Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Iteratie van rationele functies

https://hdl.handle.net/1874/292978

Iteratie van Rationale Functies

DOOR

C. CAMPAGNE

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXIX

ITERATIE VAN RATIONALE FUNCTIES

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT
3969 4132

Iteratie van Rationale Functies

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr A. A. PULLE, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DIER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 9 DECEMBER 1929 DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

CORNELIS CAMPAGNE

GEBOREN TE TIEL

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

H. J. PARIS
AMSTERDAM — MCMXXIX

AAN MIJN OUDERS
AAN MIJN VROUW

Bij het beëindigen mijner Academische studie is het mij een aangename taak U, Hoogleeraren en Lectoren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, dank te zeggen voor hetgeen Gij tot mijn wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Hooggeleerde Emeritus DE VRIES, Uw colleges in de Hoogere Meetkunde heb ik steeds zeer gewaardeerd. Het is mij een behoefte U mijn dank voor Uw onderricht te betuigen.

Hooggeleerde WOLFF, hooggeachte Promotor, met groote erkentelijkheid zal ik steeds de wijze, waarop Gij ons, Uw leerlingen, inwijddet in de methoden der Hoogere Analyse, blijven gedenken. Ten zeerste stel ik Uw daadwerkelijke hulp, die ik bij het samenstellen van dit proefschrift heb mogen ondervinden, op prijs.

INHOUD

HOOFDSTUK I

Bldz.

ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT EN IN DE OMGEVINGEN VAN DE ELEMENTEN VAN EEN CYCLISCHE LIMIETGROEP. 1

§ 1 Inleiding — De voorbeelden $\varphi(z) = z^2$ en $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ — § 2 De noodige en voldoende voorwaarden voor het optreden van een regelmatig limietpunt — § 3 Cyclische limietgroepen — § 4 De functie B (z) — § 5 De functionaalvergelijkingen van Schroeder en Abel — § 6 De functie $\beta(z)$ — Afleiding van de functionaalvergelijking, waarvan $\beta(z)$ een der oplossingen is.
Literatuuropgave.

HOOFDSTUK II

INLEIDENDE BESCHOUWINGEN OVER DE VERZAMELING E' — ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN TOT DE VERZAMELING E' BEHOOREND PUNT. 34

§ 8 Existentiebewijs voor de verzameling E bij iteratie van een willekeurige rationale functie $\varphi(z)$ — § 9 De „suites normales" van Montel — § 10 Iteratie in de omgeving van een punt van E — § 11 Eigenschappen van de punten, die tot de verzameling E behooren — § 12 De structuur van E' — § 13 Nadere beschouwing van de gebieden, waarin geen punten van E' gelegen zijn.
Literatuuropgave.

HOOFDSTUK III

ONMIDDELLIJK EN TOTAAL CONVERGENTIEGEBIED VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT — ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN PUNT x, WAARVOOR GELDT $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| = 1$ — BESTUDEERING VAN DE CONVERGENTIE VAN DEELRIJEN VAN DE RIJ $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ IN DE GEBIEDEN WAAR DEZE RIJ NORMAAL IS. 69

§ 14 Nadere beschouwing van het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt en van de onmiddellijke convergentiegebieden van punten deel uitmakende van een cyclische limietgroep voor het geval, dat deze gebieden enkelvoudig samenhangend zijn — § 15 Opmerkingen omtrent het totaal aantal punten x waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ — Iteratie in de omgeving van punten x waarvoor $\varphi_n(x) = x$,

$|\varphi_n'(x)| = 1$ — § 16 Opmerkingen omtrent de limietfuncties, waartoe deelrijen van de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in gebieden waar deze rij normaal is, gelijkmatig convergeeren, wanneer deze limietfuncties constanten zijn — § 17 Het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt voor het geval, dat dit gebied meervoudig samenhangend is — § 18 Het totale convergentiegebied van een regelmatig limietpunt voor het geval, dat het onmiddellijke convergentiegebied enkelvoudig samenhangend is en slechts een deel is van het totale convergentiegebied.
Literatuuropgave.

HOOFDSTUK IV

ITERATIE VAN EENIGE KWADRATISCHE RATIONALE FUNCTIES 108

§ 19 Eerste voorbeeld, waarbij twee regelmatige limietpunten optreden — § 20 Tweede voorbeeld, waarbij één regelmatig limietpunt optreedt — § 21 Derde voorbeeld, waarbij een cyclische limietgroep van de tweede orde optreedt — § 22 Vierde voorbeeld, waarbij $E' \equiv$ complexe vlak.

HOOFDSTUK I

ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT EN IN DE OMGEVINGEN VAN DE ELEMENTEN VAN EEN CYCLISCHE LIMIETGROEP.

§ 1 — INLEIDING — DE VOORBEELDEN $\varphi(z) = z^2$ EN $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$

Definitie — Itereeren is het herhaald toepassen eener zelfde functionale bewerking op een (of meer) complexe onafhankelijk veranderlijke(n) of op een (of meerdere) punt(en) in het complexe vlak (complexe ruimte); met dien verstande, dat de n^e functionale bewerking ($n = 2, 3, \ldots$.) uitgevoerd wordt op de bij de $n - 1^e$ functionale bewerking verkregen functie van die complexe onafhankelijk veranderlijke(n), respectievelijk op het (de) bij de $n - 1^e$ functionale bewerking verkregen punt(en).

Beperking — We zullen ons in dit proefschrift uitsluitend bezighouden met de iteratie van *rationale* functies van *één* complexe onafhankelijk veranderlijke z.

Aanduiding — Ik stel

$$z_1 = \varphi(z),\ z_2 = \varphi(z_1), \ldots,\ z_n = \varphi(z_{n-1}), \ldots.$$

De functies $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$. zijn rationale functies van z; willen wij deze functies in z uitdrukken dan schrijven we:

$$z_1 = \varphi(z),\ z_2 = \varphi[\varphi(z)] = \varphi_2(z),$$
$$z_3 = \varphi[\varphi\{\varphi(z)\}] = \varphi[\varphi_2(z)] = \varphi_3(z).$$

In 't algemeen

$$z_n = \varphi(z_{n-1}) = \varphi_2(z_{n-2}) = \varphi_3(z_{n-3}) = \ldots = \varphi_n(z).$$

De functie z_1 is door eenmalige-, de functie z_2 door tweemalige- en de functie z_n is door n-malige iteratie verkregen.

Voorts zullen we in het onderstaande een complex getal en het punt dat door dat getal in het complexe vlak bepaald wordt met dezelfde letter aanduiden.

Het begrip consequent — Zij a een willekeurig punt in het complexe vlak, dus a een willekeurig complex getal, dan krijg ik na eenmalige iteratie het punt a_1, waarbij $a_1 = \varphi(a)$; na tweemalige iteratie het punt a_2, waarbij $a_2 = \varphi(a_1)$ of wat het zelfde is $a_2 = \varphi_2(a)$; na n-malige iteratie a_n, waarbij $a_n = \varphi_n(a)$.

a_1 is de *consequent* van de eerste orde van a, zoo noemen we a_n de consequent van de n^e orde van a.

Het aantal consequenten van de n^e orde (n = 1, 2 . . . .) van een punt bij iteratie met *rationale* functies is constant gelijk aan een.

Mogelijk is dat a_n met a of met zekere a_i samenvalt, hierop komen we later terug.

Het begrip antecedent — Als $z_1 = \varphi(z)$, dan is $z = \psi(z_1)$, waarbij de algebraïsche functie ψ de inverse functie van φ is.

β_{-1} is een der *antecedenten* van de eerste orde van β als $\beta_{-1} = \psi(\beta)$, d. w. z. $\beta = \varphi(\beta_{-1})$; zoo is β_{-2} een der antecedenten van de tweede orde van β, als $\beta_{-2} = \psi(\beta_{-1}) = \psi_2(\beta)$.

De antecedenten van de n^e orde van β zijn de punten waarvoor $\beta_{-n} = \psi_n(\beta)$, hun aantal is, als teller en noemer van φ polynomen van de graad k zijn, in 't algemeen gelijk aan k^n.

Beschouwen we nu allereerst de verzameling (a_i) bestaande uit de successievelijke consequenten van a en definieeren we de mogelijke wijzen van convergentie dezer oneindige puntverzameling.

Definities

a — Regelmatige convergentie — Een oneindige aftelbare puntverzameling (a_i) convergeert regelmatig tot een punt x, indien met ieder willekeurig klein gekozen positief getal ε een getal N_ε correspondeert, zoodanig dat voor iedere $p > N_\varepsilon$

$$| a_p - x | < \varepsilon \text{ is.}$$

b — Onregelmatige convergentie — Heeft de oneindige aftelbare puntverzameling (a_i) de eigenschap dat er minstens één p bestaat grooter dan N, hoe groot N ook zij, waarvoor geldt

$|a_p - x| < \varepsilon$, hoe klein ε ook gekozen is, doch geldt niet voor *iedere* $p > N$ $|a_p - x| < \varepsilon$ $(\varepsilon \to 0)$, dan noemen we de verzameling (a_i) onregelmatig convergent tot x.

c — Oneigenlijke convergentie — Is vanaf zekere n

$$a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+p} = \ldots \; (p \to \infty),$$

of is

$$\varphi(a_n) = a_{n+1},\ \varphi(a_{n+1}) = a_{n+2}, \ldots,\ \varphi(a_{n+p-1}) = a_n$$

waarbij p eindig is, dan noemen we de puntverzameling (a_i) oneigenlijk convergent. Het oneigenlijke convergentiepunt is dan òf a_n òf de oneigenlijke convergentie punten zijn

$$a_n,\ a_{n+1}, \ldots,\ a_{n+p-1}.$$

Eerste Voorbeeld

Zij $\varphi(z) = z^2$.

Dan is $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (z_{n-1})^2 = \lim_{n\to\infty} z^{2^n}$.

Voor $z = re^{\theta i}$ wordt $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} r^{2^n} e^{2^n \theta i}$,

dus voor $r > 1$ is $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$,

en voor $r < 1$ is $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

De consequenten van ieder punt a binnen den eenheidscirkel naderen regelmatig tot O, terwijl de consequenten van ieder punt a' buiten den eenheidscirkel gelegen regelmatig tot ∞ convergeeren, de punten O en ∞ zijn echter uitzonderingspunten.

Men heeft n.l.:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(\infty) = \infty.$$

Hieruit volgt: het punt O is oneigenlijk convergentiepunt voor de consequenten van O, evenzoo is het punt ∞ (van den complexen bol) oneigenlijk convergentiepunt voor de consequenten van ∞.

Is daarentegen $r = 1$, dan is $|z_i| = 1$ $(i = 1, 2 \ldots)$, m. a. w. alle consequenten van een punt a, waarbij $|a| = 1$, liggen op den eenheidscirkel.

We moeten nu twee gevallen onderscheiden:

1° θ is onderling meetbaar met 2π,

2° θ is onderling onmeetbaar met 2π.

1e geval — $r = 1$, $\theta = \frac{p}{q} 2\pi$. (p en q onderling ondeelbaar positief geheel en $p < q$).

De consequenten van α ($\alpha = e^{\frac{p}{q}2\pi i}$) convergeeren in dit geval *oneigenlijk* tot een of meerdere punt(en) β ($\beta = e^{\frac{r}{q}2\pi i}$, waarbij r een der waarden 0, 1, ... q — 1, eventueel eenige dezer waarden aanneemt).

