De algemene determinantale variëteiten in Rn

DE ALGEMENE DETERMINANTALE VARIËTEITEN IN R_n

DOOR

J. MIEDEMA

AMSTERDAM * H. J. PARIS

DE ALGEMENE DETERMINANTALE VARIËTEITEN IN R_n

K 967

Diss Utrecht 1943

DE ALGEMENE DETERMINANTALE VARIËTEITEN IN R_n

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS L. VAN VUUREN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 3 MEI 1943, DES NAMIDDAGS TE 2 UUR

DOOR

JOHANNES MIEDEMA
GEBOREN TE UTRECHT

AMSTERDAM - H. J. PARIS - MCMXLIII

Promotor: PROF. DR J. A. BARRAU

AAN MIJN OUDERS

AAN DE NAGEDACHTENIS
VAN DEN HEER R. RIJKSE

INHOUD

pag.

Inleiding 1

HOOFDSTUK I

Het begrip projectief gegenereerde variëteit 6

Het verband met bekende meetkundige plaatsen in R_2 en R_3 6

Definities 14

HOOFDSTUK II

Algemene eigenschappen van de projectief gegenereerde variëteiten 17

HOOFDSTUK III

De vrijheidsgraad van een projectief gegenereerde variëteit 31

HOOFDSTUK IV

Birationaal toegevoegde variëteiten 38

Gedegenereerde variëteiten 44

De graad van de algemene variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ 48

INLEIDING

In 1938 verscheen van de hand van *T. G. Room* te Sydney, een boek getiteld: „*The geometry of determinantal loci*".
In „*Nieuw Archief voor Wiskunde*", tweede reeks, deel XX, p. 195, vindt men er een bespreking van door Dr. J. A. Barrau.
In bovengenoemd werk wordt de determinantale variëteit, met als notatie $(|p, q|_r, [n])$, gedefiniëerd als de variëteit met het stelsel vergelijkingen, dat men krijgt als men van een matrix van p rijen en q kolommen de determinanten van de orde $r + 1$ gelijk nul stelt. De elementen der matrix zijn dan lineaire homogene functies der coördn. $\{x_0; x_1; \ldots x_n\}$ van R_n.
In het hier volgende onderzoek worden deze elementen $x_{\alpha\beta}$

$$\alpha = 1, 2, \ldots p$$
$$\beta = 1, 2, \ldots q$$

ondersteld homogene m-de graadsfuncties van de puntcoördn. van R_n te zijn. De hiermede corresponderende algemene variëteit wordt genoteerd als: $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$. Met het symbool $(|p, q|_r^{(1)}, [n])$ wordt hier hetzelfde bedoeld als met $(|p, q|_r, [n])$ in het boven vermelde werk.
Substitueert men in de hier volgende eigenschappen voor de grootheid m de waarde 1, dan ontstaan, met dikwijls voorkomende vereenvoudiging in de redactie, de in het werk van Room behandelde eigenschappen.
Ook in de corresponderende bewijsvoering treden dan dikwijls vereenvoudigingen op, terwijl vooral enkele kenmerkende grootheden minder gecompliceerd worden door het verdwijnen van machten van m of op andere wijze (zo b.v. de formule (23) en de in stelling 7. *b.* voorkomende vrijheidsgraad).
Zoals te verwachten was blijven de formules voor de dimensie van de verschillende variëteiten ongewijzigd, indien $m \neq 1$ genomen wordt (stellingen 2, 3 en 4).
Verrassend is de uitbreiding van de eigenschap dat de variëteit $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ aequivalent is met $V' = (|p - 1, q - 1|^{(1)}, [n])$ en $V'' = (|p, q - 1|^{(1)}, [n - 1])$.

Naar aanleiding hiervan komt men op variëteiten, op de doorsnijdingsfiguur van enige $V_{n-1}^{(m)}$'n (d.w.z. variëteiten van de dimensie $(n-1)$ van de graad m) gelegen.
In plaats van $[n-1]$'n in $[n]$ komen dan m-de graadsvariëteiten van de dimensie $(n-1)$. Een $[n-1]$ in $[n]$ duiden we aan met prime, een $V_{n-1}^{(m)}$ in $[n]$ met „prime" of „$[n-1]$".

Wat de notatie betreft dient opgemerkt te worden dat we onder de vergelijkingen $x_{\alpha 1} = 0$ $\alpha = 1, 2, \ldots p$, verstaan: $x_{11} = 0$; $x_{21} = 0$; ... $x_{p1} = 0$.

$$\text{De notatie } z_{\alpha\alpha'} = \Sigma^{(m)} 1_\delta\, d_{\alpha\alpha'\delta} x_\delta \quad \begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \ldots p \\ \alpha' &= 1, 2, \ldots p' \\ \delta &= 0, 1, \ldots n \end{aligned}$$

betekent dat de pp' mogelijke grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ m-de graadsfuncties zijn in de homogene coördn. $x_0, x_1, \ldots x_n$ van R_n.

$$\text{Verder omvat b.v. de schrijfwijze } \lambda_\alpha x_{\alpha\beta} = 0 \quad \begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \ldots p \\ \beta &= 1, 2, \ldots q \end{aligned}$$

de q vergelijkingen

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2\, x_{21} + \ldots + \lambda_p\, x_{p1} = 0 \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2\, x_{22} + \ldots + \lambda_p\, x_{p2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_{1q} + \lambda_2\, x_{2q} + \ldots + \lambda_p\, x_{pq} = 0 \end{cases}$$

Zoals de definitie zegt heeft men bij elke variëteit $(|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$ te maken met een matrix van p rijen en q kolommen (p onderstellen we $< q$.). De rang van die matrix is $p - 1$. De vergelijkingen der variëteit krijgt men dus door alle determinanten van de orde p gelijk nul te stellen. Echter zijn al die aanwezige vergelijkingen niet onderling onafhankelijk.
Hiervoor geldt n.m.l. een eigenschap, die toegepast wordt bij het opzoeken van de hoofddeterminant van een matrix *).
Deze eigenschap welke dikwijls in het volgende wordt toegepast, luidt als volgt:
Heeft men een matrix met p rijen en q kolommen ($p < q$, dus een z.g. liggende matrix) en zijn de $(q - p + 1)$ determinanten van de

*) Zie b.v. F. Schuh, Beknopte Hoogere Algebra, § 23.

p-de orde, welke ontstaan door aan de eerste $(p-1)$ kolommen van de matrix telkens een der andere toe te voegen, alle nul, dan zijn alle determinanten van de p-de orde dezer matrix nul, zo in de matrix $(p-1)$ bij p gevormd door de eerste $(p-1)$ kolommen, een van nul verschillende determinant van de $(p-1)$-de orde voorkomt.

In de hoofdstukken I en IV wordt deze eigenschap toegepast in de omschrijving: *De variëteit* $(|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$ *omvat de punten die voldoen aan* $(q-p+1)$ *determinanten van de* p*-de orde gelijk nul gesteld, verminderd met de variëteit die ontstaat door in de matrix, die al deze* $(q-p+1)$ *determinanten gemeen hebben, de rang* $r = p-2$ *te stellen.*

Voor het algemenere geval $r \neq p-1$ (de maximale waarde welke r kan bereiken!) luidt de stelling waarvan het bewijs in Schuh wordt gevonden:

Is $r < p$ (en dus $r < q$) en is er een van nul verschillende determinant van de r-de orde in de matrix p bij q gevonden, dan is deze een hoofddeterminant, als de $(p-r)$ $(q-r)$ determinanten van de $(r+1)$-de orde, ontstaan uit de genoemde determinant door randing met een der overige rijen en een der overige kolommen uit de matrix, alle nul zijn.

De vorm waarin deze eigenschap hier toegepast wordt is als volgt: *De variëteit* $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$, *omvat de punten die voldoen aan* $(p-r)$ $(q-r)$ *determinanten van de* $(r+1)$*-de orde gelijk nul gesteld, verminderd met de variëteit die ontstaat door de determinanten van de* r*-de orde van de staande matrix* p *bij* r *gelijk nul te stellen.*

Nadat de determinant van de r-de orde die $\neq 0$ is (een hoofddeterminant), na eventuele verwisseling van rijen en kolommen, links bovenaan staat in de matrix p bij q:

$$\left\| \begin{array}{llllll} x_{11} & x_{12} & \ldots x_{1r} & \ldots x_{1,q-1} & x_{1,q} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2r} & \ldots x_{2,q-1} & x_{2,q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p-1,1} & x_{p-1,2} & \ldots x_{p-1,r} & \ldots x_{p-1,q-1} & x_{p-1,q} \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \ldots x_{p,r} & \ldots x_{p,q-1} & x_{p,q} \end{array} \right\|$$

luiden de vergelijkingen van de bedoelde variëteit:

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2r} \\ x_{31} & x_{32} & \ldots & x_{3r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p-1,1} & x_{p-1,2} & \ldots & x_{p-1,r} \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \ldots & x_{p,r} \end{matrix}\right\|_{r-1} = 0.$$

Het is verder duidelijk dat, als een variëteit gegeven is door een matrix p bij q en een bepaalde rang r, verwisseling van rijen onderling en van kolommen onderling, ja zelfs van alle rijen en alle kolommen (waarbij dus een staande matrix een liggende wordt en omgekeerd), geen andere variëteit oplevert, *zo de rang r gehandhaafd blijft.* Immers al die verwisselingen veroorzaken in de verschillende determinanten van de orde $(r + 1)$, die gelijk nul gesteld de variëteit voorstellen, op zijn hoogst tekenverandering. Zoals dan ook blijken zal zijn de variëteiten $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ en $(|q, p|_r^{(m)}, [n])$ identiek.

Ten slotte zij nog het *theorema van Bézout* vermeld, dat in hoofdstuk IV bij de graadbepaling van de algemene variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ wordt toegepast.
Dit theorema luidt als volgt: *)
Heeft men n vergelijkingen in n onbekenden $x_1, x_2 \ldots x_n$:

$$\begin{cases} f_1 \;(x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_n) = 0 \\ f_2 \;(x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n \;(x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_n) = 0 \end{cases}$$

waarin de functies $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *rationale veeltermen zijn in* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *resp. van de graden* $m_1, m_2, \ldots, m_n$, *dan is het aantal oplossingen van dit stelsel vergelijkingen, indien het eindig is:* $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$. Deze stelling wordt bewezen door volledige inductie, waarbij uit-

*) Zie b.v. F. Schuh, Beknopte Hoogere Algebra, de §§ 149 t/m 151; alleen het geval: 2 vergelijkingen van de graad m en n in 2 onbekenden wordt hier behandeld. Verder: F. Schuh, Lessen over Hoogere Algebra, deel II, achtste les.

gegaan wordt van twee vergelijkingen met twee onbekenden van de graad m_1 resp. m_2.
Na rangschikking luiden deze dan:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = a_0x_1^{m_1} + a_1x_1^{m_1-1} + a_2x_1^{m_1-2} + \ldots + a_{m_1} = 0. \\ f_2(x_1, x_2) = b_0x_1^{m_2} + b_1x_1^{m_2-1} + b_2x_1^{m_2-2} + \ldots + b_{m_2} = 0. \end{cases}$$

Hierin zijn dan $a_0, a_1, \ldots a_{m_1}, b_0, b_1, \ldots b_{m_2}$ gehele rationale veeltermen in de onbekende x_2 van de graad, aangewezen door de index.
Men elimineert nu volgens *Sylvester* de x_1 uit de beide vergelijkingen en vindt dan een determinant van $(m_1 + m_2)$ rijen en kolommen met als elementen $a_0, a_1, \ldots a_{m_1}; b_0, b_1, \ldots b_{m_2}$ of 0. Zoals onmiddellijk blijkt is deze determinant van de (m_1m_2)-de graad in de onbekende x_2.
Bij elke x_2 behoort een waarde voor x_1, dus beide vergelijkingen hebben m_1m_2 oplossingen.
Oneindig veel oplossingen treden echter op in het bijzondere geval, dat het eliminatieresultaat uit de beide vergelijkingen een identiteit oplevert en ook als een van de m_1m_2 oplossingen van x_2 de beide vergelijkingen $f_1(x_1, x_2) = 0$ en $f_2(x_1, x_2) = 0$ tot identiteiten maakt.
Aldus voortredenerend voor 3 vergelijkingen met 3 onbekenden komt men tot het vermelde resultaat voor n vergelijkingen met n onbekenden.
Zoals men ziet is de mogelijkheid van ∞ oplossingen een bijzonder geval.
In hoofdstuk IV waar het theorema wordt gebruikt, wordt de mogelijkheid van ∞ oplossingen uitgeschakeld daar het gaat om een formule voor het algemene geval geldig.

HOOFDSTUK I

HET BEGRIP PROJECTIEF GEGENEREERDE VARIËTEIT; HET VERBAND MET BEKENDE MEETKUNDIGE PLAATSEN IN R_2 EN R_3. DEFINITIES

§ 1 *Definitie*

Onder $||x_{ij}||_r = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots p \\ j = 1, 2, \ldots q \end{matrix}$ .... (1)

verstaan we het stelsel vergelijkingen, dat verkregen wordt door alle determinanten van (1) van de orde $r + 1$ gelijk nul te stellen. De grootheden x_{ij} zijn dan functies van de graad m in de n-dimensionale ruimte R_n, ook wel voorgesteld door $[n]$.
Aldus gedefiniëerde variëteiten (1) noemen we „*determinantale variëteiten*", of ook wel „*projectief gegenereerde variëteiten*", afgekort: „*p.g.v.*", welke laatste naam nog nader verklaard zal worden.
De zo gedefiniëerde meetkundige plaats wordt kortweg genoteerd als $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$, waarbij p en q het aantal rijen resp. kolommen van de matrix (1) aangeven, r de rang van (1) is en $[n]$ aanduidt dat de meetk. plaats in een R_n gelegen is, terwijl tenslotte m de graad van de functies x_{ij} in de puntcoördn. $x_0, x_1, \ldots x_n$ is.
Het blijkt dat zeer veel krommen, oppervlakken en variëteiten, waarvan de projectieve eigenschappen zijn onderzocht, van het type (1) of hiervan afgeleide typen zijn.

Allereerst worden ter oriëntatie enkele *voorbeelden* beschouwd waarnaar later wordt terugverwezen.

§ 2 *De vlakke $K^{(2m)}$, ontstaanswijze; toepassing op de kegelsnede*

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}_1 = 0. \qquad (2)$$

Zijn de grootheden x_{ij} hier functies van de m-de graad in de coördinaten x_0, x_1 en x_2, werkt men m.a.w. in de R_2, dan stelt (2) een $2m$-de graadskromme $K^{(2m)}$ voor.

Het aantal coëfficiënten van de $2m$-de graadskromme is

$$\bar{C}_3^{2m} = \tfrac{1}{2}(2m+1)\ (2m+2).$$

Elke minor van (2) bevat $\bar{C}_3^m = \frac{1}{2}(m+1)\ (m+2)$ coëfficiënten. Door geschikte keuze van de fundamentaaldriehoek kan men zorgen dat de beide eerste $K^{(m)}$'n door de fundamentaalpunten X, Y en Z gaan; in de beide eerste minoren vallen dan drie coëfficiënten weg.

We hebben dan dus $4 \times \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - 3$ onbekenden en $(2m+1)(m+1)$ vergelijkingen van de tweede graad. Daar $m > 0$ is, hebben we meer onbekenden dan vergelijkingen, dus steeds zijn er oplossingen aanwezig.

Bewezen is thans dat *elke* $K^{(2m)}$ *in* R_2 *mag worden voorgesteld door een vergelijking* (2).

Voor $m = 2$ stelt (2) een $K^{(4)}$ voor, de x_{ij} zijn dan quadratische functies in de puntcoördn. x_0, x_1 en x_2. De 4 x_{ij}'s stellen dan gelijk nul gesteld $K^{(2)}$'n voor. In dit geval kan men 2 van de 24 snijpunten als cirkelpunten I_1 en I_2 nemen en M van de eerste kegelsnede als fundamentaalpunt O en een juist gekozen eenheidspunt. Men krijgt dan 12 vergelijkingen van de tweede graad met 16 onbekenden.

Voor $m = 1$ stelt (2) een kegelsnede voor.

Algemeen is een vlakke $K^{(2m)}$ dus steeds een $(|2, 2|_1^{(m)}, [2])$.

De vergelijkingen

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & l_2 \end{matrix}\right\|_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin l_1 en l_2 (variabele) constanten zijn, stellen in R_2 de snijpunten van corresponderende exemplaren van 2 projectief toegevoegde $K^{(m)}$-bundels voor, welke punten ook voldoen aan de vergelijking (2), dus een $K^{(2m)}$ vormen, immers (3) is aequivalent met

$$\begin{vmatrix} x_{11} & l_1 \\ x_{21} & l_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} x_{12} & l_1 \\ x_{22} & l_2 \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit (2) volgt.

Aan de vergelijking (2) van de algemene $K^{(2m)}$ zien we dus dat *de* $K^{(2m)}$ *de meetkundige plaats is van de snijpunten van correspon-*

derende exemplaren van 2 proj. toegevoegde $K^{(m)}$-bundels. De dragers van deze beide $K^{(m)}$-bundels: $x_{11} = x_{21} = 0$ en $x_{12} = x_{22} = 0$ liggen op de voortgebrachte $K^{(2m)}$.
Voor het bijzondere geval $m = 1$ krijgt men de bekende ontstaanswijze van een kegelsnede uit de snijpunten van corresponderende lijnen van 2 proj. toeg. waaiers, welke $K^{(2)}$ tevens gaat door de 2 dragers van de waaiers.
Deze voortbrenging door middel van proj. toeg. ruimtenverzamelingen, verklaart tevens de naam p.g.v. (projectief gegenereerde variëteit).

