  en  $p_z$  totaalspanningen voorstellen op de betreffende zijvlakken van  $\Delta V$ , dus  $p_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$ .

Kennen wij dus de spanningen, dan is met behulp van (129) de deformatie-energie voor het geheele lichaam te vinden, door (129) te integreeren over het volume.

§ 33. In ons geval kunnen wij formule (129) toepassen, daar wij de spanningen, die in de aardkorst optreden, bij rotatie van de korst kennen <sup>1)</sup> als deze gaat draaien over het substratum.

<sup>1)</sup> F. A. VENING MEINESZ, Spanningen in de aardkorst tengevolge van poolverschuivingen. Verslagen Afd. Nat. Ned. Akad. v. Wetensch. Mei, 1943.

Noemen wij bijvoorbeeld den poolsafstand van een punt van de korst  $\delta$  en de geografische lengte  $\lambda$ , noemen wij de normaalspanning op een doorsnede van de korst langs een parallel  $\sigma_\varphi$  en die langs een meridiaan  $\sigma_\lambda$ , terwijl de schuifspanningen, die in deze beide doorsneden aan elkaar gelijk zijn,  $\tau$  genoemd worden, dan gelden voor  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\lambda$  en  $\tau$  de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi &= -\frac{2m}{5m+1} \beta E \sin \gamma \sin \delta \cos \delta \cos \lambda \\ \sigma_\lambda &= -\frac{6m}{5m+1} \beta E \sin \gamma \sin \delta \cos \delta \cos \lambda \\ \tau &= \frac{2m}{5m+1} \beta E \sin \gamma \sin \delta \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (130)$$

In deze formules is  $\gamma$  de hoek waarover de pool verplaatst is en  $\beta$  de afplatting, dus  $\beta = 1 - \varepsilon$ ,  $E$  de elasticiteitsmodulus en  $m$  de constante van POISSON.

*Opmerkingen:* 1. In de formules (130) komt de factor  $\beta \sin \gamma$  voor, welke volgens (119c) gelijk is aan  $\frac{V(\gamma)}{a}$ , waarin wij, daar het bij deze beschouwingen om de aarde gaat, de  $a$  mogen vervangen door de  $r_0$  (gemiddelde aardstraal). Dus  $\beta \sin \gamma = \frac{V(\gamma)}{r_0}$  is de maximale uitwijking gedeeld door den gemiddelden aardstraal.

2. De normaalspanning op de binnenzijde van de korst,  $\sigma_\varrho$ , dus in de richting van den aardstraal, is klein ten opzichte van bovenstaande waarden, n.l.:

$$\sigma_\varrho = \frac{8m}{5m+1} \beta \frac{T}{r_0} \sin \gamma \sin \delta \cos \delta \cos \lambda \quad . \quad . \quad (131)$$

waarin  $T$  = korstdikte (voor  $h = 0$ ).

Deze  $\sigma_\varrho$  is bij de berekening der deformatie-energie te verwaarloozen. De verhouding

$$\frac{\sigma_\varrho}{\sigma_\varphi} = \frac{4T}{r_0} = \pm \frac{1}{50}.$$



Met behulp van (130) berekenen wij nu eerst de totaalspanningen in de zijvlakjes teneinde die in de formule voor de deformatie-energie (129) in te kunnen vullen.

In de formules (130) nemen wij eerst voor  $m$  de waarde 3 waardoor deze overgaan in

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi &= -\frac{3}{8} \beta E \sin \gamma \sin \delta \cos \delta \cos \lambda \\ \sigma_\lambda &= -\frac{3}{8} \beta E \sin \gamma \sin \delta \cos \delta \cos \lambda \\ \tau &= \frac{3}{8} \beta E \sin \gamma \sin \delta \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots (132)$$

Nu wordt

$$\begin{aligned} p_x^2 &= \sigma_\varphi^2 + \tau^2 = \frac{9}{64} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma (\sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \sin^2 \delta \sin^2 \lambda) \\ p_y^2 &= \sigma_\lambda^2 + \tau^2 = \frac{9}{64} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma (9 \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \sin^2 \delta \sin^2 \lambda) \\ p_x^2 + p_y^2 &= \frac{9}{64} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \frac{9}{32} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \sin^2 \lambda. \\ (\sigma_\varphi + \sigma_\lambda)^2 &= \frac{9}{4} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \cos^2 \lambda. \end{aligned}$$