2e geval — $r = 1$, $\theta = a$ onderling onmeetbaar met 2π.

Ik voer hier en wel uitsluitend in dit voorbeeld een gewijzigde notatie in, die de behandeling overzichtelijker maakt.

Het punt, waarvoor $z = e^{ai}$, noem ik $\bar{a}$; dat waarvoor $z = e^{2ai}$ noem ik $\overline{2a}$, enz.

Bij iteratie krijg ik dus, uitgaande van $\bar{a}$, de oneindige aftelbare puntverzameling

$$\bar{a},\ \overline{2a},\ \overline{2^2a},\ \ldots.$$

Deze verzameling ($\overline{2^ia}$) bezit op den eenheidscirkel ten minste één verdichtingspunt, aangezien men geen twee verschillende geheele getallen n' en n'' zoo kan bepalen dat aan de betrekking $2^{n'}a \equiv 2^{n''}a \pmod{2\pi}$ voldaan wordt.

Zij $\bar{A}$ een verdichtingspunt. Nu is, als $\frac{A}{2\pi}$ duaal ontwikkeld wordt:

$$\frac{A}{2\pi} = 0, c_1c_2c_3 \ldots . c_k \ldots . c_{k+p} \ldots c_{k+p+q} \ldots ., \text{ waarbij } c_i = 0 \text{ of } 1.$$

(Mocht $\frac{A}{2\pi} = \frac{e}{2^d}$ e en d geheel, $e < 2^d$, dan is

$$c_{d+1} = c_{d+2} = \ldots . = 0).$$

Er is nu een punt $\bar{a}_{n_1}$ ($a_{n_1} = 2^{n_1}a$), waarvoor

$$\frac{a_{n_1}}{2\pi} = 0, c_1c_2 \ldots . c_k\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ldots . \pmod 1.$$

Evenzoo is er een punt $\bar{a}_{n_2}$ ($a_{n_2} = 2^{n_2}a$), waarvoor

$$\frac{a_{n_2}}{2\pi} = 0, c_1c_2 \ldots . c_k \ldots . c_{k+p}\, \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ldots . \text{ (mod 1)}$$

en een punt $\bar{a}_{n_3}$ ($a_{n_3} = 2^{n_3}a$), waarvoor

$$\frac{a_{n_3}}{2\pi} = 0, c_1c_2 \ldots . c_k \ldots . c_{k+p} \ldots . c_{k+p+q}\, \mu_1\mu_2\mu_3 \ldots . \text{ (mod 1)}$$

enz.

Hierbij is

$$n_2 \neq n_1 + 1 \text{ òf } n_3 \neq n_2 + 1, \text{ enz.}$$

Immers was

$$n_2 = n_1 + 1,\ n_3 = n_2 + 1, \ldots ., n_i = n_{i-1} + 1, \ldots . \text{ enz.,}$$

dan zou $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots .$ dus

$a_{n_1} = a_{n_2} = a_{n_3} = \ldots .$ (mod 2π), wat onmogelijk is omdat a onderling onmeetbaar met 2π is.

De puntverzameling $\overline{a}$, $\overline{2a}$, $\overline{2^2a}$, ... kan dus nooit regelmatig tot een punt of oneigenlijk tot een of meerdere punten convergeeren.

Ik beschouw nu de punten $\overline{2a_{n_1}}$, $\overline{2a_{n_2}}$, $\overline{2a_{n_3}}$, ..., deze punten behooren tot de verzameling $(\overline{2^ia})$ en convergeeren regelmatig tot $\overline{2A}$.

De verzameling $(\overline{2^ia})$ convergeert dus onregelmatig tot $\overline{2A}$.

Algemeen: Indien de verzameling $(\overline{2^ia})$ zich in $\overline{A}$ verdicht, dan verdicht deze verzameling zich in ieder punt van de verzameling $(\overline{2^iA})$ en in de verdichtingspunten dezer laatstgenoemde verzameling, zoo deze voorkomen.

De verzameling $(\overline{2^iA})$ kan a priori zijn

1° eindig,
2° oneindig, maar niet $\equiv$ cirkel,
3° „ , $\equiv$ cirkel.

Door cijfervoorbeelden zullen we aantoonen dat de bovengenoemde gevallen zich werkelijk voordoen.

Cijfervoorbeeld 1 — Voor het eerste geval nemen we $\overline{A}$ zoodanig, dat A meetbaar is met 2π, en $\bar{a}$ kiezen we zoo, dat de ver-

zameling $(\overline{2^i a})$ zich uitsluitend in $\overline{A}$ en de consequenten van $\overline{A}$ verdicht.

Bij deze onderstellingen krijg ik: de verzameling $(\overline{2^i a})$ verdicht zich onregelmatig in ieder punt van de eindige verzameling $(\overline{2^i A})$ en in geen enkel ander punt.

Zij $\frac{A}{2\pi} = 0{,}111$ bijvoorbeeld.

$\frac{a}{2\pi}$ kan dan zijn $= 0{,}\lambda_1\lambda_2 \ldots . \lambda_k \, 111 \overbrace{00 \ldots . 0}^{n} \, 111 \overbrace{00 \ldots . 0}^{n+p} \ldots$

In de duale ontwikkeling van $\frac{a}{2\pi}$ moeten voorkomen n, n + p, n + p + q, ... opeenvolgende nullen voorafgegaan door 3 opeenvolgende eenen, n, p, q, ... zijn willekeurige geheele getallen, terwijl de cijfergroep $\lambda_1\lambda_2 \ldots . \lambda_k$ totaal willekeurig is, k moet echter eindig zijn.

De verzameling $(\overline{2^i a})$ verdicht zich dan uitsluitend in

$$\overline{A}, \overline{2A}\left(\frac{2A}{2\pi} = 0{,}11 \pmod 1\right), \overline{2^2 A}\left(\frac{2^2 A}{2\pi} = 0{,}1 \pmod 1\right),$$

en in $\overline{2^3 A}$, het punt + 1 van het complexe vlak.

Cijfervoorbeeld 2 — ā wordt zoo gekozen dat de verzameling $(\overline{2^i a})$ zich uitsluitend in $\overline{A}$, de consequenten van $\overline{A}$ en de verdichtingspunten dezer consequenten verdicht.

Voorts kiezen we $\overline{A}$ zóó, dat in de duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ niet iedere eindige cijfergroep oneindig vaak voorkomt. De verzameling $(\overline{2^i a})$ kan zich dan niet in ieder punt van den cirkel verdichten.

De duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ maak ik als volgt:

ik neem de groep 10, de volgende groep verkrijg ik door 1 te vervangen door 0 en 0 door 1, deze groep wordt achter de eerste geplaatst, ik verkrijg dus 1001, nu wordt op deze groep dezelfde constructie toegepast als op mijn eerste groep, er ontstaat dan: 1001 0110. Deze constructie herhalen we oneindig vaak en ik stel nu:

$$\frac{A}{2\pi} = 0,\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001 \ldots .$$

ā kies ik zoo dat

$$\frac{a}{2\pi} = 0, \lambda_1\lambda_2 \ldots . \lambda_p\, 10 \overbrace{0 \ldots . 0}^{k} 1001 \overbrace{0 \ldots . 0}^{k} 1001\, 0110 \overbrace{0 \ldots . 0}^{k} \ldots .$$

Bij de duale ontwikkeling van $\frac{a}{2\pi}$ wordt dus een willekeurige eindige groep van p cijfers 0 of 1 gevolgd door de eerste 2 cijfers van de duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$, hierop volgen k (eindig) nullen, daarop de eerste 4 cijfers van de ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ enz.

Onmiddellijk is in te zien dat de verzameling $\overline{(2^i a)}$ zich niet in ieder punt van den cirkel kan verdichten. In de duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ komt bijvoorbeeld de groep 111 niet voor, de verzameling $\overline{(2^i a)}$ kan zich dus in $\overline{b}$ $(\frac{b}{2\pi} = 0{,}111)$ niet verdichten.

Cijfervoorbeeld 3 — Komt echter iedere eindige cijfergroep in de duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ oneindig vaak voor, dan verdicht de verzameling $\overline{(2^i A)}$ en dientengevolge de verzameling $\overline{(2^i a)}$ zich in ieder punt van den cirkel.

Immers zij $\overline{b}$ een willekeurig punt op den cirkel en zij

$$\frac{b}{2\pi} = 0, c_1 c_2 \ldots . c_k \ldots .$$

waarbij k een willekeurig natuurlijk getal is.

De ontwikkeling $\frac{A}{2\pi} = 0, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ldots .$ bevat de cijfergroep

$$c_1 c_2 \ldots . c_k$$

oneindig vaak.

Zij nu

$$\varepsilon_m = c_1,\ \varepsilon_{m+1} = c_2, \ldots ., \varepsilon_{m+k-1} = c_k.$$

dan is

$$\frac{2^{m-1}A}{2\pi} = 0, c_1 c_2 \ldots . c_k\, \varepsilon_{m+k} \ldots . \pmod 1.$$

De verzameling $(\overline{2^i A})$ verdicht zich dus onregelmatig in $\bar{b}$ en daar $\bar{b}$ willekeurig was, verdicht ze zich overal op den cirkel.

De verzameling $(\overline{2^i a})$ verdicht zich dan eveneens overal op den cirkel waaruit volgt dat ook in de duale ontwikkeling van $\frac{a}{2\pi}$ iedere eindige cijfergroep oneindig vaak moet voorkomen.

Ik construeer de duale ontwikkeling van $\frac{A}{2\pi}$ als volgt, de eerste groep in m'n duale ontwikkeling bevat achter elkaar geplaatst alle ondergroepen bestaande uit een cijfer, waarbij ik aan de nul den voorrang geef, ik krijg dan 01, mijn tweede groep bevat achter elkaar geplaatst alle ondergroepen (2^2) bestaande uit twee cijfers, waarbij als eerste ondergroep te nemen is 0 gevolgd door de eerste ondergroep van mijn eerste groep, als tweede ondergroep 0 gevolgd door de tweede ondergroep van de eerste groep en als derde respectievelijk vierde ondergroep 1 gevolgd door de eerste respectievelijk tweede ondergroep van de eerste groep. Op dezelfde wijze construeeren we de 3^e, 4^e, ..., k^e, ... groep.

Deze groepen worden in volgorde van constructie achter elkaar geplaatst, en ik kies nu $\bar{A}$ zóó, dat

$$\frac{A}{2\pi} = 0{,}01 \overbrace{00\,01\,10\,11}^{\text{II}}\ \overbrace{000\,001\,010\,011\,100\,101\,110\,111}^{\text{III}} \ldots .$$

(I)

ā kan nu bijvoorbeeld zoo gekozen worden, dat

$$\frac{a}{2\pi} = 0, \lambda_1 \ldots . \lambda_k\, 01\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots . \overbrace{\varepsilon_p\, 00\,01\,10\,11}^{\text{II}}\, \nu_1 \nu_2 \ldots . \overbrace{\nu_q \ldots . \ldots .}^{\text{III}}$$

(I)

waarbij de groepen λ, ε, ν .... willekeurige eindige cijfergroepen zijn.