§ 3 *De $O^{(2m)}$, ontstaanswijze; toepassing op het quadratisch oppervlak*
Thans beschouwen we de vergelijkingen (2) en (3) in de R_3, dus de x_{ij} zijn nu m-de machtsvergelijkingen in x_0, x_1, x_2 en x_3.
Nu stelt de vergelijking (2) een $O^{(2m)}$ voor. Geheel analoog ziet men direct in dat elk $O^{(2m)}$ door (2) kan worden voorgesteld.
Een $O^{(2m)}$ is dus de p.g.v. $(|2,2|_1^{(m)}, [3])$.
De vergelijkingen (3) of $\frac{x_{11}}{l_1} = \frac{x_{21}}{l_2}$ en $\frac{x_{12}}{l_1} = \frac{x_{22}}{l_2}$ stellen bij constante l_1 en l_2 een doorsnijdingskromme $K^{(m^2)}$ voor van 2 corresponderende $O^{(m)},n$ van 2 proj. toegevoegde $O^{(m)}$-bundels, welke $K^{(m^2)}$ gelegen is op het $O^{(2m)}$: (2).
De variatie van l_1 en l_2 geeft allerlei $K^{(m^2)},n$ die het $O^{(2m)}$ opbouwen.
De basiskrommen van de beide $O^{(m)}$-bundels: $x_{11} = x_{21} = 0$ en $x_{12} = x_{22} = 0$ liggen op het $O^{(2m)}$, behoren echter niet tot het stelsel $K^{(m^2)},n$ waartoe (3) behoren. Het tweede systeem van de het $O^{(2m)}$ voortbrengende $K^{(m^2)},n$ wordt n.m.l. voorgesteld door

$$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \right\|_1 = 0 \text{ of } \begin{matrix} \dfrac{x_{11}}{m_1} = \dfrac{x_{12}}{m_2} \\ \dfrac{x_{21}}{m_1} = \dfrac{x_{22}}{m_2} \end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dit systeem bevat $\left(\frac{m_1}{m_2} = 0 \text{ resp. } \frac{m_2}{m_1} = 0\right)$ de $K^{(m^2)},n$:
$x_{11} = x_{21} = 0$ resp. $x_{12} = x_{22} = 0$, dus de basiskrommen van de beide eerste $O^{(m)}$ bundels, die de $K^{(m^2)},n$ van het eerste stelsel voortbrengen.

De vergelijkingen (3) en (4) geven dus de beide stelsels $K^{(m^2)}$'n van het $O^{(2m)}$.

De determinant nu van de vergelijkingen (3) en (4) (naar de x_{ij}) luidt

$$\begin{vmatrix} l_2 & 0 & -l_1 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & -l_1 \\ m_2 & -m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & -m_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dit betekent:

de vier $V_2^{(m)}$'n hebben m^3 punten gemeen, een consequentie van het nul-zijn van de boven gevonden determinant. Hieruit volgt nu een belangrijk onderscheid tussen de ruimtes R_2 en R_3.

Het zojuist gevondene voor $m = 1$ in R_2 resp. R_3 luidt n.m.l.: de rechten (3) en (4), dus de paren rechten van „verschillende" soort, bepalen dezelfde puntenserie van de $K^{(2)}$ ofwel: de $K^{(2)}$ draagt één stelsel hem bepalende punten. In de R_3 echter: De 4 vlakken (3) en (4), dus 2 vlakkenparen van verschillend stelsel, hebben slechts één punt gemeen. Dit klopt met het feit dat rechten op het $O^{(2)}$ van verschillend stelsel elkaar snijden. Het $O^{(2)}$is dus drager van twee verschillende stelsels rechten.

§ 4 *De $K^{(m)}$ die twee punt m^2-tallen van de $K^{(2m)}$ verbindt; het $O^{(m)}$ dat twee $K^{(m^2)}$'n van het $O^{(2m)}$ verbindt; toepassing op de kegelsnede en het quadr. oppervlak*

In de R_2 stelt de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & l_2 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{vmatrix}_2 = 0$$

een $K^{(m)}$ voor, bevattende de $m^2 + m^2 = 2m^2$ punten welke bepaald worden door de vergelijkingen (3) en (4). Het is dus een $K^{(m)}$ welke de $K^{(2m)}$: (1) snijdt volgens de beide door (3) en (4) bepaalde punt m^2-tallen.

In de R_3: een lineaire vergelijking in x_{ij}, dus is dit nu een $O^{(m)}$, bevattende de beide door (3) en (4) bepaalde $K^{(m^2)}$'n.

Voor $m = 1$ krijgt men resp. de verbindingslijn van 2 punten van de $K^{(2)}$ en het verbindingsvlak van 2 rechten van het $O^{(2)}$, dus het raakvlak aan het $O^{(2)}$ in het snijpunt van de beide rechten.

§ 5 *De* $K^{(3m^2)}$ *in* R_3, *twee ontstaanswijzen; toepassing op de ruimtelijke* $K^{(3)}$

Vervolgens onderzoeken we de vergelijkingen

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{matrix}\right\|_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

of

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix} = 0 \text{ (5}a\text{) en (5}b\text{)}.$$

In R_2 zijn dit twee $K^{(2m)}$'*n* die $x_{11} = x_{21} = 0$ dus m^2 punten, gemeenschappelijk hebben; (5) is dus een verzameling van $4m^2 - m^2 = 3m^2$ punten.

Interessanter zijn de vergelijkingen (5) in de R_3, ze (n.m.l. (5*a*) en (5*b*)) stellen dan twee $O^{(2m)}$'*n* voor, die een $K^{(m^2)}: x_{11} = x_{21} = 0$ gemeen hebben.

De vergelijkingen (5) stellen dus een $K^{(3m^2)}: (|2, 3|_1^{(m)}, [3])$ voor. Voor het geval $m = 1$ krijgt men dan 2 $O^{(2)}$'*n* met een gemeenschappelijke generator. Zo hebben

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

de generator $x_{11} = x_{21} = 0$ gemeen. Het derde oppervlak

$$\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

gaat door de $K^{(3)}$ van de beide eerste, want alle punten die voldoen aan de beide eerste determinanten gelijk 0 gesteld, voldoen ook aan de derde quadr.vergelijking, uitgezonderd $x_{11} = x_{21} = 0$ en dit is juist de genoemde generator.

De drie $O^{(2)}$'*n* hebben dus de $K^{(3)}$ gemeen.

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & l_2 \end{matrix}\right\|_1 = 0$$

bestaat uit 6 vergelijkingen en wel in de R_3 : drie $O^{(2m)}$'*n* en drie $O^{(m)}$'*n*. Totaal stellen ze voor een $K^{(4m^2-m^2)} = K^{(3m^2)}$ dus een p.g.v. $(|2, 3|_1^{(m)}, [3])$.

Uit deze vergelijkingen volgt onmiddellijk (door beschouwing n.m.l. van de drie laatste vergelijkingen): *de* $K^{(3m^2)}$ *is de meetk. plaats* *van telkens* m^3 *snijpunten van corresponderende* $O^{(m)}$*'n van* 3 *proj. toeg.* $O^{(m)}$*-bundels :*

$$\begin{cases} l_2x_{11} - l_1x_{21} = 0 \\ l_2x_{12} - l_1x_{22} = 0 \\ l_2x_{13} - l_1x_{23} = 0. \end{cases}$$

Deze $K^{(3m^2)}$ is echter ook de doorsnijdingskromme van 3 $O^{(2m)}$'n die paarsgewijze een $K^{(m^2)}$ gemeen hebben. Dragers van de $O^{(m)}$-bundels zijn $x_{11} = x_{21} = 0$ enz., dus juist de $K^{(m^2)}$-n die de $K^{(3m^2)}$ aanvullen tot de volledige doorsnede van de corresponderende twee $O^{(2m)}$'n.

Voor $m = 1$ vindt men de bekende eigenschap van de $K^{(3)}$ als de meetk. plaats van de snijpunten van corresponderende vlakken van 3 proj. toeg. vlakkenbundels.

§ 6 *Een* $O^{(2m)}$ *gaande door de* $K^{(3m^2)}$; *toepassing op de ruimtelijke* $K^{(3)}$

De vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}_2 = 0$$

is in R_3 een $O^{(2m)}$ gaande door de $K^{(3m^2)}$: (5). De determinanten

$$\left\Vert \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{matrix} \right\Vert_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

zijn aequivalent met

$$\begin{cases} \mu_1x_{11} + \mu_2x_{12} + \mu_3x_{13} = 0 \\ \mu_1x_{21} + \mu_2x_{22} + \mu_3x_{23} = 0 \end{cases}$$

waarbij dan $\mu_1 = m_2m_3' - m_3m_2'$ enz. en stellen een $K^{(m^2)}$ voor gelegen op het $O^{(2m)}$:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}_2 = 0,$$

welke de $K^{(3m^2)}$ aanvult tot de volledige doorsnede van 2 stuks $O^{(2m)}$'n.

Voor $m = 1$ stelt (6), zo μ_1, μ_2 en μ_3 variabel zijn, alle mogelijke koorden van de $K^{(3)}$ voor.

§ 7. *De $K^{(3m)}$ en het $O^{(3m)}$; twee stelsels krommen $K^{(m^2)}$ op het $O^{(3m)}$; toepassing op het derdegraadsoppervlak*

Als laatste voorbeeld beschouwen we

$$\left|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{matrix}\right|_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

In R_2 is dit een $K^{(3m)}$ en in R_3 een $O^{(3m)}$. De determinanten

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & l_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & l_3 \end{matrix}\right\|_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

zijn aequivalent met:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{matrix}\right| = 0 \text{ en } \left|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & l_2 \\ x_{31} & x_{32} & l_3 \end{matrix}\right| = 0$$

zodat (8) in R_3 een $K^{(6m^2-3m^2)} = K^{(3m^2)}$ voorstelt. Immers (8) stelt een $O^{(3m)}$ en een $O^{(2m)}$ voor, deze hebben een $K^{(6m^2)}$ gemeen, hiervan wordt afgetrokken de gemeenschappelijke matrix, die een $K^{(3m^2)}$ voorstelt, dus is (8) een $K^{(3m^2)}$ gelegen op het $O^{(3m)}$: (7).
Door l_1, l_2 en l_3 te variëren krijgt men ∞^2 van zulke krommen. Twee ervan hebben gemeen de meetk. plaats voorgesteld door:

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & l_1 & l_1' \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & l_2 & l_2' \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & l_3 & l_3' \end{matrix}\right\|_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (9).$$

Neemt men nu van (9) de drie determinanten, alle drie de beide laatste kolommen bevattend, dan krijgt men drie m^{de}-graads-oppervlakken. Dus deze vergelijking (9) stelt een m^3-punten-aantal voor.
Een tweede familie $K^{(3m^2)},n$ is

$$\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}\right\|_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Twee van die krommen van verschillende familie liggen beide op het $O^{(2m)}$:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & l_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & l_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{vmatrix}_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots : \quad (11)$$

en vormen samen zijn volledige doorsnede met het $O^{(3m)}$: (7).
Vergelijking (7) is het eliminatieresultaat van λ_1, λ_2 en λ_3 uit de vergelijkingen

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \lambda_3 x_{13} = 0 \\ \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \lambda_3 x_{23} = 0 \\ \lambda_1 x_{31} + \lambda_2 x_{32} + \lambda_3 x_{33} = 0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Deze stellen bij variërende λ_1, λ_2 en λ_3 alle $O^{(m)}$'n voor gaande door m^3 punten, dus een schoof $O^{(m)}$'n. Zo hebben we dan (de vergelijkingen zijn lineair in de λ's) drie proj. toegevoegde schoven van $O^{(m)}$'n. We komen aldus tot de eigenschap: *Een algemeen $O^{(3m)}$ is de meetk. plaats van de snijdingen van corresponderende $O^{(m)}$'n van 3 proj. toeg. schoven.*
Voor willek. λ_1, λ_2 en λ_3 zijn de vergelijkingen (12) onafhankelijk en elk stel λ-waarden bepaalt een m^3-puntental van de $O^{(3m)}$.
Er zijn nu $(3^{\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)-2} - 3)$ waarden λ die de vergelijkingen (12) afhankelijk maken. Deze waarden bepalen van de $O^{(3m)}$ een $K^{(m^3)}$. Immers de determinanten van de derde orde in de λ's uit een matrix 3 bij $\overline{C}_4^m = \frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)$ moeten gelijk nul zijn. Dit aantal is dan: $\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3) - 3 + 1$.
Deze determinanten zijn nu alle determinanten met als elementen lineaire functies van de λ's. Ze hebben gemeenschappelijk een matrix 2 bij 3 overeenkomende met 3 λ-waarden.
Dezelfde redenering geldt voor het stelsel vergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 x_{11} + \mu_2 x_{21} + \mu_3 x_{31} = 0 \\ \mu_1 x_{12} + \mu_2 x_{22} + \mu_3 x_{32} = 0 \\ \mu_1 x_{13} + \mu_2 x_{23} + \mu_3 x_{33} = 0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Ook hier zijn er $(3^{\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)-2} - 3)$ μ-waarden die elk een $K^{(m^3)}$ van het $O^{(3m)}$ bepalen.
Neemt men nu in deze beschouwing, naar aanleiding van de vergelijking (7) de grootheid m gelijk aan 1, dan stelt (7) een $O^{(3)}$ voor;

(8) is bij variërende λ's een ∞^2 grote familie $K^{(3)}$'n gelegen op dit $O^{(3)}$; (9) stelt het punt voor dat 2 zulke $K^{(3)}$'n gemeen hebben; twee $K^{(3)}$'n, een van stelsel (8) en een $K^{(3)}$ van de vergelijkingen (10), liggen samen op een $O^{(2)}$ bepaald door (11).
Dezelfde beschouwingen aangaande de vergelijkingen (12) en (13) leveren hier de dubbelzessen van het $O^{(3)}$.

Bij de vergelijkingen (12) kan nog opgemerkt worden dat, als men λ_1, λ_2 en λ_3 laat fungeren als puntcoördn. in een plat vlak, met elk punt van het platte vlak een m^3-puntental van het $O^{(3m)}$ correspondeert. Op het $O^{(3m)}$ zijn er echter $K^{(m^2)}$'n ten getale van $(3^{\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)-2} - 3)$ aanwezig, die elk als geheel corresponderen met één punt van het λ-vlak.
Voor $m = 1$ krijgt men de afbeelding van het $O^{(3)}$ op het platte vlak, 6 punten van het platte vlak corresponderen met lijnen van het oppervlak. Een vlakke doorsnede van het oppervlak wordt voorgesteld door een $K^{(3)}$ die door de 6 bijzondere punten van het platte vlak gaat, een analoge eigenschap kan voor een vlakke doorsnede van de $O^{(3m)}$ niet gevonden worden, daar hier niet van een afbeelding sprake is.

Alvorens over te gaan tot de algemene projectief voortgebrachte variëteit, laten we eerst nog enkele definities van symbolen en enige algemene meetkundige eigenschappen volgen.

§ 8 *De symbolen* $[n]$ *(of* R_n*) en* $]r[^{(m)}$*; algem. meetk. eigenschappen*

Onder het symbool R_n of $[n]$ wordt verstaan de verzameling van ∞^n punten, die lineair afhankelijk zijn van $(n + 1)$ onderling onafhankelijk gelegen punten. Duaal tegenover de r-dimensionale ruimte $[r]$ staat de r-dimensionale „ster": $]r[^{(1)}$, dit is de verzameling van ∞^r variëteiten van de eerste graad en dimensie $(n - 1)$, ondersteld dat we in de R_n werken. $]r[^{(1)}$ is dus in R_n een ∞^r grote verzameling van $V^{(1)}_{n-1}$'n (d.i. primes), lineair afhankelijk van een stelsel van $(r + 1)$ $V^{(1)}_{n-1}$'n die onderling onafh. ligging hebben.
Zoals een punt in R_n ook kan worden beschouwd als drager van een n-tal R_{n-1}'n of van n $V^{(1)}_{n-1}$'n, kan men ook, uitgaande van een punten-(m^n)-tal, dit opvatten als drager van n stuks $V^{(m)}_{n-1}$'n waarbij $V^{(m)}_{n-1}$ dan een m-de-graads „prime" is.

Onder $]r[^{(m)}$ zullen we verstaan de verzameling van ∞^r $V_{n-1}^{(m)}$'n in R_n.

Thans volgen enige veelvuldig voorkomende eigenschappen van de ruimtes en sterren in R_n:
In $[n]$ hebben $[r]$ en $[s]$ bij algemene ligging t.o.v. elkaar een $[r+s-n]$ gemeen.
Immers een $[r]$ is bepaald door $r+1$ punten, noemen we $[a]$ de ruimte met onbekende dimensie die gemeenschappelijk is aan $[r]$ en $[s]$, dan moet in elk geval voldaan worden aan de ongelijkheid:

$(r+1)+(s+1)-(a+1) \leqq n+1$ of $r+s-a \leqq n$,
$a \geqq r+s-n$. Bij algemene ligging geldt het gelijkteken.

In $[n]$ is de vertex (d.i. de „drager” van de ster) *van een* $]s[^{(m)}$ *een* $V_{n-s-1}^{(m^s+1)}$.
De ster $]s[^{(m)}$ is n.m.l. bepaald door een $(s+1)$-tal $V_{n-1}^{(m)}$'n, deze hebben een $V_{n-(s+1)}^{(m^s+1)} = V_{n-s-1}^{(m^s+1)}$ gemeenschappelijk.

De vrijheidsgraad van de projectieve betrekking tussen twee $[n]$'n is n^2+2n. Idem (dualiteit) voor 2 $]n[^{(1)}$'n.
De projectieve toevoeging geschiedt n.m.l. door middel van een determinant met $(n+1)$ rijen en kolommen, dus totaal $(n+1)^2$ elementen die bepaald moeten worden om de projectiviteit vast te leggen.
De vrijheidsgraad is dus (homogeniteit) $(n+1)^2-1 = n^2+2n$.

Een r-voudig gedegenereerde R_s in R_n is een R_{s-r} ∞^r maal geteld.
Analoog definiëert men een r-voudig gedegenereerde ster $]s[$ in $]n[$ als de snijding van een gewone (d.i. niet gedegenereerde) $]s[$ in $[n+r]$ door een $[n]$, gaande door de vertex van de eerste.
Evenzo de r-voudig gedegenereerde ster $]s\lfloor^{(m)}$. (Zie § 9).

