Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Afbeelding van een lineairen stralencomplex op de punten der ruimte

https://hdl.handle.net/1874/283304

A 4° 192
1926

Afbeelding van een lineairen stralencomplex op de punten der ruimte

M. N. VAN DER BIJL

Diss.
Utrecht
1926

AFBEELDING VAN EEN LINEAIREN STRALEN-COMPLEX OP DE PUNTEN DER RUIMTE

Diss Utrecht 1926

AFBEELDING VAN EEN LINEAIREN STRALEN-COMPLEX OP DE PUNTEN DER RUIMTE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. J. PH. SUYLING, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 1 FEBR. 1926, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR, DOOR

MARTINUS NICOLAAS VAN DER BIJL,
GEBOREN TE SPRANG.

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

ELECTR. DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT

AAN MIJN VROUW

AAN MIJN VADER EN DE NAGEDACHTENIS
MIJNER MOEDER

Na het schrijven van dit proefschrift is het voor mij een behoefte mijn oprechten dank te brengen aan allen, die tot mijn opleiding hebben meegewerkt, vooral aan de Hoogleeraren en Lectoren van de Wis- en Natuurkundige Faculteit.

De tijd, dien ik als assistent van den Hooggeleerden Heer, wijlen Professor JULIUS in het Physisch Laboratorium heb doorgebracht, zal voor mij blijven een tot dankbaarheid stemmende herinnering aan den overledene.

Niet minder gevoel ik mij verplicht aan U, Hooggeleerde KAPTEIJN wegens Uwe duidelijke en degelijke lessen en wegens de groote voorkomendheid bij velerlei gelegenheid van U ondervonden.

Aan Uwe altijd boeiende colleges, Hooggeleerde ORNSTEIN, dank ik mijn liefde voor de natuurkunde; Uw nimmer vergeefs ingeroepen hulp en raad en niet minder Uw vriendschappelijke omgang hebben mij met hoogachting vervuld voor Uw persoon.

Hooggeleerde NIJLAND, ook U ben ik zeer erkentelijk voor Uwe zoo belangwekkende colleges, die ik steeds met het meeste genoegen heb bijgewoond.

Mag ik ten slotte in het bijzonder U, Hooggeleerde DE VRIES, hooggeachte Promotor mijn warmen dank en hoogachting aanbieden. Uw betoogtrant, even boeiend als helder en opgewekt, heeft op mij altijd den diepsten indruk gemaakt. Voor mijn vorming als leeraar zijn Uw lessen voor mij van onberekenbaar nut geweest. Bovendien ben ik U de grootste dankbaarheid verschuldigd voor de aanmoediging en hulp, die ik bij 't samenstellen van dit proefschrift zoo rijkelijk van U heb ondervonden.

INHOUD.

Bladz.

Inleiding 1

Hoofdstuk I. De afbeelding en hare singuliere figuren 5

Hoofdstuk II. Het beeld van een waaier uit L. . . 11

Hoofdstuk III. Het beeld van een puntenreeks . . 18

Hoofdstuk IV. Het beeld van een stralennet . . . 26

Hoofdstuk V. De beelden van de punten en figuren van een plat vlak 45

Hoofdstuk VI. De beelden van een regelschaar en eenige andere figuren 51

Hoofdstuk VII. Afbeeldingen van L, waarbij een waaier een kegelsnede oplevert 62

Stellingen 81

INLEIDING.

1. Een algemeene *lineaire stralencomplex* is een verzameling van ∞^3 rechte lijnen, die met een *willekeurigen* waaier *één* straal gemeen heeft. Hieruit vloeit voort, dat de complex door elk punt (*nulpunt*) één waaier zendt en, duaal hiertegenover, dat in elk vlak (*nulvlak*) één complexwaaier ligt. Deze heeft dus het nulpunt van zijn vlak tot top. Van groot belang is de eigenschap: alle complexstralen, die een rechte u snijden, rusten nog op een tweede rechte v, die u kruist; u en v heeten *toegevoegde richtlijnen* van den complex.

Voor 't bewijs heeft men slechts op te merken, dat elk punt P van de snijlijn v der nulvlakken van 2 punten P_1 en P_2 op u 2 stralen uitzendt, die u snijden nl. PP_1 en PP_2.

Er volgt onmiddellijk uit, dat het nulvlak van een punt om u (v) draait, als men het nulpunt over v (u) laat loopen. Legt men u in 't oneindige, dan levert dit op: de nulpunten van een parallelvlakkenbundel (as u) liggen op een rechte (v). Deze heet een *middellijn* van den complex.

Verder volgt uit de genoemde eigenschap: doorloopt u een waaier (P, μ), dan geldt 't zelfde voor v. De waaier (v) ligt in 't nulvlak π van P en heeft 't nulpunt van μ tot top; de waaiers hebben den straal (μ, π) gemeen.

Doorloopt u een ster, dan vormen de bijbehoorende lijnen v het stralenveld in het nulvlak van het m.p. der ster en omgekeerd. Neemt men voor dit nulvlak het oneindig verre vlak, dan blijkt, dat alle middellijnen

evenwijdig zijn. De vlakken, loodrecht op de middellijnen, hebben één dezer lijnen tot m.pl. der nulpunten: de *as* van den complex. Eindelijk nog:

is u complexstraal, dan wordt $v \equiv u$, omdat het nulvlak van elk punt op u door u gaat.

2. Door R. STURM is een afbeelding gevonden van den lineairen complex op de punten der ruimte. (*Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*; dl I blz. 257 en volg.) De inrichting der afbeelding komt, eenigszins gewijzigd, op het volgende neer.

Laat (U, α) een waaier van rechten u zijn, (V, β) de waaier van de toegevoegde richtlijnen v van den complex, zoodat UV complexstraal is. De bedoeling van STURM is nu de punten van de velden α en β zoodanig met de stralen van de sterren om 2 vaste punten A en B in projectief verband te brengen, dat aan de punten van 2 bijeenhoorende lijnen u en v toegevoegd worden 2 stralenbundels (A, γ) en (B, γ) in eenzelfde vlak γ (door $AB \equiv r$). Dit kan als volgt bereikt worden.

Zij X eenig punt in α. Trek $u \equiv UX$. Voeg hieraan volgens een $(1, 1)$ toe een straal p uit waaier (P, α), waarbij $P \equiv (r, \alpha)$. Uit een vast punt C_α in α wordt getrokken $C_\alpha X$ en uit 't snijpunt X_1 van deze met p een lijn x door A. Het vlak $\gamma \equiv (x, r)$ snijdt β volgens een straal q uit waaier (Q, β), als $Q \equiv (r, \beta)$. Voeg hieraan projectief toe de met u homologe lijn v. Aan een punt Y van v is nu een straal y uit (B, γ) te koppelen. Hiervoor wordt genomen de rechte door B uit het snijpunt Y_1 van q met $C_\beta Y$ (C_β is een vast punt in β).

Als X een willekeurig punt van een willekeurige rechte u is en analoog Y eenig punt van de toegevoegde lijn v, doorloopt $s \equiv XY$ den geheelen complex. Aan s wordt nu als beeld toegevoegd $S \equiv (x, y)$. Omgekeerd kan men den beeldstraal s van een punt S vinden door

aan te brengen het vlak $\gamma \equiv (r, S)$ en daarin te trekken $x \equiv SA$ en $y \equiv SB$; vervolgens heeft men x te snijden met $p \equiv (\gamma, \alpha)$ en y met $q \equiv (\gamma, \beta)$. Dit geeft X_1 en Y_1. Dan moeten nog getrokken worden de met p en q homologe stralen u en v, waarop X en Y gevonden worden als snijpunten resp. met $C_\alpha X_1$ en $C_\beta Y_1$. Eindelijk is $s \equiv XY$.

Voor 't overzicht diene, dat bij deze wijze van afbeelden gebruik gemaakt wordt van:

$$(u)\ \pi(p)\ \pi(\gamma)\ \pi(q)\ \pi(v).$$

Alleen de eerste verwantschap $(u)\,\pi\,(p)$ kan willekeurig ingericht worden; de andere volgen uit de ligging of uit den complex.

3. Een complexstraal s, die UV snijdt in N geeft $X \equiv Y \equiv N$ en $u \equiv v \equiv UV$. Overigens verloopt de afbeelding van s gewoon en leidt tot een punt S, dat echter evengoed als beeld gevonden wordt bij elken anderen straal door N. Zoo'n punt, dat aan oneindig veel stralen als beeld is toegevoegd, heet *uitzonderingspunt* of *singulier punt* der afbeelding.

Voor de verschillende waaiertoppen N van UV keeren dezelfde lijnen p en q telkens terug, dus ook γ. In dit vlak behooren bij elk punt N één lijn x en één lijn y. Er ontstaat dus als voortbrengsel van de projectieve waaiers (x) en (y) een kegelsnede σ^2, die een m.pl. is van singuliere punten; σ^2 gaat door A en B en door (p, q).

Tegenover een singulier punt staat een *singuliere straal*: deze heeft oneindig veel punten tot beeld. Een voorbeeld hiervan is UV. Daar deze rechte thuis hoort in alle waaiers N, zooeven bedoeld, wordt ze afgebeeld in alle punten van σ^2.

Denk een' willekeurigen complexwaaier. Elk paar homologe rechten u, v wordt door één straal uit den waaier gesneden, dus elk vlak γ bevat één punt van de m.pl. der punten S, die den waaier afbeelden. Hieruit

volgt: het beeld van een' willekeurigen waaier is een rechte l. Ze steunt op σ^2, omdat één straal van den waaier UV snijdt.

Beschouw nog een regelschaar R^2 uit den complex, Een willekeurige rechte u (en dus ook v) uit (U, α) snijdt 2 beschrijvenden s van R^2, die tot den complex behooren. De m.pl. der beelden S snijdt dus elk vlak γ in 2 punten, is m. a. w. een kegelsnede, die σ^2 tweemaal snijdt, omdat 't gezegde omtrent u in 't bijzonder ook voor UV geldt.

Zoo kan men vragen naar het beeld van een stralennet (bilineaire congruentie) uit den complex, naar het regelvlak, dat de punten van een rechte afbeeldt, naar de congruentie, die als beeld behoort bij een puntenveld, enz.

4. Een eenvoudiger afbeelding van den lineairen complex werd mij door professor Jan de Vries aan de hand gedaan. Ze wordt in het volgende onderzocht. In tegenstelling met de afbeelding van Sturm bevat elke straal zijn beeldpunt. Dit heeft belangrijke gevolgen. Andere afbeeldingen van den lineairen complex zijn door Jan de Vries beschreven in de *Verslagen* der K. A. V. W. deel XXXIV bl. 5 bl. 322.

Een afbeelding van de stralen van een specialen lineairen complex op de punten der ruimte (van Dr. G. Schaake) vindt men in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel XIV, 4de stuk, 1924.

HOOFDSTUK I.

De afbeelding en hare singuliere figuren.

1. *De inrichting der afbeelding.*

Denk een algemeenen lineairen complex L. Zij F een *vast*, S een willekeurig punt, π het poolvlak van S t. o. v. een gegeven quadratisch oppervlak ϕ^2, ν het nulvlak van S en P de pool van ν t. o. v. ϕ^2. $FS \equiv t$ snijdt π in D. De aan $p \equiv PD$ toegevoegde poollijn s ligt in ν, want dit is het poolvlak van P en gaat door S, want dit is de pool van π. Dus behoort s tot L. Voeg S als beeld toe aan s.

Omgekeerd kan men bij elken straal s het correspondeerende punt S vinden door dien straal te snijden met de transversaal t uit F over s en p.

Zoo wordt tusschen de stralen van L en de punten der ruimte een verwantschap (1,1) vastgelegd.

2. *Raaklijn-complexstralen.*

Zij S een willekeurig punt van ϕ^2. De doorsnede $s \equiv (\nu, \sigma)$ van het nulvlak ν van S en het raakvlak σ in S aan ϕ^2 is de eenige raaklijn in S, die tot L behoort. De toegevoegde poollijn p van s is de toegevoegde raaklijn. De transversaal t snijdt s in het raakpunt. Dus: *L stuurt door elk punt van ϕ^2 één raaklijn en deze wordt afgebeeld in het raakpunt.*

In het zeer bijzondere geval $\sigma \equiv \nu$, is ook $\pi \equiv \nu$. Bij elke s behoort een toegevoegde raaklijn p. En t geeft telkens 't raakpunt S als beeld. Behalve dat S singulier punt zou zijn, zouden er in den waaier om S twee

singuliere stralen liggen: de coïncidenties der involutie (s, p). Hierbij toch kan voor t elke rechte uit waaier (F, s) genomen worden en voor S elk punt der bedoelde coïncidentiestralen. Ze zijn alleen reëel, als Φ^2 een regelvlak is. Nog meer bijzonder is de toestand, als $\sigma \equiv \nu$ door F gaat. Dan bestaat (S, σ) uit louter singuliere stralen. Zie van deze bijzondere gevallen verder af.

3. *Het regelvlak* R_s^4.

Beschouw de complexstraal-raaklijnen s in de punten X van a^2, de doorsnede van Φ^2 met het poolvlak α van F. Het raakvlak $\sigma \equiv (s, p)$ in X bevat F, waardoor t onbepaald wordt: elke lijn uit (F, σ) is er voor te nemen en bijgevolg elk punt S op s als beeld van s. *Alle hier bedoelde raaklijnen zijn dus singuliere stralen.* Zij vormen een regelvlak van den vierden graad, R_s^4.

Als volgt blijkt nl., dat een willekeurige, op a^2 steunende, rechte u door 4 beschrijvenden gesneden wordt.

De gezochte beschrijvenden behooren tot L, moeten dus ook de toegevoegde richtlijn v snijden.

Het regelvlak, dat u, v en a^2 tot richtlijnen heeft, is van den derden graad, omdat 't vlak (X, v) afvalt, en snijdt den kegel (F, a^2) volgens een figuur van den zesden graad, bestaande uit a^2 en een vierdegraads-ruimtekromme ρ^4. Elke beschrijvende b van het cubisch regelvlak steunt nu in een punt B op a^2 en snijdt (F, a^2) nog in een tweede punt B', dat tot ρ^4 behoort. Als $B \equiv B'$, wordt b raaklijn aan (F, a^2) in een punt van a^2, dus ook aan Φ^2. Daar b bovendien tot L behoort, is b in dat geval singuliere straal. Dit nu komt 4 maal voor, omdat ρ^4 4 punten met a^2 gemeen heeft.

In overeenstemming hiermee is de doorsnee (R_s^4, α) een figuur van den vierden graad: ze bestaat uit a^2 en uit de beide raaklijnen aan a^2, die tot den complex-waaier (A, α) behooren.

4. *De dubbelkromme* δ_s^3 *van* R_s^4.

Een vlak ν door een beschrijvende s van R_s^4 snijdt dit oppervlak volgens s en volgens een derdegraadskromme r^3. Eén van de 3 punten (s, r^3) is 't raakpunt van ν; de 2 andere behooren tot de dubbelkromme δ van R_s^4. Op s rusten dus nog 2 andere beschrijvenden s_1 en s_2, die koorden van δ zijn. Het vlak (s, s_1) blijkt zoodoende in 3 punten door δ gesneden te worden (meer punten zijn niet mogelijk bij de δ van een vierdegraadsoppervlak). De dubbelkromme is dus van den derden graad: δ_s^3. *Zij is een m.pl. van singuliere punten.* Immers elk punt Y op δ_s^3 is beeld van de 2 singuliere stralen, die er van uitgaan, dus van den geheelen waaier om Y.

De dubbelkromme gaat door A (zie 3) en door F, omdat het nulvlak van dit punt (F, a^2) volgens 2 ribben snijdt, die tot R_s^4 behooren. Tot een nadere bijzonderheid leidt de volgende beschouwing.

Uit elk punt S op een beschrijvende s is nog een tweede raaklijn r te trekken aan φ^2 met raakpunt M op a^2. Bij iedere ligging van S behoort een nulvlak (door s) en dit snijdt op a^2 een tweede punt N in. Bij de coïncidenties $M \equiv N$ van de collocale projectieve puntenreeksen (M) en (N) op a^2 behooren de punten S_1 en S_2, waarin s op δ_s^3 steunt, want de lijnen r uit deze punten zijn complexstraal-raaklijnen met raakpunten op a^2, dus beschrijvenden van R_s^4.

Neem voor s een van de 2 singuliere stralen door F. Van de puntenparen (M, N) ligt dan steeds het eene, nl. M, in 't punt X, waar s op a^2 steunt. Dit punt X is dus dubbele coïncidentie. Als $N \equiv X$, is het raakvlak in X aan Φ^2 (dit raakt den omhullingskegel uit F aan volgens s) nulvlak. En het hierbij behoorende nulpunt S geeft als singulieren straal, die in dit punt op s rust de lijn s zelf. Neemt men S in F, dan wordt r onbepaald, maar wij weten, dat in F de andere singuliere straal op s steunt.

Iets dergelijks doet zich voor, als men voor s neemt een van de 2 raaklijnen uit A aan a^2 (raakpunten: A_1 en A_2). 't Punt M loopt over a^2, maar N is nu telkens 't zelfde punt, nl. $X \equiv A_1$. M valt in X, dus in N, als $S \equiv X$, d. i. als men het nulpunt neemt in 't raakpunt. De singuliere straal, die hier op s steunt, is $SM \equiv s$ zelf. Neemt men S in A, dan wordt α nulvlak en M dus onbepaald, maar we weten, dat in A op s steunt de andere raaklijn AA_2.

Uit 't voorgaande volgt, dat langs de raaklijnen uit A aan a^2 twee singuliere stralen zijn samengevallen; evenzoo langs de singuliere stralen uit F. Deze 4 lijnen zijn *torsale* rechten van R_s^4; de bijbehoorende *klempunten* zijn A_1, A_2, en de nulpunten (B_1 en B_2) van de raakvlakken aan den omhullingskegel uit F volgens de singuliere stralen door dit punt.

Natuurlijk gaat δ_s^3 door de 4 klempunten. Terwijl het nulvlak van een willekeurig punt van δ_s^3 met R_s^4 een doorsnede geeft, die o. a. bestaat uit de beide singuliere stralen door dat punt, zijn de nulvlakken van de klempunten torsale raakvlakken.

5. *De singuliere punten en stralen in* α.

Zij S een punt van α met nulvlak ν. 't Poolvlak π van S gaat door F. Hierin ligt P, de pool van ν. De lijn FS snijdt π in $D \equiv F$, waardoor $p \equiv FP$ wordt. De toegevoegde poollijn s ligt in ν, maar ook in α, omdat p gaat door F, d. i. de pool van α. Derhalve is $s \equiv (\nu, \alpha)$. In woorden:

elk punt van het poolvlak van F heeft tot beeld den complexstraal door dat punt, die tot den complexwaaier van dat vlak behoort.

Een ander punt S_1 van $s \equiv SA$ heeft evenzeer den straal s tot beeld. Hieruit volgt onmiddellijk:

de waaier (A, α) *bestaat uit louter singuliere stralen.*

Beschouw in het bijzonder een punt S op $a^2 \equiv (\Phi^2, \alpha)$.

Omdat S in α' ligt, is S het beeld van SA en omdat S op Φ^2 ligt, is S ook het beeld van een zekere raaklijn in S aan Φ^2. Dan is S toegevoegd aan den geheelen waaier om dat punt. Dus:

alle punten der doorsnede van Φ^2 met het poolvlak van F zijn singuliere punten.

De onbepaaldheid van den beeldstraal ontstaat hier doordat de transversaal FS in $\pi \equiv \sigma$ valt; $\sigma \equiv$ 't raakvlak in S aan Φ^2. Daardoor toch ontstaat er geen bepaald snijpunt D van FS met π, dus ook geen bepaalde rechte $p \equiv PD$.

6. *De m.pl. der singuliere punten en stralen.*

Er zijn geen andere singuliere punten en stralen dan die in 't voorgaande zijn gevonden.

Bewijs. Bij het zoeken van een beeldpunt S zijn s en p altijd ondubbelzinnig bepaald. De onbepaaldheid van S (waardoor s singuliere straal wordt) kan dus alleen ontstaan doordat er geen bepaalde lijn t gevonden wordt òf doordat t langs s valt. De transversaal t nu is onbepaald:

1°. als F, p en s in één plat vlak liggen. Dat vlak is raakvlak aan Φ^2 en wel een raakvlak door F, dus in een punt $X \equiv (p, s)$ op a^2. Hieruit volgen de singuliere stralen, die de beschrijvenden zijn van R_s^4.

2°. als p door F gaat. Dit is 't geval, als s ligt in 't poolvlak van F. Dit levert den waaier (A, α) op.

3°. als s door F gaat. In 't algemeen leidt dit niet tot onbepaaldheid van 't beeldpunt, behalve

4°. als t langs s valt. Hiervoor is niet alleen noodig, dat F op s ligt, maar ook dat s door p gesneden wordt, dus 't samengaan van 1° en 3°. Hieraan beantwoorden de 2 beschrijvenden van R_s^4 door F.

Al deze singuliere stralen zijn echter in het voorgaande aangewezen.

Onderstel nu, dat een punt S met nulvlak ν, buiten

$a^2 + \delta_s^3$ gelegen, singulier punt is. De lijnen, die S verbinden met de 5 snijpunten $(\nu, a^2 + \delta_s^3)$ zijn dan singuliere stralen, omdat ze o. a. als beeld behooren bij 2 singuliere punten. Onder deze verbindingslijnen zijn er echter minstens 2 (nl. als men S op $R_s^4 + \alpha$ kiest), die niet tot $R_s^4 + \alpha$ behooren. Dit is een ongerijmdheid. Er zijn dus geen singuliere punten buiten $a^2 + \delta_s^3$.

Men kan opmerken, dat elke singuliere straal 3 singuliere punten bevat en dat door elk singulier punt 2 singuliere stralen gaan (door A een geheele waaier). En het gevondene is derhalve aldus in woorden te brengen:

de m.pl. der singuliere stralen is de vijfdegraadsfiguur $R_s^4 + (A, \alpha)$ *met een vijfdegraadsdubbelkromme* $a^2 + \delta_s^3$ *als m.pl. der singuliere punten.*

Van de singuliere figuren keert a^2 telkens terug, welke complex ook op de hier beschouwde wijze wordt afgebeeld, omdat a^2 alleen afhangt van de ligging van F en Φ^2; de rest hangt bovendien van den complex af.