Vullen wij deze waarden in in de uitdrukking (129) voor  $\Delta A$  dan komt er (als wij daar tevens  $m = 3$  substitueeren)

$$\Delta A = \Delta V \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{9}{64} \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \frac{9}{32} \sin^2 \delta \sin^2 \lambda \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda \right\} \beta^2 E^2 \sin^2 \gamma. \quad (133)$$

Nu is

$$dV = T r_0^2 \sin \delta d\delta d\lambda. \quad (134)$$

waarin  $T$  = korstdikte,  $\delta$  = poolsafstand, dus krijgen wij

$$\left. \begin{aligned} dA &= T \sin \delta d\delta d\lambda \beta^2 r_0^2 E \sin^2 \gamma \left\{ \frac{1}{16} \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \frac{9}{16} \sin^2 \delta \sin^2 \lambda - \frac{3}{8} \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda \right\} = \\ &= T \beta^2 r_0^2 E \sin^2 \gamma \left\{ \frac{3}{16} \sin^3 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda d\delta d\lambda + \frac{9}{16} \sin^3 \delta \sin^2 \lambda d\delta d\lambda \right\}. \end{aligned} \right\} (135)$$

Nu is

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \lambda d\delta d\lambda = \pi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^3 \delta \cos^2 \delta d\delta = \frac{4\pi}{15}$$

en

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \delta \cos^2 \delta d\delta d\lambda = \pi \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} \sin^3 \delta d\delta = \frac{4\pi}{3}.$$

Hieruit volgt dan voor (135)

$$A = T \beta^2 r_0^2 E \sin^2 \gamma \left\{ \frac{9}{16} \times \frac{4}{15} \pi + \frac{9}{16} \times \frac{4}{3} \pi \right\} = \frac{2}{5} \pi T \beta^2 r_0^2 E \sin^2 \gamma \quad (136)$$

Substitueeren wij nu in deze formule

$$\beta = 1 - \varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 97}$$

$$T = 30 \text{ km} = 3 \times 10^6 \text{ cm}$$

$$r_0 = 6370 \text{ km} = 637 \times 10^6 \text{ cm}$$

$$E = 2 \times 10^8 \text{ g/cm}^2.$$

Dan wordt

$$A = 3,4 \times 10^{30} \sin^2 \gamma \text{ erg} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

Wij hebben in het voorgaande voor  $m = 3$  en voor  $E = 200.000 \text{ kg/cm}^2$  genomen.

De waarden voor  $m$  kunnen tusschen 2 en 4 gekozen worden en die voor  $E$  tusschen b.v.  $80.000 \text{ kg/cm}^2$  (zandsteen) en  $300.000 \text{ kg/cm}^2$  (graniet).

Hiervoor zijn dus geheel andere waarden dan de aangenomen waarden te kiezen en de deformatie-energie (137) kan zeer goed andere waarden krijgen (hoewel van dezelfde grootte-orde).

Voor  $\gamma = 30^\circ$  dus van  $\varphi_1 \lambda_1$  tot de tegenwoordige plaats, vinden wij:

$$A = 3,4 \times 10^{30} \sin^2 \gamma = 3,4 \times 10^{30} \times \frac{1}{4} = 0,85 \times 10^{30} \text{ erg} \quad (138)$$

Volgens (124) leverde de poolvluchtkracht in dit geval een energie van  $\frac{1}{2} \sqrt{3} \times 10^{30} \text{ erg} = 0,865 \times 10^{30} \text{ erg}$ , dus beide waarden zijn ongeveer gelijk van grootte.

Echter behoeft de pool in het geheel niet van de bijzondere positie  $\varphi_1 \lambda_1$  uitgegaan zijn, maar kan ook van een minder ver punt komen. In dat geval wordt de vervormingsenergie kleiner en wel wanneer de pool is uitgegaan van een afstand  $\gamma_0$  van  $\varphi_1 \lambda_1$  en thans op een afstand  $\gamma_1$  van dat punt is,

$$A = \frac{2}{5} \pi T \beta^2 r_0^2 E \sin^2 (\gamma_1 - \gamma_0) = 3,4 \times 10^{30} \sin^2 (\gamma_1 - \gamma_0). \quad (139)$$

terwijl de door de poolvluchtkracht geleverde energie dan is

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\sqrt{3} \times 10^{30} (\sin^2 \gamma_1 - \sin^2 \gamma_0) = \\ &2\sqrt{3} \times 10^{30} \sin(\gamma_1 - \gamma_0) \sin(\gamma_1 + \gamma_0) \end{aligned} \right\} \dots (140)$$