§ 9 *De relatie tussen twee r-voudig gedegenereerde sterren*

De relatie tussen 2 r-voudig gedegenereerde sterren $]s\lfloor^{(m)}$ moet nader beschouwd worden. Men kan deze ontstaan denken door middel van de relatie tussen een gewone $]s[^{(m)}$ en een r-voudig gedegenereerde ster $]s\lfloor^{(m)}$.
Daartoe beschouwen we als voorbeeld de relatie tussen twee enkel-

voudig gedegenereerde sterren]1[$^{(m)}$ in de R_2. De gewone ster is dan een bundel m-de graadskrommen in het platte vlak.
Om de enkelvoudig gedegenereerde]1[$^{(m)}$ te krijgen snijden we, volgens definitie, in de R_3 een bundel van m-de graadsoppervlakken met een m-de graadsoppervlak, gaande door de basiskromme van de bundel oppervlakken. Op dit oppervlak hebben we dan een enkelvoudig gedegenereerde]1[$^{(m)}$.
Met een algemene m-de graadskromme $K^{(m)}$ van de niet-gedegenereerde]1[$^{(m)}$ correspondeert steeds de vertex van de bundel m-de graadsoppervlakken in R_3. Er is echter één bepaalde $K^{(m)}$ die correspondeert met het gekozen snijoppervlak van de bundel oppervlakken, zodat deze $K^{(m)}$ correspondeert met de „ruimte" waarop zich deze ster bevindt in dit voorbeeld n.m.l. een $V_2^{(m)}$.
Het kenmerkende van de correspondentie tussen 2 (enkelvoudig) gedegenereerde sterren is dus, dat met één bepaalde „prime" van de eerste ster de gehele „ruimte" van de tweede ster correspondeert en omgekeerd met één bepaalde prime van de tweede ster de gehele „ruimte" van de eerste ster correspondeert, een resultaat dat later gebruikt zal worden.
Hetzelfde verschijnsel treedt op bij meervoudig gedegenereerde sterren.

HOOFDSTUK II

ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN DE PROJECTIEF GEGENEREERDE VARIËTEITEN

§ 10 *Definitie van de variëteit* $(|p, q|^{(m)}, [n])$; *zijn vergelijkingen*

Onder het symbool $(|p, q|^{(m)}, [n])$ verstaan we de variëteit, die voortgebracht wordt als de meetk. plaats van de snijdingen van corresponderende $V_{n-1}^{(m)}, n$ van q proj. toegevoegde $]p-1[^{(m)}, n$ in de R_n. De corresponderende $V_{n-1}^{(m)}, n$ kunnen worden genoteerd als $\lambda_a x_{a1} = 0,\ \lambda_a x_{a2} = 0 \ldots \lambda_a x_{aq} = 0;\ a = 1, 2, \ldots p$.
De $(|p, q|^{(m)}, [n])$ is de meetk. plaats van de punten die aan deze vergelijkingen voldoen voor variërende λ's.
In het algemeen zullen de vertices van de q sterren $]p-1[^{(m)}$ een willekeurige stand in $[n]$ ten opzichte van elkaar innemen en de pq m-de graadsfuncties $x_{a\beta}$ in de puntcoördn. $x_0, x_1, \ldots x_n$ willekeurig zijn.
De gevonden vergelijkingen kunnen kortweg genoteerd worden als:

$$\lambda_a x_{a\beta} = 0 \qquad \begin{array}{l} a = 1, 2, \ldots p. \\ \beta = 1, 2, \ldots q. \text{ en } x_{a\beta} = \Sigma^{(m)} 1_\delta\, d_{a\beta\delta}\, x_\delta \ldots \ldots (14) \\ \delta = 0, 1, \ldots n. \end{array}$$

waarbij $\Sigma^{(m)} 1_\delta\, x_\delta$ een m-de graadsfunctie in x_δ aanduidt.
Voor $p \leqq q$ kan men λ_a uit (14) elimineren en krijgt dan als eliminatieresultaat de vergelijkingen $\| x_{a\beta} \|_{p-1} = 0$ .... (15).

§ 11 *De variëteiten* $(|p, q|^{(m)}, [n])$ *en* $(|p, q|^{(m)}, [n'])$

Voor $n' \neq n$ wordt de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n'])$ voorgesteld door dezelfde vergelijkingen (14) en (15), alleen zijn $x_{a\beta}$ nu i.p.v. m-de graadsvergelijkingen in $x_0, x_1, \ldots x_n$ dit in $x_0, x_1, \ldots x_{n'}$.
Dus geldt de stelling:

Stelling 1. *De var.* $(|p, q|^{(m)}, [n'])$ *is de algemene doorsnijdingsfiguur van een* $[n']$ *met een* $(|p, q|^{(m)}, [n])$ *waarbij steeds* $p \leqq q$ *wordt ondersteld.* (verklaring van dit laatste in § 12).

§ 12 *De dimensie van* $(|p, q|^{(m)}, [n])$

Voor $p \leqq q$ bestaat de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$ uit ∞^{p-1} stuks $V_{n-q}^{(mq)}$'n (de vergelijkingen (14) zijn immers q in getal, van de graad m in $[n]$ en elk bevat p parameters λ) dus ∞^{p-1} variëteiten van de dimensie $n - q$ of de dimensie is totaal $(n - q) + (p - 1) = n - q + p - 1$. Deze dimensie moet $\geqq 0$ zijn.

Dus moet de ongelijkheid $n - q + p - 1 \geqq 0$ gelden of $n - q + p \geqq 1$, $n - (q - p) \geqq 1$.

Nu is ondersteld $p \leqq q$ dus $q - p \geqq 0$, nodig is dan $n > q - p$, voldoende hiervoor is $n \geqq q$. Dus is bewezen de stelling:

Stelling 2. *De dimensie van een* $(|p, q|^{(m)}, [n])$ *is* $n - q + p - 1$; $p \leqq q \leqq n$.

Voor $n < q - p + 1$, dus negatieve dimensie, wordt door de vergelijkingen nog wel een variëteit gedefiniëerd, maar bij een zekere waarde van λ_α is niet een bepaald puntental aan te wijzen dat aan de vergelijkingen voldoet.

Voor $p > n \geqq q$ geldt: de dimensie van de gedefiniëerde variëteit is $\geqq n$, dus de variëteit vult de gehele R_n op. Wegens $p > q$ zijn de λ's niet uit de vergelijkingen (14) te elimineren.

Voor $p > q > n$ is de dimensie $\geqq n$, met elk punt van de R_n corresponderen ∞^{p-q-1} onafh. waarden van $\{\lambda_\alpha\}$.

Indien er niets bij ondersteld wordt geldt voor de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$ steeds de ongelijkheid $p \leqq q$. Deze onderstelling geldt niet voor de nog nader te definiëren variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$. Zoals nog zal blijken is in de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$ $r = p - 1$. (Zie blz. 22, het einde van § 16).

§ 13 *Definitie van de variëteit* $(|p, q|_1^{(m)}, [n])$; *zijn vergelijkingen*

Onder het symbool $(|p, q|_1^{(m)}, [n])$ verstaan we de variëteit die voortgebracht wordt door de snijding van corresponderende $V_{n-p+1}^{(m^{p-1})}$'n van q projectief toegevoegde $]p - 1[^{(m)}$'n in de R_n; n groot genoeg ondersteld voor het bestaan van de variëteit.

De vergelijkingen van deze variëteit zijn

$$x_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \mu_\beta \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, \ldots p \\ \beta = 1, 2, \ldots q \end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Elke vaste waarde van β geeft $(p-1)$ vergelijkingen van de m-de graad ($x_{\alpha\beta}$ zijn homogeen), dus een $V_{n-p+1}^{(m^{p-1})}$. De vergelijkingen (16) luiden uitgeschreven:

$$\begin{cases} x_{11} = \lambda_1\mu_1 \quad x_{21} = \lambda_2\mu_1 \ldots x_{p1} = \lambda_p\mu_1 \\ x_{12} = \lambda_1\mu_2 \quad x_{22} = \lambda_2\mu_2 \ldots x_{p2} = \lambda_p\mu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1q} = \lambda_1\mu_q \quad x_{2q} = \lambda_2\mu_q \ldots x_{pq} = \lambda_p\mu_q. \end{cases}$$

Eliminatie van de λ's geeft het stelsel:

$$\begin{cases} \dfrac{x_{11}}{x_{12}} = \dfrac{x_{21}}{x_{22}} = \ldots = \dfrac{x_{p1}}{x_{p2}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} \\ \dfrac{x_{11}}{x_{13}} = \dfrac{x_{21}}{x_{23}} = \ldots = \dfrac{x_{p1}}{x_{p3}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_{11}}{x_{1q}} = \dfrac{x_{21}}{x_{2q}} = \ldots = \dfrac{x_{p1}}{x_{pq}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_p}. \end{cases}$$

Eliminatie hieruit van de μ's levert o.a.

$\dfrac{x_{11}}{x_{12}} = \dfrac{x_{21}}{x_{22}}$. Zo is b.v. ook $\begin{vmatrix} x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$

wat volgt uit deling op elkaar van de beide eerste gelijkheden in bovenstaand stelsel gelijkheden.
Het eliminatie-resultaat is dus $||\, x_{\alpha\beta} \,||_1 = 0$.

§ 14 *De dimensie van* $(|p, q|_1^{(m)}, [n])$

Aan de vergelijkingen (16) zien we: de variëteit bestaat uit ∞^{p-1} variëteiten (p homogene parameters λ_α), bepaald door q rijen van elk $(p-1)$ vergelijkingen van de m-de graad, dus q stuks $V_{n-p+1}^{(m^{p-1})}{}' n$ d.i. totaal een $V_{q(n-p+1)-(q-1)n}^{(m^{(p-1)q})}$.

De dimensie is dus $n-(p-1)(q-1)$, derhalve luidt de stelling:

Stelling 3. *De dimensie van een* $(|p, q|_1^{(m)}, [n])$ *is* $n-(p-1)(q-1)$.

Opmerkingen:

I. $(|p, q|_1^{(m)}, [n])$ en $(|q, p|_1^{(m)}, [n])$ als puntverzamelingen, vormen wegens de symmetrie van de vergelijkingen (16), eenzelfde variëteit. Ze bestaan uit ∞^{p-1} $V_{n-q(p-1)}^{(m^{q(p-1)})}$'n resp. ∞^{q-1} $V_{n-p(q-1)}^{(m^{p(q-1)})}$'n.

II. Terwijl hier in de formule voor de dimensie p en q onderling verwisselbaar zijn, is dit niet het geval voor de variëteit waarvan in de stellingen 1 en 2 sprake is.

§ 15 *Definitie van de algemene p.g.v.* $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$

Thans gaan we over tot de bespreking van de algemene proj. gegenereerde variëteit als de meetk. plaats van de snijdingen van de $\infty^{r(p-r)}$ stellen corresponderende $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$'n van q proj. toeg. $]p-1[^{(m)}$'n in de R_n.
In deze definitie moet aangetoond worden dat er $\infty^{r(p-r)}$ variëteiten $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$ te halen zijn uit ∞^{p-1} $V_{n-1}^{(m)}$'n:
$(p-r)$ $V_{n-1}^{(m)}$'n snijden elkaar volgens een $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$. Dus wordt gevraagd: hoe dikwijls zijn er $(p-r)$ $V_{n-1}^{(m)}$'n te halen uit ∞^{p-1} variëteiten $V_{n-1}^{(m)}$ in R_n?
Dit aantal is $(p-r)(p-1)-(p-r)(p-r-1) = r(p-r)$ daar algemene ligging der $V_{n-1}^{(m)}$'n ondersteld wordt.

§ 16 *De vergelijkingen en de dimensie van de algemene p.g.v.*

De algemene variëteit heeft als vergelijkingen:

$$\lambda_{\alpha\varepsilon}\, x_{\alpha\beta} = 0 \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots p \\ \beta = 1, 2, \dots q \\ \varepsilon = 1, 2, \dots (p-r) \end{array} \quad \text{en } x_{\alpha\beta} = \Sigma^{(m)}\, 1_\delta\, d_{\alpha\beta\delta}\, x_\delta \; \dots \; (17).$$

Immers voor $\beta = 1$ luiden deze:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{21}x_{21} + \lambda_{31}x_{31} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_{p1}x_{p1} = 0. \\ \lambda_{12}x_{11} + \lambda_{22}x_{21} + \lambda_{32}x_{31} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_{p2}x_{p1} = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1,\,p-r}x_{11} + \lambda_{2,\,p-r}x_{21} + \lambda_{3,\,p-r}x_{31} + \dots + \lambda_{p,\,p-r}x_{p1} = 0. \end{array}\right\}$$

dit is een $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$, want het zijn $(p-r)$ vergelijkingen van de m-de graad.

Zo krijgt men q van deze varëteiten met dezelfde coëfficiënten $\lambda_{\alpha\epsilon}$, dus q proj. toeg. $V^{(m^{p-r})}_{n-p+r}$ 'n.

De variëteit bestaat dus uit $\infty^{r(p-r)}$ stuks $V^{(m^{(pq-qr)})}_{n-pq+qr}$ 'n, heeft dus de dimensie: $r(p-r)+n-q(p-r)=n-(p-r)(q-r)$, een formule symmetrisch in p en q die als bijzonder geval st. 3. inhoudt, dus:

Stelling 4. *De dimensie van* $(|p,q|^{(m)}_r, [n])$ *is* $n-(p-r)(q-r)$.

Om de $\lambda_{\alpha\epsilon}$ te elimineren schrijven we de vergelijkingen (17) uit:

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_{11}+\lambda_{21}x_{21}+\dots\dots\dots+\lambda_{p1}x_{p1}=0 \\ \lambda_{12}x_{11}+\lambda_{22}x_{21}+\dots\dots\dots+\lambda_{p2}x_{p1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1,p-r}x_{11}+\lambda_{2,p-r}x_{21}+\dots+\lambda_{p,p-r}x_{p1}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_{12}+\lambda_{21}x_{22}+\dots\dots\dots+\lambda_{p1}x_{p2}=0 \\ \lambda_{12}x_{12}+\lambda_{22}x_{22}+\dots\dots\dots+\lambda_{p2}x_{p2}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1,p-r}x_{12}+\lambda_{2,p-r}x_{22}+\dots+\lambda_{p,p-r}x_{pr}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_{1q}+\lambda_{21}x_{2q}+\dots\dots\dots+\lambda_{p1}x_{pq}=0 \\ \lambda_{12}x_{1q}+\lambda_{22}x_{2q}+\dots\dots\dots+\lambda_{p2}x_{pq}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{1,p-r}x_{1q}+\lambda_{2,p-r}x_{2q}+\dots+\lambda_{p,p-r}x_{pq}=0 \end{cases}$$

Beschouwt men nu de eerste rij vergelijkingen: dus telkens de eerste vergelijkingen van de q stelsels vergelijkingen, dan heeft men hier q vergelijkingen met p λ's met als oplossing $\{\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{p1}\}$. Het eliminatieresultaat hiervan is: de determinanten van de p-de orde $=0$ uit $\|x_{\alpha\beta}\|$.

Men ziet nu verder dat het beschouwde stelsel van q vergelijkingen ook nog tot oplossing heeft:

$$\{\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{p2}\} \dots \{\lambda_{1,p-r}, \lambda_{2,p-r}, \dots \lambda_{p,p-r}\},$$

dus er zijn totaal $p-r$ oplossingen $\{\lambda_{ij}\}$. De rang van de matrix moet dus $p-(p-r)=r$ zijn.

Het eliminatieresultaat luidt dus tenslotte $\|x_{\alpha\beta}\|_r=0 \dots$ (18).

Daar deze vergelijkingen symmetrisch in p en q zijn, stellen zij ook een $(|q, p|_r^{(m)}, [n])$ voor, bestaande uit $\infty^{r(q-r)}$ stuks $V_{n-pq+pr}^{(m^{pq-pr})}$'n.

Thans is het ook duidelijk dat $(|p, q|^{(m)}, [n])$ en $(|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$ dezelfde variëteit voorstellen, immers de laatste ontstaat uit de snijdingen van $\infty^{(p-1)(p-p+1)} = \infty^{p-1}$ $V_{n-p+p-1}^{(m)}$'n van q proj. toeg. $]p-1[^{(m)}$'n in R_n en dit is juist de definitie van de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$.

Gebruik makend van de beide, in de inleiding vermelde, eigenschappen betreffende een hoofddeterminant van een matrix, kan men de stellingen 2, 3 en 4 ook langs een andere redenering bewijzen. Immers de variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ wordt bepaald door van een matrix p bij q alle determinanten van de orde $(r+1)$ gelijk nul te stellen. De tweede der genoemde stellingen nu zegt, dat van deze vergelijkingen er $(p-r)(q-r)$ lineair onafhankelijk zijn. In R_n heeft men dus $(p-r)(q-r)$ vergelijkingen in de puntcoördn. van de graad m^{r+1}. De dimensie van de hierdoor bepaalde variëteit is dus $n-(p-r)(q-r)$.
Evenzo is de dimensie van $(|p, q|^{(m)}, [n])$ gelijk aan $n-q+p-1$, daar er hier nu sprake is van $(q-p+1)$ vergelijkingen in de puntcoördn.
Het feit dat in beide gevallen van de gevonden variëteit een deel, n.m.l. de doorsnijding ervan met een andere variëteit, afgezonderd moet worden, verandert niets aan de dimensie (wel echter kan de graad veranderen).