HOOFDSTUK II.

Het beeld van een waaier uit L.

1. *'t Beeld is een kegelsnede.*

Daar elke straal van den waaier zijn eigen beeld bevat, zal de m.pl. der beeldpunten een kromme zijn in 't vlak van den waaier. De m.pl. heeft het nulpunt S van 't vlak tot gewoon punt, want één der stralen wordt afgebeeld in S. Een willekeurige lijn door S zal de m.pl. in nog slechts één punt kunnen snijden, nl. in 't beeldpunt van dien straal.

De kromme wordt dus door een willekeurige rechte in 2 punten gesneden: ze is een kegelsnede k^2 door S.

Deze kegelsnede kan men als voortbrengsel zien ontstaan van 2 projectieve stralenbundels, als volgt:

Zij ν het nulvlak van S. Laat men s den waaier (S, ν) doorloopen, dan doorloopt de toegevoegde poollijn p den waaier (P, π), waarbij P weer is de pool van ν en π 't poolvlak van S. De transversalen t_k uit F over twee correspondeerende stralen s_k en p_k uit deze waaiers worden gevonden als doorsneden van de vlakken (F, s_k) en (F, p_k). De vlakken (F, s_k) vormen een bundel door $FS \equiv t$ en de vlakken (F, p_k) vormen een bundel met $FP \equiv q$ tot as. En deze 2 vlakkenbundels zijn projectief, omdat $s_k \pi p_k$.

Daar de assen elkaar snijden in F, brengen de projectieve bundels een quadratischen kegel voort. Hij snijdt op ν de kromme k^2 uit, omdat zijn beschrijvenden de transversalen t_k zijn. Insgelijks wordt op π de m.pl. der punten D ingesneden, die dus ook een kegelsnede

l^2 is. De kromme k^2 ontstaat nu ook als voortbrengsel van 2 projectieve waaiers. De vlakkenbundels (t) en (q) snijden nl. op ν de waaiers (S) en (Q) in, die projectief verwant zijn. Een punt S_k op k^2 ontstaat door een straal s_k te snijden met s_k^*, d.i. de doorsnede van ν en (F, p_k). Op analoge manier ontstaat 'n punt D_k van l^2 door de snijding van p_k en p_k^*, d.i. de doorsnede van π en (F, s_k). De rechten s_k en p_k^* snijden elkander in A_k op $d \equiv (\nu, \pi)$; evenzoo s_k^* en p_k in B_k op d. A_k en B_k vormen twee collocale projectieve puntenreeksen.

Er zijn daarbij 2 coïncidenties C_1 en C_2. Hierin vallen telkens 4 punten: A, B, S en D samen; l^2 en k^2 hebben dus $C_1\,C_2$ tot gemeenschappelijke koorde. In C_1 snijden twee toegevoegde poollijnen s_1 en p_1 elkaar: (s_1, p_1) is dus raakvlak aan Φ^2 in C_1; s_1 is een van de 2 raaklijnen uit S in ν aan Φ^2. Dat k^2 door 't raakpunt zou gaan, was te voorzien, want een raaklijn aan Φ^2, die tevens tot L behoort, wordt in 't raakpunt afgebeeld.

Bij $s^* \equiv QS$ uit waaier (Q) behoort in waaier (S) de raaklijn s aan k^2 in den waaiertop; ze is 't beeld van S. De top $Q \equiv (q, \nu)$ ligt ook op k^2. De raaklijn in Q aan k^2 is de straal uit waaier (Q), die correspondeert met SQ uit (S). Genoemde raaklijn wordt op ν ingesneden door 't vlak (F, x), als x de aan SQ toegevoegde poollijn is. Overeenkomstige opmerkingen gelden voor l^2.

Vallen de coïncidenties C_1 en C_2 samen, dan is d raaklijn aan Φ^2; ν wordt raakvlak in $C_1 \equiv C_2$ aan Φ^2 en de pool P, dus ook Q, valt in C_1.

De kegelsneden k^2 en l^2 raken elkaar en Φ^2 in C_1 aan. Deze eigenaardigheid vertoonen k^2 en l^2 ook, als men uitgaat van een waaier, behoorend bij een punt S van Φ^2.

Het is nog van belang, op te merken, dat k^2 steeds gaat door de 5 punten $Z \equiv (\nu, a^2 + \delta_s^3)$, omdat de (singuliere) punten Z o. a. de beelden zijn van de stralen SZ uit den beschouwden waaier.

2. *Geval, waarin k^2 ontaardt.*

Bij toepassing van het voorgaande op den waaier in een willekeurig vlak ν door F met nulpunt S vindt men als beeld een kegelsnede k^2 door F en door S. De quadratische kegel van zooeven valt uiteen in 't vlakkenpaar $(F, d) + (F, p_2)$, waarbij p_2 de aan $s_2 \equiv SF$ toegevoegde poollijn is; l^2 wordt een lijnenpaar: $d + p_2$.

De kromme k^2 ontaardt niet, omdat in ν weer 2 gewone projectieve waaiers voorhanden zijn, die k^2 voortbrengen, nl. de waaiers (S) en $(Q) \equiv (F)$. Als echter in deze projectiviteit de verbindingslijn SQ aan zich zelf is toegevoegd, treedt ontaarding op. Dit gebeurt, als p_2 door $D \equiv (t, \pi)$ gaat; $t \equiv FS$ is dezelfde lijn als $s_2 \equiv SF$, maar in tegengestelde richting getrokken. Maar dan zijn s_2 en p_2 snijdende lijnen, dus toegevoegde raaklijnen aan Φ^2 en ν is een vlak door een van de 2 complexstralen door F, die tevens raaklijn zijn. Men kan ook zeggen: het nulpunt S is op zoo'n complexstraal gekozen. De ontaarding was te voorzien, want in ν ligt dan een singuliere straal, die toegevoegd is aan al z'n punten. Die straal behoort tot de m.pl. van het beeldpunt en wordt door een tweede rechte aangevuld tot een figuur van den tweeden graad. Als ν door a^2 voor de tweede maal gesneden wordt in S_3, terwijl de tweede raaklijn in ν uit S aan Φ^2 haar raakpunt heeft in S_4 (de andere raaklijn is s_2 en deze bevat 't andere snijpunt van ν met a^2), dan is $S_3 S_4$ de aanvullende rechte. Want de raaklijn $s_4 \equiv SS_4$ heeft haar beeld in 't raakpunt S_4 en S_3 (op a^2) is o. a. toegevoegd aan $s_3 \equiv SS_3$.

Is ν het nulvlak van F, dan bevat de waaier 2 singuliere stralen, nl. de beide raaklijnen uit F in ν aan Φ^2. De m.pl. k^2 ontaardt dus in dit lijnenpaar. Al de andere stralen uit den waaier hebben hun beelden in F.

3. *De ontaarding van k^2 in 't algemeen.*

Het voorgaande is een bijzonder geval. Elk punt van elken singulieren straal geeft een nulvlak, waarin k^2 ontaardt. Immers: in den complexwaaier, behoorend bij zoo'n punt, komt ook die singuliere straal voor en deze wordt afgebeeld in al zijn punten.

Hieraan voldoen alle punten van $R_s^4 + \alpha$. Neemt men 't nulpunt op $a^2 + \delta_s^3$, dan wordt de waaier afgebeeld in de 2 uitzonderingsstralen door dat punt. Nadere uitwerking leidt tot een paar bijzonderheden.

a. S op a^2. De straal SA is toegevoegd aan al zijn punten; eveneens de straal $s \equiv (\nu, \pi) \equiv (\nu, \sigma)$, als σ is 't raakvlak in S aan Φ^2. Ook de kegelsnede l^2 is ontaard, nl. in $FS + PS$.

b. S in α. Voor SA geldt 't zelfde als onder a. Zij s_k weer een willekeurige straal uit waaier (S), p_k de toegevoegde poollijn. De transversaal uit $F \equiv D$ (in π) over s_k en p_k snijdt s_k in het beeldpunt S_k en dit ligt telkens op (ν, π). Deze lijn vormt met SA het lijnenpaar, dat als beeld optreedt van waaier (S).

Is S in 't bijzonder het nulpunt A van α, dan is elke complexstraal uit den waaier (S) toegevoegd aan al zijn punten. *Deze waaier wordt dus afgebeeld in het puntenveld van α.* Iets dergelijks doet zich ook voor, als een raakvlak door F aan Φ^2 zijn nulpunt zou hebben in 't raakpunt.

Heeft 'n willekeurig raakvlak aan Φ^2 zijn raakpunt tot nulpunt, dan is dit punt de afbeelding van den geheelen waaier in dat raakvlak. Immers de singuliere stralen van dien waaier zijn in 't algemeen onbestaanbaar.

c. S op R_s^4. Laat de beschrijvende s door S in X op a^2 steunen. Het poolvlak π gaat door de aan s toegevoegde raaklijn p; (p, s) is 't raakvlak in X aan Φ^2; hierin ligt F. De straal s wordt in al zijn punten afgebeeld. Bij een willekeurige p_k behoort een complexstraal s_k en hierop vindt men op de gewone manier het

beeld S_k. De punten S_k liggen alle op de rechte $S_3 S_4$ geheel overeenkomend met de gelijknamige uit 2.

Zij in 't bijzonder S het nulpunt van 't raakvlak aan Φ^2 in X. De pool P van ν valt in 't raakpunt X; π bevat de raaklijn p, die toegevoegd is aan $s \equiv SX$, dus π gaat door X en $p \equiv (\nu, \pi)$; F ligt in ν. De singuliere straal s is toegevoegd aan al zijn punten; de aanvullende rechte gaat door F, want straal SF heeft in F zijn beeld. Die rechte is FP. Immers bij een willekeurige p_k en s_k behoort een transversaal t_k, die steeds langs FP valt. Hierop liggen dus de punten S_k.

Neemt men voor X een der punten, waar de singuliere stralen door F op a^2 steunen (of voor S een der klempunten B_1 en B_2), dan zijn alle stralen toegevoegd aan 't uitzonderingspunt S; SX blijft toegevoegd aan al zijn punten en de aanvullende rechte FP valt samen met SX, omdat F op SX ligt en omdat $P \equiv X$. Nu is k^2 dus ontaard in een *dubbelrechte*.

Dit is in overeenstemming met hetgeen vroeger omtrent de singuliere stralen door F gevonden is, nl. dat ze dubbel te tellen zijn.

d. Iets dergelijks doet zich voor, als men S neemt in de klempunten A_1 of A_2. De beide singuliere stralen door A_1 (of A_2), die 't lijnenpaar moeten opleveren, waarin k^2 ontaardt, zijn samengevallen. Meer uitvoerig ziet men de dubbelrechte zóó ontstaan:

Zoowel het nulvlak ν als het poolvlak π ($\equiv$ raakvlak in S) van S gaat door SA. Het snijpunt D van FS en π wordt onbepaald. PD is eenige straal uit waaier (P, π), zeg p_k, waaraan toegevoegd is s_k, eenige straal uit (S, ν). Dit stempelt S tot uitzonderingspunt. Evenals onder a (waar S een willekeurig punt van a^2 is) wordt SA in al zijn punten afgebeeld, maar de aanvullende rechte (ν, π) uit a valt hier met SA samen.

4. *Meetkundige plaatsen.*

Als 't voortbrengsel van de projectieve waaiers (S) en (Q) uit 1 ontaardt, is de verbindingslijn SQ der toppen aan zichzelf toegevoegd. Dit brengt met zich, dat het aan den complexstraal SQ toegevoegde beeldpunt onbepaald wordt, m. a. w. dat SQ een singuliere straal is. Voor ontaarding van k^2 is 't dus niet alleen voldoende, maar ook noodig, dat S op zoo'n straal gekozen wordt. Derhalve:

$R_s^4 + \alpha$ is de m.pl. der punten in wier nulvlak k^2 ontaardt in een lijnenpaar.

Behalve volgens de uitkomsten van 3 is de aanvullende rechte, d. i. het niet-singuliere bestanddeel eener ontaarde k^2 altijd ook gemakkelijk te bepalen met de punten $(\nu, a^2 + \delta_s^3)$. 't Is nl. steeds de verbindingslijn van dat tweetal dezer punten, dat niet ligt op den uitzonderingsstraal, waarop S gekozen is. Ligt S op R_s^4, dan is de aanvullende rechte enkelvoudige snijlijn van a^2 en δ_s^3; ligt S in α, dan is ze koorde van δ_s^3. Omgekeerd kan *elke* rechte, die unisecante van δ_s^3 en a^2 of bisecante van δ_s^3 is, optreden als deel van een ontaarde k^2.

Bewijs: Zij X een punt van a^2, Y een punt van δ_s^3. XY snijdt R_s^4 nog in een vierde punt Z. De singuliere straal s door dit punt bepaalt met XY een nulvlak, waarin een complexwaaier ligt, die afgebeeld wordt in $s + XY$. — Zij in de tweede plaats Y' een tweede punt op δ_s^3, dan bevat 't vlak ν door YY' en A een waaier, die tot beeld heeft $(\nu, \alpha) + YY'$.

In een willekeurig vlak V liggen er wegens de $2 + 3$ snijpunten met $a^2 + \delta_s^3$ 6 rechten van de soort XY en 3 van de soort YY'. Door een willekeurig punt O gaat 1 koorde van δ_s^3; verder hebben de kegels (O, a^2) en (O, δ_s^3) 6 ribben gemeen, waarvan er echter 2, nl. OA_1 en OA_2, niet in verschillende punten op a^2 en δ_s^3 steunen. Uit een en ander volgt:

de m.pl. der niet-singuliere bestanddeelen van ontaarde kegelsneden k^2 is een congruentie [5,9].

Ze is op te bouwen uit kegels van den derden graad met toppen op a^2 en paren van quadratische kegels met toppen op δ_s^3.

HOOFDSTUK III.

Het beeld van een puntenreeks.

1. *'t Beeld is een cubisch regelvlak.*

Laat een vlak ν om de rechte (puntenreeks) u draaien. Het nulpunt S loopt dan over de toegevoegde richtlijn v van L. De beeldkegelsnede k^2 van den waaier in ν snijdt u in S_1 en S_2; en de beelden s_1 en s_2 van deze punten zijn beschrijvenden van 't gevraagde regelvlak R. Blijkbaar zendt elk punt S van v twee beschrijvenden uit, is dus dubbele richtlijn van R. Neemt men een punt S_1 aan op u, dan gaat 't nulvlak van dat punt door v en de complexwaaier van dat vlak heeft één straal, nl. s_1, die z'n beeld heeft op u (in S_1). Dus: R heeft u tot enkelvoudige richtlijn. Daar de volledige doorsnede (R, ν) de derdegraadsfiguur $u + s_1 + s_2$ is, vinden we een cubisch regelvlak $R \equiv R_u^3$ als beeld der punten van u. In overeenstemming hiermee bevat een vlak door v slechts één lijn s, want v moet tweemaal geteld worden.

De punten S_1 en S_2 vormen de paren eener quadratische involutie op u. Deze paren zijn telkens toegevoegd aan één punt S op v. Bij een coïncidentie van de involutie is $S_1 \equiv S_2$, dus $s_1 \equiv s_2$. Het punt S zendt dan 2 samenvallende beschrijvenden uit. Dit zijn de *torsale* rechten van R_u^3 en de beide punten S zijn *klempunten*; de nulvlakken van deze punten zijn de bijbehoorende torsale raakvlakken.

De rechte u snijdt Φ^2 in 2 punten Z_1 en Z_2. Bij Z_1 behoort als beeld een raaklijn z_1 aan Φ^2; zij is de door-

snede van het nulvlak met het raakvlak van Z_1. Dit is tevens raakvlak aan 't oppervlak R_u^3, dus R_u^3 wordt aangeraakt door de raakvlakken aan Φ^2 in de punten (u, Φ^2). Bij $Z_3 \equiv (u, \alpha)$ behoort $z_3 \equiv Z_3 A$ als beeld, dus ook α is raakvlak aan R_u^3. Behalve z_3 zijn onder de beschrijvenden van R_u^3 nog 4 singuliere stralen. Deze behooren tot R_s^4; 't zijn de beelden van de punten (R_s^4, u).

De regelvlakken R_u^3 en R_v^3, die bij u en v behooren, hebben een doorsnede van graad 9, die zoover mogelijk ontaard is, want ze bestaat uit u en v, elk tweemaal geteld en uit de 5 singuliere stralen, zooeven bedoeld.

2. *Andere afleiding van 't beeldoppervlak.*

Hierbij wordt een derde richtfiguur gevonden.

Bij eenig punt S van u zij de beeldstraal s op de gewone manier geconstrueerd. Laat nu S over u loopen, dan draait ν om v; π draait om u', de toegevoegde poollijn van u t. o. van Φ^2; en P, de pool van ν, loopt over v', de toegevoegde poollijn van v.

't Doorgangspunt D van $t \equiv FS$ op π is telkens 't snijpunt van 2 correspondeerende stralen uit projectieve waaiers, nl. 1°. den waaier met F tot top in 't vlak (F, u) en 2°. den waaier in dit vlak, die tot top heeft 't punt Q, waar dit vlak gesneden wordt door u'. Deze waaier wordt door (F, u) ingesneden in den vlakkenbundel met u' als as. D loopt dus over een kegelsnede r^2 in (F, u), gaande door F en Q. In dit punt steunt u' op r^2. De m.pl. van p is dus: een regelvlak, dat u', v' en r^2 tot richtlijnen heeft. 't Dubbele product van de graden dezer lijnen is 4, maar er valt af 't vlak (Q, v'), dus bedoeld regelvlak is van den derden graad. Het heeft v' en r^2 tot enkelvoudige richtlijnen, terwijl u' dubbele richtlijn is. De wederkeerige poolfiguur van 't regelvlak der rechten p t. o. van Φ^2 is de m.pl. der lijnen s, die de beelden zijn van punten S op u. Daar 't regelvlak (p) niet ontwikkelbaar is, is het ook van de

derde klasse: 't regelvlak (s) is dus van den derden graad: R_u^3. Het laatste heeft u en v tot richtlijnen en verder een quadratischen kegel tot richtoppervlak.

Daar nl. elke lijn p door een der punten D gaat, zal elke lijn s in 't poolvlak van zoo'n punt D liggen; D nu loopt over een kegelsnede, dus de poolvlakken van D omhullen een tweedegraadskegel. Z'n ribben zijn de toegevoegde poollijnen van 't raaklijnenstelsel van r^2 en de top is de pool van (F, u), dus (u', α), Daar s in 't poolvlak van D ligt, wordt s raaklijn aan genoemden kegel en deze dus richtoppervlak van R_u^3. De rechte u' zelf steunt op r^2, dus u raakt ook aan den kegel. Er gaan door elk punt O van v aan den kegel 2 raakvlakken, die elk door u in één punt gesneden worden. De verbindingslijn van dit punt met O is een beschrijvende van R_u^3, dus v is tweevoudige richtlijn. Door elk punt O^* van u gaan ook twee raakvlakken, maar één daarvan is telkens 't poolvlak van Q. Het andere snijdt op v één punt in, dat, verbonden met O^* een rechte van R_u^3 geeft. Dus u is enkelvoudige richtlijn.

De raakpunten der raaklijnen s aan den quadratischen kegel vormen een m.pl., waarop alle beschrijvenden s steunen. Deze kan als derde richtlijn worden beschouwd.

3. *De rechte u zij complexstraal.*

De toegevoegde richtlijn v valt dan met u samen, zoodat de gevraagde rechten s deel uitmaken van de parabolische congruentie, die $u \equiv v$ tot as heeft. Een willekeurig vlak ν door u heeft zijn nulpunt S ergens op u. De complexwaaier van ν wordt afgebeeld in k^2, die in S wordt aangeraakt door den beeldstraal s van dat punt. Het gevraagde beeldoppervlak wordt door s doorloopen, als ν om u draait, want dan loopt S over u. De rechte u is weer enkelvoudige richtlijn. Verder is er een richtoppervlak, want alle beschrijvenden s raken aan 't oppervlak, dat door k^2 doorloopen wordt. Tot

dit oppervlak behoort ook u, omdat S achtereenvolgens in alle punten van u komt; het is van den derden graad.

Een punt S^* van k^2 heeft tot beeld $s^* \equiv SS^*$. Zoo is een bepaald punt, nl. 't tweede snijpunt $U \equiv (k^2, u)$ 't beeld van u. De richtlijn is dus tevens een beschrijvende van 't gezochte regelvlak (dat de punten van u afbeeldt). Er gaan 2 bladen door; in de doorsnijding met ν moet u tweemaal in rekening komen. Dit geeft mèt s een figuur van derden graad als volledige doorsnede: de rechten s vormen dus een *cubisch oppervlak van* CAYLEY (R_u^3).

De kegelsnede k^2 blijft steeds door U gaan; als S in U valt, wordt de bijbehoorende k^2 door u aangeraakt. Terwijl S over u loopt, draait π om u' en de pool P loopt over $v' \equiv u'$. Het punt D beschrijft weer een kegelsnede r^2 in (F, u), voortgebracht door de projectieve waaiers, die in F en Q hun toppen hebben. Daar alle lijnen p op r^2 steunen, is er voor R_u^3 weer een quadratische kegel als richtoppervlak aan te wijzen.

4. *De lijn u bevat één singulier punt (S_1).*

Daar dit als beeld behoort bij een geheelen waaier uit L, wordt er van R_u^3 een plat vlak afgesplitst: 't vlak van dien waaier. Er blijft dus over een (quadratische) regelschaar R_u^2, gevormd door de lijnen s, welke de overige punten van u afbeelden. Onverschillig waar S_1 op $a^2 + \delta_s^3$ ligt, steeds kan men gemakkelijk de regelschaar door 3 beschrijvenden vastleggen. Buiten 't singuliere punt S_1 heeft u nl. nog 3 punten met $R_s^4 + \alpha$ gemeen. En de singuliere stralen door de 3 laatste punten behooren tot R_u^2, omdat zij o. a. in de 3 bedoelde punten $(u, R_s^4 + \alpha)$ afgebeeld worden. Van de 3 beschrijvenden liggen er 2 op R_s^4 en 1 op α, als S_1 op δ_s^3 gekozen is; steunt u op a^2, dan behooren ze alle 3 tot R_s^4.