Neemt men aan dat de wrijving het karakter van vloeistofwrijving heeft en dat de beweging oneindig langzaam is gegaan, zoodat de benoodigde wrijvingsenergie kan verwaarloosd worden, dan zou men beide bedragen aan elkaar gelijk moeten stellen en men zou voor de door ons aangenomen waarden van  $E$  en  $m$  vinden dat  $\gamma_0$  nul geweest kan zijn. Bij andere  $E$  zou de beweging van een anderen beginstand (volgende uit de gelijkstelling) nog mogelijk geweest zijn.

Wij kunnen tenslotte nog opmerken, dat het ook mogelijk zou zijn, dat andere krachten op de korst gewerkt hebben, die poolverschuiving en daarbij elastische vormveranderingen van de korst hebben veroorzaakt. De kwestie wordt dan ingewikkelder, daar men dan moet onderzoeken, of de aangroeiing van de vormveranderingsenergie bij een eventueele, thans nog tengevolge van de poolvluchtkracht voortschrijdende beweging door deze poolvluchtkracht geleverd kan worden.

Wat dit punt echter betreft, laten wij het bij deze algemeene opmerking.

PP

## SAMENVATTING.

Door toepassing van de PREY-ontwikkeling der topografie naar bolfuncties, wordt een nauwkeuriger resultaat verkregen omtrent de poolbeweging dan MILANKOVITCH afleidt.

Tevens blijkt, dat de onderstelling van MILANKOVITCH  $c_2 > c_1$  onwaarschijnlijk is en dientengevolge doorloopt de pool zijn baan in een richting tegengesteld aan die, welke MILANKOVITCH gevonden heeft.

De elastische vervorming der korst is waarschijnlijk geen beletsel voor de poolbeweging.



## STELLINGEN

### I.

De onderstelling  $c_2 > c_1$  van MILANKOVITCH is uiterst onwaarschijnlijk en dientengevolge zijn zijn conclusies omtrent de poolbeweging moeilijk te aanvaarden.

(M. MILANKOVITCH: *Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate*, pag. 681.)

### II.

Met de PREY-ontwikkeling der topografie naar bolfuncties is nauwkeuriger berekening van de poolbeweging mogelijk dan MILANKOVITCH heeft uitgevoerd.

### III.

In de geophysica moet men bij het trekken van conclusies uit de vergelijking van theorie en waarneming voorzichtiger zijn dan in de physica.

### IV.

Het is gewenscht, dat ook in de elementaire leerboeken der mechanica de koppelvector met behulp van een rechtsch assenstelsel wordt gedefinieerd.

### V.

Het is overbodig om de formule voor de poolvluchtkracht met meer termen dan de eerste benadering geeft af te leiden.

### VI.

De afleiding van de formule voor de poolvluchtkracht, zooals MILANKOVITCH deze geeft in *Gerlands Beiträge* 1934, Bd 42, pag. 73, 74 is onjuist.

## VII.

De naam „breedtevariatie” is beter geschikt voor de werkelijke breedteveranderingen der waarnemingsstations, dan voor de uit de poolbeweging volgende breedteveranderingen.

## VIII.

De uit zwaartekrachtsanomaliën afgeleide waarden voor de dikte van de aardkorst hebben betrekking op de diepte der discontinuïteitsvlakken van de gesteentedichtheden, doch zij leveren geen gegevens op voor de dikte van de starre korst.

## IX.

Het is gewenscht, dat er in de kernphysica meer eenheid komt ten aanzien van de benaming en symbolen van de deeltjes.

## X.

Het verdient aanbeveling, het onderwijs in de toegepaste mechanica aan middelbaar technische scholen op te dragen aan een ingenieur.

## XI.

Het is te wenschen, dat bij het wiskunde-onderwijs aan voorbereidend hogere en middelbare scholen meer aandacht wordt besteed aan vraagstukken met onvoldoende, overbodige of strijdige gegevens.

## XII.

Voor het onderwijs in de natuurkunde, aan middelbare scholen is het wenschelijk, genoeg tijd beschikbaar te stellen om de beginselen der moderne physica te behandelen.









D  
Ut  
19