§ 17 *De variëteiten* $(|p, q|_{r-i}^{(m)}, [n])$ en $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$; *meervoudige ligging van de eerste variëteit op de tweede*

Zoals gedefiniëerd is, is $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ de meetk. plaats van de $\infty^{r(p-r)}$ stellen $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$'n van q proj. toeg. $]p-1[^{(m)}$'n in R_n. Daar nu $(|p, q|^{(m)}, [n])$ de meetk. plaats is van de snijpunten van corresponderende $V_{n-1}^{(m)}$'n van q proj. toegevoegde $]p-1[^{(m)}$'n en omdat $(p-r)$ variëteiten $V_{n-1}^{(m)}$ een $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$ bepalen, kan men concluderen dat $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ meervoudig is gelegen op $(|p, q|^{(m)}, [n]) = (|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$ *) of algemeen:

---

*) $p-1$ is n.m.l. de grootst mogelijke waarde die r kan bereiken.

Stelling 5. $(|p, q|_{r-i}^{(m)}, [n])$ *is meervoudig gelegen op* $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$.

Ook is deze stelling aldus te bewijzen:
$(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ en $(|p, q|_{r-i}^{(m)}, [n])$ hebben dezelfde matrix, maar de tweede variëteit heeft meer onderdeterminanten die $= 0$ zijn. Elk punt van de tweede variëteit ligt dus ook op de eerste. Bepaalt men nu in een punt van de tweede variëteit aan de eerste de raakruimte, dan moet men de vergelijking van de eerste variëteit differentiëren en krijgt als coëfficiënten, vormen lineair in de determinanten $||x_{\alpha\beta}||_{r-1}$, die wegens $||x_{\alpha\beta}||_{r-i} = 0$ ook $= 0$ zijn. De raakruimte is dus in zo'n punt onbepaald, dus de meetk. plaats van deze punten ligt meervoudig op de eerste variëteit.

§ 18 *„Variëteiten tot dezelfde matrix behorend" en het begrip „sleutelvariëteit"*

Variëteiten $||x_{\alpha\beta}||_r = 0$, dus variëteiten met dezelfde matrix en verschillende waarden voor r, heten *„variëteiten tot dezelfde matrix behorend"*.
De verzameling variëteiten $(|p, q|^{(m)}, [n])$ voor variërende waarden van n daarentegen, wordt de *„pq-serie"* genoemd.
Van deze pq-serie onderscheidt zich één variëteit, de z.g. *sleutelvariëteit* waarvoor geldt: $\frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - 1 = pq - 1$.
Hiervoor zijn dan alle $x_{\alpha\beta}$ onafhankelijk en voor $m = 1$ kunnen ze tevens dienst doen als homogene coördn. in de $[n] = [pq-1]$.
Uit stelling 5 volgt onmiddellijk dat alle variëteiten tot dezelfde matrix behorend, met rang $r < p - 1$, meervoudig op $(|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$ gelegen zijn, daar toch $(p - 1)$ de grootste waarde is die r kan bereiken.
Een voorbeeld van een sleutelvariëteit in R_3, voor $m = 1$, luidt:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}_1 = 0;$$

immers hier is $pq = 4$.
De variëteit is dus een $O^{(2)}$ door O.
Voor $m = 2$ en $n = 2$ (dus in de R_2) geldt $pq = 6$, daar de vrijheidsgraad van kegelsneden in het pl. vlak 5 is. Dus heeft de variëteit tot vergelijkingen:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{matrix}\right\|_1 = 0$$

waarbij $a_i = A_i x^2 + B_i xy + C_i y^2 + D_i xz + E_i yz + F_i z^2$.

Volgens stelling 1 is de dimensie van deze variëteit nul. De matrix stelt 2 krommen van de 4-de graad voor die 16 ptn. gemeenschappelijk hebben, waarvan er 4 moeten worden uitgeschakeld. Deze sleutelvariëteit bestaat dus uit een 12-tal punten.

Tot slot het geval $m = 2$ en $n = 3$. Dan geldt $pq = 10$, want de vrijheidsgraad van oppervlakken van de tweede graad in de R_3 is 9, de variëteit is van de gedaante:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{matrix}\right\|_1 = 0$$

waarbij dan $a_i = A_i x^2 + B_i y^2 + C_i z^2 + D_i t^2 + E_i xy + F_i xz + \ldots = 0$. Passen we hierop de dimensie-formule toe, dan is het resultaat -1. Inderdaad geldt hier $n < q - p + 1$, zodat hier niet van een eigenlijke variëteit sprake is (zie het opgemerkte na stelling 2).

O p m e r k i n g: De eenvoudigste sleutelvariëteit, voor $m = 1$, is in R_2 niet $\|x_0 x_1 x_2\|_{r=0} = 0$, algemeen in R_n niet: $\|x_0 x_1 \ldots x_n\|_{r=0} = 0$, daar de definitie van greep eist dat minstens één der coördn. $\neq 0$ is.

§ 19 *De variëteit* $)|p, q|_r^{(m)}, [n]($; *zijn dimensie*

$)|p, q|_r^{(m)}, [n]($ is de gedeeltelijk duale van de algemene variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$, n.m.l. de meetk. plaats van de verbindingen van met elkaar corresponderende $V_{p-r-1}^{(m^{n-p+r+1})}$'n van q projectief toegevoegde $V_{p-1}^{(m^{n-p+1})}$'n.

Zoals bekend is bestaat $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ uit $\infty^{r(p-r)}$ $V_{n-pq+qr}^{(m^{q(p-r)})}$'n.

„Duaal": $\infty^{r(p-r)}$ $V_{pq-qr-1}^{(m^{n-pq+qr+1})}$'n, de dimensie van $)|p, q|_r^{(m)}, [n]($ is dus $r(p-r) + pq - qr - 1 = pr - r^2 + pq - qr - 1 = (q+r)(p-r) - 1$, een uitkomst onafhankelijk dus zowel van m als van n, vooropgesteld weer dat n groot genoeg is, dus $n > (q + r)(p - r) - 1$.

O p m e r k i n g: De variëteiten $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ en $(|q, p|_r^{(m)}, [n])$ met dezelfde matrix zijn identiek wegens de symmetrie van de vergelijkingen $\| x_{\alpha\beta} \|_r = 0$; zij worden voortgebracht door $V_{n-q(p-r)}^{(m^{q(p-r)})}$'n, resp. $V_{n-p(q-r)}^{(m^{p(q-r)})}$'n. De beide variëteiten $)|p, q|_r^{(m)}, [n]($

en $)|q, p|_r^{(m)}, [n]($ echter zijn verschillend, wat o.a. te zien is aan de formule voor de dimensie van $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ resp. $)|p, q|_r^{(m)}, [n]($; in de eerste: $n - (p - r)(q - r)$ mogen p en q met elkaar verwisseld worden, in: $(q + r)(p - r) - 1$ echter niet. Wel geldt dat $)|p, q|_{p-r}^{(m)}, [n]($ en $)|q, p|_{q-r}^{(m)}, [n]($ identiek zijn, wat direct is in te zien.

§ 20 *De vertices van de $]p - 1[^{(m)}$'n en $]q - 1[^{(m)}$'n door een punt van $V^{(r)} = (|p, q|_r^{(m)}, [n])$ gaande*

Bij een punt van $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$ behoort in het algemeen één stelsel waarden $\{\lambda_a\}$, m.a.w. algemeen is het punt de doorsnijding van slechts één stelsel van q variëteiten $V_{n-1}^{(m)}$ afkomstig van q proj. toeg. $]p - 1[^{(m)}$'n.
Behoren bij één punt echter twee grepen $\{\lambda_a\}$, dan is dit punt het snijpunt van q corresponderende $V_{n-2}^{(m^2)}$'n, m.a.w. dan is het tevens een punt van $V^{(p-2)} = (|p, q|_{p-2}^{(m)}, [n])$ die n.m.l. opgebouwd is uit $V_{n-p+r(=p-2)}^{(m^2)}$'n $= V_{n-2}^{(m^2)}$'n. Correspondeert in het algemeen een punt met r grepen $\{\lambda_a\}$, dan ligt dit punt tevens op $V^{(r)} = (|p, q|_r^{(m)}, [n]) = (|q, p|_r^{(m)}, [n])$. Het is dan de doorsnede van corresponderende $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$'n van proj. toeg. $]p - 1[^{(m)}$'n zowel als van corresponderende $V_{n-q+r}^{(m^{q-r})}$'n van proj. toeg. $]q - 1[^{(m)}$'n, al naargelang van de wijze waarop men zich de variëteit ontstaan denkt.
Door elke $V_{n-p+r}^{(m^{p-r})}$ gaan $p - r$ onafh. $V_{n-1}^{(m)}$'n, terwijl de q corresponderende $V_{n-1}^{(m)}$'n elkaar snijden in een $V_{n-q}^{(m^q)}$, die de vertex is van een der $]q - 1[^{(m)}$'n die eveneens de variëteit doen ontstaan. Dus geldt:

Stelling 6 *Elk punt van $V^{(r)} = (|p, q|_r^{(m)}, [n])$ dat niet tevens op de $V^{(r-1)} = (|p, q|_{r-1}^{(m)}, [n])$ is gelegen, is een punt van de vertices van $(p - r)$ onafh. $]q - 1[^{(m)}$'n en van $(q - r)$ onafh. $]p - 1[^{(m)}$'n welke de variëteit V voortbrengen. Dit laatste wegens de symmetrie van p en q in de formules van V.*

Passen we deze stelling toe op $V = (|p, q|^{(m)}, [n]) = (|p, q|_{p-1}^{(m)}, [n])$: elk punt van V is een punt van de vertex van één $]q - 1[^{(m)}$ en evenzo van $(q - p + 1)$ onafh. $]p - 1[^{(m)}$'n.

O p m e r k i n g: In het bewijs van deze stelling is sprake van $V_{n-p}^{(m^p)}$'n en $V_{n-q}^{(m^q)}$'n, waarom geëist moet worden: $n \geqq q \geqq p$. Echter ook voor $n < q$ blijft de stelling gelden: elke variëteit van een pq-serie is immers de doorsnede van een andere variëteit met dezelfde matrix (zie § 18). De $]q-1[^{(m)}$'n en $]p-1[^{(m)}$'n kunnen dan gedegenereerd zijn.

§ 21 *De variëteiten* $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ *en* $(|p, q+j|^{(m)}, [n])$ *zijn op de variëteit* $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$ *gelegen; hun vrijheidsgraad* *) *op* V

De variëteit $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$ wordt voortgebracht door o.a. q stuks $]p-1[^{(m)}$'n.
Met een $]p-i-1[^{(m)}$ correspondeert in een tweede $]p-1[^{(m)}$ wegens het projectief-toegevoegd-zijn, een andere $]p-i-1[^{(m)}$ enz. Deze $]p-i-1[^{(m)}$'n (q in getal) brengen dus een $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ voort op de V gelegen. De vrijheidsgraad van deze $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ is gelijk aan die van de $]p-i-1[^{(m)}$'n in $]p-1[^{(m)}$. Om deze te bepalen vragen we ons af: wat is de vrijheidsgraad van $(p-i)$ onafh. $V_{n-1}^{(m)}$'n in een ∞^{p-1} grote verzameling van $V_{n-1}^{(m)}$'n?
Dit aantal is, zoals direct is in te zien:

$$(p-i)(p-1)-(p-i)(p-i-1) = i(p-i).$$

Dus:

Stelling 7.*a*. *De vrijheidsgraad van* $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ *op* V *is* $i(p-i)$.

Stelling 7.*b*. *De vrijheidsgraad van* $(|p, q+j)|^{(m)}, [n])$ *op* V *is*

$$j\left\{\frac{p}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m)-(q+j)\right\} \text{**)}.$$

Voor het bewijs van 7.*b*. vragen we naar de vrijheidsgraad van j onafh. $]p-1[^{(m)}$'n. Het systeem $]p-1[^{(m)}$'n, dat V voortbrengt is $(q-1)$-voudig. De gezochte vrijh.graad is nu gelijk aan:

de vrijheidsgraad van $\quad j\ ]p-1[^{(m)}$'n . . . . (a)

verminderd met die van j van zulke $]p-1[^{(m)}$'n in het systeem van

*) In hoofdstuk III worden twee vrijheidsgraden gedefiniëerd: f_s en f_v. Hier wordt steeds fs bedoeld.

**) Stelling 11, blz. 36 levert deze grootheid langs geheel andere weg, stelling 9 moet dan bekend worden ondersteld.

∞^{q+j-1} sterren $]p-1[^{(m)}$ .... (β)

vermeerderd met de vrijheidsgraad van de relaties van de

j sterren $]p-1[^{(m)}$ met een gegeven $]p-1[^{(m)}$ .... (γ).

De grootheid (α) wordt aldus gevonden:
Een $]p-1[^{(m)}$ is bepaald door p variëteiten $V_{n-1}^{(m)}$.
Een $V_{n-1}^{(m)}$ heeft de vrijheidsgraad:

$$\bar{C}_{n+1}^{m} - 1 = \frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - 1,$$

dus de vrijh.graad van een $]p-1[^{(m)}$ is

$$\frac{p}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - p - p(p-1).$$

Voor j stuks $]p-1[^{(m)},n$ is deze vrijheidsgraad dus

$$jp\left\{\frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - p\right\} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(β): Dit aantal is zoals direct is in te zien $j(q+j-1)$ ...... (β)

(γ): Elke correspondentie tussen twee $]p-1[^{(m)},n$ heeft een vrijheidsgraad p^2-1, dus het gezochte getal is $j(p^2-1)$ ..... (γ)

Hierbij dient opgemerkt te worden dat, als de relatie tussen de j nieuwe $]p-1[^{(m)},n$ met een der oorspronkelijke $]p-1[^{(m)},n$ bepaald is, automatisch alle correspondenties tussen de ∞^{q+j-1} sterren $]p-1[^{(m)}$ bepaald zijn.
$(\alpha)-(\beta)+(\gamma)$ geeft het gevraagde getal:

$$j\left\{\frac{p}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - (q+j)\right\}.$$

O p m e r k i n g bij de stellingen 7.*a*. en 7.*b*.: voor V is ondersteld $p \leqq q$.

Hieraan is zeker voldaan bij de beide andere variëteiten, immers geldt: $p-1 < q$ en $p < q+j$.

§ 22 *De vergelijkingen van de variëteiten* $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ *en* $(|p, q+j|^{(m)}, [n])$

Stelt $\lambda_\alpha x_{\alpha\beta} = 0$ de $]p-1[^{(m)}{}^{,}n$ voor behorende bij $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$, dan stellen $\lambda_\alpha x_{\alpha\beta} = 0$ en $\lambda_\alpha k_{\alpha\rho} = 0$, $\varrho = 1, 2, .. i$, $]p-i-1[^{(m)}{}^{,}n$ voor die een $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ voortbrengen. Luiden de vergelijkingen van V: $||x_{\alpha\beta}||_{p-1} = 0$, dan zijn die van $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$:

$$\left\| \begin{matrix} x_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha\rho} \end{matrix} \right\|_{p-1} = 0 \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, .. p. \\ \beta = 1, 2, .. q. \\ \varrho = 1, 2, .. i. \end{matrix}$$

Deze laatste vergelijkingen kunnen worden teruggebracht tot de gedaante $||x_{\rho'\beta}||_{p-i-1} = 0$, $\varrho' = 1, 2, .. p-i$, door n.m.l. met behulp van multiplicatoren $a_n, n = 1, 2, .. i$ de rechter benedendeterminant van de i-de orde van

$$\left\| \begin{matrix} x_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha\rho} \end{matrix} \right\|$$

terug te brengen tot de eenheidsdeterminant. Die matrix wordt dan

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} x_{\alpha\beta} & & & & & & & & \\ k_{11} & k_{21} & .. & k_{p-i,1} & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ k_{12} & k_{22} & .. & k_{p-i,2} & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \\ k_{1i} & k_{2i} & .. & k_{p-i,i} & 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{matrix} \right\|}_{p} \begin{matrix} \updownarrow q \\ \\ \\ \updownarrow i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Om de vergelijkingen voor $(|p, q+j|^{(m)}, [n])$ te verkrijgen moeten we nu j onderling lin. onafh. $]p-1[^{(m)}{}^{,}n$ aan de q sterren $]p-1[^{(m)}$ toevoegen, dus $\lambda_\alpha y_{\alpha\sigma} = 0$, $\sigma = 1, 2, .. j$. De vergelijkingen worden dan:

$$\left\| \begin{matrix} x_{\alpha\beta} \\ y_{\alpha\sigma} \end{matrix} \right\|_{p-1} = 0 \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, .. p. \\ \beta = 1, 2, .. q. \\ \sigma = 1, 2, .. j. \end{matrix}$$

Thans is het verder duidelijk dat de vergelijkingen van een $(|p-i, q+j|^{(m)}, [n])$ gegeven worden door

$$\left\| \begin{matrix} x_{\alpha\beta} \\ y_{\alpha\sigma} \\ k_{\alpha\rho} \end{matrix} \right\|_{p-1} = 0$$

§ 23 *De snijvariëteit van* $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ en $(|p, q+i|^{(m)}, [n])$ *op* V *gelegen, is* $(|p, q|^{(m)}_{p-i-1}, [n])$

Uit de gevonden vergelijkingen voor de $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ en $(|p, q+i|^{(m)}, [n])$ op V, volgt direct dat deze variëteiten gemeen hebben $(|p, q|^{(m)}_{p-i-1}, [n])$, welke behalve op V (dit is volgens st. 5.) ook meervoudig op $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ en $(|p, q+i|^{(m)}, [n])$ gelegen is. Immers de vergelijkingen van de beide laatste variëteiten luiden:

$$(|p-i, q|^{(m)}, [n]):\quad \left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{21} & .. & x_{p-i,1} & .... & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & .. & x_{p-i,2} & .... & x_{p2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_{1q} & x_{2q} & .. & x_{p-i,q} & .... & x_{pq} \\ k_{11} & k_{21} & .. & k_{p-i,1} & 10.. & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ k_{1i} & k_{2i} & .. & k_{p-i,i} & 00.. & 1 \end{matrix} \right\|_{p-1} = 0 \qquad \text{en}$$

$$(|p, q+i|^{(m)}, [n]):\quad \left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{21} & .... & x_{p1} \\ x_{12} & x_{22} & .... & x_{p2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{1q} & x_{2q} & .... & x_{pq} \\ y_{11} & y_{21} & .... & y_{p1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_{1i} & y_{2i} & .... & y_{pi} \end{matrix} \right\|_{p-1} = 0,$$

terwijl de vergelijkingen van $(|p, q|^{(m)}_{p-i-1}, [n])$ luiden:

$$\| x_{\alpha\beta} \|_{p-i-1} = 0.$$

Door de beide eerste vergelijkingen te differentiëren en te bedenken dat de determinanten van $x_{\alpha\beta}$ van de orde $(p-i)$ gelijk nul zijn, ziet men in dat inderdaad de coëffn. van de raakruimte in een punt van $(|p, q|^{(m)}_{p-i-1}, [n])$ gelijk nul zijn.