Tot R_u^2 kan men rechtstreeks komen door te beden-

ken, dat de kegelsnede k^2 in eenig vlak door u (nulpunt S op v) de lijn u steeds snijdt in S_1, het beeld van SS_1 en in een tweede punt T; TS behoort tot 't afbeeldend regelvlak. De m.pl. van TS is een regelschaar, voortgebracht door de projectieve puntenreeksen (S) en (T) op de kruisende dragers u en v.

Deze rechten behooren tot R_u^2. Daar 't afgesplitste nulvlak ν_1 van S_1 door v gaat, is ν_1 raakvlak aan R_u^2 in 't snijpunt van v met de beschrijvende van R_u^2 uit S_1.

Is u bovendien complexstraal (dus $v \equiv u$), dan wordt elk nulvlak door u raakvlak aan R_u^2 in 't nulpunt, want het snijdt dit oppervlak volgens u en volgens den straal s, die afgebeeld wordt in 't nulpunt. In 't bijzonder geldt dit ook voor het nulvlak van S_1, dat van R_u^3 afgesplitst wordt; dit raakt de regelschaar aan in S_1. Ook in dit geval van ontaarding gaan er weer 2 bladen van de m.pl. der beeldstralen door u.

Behalve u en v is er altijd nog een derde richtlijn van R_u^2 aan te wijzen, die niet tot de soort s behoort. Dit kan door gebruik te maken van de m.pl. der toegevoegde poollijnen p. — Gaat u b.v. door F, dan kan als derde richllijn dienen u'. Want de rechten $p \equiv PD$ steunen op u' en v', maar ook op $u \equiv t$. De toegevoegde lijnen rusten dus op u, v en u'. Het nulvlak (F, v) van F, dat in dit geval van R_u^3 wordt afgesplitst, raakt R_u^2 aan in 't snijpunt van v met de transversaal uit F over v en u'. —

Behoort u tot L, dan komt volgens het voorgaande 't geven van de 2 samengevallen richtlijnen $(u \equiv v)$ neer op 't voorschrijven van de raakvlakken aan R_u^2 in de punten van u.

De in deze § bedoelde lijnen door een singulier punt vormen een' cubischen en een quadratischen complex. Immers: de lijnen door 'n willekeurig punt O, die voldoen, zijn de ribben van de kegels (O, δ_s^3) en (O, a^2). In de complexen ligt een congruentie van rechten u, waarvoor

't afgesplitste vlak door u gaat; ze wordt gevormd door de stralen van L, die op $a^2 + \delta_s^3$ steunen. Daar er in elk vlak en door elk punt blijkbaar 5 van die stralen te trekken zijn (uit 't nulpunt naar de 5 doorgangen van $a^2 + \delta_s^3$ met 't nulvlak) is de bedoelde congruentie een [5,5].

5. *De rechte u gaat door 2 singuliere punten (S_1 en S_2).*

Van R_u^3 worden afgesplitst de nulvlakken ν_1 en ν_2 van S_1 en S_2, zoodat er nog een derde plat vlak overschiet. Dit bevat een waaier uit L, wiens stralen afgebeeld worden in de punten van u; deze lijn is dus niet-singulier bestanddeel van k^2 uit 't „derde" vlak en wordt tot een tweedegraadsfiguur aangevuld door den singulieren straal door den waaiertop, die bijgevolg 'n punt van α of R_s^4 is. Het derde vlak is zoodoende volkomen bepaald als 't vlak door u en den uitzonderingsstraal door 't punt $(R_s^4 + \alpha, u)$, buiten S_1 en S_2 gelegen.

Er is echter nog een mogelijkheid, die niet onder 't vorige valt, nl.: S_1 en S_2 op a^2. In dit geval wordt $\nu_1 + \nu_2$ aangevuld tot een figuur van den derden graad door 't poolvlak α van F, daar 'n punt S van $u \equiv S_1 S_2$ tot beeld heeft den straal SA uit waaier (A, α).

Is u (door 2 singuliere punten) bovendien complexstraal, dan is u aan die 2 punten als beeld toegevoegd; u is in dat geval singuliere straal en bevat volgens 't vroeger gevondene nog een derde uitzonderingspunt S_3. Omgekeerd: als u door 3 singuliere punten gaat, is u (singuliere) straal van L, daar anders de graad van het afbeeldend regelvlak hooger dan 3 zou uitvallen.

De punten van u buiten S_1, S_2 en S_3 worden op u zelf afgebeeld; nu is $R_u^3 \equiv \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$.

6. *De m.pl. van u, waarvoor R_u^3 ontaardt.*

Als van R_u^3 'n plat vlak ν (nulpunt N) afgesplitst wordt, zijn er 2 hoofdmogelijkheden:

1°. *u ligt in ν.*

2°. *u ligt niet in ν.*

Als u in ν ligt, kan men hebben:

a. u behoort niet tot L. Daar u de beelden van de stralen uit (N, ν) bevat, is u niet-singulier bestanddeel van k^2 uit ν òf ligt in α; u behoort dus tot 't stralenveld [0,1] van dit vlak of tot de [5,9] in II^4 genoemd. Deze 2 verzamelingen van rechte lijnen vormen samen 't koordenstelsel [5,10] van $a^2 + \delta_s^3$.

b. u is complexstraal. De stralen uit (N, ν) hebben geen ander punt met u gemeen dan N. Dit moet dus 't beeld zijn van alle stralen uit dien waaier en u is bijgevolg een straal uit L door één singulier punt (N).

c. u is singuliere straal. Omtrent N geldt hetzelfde als onder *b*, maar u bevat nu nog 2 andere singuliere punten.

Als u niet in ν ligt, moeten alle stralen uit (N, ν) toegevoegd zijn als beelden aan 't snijpunt (u, ν). De snijding moet dus plaats hebben in het *singuliere* punt N; u is een rechte door één singulier punt. — Dat u 2 singuliere punten bevat behoeft niet afzonderlijk ondersteld te worden, omdat deze ligging in 1ª reeds is voorzien; 3 uitzonderingspunten kan u niet bevatten, omdat u (door N en niet in ν) niet tot L behoort.

Al deze mogelijkheden van ontaarding van R_u^3 nu zijn in de vorige §§ besproken. Er zijn dus geen andere. Men kan derhalve zeggen:

De m.pl. der lijnen u, waarvoor $R_u^3 \equiv$ *regelschaar + 'n plat vlak is een vijfdegraadscomplex, die* $a^2 + \delta_s^3$ *tot m.pl. van hoofdpunten heeft.*

De m.pl. der rechten u, waarvoor $R_u^3 \equiv$ *regelschaar + 'n plat vlak door u is een congruentie [5,5], die* $a^2 + \delta_s^3$ *tot singuliere kromme bezit.*

De m.pl. der rechten u, waarvoor $R_u^3 \equiv$ *3 platte vlakken, waarvan één door u. wordt gevormd door de congruentie [5,10] der koorden van* $a^2 + \delta_s^3$.

De m.pl. der lijnen u, waarvoor $R_u^3 \equiv$ *3 platte vlakken door u is 't regelvlak der singuliere stralen* $R_s^4 + \infty$.

Alle rechten u, die behooren tot 't raaklijnenstelsel van a^2 of tot 't (vierdegraads) raaklijnenoppervlak van δ_s^3, geven een R_u^3, die ontaard in een *dubbelvlak* en een plat vlak door u.

Is u een van de raaklijnen uit A aan a^2, dan gaat 't dubbelvlak ook door u.

7. *Zij u middellijn van L.*

Dan wordt v een lijn in 't oneindige, nl. de snijlijn van den parallelvlakkenbundel, gevormd door de nulvlakken van de punten op u. Het cubische regelvlak R_u^3 krijgt dus een *richtvlak*, nl. een exemplaar uit dien bundel, is dus een *conoïde*.

Het wordt een *rechte* conoïde, als men voor u in 't bijzonder neemt de *as* van den complex.

Als in deze gevallen ($u \equiv$ middellijn) een plat vlak afgesplitst wordt, is het overblijvende regelvlak een *hyperbolische paraboloïde*. Het afgesplitste vlak zelf kan als richtvlak der paraboloïde dienen. De middellijnen van deze soort (door één singulier punt) vormen 2 cilinders met evenwijdige assen, die a^2 en δ_s^3 tot richtlijnen hebben. Deze 2 cilinders hebben 6 ribben u gemeen, waarvan er 2 gaan door de snijpunten (a^2, δ_s^3).

De 4 andere bevatten 2 singuliere punten en leveren elk een oppervlak R_u^3 op, dat ontaard is in 2 evenwijdige platte vlakken (de nulvlakken van de beide singuliere punten) en een derde vlak door u. De complexstralen hierin vormen een parallelstralenbundel met top op v_∞. Verder is er nog één middellijn, die koorde is van δ_s^3. Hiervoor geldt hetzelfde.

HOOFDSTUK IV.

Het beeld van een stralennet.

1. *'t Beeld is een derdegraadsoppervlak.*

De beschouwde complex is *algemeen*, bevat dus geen *hoofdpunten* (elke lijn erdoor is complexstraal) of *hoofdvlakken* (elke rechte erin behoort tot den complex). In L komen dus geen stralenschoven $[1,0]$ of stralenvelden $[0,1]$ voor. De eenvoudigste congruentie, die optreedt in den complex, is 't stralennet $[1,1]$. Overigens zijn voor alle complexcongruenties $[p, q]$ de beide graadgetallen gelijk: $p \equiv q$. Immers: als er door een punt p stralen gaan, liggen die steeds in één plat vlak en ook omgekeerd.

Om nu een net uit L te lichten is 't voldoende, alle stralen te nemen, die op een willekeurige rechte u steunen; ze snijden dan ook de toegevoegde richtlijn v, zoodat u en v de richtlijnen van 't uitgekozen net zijn. De ∞^2 beschrijvenden van 't net geven ∞^2 beeldpunten S, die een oppervlak vormen, waarop u en v liggen. Want: de regelvlakken R_u^3 en R_v^3, die de beelden zijn van de punten op u en v, behooren geheel tot de beschouwde bilineaire congruentie. Meervoudige punten buiten u en v kan het oppervlak niet hebben, want in zoo'n punt ligt slechts het beeld van de eenige beschrijvende, die er door gaat. Is u geen complexstraal en bevatten u en v geen singuliere punten der afbeelding, dan liggen ook op die lijnen geen meervoudige punten. Een willekeurige straal s van de $[1,1]$ snijdt bedoeld oppervlak dus in één punt op u, één punt op v en in

zijn beeldpunt S. Een vierde snijpunt Z is onmogelijk, omdat er door Z geen andere beschrijvende gaat dan s. De m.pl. van S is bijgevolg een oppervlak van den derden graad: O^3.

Dit is ook zóó in te zien: een willekeurig vlak ν door u bevat een waaier uit L, wiens beeld k^2 tot de m.pl. behoort; andere punten dan die van u en k^2 bezit de m.pl. niet in ν; dit levert een volledige doorsnede van graad 3.

Laat ν wentelen om u, dan blijft ν dubbel raakvlak aan O^3 in de punten (u, k^2). Twee maal vallen de 2 raakpunten samen, nl. in de coïncidenties der involutie, die op u ingesneden wordt door 't stelsel k^2. *Vijf* maal gebeurt 't, dat ν drievoudig raakvlak is. Bij de wenteling van ν ontaardt k^2 nl. 5 maal in een lijnenpaar en wel telkens als voor 't nulpunt van ν, d. i. 't punt (ν, v) genomen wordt een der 5 punten $(v, R_s^4 + \alpha)$. In zoo'n geval is het snijpunt van het lijnenpaar 't derde raakpunt. 't Aantal 5 is in overeenstemming met de theorie van de algebraische oppervlakken, volgens welke er bij 'n oppervlak van den n^{den} graad $(n+2).(n-2)^2$ raakvlakken zijn door u met raakpunt buiten u. Dit geeft hier $(3+2)(3-2)^2 = 5$.

Voor de beschrijvenden van de regelvlakken R_u^3 en R_v^3 vallen de punten S op u, resp. v. Deze beschrijvenden zijn dus raaklijnen aan O^3 in punten van u en v en de 2 genoemde regelvlakken raken O^3 aan, resp. volgens u en v. De negendegraadsdoorsnede van O^3 met R_u^3 is zoover mogelijk ontaard; zij bestaat uit u (2 maal geteld wegens de aanraking), v (ook 2 maal gerekend als dubbelrechte van R_u^3) en uit de 5 singuliere stralen, die tot R_u^3 behooren. Deze 5 rechten behooren ook tot O^3, want zij maken deel uit van de lijnenparen, waarin k^2 ontaardt voor de 5 nulpunten, bovenbedoeld. Verder valt (O^3, R_v^3) met de vorige doorsnede samen.

Door elk punt Y van δ_s^3 gaat één transversaal over

u en v. Deze beschrijvende van de $[1,1]$ wordt afgebeeld in Y, dus δ_s^3 ligt in haar geheel op O^3. 't Zelfde geldt om overeenkomstige reden voor a^2. De doorsnede (R_s^4, O^3) is een figuur van den twaalfden graad, die bestaat uit δ_s^3 (2 maal geteld), a^2 en de singuliere stralen, die O^3 met R_s^4 gemeen heeft. $(O^3, \alpha) \equiv a^2 +$ singuliere straal door (u, α). Daar a^2 ook op Φ^2 ligt, behoort a^2 tot (O^3, Φ^2). Er moet dus nog een restdoorsnede zijn van den vierden graad. Dit is de m.pl. σ^4 van de beelden van alle raaklijnen aan Φ^2, die tot de congruentie behooren. In elk vlak ν door u kunnen er uit 't nulpunt van ν 2 raaklijnen aan Φ^2 getrokken worden; dit geeft 2 snijpunten der m.pl. met ν; de 2 andere zijn de punten (u, Φ^2). Het samenstel van al de bedoelde raaklijnen raakt Φ^2 aan volgens σ^4 en heeft buiten σ^4 niets met Φ^2 gemeen. Dit beduidt een „doorsnede" van graad 8. De m.pl. van die raaklijnen is dus een regelvlak van den vierden graad. Dit blijkt ook hieruit, dat de doorsnede met een willekeurig vlak ν door u bevat 2 raaklijnen en de rechte u, die dubbelrechte is, evenals v. De 4 tot R_s^4 behoorende singuliere stralen, die op u en v steunen, maken ook deel uit van het raaklijnenregelvlak. En daar deze afgebeeld worden in al hunne punten, is 't beeld van dit regelvlak feitelijk een ontaarde ruimtekromme van den achtsten graad.

Daar O^3 geen dubbelpunten heeft, ontstaat er met 'n willekeurig plat vlak β een derdegraadsdoorsnede r^3 eveneens zonder dubbelpunten; r^3 gaat door (u, β) en (v, β). De verschillende nulvlakken ν door u snijden op β een waaier in met top in (u, β). Behalve (u, β) heeft een straal van dezen waaier nog 2 punten S_1 en S_2 met r^3 gemeen. Dit zijn de beeldpunten van SS_1 en SS_2, als S (op v) 't nulpunt van ν is. Uit (u, β) zijn 4 raaklijnen te trekken aan r^3. Vier maal vallen dus S_1 en S_2 samen; 4 maal gebeurt 't dus dat k^2 uit ν aan β raakt. Neemt men voor β het vlak op oneindig, dan volgt hieruit, dat

onder de kegelsneden k^2, die bij de punten van u behooren, 4 parabolen zijn. Deze liggen op O^3. Zoo behooren er bij v ook 4.

Daar men voor u elke rechte kan nemen, bestaat er een vierdegraadsoppervlak als m.pl. der punten, in wier nulvlak k^2 een parabool is. Dit oppervlak gaat door de 4 klempunten A_1, A_2, B_1 en B_2 ($k^2 \equiv$ dubbelrechte) van R_s^4 en verdeelt de ruimte in 2 gebieden H en E, die punten bevatten, waarvoor k^2 een hyperbool, resp. een ellips is. H is 't gebied, waarin F ligt, als de omhullingskegel uit F aan Φ^2 reëel is; anders ligt F in E.

Uit de aanwezigheid der 4 parabolen volgt nog, dat de m.pl. der middelpunten van de restdoorsneden (ν, O^3) een vierdegraadsruimtekromme is, die u tot drievoudige snijlijn heeft; immers: behalve 4 punten in 't oneindige heeft zij met O^3 nog gemeen de 5 buiten u gelegen raakpunten van de drievoudige raakvlakken door u.

2. *De rechte lijnen op* O^3.

Als bij de wenteling van ν om u 't nulpunt genomen wordt in een der 5 snijpunten Z van v met $R_s^4 + \alpha$, dan bestaat (O^3, ν) uit u, de singuliere straal r door zoo'n nulpunt en een derde rechte p, die r aanvult tot een figuur van den tweeden graad ('n ontaarde k^2). Zoo liggen er ook op u 5 punten T, waarbij 'n nulvlak behoort, waarin k^2 ontaard is. Dit levert dezelfde 5 uitzonderingsstralen als de punten Z en verder nog 5 rechten q van de soort p. Tesamen met u en v zijn hiermee 17 rechten van O^3 aangewezen. Voor 't overzicht is 't dienstig deze lijnen aldus te benoemen:

de rechten p: p_1; p_2; p_3; p_4; p_5;
de rechten q: q_1 q_2 q_3 q_4 q_5;
de rechten u en v resp. q_6 en p_6; en
de rechten r: r_{16} r_{26} r_{36} r_{46} r_{56}.
Hierbij zij r_{56} de singuliere straal door (q_6, α).

Denk een regelschaar R^2, die bepaald is door 3 van

de 5 lijnen r_{kl} als richtlijnen, b.v. r_{16}, r_{26} en r_{56}. Hierop liggen ook u en v. De dubbelkromme δ_s^3 snijdt R^2 in 6 punten, waarvan er 1 op r_{56} (d. i. A), 2 op r_{16} en 2 op r_{26} liggen. De beschrijvende r_{34} van R^2 door 't zesde snijpunt heeft 4 punten met O^3 gemeen, nl. dat snijpunt en op r_{16}, r_{26} en r_{56} telkens 1 punt: r_{34} ligt dus geheel op O^3. Daar ze de 3 richtlijnen snijdt, kruist ze p_6 en q_6.

Zoo geven de regelscharen
$(r_{16}\, r_{36}\, r_{56})$; $(r_{16}\, r_{46}\, r_{56})$; $(r_{26}\, r_{36}\, r_{56})$; $(r_{26}\, r_{46}\, r_{56})$; $(r_{36}\, r_{46}\, r_{56})$
achtereenvolgens aanleiding tot de rechten

r_{24} ; r_{23} ; r_{14} ; r_{13} ; r_{12}

van O^3. Een drietal lijnen, gekozen uit r_{16}, r_{26}, r_{36} en r_{46} (dus r_{56} buitengesloten) bepalen een regelschaar R^2, die door a^2 in 4 punten wordt gesneden, waarvan er 3 op de gekozen richtlijnen liggen.

De beschrijvende van R^2 door 't vierde snijpunt heeft weer 4 punten met O^3 gemeen, behoort dus geheel tot dit oppervlak. Zoo krijgen we nog 4 lijnen r_{15}, r_{25}, r_{35} en r_{45}, resp. opgeleverd door de regelscharen

$(r_{26}\, r_{36}\, r_{46})$; $(r_{16}\, r_{36}\, r_{46})$; $(r_{16}\, r_{26}\, r_{46})$; $(r_{16}\, r_{26}\, r_{36})$.

Hiermee is 't 27-tal volledig. De laatste 10 komen bij de beschouwing van 't beeld van een regelschaar beter tot haar recht als m.pl. van bepaalde beeldpunten S. [r_{kl} blijkt 't beeld te zijn van de bijbehoorende R^2 of beter: R^2 heeft tot beeld r_{kl} en de 3 singuliere stralen, waardoor R^2 vastgelegd is]. Ze zijn dus alle door middel van de onderzochte afbeelding te vinden.

De lijnen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 vormen een kruisend zestal; evenzoo q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6. Tesamen is dit 'n bisextupel.

Bisecanten van δ_s^3 zijn r_{16}, r_{26}, r_{36}, r_{46}, omdat dit singuliere stralen zijn. Verder ook p_5. Dit is nl. de rechte, die met r_{56} 't lijnenpaar vormt, waarin k^2, behoorend bij 't nulpunt $Z_5 \equiv (p_6, \alpha)$ ontaard is. 't Correspondeerende nulvlak wordt door δ_s^3 gesneden in A en nog

2 andere punten B en C. De stralen $Z_5 B$ en $Z_5 C$ hebben hun beelden in B en C, dus p_5 bevat deze punten van δ_s^3. Dezelfde redeneering geldt voor q_5

Nulsecanten van δ_s^3 zijn p_6 en q_6 wegens de willekeurige ligging; r_{45} kan geen punt met δ_s^3 gemeen hebben, omdat anders de hyperboloïde $(r_{16}\, r_{26}\, r_{36})$ door δ_s^3 in 7 punten zou gesneden worden. Analoog is 't gesteld met r_{15}, r_{25} en r_{35}.

Unisecanten van δ_s^3 zijn vooreerst p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3 en q_4. Voorbeeld: p_1 vult r_{16} aan tot de ontaarde k^2 uit 't nulvlak van $Z_1 \equiv (p_6, r_{16})$; δ_s^3 snijdt dit vlak in 2 punten, die op r_{16} liggen en nog in een derde punt D, dat 't beeld is van $Z_1 D$ en waardoor dus p_1 gaat. Ook r_{56} heeft slechts 1 punt met δ_s^3 gemeen, omdat de 2 andere snijpunten (δ_s^3, α) de punten zijn, waar a^2 aangeraakt wordt door de raaklijnen uit A. Beschouw verder r_{12}. Dit is de transversaal over r_{36}, r_{46} en r_{56} uit 't punt, waar δ_s^3 de regelschaar (r_{36}, r_{46}, r_{56}) nog snijdt behalve in de 4 punten op r_{36} en r_{46} en in A: r_{12} is dus zeker snijlijn van δ_s^3, maar slechts eenmaal, o. a. omdat r_{12} gesneden wordt door r_{36} en in 't vlak (r_{12}, r_{36}) reeds 3 punten van δ_s^3 zijn aangewezen. Analoog voor: r_{13} r_{14} r_{23} r_{24} en r_{34}. Samenvattend hebben we: de kromme δ_s^3 op O^3 heeft tot bisecanten:

$$r_{16} \quad r_{26} \quad r_{36} \quad r_{46} \quad p_5 \quad q_5,$$

die een kruisend zestal vormen; tot nulsecanten

$$r_{15} \quad r_{25} \quad r_{35} \quad r_{45} \quad p_6 \quad q_6,$$

die met de vorige een bisextupel uitmaken; en al de overige rechten tot unisecanten.