Conclusie — Is $r = 1$, $\theta = a$ onderling onmeetbaar met 2π, dan convergeert de verzameling van de consequenten van ā bij iteratie van $\varphi(z) = z^2$ onregelmatig

òf tot een eindige op den eenheidscirkel gelegen verzameling $(\overline{2^i A})$;

òf tot een oneindige verzameling $(\overline{2^i A})$ en de verdichtingspun-

ten van deze verzameling, waarbij echter niet ieder punt van den eenheidscirkel tot $\overline{(2^i A)}$ en de verdichtingspunten van $\overline{(2^i A)}$ behoort;

òf tot ieder punt van den eenheidscirkel.

Opmerking — De maat van de verzameling $(\bar{x})$ bestaande uit de punten $\bar{x}$ (x onderl. onmeetb. met 2π), waarvan de consequenten onregelmatig naderen tot ieder punt van den eenheidscirkel, is 2π.

Bewijs — Nemen we het interval 0 — 1. Ieder punt Y van dit interval wordt bepaald door een getal y $0 \leqq y \leqq 1$. Wij schrijven y in het tientallig stelsel.

De verzameling der punten Y, waarbij in de ontwikkeling van de correspondeerende getallen y een bepaald cijfer bijv. 7 niet ∞ vaak voorkomt, heeft de maat nul.

Immers, de verzameling der punten Y, waarbij 7 in de correspondeerende getallen y op de eerste plaats na de komma voorkomt, heeft de maat $\frac{1}{10}$ (n.l. $0{,}7 \leqq x < 0{,}8$).

De complement verzameling heeft dus de maat $\frac{9}{10}$.

De verzameling (Y), waarbij 7 niet op de eerste en niet op de tweede plaats achter de komma in de ontwikkeling der correspondeerende y's voorkomt, heeft de maat $(\frac{9}{10})^2$.

Algemeen: Komt in de getallen y 7 niet op de $k_{1e}, k_{2e}, \ldots, k_p$ plaats achter de komma voor, dan heeft de correspondeerende Y-verzameling de maat $(\frac{9}{10})^p$.

Hieruit volgt:

De verzameling der punten Y, waarbij in de correspondeerende getallen y het cijfer 7 niet oneindig vaak voorkomt, heeft de maat nul.

Evenzoo heeft de verzameling der punten Z in het interval 0 — 1, waarbij de correspondeerende getallen z $0 \leqq z \leqq 1$ duaal ontwikkeld worden en waarbij de groep $\lambda_1 \lambda_2 \ldots . \lambda_p$ ($\lambda_i = 0$ of 1) in die ontwikkeling niet voorkomt, de maat nul.

Om dit in te zien schrijven we de getallen z als volgt:

$$z = \frac{A_1}{2^p} + \frac{A_2}{2^{2p}} + \frac{A_3}{2^{3p}} + \ldots .$$

Het grondtal is 2^p en $A_i \leqq 2^p - 1$.

Dezelfde redeneering van daareven geeft nu:

De verzameling (Z), waarbij in de duale ontwikkeling van de correspondeerende getallen z een willekeurige groep van p cijfers 0 of 1 niet oneindig vaak voorkomt, heeft de maat nul.

Bij iedere groep van p cijfers is er dus een volle dikte E_p van Z, waarbij in de duale ontwikkeling van de correspondeerende z die groep oneindig vaak voorkomt. Er zijn slechts 2^p groepen van p cijfers.

Beschouwen we de doorsnede van 2^p volle dikten dan krijgen we:

Bij gegeven p is er een volle dikte F_p van Z, waarbij in de ontwikkeling van de correspondeerende z iedere groep van p cijfers oneindig vaak voorkomt.

Door snijding van de volle dikten $F_1, F_2, \ldots$. (aftelbaar) krijgen we:

Er is een volle dikte V van Z, waarbij in de duale ontwikkeling van de correspondeerende z, elke cijfergroep oneindig vaak voorkomt.

Dit toegepast op den eenheidscirkel in ons voorbeeld geeft:

De verzameling $V_{\bar{a}}$ der punten ā, waarvan de consequenten onregelmatig naderen tot een eindige verzameling $\overline{(2^i\bar{A})}$, heeft de maat nul.

De verzameling $V_{\bar{a}}'$ der punten ā, waarvan de consequenten onregelmatig naderen tot een oneindige verzameling $\overline{(2^i\bar{A})}$ en de verdichtingspunten van $\overline{(2^i\bar{A})}$, waarbij $\overline{(2^i\bar{A})}$ + verzameling verdichtingspunten $\equiv/\equiv$ cirkel, heeft de maat nul.

De verzameling $V_{\bar{a}}''$ der punten ā, waarvan de consequenten tot ieder punt van den cirkel onregelmatig naderen, heeft de maat 2π.

Tweede Voorbeeld

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2}.$$

$$z_1 = \frac{1}{z^2},\ z_2 = z^4,\ z_3 = \frac{1}{z^8}, \ldots \text{ en } \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z^{(-2)^n}.$$

We splitsen deze functierij in tweeën, n.l. in de rij

$$(z_{2n}) \quad n = 1, 2, 3 \ldots,$$

en de rij

$$(z_{2n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Zij $a = re^{\theta i}$, $r \neq 1$, dan convergeert de verzameling (a_n) onregelmatig tot O en 't punt ∞.

Voor $r > 1$ convergeert de verzameling (a_{2n}) regelmatig tot het punt ∞, terwijl de verzameling (a_{2n+1}) regelmatig tot O convergeert.

Voor $r < 1$ heeft het omgekeerde plaats.

Voorts is $\varphi(0) = \infty$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = \infty$, ... enz., en $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi_2(\infty) = \infty$, $\varphi_3(\infty) = 0$, ... enz.

De consequenten van O van oneven orde vallen samen in het punt ∞ (van den complexen bol), die van even orde vallen samen met O. Zoo vallen de consequenten van ∞ van oneven orde samen met O, van even orde samen met ∞.

Is $r = 1$, dan blijft a_i steeds op den eenheidscirkel.

We onderscheiden ook hier twee gevallen.

1° $\theta = a$, onderling meetbaar met 2π.

De verzameling $\bar{a}$, $\overline{4a}$, $\overline{16a}$, ... $\overline{2^{2n}a}$, ..., bestaande uit de consequenten van ā van even orde, nadert oneigenlijk tot een eindig aantal op den eenheidscirkel gelegen punten.

De verzameling $-\overline{2a}$, $-\overline{8a}$, ..., $-\overline{2^{2n+1}a}$, ..., bestaande uit de consequenten van ā van oneven orde, nadert eveneens oneigenlijk tot een eindig aantal op den eenheidscirkel gelegen punten.

De verzameling, bestaande uit alle consequenten van een willekeurig punt ā, op den eenheidscirkel gelegen, a onderling meetbaar met 2π, nadert dus oneigenlijk tot een eindig aantal op den eenheidscirkel gelegen punten.

2° Voor $r = 1$, $\theta = a$, onderling onmeetbaar met 2π herhalen we de in het eerste voorbeeld gedane redeneering nu echter toegepast zoowel op de verzameling $\overline{(2^{2n}a)}$ als op de verzameling $\overline{(-2^{2n+1}a)}$ en krijgen dan:

De verzameling $\overline{a}$, $-\overline{2a}$, $\overline{4a}$, ... nadert onregelmatig
òf tot ieder punt van een eindige verzameling;
òf „ „ „ „ „ oneindige „ , die echter niet ieder punt van den eenheidscirkel bevat;
òf tot ieder punt van den eenheidscirkel.

De bij het eerste voorbeeld gemaakte maattheoretische opmerking is ook hier van toepassing.

§ 2 — DE NOODIGE EN VOLDOENDE VOORWAARDEN VOOR HET OPTREDEN VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT

Definitie — Ik noem x regelmatig limietpunt, indien er een omgeving Ω van x bestaat, zoodanig dat de consequenten van iedere $z \prec \Omega$ regelmatig naderen tot x.

Bewering — Indien x in 't eindige gelegen regelmatig limietpunt is, dan moet

1° $\varphi(x) = x$,

2° $|\varphi'(x)| < 1$ zijn.

Bewijs — 1e voorwaarde — Uit de regelmatige convergentie van de consequenten van iedere $z \prec \Omega$ volgt, dat $\varphi(z)$ in een omgeving Ω' van x ($\Omega' \prec \Omega$) holomorf moet zijn.

Verder moet $\lim_{k\to\infty} z_k = x$ en $\lim_{k\to\infty} z_{k+1} = x$ voor iedere $z \prec \Omega$,

of daar $\varphi(z_k) = z_{k+1}$, moet $\lim_{k\to\infty} \varphi(z_k) = x$.

En aangezien $\varphi(z)$ holomorf is in Ω', is dus $\varphi(x) = x$.

2e voorwaarde — Zij Γ een cirkel met x tot middelpunt en geheel in Ω' gelegen en zij ϱ (de straal van dezen cirkel) voldoend klein gekozen, dan is als

$$|z - x| \leqq \varrho \qquad |z_n - x| < |z - x| \quad \text{(n voldoend groot)}.$$

Op I heeft $\left|\frac{\varphi_n(z) - x}{z - x}\right|$ dus een max. λ, dat kleiner dan 1 is.

Men heeft nu in Γ' (cirkel Γ' heeft een straal $\varrho' > \varrho$, is concentrisch met Γ en geheel in Ω' gelegen)

$$\varphi_n(z) = \varphi_n(x) + (z - x)\,\varphi_n'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!}\,\varphi_n''(x) + \ldots.$$

waarbij

$$\varphi_n'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\varphi_n(z) - x}{(z-x)^2}\,dz.$$

Waaruit volgt dat

$$|\varphi_n'(x)| < \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left|\frac{\varphi_n(z)-x}{(z-x)^2}dz\right| < \lambda < 1.$$

Maar $\varphi_n'(x) = \{\varphi'(x)\}^n$,

dus $|\varphi'(x)| < 1$. q. e. d.

Bewering — Is het punt oneindig (van den complexen bol) regelmatig limietpunt, dan moet voldaan zijn aan

$$1^\circ \quad \varphi(\infty) = \infty,$$
$$2^\circ \quad |\varphi'(\infty)| > 1.$$

Bewijs — *1e voorwaarde* — Wij stellen

$$z' = \frac{1}{z},\ z_1' = \frac{1}{z_1},\ \text{dan is}\ z_1' = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z'}\right)}$$

$$\text{en}\ z'_{k+1} = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z'_k}\right)} = f(z'_k).$$

Als $z_k \to \infty$, dan nadert z'_k tot 0.

Hieruit volgt in verband met het voorgaande

$$f(0) = 0 \text{ dus } \varphi(\infty) = \infty.$$

2e voorwaarde — Daar O regelmatig limietpunt is bij iteratie van $f(z')$, moet $|f'(0)| < 1$ zijn.

Nu is

$$\frac{d}{dz'}f(z') = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z'}\right)}{\left\{\varphi\left(\frac{1}{z'}\right)\right\}^2 z'^2}.$$

In de omgeving van $z' = 0$ heeft men $\varphi\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{\theta(z')}{z'^m}$

$\theta(0) \neq 0$ en $\theta(z')$ holomorf, waarbij dus ondersteld wordt dat $\varphi\left(\frac{1}{z'}\right)$ in $z' = 0$ een pool van de m^e orde heeft.