Ten slotte is aan de vergelijkingen van $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ ook nog direct te zien: $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ en $(|p-i', q|^{(m)}, [n])$ liggen op V en hebben de variëteit $(|p-i-i', q|^{(m)}, [n])$, (eveneens op V gelegen, wat ook door middel van st. 5. is in te zien), gemeen; indien $i > i'$, dan is deze enkelvoudig op $(|p-i, q|^{(m)}, [n])$ en meervoudig op $(|p-i', q|^{(m)}, [n])$.

§ 24 *Snijding van* $V^{(r)}$ *met een bijzondere* $V^{(m^{p-i})}_{n-p+i}$ *levert een* $(|p, q-1|^{(m)}_r, [n-p+i])$

De variëteit $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$ wordt opgebouwd door b.v. q sterren $]p-1[^{(m)}$.

We bepalen nu de snijfiguur van deze V met een $V^{(m^{p-i})}_{n-p+i}$, die de vertex is van een $]p-i-1[^{(m)}$, die een van de de V voortbrengende sterren is. (Is $i > 0$, dan is deze dus gedegenereerd). De snijfiguur wordt bepaald langs de volgende redenering:

De met elkaar corresponderende $V^{(m)}_{n-1}$'n van de overige $(q-1)$ $]p-1[^{(m)}$'n die de V opbouwen, snijden de vertex volgens een $(|p, q-1|^{(m)}, [n-p+i])$. Deze variëteit is in elk geval een deel van de doorsnede van de $V^{(m^{p-i})}_{n-p+i}$ met V, daar door elk punt van de nu gevonden variëteit $V^{(m)}_{n-1}$'n van $(q-1)$ sterren $]p-1[^{(m)}$ gaan en *alle* $V^{(m)}_{n-1}$'n van de q-de $]p-1[^{(m)}$. De gevonden variëteit is de volledige doorsnede, omdat elk punt van V $V^{(m)}_{n-1}$'n bevat van q projectief toegevoegde $]p-1[^{(m)}$'n. Daar dezelfde beschouwing geldt voor de $V^{(r)} = (|p, q|^{(m)}_r, [n])$, is hiermee de volgende stelling bewezen:

Stelling 8. *Een* $V^{(m^{p-i})}_{n-p+i}$ *die de vertex is van een* $]p-1[^{(m)}$, *die* $V^{(r)}$ *voortbrengt, snijdt* $V^{(r)}$ *volgens een variëteit* $(|p, q-1|^{(m)}_r, [n-p+i])$, *dus volgens een variëteit van een dimensie die* 1 *hoger is dan de algemene* $V^{(m^{p-i})}_{n-p+i}$*-doorsnede van* $V^{(r)}$.

V o o r b e e l d: Zie de vergelijkingen (5) blz. 5.

Voor $m = 1$ en $n = 3$ stellen deze vergelijkingen een $K^{(3)} = (|2, 3|^{(1)}, [3])$ voor, dus $p = 2$, $q = 3$, $n = 3$ en $i = 0$. De snijfiguur van deze $K^{(3)}$ met zo'n bijzondere $V^{(1)}_1 = [1]$ is een $(|2, 2|^{(1)}, [1])$, dus twee proj. toeg. $]1[^{(1)}$'n op die $[1]$ d.i. 2 proj. toeg. puntenreeksen op die rechte. Deze collocale reeksen hebben 2 punten gemeen dus de snijvariëteit bestaat uit twee punten, heeft dus de dimensie 0 en de rechte is bisecant van de $K^{(3)}$. Een willek. rechte heeft geen punten met de $K^{(3)}$ gemeen, de dimensieformule geeft in dit geval als uitkomst: -1.

HOOFDSTUK III

DE VRIJHEIDSGRAAD VAN EEN PROJECTIEF GEGENEREERDE VARIËTEIT

§ 25 *Twee begrippen vrijheidsgraden: f_s en f_v*

Onder de variëteit V kunnen we verstaan de kromme, het oppervlak, „het hyperoppervlak", dat de meetk. plaats is van de snijfiguren van corresponderende $V_{n-1}^{(m)},n$ van projectief toegevoegde sterren; dus alleen de m.p. zelf, zonder de hem voortbrengende meetk. figuren te beschouwen. De variëteit aldus bezien noemen we V, de hierbij behorende vrijheidsgraad f_v.

Ook kan men de bovengenoemde meetk. plaats met de hem voortbrengende elementen beschouwen. Deze variëteit, dit systeem duiden we aan met S en de vrijheidsgraad met f_s. ($V \to$ variëteit, $S \to$ systeem).

Uit de definities van f_s en f_v volgt direct de ongelijkheid: $f_v \leqq f_s$, daar soms ∞ tot een bepaalde macht genererende systemen te vinden zijn bij één en dezelfde variëteit.

§ 26 *Algebraische bepaling van f_s*

1) Allereerst bepalen we f_s langs algebraïsche weg.

Zoals reeds bekend luiden de vergelijkingen van V:

$$\begin{array}{ll} \lambda_\alpha x_{\alpha\beta} = 0 & \alpha = 1, 2, \ldots p \\ x_{\alpha\beta} = \Sigma^{(m)}{}_1{}_\delta d_{\alpha\beta\delta} x_\delta & \beta = 1, 2, \ldots q \\ & \delta = 0, 1, \ldots n \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

dus q vergelijkingen, elk weer bestaande uit p vergelijkingen van de m-de graad in $(n + 1)$ homogene coördn., verbonden door p λ's. Daar men elk der q vergelijkingen door een constante kan delen zonder een andere V te verkrijgen en elke vergelijking bepaald wordt door $(p\bar{C}_{n+1}^{m} - 1)$ coëffn., is het aantal „effectieve", d.i. niet-homogene constanten in dit stelsel vergelijkingen:

$$q\,(p\bar{C}_{n+1}^{m} - 1) = pq\frac{1}{m!}(n + 1)(n + 2)\ldots(n + m) - q.$$

Er zijn ∞^{q-1} sterren waaruit men er q kan halen, zodat er $\infty^{q(q-1)}$ van de vergelijkingen (14) gevonden kunnen worden die dezelfde V voorstellen; dus f_s is $q\,(q-1)$ minder dan het gevonden aantal niet-homogene constanten.
Dit feit wordt algebraïsch uitgedrukt door de mogelijkheid $\lambda_\alpha x_{\alpha\beta} = 0$ te vervangen door $\lambda_\alpha d_{\beta\beta'} x_{\alpha\beta} = 0$, waarbij $\beta' = 1, 2, \ldots q$ en $d_{\beta\beta'}$ een determinant is van de q-de orde en $\neq 0$.
Steeds kan de vergelijking van een gekozen ster door één der q grootheden $d_{\beta\beta'}$ (β' constant) gedeeld worden, zodat in elke ster-vergelijking $q-1$ grootheden $d_{\beta\beta'}$ overblijven. Voor de q sterren dus $q\,(q-1)$.
Ten slotte moet, om f_s te verkrijgen, het aantal niet-homogene constanten nog verminderd worden met p^2-1, daar op de parameters λ_α een transformatie kan worden toegepast zonder dat de variëteit V daardoor verandert. Dit laatste wordt algebraïsch verantwoord door het feit dat de vergelijkingen $\lambda_\alpha d_{\beta\beta'} x_{\alpha\beta} = 0$ vervangen mogen worden door $\lambda_\alpha c_{\alpha\alpha'} d_{\beta\beta'} x_{\alpha\beta} = 0$, waarbij $\alpha' = 1, 2, \ldots p$; $c_{\alpha\alpha'}$ is een determinant met p^2 homogene factoren, dus p^2-1 niet-homogene constanten.
De einduitkomst luidt dus:

Stelling 9.

$$f_s = pq\,\frac{1}{m!}\,(n+1)\,(n+2)\,..\,(n+m) - q - q\,(q-1) - (p^2-1) = f(p, q, n, m).$$

Opmerking: Niet steeds levert de gevonden formule tevens f_v, n.m.l. niet in het geval $p = q$, $n = 1$, m willek. (> 0). Immers dan is $f_s = q^2 m - q^2 + 1$, terwijl $(|q, q|^{(m)}, [1])$ een variëteit is bestaande uit qm punten, daar deze variëteit kan worden gebracht in de vorm:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{qq} \end{vmatrix}_{q-1} = 0.$$

Hierin zijn x_{ii} m-de graadsvergelijkingen in de homogene puntcoördn. x_0 en x_1, dus nu is $f_v = qm$, m.a.w. $f_v \neq f_s$.

§ 27 *Meetkundige bepaling van f_s; twee gevallen* (*a*) *en* (*b*)

2) Ook langs meetkundige weg kan de boven gevonden uitkomst verkregen worden. We onderscheiden hier drie gevallen:

(*a*) Stel $\frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\dots(n+m) - 1 > p - 1$ (het eerste getal $= \bar{C}^{m}_{n+1} - 1$, d.i. het aantal mogelijke $V^{(m)}_{n-1}$'n in $[n]$), dan bestaat een $]p-1[^{(m)}$ uit al de $V^{(m)}_{n-1}$'n gaande door een vertex $V^{(mp)}_{n-p}$.

Aan de orde komen weer 3 grootheden:

(α) De vrijheidsgraad van de $V^{(mp)}_{n-p}$'n van de $]p-1[^{(m)}$'n van de variëteit. Daar er q van zulke $V^{(mp)}_{n-p}$'n zijn is dit getal:

$$\frac{pq}{m!}(n+1)(n+2)\dots(n+m) - pq - pq(p-1).$$

(Een $V^{(mp)}_{n-p}$ is bepaald door p $V^{(m)}_{n-1}$'n, dus p maal het aantal vrijheidsgraden van een $V^{(m)}_{n-1}$, echter één $V^{(mp)}_{n-p}$ bevat ∞^{p-1} variëteiten $V^{(m)}_{n-1}$ dus moet er nog $p(p-1)$ worden afgetrokken).

(β) De vrijheidsgraad van de q variëteiten $V^{(mp)}_{n-p}$ in de $(q-1)$-voudige verzameling is $q(q-1)$.

(γ) De vrijheidsgraad van de betrekkingen tussen de $]p-1[^{(m)}$'n. Tussen twee $]p-1[^{(m)}$'n wordt een betrekking bepaald door $p^2 - 1$ niet-homog. grootheden. Is de relatie tussen één $]p-1[^{(m)}$ en de overige $(q-1)$ $]p-1[^{(m)}$'n gegeven, dan ook tussen alle $]p-1[^{(m)}$'n onderling, dus de gezochte vrijh. graad is: $(q-1)(p^2-1)$. Inderdaad geeft $(\alpha) - (\beta) + (\gamma)$ dezelfde uitkomst als stelling 9.

(*b*) Stellen we nu $\frac{1}{m!}(n+1)\dots(n+m) - 1 = p - 1$, dan bestaat een $]p-1[^{(m)}$ uit alle $V^{(m)}_{n-1}$'n in $[n]$, is er dus niet van een vrijheidsgraad van de vertex van zo'n $]p-1[^{(m)}$ sprake. Dit klopt met de formule voor (α) die nu nul als uitkomst geeft.
De redenering blijft voor (β) en (γ) ongewijzigd.

§ 28 *Het derde geval* (c); *hulpstelling over de vrijheidsgraad van de betrekkingen tussen q t-voudig gedegenereerde sterren*

(c) Tenslotte het geval $\frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m)-1<p-1$.
Nu hebben de grootheden (α) en (β) geen meetk. betekenis. Bestaat de var. V uit punten, dan zoeken we uit de ∞^{q-1} sterren $]p-1[^{(m)}$ die hem genereren q $]p-1[^{(m)}$'n, die dus gedegenereerd zijn en derhalve een eigenlijke vertex hebben. Nadat we dan $(\alpha)-(\beta)$ bepaald hebben komt de vraag naar (γ) voor gedegenereerde sterren aan de orde. Om deze grootheid (γ) te bepalen bewijzen we allereerst de volgende hulpstelling:

Stelling 10. *De vrijheidsgraad van de betrekkingen tussen q t-voudig gedegenereerde sterren* $]p-1[^{(m)}$ *is*

$$\frac{q(p-t)}{m!}\,p(p+1)\ldots(p+m)-q-p^2+1,$$

zo dit getal >0 *is.*

Daar het op de waarde van de dimensie van de werkruimte waarin de q sterren $]p-1[^{(m)}$ gelegen zijn, niet aankomt, worden q $]p-1[^{(m)}$'n in een $[p-1]$ beschouwd.
De t-voudig gedegenereerde ster $]p-1[^{(m)}$ bestaat dan uit de ∞^t maal getelde $V^{(m)}_{p-2}$'n van een $]p-t-1[^{(m)}$, dus de $V^{(m)}_{p-2}$'n door een $V^{(m^{p-t})}_{t-1}$. Immers de vertex van een $]p-t-1[^{(m)}$ in $[p-1]$ heeft de dimensie: $p-1-(p-t-1)-1=t-1$, dus de vertex is een $V^{(m^{p-t})}_{t-1}=V^{(m^{p-t})}_{p-(p-t+1)}$.
Is (A) zo'n ster en (B) de verzameling van alle $V^{(m)}_{p-2}$'n van de $[p-1]$, dus een niet-gedegenereerde ster $]p-1[^{(m)}$, dan luiden hun vergelijkingen resp.:

$$\lambda_{t+1}x_{t+1}+\lambda_{t+2}x_{t+2}+\ldots+\lambda_p x_p=0 \qquad \text{(A)}.$$

$$\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_t y_t+\lambda_{t+1}y_{t+1}+\lambda_{t+2}y_{t+2}+\ldots+\lambda_p y_p=0 \qquad \text{(B)}.$$

Hierbij zijn dan x_i en y_i m-de graadsvergelijkingen in de p homogene puntcoördn. De betrekkingen tussen deze 2 sterren (A) en (B) eisen dat er een $V^{(m^{p-t})}_{t-1}$ bepaald is in de $[p-1]$ en verder dat er betrekkingen bestaan tussen de twee $]p-t-1[^{(m)}$'n, n.m.l. die welke genoemde $V^{(m^{p-t})}_{t-1}$ als vertex heeft en die welke al de $V^{(m)}_{p-2}$'n van de eerste vergelijking bevat (A).

De vrijheidsgraad van $V_{t-1}^{(m^{p-t})} = V_{p-1-(p-t)}^{(m^{p-t})}$ is

$$(p-t)\,(\bar{C}_p^m - 1) - (p-t)\,(p-t-1)$$

en van de betrekkingen tussen (A) en de tweede $]p-t-1[^{(m)}$:

$$(p-t)^2 - 1.$$

Totaal: $\quad \dfrac{(p-t)}{m!}\,p\,(p+1)\ldots(p+m) - 1.$

Voor q sterren $]p-t-1[^{(m)}$ proj. toeg. aan de gekozen $]p-1[^{(m)}$ (B) is dit aantal $\dfrac{q\,(p-t)}{m!}\,p\,(p+1)\ldots(p+m) - q.$

Daar de tussenschakel voor de proj. toev. relaties, de $]p-1[^{(m}$ met vergelijking (B), steeds door elke proj. toeg. ster van dezelfde soort vervangen kan worden zonder dat de gevonden betrekkingen veranderen, moet de gevonden vrijh.graad nog met (p^2-1) verminderd worden (de transf. determinant is van de p-de orde). De einduitkomst luidt dus zoals Stelling 10 aangeeft.

Bovenstaande redenering kan niet toegepast worden wanneer de vergelijkingen van de gedegenereerde sterren in het geheel geen gemeenschappelijke λ's hebben, b.v. in het geval: $q = 2$ en $2t > p$ (of $p - t < t$):

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{p-t} x_{p-t} & = 0 \\ \qquad\qquad \lambda_{t+1} y_{t+1} + \ldots + \lambda_p y_p & = 0 \end{array}\right\}$$

Algemeen kan men zeggen: is het gevonden getal > 0, dan is de stelling van toepassing.

Thans keren we terug tot de $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$.

Zoals reeds geconstateerd is zijn voor

$$\frac{1}{m!}\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m) - 1 < p - 1$$

al de $]p-1[^{(m)},n$ gedegenereerd. Hieronder komen dan $(p-n-1)$-voudig gedegenereerde sterren voor, d.i. alle $V_{n-1}^{(m)},n$ van de R_n ∞^{p-n-1} maal genomen; zo ook $(p-n)$-voudig gedegenereerde sterren met als vertex een puntental van R_n.