De hier volgens de eigenschappen der afbeelding gevonden ligging klopt met de theorie van 't cubische oppervlak.

3. *De lijn u behoort tot L.*

Dan is $v \equiv u$ en we hebben dus te doen met een parabolische bilineaire congruentie. Een willekeurig vlak

ν door de richtlijn u snijdt O^3 volgens u en volgens een k^2 door 't nulpunt N van ν en door U, 't beeld van u. 't Nulvlak ν is raakvlak in N aan O^3, waaruit volgt, dat elke straal s van de congruentie 't oppervlak O^3 aanraakt (in 'n punt van u) en verder nog snijdt in zijn beeldpunt S. De raaklijn r in N aan k^2 is hoofdraaklijn. De m.pl. hiervan is 't cubisch regelvlak van CAYLEY (R_u^3), dat als beeld gevonden werd voor de punten op u. Een vlakke doorsnede door r levert voor O^3 op: een derdegraadskromme, die r in N tot buigraaklijn heeft en voor R_u^3 een derdegraadsfiguur, die met 2 takken door N gaat, waarvan r er één is. De 2 doorsneden hebben dus in N 4 punten gemeen. Hieruit volgt, dat in (R_u^3, O^3) de rechte u viermaal in rekening te brengen is. Het eene blad van R_u^3 wordt door O^3 volgens u gesneden en 't andere blad volgens u gesneden en aangeraakt. De restdoorsnede (R_u^3, O^3) wordt gevormd door 5 singuliere stralen.

Daar bij de wenteling van ν om u k^2 steeds door U blijft gaan, heeft elke rechte door U in dat punt 2 samenvallende punten met O^3 gemeen: U is dus dubbelpunt, O^3 *monoïde*. De raaklijn r^* in U aan k^2 is raaklijn aan O^3; de m.pl. van r^* is de raakkegel, die bij U behoort. De richtlijn u is een zijner ribben, want als N in U genomen wordt, raakt k^2 de rechte u aan, dus r^* gaat in u over. De kegel wordt dus door 't nulvlak van U aangeraakt volgens u. Hij moet nog 5 andere ribben hebben, die tot O^3 behooren. Deze zijn gemakkelijk aan te wijzen. Laat toch u in T_k op een der 5 singuliere stralen r_{k6} $(k = 1, .. 5)$ steunen. 't Nulvlak van T_k is (u, r_{k6}) en k^2 daarin ontaardt in r_{k6} en een rechte q_k, die door U gaat.

De rechten u en v zijn samengevallen $(q_6 \equiv p_6)$; daardoor ook de punten T_k en Z_k en de lijnen q_k en p_k. De 10 rechten, afkomstig van regelscharen, blijven. In dit geval liggen er dus op O^3 21 verschillende rechte

lijnen. Zes ervan kan men echter dubbel tellen, nl. de 2 aan 2 samengevallen lijnen uit 't bisextupel (p_k, q_k).

4. *De lijn u bevat één singulier punt* (S_1).

a. Zij, om den toestand nader te bepalen, S_1 'n punt van δ_s^3. Behalve u gaan door S_1 alvast 2 andere rechten van O^3, nl. 2 singuliere stralen, zeg r_{16} en r_{26}: S_1 is dus dubbelpunt. Verder steunt u nog op r_{36}, r_{46} en r_{56} (in α). Deze 3 lijnen snijden v in punten Z, waarbij nulvlakken behooren, waarin k^2 bestaat telkens uit een singuliere straal en 'n rechte van de soort p door S_1. Zoo zijn de 6 tot O^3 behoorende, beschrijvenden van den raakkegel in S_1 aangewezen. In dit zestal zijn weer 2 sextupels samengevallen, nl.:

r_{16} en q_2 tot r_{16} ; r_{26} en q_1 tot r_{26}.
q_6 en r_{12} tot $u \equiv q_6$; p_3 en r_{45} tot p_3.
p_4 en r_{35} tot p_4 ; p_5 en r_{34} tot p_5.

De 2 aan 2 samengevallen lijnen vormden het bisextupel:

$$\left\{ \begin{matrix} p_3 & p_4 & p_5 & r_{12} & r_{16} & r_{26} \\ r_{45} & r_{35} & r_{34} & q_6 & q_2 & q_1 \end{matrix} \right\}.$$

Volkomen analoge uitkomst geldt, als S_1 op a^2 ligt. Evenals in 3 liggen er op O^3 in deze gevallen 21 verschillende rechten.

b. Als u bovendien tot L behoort, liggen u, r_{16} en r_{26} in één plat vlak, nl. in 't nulvlak van S_1. Nu is S_1 een *biplanair* punt: de raakkegel is ontaard in een vlakkenpaar, bestaande uit genoemd nulvlak en een tweede plat vlak, waarin p_3, p_4 en p_5 liggen. Behalve de rechten door S_1 zijn er nog 9 aan te wijzen; 't zijn de restdoorsneden van O^3 met de vlakken (u, p_3); (u, p_4); (u, p_5); (r_{16}, p_3); (r_{16}, p_4); (r_{16}, p_5); (r_{26}, p_3); (r_{26}, p_4) en (r_{26}, p_5).

c. Tot 'n bijzonderheid komt men verder, als S_1 een van de punten (A_1 en A_2) is, waar a^2 aangeraakt wordt door de raaklijnen uit A. Zij u een willekeurige rechte door zoo'n punt. Behalve op $s \equiv S_1 A$ steunt u nog

op slechts 2 andere singuliere stralen: s_1 en s_2. In 't nulvlak van (s_1, v) ontaardt k^2 in s_1 en een rechte l_1 door S_1. Een soortgelijke lijn l_2 behoort bij 't punt (s_2, v). Het nulvlak van S_1 levert als k^2 de dubbelrechte s en in 't nulvlak van (s, v) ontaardt die kegelsnede in s en een tweede lijn l. Volgens de uitkomsten in II in soortgelijke gevallen verkregen, vindt men, dat l is de rechte, die S_1 verbindt met 't snijpunt, dat δ_s^3 nog vertoont met 't nulvlak van (s, v) buiten S_1 en A. In dit nulvlak liggen s, l en u. S_1 is dus weer een *biplanair* punt. De raakkegel bestaat uit 't vlakkenpaar $(s, u) + (l_1, l_2)$. In (l_1, l_2) moet nog een derde rechte van O^3 liggen; 't is natuurlijk s, want deze moest dubbel geteld worden. 't Vlak (S_1, v) snijdt O^3 volgens v en heeft er 2 samenvallende lijnen volgens s mee gemeen, is dus raakvlak volgens s en s is bijgevolg *torsale* rechte. — Er liggen op O^3 nog 4 andere rechte lijnen, die verkregen worden door snijding met de vlakken (u, l_1); (u, l_2); (l, l_1) en (l, l_2).

Dat u slechts 3 verschillende punten met $R_s^4 + \alpha$ gemeen heeft, spreekt vanzelf. Voor v wordt hetzelfde veroorzaakt doordat v ligt in 't torsale raadvlak (S_1, v) aan R_s^4 volgens s; v is zoodoende raaklijn aan R_s^4 in (s, v) en in dit raakpunt valt bovendien 't snijpunt (v, α).

't Torsale karakter van s (t. o. van O^3) ontstaat doordat k^2 uit 't nulvlak van S_1 een dubbelrechte is. Dit doet zich ook voor, als S_1 genomen wordt in de punten B_1 of B_2, genoemd in I^4. Een verschil met 't voorgaande is, dat k^2 uit 't nulvlak van (s, v) een aanvullende rechte bevat, die niet door S_1 gaat. Dit mag ook niet, want u steunt nu nog op 3 andere singuliere stralen: s_1, s_2 en s_3. En in 't nulvlak van (s_k, v), waarbij $k = 1, 2, 3$, ontaardt k^2 in s_k en een rechte l_k door S_1. Met u en de dubbel te tellen lijn s zijn dit reeds 6 rechten door S_1. Hierin komt geen verandering als u bovendien complexstraal is.

Behoort de rechte u door A_1 of A_2 tot L, dan valt l

samen met s, zoodat er slechts 4 verschillende lijnen door S_1 tot O^3 behooren. Wegens de complanaire ligging van s, l_1 en l_2 zijn er nog slechts 2 andere rechten van O^3. Ze worden verkregen door O^3 te snijden met de vlakken (u, l_1) en (u, l_2). De lijn s blijft torsale rechte met (u, s) als raakvlak.

d. Daar u door S_1 gaat, is $R^3_u \equiv R^2 +$ nulvlak van S_1. De doorsnede (R^2, O^3) bestaat uit u (2 maal geteld wegens aanraking), v en 3 singuliere stralen. Behoort u tot L, dan heeft er aanraking en snijding plaats volgens $u \equiv v$. 't Aanvullend nulvlak snijdt O^3 volgens de singuliere stralen door S_1 en volgens v.

5. *De lijn u gaat door 2 singuliere punten S_1 en S_2.*

a. S_1 en S_2 op δ^3_s.

Noem de uitzonderingsstralen door S_1: s_1 en s_2, die door S_2: s_3 en s_4. Op u steunt nog 'n vijfde singuliere straal s_5, die tot (A, α) behoort. Uit 't voorgaande volgt al, dat S_1 en S_2 dubbelpunten van O^3 zijn. Door S_1 gaan nog 2 andere rechten van O^3, nl. de lijnen l_3 en l_4, die s_3 en s_4 aanvullen tot de kegelsneden k^2 uit de nulvlakken van (s_3, v) en (s_4, v). Zoo zijn er ook 2 aanvullende rechten l_1 en l_2 door S_2. In 't nulvlak van (s_5, v) is $k^2 \equiv s_5 + u$; dit brengt mee, dat (s_5, u) torsaal raakvlak is volgens u. —

S_1 op δ^3_s en S_2 op a^2 geeft 'n geheel overeenkomstig resultaat. Een bijzonder geval hiervan is:

b. S_1 op δ^3_s, S_2 in A_1 of A_2.

Op u steunen geen andere singuliere stralen dan s_1 en s_2 door S_1 en s_5 door S_2. Bij 't nulpunt (s_5, v) behoort weer $s_5 + u$ als k^2, bij S_2 de dubbelrechte s_5. Verder gaan nog door S_2 de 2 bovenbedoelde lijnen l_1 en l_2. De vlakken (s_5, u) en (s_5, v) zijn torsale raakvlakken, resp. volgens u en s_5. Door S_1 gaan slechts 3 rechten, nl. s_1, s_2 en u, maar de laatste is 4 maal te tellen, want in s_5 zijn samengevallen de stralen s_3 en s_4 uit (a) en

daardoor komen ook l_3 en l_4 nog langs u te liggen (en u was al dubbel te rekenen). — Nog meer bijzonder is de ligging:

c. S_1 in B_1 of B_2 (zie I^4); S_2 in A_1 of A_2.

Op u steunen slechts 2 singuliere stralen: s_1 door S_1 (samenvalling van s_1 en s_2) en s_5 door S_2 (samenvalling van s_3, s_4 en s_5). De 2 rechten l_1 en l_2 door S_2 vallen nu ook samen, zoodat door dit punt 3 maal 2 samenvallende rechten van O^3 gaan. Door S_1 gaan s_1, die 2 maal en u, die 4 maal te tellen is. Torsale rechten zijn u, s_1 en s_5; de bijbehoorende raakvlakken zijn (s_5, u), (s_1, v) en (s_5, v). — Drie maal 2 samenvallende rechten door een punt van O^3 krijgt men ook door in (a) de punten S_1 en S_2 te doen samenvallen: u wordt raaklijn aan δ_s^3 in $S_1 \equiv S_2$. Tot samenvalling komen s_3 en s_1, s_4 en s_2 en verder de „aanvullende rechte" uit 't nulvlak van (s_5, v) met u. Van meer belang is 't volgende geval:

d. S_1 en S_2 op a^2.

Daar u in α ligt, gaat v door A. De waaier (A, α) behoort tot de $[1,1]$ en daar hij afgebeeld wordt in 't puntenveld van α, ontaardt O^3 in dit vlak en een quadratisch oppervlak O^2, dat v bevat, dus een regelschaar is. In een willekeurig vlak ν door v ligt als doorsnede met $O^3 \equiv \alpha + O^2$ een straal uit (A, α), de lijn v en nog 'n tweede rechte l van O^2. Deze gaat door de snijpunten (δ_s^3, ν) buiten A en vult bedoelden straal uit (A, α) aan tot 't lijnenpaar, dat als k^2 behoort bij 't nulpunt (ν, u). Alle beschrijvenden op O^2 van de soort l worden zoo door δ_s^3 in *2* punten gesneden, alle beschrijvenden van de soort v in *1* punt.

Door de *2* overige (buiten A) snijpunten (v, R_s^4) gaan nog *2* singuliere stralen s_1 en s_2. Daar ze ook op u steunen, gaan ze door S_1, resp. S_2. Ze behooren natuurlijk geheel tot O^2. 't Nulvlak ν_1 van (v, s_1) snijdt O^2 volgens s_1 en de lijn, die S_2 verbindt met (δ_s^3, ν_1) buiten

s_1; analoog voor (v, s_2). Bij 'n willekeurig punt van v behoort 'n nulvlak ξ, waarin k^2 een echte kegelsnede is, geheel bepaald door de 5 punten $(\xi, \delta_s^3 + a^2)$. O^2 snijdt α volgens een kegelsnede, gaande door A, S_1, S_2 en door de raakpunten A_1 en A_2, want hierdoor gaat ook δ_s^3 en en deze ligt geheel op O^2.

Laat u 't stralenveld van α doorloopen, dan doorloopt v de ster A en O^2 't *net* met basis δ_s^3. Een heel bijzondere ligging is $u \equiv A_1 A_2$. De singuliere stralen s_1 en s_2 vallen nu langs $A_1 A$ en $A_2 A$, zoodat v in A *4* samenvallende punten met R_s^4 gemeen heeft. Dit komt doordat v in A raakt aan δ_s^3; v ligt nl. in de beide (torsale) raakvlakken aan R_s^4 volgens AA_1 en AA_2. Eenig punt S op u geeft 'n nulvlak $\nu \equiv (S, v)$, waarin $k^2 \equiv SA + (\nu, \pi)$. Dit bleek in Π^3. Daar 't poolvlak van A door u, dus door S gaat, gaat 't poolvlak π van S steeds door A en de rechten (ν, π) vormen dus een kegel met top in A. Deze kegel is 'n ontaarde O^2, dus quadratisch, hetgeen ten overvloede ook daaruit volgt, dat de doorsnede met (S, v) is: $v + (\nu, \pi)$. De kegel snijdt α volgens AA_1 en AA_2, zooals blijkt door S in A_1 en A_2 te nemen.

In elken bundel van 't net komen *4* kegels voor, die echter *2* aan *2* zijn samengevallen.

Veronderstel, dat u den waaier (S_1, α) doorloopt, dan doorloopt v den waaier (A, μ), als μ is 't nulvlak van S_1. De bijbehoorende oppervlakken O^2 vormen een bundel uit 't net; de basis is: $\delta_s^3 + s_1$. Bijzondere standen van u hierbij zijn:

$u \equiv S_1 X_1$, als X_1 een van de 2 punten (X_1 en X_2) is, waar de op s_1 (in Y_1 en Y_2) steunende singuliere stralen a^2 snijden; s_2 gaat over in $X_1 Y_1$ en v gaat door 't singuliere punt Y_1. In 't nulvlak van S op u ontaardt k^2 in SA en een rechte l door Y_1. Dit punt is dus de top van 'n kegel, waarin O^2 ontaard is. Onder de kegelribben zijn op te merken: $Y_1 A$, $Y_1 S_1$, $Y_1 X_1$, $Y_1 A_1$ en $Y_1 A_2$.

$u \equiv$ *raaklijn in* S_1 *aan* a^2. Dan moet v raaklijn zijn aan R_s^4. De doorsnede (μ, R_s^4) bestaat uit s_1 en een derdegraadskromme met dubbelpunt in A. Ze snijdt s_1 in Y_1 en Y_2 en in een derde punt, 't raakpunt van μ; v is nu de lijn, die dit punt met A verbindt. (O^2, α) raakt a^2 aan in S_1. Verder geen bijzonderheid.

$u \equiv S_1 A_1$. In dit geval komt s_2 langs AA_1 te liggen, zoodat buiten A nog slechts *1* uitzonderingsstraal op u steunt, nl. s_1. De rechte v heeft in A *3* samenvallende punten met R_s^4 gemeen; ze is raaklijn geworden in dat punt. Dit komt doordat v ligt in 't nulvlak van A_1, welk vlak R_s^4 aanraakt o.a. in A. O^2 wordt door dit nulvlak gesneden volgens v en AA_1. Deze rechte maakt dus ook deel uit van (O^2, α), die voor de rest gevormd wordt door $S_1 A_2$, want 't moet een exemplaar zijn van den kegelsnedenbundel, die A, S_1, A_1 en A_2 tot basispunten heeft. De *2* andere lijnenparen, welke in dien bundel optreden, zijn $(AA_2;\ S_1 A_1)$ en $(AS_1;\ A_1 A_2)$. 't Eerste wordt uitgesneden door O^2, die bij $u \equiv S_1 A_2$ behoort en 't andere door de bij $u \equiv AS_1$ behoorende O^2. In dit geval is

6. *de lijn u singuliere straal.*

In een willekeurig nulvlak ν door u wordt de complexwaaier afgebeeld in u en de verbindingslijn der punten (ν, δ_s^3), die buiten A liggen. Als u den waaier (A, α) doorloopt, krijgt men weer een bundel van quadratische oppervlakken met basis $\delta_s^3 + A_1 A_2$. De kegels, die δ_s^3 uit de dubbelpunten der basislijn projecteeren, krijgt men als O^2 voor de gevallen $u \equiv AA_1$ en $u \equiv AA_2$.

Zij u een singuliere straal, die tot R_s^4 behoort en in X op a^2 steunt. Bij 'n willekeurig punt N van u behoort een complexwaaier (N, ν), die tot beeld heeft u en de lijn l, welke de punten (ν, δ_s^3) en (ν, a^2) buiten u gelegen, verbindt; ν is raakvlak aan de gezochte m.pl. in $N' \equiv (u, l)$. In de beide coïncidenties der projectiviteit (N, N') heeft

men nulvlakken met de nulpunten tot raakpunten; deze raakpunten zijn de beide singuliere punten (δ_s^3, u).

Uit een en ander volgt, dat de m.pl. hier een rechtlijnig oppervlak is. 't Is geen regelschaar (zooals voor u in α), want de doorsnede met α bestaat uit a^2 en XA; neem toch $N \equiv X$, dan wordt $l \equiv XA$. De m.pl. is dus 'n cubisch regelvlak O^3, dat u en a^2 tot richtlijnen heeft. Daar (ν, O^3) van den derden graad is, moet u in de doorsnede 2 maal geteld worden: er gaan 2 bladen van O^3 door. (O^3, R_s^4) bestaat uit u en δ_s^3, elk 2 maal gerekend, verder uit a^2 en de 2 singuliere stralen van R_s^4, die op u steunen. — Neemt men N in 't nulpunt van 't raakvlak in X aan Φ^2, dan wordt $l \equiv XF$. Hiermee doet zich een bijzonderheid voor, als u een van de 2 singuliere stralen door F is. De aanvullende rechte XF valt dan met u samen, zoodat 't raakvlak in X aan Φ^2 torsaal raakvlak is aan O^3 volgens u. Daar ditzelfde vlak ook torsaal raakvlak is volgens u aan R_s^4, zal R_s^4 een der bladen van O^3 volgens u aanraken en 't andere snijden. De rest der doorsnede (O^3, R_s^4) wordt gevormd door δ_s^3, a^2 en de andere singuliere straal door F.

7. *De lijn u doorloopt de ster om 'n singulier punt S_1.* Denk dezelfde ligging als in 4a. Dan beschrijft v 't stralenveld van (r_{16}, r_{26}). Daarbij komt 't voor, dat v door een van de singuliere punten S' op r_{16} buiten S_1 gaat. De rechten u en v spelen nu precies dezelfde rol t.o. van O^3. Van de 2 punten (v, R_s^4), die niet in (v, r_{16}) of (v, r_{26}) vallen, komt er één in $S' \equiv (v, r_{16})$. De lijn p_3, die 't nulvlak van dat punt opleverde bij snijding met O^3, valt samen met r_{16}. De limietstand van (p_3, r_{16}) is dus torsaal raakvlak volgens $r_{16} \equiv (S_1 S')$. O^3 is *dimonoïde* wegens S_1 en S'.

Ook kan v bij z'n beweging door 't nulvlak van S_1 door 2 singuliere punten gaan, die een van beide of beide tot a^2 kunnen behooren. 't Laatste is al besproken

in 5^d: O^3 ontaardt. Liggen niet beide bedoelde punten op a^2, dan krijgt men een niet-ontaarde O^3 met *3* dubbelpunten. Hun verbindingslijnen zijn torsale rechten. Door de nulvlakken te beschouwen van de punten op u en v, die daarvoor in aanmerking komen, ziet men gemakkelijk, dat door elk der *3* dubbelpunten *4* verschillende rechten van O^3 gaan. Verder blijkt er op elke torsale rechte nog *1* rechte van O^3 te steunen.

Bij de ∞^2 standen van u behoort 'n net van oppervlakken O^3. Immers: alle exemplaren hebben in S_1 een dubbelpunt, wat neerkomt op 't geven van *4* punten; verder gaan ze door a^2, 't geen met 't geven van $3 \times 2 + 1$ of *7* punten gelijkstaat; eindelijk bevatten ze ook δ_s^3. Daar deze kromme a^2 *2* maal snijdt en door 't dubbelpunt S_1 gaat, beteekent 't gaan door δ_s^3 't voorschrijven van $3 \times 3 + 1 - 4$ of *6* punten. In totaal zijn dus gegeven $4 + 7 + 6$ of *17* punten, d.i. *2* minder dan voor 't bepalen van 'n O^3 noodig zijn. 't Net heeft tot basisfiguur $a^2 + \delta_s^3 + r_{16} + r_{26}$. Om den bundel van O^3's uit 't net te lichten, die door een willekeurig punt Z gaat, moet men alle stralennetten afzonderen, die den beeldstraal z van Z bevatten. Voor deze is u eenige straal uit den waaier S_1 in (S_1, z). De correspondeerende rechten v vormen een waaier in 't nulvlak ν van S_1 met top in $N \equiv (z, \nu)$; dit punt is nulpunt van (S_1, z). De basis van den bundel is die van 't net, aangevuld door de kegelsnede k^2 uit 't nulvlak van N tot 'n figuur van den negenden graad.