Nu is

$$-\varphi'\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{1}{z'^2} = -\frac{m\,\theta(z')}{z'^{m+1}} + \frac{\theta'(z')}{z'^m} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Voor $m = 1$, $z' = 0$ heeft men $\varphi'(\infty) = \theta(0)$.

Voorts is $\theta(0) = \{\varphi\left(\frac{1}{z'}\right).z'\}_{z'=0}$

Uit $|f'(0)| < 1$ volgt dus $\left|\frac{\theta(0)}{\{\theta(0)\}^2}\right| < 1$, dus $|\theta(0)| > 1$ of $|\varphi'(\infty)| > 1$.

Voor $m > 1$ is $f'(0) = 0$ en is dus altijd aan de 2e voorwaarde voldaan.

Dat de hierboven afgeleide voorwaarden voor het optreden van een regelmatig limietpunt noodig en voldoende zijn, toonen we als volgt aan:

Bewering — Indien $\varphi(x) = x$, $|\varphi'(x)| < 1$, dan is x middelpunt van een cirkel C_x, waarbinnen de consequenten van iedere $z \prec C_x$ regelmatig tot x naderen. x is dan een regelmatig limietpunt.

Bewijs — $\varphi(z)$ is holomorf in een cirkel C'_x met x tot middelpunt.

Men heeft dus in C'_x

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\varphi'(x) + (z - x)^2 \lambda(z).$$

$\lambda(z)$ is eveneens holomorf in C'_x en zij nu A het maximum van $|\lambda(z)|$ op den rand van C'_x, dan is wegens

$$\frac{z_1 - x}{z - x} = \varphi'(x) + (z - x)\lambda(z)$$

overal binnen C'_x

$$\left|\frac{z_1 - x}{z - x}\right| < |\varphi'(x)| + |z - x| . A. \quad . . . . . (1)$$

Zij C''_x de cirkel met x tot middelpunt en straal

$$\frac{1 - |\varphi'(x)|}{A}.$$

Beschouw ik nu de cirkel C_x, die met C'_x samenvalt als $r_{c''_x} < r_{c'_x}$ of met C''_x samenvalt indien $r_{c''_x} < r_{c'_x}$ is, dan volgt uit (1), dat overal in C_x $|z_1 - x| < k|z - x|$ $0 < k < 1$.

Dus $|z_n - x| < k^n |z - x|$

of $\lim_{n \to \infty} z_n = x$.

Deze convergentie geschiedt regelmatig, x is dus een regelmatig limietpunt.

De regelmatige limietpunten bij iteratie van een functie $\varphi(z)$ zijn dus de wortels ξ van de vergelijking $\varphi(z) - z = 0$, waarvoor $|\varphi'(\xi)| < 1$ is. Iedere ξ is middelpunt van een cirkel C_ξ waarbinnen de consequenten van iedere $z \prec C_\xi$ regelmatig tot ξ naderen.

Na toepassing van het bovenstaande op de behandelde voorbeelden $\varphi(z) = z^2$ en $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ krijgen we in overeenstemming met het in § 1 meegedeelde, dat er bij iteratie van $\varphi(z) = z^2$ twee regelmatige limietpunten (0 en ∞) en bij iteratie van $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ geen regelmatige limietpunten optreden.

§ 3 — CYCLISCHE LIMIETGROEPEN

Ik noem de vergelijking $\varphi_p(z) = z$ de vergelijking E_p.

Voorts zeg ik dat x tot E_p behoort, indien x een wortel van E_p is, terwijl voor iedere $q < p$ $\varphi_q(x) \neq x$ is.

Beweringen — a — Is x een wortel van E_p, dan is x eveneens een wortel van E_{kp}.

Om dit in te zien behoeven we slechts beide leden der gelijkheid $\varphi_p(x) = x$ $(k-1)\,p$ maal te itereeren.

b — Is x een wortel van E_p, dan zijn $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ eveneens wortels van E_p.

Men heeft n.l. $\varphi_p(x) = x$; na eenmalige iteratie verkrijgt men $\varphi_{p+1}(x) = \varphi(x)$ of $\varphi_p(x_1) = x_1$, enz.

c — Behoort x tot E_p, dan behooren de $p-1$ wortels $x_1, \ldots, x_{p-1}$, eveneens tot E_p.

Stel x_1 behoort tot E_q $q < p$, dan moet wegens (a) en (b) $p = nq$. Dan permuteert de substitutie $\varphi(z)$ de groep $x_1, x_2, \ldots x_q$, waaruit volgt dat:

$$x_q = x_{2q} = \ldots = x_{nq} = x.$$

x zou dan echter voldoen, aan $\varphi^q(x) = x$, wat tegen het onderstelde is.

Samenvattende krijgen we dus nu:

De wortels, die tot de index p behooren, verdeelen zich in groepen van p wortels, die cyclisch gepermuteerd worden door de substitutie $\varphi(z)$.

We passen het bovenstaande toe op een geval van onregelmatige convergentie. Daartoe stellen we:

De verzameling (α_i) convergeert onregelmatig tot x (in 't eindige gelegen), echter zóó, dat de deelverzameling

$\alpha, \alpha_p, \alpha_{2p} \ldots., \alpha_{np}, \ldots.$ regelmatig tot x convergeert voor iedere $\alpha \prec \Omega$, waarbij Ω een omgeving van x is.

Hiervoor is noodig dat

1° $\varphi_p(x) = x$,

2° $|\varphi'_p(x)| < 1$, immers we houden ons nu bezig met de iteratie van $\varphi_p(z)$, waarbij x regelmatig limietpunt is.

Stel x behoort tot E_μ, dan moet $p = a\mu$.

Nu is

$$\frac{d}{dz}\{\varphi_p(z)\}\Big|_{z=x} = [\varphi'(x) \cdot \varphi'(x_1) \ldots. \varphi'(x_{\mu-1})]^a$$

dus wegens $|\varphi'_p(x)| < 1$ is eveneens $|\varphi_\mu'(x)| < 1$, waaruit volgt dat de verzameling

$\alpha, \alpha_\mu, \alpha_{2\mu}, \ldots.$ regelmatig tot x convergeert voor iedere $\alpha \prec \Omega$.

We onderstellen verder dat geen der getallen $x_1, x_2, \ldots. x_{\mu-1}, \infty$ is, $\varphi(z)$ is dan holomorf in een omgeving Ω' van x, Ω_1' van x_1, Ω_2' van x_2 enz.

We beschouwen nu de verzameling $\alpha_1, \alpha_{\mu+1}, \alpha_{2\mu+1}, \ldots.$

Deze verzameling convergeert regelmatig tot x_1.

Men heeft n.l.:

De elementen van de verzameling $\alpha_1, \alpha_{\mu+1}, \ldots.$ zijn de consequenten van de eerste orde van de elementen van de verzameling $\alpha, \alpha_\mu, \alpha_{2\mu}, \ldots.$, welke regelmatig tot x convergeert. De verzameling $\alpha_1, \alpha_{\mu+1}, \ldots.$ moet dan regelmatig tot x_1 $(x_1 = \varphi(x))$ convergeeren, aangezien $\varphi(z)$ Ω' conform afbeeldt op een zekere omgeving van x_1, dus een regelmatig convergente verzameling in Ω' overvoert in een eveneens regelmatig convergente verzameling.

Voor iedere $\alpha \prec \Omega$ geldt dus dat

de verzameling a , a_μ , . . ., $a_{n\mu}$, . . . regelm. tot x convergeert,

" " a_1 , $a_{\mu+1}$, . . ., $a_{n\mu+1}$, . . . " " x_1 " ,

" " a_2 , $a_{\mu+2}$, . . ., $a_{n\mu+2}$, . . . " " x_2 " .

. . . . . .

" " $a_{\mu-1}$, $a_{2\mu-1}$, . . ., $a_{(n+1)\mu-1}$, . . . " " $x_{\mu-1}$ " .

x, x_1, x_2, ..., $x_{\mu-1}$ behooren tot E_μ, bovendien is daar

$$\varphi'_\mu(x) = \varphi'(x)\,\varphi'(x_1) \ldots . \varphi'(x_{\mu-1})$$

of $\varphi'_\mu(x) = \varphi'_\mu(x_1) = \ldots . = \varphi'_\mu(x_{\mu-1})$.

Ook hieruit volgt dat de 2e voorwaarde $|\varphi'_\mu(x_i)| < 1$ inderdaad vervuld is, immers $|\varphi'_\mu(x)|$ is kleiner dan een.

In het bovenstaande is dus bewezen, mede in verband met het afgeleide in § 2:

Bewering — Indien $x = x_o$ behoort tot E_μ, terwijl bovendien $|\varphi'(x) \ldots . \varphi'(x_{\mu-1})| < 1$ is, dan is x_i $(i = 0, 1, \ldots., \mu - 1)$ middelpunt van een cirkel C_i, waarbinnen de consequenten van iedere z $(z \prec C_i)$ bij iteratie van $\varphi_\mu(z)$ regelmatig tot x_i naderen.

De groep x, x_1, ... $x_{\mu-1}$ wordt een cyclische limietgroep genoemd. Het aantal elementen van de groep bepaalt de *orde*.

Maakt het punt ∞ deel uit van de cyclische limietgroep, is bijvoorbeeld $x_h = \infty$, dan moet $|x_{h+1}|$, waarbij $x_{h+1} = \varphi(\infty)$, begrensd zijn.

Bovendien is $\varphi(z)$ in de omgeving van x_{h-1} meromorf.

De voorwaarden worden in dit geval;

$x_i = \varphi_\mu(x_i)$ $i = 0, 1, \ldots., \mu - 1$, doch $|\varphi'_\mu(x_i)| < 1$ geldt alleen als $i \neq h$ is. Voor $i = h$ wordt de 2e voorwaarde

$$|\varphi'_\mu(\infty)| > 1.$$

Passen we het bovenstaande toe op het voorbeeld $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$, dan volgt hieruit dat de punten 0 en ∞ de elementen zijn van een cyclische limietgroep van de 2e orde.

§ 4 — DE FUNCTIE B (z)

Bewering — Indien O regelmatig limietpunt is, en $\varphi'(0) \neq 0$, dan stelt de functie

$$B(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{\varphi_p(z)}{[\varphi'(0)]^p}$$

in C_o een holomorfe functie voor, die O tot enkelvoudig nulpunt heeft.

Bewijs — In C_o is:

$$\begin{aligned} z_1 &= z\,\varphi'(0).\ (1 + \theta\, Mz), \\ z_2 &= z_1\varphi'(0).\ (1 + \theta_1 Mz_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_p &= z_{p-1}\,\varphi'(0).\ (1 + \theta_{p-1}\, Mz_{p-1}), \end{aligned}$$

waarbij M een positieve constante onafhankelijk van z is en waarbij

$$|\theta_i| < 1.$$

Nu is in C_o:

$$\begin{aligned} |z_1| &< k\,|z|, \\ |z_n| &< k^n |z|, \quad 0 < k < 1, \text{ en we krijgen:} \\ z_1 &= z\varphi'(0).\ (1 + \theta Mz), \\ z_2 &= z_1\varphi'(0).\ (1 + \theta_1' Mkz), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad |\theta_i'| < 1. \\ z_p &= z_{p-1}\,\varphi'(0).\ (1 + \theta'_{p-1}\, Mk^{p-1}z). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\frac{z_p}{[\varphi'(0)]^p} = z\,(1 + \theta\, Mz)\,(1 + \theta_1'\, Mkz) \ldots (1 + \theta'_{p-1}\, Mk^{p-1}z).$$

Laten we nu p tot ∞ naderen, dan krijgen we:

Wegens de gelijkmatige convergentie der reeks $\Sigma\,|\,\theta'_m Mk^m z\,|$ convergeert het oneindige product $\Pi\,(1 + \theta'_m Mk^m z)$ en nadert $\frac{z_p}{[\varphi'(0)]^p}$ overal in C_o (behalve in O) tot een van nul verschillende eindige limiet.