De vertex van een $]p-1[^{(m)}$ wordt bepaald door de corresponderende $V_{n-1}^{(m)},n$ van p $]q-1[^{(m)},n$ van het tweede systeem. Zul-

len p zulke $V_{n-1}^{(m)},n$ in $[n]$ elkaar in een puntental n.m.l. m^p, snijden, dan moet worden voldaan aan pm^p voorwaarden van de eerste graad, dus zullen er ∞^{q-1-pm^p} variëtéiten $V_{n-1}^{(m)}$ door het gegeven puntental gaan, daar er ∞^{q-1} stelsels van $V_{n-1}^{(m)},n$ zijn (dit alles indien geldt: $m^p < \bar{C}_n^m - 1$).
Elk geschikt punten-m^p-tal van de R_n is dus vertex van ∞^{q-pm^p-1} sterren, dus ook de q punt-m^p-tallen van de R_n die vertex zijn van de q $]p-1[^{(m)},n$.
Dus i.p.v. de grootheid $(\alpha)-(\beta)$ waarvan sprake was bij de f_s-bepaling langs algebraïsche weg, komt nu: $-q\,(q-pm^p-1)$.
Hierbij moet dan nog worden opgeteld de uitkomst van stelling 10, door hierin voor t de grootheid $p-n$ in te vullen.
Dus vinden we voor f_s in het geval (c):

$$f_s = -q\,(q-pm^p-1) + \frac{qn}{m!}\,p\,(p+1)\ldots(p+m) - q - p^2 + 1.$$

§ 29 *Het systeem van twee variëteiten* V *en* W *tweevoudig bezien:* W *op* V *en* V *door* W

Een algemeen geldende formule waarmee op geheel andere wijze de grootheid van stelling 7.*b*. gevonden kan worden luidt als volgt:

Stelling 11. $f_v + {}_vf_w = f_w + {}_wf_v$.

Hierin zijn dan V en W algemene leden van verzamelingen van variëteiten in de R_n. De dimensie van V wordt ondersteld groter te zijn dan die van W.
Verder worden de verzamelingen variëteiten van V en W zodanig ondersteld, dat op elke V minstens één W gelegen is en dat door elke W minstens één V gaat.
De symbolen hebben dan de volgende betekenis:

f_v: de vrijheidsgraad van de variëteiten V in R_n; analoog f_w voor variëteiten W.
${}_vf_w$: „ „ „ „ „ W op V.
${}_wf_v$: „ „ „ „ „ V door W.

De bovenstaande gelijkheid is nu onmiddellijk in te zien. Het linker lid van de formule stelt n.m.l. de vrijheidsgraad voor van het systeem, bestaande uit V en W er op gelegen, het rechter lid idem van een systeem bestaande uit W en een V er doorheen. Beide systemen zijn in (1, 1)-correspondentie te brengen door telkens dezelfde combinatie van een V met eenzelfde W onder beide opzichten te beschouwen, waarmee de gelijkheid bewezen is.

Met behulp van deze stelling nu en met gebruikmaking van de uitkomst van stelling 9. kan nogmaals de vrijheidsgraad van $(|p - i, q|^{(m)}, [n])$ op V bepaald worden. (Zie st. 7.*b*.).

$V = (|p, q|^{(m)}, [n])$. Gevraagd de grootheid ${}_{v}f_{w}$ als
$W = (|p, q + j|^{(m)}, [n])$.

$$f_v = pq \frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - q - q(q-1) - (p^2 - 1)$$

(stelling 9.).

$$f_w = p(q+j)\frac{1}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - q - j - (q+j)(q+j-1) - (p^2-1)$$

(toep. v. stelling 9.).

${}_{w}f_{v} = qj$ (toep. van stelling 7.*a*. waarbij men dan moet letten op de gelijkheden

$V = (|p, q|^{(m)}, [n]) = (|q, p|^{(m)}_{p-1}, [n])$ en
$W = (|p, q + j|^{(m)}, [n]) = (|q + j, p|^{(m)}_{p-1}, [n])$.

Hieruit volgt dan voor ${}_{v}f_{w}$ het reeds bekende resultaat:

$$j\left\{\frac{p}{m!}(n+1)(n+2)\ldots(n+m) - (q+j)\right\}.$$

HOOFDSTUK IV

BIRATIONAAL TOEGEVOEGDE VARIËTEITEN; GEDEGENEREERDE VARIËTEITEN; DE GRAAD VAN DE ALGEMENE VARIËTEIT $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$

§ 30 *Uitbreiding van het begrip projectie*

Stel een $[n']$ met hierin een variëteit $\Phi = (|p, p'|_1^{(1)}, [n'])$, waarvan we de vergelijkingen noteren (zie ook § 13.) als:

$$z_{aa'} = \xi_a \xi_{a'} \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots p. \\ a' = 1, 2, \dots p'. \end{array} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (19).$$

Hierin zijn dan $z_{\overline{aa'}}$ lineaire functies in de puntcoördn. van de gegeven $[n']$.
Tussen de grootheden $z_{aa'}$ die $(pp' - 1)$ in aantal zijn, moeten dan $pp' - 1 - n'$ betrekkingen bestaan:

$$C_{aa'\beta}\, z_{aa'} = 0 \qquad \beta = 1, 2, \dots pp' - n' - 1. \dots\dots \quad (20).$$

We stellen verder een $[n' - p']$ in $[n']$ gedefiniëerd door de p' lineaire vergelijkingen in de puntcoördn. van $[n']$: $z_{1a'} = 0$.
Om nu de projectie te verkrijgen van de var. Φ vanuit die $[n' - p']$ op een $[p' - 1]$, moet men de grootheden

$$z_{aa'} \quad \begin{array}{l} a = 2, 3, \dots p \\ a' = 1, 2, \dots p' \end{array}$$

uit de vergelijkingen (19) en (20) elimineren.
Indien we nu uitgaan van $\Phi = (|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$, dus $m \neq 1$ nemen, dan krijgen we i.p.v. p' lineaire-, nu p' m-de graadsvergelijkingen in de puntcoördn. van $[n'] : z_{1a'} = 0$. (De boven vermelde grootheid β

loopt nu van 1 tot $pp' - \frac{1}{m!}(n' + 1)(n' + 2) \dots (n' + m)$ zoals hierna zal blijken).
Voor het gemak zullen we het eliminatieresultaat van

$$z_{aa'} \quad \begin{array}{l} a = 2, 3, \dots p \\ a' = 1, 2, \dots p' \end{array}$$

uit de vergelijkingen (19) en (20) voor $m \neq 1$ en

$$\beta = 1, 2, \ldots pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m),$$

de „projectie" van $\Phi = (|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$ vanuit de $V_{n'-p'}^{(mp')}$, bepaald door de p' m-de graadsvergelijkingen $z_{1\alpha'} = 0$, blijven noemen. Deze „projectie" gaat dan voor $m = 1$ over in de algemeen bekende definitie van projectie.

§ 31 *De „projectie" van Φ vanuit een op Φ gelegen variëteit Ψ is* $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$

Nu dit begrip „projectie" omschreven is, kan de eerste fundamentele stelling van dit hoofdstuk als volgt worden geformuleerd:

Stelling 12. *Op de variëteit $\Phi = (|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$ bevinden zich ∞^{p-1} variëteiten $\Psi = (|p-1, p'|_1^{(m)}, „[n'-p']")$. De „projectie" van Φ op een $[n]$ vanuit een „$[n'-p']$" waarop een Ψ is gelegen, is een variëteit $V = (|p, q|^{(m)}, [n])$ waarbij*

$$q = pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m), n = p'-1$$

en $p \leqq q \leqq p + p' - 2$ en voor $m \neq 1$ de grootheid n' groot genoeg ondersteld wordt dat de dimensie van $\Phi \geqq 0$ is.

„$[n'-p']$" betekent hier een $V_{n'-p'}^{(mp')}$; in het symbool voor de var. Ψ duidt het aan dat deze variëteit op zo'n $V_{n'-p'}^{(mp')}$ gelegen is. De dimensie van Φ (stelling 4) is:

$$n' - (p-1)(p'-1) = n' - pp' + 1 + p + p' - 2.$$

Nu geldt $p + p' - 2 \geqq q$ en $pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m) = q$ en dus ook $n' - pp' + 1 \leqq -q$. Voor $m = 1$ is de dimensie van Φ steeds $\geqq 0$, en behoeft verder niets van n' te worden ondersteld. Voor $m \neq 1$ is de laatste onderstelling van stelling 12 noodzakelijk. Voor het bewijs van de stelling gaan we uit van de vergelijkingen van Φ:

$$\begin{cases} z_{\alpha\alpha'} = \xi_\alpha \xi_{\alpha'} & \begin{array}{l}\alpha = 1, 2, \ldots p \\ \alpha' = 1, 2, \ldots p'\end{array} \quad \ldots\ldots \quad (19) \\ C_{\alpha\alpha'\beta} z_{\alpha\alpha'} = 0 & \begin{array}{l}\beta = 1, 2, \ldots q = pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m) \quad (20), \\ \delta = 0, 1, \ldots n'.\end{array}\end{cases}$$

waarin $z_{\alpha\alpha'} = \Sigma^{(m)} 1_\delta d_{\alpha\alpha'\delta} x_\delta$.
Hierin zijn de ξ_α's de parameters, de variëteit Φ ontstaat immers uit p' projectief toegevoegde $]p-1[^{(m)},n$ en bestaat uit ∞^{p-1} $V^{(m^{p-1})}_{n'-p+1},n$. Voor elke vaste α' staan er p m-de graadsvergelijkingen in de puntcoördn. van $[n']$, dus een $]p-1[^{(m)}$. Door α' te laten lopen komen er p' sterren $]p-1[^{(m)}$
De grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ zijn m-de graadsvergelijkingen in de puntcoördn. van $[n']$ of elke $z_{\alpha\alpha'}$ stelt een $V^{(m)}_{n'-1}$ in $[n']$ voor.
De vrijheidsgraad van $z_{\alpha\alpha'}$ is dus

$$\overline{C}^m_{n'+1} - 1 = \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m) - 1.$$

Daar α en α' variëren tussen 1 en p, resp. tussen 1 en p' en alle grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ met een constante mogen worden vermenigvuldigd zonder dat de variëteit Φ verandert, zijn er $pp'-1$ niet-homogene grootheden $z_{\alpha\alpha'}$. Tussen de grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ moeten er dus

$$q = pp' - 1 - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m) + 1 =$$
$$= pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m)$$

lineaire betrekkingen

$$C_{\alpha\alpha'\beta} z_{\alpha\alpha'} = 0 \qquad \beta = 1,2,\ldots q = pp' - \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m)$$

bestaan.
Nu beschouwen we de variëteit: $\Psi = (|p-1, p'|^{(m)}_1, ,,[n'-p']'')$; vergelijken we Ψ met Φ, dan zien we dat we i.p.v. de grootheid p van Φ nu $(p-1)$ hebben en dus (stelling 7.*a*.) dat een lineaire relatie tussen de parameters ξ_α aanwezig is. Deze relatie is steeds (na eventuele transformatie der parameters) terug te brengen tot de relatie: $\xi_1 = 0$.

De vergelijkingen van een variëteit Ψ luiden dus:

$$\begin{cases} z_{\alpha\alpha'} = \xi_\alpha \xi_{\alpha'} & \alpha = 1,2,\ldots p. \\ \xi_1 = 0 & \alpha' = 1,2,\ldots p'. \\ C_{\alpha\alpha'\beta} z_{\alpha\alpha'} = 0. & \beta = 1,2,\ldots q. \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21).$$

waarin weer

$$z_{\alpha\alpha'} = \Sigma^{(m)} 1_\delta d_{\alpha\alpha'\delta} x_\delta. \quad \delta = 0,1,\ldots n'.$$

Van deze variëteiten Ψ liggen er ∞^{p-1} op Φ daar er p parameters ξ_α aanwezig zijn en dus ∞^{p-1} lineaire betrekkingen hiertussen. Wegens het eerste stelsel vergelijkingen (21) gecombineerd met $\xi_1 = 0$ geldt: $z_{1\alpha'} = \xi_1\xi_{\alpha'} = 0$, dit is een „ruimte", uitgesneden door p' $V_{n'-1}^{(m)}$'n, dus met dimensie $n' - p'$, m.a.w. een $V_{n'-p'}^{(mp')}$ of een „$[n' - p']$" waarop Ψ gelegen is.
In de vergelijkingen van Ψ komen dus alleen voor $z_{2\alpha'}, z_{3\alpha'}, \ldots z_{p\alpha'}$. De „projectie" van Φ vanuit deze „$[n' - p']$" op een $[n] = [p' - 1]$ in $[n']$ krijgt men, naar analogie van de algemeen gedefiniëerde projectiemethode, door de grootheden $z_{2\alpha'}, z_{3\alpha'}, \ldots z_{p\alpha'}$ te elimineren uit de vergelijkingen van Φ, dus uit de vergelijkingen (19). We krijgen dan een resultaat alleen in de grootheden $z_{1\alpha'}$. Deze noemen we $x_{\alpha'}$, dus $x_{\alpha'} = z_{1\alpha'}$ zijn dan grootheden corresponderend met de $[n] = [p' - 1]$ waarop geprojecteerd wordt. Dus

$$x_{\alpha'} = z_{1\alpha'} = \xi_1\xi_{\alpha'} \text{ en daar } \xi_1 \neq 0,\ z_{\alpha\alpha'} = \xi_\alpha\xi_{\alpha'} = \xi_\alpha\xi_1^{-1}x_{\alpha'}.$$

Het eliminatieresultaat, dus de vergelijkingen van de „projectie", luiden nu:

$$C_{\alpha\alpha'\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_1^{-1}\,x_{\alpha'} = 0 \text{ of } C_{\alpha\alpha'\beta}\,\xi_\alpha\,x_{\alpha'} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (22).$$

Deze vergelijkingen stellen een $(|p, q|^{(m)}, [n = p' - 1])$ voor, die algemeen is daar aan de grootheden $C_{\alpha\alpha'\beta}$ geen beperkingen zijn opgelegd. Immers bij vaste β staan er p m-de graadsvergelijkingen in de coördn. $x_0 \ldots x_{p'}$, dus een $]p - 1[^{(m)}$ in de $[p' - 1]$. Totaal dus q $]p - 1[^{(m)}$'n in de $[p' - 1]$, waarmee stelling 12 bewezen is.

§ 32 *Birationaal aan elkaar toegevoegde variëteiten*

Daar nu in $\Phi = (|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$, de grootheden p en p' met elkaar verwisseld kunnen worden zonder dat de variëteit daardoor verandert — immers voor n' geldt de gelijkheid:

$$q = pp' - \frac{1}{m!}(n' + 1)(n' + 2) \ldots (n' + m)$$

welke ook na verwisseling van p en p' onderling, dezelfde blijft — volgt uit de zojuist bewezen stelling 12 dat Φ niet alleen $V = (|p, q|^{(m)}, [p' - 1])$ als „projectie"-resultaat oplevert, maar ook de variëteit $W = (|p', q|^{(m)}, [p - 1])$. Dus geldt de stelling:

Stelling 13. *De variëteiten*

$$V = (|p, q|^{(m)}, [p' - 1]) \text{ en } W = (|p', q|^{(m)}, [p - 1])$$

zijn in een $(m^{p'-1}, m^{p-1})$*-relatie aan elkaar toegevoegd;* $p \leqq q$ *en* $p' \leqq q$.

Immers aan elk $(m^{p'-1})$-tal punten van V wordt een (m^{p-1})-tal punten van W toegevoegd en omgekeerd, dit noemen we een $(m^{p'-1}, m^{p-1})$-relatie. In het bijzondere geval $m = 1$ luidt dit resultaat: V *en* W *zijn birationaal aan elkaar toegevoegd.* Stelling 13 kan ook direct, zonder dat men de variëteit Φ beschouwt, worden bewezen door n.m.l. uit de vergelijkingen:

$$C_{\alpha\alpha'\beta}\, \xi_\alpha\, x_{\alpha'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

de ξ_α resp. $x_{\alpha'}$ te elimineren waardoor men V resp. W verkrijgt. Beschouwt men n.m.l. de ξ_α's als coördn. van een $[p - 1]$, dan is (22) een stelsel van q vergelijkingen in $\{\xi_\alpha\}$ dat, daar $q > p - 1$, in het algemeen niet een gemeenschappelijke greep $\{\xi_\alpha\}$ zal hebben voor willek. $x_{\alpha'}$'n; vult men echter voor de vormen $x_{\alpha'}$ waarden in die corresponderen met een $(m^{p'-1})$-puntental van V, dan krijgt men een oplossing van $\{\xi_\alpha\}$ en wel één greep $\{\xi_\alpha\}$ voor elk $(m^{p'-1})$-puntental van V.
Er is dus een correspondentie tussen de punt-$(m^{p'-1})$-tallen van V en de grepen $\{\xi_\alpha\}$ waarvoor het stelsel vergelijkingen (22) een oplossing heeft.
Beschouwt men nu de $x_{\alpha'}$'n als variërende vormen in een ruimte $[p' - 1]$, dan komt men wegens $q > p' - 1$ analoog tot correspondentie tussen de punten van W: $\{\xi_\alpha\}$ en telkens (m^{p-1}) grepen $\{x_{\alpha'}\}$.
Dus zal in het algemeen met een (m^{p-1})-puntental van W één bepaald $(m^{p'-1})$-tal punten van V corresponderen en omgekeerd.

§ 33 *Nader onderzoek van de correspondentie tussen de variëteiten* V *en* W *in het geval* $m = 1$

We hebben reeds gezien dat in het algemeen met een $(m^{p'-1})$-tal punten van V een (m^{p-1})-tal van W correspondeert en omgekeerd. In het geval $m = 1$ correspondeert met een punt van W één punt van V en omgekeerd. Dit geval (dus $m = 1$) kan nog nader onderzocht worden (Room; l.c. p. 49):

Stel dat bij de vergelijkingen (22) een greep $\{\xi^0_\alpha\}$ aanwezig is zodanig dat in $[p'-1]$ de $[p'-2]$'n: $C_{\alpha\alpha'\beta}\,\xi^0_\alpha\,x_{\alpha'}=0$ alle door een $[r-1]$ gaan, dan correspondeert met het punt $\{\xi^0_\alpha\}$ van W de gehele $[r-1]$ op V.