Volgens 't boven besprokene bevat 't net *4* bundels van cubische oppervlakken met *2* dubbelpunten; ze behooren bij de waaiers van rechten v in ν, die hun toppen hebben in de singuliere punten, welke ν bevat buiten S_1. Er zijn verder *2* stelsels van ∞^1 oppervlakken O^3 met *2* dubbelpunten, die verkregen worden door u de ribben van de kegels (S_1, δ_s^3) en (S_1, a^2) te laten doorloopen. Daar S_1 op δ_s^3 gedacht is, zijn beide kegels quadratisch.

De oppervlakken O^3, die door eenig punt Z gaan en tot een van de *2* laatstbedoelde stelsels behooren worden opgeleverd door de *2* snijlijnen van zoo'n kegel met (S_1, z); 't zijn dus stelsels met *index 2*. De nulvlakken van de singuliere punten van ν buiten S_1 snijden op meergenoemde kegels, behalve r_{16} en r_{26}, elk nog *1* beschrijvende u in. Hierbij behooren dus *4* oppervlakken O^3 met *3* dubbelpunten, nl, *2* op u en *1* op v. Laat X_1 (op a^2) en Y_1 de *2* andere singuliere punten op r_{16} zijn, X_2 (op a^2) en Y_2 die op r_{26}. Dan wordt b.v. voor 't nulvlak van X_2 u de lijn, die S_1 verbindt met 't punt, waar a^2 voor de tweede maal gesneden wordt door den complexstraal uit X_2 in α. Een O^3 met *3* dubbelpunten bleek ook te behooren bij $v \equiv Y_1\, Y_2$, $Y_1\, X_2$ of $Y_2\, X_1$, terwijl bij $v \equiv X_1\, X_2$ behoort $u \equiv S_1\, A$, dus een O^3, die ontaardt in een regelschaar $+\ \alpha$.

De kegels (S_1, δ_s^3) en (S_1, a^2) hebben *4* ribben gemeen. Twee ervan zijn r_{16} en r_{26}. De 2 andere zijn $S_1\, A_1$ en $S_1\, A_2$. Ligt u volgens een van deze *2* rechten, dan krijgen we een O^3 met biplanair punt in A_1 of A_2. Zoo'n punt, nl. S_1, bezit elk exemplaar van den bundel, die behoort bij den waaier (S_1, ν) van rechten $u\ (\equiv v)$; alle exemplaren hebben in S_1 ν tot gemeenschappelijk raakvlak. Twee exemplaren van dezen bundel zijn regelvlakken, nl. die, welke behooren bij $v \equiv r_{16}$ of r_{26}.

R_s^4 wordt door ν gesneden volgens r_{16} en r_{26} en volgens een kegelsnede l^2. Is v een raaklijn aan l^2, dan raakt ze ook aan R_s^4 en 't zelfde geldt dan voor u. De stralen, die in 4^a r_{36} en r_{46} genoemd zijn, komen tot samenvalling, eveneens de lijnen p_3 en p_4, zoodat (p_3, p_4) torsaal raakvlak wordt. Deze eigenschap komt toe aan een stelsel van oppervlakken O^3 met index *2*. In elken bundel (Z) uit 't net liggen er nl. *2* oppervlakken van deze soort; ze behooren bij de raaklijnen uit N aan l^2. Verder behoort er tot zoo'n bundel *1* exemplaar met biplanair punt in S_1 (opgeleverd door $v \equiv N S_1$) en *8*

exemplaren met 2 dubbelpunten. Deze behooren bij $v \equiv NX_1$, NX_2, NY_1 of NY_2 en bij de 4 rechten u, die op (S_1, δ_s^3) en (S_1, a^2) ingesneden worden door 't nulvlak van N.

Ligt S_1 op a^2, dan zijn geheel overeenkomstige opmerkingen van kracht.

8. *De lijn u doorloopt een willekeurige ster S.*

Er ontstaat weer een net van oppervlakken O^3; de basis is $\delta_s^3 + a^2 + k^2$ uit 't nulvlak van S (nu niet ontaard).

De bijzondere exemplaren zijn gemakkelijk aan te wijzen.

De bundel door 'n punt Z heeft tot basisfiguur die van 't net, aangevuld met 't beeld k'^2 van den complexwaaier N. Dat 't geven van deze basis op juist 18 punten neerkomt, blijkt uit de volgende optelling:

't Gaan door a^2 beteekent 't voorschrijven van $2 \times 3 + 1$ of 7 pp.
't Gaan door δ_s^3 beteekent 't voorschrijven van $3 \times 3 + 1 - 2$ of 8 pp.
[δ_s^3 heeft 2 punten met a^2 gemeen].
't Gaan door k^2 beteekent 't geven van $2 \times 3 + 1 - 5$ of 2 pp.
[k^2 heeft 2 punten met a^2 en 3 punten met δ_s^3 gemeen].
't Gaan door k'^2 beteekent 't geven van $2 \times 3 + 1 - 6$ of 1 p.
[k'^2 heeft 5 punten met $a^2 + \delta_s^3$ gemeen en 1 punt met k^2, nl. 't beeld van SN].

Totaal 18 pp.

De doorsnede van 't net met 'n plat vlak ξ is een net van cubische krommen r^3 met 7 basispunten; dit zijn de punten (ξ, a^2), (ξ, δ_s^3) en (ξ, k^2). De 21 (ontaarde) exemplaren met 2 dubbelpunten van dit net zijn dus onmiddellijk aan te wijzen. 't Zijn de $C_7^2 = 21$ verbindingsrechten van telkens 2 basispunten, aangevuld met de kegelsnede door de 5 overige. Hieruit volgt, dat de congruentie gevormd door de rechten van de netexemplaren 21 tot veldgraad heeft. Tot die congruentie behoort de ster S en 't stralenveld van α; immers 't

net in eenig vlak ξ bevat 'n ontaarde r^3, waarvan de verbindingslijn der punten (ξ, a^2) 't rechte stuk is. Ook 't stralenveld (v) behoort tot de congruentie.

Na afsplitsing van de beide verzamelingen $[0,1]$ blijft haar veldgraad *19*.

Wat is de schoofgraad?

Een O^3 kan een rechte door 'n willekeurig punt Z zenden, als O^3 zelf door Z gaat, dus behoort tot den bundel (Z) uit 't net. De rechten van 'n O^3 zijn tot verschillende soorten terug te brengen:

1°. *lijnen u.* Hiervan is *1* exemplaar voorhanden, nl. SZ. Als $u \equiv SZ$, gaan bij willekeurige ligging geen rechten van andere soort door Z.

2°. *lijnen v.* Hiervan gaat er geen door Z, daar ze alle in 't nulvlak van S liggen.

3°. *singuliere complexstralen,* vroeger (in § *2*) $r_{16}, r_{26}, r_{36}, r_{46}$ en r_{56} genoemd. Ook deze komen niet voor, daar Z willekeurig wordt gedacht, dus niet op R_s^4 of in α.

4°. *rechten van de soort* p_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Deze kunnen niet door Z gaan, daar anders u en v elkaar zouden snijden.

5°. *rechten van de soort* q_k. Hiervoor geldt 't zelfde.

6°. *rechten van de soort* r_{kl} $(k = 1, 2, 3, 4; l = 2, 3, 4, 5; k < l)$. Een lijn r_{kl} is beeld van een regelschaar, bepaald door *3* van de *5* op u steunende singuliere stralen; ze is unisecante van δ_s^3 of a^2.

Zoo leveren de ribben van kegel (Z, δ_s^3) een enkelvoudig oneindig stelsel van regelscharen als beelden, die elk *3* uitzonderingsstralen onder hare beschrijvenden tellen. 't Beeld k^2 van den complexwaaier van eenig punt T snijdt (Z, δ_s^3) in *6* punten Q.

Hierdoor gaan *6* kegelribben, die oppervlakken R^2 tot beelden hebben, welke door T gaan, want Q is 't beeld van QT. Evenzoo gaan er door T nog *4* oppervlakken R^2, opgeleverd door *4* ribben van kegel (Z, a^2). 't Stelsel (R^2) is dus van index *10*. Neem T in S, dan leert 't

voorgaande, dat er *10* regelscharen R^2 zijn, die z bevatten ($z \equiv$ 't beeld van Z) en door S gaan. Deze oppervlakken snijden (S, z) volgens z en volgens een rechte door S, dus volgens een lijn u. De *3* singuliere stralen steunen, evenals z, op u (en op v). En de *10* bijbehoorende rechten r_{kl} liggen dus op oppervlakken O^3 van 't net. De congruentie der rechten van de netexemplaren heeft derhalve *11* tot schoofgraad; en zondert men ook de ster S af, dan is ze een [*10*, *19*].

't Bleek, dat bij z *10* lijnen u behooren. 't Zelfde geldt voor elke andere straal uit waaier N in (S, z). Omgekeerd geeft elke u aanleiding tot *10* regelscharen door N, die in (S, z) *10* rechten van de soort z uitsnijden. Tusschen de stralen van de waaiers S en N in 't vlak (S, z) bestaat dus 'n verwantschap (*10*, *10*). Hun voortbrengsel, een kromme van graad *20* met *10*-voudige punten in S en N is de m.pl. der punten $R \equiv (u, z)$, waar de correspondeerende oppervlakken R^2 door (S, z) worden aangeraakt.

HOOFDSTUK V.

De beelden van de punten en figuren van een plat vlak.

1. *Het beeld van een puntenveld is een congruentie* [2,2]. Laat S 't puntenveld van een vlak V doorloopen. De ∞^2 punten S geven ∞^2 beeldstralen, dus een congruentie $[p, q]$ uit L. De stergraad $p = 2$, want de kegelsnede k^2, die den complexwaaier door 'n willekeurig punt Z afbeeldt, snijdt V in 2 punten S_1 en S_2; en de stralen ZS_1 en ZS_2 zijn de eenigsten door Z, die hun beelden in V hebben. Volgens 'n vroegere opmerking is nu ook de veldgraad $q = 2$, zooals trouwens direct daaruit blijkt, dat in een willekeurig vlak ν geen andere complexstralen liggen met beelden in V dan de 2, die door 't nulpunt van ν gaan. De complexwaaier van 't vlak V zelf behoort in zijn geheel tot de [2,2]. Een willekeurig punt Z van V vormt geen uitzondering op den stergraad 2. De beschrijvenden van de [2,2] door Z zijn: de complexstraal van V door dat punt en de straal, die in dat punt wordt afgebeeld; de beide stralen vallen samen, als Z ligt op de kegelsnede k^2 van V.

Voor sommige punten zijn de 2 beschrijvenden onmiddellijk aan te wijzen. Voor 'n punt van δ_s^3 b.v. zijn 't de 2 singuliere stralen door dat punt; deze zijn immers o. a. toegevoegd aan hunne snijpunten met V. Hetzelfde geldt voor de punten van a^2. Uit een en ander volgt, dat het geheele regelvlak R_s^4 en de waaier (A, α) tot de congruentie behooren.

Tot de [2,2] behooren ook de 5 waaiers, die de $3 + 2$

punten (V, δ_s^3) en (V, a^2) tot middelpunten hebben. Een complexwaaier met top buiten V behoort tot de $[2.2]$, als hij afgebeeld wordt in een lijnenpaar, waarvan de component, die niet singuliere straal is (V bevat in 't algemeen geen singulieren straal) in V ligt. Al deze niet-singuliere bestanddeelen zijn unisecanten XY van a^2 en δ_s^3 òf koorden YY' van δ_s^3 en omgekeerd (II^4). Wegens de bovengenoemde $3+2$ snijpunten van V met $\delta_s^3 + a^2$ liggen er 6 rechten van de soort XY en 3 van de soort YY' in V. Deze geven nog 9 waaiers van de congruentie.

De beeldcongruentie is dus de algemeene congruentie $[2,2]$ *met een eindig aantal singuliere punten* (16).

2. *Het stralenveld van* V.

Beschouwt men V als stralenveld $[u]$, dan blijkt de $[2,2]$ opgebouwd te zijn uit ∞^2 cubische regelvlakken R_u^3, alle met dubbelpunt in 't nulpunt N van V. Deze vormen geen net. Door 'n willekeurig punt Z zal een oppervlak R_u^3 gaan, als dit een complexstraal van waaier (Z) bevat, die in V zijn beeld heeft. De kegelsnede k^2, die bij Z behoort, snijdt V in 2 punten T_1 en T_2. Elke rechte u uit de waaiers (T_1, V) en (T_2, V) heeft als beeld een R_u^3 door Z, want u bevat T_1 of T_2, die de beelden zijn van $T_1 Z$ of $T_2 Z$. Door Z gaan dus 2 stelsels van ∞^1 cubische oppervlakken; aan de stelsels is gemeen 1 exemplaar met dubbelpunt in Z, nl. dat, behoorend bij $u = T_1 T_2$. De 2 bedoelde stelsels zijn geen bundels, maar stelsels met *index* 2, zooals blijkt als wij bedenken, dat de kegelsnede, die den complexwaaier van 'n punt Q afbeeldt, V in 2 punten W_1 en W_2 snijdt; hierdoor gaan $u_1 = T_1 W_1$ en $u = T_1 W_2$, die elk een oppervlak R_u^3 opleveren door Q. Ieder exemplaar van een stelsel snijdt V volgens een lijn u uit waaier (T_1, V) en volgens de 2 stralen uit waaier (N, V), die op u hun beelden hebben. Neemt men voor u de raaklijnen uit N aan

de k^2 van V, dan krijgt men 2 exemplaren, die V tot torsaal raakvlak hebben. Eén der stralen u van waaier (T_1, V) geeft een oppervlak van CAYLEY als beeld, nl. $u \equiv T_1 N$. De complexwaaier van V geeft, als m.pl. van rechten u, een stelsel van louter zulke oppervlakken.

3. *Beeld van een kromme r^n in V.*

In de [2,2] is opgesloten elk regelvlak, dat als beeld behoort bij eenige kromme in V. Neem hiervoor een kegelsnede r^2. Daar elk punt van r^2 één beeldstraal als beschrijvende oplevert, is r^2 enkelvoudige richtlijn van 't afbeeldende regelvlak. De doorsnede met V bevat dus vooreerst r^2. De kegelsnede k^2 van V snijdt r^2 in 4 punten. Hierbij behooren 4 stralen s, die hun beelden op r^2 hebben, dus tot 't regelvlak behooren. De volledige doorsnede is zoodoende van graad 6 en 't beeld een R^6. Hierop liggen 10 singuliere stralen, nl. die, welke behooren bij de $8 + 2$ snijpunten (r^2, R_s^4) en (r^2, α). De 4 punten (s, r^2), die niet op k^2 van V liggen, behooren tot de dubbelkromme van R^6.

Als r^2 door 1, 2, 3, 4 of 5 singuliere punten gaat, worden er van R^6 evenzoovele platte vlakken afgesplitst. Het voorlaatste geval, waarbij R^6 is ontaard in een regelschaar en 4 platte vlakken, komt in anderen vorm nog eens ter sprake, als 't beeld van een R^2 onderzocht wordt. Het laatste geval (r^2 door 5 singuliere punten) doet zich voor met de kegelsnede k^2 van V. Dit vlak en de nulvlakken van de 5 punten (V, δ_s^3) en (V, a^2) vormen de uiterste ontaarding van een R^6. Tot de krommen r^2 door 2 singuliere punten behoort als bijzonder geval (V, ϕ^2). Deze kegelsnede bevat nl. de 2 snijpunten (V, a^2). Na afsplitsing van de waaiers, die met deze punten correspondeeren, blijft er als beeld een R^4 over, geheel opgebouwd uit raaklijnen aan ϕ^2 in punten van r^2. Dit regelvlak is geheel analoog met R_s^4. De doorsnede (R^4, V) bestaat uit r^2 en de raak-

lijnen t_1 en t_2 aan deze kegelsnede uit N. Door geheel overeenkomstige beschouwingen als voor 't singuliere regelvlak R_s^4 gehouden zijn, blijkt, dat er een dubbelkromme van den derden graad is, gaande door N, door de pool F^* van V, door de raakpunten R_1 en R_2 van t_1 en t_2 en door de nulpunten der raakvlakken aan den omhullingskegel uit F^* aan Φ^2 volgens een der 2 raaklijn-complexstralen uit F^*. Deze 2 nulpunten en de punten R_1 en R_2 zijn klempunten van R^4, de beide bedoelde beschrijvenden uit F^* en de raaklijnen t_1 en t_2 zijn torsale rechten.

Analoog met 't beeld van een r^2 zal dat van een r^n (in V) het vlak V snijden volgens r^n en volgens de $2n$ stralen uit waaier (N, V), die de beelden zijn van de punten (r^n, k_V^2). Het is dus een regelvlak R^{3n}; onder de beschrijvenden zijn $5n$ singuliere stralen.

Als r^n een dubbelpunt heeft, krijgt 't beeld een dubbelribbe. Ligt dat dubbelpunt in een singulier punt, dan wordt er van R^{3n} een dubbelvlak afgesplitst. Zoo geeft $r^4 \equiv (R_s^4, V)$ als beeld een figuur van den *twaalfden* graad, bestaande uit 3 dubbelvlakken, 2 éénmaal te tellen vlakken en R_s^4.

Een beeldoppervlak R^{3n} heeft een dubbelkromme, die gaat door de $2n(n-1)$ snijpunten van r^n met de beschrijvende uit N, voorzoover deze punten niet op k_V^2 liggen.

Bij een bundel van krommen r^n behooren ∞^1 exemplaren R^{3n}, die een stelsel vormen met *index* 2. Want de kegelsnede, die den complexwaaier van een punt Z afbeeldt, snijdt V in 2 punten; hierdoor gaan 2 exemplaren van den bundel, die elk een afbeeldend regelvlak door Z opleveren. Het stelsel der oppervlakken R^{3n} snijdt V volgens den bundel, die als uitgangspunt dient en volgens een straleninvolutie van graad $2n$ met N als middelpunt. Er zijn dus in 't stelsel $2(2n-1)$ exemplaren, die V tot torsaal raakvlak hebben (volgens

de coïncidentiestralen). Overigens is V voor alle exemplaren een $2n$-voudig raakvlak, nl. in de $2n$ beeldpunten van de beschrijvenden door N. De beeldstralen van de n^2 basispunten zijn aan alle exemplaren gemeen. Er zijn 5 oppervlakken, die ontaard zijn in een R^{3n-1} en 'n plat vlak, nl. die, welke behooren bij de bundelexemplaren door de singuliere punten van V. Kiest men x basispunten in deze singuliere punten, dan ontstaan stelsels van oppervlakken R^{3n-x}, waarbij $x = 1$, 2, 3, 4, of 5 is. De waarde $x = 5$ vervalt, als $n = 2$. Zijn in dit geval (kegelsnedenbundel) alle basispunten gewone punten van V, dan leveren de 3 lijnenparen van den bundel als beelden 3 oppervlakken R^6, welke ontaard zijn in samenstellen van 2 cubische regelvlakken.

4. *Bijzondere liggingen.*

a. V bevat 1 singuliere straal s van R_s^4. Hierop liggen 2 punten Y_1 en Y_2 van δ_s^3 en 1 punt X_1 van a^2. Verder snijdt V de krommen δ_s^3 en a^2 elk in nog 1 punt: Y_3 en X_2. De 3 singuliere punten X_1, Y_1 en Y_2 leveren 3 waaiers der beeldcongruentie, die den straal s gemeen hebben; s behoort ook tot den waaier van V zelf. Van de 9 verbindingslijnen $Y_k\ Y_l$ of $X_k\ Y_l$ treden er 3 niet als „aanvullende rechte" op, nl. $Y_1\ Y_2$, $X_1\ Y_1$ en $X_1\ Y_2$, daar zij alle langs s vallen. Ook $X_2\ Y_3$ geeft geen afzonderlijken waaier der $[2, 2]$, daar deze lijn „aanvullend" optreedt in de k^2 van V en daar gebleken is, dat elk van de bedoelde rechten slechts in 1 bepaald nulvlak dien rol vervult. Er behooren dus tot de congruentie slechts 6 waaiers met toppen buiten V.

b. V bevat 1 singulieren straal van α. Noem de snijpunten met a^2 X_1 en X_2. De punten (V, δ_s^3) zijn $Y_1 \equiv A$, Y_2 en Y_3. Weer zijn er 4 congruentiewaaiers, waartoe s behoort, waaronder (A, α). Geen waaier met top buiten V wordt opgeleverd door $X_1\ Y_1$, $X_2\ Y_1$ en $Y_2\ Y_3$. De overige verbindingslijnen geven wel aanleiding

tot zoo'n stralenbundel. Hierbij is $A\ Y_{2(3)}$ aanvullende rechte in den waaier van het nulvlak, bepaald door $A\ Y_{2(3)}$ en de raaklijn in A aan δ_s^3.

c. V bevat *2* singuliere stralen $s_1 \equiv X_1\ Y_1$ en $s_2 \equiv X_2\ Y_2$ van R_s^4; $Y_3 \equiv (s_1, s_2)$. Er zijn in dit geval niet *6*, maar *5* congruentiewaaiers met top in V, daar de waaier van V zelf bij 't nulpunt Y_3 behoort. Verder zijn er nog *4* waaiers met top buiten V, nl. die, welke afgebeeld worden in een singulieren straal, aangevuld door $X_1\ X_2$, $X_1\ Y_2$, $X_2\ Y_1$ en $Y_1\ Y_2$. Geheel analoge opmerkingen gelden, als V *1* singulieren straal van R_s^4 en *1* van α bevat.

d. V bevat *2* singuliere stralen van α, dus $V \equiv \alpha$. Bij elk punt van V behoort als beeld de straal van α door dat punt. Dit levert alles samen den complexwaaier (A, α) op. Verder geeft elk punt van a^2 een waaier van congruentiestralen. De geheele $[2, 2]$ is dus uit deze waaiers opgebouwd. Ze heeft a^2 tot singuliere kromme en A tot een geïsoleerd singulier punt.

HOOFDSTUK VI.

De beelden van een regelschaar en van eenige andere figuren.