Stellen we voorts $B(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{z_p}{[\varphi'(0)]^p}$, dan volgt uit de gelijkmatige convergentie tevens dat B (z) in C_o holomorf is.

Het punt O is enkelvoudig nulpunt van B (z).

Indien x, in 't eindige gelegen, regelmatig limietpunt is, en $\varphi'(x) \neq 0$, dan is in C_x

de functie $B(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$ holomorf,

waarbij x enkelvoudig nulpunt van B (z) is.

Dezelfde redeneering van daareven doet dit inzien.

Ook het volgende is gemakkelijk in te zien:

Indien 't punt ∞ regelmatig limietpunt is en $|\varphi'(\infty)|$ eindig, dan is in C_∞ (op den complexen bol) de functie

$$B(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{\{\varphi'(\infty)\}^p}{z_p} \text{ holomorf.}$$

Bewering — Het oneindige product $\prod_{i=0}^{i=\infty} \frac{\varphi'\{\varphi_i(z)\}}{\varphi'(x)}$ stelt in C_x

$$(\varphi(x) = x,\ |\varphi'(x)| < 1,\ \varphi'(x) \neq 0)$$

een holomorfe functie voor, die gelijk is aan B' (z).

Bewijs — In C_x is

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z-x)\varphi'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!}\varphi''(x) + \ldots.$$

dus

$$\varphi'(z) = \varphi'(x) + (z-x)\varphi''(x) + \ldots.$$

of

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(x)} = 1 + (z-x)\,\theta\,N$$

en $\frac{\varphi'(z_i)}{\varphi'(x)} = 1 + (z_{i-1} - x)\,\theta_{i-1}\,N = 1 + (z-x)\,k^{i-1}\theta'_{i-1}\,N,$

waarbij N een positieve constante is onafhankelijk van z (in C_x) en waarbij $|\theta_p|$ en $|\theta'_p|$ kleiner dan één zijn. Het oneindige product

$\prod\{1 + \theta'_p\,Nk^p(z-x)\}$ stelt dan wegens de gelijkmatige convergentie der reeks $\sum|\theta'_p\,Nk^p(z-x)|$ in C_x een holomorfe functie voor, immers $0 < k < 1$.

Nu is $$\frac{d}{dz}\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p} = \prod_{i=0}^{i=p-1} \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{\varphi'(x)}.$$

De limietovergang $(p \to \infty)$ die hier geoorloofd is geeft:

$$B'(z) = \prod_{i=0}^{i=\infty} \frac{\varphi'[\varphi_i(z)]}{\varphi'(x)}.$$

Voor $z = x$, is $B'(z) = 1$.

§ 5 — DE FUNCTIONAALVERGELIJKINGEN VAN SCHROEDER EN ABEL

Zij x regelmatig limietpunt en $\varphi'(x) \neq 0$, dan is in C_x

$$\frac{\varphi_{p+1}(z) - x}{[\varphi'(x)]^{p+1}} = \frac{1}{[\varphi'(x)]} \quad \frac{\varphi_p\{\varphi(z)\} - x}{[\varphi'(x)]^p}.$$

Bij limietovergang $(p \to \infty)$ krijgen we

$$B(z) = \frac{1}{\varphi'(x)} B\{\varphi(z)\}.$$

B (z) is dientengevolge in C_x een oplossing van de functionaalvergelijking van Schroeder

$\Xi[\varphi(z)] = c.\Xi(z) \ldots .$ (S), waarbij Ξ een onbekende functie en c een constante is.

In ons geval hebben we dus als oplossing

$$\Xi(z) = B(z), \; c = \varphi'(x).$$

Deze oplossing duiden we symbolisch aan met $\{B(z), \varphi'(x)\}$.

Zij n een geheel positief of negatief getal, dan is

$$\{[B(z)]^n, [\varphi'(x)]^n\}$$

eveneens een oplossing van (S); zoo ook $\{a.B(z), \varphi'(x)\}$, waarbij a een constante is.

Alle oplossingen van (S), die op deze manier uit $\{B(z), \varphi'(x)\}$ af te leiden zijn, kunnen dus voorgesteld worden door

$$\{[aB(z)^n], [\varphi'(x)]^n\}.$$

Voor $n > 0$ zijn deze oplossingen holomorf in C_x, terwijl voor $n < 0$ deze oplossingen meromorf in C_x zijn.

n geeft aan de orde van het nulpunt x, respectievelijk de orde van de pool van de betreffende oplossing.

Opmerking — Dat de functie B (z), die in de omgeving van het punt ∞ optreedt, indien ∞ regelmatig limietpunt is en als $|\varphi'(\infty)|$ eindig is, in C_∞ een oplossing is van de functionaalvergelijking van Schroeder, kunnen we als volgt inzien:

$$B(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{[\varphi'(\infty)]^p}{z_p}.$$

Dan is $B(z) = \varphi'(\infty)\, B\{\varphi(z)\}$ of

$$B\{\varphi(z)\} = \frac{1}{\varphi'(\infty)} B(z).$$

In dit geval voldoet $B(z)$ aan (S) als

$$\Xi(z) = B(z) \text{ en } c = \frac{1}{\varphi'(\infty)}.$$

Bewering — Iedere oplossing van (S), die in C_x holomorf of meromorf is, kan voorgesteld worden door

$$\{\alpha\,[B(z)]^n,\ [\varphi'(x)]^n\}$$

Bewijs — (voor 't holomorfe geval).

Uit (S) volgt $\Xi\{\varphi_i(z)\} = c^i\, \Xi(z)$ . . . . . (1)
Voor $z = x$ krijgen we $(1 - c^i)\, \Xi(x) = 0$.
Hieruit volgt òf $c = 1$ òf $\Xi(x) = 0$.
Nu is in C_x $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(z) = x$ en aangezien de functie Ξ in C_x holomorf ondersteld werd, is

$$\lim_{i\to\infty} \Xi\{\varphi_i(z)\} = \Xi(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Voor $c = 1$, volgt uit (1) en (2)

$$\Xi(z) = \Xi(x) = \text{constant}.$$

Conclusie: iedere holomorfe oplossing van de vergelijking (S) moet in x nul zijn, immers $c = 1$ is uitgesloten, blijft dus alleen over $\Xi(x) = 0$.
Ik stel nu $\Xi(z) = (z - x)^n\, \Phi(z)$, $\Phi(z)$ is holomorf in C_x en

$$\Phi(x) \neq 0.$$

We krijgen dan $\Xi[\varphi(z)] = (z - x)^n\, c\, \Phi(z)$ . . . . . (3)
terwijl tevens $\Xi[\varphi(z)] = [\varphi(z) - x]^n\, \Phi[\varphi(z)]$ . . . . . (4)
Uit (3) en (4) leiden we af dat

$$\left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^n \Phi[\varphi(z)] = c\, \Phi(z) \quad \ldots\ldots (5)$$

Laten we nu z tot x naderen, dan geeft (5)

$$[\varphi'(x)]^n = c.$$

Dan is $[\varphi(z) - x]^n \Phi [\varphi(z)] = [\varphi'(x)]^n \Xi(z)$

en $[\varphi_i(z) - x]^n \Phi [\varphi_i(z)] = [\varphi'(x)]^{ni} \Xi(z)$

of $$\left\{\frac{\varphi_i(z) - x}{[\varphi'(x)]^i}\right\}^n \Phi [\varphi_i(z)] = \Xi(z).$$

En voor $i \to \infty$ (deze limietovergang is hier geoorloofd) krijgen we

$$[B(z)]^n \Phi(x) = \Xi(z).$$ q. e. d.

Wordt $\Xi(z)$ in C_x meromorf ondersteld, dan geeft een analoog bewijs, dat ook in dit geval

$\Xi(z) = a\{B(z)\}^n$ (a = constant), met dit verschil dat nu n geheel en negatief is.

De functionaalvergelijking van Abel is

$\Xi\{\varphi(z)\} = \Xi(z) + 1$, waarbij Ξ een onbekende functie is.

Neemt men de logarithme van beide leden van de vergelijking van Schroeder en deelt men daarna door lg c, dan verkrijgt men de vergelijking van Abel.

Hieruit volgt dat de vergelijking van Abel in C_x

$$(\varphi(x) = x, \ |\varphi'(x)| < 1, \ \varphi'(x) \neq 0)$$

geen holomorfe of meromorfe oplossingen heeft.

Een der oplossingen van de vergelijking van Abel in C_x is

$b(z) = \frac{\lg B(z)}{\lg \varphi'(x)}$; deze oplossing heeft in x een logarithmisch punt.

Algemeene oplossing van de vergelijkingen van Schroeder en Abel in de omgeving van een regelmatig limietpunt.

Het quotient van twee oplossingen van (S), of het verschil van twee oplossingen van (A), is een oplossing van de functionaalvergelijking

$$\Xi\{\varphi(z\}) = \Xi(z). \ldots\ldots\ldots (I)$$

Indien nu X (z) de algemeene oplossing van (I) is, dan zijn de algemeene oplossingen van de vergelijkingen (S) en (A) respectievelijk B (z) . X (z) en b (z) + X (z).

Stellen we nu $X(z) = \Omega\{b(z)\}$, dan is

$$X\{\varphi(z)\} = \Omega[b\{\varphi(z)\}] = \Omega\{b(z) + 1\}.$$

En aangezien $X\{\varphi(z)\} = X(z)$, is $\Omega\{b(z) + 1\} = \Omega\{b(z)\}$.

Hieruit volgt dat de functie Ω iedere willekeurige periodieke functie kan zijn met de eenheid tot periode.

Zie voor een mooie toepassing hiervan de publicatie van Koenigs sub 2 vermeld in het literatuurlijstje aan het eind van dit Hoofdstuk.

§ 6 — DE FUNCTIE $\beta(z)$ — AFLEIDING VAN DE FUNCTIONAALVERGELIJKING, WAARVAN $\beta(z)$ EEN DER OPLOSSINGEN IS

In de hieraan voorafgaande §§ hebben we ons bezig gehouden met de limietfuncties, die in de omgeving van een regelmatig limietpunt x ($\varphi'(x) \neq 0$) respectievelijk in de omgeving van het regelmatige limietpunt ∞ ($|\varphi'(\infty)|$ eindig) optreden.

Wij stellen nu dat voor het regelmatige limietpunt x geldt $\varphi'(x) = 0$, respectievelijk voor het regelmatige limietpunt ∞ $\varphi'(\infty) = \infty$ en zullen in deze § de limietfuncties, die bij dèze onderstellingen optreden, behandelen.