Nu wordt in een $[p'-1]$ door $(p'-r)$ $[p'-2]$'n een $[r-1]$ bepaald. We hebben er hier q dus moeten er $(q-p'+r)$ lineair onafhankelijke betrekkingen aanwezig zijn tussen de ξ^0_α's, dus

$$K_{\beta\gamma}C_{\alpha v'\beta}\,\xi^0_\alpha=0 \qquad \gamma=1,2,\ldots q-p'+r.$$

Beschouwt men nu het gehele stelsel van q vergelijkingen van W: $C_{\alpha\alpha'\beta}x_{\alpha'}\xi_\alpha=0$, dan zijn er telkens slechts $(p'-r)$ vergelijkingen uit te halen die lin. onafh. zijn; vormt men dus uit die q vergelijkingen een determinant van de orde: $p'-r+1$, dan zijn de elementen ervan coëffn. van afhankelijke vergelijkingen. Dus deze determinant is nul of de variëteit van de punten $\{\xi_\alpha\}$ met deze eigenschap is een $(|q,p'|^{(m)}_{p'-r},\ [p-1])$, immers:

$$W=(|p',q|^{(m)},[p-1])=(|p',q|^{(m)}_{p'-1},[p-1])=(|q,p')^{(m)}_{p'-1},[p-1]).$$

Volgens stelling 5 ligt $\{\xi^0_\alpha\}$ op een meervoudig op W gelegen meetk. plaats.

Hiermee is bewezen:

Stelling 14. *Met een* $[r-1]$ *op* V, *die de snijfiguur is van corresponderende* $[p'-2]$'*n die de variëteit* V *voortbrengen, correspondeert een punt van de meervoudig op W gelegen m.p.* $(|q,p'|^{(1)}_{p'-r},\ [p-1])$.

O p m e r k i n g 1: In de boven bewezen stelling 12 valt niet zozeer de nadruk op de z.g. „projectie" — welke voor $m=1$ overgaat in de bekende definitie van projectie —, als wel op de relaties die er daardoor tussen de variëteiten Φ en V bestaan. Dit blijkt al direct o.a. in de eerste toepassing n.m.l. in stelling 13.

O p m e r k i n g 2: Op blz. 39 werd gevonden dat de variëteit Ψ gelegen is op een $V^{(mp')}_{n'-p'}$, bepaald door de p' vergelijkingen

$$z_{1\alpha'}=\xi_1\xi_{\alpha'}=0 \quad \alpha'=1,2,\ldots p'$$

van de m-de graad in de puntcoördn. van de werk-$[n']$.

Daar we gezien hebben (blz. 40) dat er tussen de pp' grootheden $z_{\alpha\alpha'}$

$$q=pp'-\frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m)$$

lineaire betrekkingen $C_{\alpha\alpha'\beta}\, z_{\alpha\alpha'} = 0$ bestaan, kan men zich afvragen of die vormen $z_{1\alpha'}$, dus die p' grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ uit de eerste rij uit de matrix $z_{\alpha\alpha'}$, wel lineair onafhankelijk zijn!
Om dit in te zien moet men bedenken dat (vgl. § 13.) Φ bepaald wordt door de grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ in een matrix p bij p' geplaatst. Van deze $z_{\alpha\alpha'}$, pp' in getal zijn er

$$\frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m)$$

lineair onafhankelijk. Daar nu verwisseling van rijen onderling en evenzo van kolommen slechts tekenverandering van de onderdeterminanten (van de tweede orde) veroorzaakt, dus de vergelijkingen van Φ onveranderd laat, kan men zorgen, dat de eerste p' grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ van de eerste rij (of eerste kolom) onderling onafh. zijn. (De dimensie van de werkruimte n' kan n.m.l. steeds zo gekozen worden dat voldaan is aan de ongelijkheid

$$p' < \frac{1}{m!}(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m)).$$

In het geval $m = 1$ treden enkele vereenvoudigingen op.
Zoals we reeds hebben gezien aan de vergelijkingen (20) bestaan tussen de grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ — nu lineaire vormen in de puntcoördn. van $[n']$ — $(pp' - n' - 1)$ relaties $C_{\alpha\alpha'\beta}\, z_{\alpha\alpha'} = 0$. Men kan nu een punttransformatie toepassen zodanig dat de p' lin. onafh. grootheden $z_{\alpha\alpha'}$ nu fundamentaal $[n' - 1]$'n zijn en, door eventuele verwisseling van rijen onderling en kolommen, bewerken dat de ruimte van Ψ, een fundamentaalruimte van het fundamentaalsimplex wordt. Nu is het tevens duidelijk dat hier sprake is van projectie vanuit dat fundamentaalsimplex.

O p m e r k i n g 3: Wanneer men bepaalde gelijkheden tussen de grootheden p, p' en q aanneemt, blijken bijzondere gevallen van stelling 12 te voorschijn te komen.

§ 34 *De variëteit* $(|p, p'|_1^{(m)}, ,,[n'-1]'')$ *degenereert in de variëteiten* $\Psi = (|p-1, p'|_1^{(m)}, ,,[n'-p']'')$ *en* $X = (|p, p'-1|_1^{(m)}, ,,[n'-p']'')$
Een andere toepassing van stelling 12 wordt gevonden in de gedegenereerde variëteiten en wel in stelling 16 die weer steunt op stelling 15 voor het geval $m = 1$.

Stelling 15. *Elke „$[n'-1]$" door een variëteit* $\Psi = (|p-1, p'|_1^{(m)}$, „$[n'-p']$") *op* $\Phi = (|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$ *snijdt* Φ *verder in een variëteit* $X = (|p, p'-1|_1^{(m)}$, „$[n'-p']$") *die* Ψ *snijdt volgens een variëteit*

$$(|p-1, p'-1|_1^{(m)}, „[n'-p-p'+1]").$$

De variëteiten Ψ *en* X *samen zijn dus aequivalent met een „prime"-doorsnede:* $(|p, p'|_1^{(m)}$, „$[n'-1]$") *van* Φ.

Bewijs: Op blz. 39 is reeds gevonden dat de vergelijkingen van Φ luiden:

$$\begin{cases} z_{\alpha\alpha'} = \xi_\alpha \xi_{\alpha'} & \alpha = 1, 2, \ldots p. \quad \alpha' = 1, 2, \ldots p'. \qquad (19) \\ C_{\alpha\alpha'\beta}\, z_{\alpha\alpha'} = 0 & \beta = 1, 2, \ldots q. \qquad (20) \end{cases}$$

waarin $z_{\alpha\alpha'} = \Sigma^{(m)} 1_\delta\, d_{\alpha\alpha'\delta}\, x_\delta$. $\quad \delta = 0, 1, \ldots n'$.

Nu wordt de gegeven variëteit Ψ_0 op Φ uitgesneden door een $V_{n'-p'}^{(mp')}$ (n.m.l. door een „$[n'-p']$").

Na eventuele verwisseling van rijen en kolommen luiden de vergelijkingen hiervan $z_{1\alpha'} = 0$ (blz. 43, opmerking 2). De vergelijking van een $V_{n'-1}^{(m)}$ door deze $V_{n'-p'}^{(mp')}$ luidt $K_{\alpha'} z_{1\alpha'} = 0$ en deze variëteit snijdt dus Φ in de meetk. plaats van puntgroepen, welker parameters ξ_α en $\xi_{\alpha'}$ bovendien voldoen aan $K_{\alpha'} \xi_1 \xi_{\alpha'} = 0$, dus

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \text{ deze voorwaarde levert } \Psi_0. \\ K_{\alpha'} \xi_{\alpha'} = 0, \text{ deze voorwaarde geeft een variëteit } X. \end{cases}$$

(Beide vergelijkingen zijn lineair in ξ_α resp. $\xi_{\alpha'}$, dit klopt met het feit dat de symbolen van Ψ en X in elkaar overgaan door verwisseling van α en α', dus van p en p').

Omgekeerd bepaalt elke variëteit X een lineaire relatie in de $\xi_{\alpha'}$'s en dus ligt elke X met Ψ_0 in een $V_{n'-1}^{(m)}$ („prime"). Na eventuele transformatie van de parameters $\xi_{\alpha'}$ luidt de relatie die correspondeert met een bepaalde Ψ: $\xi_1 = 0$.

De „prime" die deze X en Ψ bevat is dan $z_{11} = 0$. Beide variëteiten X en Ψ snijden elkaar volgens een variëteit met als vergelijkingen

$$z_{\gamma\gamma'} = \xi_\gamma \xi_{\gamma'} \quad \gamma = 2, 3, \ldots p; \; \gamma' = 2, 3, \ldots p'$$

dus volgens een $(|p-1, p'-1|_1^{(m)}$, „$[n'-p-p'+1]$"), gelegen op een $V_{n'-p-p'+1}^{(mp+p'-1)}$, bepaald door de vergelijkingen

$$z_{\alpha 1} = 0 \text{ en } z_{1\alpha'} = 0.$$

§ 35 *De variëteit* $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ *is aequivalent met*

$V' = (|p-1, q-1|^{(1)}, [n])$ *en* $V'' = (|p, q-1|^{(1)}, [n-1])$

Met behulp van stelling 15 voor het geval $m = 1$ wordt nu de volgende stelling bewezen, die uitsluitend voor $m = 1$ geldigheid heeft:

Stelling 16. *De variëteit* $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ *is aequivalent met de variëteiten*

$$V' = (|p-1, q-1|^{(1)}, [n]) \text{ en } V'' = (|p, q-1|^{(1)}, [n-1]),$$

terwijl V'' *gelegen is in een prime van de ruimte die* V' *bevat en* V' *dan snijdt volgens een primedoorsnede.*

Om deze eigenschap *) te bewijzen denken we ons de variëteiten Φ en Ψ, aan het begin van dit hoofdstuk gedefiniëerd, als volgt gesplitst in Φ' en Φ'', resp. Ψ' en Ψ'':

$$\Phi: \begin{cases} \Phi' = (|p-1, p'|_1^{(1)}, [n'+1-p']) \\ \Phi'' = (|p, p'-1|_1^{(1)}, [n'+1-p]) \end{cases} \quad \text{en}$$

$$\Psi: \begin{cases} \Psi' = (|p-2, p'|_1^{(1)}, [n'+1-2p']) \text{ op } \Phi' \text{ gelegen} \\ \Psi'' = (|p-1, p'-1|_1^{(1)}, [n'+2-p-p']) \text{ op } \Phi'' \text{ gelegen.} \end{cases}$$

Beide samenstellingen zijn verantwoord wegens stelling 15 voor $m = 1$ (dan wordt n.m.l. „prime": prime en „$[n'-p']$": $[n'-p']$ enz.).

Nu projecteren we Φ vanuit Ψ, d.w.z. Φ' vanuit Ψ' en Φ'' vanuit Ψ'', hierbij stelling 12 voor $m = 1$ toepassend (hier is dus sprake van projecteren in de gewone zin!), die dan schematisch weergegeven luidt als volgt:

Projectie van $\Phi = (|p, p'|_1^{(1)}, [n'])$ vanuit

$$\Psi = (|p-1, p'|_1^{(1)}, [n'-p']) \text{ is } V = (|p, q|^{(1)}, [n]).$$

Nu krijgen we: projectie vanuit Ψ' ($p \to p-1$ en $n' \to n'+1-p'$, verder bedenkend dat $n = p'-1$ en $q = pp'-n'-1$) is

$$V' = (|p-1, (p-1)p'-n'-1+p'-1|^{(1)}, [n])$$

en de projectie van Φ'' vanuit Ψ''

$$(p' \to p'-1, n' \to n'+1-p \text{ en } n = p'-1 \to n-1)$$

is dan

---

*) Zie Room, l.c. p. 60 e.v.

$$V'' = (|p, p(p'-1) - n' - 1 + p - 1|^{(1)}, [n-1]).$$

Dus: de variëteit $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ is aequivalent met

$$\begin{cases} V' = (|p-1, q-1|^{(1)}, [n]) \\ V'' = (|p, q-1|^{(1)}, [n-1]), \end{cases}$$

omdat nu immers geldt $q = pp' - n' - 1$.

De redenering geldt alleen voor $m = 1$, daar de splitsingen van Φ in $\Phi' = (|p-1, p'|_1^{(m)}, [n'+1-p'])$ en $\Phi'' = (|p, p'-1|_1^{(m)}, [n'+1-p])$ door stelling 15 niet gerechtvaardigd is. De stelling zou n.m.l. wel juist zijn voor $\Phi' = (|p-1, p'|_1^{(m)}, „[n'+1-p']")$ en

$$\Phi'' = (|p, p'-1|_1^{(m)}, „[n'+1-p]"). \text{*)}$$

§ 36 *De snijfiguur van $U = (|p, q|^{(m)}, [n+p-1])$ met een bijzondere $V_n^{(m^{p-1})}$ degenereert in V' en V''*

Ten slotte wordt de boven gevonden degeneratie nog van een ander standpunt bezien in de volgende stelling:

Stelling 17. *Snijding van de variëteit $U = (|p, q|^{(m)}, [n+p-1])$ door een algemeen gelegen $V_n^{(m^{p-1})}$ levert de variëteit*

$$V = (|p, q|^{(m)}, „[n]").$$

Er zijn onder die snijdingen van U met een $V_n^{(m^{p-1})}$ variëteiten die uiteenvallen in

$$V' = (|p, q-1|^{(m)}, „[n-1]") \text{ en}$$
$$V'' = (|p-1, q-1|^{(m)}, „[n]")$$

waarbij V'' door V' volgens een „prime"-doorsnede wordt gesneden.

Bewijs: Zijn $x_{\alpha\beta}$ m-de graadsvergelijkingen in de $[n+p-1]$, dan wordt U gegeven door de vergelijkingen $|x_{\alpha\beta}|_{p-1} = 0$.

Een bijzondere $V_n^{(m^{p-1})}$ kan worden gegeven door de vergelijkingen:

$$\frac{x_{11}}{\lambda_1} = \frac{x_{21}}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_{p1}}{\lambda_p}.$$

*) Ook mag de variëteit $(|p, p'|_1^{(m)}, [n'])$ niet opgevat worden als een bijzonder geval van de variëteit $(|p, p'|_1^{(m)}, „[n']")$, waarbij men dan de „$[n']$" 'n laat ontaarden, daar dan bij Φ b.v. de variëteiten $z_{\alpha\alpha'}$ niet onderling zoveel mogelijk onafh. gelegen zijn.

Dit zijn dus $p-1$ vergelijkingen van de m-de graad in de puntcoördn. van de werk-$[n+p-1]$.
De snijding van U met deze $V_n^{(m^{p-1})}$ wordt dus gegeven door de vergelijkingen:

$$||x_{\alpha\beta}||_{p-1} = 0 \text{ en } \frac{x_{11}}{\lambda_1} = \frac{x_{21}}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_{p1}}{\lambda_p}.$$

Deze m.p. door beide stelsels vergelijkingen voorgesteld, valt uiteen in een variëteit V′, geheel gelegen in de $V_{n-1}^{(m^p)}$ van de $V_n^{(m^{p-1})}$ met vergelijkingen $x_{11} = x_{21} = \ldots = x_{p1} = 0$ en een V″ die niet geheel in deze $V_{n-1}^{(m^p)}$ is gelegen.
V′ wordt bepaald door $||x_{\alpha\mu}||_{p-1} = 0 \begin{matrix} \alpha = 1, 2, \ldots p \\ \mu = 2, 3, \ldots q \end{matrix}$, is gelegen in $x_{11} = x_{21} = \ldots = x_{p1} = 0$, dus V′ = $(|p, q-1|^{(m)}$, „$[n-1]$”).
De vergelijkingen die V″ bepalen, luiden: $||\lambda_\alpha x_{\alpha\mu}||_{p-1} = 0$, d.i. een matrix p bij $q-1$ met als eerste rij λ's, $\alpha = 1, 2, \ldots p$; $\mu = 2, 3, \ldots q$, dus V″ heeft als symbool $(|p-1, q-1|^{(m)}$, „$[n]$”).
Het is duidelijk dat V′ en V″ een variëteit gemeen hebben, die de snijding is van V″ met de „prime” in de „$[n]$” van V″ met vergelijkingen $x_{\alpha 1} = 0$.
Dit resultaat levert voor $m = 1$ een ander bewijs voor stelling 16.

§ 37 *De graad van* $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$

Naar aanleiding van het ontaardingsverschijnsel komt men tot de vraag naar *de graad* van de besproken variëteiten, dus van $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$.
Hiervoor geldt de fundamentele eigenschap:
De graad van de variëteit die bepaald wordt doordat men alle determinanten van de orde $r+1$ in een matrix van p rijen en q kolommen, waarin elk element een m-de graadsvergelijking is in de puntcoördn. van de werkruimte *), *gelijk nul stelt, is :*

$$m^{(p-r)(q-r)} \binom{q}{r} \frac{\{p+q-r-1, p-r-1\}}{\{p-1, p-r-1\}\{p+q-2r-1, p-r-1\}} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

$$\text{waarbij } \{a, b\} \equiv \frac{((a))}{((b))\,((a-b))} \text{ en } ((a)) \equiv 1!\,2!\ldots a!$$

---

*) de dimensie n doet hier niets ter zake.

Dit is dus de graad N van de variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$ *).
Voor $m = 1$ vindt men voor de graad van de var. $(|p, q|_r^{(1)}, [n])$:

$$\binom{q}{r}\frac{\{p+q-r-1, p-r-1\}}{\{p-1, p-r-1\}\{p+q-2r-1, p-r-1\}}, \quad . . (24),$$

terwijl voor de veelvuldig voorkomende waarde van r, namelijk $r = p-1$ het resultaat luidt:

$$\binom{q}{r} \textit{ is de graad van } (|p, q|_{p-1}^{(1)}, [n]) = (|p, q|^{(1)}, [n]).$$

Deze laatste uitkomst is toe te passen op het resultaat van stelling 16, dat opnieuw als bijzonder geval van stelling 17 gevonden is. Inderdaad geldt dat de graad van V gelijk is aan de som van de graden van V′ en V″, immers:

$$N_V = \binom{q}{p-1},\ N_{V'} = \binom{q-1}{p-2} \text{ en } N_{V''} = \binom{q-1}{p-1}.$$

Volgens een bekende eigenschap uit de combinatieleer geldt inderdaad:

$$\binom{q}{p-1} = \binom{q-1}{p-2} + \binom{q-1}{p-1}.$$

De uitkomst (23) wordt zonder bewijs gegeven door Baker **) onder verwijzing naar een artikel van Segre ***), waarin deze laatste de aandacht wil vestigen op de formule, „die Schubert in 1890 gevonden en later als zeker uitgesproken heeft (zonder er het bewijs van te publiceren)".