1. *'t Beeld van een regelschaar is een vierdegraads-ruimtekromme.*

Een regelschaar R^2 wordt uit den complex gelicht door alle stralen te nemen, die *2* willekeurige, elkander kruisende, rechten u en w snijden.

Het nulvlak van eenig punt Z op u snijdt nl. w in één punt T en de beschrijvenden van R^2 zijn de verbindingslijnen van correspondeerende punten uit de projectiviteit: $(Z)\ \pi\ (T)$. Men kan u, w en de aan u toegevoegde richtlijn v van den complex als richtlijnen der schaar beschouwen. Daar R^2 ∞^1 beschrijvenden telt, wordt de m.pl. van hare beelden een ruimtekromme ρ, die geheel op R^2 ligt. De graad van ρ is te vinden door 't aantal snijpunten te bepalen met een plat vlak, b.v. een vlak ν door u. Dit snijdt v in Q, w in R; $s \equiv Q\,R$ is de beschrijvende, die R^2 in ν bezit (behalve de richtlijn u). Zij S het beeld van s, dan wordt ν door de m.pl. van S buiten u in dit ééne punt gesneden. De complexstralen, die op u hun beelden hebben (dus ook op v steunen) vormen een cubisch regelvlak R^3_u, dat door w in *3* punten wordt gesneden. Door deze *3* punten gaan dus *3* beschrijvenden van R^2 met beelden op u, dus in ν. Samen met 't zooeven genoemde snijpunt S zijn dit *4* punten (ν, ρ). De hier gezochte m.pl. is derhalve een ruimtekromme van den vierden graad ρ^4, die u tot trisecante heeft. Alle andere rechten op R^2 van

de soort u zijn dan eveneens drievoudige snijlijnen, alle beschrijvenden s enkelvoudige. Daar uit elk punt van ρ^4 slechts *1* drievoudige snijlijn te trekken is, is R^2 het regelvlak der trisecanten van ρ^4. Het gedrag van ρ^4 t. o. van de rechten van R^2 bewijst, dat ze rationaal is; R^2 is 't eenige quadratische oppervlak, dat door ρ^4 gaat.

Men kan ook tot ρ^4 geraken door te bedenken, dat die kromme, behalve op R^2, ook op het cubische oppervlak O_u^3 liggen moet, dat 't beeld is van 't stralennet (u, v). Zij treedt daarbij op als restdoorsnede.

Eindelijk is R^2 nog te beschouwen als doorsnede van de *2* netten (u, v) en (w, x), zoodat na terzijdestelling van a^2 en δ_s^3 de m.pl. $\rho^{(4)} \equiv (O_u^3, O_w^3)$ moet zijn.

Omgekeerd zou men uit 't gezegde in de eerste alinea een andere afleiding van 't beeld van een bilineaire congruentie (u, v) kunnen putten. Denk toch een willekeurige rechte w. Hierop steunen die stralen der congruentie, welke behooren tot de regelschaar (u, v, w). Deze worden afgebeeld op een ρ^4, die w tot trisecante heeft. Er zijn dus *3* beschrijvenden van het net, die hare beelden op w hebben. Het beeld van de (u, v) is derhalve een O^3.

2. *Nadere bijzonderheden.*

R^2 heeft met a^2 *4* punten gemeen. Hierdoor gaan *4* beschrijvenden s, die afgebeeld worden in die snijpunten, dus ρ^4 steunt in *4* punten op a^2. Evenzoo blijkt, dat ρ^4 in *6* punten op δ_s^3 rust, nl. in de punten (R^2, δ_s^3). De beeldkromme ρ^4 snijdt α in geen andere punten dan de *4* zoo juist genoemde. De *16* snijpunten (ρ^4, R_s^4) zijn nu ook alle vermeld, want de *6* op δ_s^3 tellen elk *2* maal en verder is er 't viertal op a^2.

Daar Φ^2 door ρ^4 in *8* punten wordt gesneden, telt R^2 *8* beschrijvenden, die Φ^2 aanraken. Dit geldt algemeen, want men kan steeds aan een complex denken, die R^2 bevat en deze afbeelden met behulp van 't quadratische

oppervlak Φ^2. Omdat men het eene of 't andere rechtenstelsel van R^2 tot complexstralen maken kan, zijn er in 't geheel *16* beschrijvenden, die Φ^2 aanraken.

De kegel van transversalen $t \equiv F S$, die ρ^4 uit F projecteert, snijdt op R^2 natuurlijk de kromme ρ^4 in en verder nog een tweede vierdegraadsruimtekromme λ^4. Zij L het tweede snijpunt van t met R^2, u de rechte van R^2 door L, die niet tot de soort s behoort. Op u liggen *3* punten $S : S_1$, S_2 en S_3. De *3* verbindingslijnen $F S_k$ snijden s in *3* punten L_k. Hieruit volgt, dat voor de rationale kromme λ^4 de beide soorten van rechten op R^2 haar rollen als secantenstelsels hebben verwisseld. Genoemde kegel heeft *3* dubbelribben. Voor zoo'n dubbelribbe zijn de beide snijpunten met R^2 punten van ρ^4, maar evengoed van λ^4, zooals o. a. blijkt door de beide componenten der dubbelribbe stuk voor stuk te beschouwen. Dit levert 3×2 snijpunten (ρ^4, λ^4) op. Zoo'n snijpunt kan echter nog op 'n andere manier ontstaan. De kegelsnede, volgens welke R^2 aangeraakt wordt door den omhullingskegel uit F, heeft met ρ^4 *4* punten Z gemeen. De lijnen, die F met deze punten verbinden, zijn ribben van den omhullingskegel en tegelijk van den vierdegraadskegel (F, ρ^4). In elk punt Z valt een puntenpaar (S, L) samen. Dit levert nog *4* punten (ρ^4, λ^4) op. Als s^* en u^* de rechten van R^2 zijn door Z, liggen er op s^* nog *2* punten $L : L_1$ en L_2 en op u^* nog *2* punten $S : S_1$ en S_2. Dat er hier in 't vlak (s^*, u^*) slechts *5* verschillende punten van $\lambda^4 + \rho^4$ zijn aan te wijzen, komt doordat dit vlak in Z raakt aan R^2 en daardoor ook aan de beide vierdegraadsruimtekrommen. In 't geheel worden *10* punten (ρ^4, λ^4) gevonden, hetgeen in overeenstemming is met de theorie over de snijding van krommen op een quadratisch regelvlak. Immers $\rho^4 \equiv \rho\,(1, 3)$ en $\lambda^4 \equiv \lambda\,(3, 1)$, zoodat 't aantal snijpunten is: $1 \times 1 + 3 \times 3$. Er bestaat aanraking tusschen (s^*, u^*) en de beide bovengenoemde

kegels volgens $t \equiv F Z$, zoodat (F, ρ^4) en (F, Φ^2) elkander volgens *4* ribben aanraken. Het vlak (u^*, s^*) is als raakvlak aan ρ^4 een bijzonder geval van raakvlakken aan die kromme, zooals elke rechte van de soort u er *3* oplevert: de vlakken door u en de *3* lijnen s, die op u haar beelden hebben; 't zijn de nulvlakken van de punten (s, v).

Neemt men voor u een middellijn van den complex, dan ligt v in 't oneindige, zoodat R^2 een paraboloïde wordt. Maar aan de voorgaande beschouwingen wordt niets gewijzigd.

Als u complexstraal is, wordt $v \equiv u$. In u heeft men dus *2* samengevallen richtlijnen van R^2. Men kan ook zeggen, dat in elk punt N van u het raakvlak aan R^2 voorgeschreven is. Dit is nl. het nulvlak ν van dat punt, daar dit, behalve u, nog een tweede rechte van R^2 door N bevat. Deze tweede rechte is de complexstraal s uit (N, ν), die rust op w. In de doorsnede (R_u^3, R^2), die in 't algemeen uit *3* beschrijvenden s, de lijn u en v (*2* maal geteld) bestaat, moet nú u *3* maal gerekend worden, zoodat R^2 door één der bladen van R_u^3 volgens u wordt aangeraakt. Met ρ^4 doet zich echter geen bijzonderheid voor, ook niet als men ook voor w een complexstraal neemt.

De vraag rijst, of 't tweede stelsel beschrijvenden, waartoe u behoort, deel kan uitmaken van den complex. Hiertoe is vooreerst noodig, dat u en w complexstralen zijn. De rechten u zijn de transversalen van *3* beschrijvenden van de soort s, zeg s_1, s_2 en s_3. Het is echter aan te toonen, dat daarop slechts *2* andere complexstralen rusten, dus geen andere dan u en w. Brengt men toch een vlak μ door s_1 met nulpunt in M, dan zal de lijn, die (s_2, μ) met (s_3, μ) verbindt, in 't algemeen niet door s_1 gesneden worden in M, maar in een punt M'. Tusschen de punten M en M' bestaat een projectief verband. Alleen bij de *2* coïncidenties $M \equiv M'$ is de genoemde

verbindingslijn straal van den complex. Indien in de projectiviteit $(M)\,\pi\,(M')$ 3 coïncidenties optraden, zouden *alle* transversalen over s_k tot den complex behooren. In dit zeer bijzondere geval zou er op R^2 nog een tweede kromme ρ'^4 liggen, die ook 't beeld is van R^2, als men dit oppervlak beschouwt als m.pl. van de rechten der soort u. Deze rechten zouden enkelvoudige, die van de soort s drievoudige snijlijnen zijn van ρ'^4. De beeldkromme ρ'^4 is niet de λ^4, die in dit geval bij ρ^4 behoort. Want een transversaal $t \equiv F\,S$ kan op u niet 't beeld van u insnijden, daar k^2 uit (F, u) op t reeds de punten F en S bevat. Wegens $\rho^4 \equiv \rho\,(1, 3)$ en $\rho'^4 \equiv \rho'\,(3, 1)$ zijn er weer 10 punten (ρ^4, ρ'^4). Deze punten zijn toegevoegd aan beide beschrijvenden door zoo'n punt, dus singuliere punten. Het zijn de 10 snijpunten van R^2 met $\delta_s^3 + a^2$. De nulvlakken van die punten zijn raakvlakken aan R^2 in hun nulpunten.

3. *Ontaarding van* ρ^4.

a. Leg u door F. De transversaal s uit F over v en w is complexstraal en behoort tot R^2. Haar beeld is F. De projecteerende kegel (F, ρ^4) valt uiteen in een plat vlak $\sigma \equiv (F, p)$, als p de aan s toegevoegde poollijn is t. o. van Φ^2, en een cubischen kegel, die u tot dubbelribbe heeft. Deze dubbelrechte en de kegelsnede (σ, Φ^2) vormen de kromme λ^4. De restdoorsnede van den kegel met R^2 is het beeld van dit oppervlak, dus weer een ρ^4. Dat de beeldkromme niet ontaardt al gaat u door een singulier punt (F) was te voorzien, want bij de meest algemeene ligging zijn er 10 rechten van de soort u, die zoo'n punt bevatten.

Alleen als u door A gaat, doet zich een bijzonderheid voor. In dit geval ligt v in α; de singuliere straal s^*, die A met (w, α) verbindt, is beschrijvende van R^2 en behoort in zijn geheel tot 't beeld. Dit bestaat voor 't overige uit een cubische ruimtekromme ρ^3, die de

beelden bevat van alle andere rechten s van R^2. Een willekeurig vlak ν door v snijdt ρ^3 in 't beeldpunt van de in ν liggende lijn s en in de punten (v, a^2). Deze punten immers zijn als singuliere punten o. a. toegevoegd aan de beschrijvenden s van R^2 door die punten. Evenals v zelf bevat elke rechte van die soort *2* punten van ρ^3 en elke rechte s één punt. Dit geldt in 't bijzonder voor s^*, zoodat we te doen hebben met 'n bekende ontaarding der rationale ρ^4: een $\rho^3 + unisecante$.

Van de *4* snijpunten der beeldkromme met a^2 vallen af de punten (s^*, a^2) en van de *6* met δ_s^3 het punt A. De *7* overigen liggen op ρ^3.

Men kan ρ^3 als voortbrengsel zien ontstaan van *3* projectieve vlakkenbundels met assen u, v en v', de aan v toegevoegde poollijn t. o. van Φ^2. Het beeld S toch wordt op een beschrijvende s ingesneden door 't vlak (F, p), als p de toegevoegde poollijn is van s. De lijn v' nu gaat door F, omdat v in α ligt en wordt door p gesneden, omdat s de rechte v snijdt. Hieruit volgt, dat (F, p) steeds door v gaat, zoodat S het snijpunt is van het vlakkendrietal: (u, s), (v, s) en (F, p) door v'. Hiermee is de projectieve ontstaanswijze van ρ^3 opgehelderd. Ook blijkt hier weer, dat u, v, enz. koorden van ρ^3 zijn en tevens, dat v' haar bisecante is uit F.

Bij sommige standen van u (door A) wordt v raaklijn aan a^2. Dan is v ook raaklijn aan ρ^3, zoodat a^2 en ρ^3 elkander aanraken.

Laat men u de geheele ster A doorloopen, terwijl w vastgehouden wordt, dan behoort bij de ∞^2 regelscharen (u, v, w) een tweevoudig oneindig stelsel van krommen ρ^3, die alle liggen op 't cubische oppervlak O_w^3. Zij worden daarop ingesneden door het net van quadratische regelscharen O_u^2 (de beelden van de stralennetten met u en v tot richtlijnen). Door *2* willekeurige punten van O_w^3 gaat *1* exemplaar ter verzameling (ρ^3), omdat door die *2* punten *1* exemplaar van 't genoemde net gaat.

Het gaan van u door *2* of *3* singuliere punten brengt geen ontaarding van ρ^4 mee, tenzij u in α wordt gekozen, maar dit komt op 't zoo juist besproken geval neer, want dan gaat v door A. De ontaarding werd veroorzaakt doordat een singuliere straal s^* uit (A, α) als beschrijvende van R^2 optrad. Behoort s^* tot R_s^4, dan is natuurlijk evengoed $\rho^4 \equiv \rho^3 +$ *unisecante* s^*; ρ^3 snijdt δ_s^3 in *4*, a^2 in *3* punten.

b. Als onder de beschrijvenden s van R^2 *2* singuliere stralen zijn (s_1 en s_2) moet ρ^4 ontaarden in die *2* lijnen en een kegelsnede ρ^2. Deze toestand wordt verkregen door voor u en w *2* transversalen te nemen over s_1 en s_2. Daar ρ^2 geheel op R^2 ligt, steunen s_1 en s_2 elk in *1* punt op die kegelsnede, terwijl zij elkander kruisen. Behooren s_1 en s_2 tot R_s^4, dan heeft ρ^2 *2* punten met δ_s^3 en *2* met a^2 gemeen. Dit zijn de punten $(R^2, \delta_s^3 + a^2)$ buiten s_1 en s_2. Het blijkt hier, dat dit viertal in een plat vlak ligt. Voor 't geval, dat s_1 in α en s_2 op R_s^4 ligt, bevat ρ^2 *3* punten van δ_s^3 en *1* van a^2.

c. Neemt men voor u en w *2* transversalen over *3* singuliere complexstralen s_1, s_2 en s_3, of wat hetzelfde is, beschouwt men de regelschaar $R^2 \equiv (s_1, s_2, s_3)$, dan ontaardt haar beeld in die *3* rechten, aangevuld door nog *1* rechte tot een figuur van den vierden graad. De vierde rechte l is steeds gemakkelijk aan te wijzen. Laat s_k tot R_s^4 behooren. De *6* punten (R_s^2, δ_s^3) zijn de 3×2 punten (s_k, δ_s^3). Van de *4* snijpunten (R^2, a^2) liggen er *3* op s_k, nl. de punten, waar deze lijnen op a^2 steunen. De beschrijvende van R^2 van de soort u uit 't vierde punt op a^2 is de aanvullende rechte l. Immers: vraag naar het beeld van de punten dier rechte. Dit is een regelschaar R'^2, omdat l door *1* singulier punt gaat. En omdat l de singuliere stralen s_k snijdt, behooren deze tot R'^2, dus $R'^2 \equiv R^2$. Dit is 't geval, waarop in IV^2 gedoeld werd bij de bespreking der rechten op een O_u^3.

De tweede mogelijkheid is, dat er van de stralen s_k één tot (A, α) behoort. Van de *10* punten $(R^2, \delta_s^3 + a^2)$ ligt er weer *1* buiten s_k, nu op δ_s^3. De transversaal uit dit punt over s_k is de „4de rechte".

Hiermee zijn alle ontaardingsvormen van de rationale ρ^4 uitgeput, want we zagen achtereenvolgens optreden:

$\rho^3 +$ *unisecante*,
$\rho^2 +$ *2 kruisende unicecanten*,
3 kruisende rechten $+$ *transversaal*.

4. *Eenige andere beelden*

a. Een ρ^n heeft tot beeld een R^{3n}.

Bewijs: bij een willekeurige rechte a behoort een bepaalde rechte b als toegevoegde richtlijn t. o. van den complex. De congruentie van complexstralen (a, b) heeft tot beeld een O^3. Bij de $3n$ punten (ρ^n, O^3) behooren $3n$ stralen, die op a steunen en hun beelden op ρ^n hebben. Het bij ρ^n als beeld behoorend regelvlak wordt dus door a in $3n$ punten gesneden: het is een R^{3n}. Dit oppervlak heeft ρ^n tot enkelvoudige richtlijn; onder de beschrijvenden van R^{3n} zijn $2n$ raaklijnen aan Φ^2, n stralen uit waaier (A, α) en $4n$ rechten van R_s^4. Deze lijnen worden resp. opgeleverd door de punten (ρ^n, Φ^2), (ρ^n, α) en (ρ^n, R_s^4).

b. Het beeld van een R^n is een ρ^{2n}.

Bewijs: zij de beeldkromme ρ^x. Dan is het regelvlak, dat haar afbeeldt, een R^{3x}. Het is echter R^n, aangevuld met de nulvlakken van $5n$ singuliere punten; ρ^x toch bevat de punten $(R^n, \delta_s^3 + a^2)$. Dit geeft de vergelijking $3x = n + 5n$, dus $x = 2n$.

c. Een O^n wordt afgebeeld op een $[2n, 2n]$.

Bewijs: O^n snijdt de kegelsnede k^2 van een willekeurig punt N in $2n$ punten. De stergraad der beeldcongruentie is dus $2n$; want door N gaan geen andere stralen met beelden op O^n dan die door de punten (O^n, k^2). Verder is, volgens een vroegere opmerking, de veldgraad aan

den stergraad gelijk. De congruentie bevat den waaier (A, α) en 't regelvlak R_s^4, beide n maal geteld. Bij de $5n$ punten $(O^n, \delta_s^3 + a^2)$ behooren evenveel waaiers van de $[2n, 2n]$.

d. Een $[n, n]$ uit L wordt afgebeeld op de punten van een O^{3n}.

Laat 't beeldoppervlak O^x zijn. Dit gaat met n bladen door $\delta_s^3 + a^2$, daar in elk punt van deze kromme n stralen van de $[n, n]$ afgebeeld worden. Dus is omgekeerd het beeld van O^x een $[2x, 2x]$, maar ook de $[n, n]$ aangevuld met n maal de congruentie $[5, 5]$, die bestaat uit alle complexwaaiers met nulpunten op $\delta_s^3 + a^2$. Dit geeft de vergelijking $2x = n + 5n$, waaruit volgt $x = 3n$.

5. *Toepassingen.*

a. Gevraagd de doorsnede van een $[p, p]$ en een $[q, q]$ uit L.

De genoemde congruenties hebben tot beeldoppervlakken O^{3p} en O^{3q}, waarvoor $\delta_s^3 + a^2$ een p-voudige, resp. q-voudige kromme is. Deze levert voor den graad der doorsnede $5pq$ eenheden. De restdoorsnede (O^{3p}, O^{3q}) is dus een ruimtekromme van graad $9pq - 5pq = 4pq$. Het regelvlak, dat op deze ruimtekromme wordt afgebeeld, dus een R^{2pq}, is gemeen aan de $[p, p]$ en de $[q, q]$.

Controle: 2 bilineaire congruenties (a, b) en (c, d) uit L hebben een R^2 gemeen, nl. de regelschaar (a, b, c). Dit klopt, want hier is $p = q = 1$, dus $2pq = 2$.

b. Hoeveel complexstralen zijn gemeen aan een R^n en een $[p, p]$?

Het beeld van de $[p, p]$ is weer een O^{3p}, dat met p bladen door $\delta_s^3 + a^2$ gaat. R^n wordt afgebeeld op een ρ^{2n}, waarop $5n$ singuliere punten liggen. Van de $6pn$ punten (O^{3p}, ρ^{2n}) zijn er dus $6pn - p \times 5n = pn$ niet-singulier. Zoo groot is dan ook 't aantal der gevraagde complexstralen.

Controle: neem als congruentie de $[1, 1]$, die u en v tot richtlijnen heeft en als regelvlak een R^2 met a, b en c tot richtlijnen. Dan is $p = 1$, $n = 2$, dus 't antwoord moet 2 worden. Nu is aan de netten (u, v) en (a, b) een regelschaar S^2 gemeen. Deze wordt door c in 2 punten gesneden. De beschrijvenden van S^2 door die 2 punten zijn de gevraagde.

c. Hoeveel stralen heeft L met een willekeurig regelvlak R gemeen?

Laat ρ^a, ρ^b en ρ^c drie richtlijnen zijn van het regelvlak. Op ρ^a steunt een congruentie $[a, a]$ van complexstralen. Deze heeft met de $[b, b]$, die op ρ^b steunt, een regelvlak van graad $2\,a\,b$ gemeen. En hiervan behooren weer $2\,a\,b\,c$ beschrijvenden tot de $[c, c]$, die met ρ^c correspondeert. Hiermee is de doorsnede (L, R) gevonden; zij bestaat blijkbaar uit evenveel stralen als de graad van R bedraagt.

Dit gaat nog door, als de richtlijnen snijpunten vertoonen. Is b.v. $S \equiv (\rho^a, \rho^b)$, dan valt van 't regelvlak de kegel (S, ρ^c) af, zoodat de graad is $2\,a\,b\,c - c$. Bedoelde kegel heeft echter juist c beschrijvenden met L gemeen: de rechten, volgens welke hij gesneden wordt door 't nulvlak van S. Voor de doorsnede (L, R) blijven dus $2\,a\,b\,c - c$ rechten over. Zoo wordt voor elk snijpunt van ρ^a en ρ^b zoowel 't graadgetal van R als 't aantal rechten, waaruit (L, R) bestaat, met c eenheden verminderd; analoog met a, resp. b eenheden voor elk snijpunt (ρ^b, ρ^c) resp. (ρ^a, ρ^c).