Zij O regelmatig limietpunt, dan is dus $\varphi(0) = 0$. Voorts onderstel ik

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(0) = 0,\ \varphi^{(m)}(0) \neq 0.$$

In C_o heeft men dan:

$$z_1 = z^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}(1 + \theta Mz)$$

$$z_2 = z_1^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}(1 + \theta_1 Mz_1)$$

of zooals § 4 aangeeft:

$$z_2 = z_1{}^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}(1 + \theta_1' \, Mkz). \qquad 0 < k < 1$$

. . . . . .

In het algemeen: $z_p = z_{p-1}^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}(1 + \theta'_{p-1} \, Mk^{p-1}z)$, M is een constante onafhankelijk van z en $|\theta'_i| < 1$.

Hieruit volgt dat:

$$\frac{z_p \cdot z_{p-1} \ldots . z_1}{[z_{p-1} \ldots . z_1]^m} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^p = z^m \, \Pi (1 + \theta \, Mz) \ldots (1 + \theta'_{p-1} Mk^{p-1} z)$$

en bij limietovergang $p \to \infty$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{z_p \ldots . z_1}{[z_{p-1} \ldots z_1]^m} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^p = z^m \prod_{i=o}^{i=\infty} (1 + \theta'_1 \, Mk^i z).$$

Het oneindige product $\prod_{i=o}^{i=\infty} (1 + \theta'_i \, Mk^i z)$ convergeert in C_o gelijkmatig en stelt dus in C_o een holomorfe functie voor.

$\beta(z) = z^m \prod_{i=o}^{i=\infty} (1 + \theta'_i \, Mk^i z)$ is dus in C_o holomorf.

We krijgen nu:

$$\beta(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{z_p \ldots . z_1}{(z_{p-1} \ldots z_1)^m} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^p$$

waarbij $\beta(z)$ het analogon is van B (z).

Voorts is

$$\frac{z_{p+1} \cdot z_p \ldots . z_1}{[z_p \ldots . z_1]^m} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^{p+1} =$$

$$= \frac{z_p \{\varphi(z)\} \ldots . z_1 \{\varphi(z)\}}{[z_{p-1}\{\varphi(z)\} \ldots z_1 \{\varphi(z)\}]^m} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^p \frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)} \frac{1}{\{\varphi(z)\}^{m-1}}$$

en als $p \to \infty$

$$\beta(z) = \frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)} \frac{1}{\{\varphi(z)\}^{m-1}} \beta\{\varphi(z)\}$$

of

$$\beta\{\varphi(z)\} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\{\varphi(z)\}^{m-1}\beta(z).$$

$\beta(z)$ is dus een oplossing van de functionaalvergelijking

$$\Xi\{\varphi(z)\} = c\{\varphi(z)\}^n \Xi(z) \ldots . S'$$

als $\beta(z) = \Xi(z)$, $c = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}$ en $n = m - 1$.

Op te merken valt dat voor $n = 0$ (S') in (S) overgaat.

Is in plaats van O, x regelmatig limietpunt
$(\varphi(x) = x, \varphi'(x) = \varphi''(x) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(x) = 0, \varphi^{(m)}(x) \neq 0)$
dan krijgen we

$$\beta(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{(z_p - x)\ldots\ldots(z_1 - x)}{[(z_{p-1} - x)\ldots(z_1 - x)]^m}\left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(x)}\right\}^p$$

waarbij $\beta(z)$ in C_x holomorf is.

In de omgeving van ∞, ∞ regelmatig limietpunt

$(\varphi(\infty) = \infty, \varphi'(\infty) = \varphi''(\infty) = \ldots . = \varphi^{(m-1)}(\infty) = \infty, |\varphi^{(m)}(\infty)|$ eindig),
heeft men

$$\beta(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{[z_{p-1}\ldots . z_1]^m}{z_p \ldots\ldots . z_1}\left\{\frac{\varphi^{(m)}(\infty)}{m!}\right\}^p,$$

waarbij $\beta(z)$ in C_∞ holomorf is.

En aangezien

$$\beta(z) = \frac{\varphi^{(m)}(\infty)}{m!}\{\varphi(z)\}^{m-1}\beta\{\varphi(z)\},$$

voldoet ook hier $\beta(z)$ aan de functionaalvergelijking

$$\Xi\{\varphi(z)\} = c\{\varphi(z)\}^n \Xi(z) \ldots . (S')$$

als $\Xi(z) = \beta(z)$, $c = \frac{m!}{\varphi^{(m)}(\infty)}$ en $n = -m + 1$.

Bewering — Iedere holomorfe of meromorfe oplossing van (S') kan voorgesteld worden door $\alpha \{\beta (z)\}^n$.

Is $n > 0$, dan is de oplossing holomorf.

Voor $n < 0$, is de oplossing meromorf.

Bewijs — (voor het holomorfe geval).

We stellen: O is regelmatig limietpunt, dus

$$\varphi (0) = 0,\ \varphi' (0) = \varphi'' (0) = \ldots . \varphi^{(m-1)} (0) = 0,\ \varphi^{(m)} (0) \neq 0.$$

Uit $\Xi \{\varphi (z)\} = c \{\varphi (z)\}^n \Xi (z) \ldots .$ (S')

volgt $\Xi \{\varphi_i (z)\} = c^i \{\varphi (z)\}^{ni} \Xi (z)$.

Aangezien voor $z = 0$, $\varphi (z) = 0$ en $\varphi_i (z) = 0$, geeft de laatste vergelijking $\Xi (0) = 0$.

Ik stel nu $\Xi (z) = z^q \Phi (z)$, waarbij $\Phi (0) \neq 0$ en $\Phi (z)$ in C_o holomorf is en krijg dan

$$\{\varphi (z)\}^q \Phi \{\varphi (z)\} = c \{\varphi (z)\}^n z^q \Phi (z)$$

$$\text{of } \Phi \{\varphi (z)\} = c \{\varphi (z)\}^{n-q} z^q \Phi (z) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Voorts is $\varphi (z) = z^m \theta (z)$, $\theta (0) = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \neq 0$ en $\theta (z)$ in C_o holomorf.

Substitueeren we dit in (1), dan moet

$$m (n - q) + q = 0 \text{ en } c = \left\{\frac{1}{\theta (0)}\right\}^{n-q} = \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)} (0)}\right\}^{n-q}$$

Voor een holomorfe oplossing is dus

$$q = mr \text{ en } n = (m - 1)r \text{ (r geheel en positief).}$$

Vergelijking (1) wordt:

$$\Phi \{\varphi (z)\} = c \{\varphi (z)\}^{-r} z^{mr} \Phi (z)$$

of $$z_1^r \Phi (z_1) = c z^{mr} \Phi (z)$$

Ook is $z_2^r \Phi (z_2) = c z_1^{mr} \Phi (z_1)$.

En in 't algemeen

$$z_p^r \Phi (z_p) = c z_{p-1}^{mr} \Phi (z_{p-1}).$$

Dus

$$\{z_p \ldots . z_1\}^r \Phi (z_p) = c^p z^{mr} . z_1^{mr} \ldots . z_{p-1}^{mr} \Phi (z)$$

of

$$\frac{1}{c^p}\left\{\frac{z_p \ldots . z_1}{[z_{p-1} \ldots . z_1]^m}\right\}^r \Phi(z_p) = z^{mr}\, \Phi(z) \ldots\ldots\ldots (2)$$

waarbij $\frac{1}{c} = \left\{\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\right\}^{n-q} = \left\{\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\right\}^{-r} = \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^r$.

Nu is, aangezien $\Xi(z)$ in C_o holomorf ondersteld is,

$$\lim_{p\to\infty} \Phi(z_p) = \Phi(0) = a.$$

Hieruit volgt: nadert p tot ∞, dan geeft (2)

$$a\,\{\beta(z)\}^r = \Xi(z).\ \text{h. t. b. w.}$$

Algemeene oplossing van de vergelijking (S') in de omgeving van een regelmatig limietpunt.

Het quotient van 2 oplossingen van

$$\Xi\{\varphi(z)\} = c\,\{\varphi(z)\}^n\,\Xi(z) \ldots . (S')$$

voldoet aan de functionaalvergelijking

$$\Xi\{\varphi(z)\} = \Xi(z). \ldots\ldots\ldots (I)$$

Deze laatste functionaalvergelijking heeft in de omgeving van een regelmatig limietpunt noch holomorfe noch meromorfe oplossingen, immers uit (I) volgt

$\Xi\{\varphi_i(z)\} = \Xi(z)$ en hieruit als $i \to \infty$, dat in de omgeving van dat regelmatige limietpunt $\Xi(z) =$ comstant eindig of oneindig is, al naar gelang $\Xi(z)$ holomorf of meromorf in het regelmatige limietpunt ondersteld is.

Zij nu X (z) de algemeene oplossing van (I), dan is de algemeene oplossing van (S') $\beta(z) \,.\, X(z)$.

Op te merken is, dat in dit geval ($\varphi'(x) = 0$, x is het regelmatige limietpunt) X (z) niet gelijk te stellen is aan $\Omega\{b(z)\}$, daar b (z) in de omgeving van x niet bestaat.

Toepassing van het bovenstaande op het eerste voorbeeld van § 1.

$$\varphi(z) = z^2 \text{ dus } \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0,\ \varphi''(0) = 2.$$

In de omgeving van O moet dus optreden de holomorfe functie $\beta(z)$, die een oplossing is van de functionaalvergelijking

$$\Xi(z^2) = z^2\,\Xi(z).$$

In 't algemeen was

$$\beta(z) = \lim_{p\to\infty} \left\{\frac{m!}{\varphi^{(m)}(0)}\right\}^p \frac{z_p \ldots\ldots z_1}{[z_{p-1}\ldots z_1]^m}.$$

In dit geval is dus

$$\beta(z) = \lim_{p\to\infty} \frac{z_p \ldots\ldots\ldots z_1}{\{z_{p-1}\ldots z_1\}^2}$$

en daar

$$z_p = z^2_{p-1},\ z_{p-1} = z^2_{p-2},\ \text{enz.}\ldots\ldots$$

is $\beta(z) = z^2$.

In de buurt van ∞ hebben we, aangezien

$$\varphi(\infty) = \infty,\ \varphi'(\infty) = \infty$$
$$\varphi'(\infty) = 2,$$

de functionaalvergelijking

$$z^2\,\Xi(z^2) = \Xi(z)$$

en als oplossing

$$\beta(z) = \lim_{p\to\infty} \left\{\frac{\varphi^{(m)}(\infty)}{m!}\right\}^p \frac{[z_{p-1}\ldots z_1]^m}{z_p \ldots\ldots z_1} = \frac{1}{z^2}.$$

De algemeene oplossing in de omgeving van O is $z^2 . X(z)$, en in de omgeving van ∞ $\frac{1}{z^2} . X(z)$, waarbij $X(z)$ een willekeurige functie is die voldoet aan $X(z^2) = X(z)$.

Bijvoorbeeld kan $X(z)$ zijn $\sin \text{Plg}\, \text{elg}\, z$, waarbij voor de logarithme steeds de hoofdwaarde genomen moet worden, terwijl we als w een complex getal voorstelt

Plg w als volgt definieeren

$\text{Plg}\, w = \text{Plg}\, |w| + i\varphi$ en waarbij p voldoet aan $p^{2\pi} = 2$.