O p m e r k i n g. Met behulp van bovenstaande formules kan de graad van een variëteit bepaald worden, zodra zo'n variëteit gegeven wordt door zijn symbool.
Zo hebben we in hoofdstuk I reeds gezien dat de vergelijkingen (5) een $K^{(3m^2)} = (|2, 3|_1^{(m)}, [3])$ voorstellen.
Inderdaad geeft de formule (23) die voor dit geval teruggebracht

---

*) Zie noot blz. 48.
**) Principles of geometry VI, p. 108—112.
***) C. Segre: Rend. Acc. Lincei 5/9, 1900_2, p. 253 ss.

wordt tot $N = m^{(p-r)(q-r)}\binom{q}{r}$ voor $p = 2$, $q = 3$ en $r = 1$ als resultaat $m^2\binom{3}{1} = 3m^2$. (In dit geval is $r = p - 1$ en dan zijn de accoladevormen steeds $= 0$).

§ 38 *Het bewijs van formule* (23) *voor het geval* $r = p - 1$ *en* $q = p + 1$

Door de volgende redenering kan men voor de variëteit $(|p, q|^{(1)}, [n])$ de grootheid N vinden en wel zoals blijken zal voor het geval $q - p = 1$ of $q = p + 1$. (Straks wordt $m \neq 1$ ondersteld.)

Zoals bekend, is de dimensie van $(|p, q|^{(1)}, [n])$ gelijk aan $n - q + p - 1$ (stelling 2).

Om de graad van deze variëteit in R_n te bepalen moeten we dus snijden met $n - (q - p + 1)$ lineair onafh. vergelijkingen van de eerste graad in de coördn. $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$.

De variëteit zelf wordt gegeven door een matrix p bij q, waarbij de elementen lineaire functies zijn in de puntcoördn.

De var. $(|p, q|^{(1)}, [n])$ wordt dus bepaald door $(q - p + 1)$ determinanten van de orde p gelijk nul gesteld, dus $(q - p + 1)$ vergelijkingen van de graad p in $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$.

Deze vergelijkingen hebben echter een variëteit gemeenschappelijk die correspondeert met een matrix p bij $p - 1$, dus $p - (p - 1) + 1 = 2$ vergelijkingen van de graad $p - 1$ die weer een matrix $p - 1$ bij $p - 2$, dus $p - 1 - (p - 2) + 1 = 2$ vergelijkingen van de $(p - 2)$-de graad gemeen hebben, enz., ... die een matrix $p - (p - 2)$ bij $p - (p - 1)$ gemeen hebben dus:

$q - p + 1$ vergelijkingen van de p-de graad; hiervan moeten worden afgescheiden:

2 vergelijkingen van de $(p - 1)$-de graad; toegevoegd moeten worden:

2 vergelijkingen van de $(p - 2)$-de graad; weer afgescheiden moeten worden:

2 vergelijkingen van de $(p - 3)$-de graad; enz.

.... toegevoegd of afgescheiden worden tenslotte

2 vergelijkingen van de eerste graad.

Op dit stelsel vergelijkingen met de $n - (q - p + 1)$ lineair onafh.

vergelijkingen van de eerste graad die voor de graadbepaling dienen, wordt het theorema van Bézout (Inleiding) toegepast.

Het aantal oplossingen der vergelijkingen, dus de gezochte graad zou dan worden:

$$p^{q-p+1} - (p-1)^2 + (p-2)^2 - (p-3)^2 + \ldots \pm 1^2.$$

Bedoeld is dat de getallen tussen de haken positief of gelijk nul zijn. Na de nul moet de formule worden afgebroken.

Bovenstaande redenering nu geldt alleen voor het geval $q - p = 1$, omdat we hier in het geval $q \neq p + 1$ werken met variëteiten van *verschillende dimensies*. Zo zijn we n.m.l. uitgegaan van een matrix p bij q, $r = p - 1$, dus (stelling 2) de dimensie van die variëteit is $n - q + p - 1$.

Daarna kwam er een matrix p bij $p - 1$ ter sprake, $r = p - 1$, dus de dimensie van deze variëteit is $n - p + (p - 1) - 1 = n - 2$. Van de verder volgende variëteiten zijn de dimensies alle wel $n - 2$ (n.m.l.:

$$n-(p-1)+(p-2)-1; n-(p-2)+(p-3)-1; \ldots; n-2+1-1)),$$

maar de dimensie van de variëteit waarvan we uit zijn gegaan is $n - q + p - 1$.

Zodra die dimensies verschillen mag bovenstaande redenering niet gebruikt worden. Dit blijkt duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Gevraagd de graad van de gemeenschappelijke meetk. plaats van twee $O^{(4)}$'n in R_3. Deze is zoals bekend $= 16$. Als m.p. krijgen we n.m.l. een $K^{(16)}$.

Nu dezelfde vraag als de beide $O^{(4)}$'n worden opgebouwd door twee $O^{(2)}$'n: A en B, resp. B en C. Beide $O^{(4)}$'n hebben m.a.w. een $O^{(2)}$: B gemeen.

De voorgaande redenering zou in dit geval als graad van de doorsnijdingskromme geven: 4×4 verminderd met de graad van de gemeenschappelijke meetk. plaats, dus $16 - 2 = 14$, terwijl de uitkomst 4 moet luiden.

In dit voorbeeld moet dan geredeneerd worden als volgt: De gevraagde graad van de doorsnijdingskromme is 4×4, verminderd met de graad van de doorsnijdingskromme van B en A (2×2), idem met die van B en C (2×2) en ten slotte nog met de graad van de doorsnijdingskromme van B met zich zelf (ook 2×2), welke laatste doorsnijdingskromme men als limiet van twee tot B naderende oppervlakken B' en B'' moet ontstaan denken!

Daar nu de dimensie van de oorspronkelijke variëteit $n - q + p - 1$ was en die van de andere ter sprake komende variëteiten $n - 2$, vervalt het genoemde bezwaar voor $q = p + 1$.
Zo hebben we hiermee langs directe weg, (Schubert gaat uit van een eigenschap die Segre aan het begin van het op blz. 49 genoemde artikel vermeldt), uitgaande van de definitie van de graad van een variëteit in R_n, bewezen:

Indien $q - p = 1$, is de graad van de variëteit $(|p, q|^{(1)}, [n])$ gelijk aan $p^2 - (p-1)^2 + (p-2)^2 - \ldots \pm 1^2$.

Beschouwen we dezelfde variëteit, waarbij nu de elementen van de hem bepalende matrix m-de graadsfuncties der puntcoördn. zijn, dan mag, daar hierdoor niets aan de dimensies der betreffende variëteiten veranderd wordt, ook hierop weer de stelling van Bézout worden toegepast voor het geval $q - p = 1$. De $(|p, q|^{(m)}, [n])$ wordt dus nu bepaald door $(q - p + 1)$ determinanten van de orde p gelijk nul gesteld; dit zijn even zoveel vergelijkingen van de graad mp in $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$. Hiervan moeten worden afgezonderd twee vergelijkingen van de graad $m(p-1)$, erbij komen twee vergelijkingen van de graad $m(p-2)$ enz.
Voor $q - p = 1$ wordt dus het aantal oplossingen, of de gezochte graad,

$$(mp)^{q-p+1} - \{m(p-1)\}^2 + \{m(p-2)\}^2 - \{m(p-3)\}^2 + \ldots \pm m^2.$$

of na eliminatie van q:

$$(mp)^2 - m^2(p-1)^2 + m^2(p-2)^2 - m^2(p-3)^2 + \ldots \pm m^2.$$

Thans is dus bewezen:

De graad van de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$ voor het geval $q - p = 1$, wordt gegeven door de formule:

$$m^2p^2 - m^2(p-1)^2 + m^2(p-2)^2 - \ldots \pm m^2.$$

Om te bewijzen dat dit resultaat voor het bijzondere geval $q - p = 1$, voor $(|p, q|^{(m)}, [n])$, in overeenstemming is met de form. (23), dient te worden bewezen dat $m^2p^2 - m^2(p-1)^2 + m^2(p-2)^2, \ldots \pm m^2$

gelijk is aan de uitkomst die (23) geeft voor $r = p - 1$ en $q - p = 1$. Deze laatste grootheid luidt:

$$m^{(p-p+1)\,(p+1-p+1)}\binom{p+1}{p-1} \times 1 = m^2 \times \tfrac{1}{2}p\,(p+1).$$

Dus moet nog aangetoond worden:

$$\tfrac{1}{2}p\,(p+1) = p^2 - (p-1)^2 + (p-2)^2 - \ldots \pm 1^2.$$

Dit doen we met volledige inductie:

$$\tfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1^2.$$
$$\tfrac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 = 2^2 - 1^2.$$
$$\tfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 = 3^2 - 2^2 + 1^2.$$

Stel dat de te bewijzen formule geldig is voor $p = n$ dus:

$$n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - \ldots \pm 1^2 = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Wij tonen aan dat dan de formule ook voor $p = n + 1$ juist is. De geldigheid van de formule is dan voor elke waarde van p bewezen.

Te bew.: $(n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 - \ldots \mp 1^2 = \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}$.

Bewijs:

$$(n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 - \ldots \pm 1^2 =$$
$$= (n+1)^2 - \{n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - \ldots \pm 1^2\} =$$
$$(n+1)^2 - \frac{n\,(n+1)}{2} = (n+1)\,\frac{2n+2-n}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

Dus geldt voor alle (gehele) waarden van p de gelijkheid:

$$\tfrac{1}{2}p\,(p+1) = p^2 - (p-1)^2 + (p-2)^2 - \ldots \pm 1^2.$$

Daar voor de variëteit $(|2, 3|_1^{(m)}, [3])$ gegeven door de vergelijkingen (5) aan de voorwaarde $q - p = 1$ wordt voldaan, mag bovenstaand resultaat hierop worden toegepast. Inderdaad vindt men $p = 2$ substituerend: $2^2m^2 - m^2 = 3m^2$, een resultaat, dat in hoofdstuk I zonder formule voor de graad gevonden werd en ook nog door de meest algemene formule (23) op blz. 48 en 49 werd bevestigd. Zo ook vinden we met de gevonden formule voor de sleutelvariëteit in R_2 (zie § 18), daar $p = 2$, $m = 2$, het getal 12, wat klopt, daar de var. uit 12 punten bestaat.

Na achtereenvolgens een formule voor N te hebben bepaald, waarbij werd uitgegaan van $(|p, q|^{(1)}, [n])$, daarna van $(|p, q|^{(m)}, [n])$, gaan we nu uit van de algemene variëteit $(|p, q|_r^{(m)}, [n])$.
Deze variëteit wordt bepaald door een matrix p bij q waarvan alle determinanten van de $(r+1)$-de orde gelijk nul zijn. De algemene stelling betreffende een hoofddeterminant, in de inleiding besproken, leert dat er $(p - r)(q - r)$ lineair onafh. vergelijkingen onder zijn. Daar de variëteit dus bepaald wordt door $(p - r)(q - r)$ determinanten van de $(r+1)$-de orde gelijk nul gesteld, moet de graadbepaling geschieden door middel van $n - (p - r)(q - r)$ lin. onafh. eerste graadsvergelijkingen in de puntcoördn. $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$.
Daar de elementen van de matrix p bij q, bij de variëteit behorend, m-de graadsfuncties in $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ zijn, gaan we dus nu uit van $(p - r)(q - r)$ vergelijkingen van de graad $m(r+1)$.
Op dezelfde wijze als in de beide voorafgaande gevallen blijkt dat hiervan moet worden afgescheiden:
een matrix r bij p, rang $(r - 1)$, dus $(p - r + 1)$ vergelijkingen van de graad (mr); moet worden toegevoegd
een matrix r bij $(r - 1)$, rang $(r - 2)$, dus $r - r + 1 + 1 = 2$ vergelijkingen van de graad $m(r - 1)$;
weer afgescheiden moeten worden: 2 vergelijkingen van de graad $m(r - 2)$ enz.
De graad van de variëteit zou dan worden:

$$\{m(r+1)\}^{(p-r)(q-r)} - (mr)^{p-r+1} + m^2(r-1)^2 - m^2(r-2)^2 + \ldots \pm m^2,$$

een formule die, zoals behoort voor $r = p - 1$ overgaat in de voor de variëteit $(|p, q|^{(m)}, [n])$ gevonden formule (blz. 52).
Om dezelfde reden als in de vorige gevallen, gaat de redenering alleen op voor het geval: $(p - r)(q - r) = 2$ en $p - r + 1 = 2$ of voor $r = p - 1$ en $q - p = 1$ dus juist de beide voorwaarden die het onderzoek beperken tot het gevonden resultaat voor de var. $(|p, q|_{r=p-1}^{(m)}, [n])$ waarbij $q - p = 1$.

Het resultaat van § 36 kan dus aldus worden omschreven:
Correcties vermijdend, die nodig zijn om het theorema van Bézout doorgang te doen vinden, vindt men een formule voor de variëteit

met maximale rang van de bijbehorende matrix terwijl bovendien geldt $q - p = 1$.

Door volledige inductie is aangetoond, dat het gevonden resultaat in overeenstemming is met de in de litteratuur opgegeven formule (23).

Het is echter de vraag of de boven gevolgde methode voor uitbreiding vatbaar is zodat het bewijs ook geldig is buiten de 2 beperkingen $r = p - 1$ en $q = p + 1$.

Zoals onmiddellijk duidelijk is, — ook uit de formule (23) is het direct te voorspellen —, wordt de te volgen redenering bij schrapping van elk der beide beperkingen veel ingewikkelder.

STELLINGEN

I

In het bewijs van de eigenschap dat de projectie van een variëteit $\Phi = (|p, p'|_1^{(1)}, [n'])$ vanuit een erop gelegen variëteit $\Psi = (|p-1, p'|_1^{(1)}, [n'-p'])$ de variëteit $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ is, waarbij geldt $q = pp' - n' - 1$, $n = p' - 1$ en $p \leqq q \leqq p + p' - 2$, wordt gebruik gemaakt van het feit dat de p' grootheden $z_{1\alpha'} = 0$ onderling lin. onafh. zijn.
Dit dient nader aangetoond te worden.

T. G. ROOM, The geometry of determinantal loci, Cambridge 1938, p. 48.

II

De samenhang tussen de cf. (16_6) van Kummer in R_3 en de uitbreiding hiervan: de cf. (64_{28}) in R_7, door middel van diagrammen, is nog beter in te zien door het door Barrau gegeven diagram van de cf. (16_6) te vervangen door een zo algemeen mogelijk schema.

J. A. BARRAU, Bijdragen tot de theorie der configuraties, academisch proefschrift, Amsterdam 1907, p. 71 en 96.

III

Bij het voorbereidend hoger onderwijs wordt in het algemeen onvoldoende de aandacht gevestigd op de wet: verdeling van de inhoud van een lichaam veroorzaakt vergroting van het relatieve oppervlak. Dit geschiedt ondanks het feit dat zeer veel toepassingen van deze wet te vinden zijn in de levende en levenloze natuur.

J. MIEDEMA

IV

Het quadraat van elk (geheel) getal, dat zelf de som is van zes quadraten, is op minstens vier manieren te schrijven als de som van vier quadraten. Dit geldt voorwaardelijk.

D. N. Lelyveld, Afbeelding van bewegingen om een punt in R_2, R_3 en R_4, diss. Utrecht 1943, p. 13.

V

Het quadraat van elk (geheel) getal, dat zelf de som is van acht quadraten, is op minstens acht manieren te schrijven als de som van vier quadraten. Dit geldt voorwaardelijk.

D. N. Lelyveld, Afbeelding van bewegingen om een punt in R_2, R_3 en R_4, diss. Utrecht 1943, p. 10.

VI

In veel moderne natuurkundeleerboeken wordt de peervormige ruimte van de max.- en min.thermometer van Six-Bellani beschreven als uitsluitend aether en verz. aetherdamp bevattend. Dit is onjuist.

VII

De transformatie $X = x$; $Y = \frac{x\,(c - x)}{y}$ zet een algebraïsche kromme $K^{(n)}$ om in een $K^{(2n)}$ waarvan n van zijn oneigenlijke punten richtingen aangeven loodrecht op de richtingen aangewezen door de oneigenlijke punten van de $K^{(n)}$. De overige n oneigenlijke punten van de $K^{(2n)}$ worden verzameld in het oneigenlijke punt van de Y-as.

VIII

Zijn $|a_{ij}|$ en $|b_{ij}|$ twee orthogonale determinanten van de n-de orde ($i = 1, 2, \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots n$), met beide dezelfde waarde $+ 1$ of $- 1$ dan zijn de determinanten

$$|\lambda_j a_{ij} + \mu_j b_{ij}| \equiv \varphi\,(\lambda, \mu) \text{ en } |\mu_j a_{ij} + \lambda_j a_{ij}| \equiv \varphi\,(\mu, \lambda)$$

identiek. Deze stelling van Siacci kan eenvoudiger worden bewezen, dan volgens de methode die Siacci volgt.

G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, p. 164 en 165.

IX

Aan de door von Brieszen en Steube voorgestelde vergelijking tussen radiolamp, photocel en photographische plaat, zijn bezwaren verbonden.

Zeitschrift für angewandte Photographie 2, 27, 1940.

X

De eigenschap: de variëteit $V = (|p, q|^{(1)}, [n])$ is aequivalent met $V' = (|p-1, q-1|^{(1)}, [n])$ en $V'' = (|p, q-1|^{(1)}, [n-1])$, is niet tot de variëteiten met dezelfde notatie en $m \neq 1$ uit te breiden door i.p.v. lineaire functies m-de graadsfuncties in de puntcoördn. $x_0, x_1, \ldots x_n$ te nemen.