Heeft R meer beschrijvenden met L gemeen dan met zijn graad overeenkomt, dan behoort R in z'n geheel tot L.

Controle: als R^2 3 beschrijvenden telt onder de stralen van L, zal volgens het voorgaande R^2 uit complexstralen zijn opgebouwd. Dit is als volgt te controleeren. Leg over de 3 bedoelde beschrijvenden s_1, s_2 en s_3 drie transversalen, waarvan er 2 willekeurig gekozen worden

(p en q), terwijl als derde genomen wordt de toegevoegde richtlijn p' van p t. o. van L. De regelschaar $R^2 \equiv (s_1, s_2, s_3)$ is identiek met (p, q, p'), maar deze bestaat uit louter complexstralen daar al haar beschrijvenden tot de complexcongruentie (p, p') behooren.

HOOFDSTUK VII.

Afbeeldingen van L, waarbij een waaier een kegelsnede oplevert.

1. *De hoofdeigenschap en haar directe gevolgen.*

Als hoofdeigenschap van de besproken afbeelding is te beschouwen, dat een waaier uit L afgebeeld wordt op een kegelsnede k^2. Hoe de afbeelding verder ook is ingericht en *onverschillig of straal en beeldpunt incident zijn of niet,* steeds keeren bijna alle eigenschappen terug. Onmiddellijke gevolgen van de hoofdeigenschap zijn:

a. Een puntenveld V wordt afgebeeld op een $[2,2]$, omdat door een willekeurig punt P zooveel beeldstralen gaan als 't aantal punten (V, k_P^2) bedraagt; verder is: veldgraad der beeldcongruentie = stergraad.

b. Een oppervlak O^n geeft analoog een $[2n, 2n]$, omdat er $2n$ punten (O^n, k_P^2) zijn.

c. Een regelvlak R^n heeft een ρ^{2n} tot beeld, daar een vlak V door de beeldkromme in $2n$ punten gesneden wordt, welk aantal nl. gelijk is aan 't aantal gemeenschappelijke stralen van R^n en de congruentie $[2,2]$, die V afbeeldt.

2. *De andere beeldfiguren.*

Laat O^a het beeld zijn van een net uit L.

Dan wordt een puntenreeks u afgebeeld op een regelvlak R^a. Op 'n willekeurige rechte l steunen immers die beschrijvenden, welke afgebeeld worden in de a snijpunten van u met 't beeld O^a van het bij l behoorend net uit L.

Een ρ^n wordt afgebeeld op een $R^{a\,n}$. Dit blijkt door op de $a\,n$ punten (O^a, ρ^n) te letten.

Eindelijk is 't beeld van een $[n, n]$ uit L een oppervlak $O^{a\,n}$. Want een rechte l heeft zooveel snijpunten met 't beeldoppervlak als 't aantal gemeenschappelijke stralen bedraagt van de $[n, n]$ en 't bij l behoorend regelvlak R^a. Dit aantal nu is $n\,a$.

3. *De singuliere figuren.*

Denk *3* vlakken door een punt P. De *3* beeldcongruenties $[2,2]$ van die vlakken hebben *16* (of ∞) stralen gemeen. Slechts *1* hiervan is 't beeld van P. De overige zijn aan meer dan *1* punt als beeld toegevoegd, dus singulier. Onderstel, dat 'n singuliere straal r in de afbeelding gekoppeld is aan een ρ^b. Het beeld van een R^2, dat *3* singuliere stralen met L gemeen heeft, dus geheel tot L behoort, is volgens 1^c een ρ^4, maar bevat o. a. *3* krommen ρ^b, dus $4 > 3\,b$ of $b < \frac{4}{3}$, dus $b = 1$.

De beelden van een singulieren straal liggen dus op een *rechte* d. Alle rechten d vormen samen een regelvlak D_s^x, waarop de beelden liggen van alle beschrijvenden r van het regelvlak der singuliere stralen R_s^y.

Een singulier punt D zij aan een regelvlak R^v uit L toegevoegd. De m.pl. van R^v is een congruentie $\Sigma \equiv [z, z]_s$, die de beeldstralen omvat van alle singuliere punten, welke samen een kromme δ_s^w vormen.

4. *Samenhang der singuliere figuren.*

a. Het beeld van een rechte d is een R^a, maar ook een singuliere straal (graad *0*), aangevuld door zooveel regelvlakken R^v als 't aantal punten (d, δ_s^w) bedraagt. Dus: een lijn d steunt in $\frac{a}{v}$ punten op δ_s^w. Als omgekeerd een rechte $\frac{a}{v}$ maal op δ_s^w rust, moet zij een der

rechten d zijn, daar anders 't regelvlak, dat haar punten afbeeldt, een graad zou krijgen, hooger dan a.

Het oppervlak D_s^x is derhalve het regelvlak der $\frac{a}{v}$-voudige snijlijnen van de singuliere kromme δ_s^w.

b. Uit 't voorgaande volgt direct, dat elke singuliere straal tot $\frac{a}{v}$ regelvlakken R^v behoort. Omgekeerd is elke straal, waardoor meer dan *1* oppervlak R^v gaat, singulier. Dus:

R_s^y is $\frac{a}{v}$-voudig regelvlak van Σ.

c. Een singulier punt D is in de afbeelding toegevoegd aan een R^v. Het beeld hiervan is omgekeerd een ρ^{2v}, maar ook: D, aangevuld door zooveel rechten d als 't aantal stralen bedraagt, dat R^v met R_s^y gemeen heeft. Dit aantal is dus $2v$. En heeft een regelvlak van graad v dit aantal beschrijvenden met R_s^y gemeen, dan is 't een oppervlak R^v, daar anders de graad der afbeeldende ruimtekromme te hoog zou uitvallen. Dus:

De congruentie Σ is de m.pl. der regelvlakken van den graad v, die $2v$ rechten gemeen hebben met R_s^y.

d. Uit (*c*) volgt, dat door elk singulier punt $2v$ rechten d gaan. En gaat door 'n punt meer dan *1* lijn d, dan is dat punt singulier. Derhalve:

δ_s^w is $2v$-voudige kromme van D_s^x.

5. *De graden der singuliere figuren* (x, y, z, w).

a. Een net $[1,1]$ uit L heeft met elk oppervlak R^v v stralen gemeen. Deze hebben hun beelden in *1* punt van δ_s^w. Dus 't beeld O^a van de $[1,1]$ gaat met v bladen door δ_s^w. Insgelijks is δ_s^w een v-voudige kromme op 'n tweede beeldoppervlak O'^a, behoorend bij 'n andere $[1,1]$. In (O^a, O'^a) telt δ_s^w dus voor een stuk van den graad $v^2 w$. De restdoorsnede van den graad $a^2 - v^2 w$ is

't beeld van de R^2, die aan de beide netten gemeen is. Dit beeld is een ρ^4, dus:

$$a^2 - v^2 w = 4 \text{ of } w = \frac{a^2 - 4}{v^2}.$$

b. Een puntenveld V snijdt elke rechte d in *1* punt, dat afgebeeld wordt op een bepaalden straal van R_s^y. De beeldcongruentie $[2,2]$ van V bevat dus 't regelvlak der singuliere stralen. Evenzoo behoort R_s^y tot het beeld van een tweede vlak V'; noem dit beeld $[2,2]'$. De doorsnede van $[2,2]$ en $[2,2]'$ is een R^8. Dit bestaat uit R_s^y en de restdoorsnede R^{8-y}, die de beelden bevat van de punten der rechte (V, V'). Deze rechte wordt echter afgebeeld op een R^a, dus geldt:

$$8 - y = a, \text{ waaruit volgt } y = 8 - a.$$

c. Een waaier uit L heeft met $\Sigma \equiv [z, z]_s$ z stralen gemeen; zijn beeld k^2 steunt dus in z punten op δ_s^w. Het beeld O^a van een $[1,1]$ heeft dan met k^2 op δ_s^w vz punten gemeen, wegens de v-voudigheid dezer kromme voor genoemd beeldoppervlak. Verder is er nog *1* punt (O^a, k^2) buiten δ_s^w, nl. 't beeld van den eenigen straal, dien de beschouwde waaier met de $[1,1]$ gemeen heeft. Daar 't totale aantal snijpunten (O^a, k^2) $2a$ is, wordt

$$2a = vz + 1, \text{ dus } z = \frac{2a - 1}{v}.$$

d. Een rechte u heeft met D_s^x x punten gemeen. Daaruit volgt, dat R^a, 't beeld van u, op R_s^y x beschrijvenden telt. Het beeld $[2,2]$ van een veld V heeft dus met R^a ook x stralen gemeen, daar immers R_s^y tot de $[2,2]$ behoort. 't Punt (u, V) levert nog *1* straal op, die gemeenschappelijk is aan R^a en de $[2,2]$. En daar de doorsnede van deze *2* figuren uit $2a$ stralen bestaat, heeft men:

$$2a = x + 1 \text{ of } x = 2a - 1.$$

e. In 't voorgaande is gevonden:

(1) $x = 2a - 1$ (3) $z = \frac{2a-1}{v}$

(2) $y = 8 - a$ (4) $w = \frac{a^2-4}{v^2}$.

Uit (2) volgt $a < 8$ en uit (4) $a^2 > 4$ of $a > 2$. Dus $a = 3, 4, 5, 6$ of 7. Volgens (3) is:

$2a - 1 = v$-*voud*, dus v *is oneven.*

Leg een ρ^3 door 6 singuliere punten. Het beeld R^{3a} van ρ^3 bevat o. a. 6 regelvlakken R^v, zoodat $3a > 6v$ of $v < \frac{1}{2}a$, dus zeker $v < 3\frac{1}{2}$.

Daar v oneven is, heeft men $v = 1$ of 3.

Onderstel $v = 3$, dan moet $2a - 1 = 3$-*voud* en tevens volgens (4) $a^2 - 4 = 9$-*voud* zijn. Bij substitutie blijkt geen der mogelijke waarden van a hieraan te voldoen.

Dus $v = 1$, in woorden:

Een singulier punt wordt afgebeeld op een waaier uit L.

Daar volgens 4^d het regelvlak D_s^x met $2v$ bladen door δ_s^w gaat, is deze lijn *dubbelkromme* voor bedoeld oppervlak. Op de gebruikelijke wijze vindt men voor haar graad $w = 2x - 5$. Neemt men in aanmerking, dat

(1) $x = 2a - 1$ en (4) $w = a^2 - 4$,

dan volgt hieruit

$a^2 - 4 = 4a - 7$ of $a^2 - 4a + 3 = 0$.

$a = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$; $a = 3$ of 1.

De waarde $a = 1$ was echter reeds uitgesloten, dus $a = 3$.

Verder wordt nu:

$x = 2a - 1 = 5$ $\quad z = 2a - 1 = 5$

$y = 8 - a = 5$ $\quad w = a^2 - 4 = 5$.

f. De congruentie $[z, z]_s \equiv [5, 5]_s$ omvat volgens 4^e alle regelvlakken van den graad v, d. w. z. alle complexwaaiers, die 2 stralen met R_s^y gemeen hebben. Bedoelde congruentie heeft dus een singuliere kromme ρ_1 die niets anders is dan de dubbelkromme van R_s^y. Zooals behoort vindt men voor den graad van ρ in haar beide hoe-

danigheden 't zelfde getal, nl. 5. Noem deze kromme ρ_s^5. Elk harer punten R is top van een waaier, die tot beeld heeft het lijnenpaar (d), dat toegevoegd is aan de 2 singuliere stralen r door R. Het snijpunt der lijnen d is natuurlijk een punt D der singuliere kromme. Omgekeerd behooren bij een punt D 2 rechten d, hierbij 2 beeldstralen r met een snijpunt R. Wegens dezen samenhang (1,1) zijn ρ_s^5 en δ_s^5 van 't zelfde geslacht. Hoe groot is dit?

Dat 't geslacht niet 0 is volgt reeds daaruit, dat D_s^5 het *trisecanten-regelvlak* is van δ_s^5 (zie 4^a). Was δ_s^5 rationaal, dan zou 't regelvlak der 3-voudige snijlijnen van den graad 8 zijn. Evenzoo is R_s^5 het *vijfdegraadstrisecantenoppervlak* van ρ_s^5. Dit volgt uit 4^b. Als volgt kan blijken, dat δ_s^5 (dus ook ρ_s^5) van 't geslacht 1 is.

Twee netten uit L hebben 2 cubische oppervlakken O^3 en O'^3 tot beelden. De regelschaar R^2, die aan de netten gemeen is, wordt afgebeeld op de vierdegraadsrestdoorsnede $\rho^4 \equiv (O^3, O'^3)$ na terzijdestelling van δ_s^5. De theorie der doorsnijding van 2 algebraïsche oppervlakken O^m en O^n, wier doorsnede ρ^{mn} uit een ρ^p en een ρ^q is opgebouwd, leert nu dat

$$h_{pq} + 2\,h_q = q\,(m-1)\,(n-1).$$

Hierin beteekenen: h_{pq} 't aantal rechten door een punt P, die 1 punt met ρ^p en een ander met ρ^q gemeen hebben en h_q het aantal koorden van ρ^q door P. We passen dit toe op

$$\rho^9 \equiv (O^3, O'^3) \equiv \rho^4 + \delta_s^5.$$

Daarbij is $h_{pq} = 10$, want de kegels (P, ρ^4) en (P, δ_s^5) hebben wel 20 ribben gemeen, maar 10 ervan snijden ρ^4 en δ_s^5 niet in verschillende punten; op ρ^4 liggen nl. de 10 punten D (dus punten van δ_s^5), waarin afgebeeld worden de 10 stralen, die R^2 met $[5,5]_s$ gemeen heeft. Verder is $q = 5$, $m = n = 3$, zoodat de aangehaalde vergelijking oplevert: $10 + 2\,h_q = 5\,(3-1)\,(3-1)$, waaruit volgt $h_q = 5$, dus δ_s^5 is van 't geslacht 1. Het

is hiermee in overeenstemming, dat door δ_s^5 ∞^4 cubische oppervlakken te leggen zijn. L toch omvat ∞^4 netten en elk van deze heeft z'n eigen beeld O^3 door δ_s^5. Dat een O^3 door δ_s^5 moet gaan, is dus een *15*-voudige voorwaarde.

6. *Samenvatting.*

Er is een vijfdegraads singuliere kromme (δ_s^5) van 't geslacht 1, wier punten de beelden zijn van complexwaaiers, die samen een $[5,5]_s$ vormen. Haar singuliere kromme ρ_s^5, eveneens van graad 5 en geslacht 1, heeft een vijfdegraads-trisecantenregelvlak R_s^5, dat als singulier oppervlak optreedt en dat omgekeerd ρ_s^5 tot dubbelkromme bezit. Het wordt afgebeeld op de beschrijvenden van een regelvlak D_s^5, dat met 2 bladen door δ_s^5 gaat en omgekeerd van deze kromme 't trisecantenregelvlak is.

Gelet op deze singuliere figuren zijn aangaande de besproken beelden de volgende aanvullingen te geven.

a. Een waaier W wordt afgebeeld op een k^2, die geheel bepaald is door de *5* punten (δ_s^5, k^2), welke de beelden zijn van de stralen (W, Σ). Hierbij is weer $\Sigma \equiv [5,5]_s$.

b. Een net N heeft tot beeld een oppervlak O^3 door δ_s^5, dat *5* rechten d bevat, nl. de beelden van de singuliere stralen (N, R_s^5).

c. Een puntenreeks u wordt afgebeeld op een R^3, dat *5* beschrijvenden gemeen heeft met R_s^5, de beelden van de punten (u, D_s^5).

d. Een puntenveld V heeft tot beeld een $[2,2]$, die R_s^5 omvat. Daartoe behooren *15* waaiers: *5* ervan zijn de beelden van de punten (V, δ_s^5) en de *10* overige zijn de waaiers, die afgebeeld worden op een k^2, welke een der *10* verbindingslijnen van de punten (V, δ_s^5) tot niet-singulier bestanddeel heeft (zie 7^a). Van den waaier in V behooren slechts *2* stralen tot de $[2,2]$.

e. Het beeld van een regelvlak R^n is een ρ^{2n}, die

met δ_s^5 $5n$ punten gemeen heeft: de beelden van de stralen (R^n, Σ).

f. Het beeld van een ruimtekromme ρ^n is een R^{3n}, dat onder de beschrijvenden $5n$ singuliere stralen heeft, behoorend bij de punten (ρ^n, D_s^5).

g. Een oppervlak O^n wordt afgebeeld op een $[2n, 2n]$, waartoe R_s^5, n maal geteld, behoort, daar elke rechte d door O^n in n punten wordt gesneden.

h. Een congruentie $[n, n]$ uit L heeft tot beeld een oppervlak O^{3n}, dat met n bladen door δ_s^5 gaat, omdat in elk punt D van de singuliere kromme afgebeeld worden de n stralen, die $[n, n]$ met den aan D toegevoegden waaier gemeen heeft.

7. *Ontaarding.*

Er zijn ook allerlei eigenschappen op te stellen, die betrekking hebben op ontaarding van beeldfiguren en die voor alle hier bedoelde afbeeldingen geldig zijn. Hier volgen een paar voorbeelden:

a. Als een waaier zijn top (R) heeft op de singuliere kromme, dan bestaat k_R^2 uit de 2 rechten d, die de beelden zijn van de 2 stralen r door R.

Ligt de waaiertop in een *willekeurig* punt P van 'n singulieren straal r, dus ergens op R_s^5 buiten δ_s^5, dan ontaardt k_P^2 in een lijnenpaar, dat bestaat uit de aan r toegevoegde lijn d, aangevuld door een r snijdende koorde k van δ_s^5. De steunpunten deze koorde zijn de punten D, die overeenkomen met de beide buiten r gelegen snijpunten van 't waaiervlak met ρ_s^5.

Zij omgekeerd k een koorde van de singuliere kromme, K haar snijpunt met D_s^5 buiten δ_s^5 en d de beschrijvende van D_s^5 door K. Laat verder r de singuliere straal zijn, die met d overeenkomt en R het punt op ρ_s^5, dat aan een der steunpunten van k gekoppeld is. Dan ligt er in (r, R) een waaier, die tot beeld heeft $d + k$. Hieruit volgt:

De m.pl. van de niet-singuliere bestanddeelen van ontaarde waaierbeelden is de congruentie [5, 10], *opgebouwd uit de koorden der singuliere kromme.*

b. Indien een rechte u op δ_s^5 steunt, ontaardt het beeld R^3 in een regelschaar, aangevuld door een plat vlak, dat gevormd wordt door den waaier, die als beeld bij 't steunpunt behoort.

Is u koorde van de singuliere kromme, dan worden er analoog van R^3 2 platte vlakken afgesplitst, zoodat er nog een derde vlak is, gevormd door 'n waaier, die uit de beelden van de puntenreeks u bestaat. Zijn ligging is onder (a) aangegeven.

Eindelijk ontaardt R^3 in een vlakkendrietal door één rechte, als u een lijn d is. De 3 vlakken bevatten de waaiers, waarop de 3 singuliere punten van d worden afgebeeld en snijden elkander volgens den met d overeenkomenden singulieren straal r.

8. *Eenvoudig voorbeeld ter controle.*

Dit is te ontleenen aan de afbeelding met behulp van een quadratisch oppervlak Φ^2, die in de vorige hoofdstukken uitvoerig onderzocht is.

Aan een straal s wordt als beeld toegevoegd het snijpunt S van de poollijn p van s t. o. v. Φ^2 met de transversaal t uit 't vaste punt F over s en p. Omgekeerd zou men bij S den beeldstraal s kunnen vinden als doorsnede van 't poolvlak σ van S met 't nulvlak van (t, σ), als $t \equiv F S$.

Met 't oog op de hier bedoelde controle is het eenvoudiger op te merken, dat de poollijnen p zelf ook een lineairen complex (p) vormen. Immers in een willekeurig vlae ν ligt een waaier van lijnen p, nl. de poollijnen van den tot L behoorenden waaier om de pool van ν. En nu kan men S opvatten als beeld van p, ontstaan door de in Hoofdstuk I besproken afbeelding op den complex (p) toe te passen. *Bij toepassing op* (p) zullen we deze

afbeeldingswijze met $[A]$ aanduiden. Omgekeerd kan nu uit S met behulp van $[A]$ de lijn p gevonden worden en hierbij de toegevoegde poollijn s als beeld van S. Hiermee is de nieuwe afbeelding $[A]^*$ tot $[A]$ teruggebracht.

Het beeld van een waaier (s) volgens $[A]^*$ is nu blijkbaar identiek met 't beeld volgens $[A]$ van den waaier (p), die uit de toegevoegde poollijnen van (s) bestaat, dus een kegelsnede k^2.

Verder wordt een net (u, v) afgebeeld op een oppervlak, dat volgens $[A]$ ontstaat uit de $[1,1]$ die de toegevoegde poollijnen u' en v' (van u en v t. o. v. Φ^2) tot richtlijnen heeft, dus op een O^3.

Uit de beelden k^2 en O^3, waarvan 't eerste trouwens in H. II § 1 onder den naam l^2 ter sprake kwam, volgen alle andere.