§ 7 — OPLOSSING VAN DE FUNCTIONAALVERGELIJKING VAN SCHROEDER IN DE OMGEVINGEN VAN DE ELEMENTEN x_i VAN EEN CYCLISCHE LIMIETGROEP, ZOO DEZE ELEMENTEN IN HET EINDIGE GELEGEN ZIJN EN INDIEN $\varphi'_\mu(x_i) \neq 0$, WAARBIJ μ DE ORDE VAN DE GROEP IS

In § 3 is afgeleid dat iedere x_i, behoorende tot een cyclische limietgroep, middelpunt van een cirkel C_i is, waarin

$$|\varphi_\mu(z) - x_i| < k\,|z - x_i|$$
$$|\varphi_{\mu p}(z) - x_i| < k^p |z - x_i|,\ 0 < k < 1,$$

als μ de orde van de groep voorstelt.

We kunnen nu een met C_i concentrischen en in C_i liggenden respectievelijk er mee samenvallenden cirkel C'_i zoo bepalen dat voor iedere $z \prec C'_i$

z_1 in C_{i+1}, z_2 in C_{i+2}, . . ., $z_{\mu-1}$ in $C_{i+\mu-1}$ gelegen is

Zij $\varphi'(x_i) = a_i$, dan is

$$\varphi'_\mu(x_i) = \varphi'(x_i) \cdot \varphi'(x_{i+1}) \ldots \varphi'(x_{i+\mu-1}) = a_i \cdot a_{i+1} \ldots a_{i+\mu-1}.$$

Of daar voor zekere index $i + \lambda$ $x_{i+\lambda} = x_o$, $x_{i+\lambda+1} = x_1$, enz. is $\varphi'_\mu(x_i) = a_o a_1 \ldots a_i \ldots a_{\mu-1} = a$.

Aangezien we hier te doen hebben met een cyclische limietgroep moet $|a| < 1$ zijn.

De functie $B_i(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{\varphi_{\mu p}(z) - x_i}{a^p}$ stelt dan in C_i een holomorfe functie voor, die in C_i een oplossing is van de functionaalvergelijking $\Xi\{\varphi_\mu(z)\} = c\,\Xi(z)$, waarbij $\Xi(z) = B_i(z)$ en $c = a$, immers $B_i\{\varphi_\mu(z)\} = a\,B_i(z)$.

Is nu $z \prec C'_i$ en $j < \mu$ dan is
$z_j \prec C'_{i+j}$.

De functie $B_{i+j}\{\varphi_j(z)\}$ is nu in C'_i holomorf, waarbij

$$B_{i+j}\{\varphi_j(z)\} = \lim_{p \to \infty} \frac{\varphi_{\mu p}\{\varphi_j(z)\} - x_{i+j}}{a^p}.$$

Voorts is in C_i'

$$\frac{B_{i+j}\{\varphi_j(z)\}}{B_i(z)} = \lim_{p \to \infty} \frac{\varphi_{\mu p}\{\varphi_j(z)\} - x_{i+j}}{\varphi_{\mu p}(z) - x_i} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\varphi_j\{z_{\mu p}\} - \varphi_j(x_i)}{z_{\mu p} - x_i} = \left.\frac{d\varphi_j(z)}{dz}\right|_{z=x_i} =$$

$$= a_{i+j-1} \cdot a_{i+j-2} \cdot \ldots \cdot a_i.$$

Men heeft dus voor iedere $z \prec C'_i$ en voor iedere $j < \mu$

$$B_{i+j}\{\varphi_j(z)\} = a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{i+j-1} B_i(z).$$

Voor $j = 1$ krijgt men

$B_{i+1}\{\varphi(z)\} = a_i B_i(z)$, terwijl voor $j = \mu$ de zooeven genoemde betrekking

$B_i\{\varphi_\mu(z)\} = a\, B_i(z)$ weer te voorschijn komt.

Een functie $f(z)$, die in C_o met $B_o(z)$, in C_1 met $B_1(z)$, ..., in $C_{\mu-1}$ met $B_{\mu-1}(z)$ samenvalt, bezit dus de eigenschap dat $\frac{f[\varphi(z)]}{f(z)}$ in C'_i $(i = 0, 1, \ldots, \mu - 1)$ constant is. Voor C'_o is deze constante a_o, voor C'_1 a_1, ..., voor $C'_{\mu-1}$ is deze constante $a_{\mu-1}$.

Aangezien deze constante van cirkel tot cirkel varieert is $f(z)$ geen eigenlijke oplossing van de vergelijking van Schroeder.

Voor het vinden dezer oplossing zoeken wij eerst de algemeene uitdrukking van een functie $\Xi(z)$ holomorf of meromorf in alle punten van de groep en die in iederen cirkel C_i' de eigenschap bezit dat $\frac{\Xi\{\varphi(z)\}}{\Xi(z)} =$ constant, waarbij de constante van cirkel tot cirkel verandert.

Zij nu C_i'' een cirkel, concentrisch met C'_i en binnen C'_i gelegen, respectievelijk er mee samenvallend, zoodanig dat als $z \prec C''_i$, z_1 in C'_{i+1}, z_2 in C'_{i+2}, ... $z_{\mu-1}$ in $C'_{i+\mu-1}$ gelegen is.

Nu moet in C''_i:

$$\frac{\Xi\{\varphi(z)\}}{\Xi(z)} = \lambda_i, \quad \frac{\Xi\{\varphi_2(z)\}}{\Xi\{\varphi(z)\}} = \lambda_{i+1}, \ldots, \frac{\Xi\{\varphi_\mu(z)\}}{\Xi\{\varphi_{\mu-1}(z)\}} = \lambda_{i+\mu-1}.$$

Hieruit volgt $\frac{\Xi\{\varphi_\mu(z)\}}{\Xi(z)} = \lambda_o \lambda_1 \ldots \lambda_{\mu-1}$.

Ook is $\frac{\Xi\{\varphi_{2\mu}(z)\}}{\Xi\{\varphi_{\mu}(z)\}} = \lambda_0 \lambda_1 \ldots . \lambda_{\mu-1}$.

En ten slotte $\Xi\{\varphi_{\mu p}(z)\} = \{\lambda_0 \lambda_1 \ldots . \lambda_{\mu-1}\}^p \Xi(z)$.

Iedere functie $\Xi(z)$, die de eigenschap bezit dat $\frac{\Xi\{\varphi(z)\}}{\Xi(z)} =$ constant in iederen cirkel C'_i is dus een oplossing van de vergelijking $\Xi\{\varphi_{\mu}(z)\} = c\,\Xi(z)$.

Alle holomorfe of meromorfe oplossingen dezer functionaalvergelijking kunnen worden voorgesteld door $\{\alpha_i [B_i(z)]^n, a^n\}$, waarbij α_i een willekeurige constante en n willekeurig geheel positief of negatief is.

Hieruit volgt dat de gezochte functie in C'_0 samen moet vallen met $\alpha_0 \{B_0(z)\}^{n_0}$, in C_1' met $\alpha_1 \{B_1(z)\}^{n_1}, \ldots .$, en in $C'_{\mu-1}$ met

$$\alpha_{\mu-1} \{B_{\mu-1}(z)\}^{n_{\mu-1}}.$$

Terwijl $\lambda_0 \lambda_1 \ldots . \lambda_{\mu-1} = a^{n_0} = a^{n_1} = \ldots . = a^{n_{\mu-1}}$.

Dus $n_0 = n_1 = \ldots . = n_{\mu-1} = n$.

$\Xi(z)$ heeft dientengevolge alle elementen van de groep tot nulpunten of polen van dezelfde orde.

Verder is

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \left\{ \frac{B_{i+1}\{\varphi(z)\}}{B_i(z)} \right\}^n$$

en aangezien

$$B_{i+1}\{\varphi(z)\} = a_i B_i(z)$$

is dus

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} a_i^n$$

We zijn nu in staat de algemeene holomorfe of meromorfe oplossing van de vergelijking van Schroeder in de omgevingen van de elementen van de groep te geven.

Hiertoe is voldoende de constanten α zóó te bepalen dat

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots . = \lambda_{\mu-1} = \lambda.$$

Daarvoor is noodig dat:

$$\frac{a_1}{a_0} a_0^n = \frac{a_2}{a_1} a_1^n = \ldots = \frac{a_0}{a_{\mu-1}} a_{\mu-1}^n = \lambda,$$

dus $a_1 = a_0 \frac{\lambda}{a_0^n}$, $a_2 = a_0 \frac{\lambda^2}{a_0^n a_1^n}$, $\ldots$, $a_{\mu-1} = a_0 \frac{\lambda^{\mu-1}}{a_0^n a_1^n \ldots a^n{}_{\mu-2}}$.

Terwijl $\lambda^\mu = a_0^n a_1^n \ldots a^n{}_{\mu-1} = a^n$.

De gemeenschappelijke factor a_0 in de betrekkingen tusschen de a_i's kan gelijk een gesteld worden, want het handhaven van a_0 komt neer op het vermenigvuldigen van $\Xi(z)$ met een constanten factor.

Ook kunnen we n gelijk aan een stellen, aangezien het handhaven van $n \neq 1$ neerkomt op het in de n^{de} macht verheffen van

$$\Xi(z).$$

Nemen we nu voor λ een der wortels van

$$\lambda^\mu = a$$

en noemen we B (z) een functie, die

in C_0' met $B_0(z)$ samenvalt,

„ C_1' „ $\frac{\lambda}{a_0} B_1(z)$ „ ,

„ . . . . . ,

„ C'_i „ $\frac{\lambda^i}{a_0 a_1 \ldots a_{i-1}} B_i(z)$ „ ,

en in $C'_{\mu-1}$ „ $\frac{\lambda^{\mu-1}}{a_0 a_1 \ldots a_{\mu-2}} B_{\mu-1}(z)$ „ .

Deze functie B (z) is holomorf in de omgeving van ieder element van de groep en voldoet aan de functionaalvergelijking van Schroeder:

$$\Xi\{\varphi(z)\} = c\,\Xi(z) \text{ want}$$
$$B\{\varphi(z)\} = \lambda\, B(z).$$

En aangezien λ, μ determinaties heeft zijn er μ functies B (z).

Noemen we deze μ functies ${}_0B(z)$, ${}_1B(z)$, ..., ${}_{\mu-1}B(z)$, dan is de algemeene holomorfe of meromorfe oplossing van de vergelijking van Schroeder voor te stellen door

$$\{a_0[{}_iB(z)]^n, \lambda^n\}.$$

Ook hiervan geeft Koenigs in zijn publicatie (sub 2 van het literatuurlijstje) een toepassing.

GERAADPLEEGDE LITERATUUR VOOR HOOFDSTUK I

1. Koenigs. Recherches sur les substitutions uniformes. Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques. Première Partie. 1883.
2. Koenigs. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles.
   Annales scientifiques de l'école normale supérieure. Tome premier, 1884.
3. Koenigs. Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles.
   Annales scientifiques de l'école normale supérieure. Tome deuxième. 1885.
4. Schroeder. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.
   Mathematische Annalen. Band II.
5. Schroeder. Über iterirte Functionen.
   Mathematische Annalen. Band III.