Hoe staat 't met de singuliere figuren bij $[A]^*$? Een straal s is singulier, als de correspondeerende lijn p het in $[A]$ is. Bij de afbeelding van den complex (p) volgens $[A]$ ontstaat als m.pl. der singuliere stralen: de p-waaier in α en een regelvlak van den vierden graad D_s^4, opgebouwd uit de stralen van (p), die tevens raaklijnen zijn aan Φ^2 in de punten van (Φ^2, α). Het singuliere regelvlak bij $[A]^*$ is dus: de complexwaaier om F, aangevuld door een vierdegraadsregelvlak, dat blijkbaar geen ander is dan 't geen vroeger R_s^4 is genoemd. Wij hebben dus:

$$R_s^5 \equiv R_s^4 + \textit{waaier om } F, \text{ terwijl}$$
$$D_s^5 \equiv D_s^4 + \textit{p-waaier in } \alpha.$$

Een punt S is singulier bij $[A]^*$, als het dit is in $[A]$. Bij de laatste afbeelding is de m.pl. der singuliere punten opgebouwd uit de (steeds optredende) kegelsnede $a^2 \equiv (\Phi^2, \alpha)$ en de derdegraadsdubbelkromme Δ_s^3 van D_s^4, dus ook in $[A]^*$ geldt:

$$\delta_s^5 \equiv a^2 + \Delta_s^3.$$

Als congruentie Σ treedt op de $[5, 5]$, die bestaat

uit de rechten s, welke de poollijnen zijn van de stralen p der $[5, 5]$, die de waaiers van (p) omvat met toppen op δ_s^5. Zoo'n waaier uit de laatstgenoemde $[5, 5]$ bevat 2 singuliere stralen der afbeelding $[A]$, die als toegevoegde poollijnen hebben 2 snijdende rechten van R_s^5. Haar snijpunt, dat waaiertop is van een waaier uit Σ, ligt dus op de dubbelkromme ρ_s^5 van R_s^5. Deze bestaat uit de δ_s^3 van vroeger, aangevuld door de kegelsnede a^{*2}, die als restdoorsnede optreedt bij de snijding van R_s^4 met 't nulvlak van F. Deze doorsnede toch omvat volgens 't vroeger gevondene ook 2 complexstralen door F. Naar behooren is de singuliere kromme van Σ tevens dubbelkromme van R_s^5, terwijl de dubbelkromme van D_s^5 als singuliere kromme (δ_s^5) der afbeelding dienst doet.

Het is ten slotte direct in te zien, dat δ_s^5 en ρ_s^5 vijfdegraadsfiguren van 't geslacht 1 zijn: ze bestaan beide uit een cubische ruimtekromme en een deze 2 maal snijdende kegelsnede. Voor 't overzicht diene:

$R_s^5 \equiv R_s^4 +$ *waaier* (F); $\rho_s^5 \equiv \delta_s^3 + a^{*2}$.

$D_s^5 \equiv D_s^4$ (door a^2) $+$ *p-waaier* in α; $\delta_s^5 \equiv \Delta_s^3 + a^2$.

Hierbij hebben R_s^4, δ_s^3, a^2 en α de beteekenis, die daaraan in de vorige hoofdstukken steeds is toegekend.

9. *Hoofdpunten en hoofdstralen der afbeelding.*

Hierop is in 't voorgaande niet gelet.

a. In 't bijzondere geval, dat een (singulier) punt H aan meer dan 1 waaier is toegevoegd, is het 't beeld van oneindig veel waaiers. Deze kunnen geen $[2, 2]$ (of hoogeregraadscongruentie) vormen. Want een R^2 zou hierin 4 stralen hebben en de afbeeldende ρ^4 dus een 4-voudig punt in H, wat niet kan. Dus:

H is het beeld van een $[1, 1]$.

Er kunnen geen 2 (of meer) hoofdpunten zijn. Immers een R^2 zou met elk van de beeldcongruenties $[1, 1]$ 2 stralen gemeen hebben, hetgeen zou leiden tot 2 dubbelpunten in de beeldkromme ρ^4; dit nu is onmogelijk.

De richtlijnen u en v van 't bij H behoorend net maken deel uit van ρ_s^5, want elk punt van u en v is top van een waaier, die 2 singuliere stralen moet bevatten. Dit zijn nl. de rechten r, uit wier beelden d het correspondeerend waaierbeeld moet bestaan. Hieruit volgt: als er een hoofdpunt is, is de dubbelkromme van 't singuliere regelvlak zeker ontaard. Omdat u tot ρ_s^5 behoort zenden de punten R op u waaiers uit, die samen het *tot* Σ *behoorende* net vormen, dat in H wordt afgebeeld. Daar de punten R van v *hetzelfde* net opleveren, moet dit als bestanddeel der $[5, 5]_s$ 2 maal geteld worden.

De aanwezigheid van H geeft eenige bijzonderheden in de beeldfiguren. Alle kegelsneden k^2 gaan door H en hebben daar 2 samenvallende punten met δ_s^5 gemeen; dit komt doordat de correspondeerende waaier een straal bevat, die als beschrijvende van de meergenoemde $[1, 1]$ dubbel te tellen is. Hieruit valt af te leiden, dat H dubbelpunt is van δ_s^5.

De ρ^4, die een R^2 afbeeldt, heeft in H een dubbelpunt. Het beeld O^3 van een net heeft H tot kegelpunt.

Op de graden der beeldfiguren en der singuliere figuren heeft H geen invloed, want de beschouwingen van § 4 en § 5 blijven doorgaan, mits men de $[1, 1]$, die bij H behoort opneemt in de congruentie Σ en wel 2 maal. Alleen mag men niet langer zeggen, dat er tusschen de punten van δ_s^5 en ρ_s^5 een verband $(1, 1)$ bestaat.

b. Een (singuliere) straal h is hoofdstraal, als hij op 2 puntenreeksen d wordt afgebeeld; hij heeft in dat geval een geheel regelvlak (d) tot beeld, dat niet van den tweeden (of hoogeren) graad kan zijn. Immers dit regelvlak zou omgekeerd op een $(4, 4)$ afgebeeld moeten worden, waarvoor niets anders beschikbaar is dan de parabolische congruentie om de as h (opgeleverd door singuliere punten op (d)) en de $[1, 1]$, die behoort bij 't eene hoofdpunt, dat mogelijkerwijs op (d) ligt. Dus: *h is toegevoegd aan een plat vlak, gevormd door rechten d.*

Dit vlak, als puntenveld beschouwd, moet een $[2, 2]$ tot beeld hebben. Deze congruentie bestaat uit de $[1, 1]$, die h tot as heeft en de $[1, 1]$, die toegevoegd is aan het hoofdpunt, dat blijkbaar op (d) ligt. Uit een en ander volgt, dat h niet alleen beschrijvende van R_s^5 is, maar ook deel uitmaakt van de dubbelkromme ρ_s^5; door h gaan 3 bladen van 't singuliere regelvlak.

Als bestanddeel van D_s^5 is 't vlak (d) tweemaal in rekening te brengen. Het is nl. de m.pl. der rechten d, waarop h wordt afgebeeld, maar ook wordt 't opgeleverd door componenten d van de lijnenparen, die de beelden zijn van complexwaaiers met toppen op h.

Er is slechts 1 hoofdstraal mogelijk, want elke hoofdstraal brengt 't bestaan van een hoofdpunt met zich.

10. *Voorbeeld van een afbeelding met een hoofdpunt.*

a. Denk 2 vaste vlakken α en β en 3 vaste punten A, B en C, waarvan A in α ligt, doch overigens willekeurig is. Een straal s snijdt α in P, β in Q. Trek uit C de transversaal t over $a \equiv A\,P$ en $b \equiv B\,Q$. Het snijpunt $S \equiv (b, t)$ wordt als beeld van s genomen. Uitgaande van S kan men omgekeerd $S\,C$ en $S\,B$ trekken. Door de eerste lijn wordt a bepaald en door de andere 't punt Q. Verder is de beeldstraal s die straal uit den waaier van L om Q, welke op a steunt.

b. Laat s een waaier (N, ν) doorloopen. Dan doorloopt a den waaier (A, α) en b een daarmee projectieven waaier in 't vlak μ door B en $n \equiv (\nu, \beta)$. Hiermee correspondeeren 2 projectieve vlakkenbundels om de (snijdende) assen $C\,A$ en $C\,B$. Hun voortbrengsel, een quadratische kegel, wordt door μ gesneden volgens het beeld van (N, ν). Dit is dus een kegelsnede door B en door 't doorgangspunt van $C\,A$ op μ.

c. Beschouw een net (u, v) uit L. De waaiers in de nulvlakken ν door u leveren kegelsneden k^2 op, wier vlakken μ elkander snijden volgens een rechte door B

en door (u, β). Deze rechte en een k^2 vormen de doorsnede van zoo'n vlak μ met 't beeldoppervlak. Dit is dus een cubisch oppervlak met dubbelpunt in B.

De overige beeldfiguren kloppen nu vanzelf met 't overzicht in § 6 gegeven.

d. Singuliere stralen.

1°. Voor een straal s in α is a onbepaald; Q is een bepaald punt op $d \equiv (\alpha, \beta)$. Als beeldpunt kan men nemen elk punt S op $b \equiv B\,Q$. De complexwaaier (X, α) bestaat dus uit singuliere stralen. De beelden vormen den waaier $(B\,\xi)$, als $\xi \equiv (B, d)$.

2°. Ook voor een straal s uit waaier (A, ν_A) is a onbepaald, terwijl Q een punt op $q = (\beta, \nu_A)$ is. Elk punt op $b \equiv B\,Q$ kan weer als beeld dienen. Dus: (A, ν_A) bestaat uit singuliere stralen en wordt afgebeeld op waaier (B, η), als $\eta \equiv (B, q)$.

3°. Voor een straal s in β is Q onbepaald (op s), terwijl a de verbindingslijn is van A en (d, s). Als beeldpunt S is bruikbaar elk punt op de doorsnede van (C, a) en (B, s). Hieruit volgt: de waaier (Y, β) bestaat uit singuliere stralen.

Zij worden afgebeeld op de m.pl. van de zooeven bedoelde doorsnijdingslijnen. Dit is een R^2, nl. het voortbrengsel van de projectieve vlakkenbundels om de assen $A\,C$ en $B\,Y$. R^2 gaat door deze assen.

4°. Beschouw een straal s uit den waaier in vlak $A\,B\,C \equiv \gamma$. Dan liggen $a \equiv (\alpha, \gamma)$ en b ook in γ, dus S is eenig punt op b. De waaier (Z, γ) bestaat dus uit singuliere stralen en wordt afgebeeld op waaier (B, γ).

5°. Een straal s uit den waaier om $K \equiv (d, \gamma)$ geeft als snijpunten met α en β het punt K zelf. Verder is $a \equiv A\,K$; $b \equiv B\,K$. Daar a en b in γ liggen, is de transversaal t uit C onbepaald (in γ), dus S eenig punt op $x \equiv B\,K$.

Dus: de waaier $(K, \varkappa)$ bestaat uit singuliere stralen, die alle afgebeeld worden op x.

e. Singuliere punten.

1°. Uit $(d, 5^0)$ volgt direct: alle punten van x zijn singulier; elk ervan is toegevoegd aan de stralen van $(K, \varkappa)$.

2°. Leg S op $d \equiv (\alpha, \beta)$. $C\,S$ levert op $a \equiv A\,S$ en $B\,S$ geeft $Q \equiv S$. Als beeldstraal s voldoet dus elke straal uit den waaier om S. Dus: alle punten van d zijn singulier. Zij zijn de beelden van het net (d, d'), als d' de toegevoegde richtlijn is van d.

3°. Als S op $y \equiv A\,C$ ligt, wordt a onbepaald. Voor s kan dus genomen worden elke straal uit den waaier om Q. Loopt S over $A\,C$, dan loopt Q over $e \equiv (\beta, \gamma)$. Derhalve: alle punten van $y \equiv A\,C$ zijn singulier. Zij behooren als beelden bij de bilineaire congruentie (e, e'); e' is de toegevoegde richtlijn van e.

4°. Zij $S \equiv B$; a is bepaald als verbindingslijn m van A en 't snijpunt van α met $B\,C$, naar Q is onbepaald (in β). Voor s is dus te nemen elke straal, die op a steunt.

Dus: B is *hoofdpunt* en toegevoegd aan alle stralen van het net (m, m').

5°. Zij a' de toegevoegde richtlijn van a, een rechte uit (A, α) en $Q \equiv (a', \beta)$. Trek $B\,Q$ en uit C een transversaal over $B\,Q$ en a. Deze snijdt $B\,Q$ in S. Dan is S een singulier punt, waarbij als beeld de waaier in (Q, a) behoort. Bij draaiing van a om A, doorloopt a' den stralenbundel (X, ν_A), dus Q loopt over $q \equiv (\beta, \nu_A)$. De m.pl. van S wordt nu een kegelsnede d^2 in (B, q), voortgebracht door de projectieve waaiers in dit vlak met toppen in B en in den doorgang van $A\,C$. In de punten van d^2 worden afgebeeld de stralen van het net (q, q').

f. Als regelvlak der singuliere stralen is in 't voorgaande gevonden:

$$R_s^5 \equiv (X, \alpha) + (Y, \beta) + (Z, \gamma) + (K, \varkappa) + (A, \nu_A),$$

dus de uiterste ontaarding in 5 platte vlakken.

Uit een teekening is nu gemakkelijk te overzien, van welke punten 2 singuliere stralen uitgaan m. a. w. wat de dubbelkromme van R_s^5 is. Men vindt ervoor:

$$\rho_s^5 \equiv d + e + q + m + m',$$

waarbij $m' \equiv XZ$. Deze 5 rechten zijn de doorsneden van de 5 vlakken, waaruit R_s^5 bestaat, voorzoover die doorsneden niet tot L behooren. Beschouwt men verder de congruentie, die $d + e + q + m + m'$ tot singuliere figuur heeft, dan komt men tot:

$$\Sigma \equiv (d, d') + (e, e') + (q, q') + 2 \times (m, m').$$

Al deze bestanddeelen werden inderdaad gevonden bij 't nagaan van de beelden der singuliere punten. Het net (m, m') komt 2 maal in rekening, omdat men 't vindt als m.pl. der waaiers met toppen op m, maar ook als m.pl. der stralenbundels, die hun middelpunten op m' hebben.

Als singuliere kromme der afbeelding werd gevonden:

$$\delta_s^5 \equiv x + y + d + d^2.$$

x en y snijden elkander en d^2; verder steunt d op x. Uit een punt P gaat 1 transversaal over d en y, 1 over x en d^2, 1 over y en d^2 en 2 over d en d^2, tezamen 5, zoodat δ_s^5 naar behooren van 't geslacht 1 is.

De m.pl. der lijnen d (de beelden der singuliere stralen) bleek te zijn het vijfdegraadsregelvlak:

$$D_s^5 \equiv (B, \xi) + (B, \eta) + (B, \gamma) + R^2.$$

Dat dit oppervlak inderdaad met 2 bladen door δ_s^5 gaat, springt direct in 't oog voor de deelen x, y en d^2 der singuliere kromme. Dat ook d deel uitmaakt van de dubbelkromme van D_s^5 is als volgt in te zien. De onder $(d\,3^0)$ bedoelde doorsneden van (C, a) en (B, s) steunen op d, daar a en s elkander op d snijden: R^2 gaat dus door d. Daar ook (B, ξ) de lijn d bevat, gaan door deze rechte 2 bladen van D_s^5.

Men kan opmerken, dat ook 't net (m, m') niet aan den algemeenen regel ontsnapt: het heeft een O^3 tot beeld, al worden alle stralen afgebeeld in B. Immers

(m, m') bevat de waaiers (X, α), (Z, γ) en (A, ν_A), die resp. opleveren (B, ξ), (B, γ) en (B, η), vormend een vlakkendrietal door B.

11. *Afbeelding met een hoofdpunt en een hoofdstraal.* Een voorbeeld hiervan is beschreven door Prof. Dr. Jan de Vries in de Verslagen der K. A. v. W. Dl. XXXIV blz. 5 en volgg. Alle beelden en singuliere figuren blijken weer in overeenstemming te zijn met de in 't voorgaande afgeleide eigenschappen. In 't bijzonder klopt het, dat er een dubbel te tellen plat vlak voorkomt in de m.pl. der rechten, die aan singuliere stralen zijn toegevoegd en dat de hoofdstraal *3*-voudig is op het singuliere regelvlak.

12. *Incidentie van straal en beeldpunt.* Als elke straal zijn beeld bevat, wordt een waaier afgebeeld op een kegelsnede. Immers: de beeldkromme is vlak, heeft in den waaiertop een enkelvoudig punt en snijdt elken straal verder nog in *1* punt, 't beeld van dien straal. Bij dit soort van afbeelding is dus de „hoofdeigenschap" van kracht. Dan geldt daarvoor ook alles, wat in dit hoofdstuk is besproken. Alleen moet men bedenken, dat R_s^5 op zijn *eigen* punten wordt afgebeeld. Hieruit volgt dan vanzelf $\rho_s^5 \equiv \delta_s^5$, zoodat de singuliere kromme dezen rol tegelijk vervult voor de afbeelding en voor de congruentie Σ.

De in de voorgaande hoofdstukken besproken afbeelding voldoet dan ook in alle opzichten aan de eigenschappen, die als algemeen geldig werden gevonden voor afbeeldingen, waarbij 't waaierbeeld een k^2 is. Zoo is b.v. $\delta_s^5 \equiv \delta_s^3 + a^2$ een vijfdegraadskromme van 't geslacht *1*, want de kegels (P, δ_s^3) en (P, a^2) hebben *6* ribben gemeen, waarvan er *4* in *2* verschillende punten op δ_s^5 rusten, terwijl er verder *1* bisecante is uit 't willekeurige punt P over δ_s^3.

Bij incidentie van straal en beeldpunt zijn hoofdstralen en hoofdpunten natuurlijk onmogelijk. Dit feit en de samenvalling van R_s^5 en ρ_s^5, resp. met D_s^5 en δ_s^5 maakt de hier bedoelde afbeeldingen, althans wat de singuliere figuren betreft, eenvoudiger dan de meer algemeene, die in dit hoofdstuk is onderzocht.

In dl. XXXIV der Verslagen van de K. A. v. W. (blz. 421 en volgg.) heb ik de verschillende ontaardingsmogelijkheden van δ_s^5 nagegaan. Het singuliere regelvlak is daarbij altijd gemakkelijk aan te geven, omdat R_s^5 het *trisecantenoppervlak* van δ_s^5 is. Met eenige voorbeelden vindt men dit nader toegelicht. Dat ook een *niet-ontaarde* singuliere kromme mogelijk is, blijkt uit de volgende stelling, die door Prof. Dr. Jan de Vries in een verhandeling over de eigenschappen der vijfdegraadsruimtekrommen van 't geslacht 1 bewezen is. (Verslagen K. A. v. W. deel VIII, 451—457).

13. *Stelling. De trisecanten van een ρ^5 van 't geslacht 1 behooren tot een lineairen complex, terwijl de kegelsnede door de 5 snijpunten van een vlak met ρ^5 het nulpunt van dat vlak bevat.*

Deze eigenschap zou men ook als volgt kunnen aantoonen.

a. Het trisecantenoppervlak R^5 van ρ^5 heeft ρ^5 tot dubbelkromme. Denk uit 2 punten P en Q op ρ^5 de 2 mogelijke trisecanten getrokken. Behalve $a \equiv PQ$ is er nog 1 transversaal l over deze 4 rechten. Op l steunt nog een vijfde trisecante van ρ^5. De 5 trisecanten vormen mét ρ^5 (2 maal geteld) de doorsnede (R^5, O^3), als O^3 het oppervlak van den derden graad is, dat men door ρ^5 en l kan leggen.

De punten P en Q zijn dubbelpunten van O^3 (de raaklijn in P aan ρ^5 is niet complanair met de 2 trisecanten door P), dus O^3 bevat ook de lijn a. Onderstel nu, dat de „vijfde" trisecante t, die op l rust, niet op a

steunt. Dan zou er uit *1* punt van a nog *1* drievoudige snijlijn van ρ^5 zijn, nl. uit 't punt (a, R^5) buiten P en Q gelegen, en deze snijlijn zou op O^3 liggen. De doorsnede (O^3, R^5) zou dan van graad *16* worden. Daar dit niet kan, snijden alle *5* trisecanten, die op l rusten, ook a. Men kan nu een' lineairen complex L vastgelegd denken door de *4* eerstgenoemde trisecanten en een willekeurige vijfde, w. L bevat het net (a, l), dus ook t. Alles samen zijn er nu onder de beschrijvenden van R^5 reeds *6* complexstralen aanwezig. Daar dit meer is dan de graad, behoort R^5 in z'n geheel tot L.

b. Zij N een willekeurig punt. Trek door N een bisecante b van ρ^5, die tot toegevoegde richtlijn heeft b'. Dan is $\nu \equiv (N, b')$ 't nulvlak van N; dit snijdt ρ^5 in *5* punten, waardoor een kegelsnede r^2 bepaald wordt. Het oppervlak O^3 door ρ^5 en b' geeft met ν tot doorsnede $b' + r^2$. Op O^3 ligt echter ook b, welke lijn ν snijdt in een punt, dat niet buiten r^2 kan liggen. Daar bedoeld snijpunt juist het punt N is, is hiermee 't tweede deel der stelling bewezen.

c. Men kan nu gemakkelijk afleiden, dat ρ^5 en R^5 de singuliere figuren worden voor de afbeelding, waarbij een punt S wordt opgevat als beeld van dien straal s uit L, welke in S raakt aan de kegelsnede r^2 door de snijpunten van 't nulvlak van S met ρ^5.

STELLINGEN.

I.

Er zijn eigenschappen op te stellen, die gelden voor *elke* afbeelding van een lineairen stralencomplex op de puntenruimte.

II.

De stralen van een complex van hoogeren graad kunnen niet volgens een (*1*, *1*) toegevoegd worden aan de punten der ruimte door middel van een afbeelding, waarbij elke straal zijn beeldpunt bevat en waarbij het afbeeldingsvoorschrift op niet-complexstralen toepasselijk is.

III.

De manier, waarop H. DE VRIES de differentieerbaarheid term voor term van een reeks behandelt, is onjuist.

Dr. H. DE VRIES. Leerboek der differentiaal- en integraalrekening en van de theorie der differentiaalvergelijkingen. Deel I, blz. 336.

IV.

In het bewijs, dat H. DE VRIES geeft van de formule $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ is de verwisseling der integratievolgorde verkeerd gemotiveerd.

Leerboek enz. (zie St. III) Deel II, blz. 114.

V.

De interferometer van FABRY en PÉROT geeft de fijnstructuur der spectra onjuist aan.

VI.

Het bezwaar van J. H. TUMMERS tegen de relativiteitstheorie is niet geheel steekhoudend.

Dr. J. H. TUMMERS. La théorie de la Relativité restreinte d' EINSTEIN et LA LOGIQUE.

VII.

De theorie van BRESTER aangaande de fotosfeer der zon leidt bij toepassing op de vaste sterren tot een moeilijkheid.

Dr. A. BRESTER. Le Soleil blz. 153 en volgg.

VIII.

Het is niet gewenscht bij het onderwijs in de Wiskunde aan de middelbare scholen en gymnasia te lang bij de beginselen stil te staan.