HOOFDSTUK II

INLEIDENDE BESCHOUWINGEN OVER DE VERZAMELING E′ — ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN TOT DE VERZAMELING E′ BEHOOREND PUNT.

§ 8 — EXISTENTIEBEWIJS VOOR DE VERZAMELING E BIJ ITERATIE VAN EEN WILLEKEURIGE RATIONALE FUNCTIE $\varphi(z)$

Aanduiding — Ik noem x een primitieve wortel van E_n indien x tot E_n behoort (zie § 3).

De verzameling van primitieve wortels x van de vergelijkingen $\varphi_n(z) = z$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, waarvoor $|\varphi_n'(x)| > 1$, noem ik de verzameling E.

Bij iedere rationale functie $\varphi(z)$ behoort dus een verzameling E.

Bewering — Het is onmogelijk de rationale functie $\varphi(z)$ zóó te kiezen, dat de daarbij behoorende verzameling E leeg is. Hierbij wordt $\varphi(z)$ niet lineair ondersteld.

Bewijs — $z_1 = \varphi(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Ik onderstel dat P en Q polynomen zijn van denzelfden graad. (Mocht dit niet het geval zijn, dan past men op z_1 en z eenzelfde homografische substitutie toe). Zij deze graad k, $(k > 1)$.

Voorts onderstel ik dat de vergelijking $\varphi(z) - z = 0$ de enkelvoudige wortels $x_1, x_2, \ldots., x_{k+1}$ heeft.

Voor het geval dat er meervoudige wortels optreden bewijzen we het beweerde afzonderlijk.

De vergelijking $P(z) - zQ(z) = 0$, heeft dus de enkelvoudige wortels $x_1, x_2, \ldots. x_{k+1}$, die in het eindige gelegen zijn aangezien P (z) en Q (z) polynomen van denzelfden graad zijn.

Zij nu $Q(z) = a_0 z^k + \ldots$

dan is als $R(z) = P(z) - zQ(z)$,

$$R(z) = -a_o z^{k+1} + \ldots.$$

en $$\varphi'(x_i) = \left(\frac{P}{Q}\right)'_{z=x_i} = 1 + \left(\frac{R}{Q}\right)'_{z=x_i},$$

waarbij $$\left(\frac{R}{Q}\right)'_{z=x_i} = \frac{R'(x_i)}{Q(x_i)}.$$

Buitendien is $$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{z^k + \ldots.}{-z^{k+1} + \ldots} = -\sum_{i=1}^{i=k+1} \frac{A_i}{z - x_i}$$

waarbij $$A_i = -\frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = -\frac{1}{\varphi'(x_i) - 1}$$

en $$\sum_{i=1}^{i=k+1} A_i = 1,$$

dus $$\sum_{i=1}^{i=k+1} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = \sum_{i=1}^{i=k+1} \frac{1}{\varphi'(x_i) - 1} = -1.$$

$\varphi'(x_i)$ bepaalt in het complexe vlak een zeker punt dat ik M_i noem. Evenzoo bepaalt $\frac{Q(x_i)}{R'(x_i)}$ een punt, dat ik met N_i aanduiden zal.

De betrekking $\varphi'(x_i) = 1 + \frac{R'(x_i)}{Q(x_i)}$ geeft dus een (1, 1) correspondentie van de punten N_i met de punten M_i.

Hieruit volgt:

Is $|\varphi'(x_i)| < 1$, dan ligt N_i in het halfvlak

R. D. van $z < -\frac{1}{2}$;

is daarentegen $|\varphi'(x_i)| > 1$, dan ligt N_i in het halfvlak

R. D. van $z > -\frac{1}{2}$.

Uit de betrekking $\sum_{i=1}^{i=k+1} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = -1$ volgt dat de reëele deelen van de $k+1$ getallen $\frac{Q(x_i)}{R'(x_i)}$ tot gemiddelde waarde hebben $-\frac{1}{k+1}$ en daar $k > 1$ ondersteld is, moet minstens een

der punten N_i in het halfvlak R. D. van $z > -\frac{1}{2}$ gelegen zijn, waaruit volgt dat er minstens één x is waarvoor geldt

$$|\varphi'(x)| > 1.$$

De verzameling E is dus niet leeg.

Bovendien volgt uit het bovenstaande dat het mogelijk is dat alle punten N_i in het halfvlak R. D. van $z > -\frac{1}{2}$ gelegen zijn. In dit geval zijn er dus geen regelmatige limietpunten.

Bewering — De verzameling E bevat oneindig veel punten.

Bewijs — Zij x een dubbelpunt van $\varphi(z)$, dus een punt waar $\varphi(x) = x$, dan is in de omgeving van x

$$\varphi(z) = x + (z-x)\varphi'(x) + a(z-x)^q + \ldots . \quad (a \neq 0)$$

en $\varphi_n(z) = x + (z-x)[\varphi'(x)]^n + a[\varphi'(x)]^{n-1}\{1 + [\varphi'(x)]^{q-1} + [\varphi'(x)]^{2(q-1)} + \ldots\ldots + [\varphi'(x)]^{(n-1)(q-1)}\}(z-x)^q + \ldots .$

of

$$\varphi_n(z) - z = \{[\varphi'(x)]^n - 1\}(z-x) + a[\varphi'(x)]^{n-1}\{1 + \ldots .\}(z-x)^q + \ldots .$$

Is $\varphi'(x) \neq 1$, dan is x een nulpunt van dezelfde orde van

$$\varphi(z) - z \text{ als van } \varphi_n(z) - z.$$

Ook voor $\varphi'(x) = 1$ geldt dit, immers dan is

$$\varphi(z) - z = a(z-x)^q + \ldots .$$

en

$$\varphi_n(z) - z = na(z-x)^q + \ldots .$$

Is $\varphi'(x)$ een primitieve wortel van $w^r = 1$ $(r > 1)$ en is n geen veelvoud van r, dan is x eveneens een enkelvoudige wortel van beide vergelijkingen.

Is echter n een veelvoud van r en x enkelvoudige wortel van de eerste vergelijking, dan is x tenminste q-voudige wortel van de tweede vergelijking, juist q-voudige wortel als $[\varphi'(x)]^{q-1} = 1$, d. w. z. als $q-1$ een veelvoud van r is en meervoudige wortel van hoogere orde dan q als $q-1$ geen veelvoud van r is.

Als n een priemgetal is verschillend van r, dan zijn dus de wortels van $\varphi(z) - z = 0$ wortels van $\varphi_n(z) - z = 0$ van dezelfde multipliciteit.

De wortels van de laatste vergelijking, die niet tot de eerste behooren en wier aantal is $k^n - k$ vormen $\frac{k^n - k}{n}$ cycles van de n^e orde (zie § 3).

We stellen nu $\varphi'(x_i) \neq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ en zij verder n een priemgetal verschillend van r.

Voorts kiezen we n zóó dat het punt oneindig geen deel uitmaakt van een van de cycles van de n^e orde. Bij deze onderstelling geldt dus voor iedere cycle $y_1, y_2, \ldots y_n$, $\varphi'_n(y_p) =$ constant t $(p = 1, 2, \ldots, n)$, met dien verstande dat de constante t in 't algemeen van cycle tot cycle zal veranderen.

Indien nu geen der constanten t gelijk aan één is, verkrijgt men na de beschouwingen over de vergelijking $\varphi(z) - z = 0$ aan het begin dezer § gedaan toegepast te hebben op de vergelijking $\varphi_n(z) - z = 0$:

$$n. \sum_{1}^{\frac{k_n - k}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{k+1} \frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1} + 1 = 0.$$

De eerste sommatie wordt uitgestrekt over de $\frac{k^n - k}{n}$ cycles,

de tweede sommatie heeft betrekking op de $k+1$ dubbelpunten x_i van $\varphi(z)$ dus tevens van $\varphi_n(z)$.

Duid ik met $\varrho(\alpha)$ het reëele deel van een complex getal α aan dan volgt uit de laatste vergelijking:

$$n \sum_{1}^{\frac{k^n - k}{n}} \varrho\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{k+1} \varrho\left(\frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1}\right) + 1 = 0,$$

waarbij $\sum_{1}^{k+1} \varrho\left(\frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1}\right)$ begrensd is, aangezien

$\lim_{n \to \infty} \varrho\left(\frac{1}{[\varphi'(x)]^n - 1}\right) = 0$ als $|\varphi'(x)| > 1$ is, terwijl voor

$|\varphi'(x)| = 1$ deze limiet gelijk is aan $-\frac{1}{2}$ en voor $|\varphi'(x)| < 1, -1$ wordt.

We krijgen dus

$$-A < \sum_{1}^{k+1} \varrho\left(\frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1}\right) + 1 < A, \; A > 0.$$

Was nu voor iedere t $|t| < 1$, dan verkreeg men, aangezien bij deze onderstelling

$$\varrho\left(\frac{1}{t-1}\right) = -\tfrac{1}{2} - L \qquad L > 0$$

dus

$$\varrho\left(\frac{1}{t-1}\right) < -\tfrac{1}{2} \text{ is,}$$

$$\sum_{1}^{\frac{k^n-k}{n}} \varrho\left(\frac{1}{t-1}\right) < -\frac{k^n-k}{2}.$$

Hieruit zou volgen:

$$\frac{k^n-k}{2} < A,$$

wat onmogelijk is, daar $\lim_{n=\infty} \frac{k^n-k}{2} = \infty$.

Men heeft dus:

Aangezien er oneindig veel priemgetallen n zijn (eventueel verschillend van r en zoo noodig verschillend van een index n', indien het punt oneindig deel uitmaakt van een cycle van de orde n') en voor n voldoend groot niet voldaan wordt aan $\frac{k^n-k}{2} < A$, zijn er oneindig veel cycles waar de bijbehoorende $|t| \geqq 1$ is, vooropgesteld dat de wortels van $\varphi(z) - z = 0$ enkelvoudig zijn.

Daar echter, zooals in § 15 bewezen wordt, het aantal cycles waarbij $|t| = 1$ eindig is, heeft men:

Zijn de wortels van $\varphi(z) - z = 0$ enkelvoudig, dan bestaat de verzameling E uit oneindig veel punten.

Ten slotte behoeft de beperkende onderstelling omtrent de wortels van $\varphi(z) - z = 0$ niet gemaakt te worden, we zullen dus algemeen bewijzen dat: de bij iteratie van een willekeurige rationale functie $\varphi(z)$ $(k > 1)$ behoorende verzameling E uit oneindig veel punten bestaat.

We stellen de coëfficiënten van $\varphi(z)$ eerst willekeurig.

Men heeft dan:

$$n \sum_{1}^{\frac{k^n-k}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{k+1} \frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1} + 1 = 0$$

en $$\sum_{1}^{k+1} \frac{1}{\varphi'(x_i) - 1} + 1 = 0.$$

Hieruit verkrijgt men, als

$$\beta_n [\varphi'(x_i)] = \frac{1}{[\varphi'(x_i)]^n - 1} - \frac{1}{n} \frac{1}{\varphi'(x_i) - 1},$$

$$n \sum_{1}^{\frac{k^n-k}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{k+1} \beta_n [\varphi'(x_i)] + 1 - \frac{1}{n} = 0 \ldots . \text{(a)}$$

Deze vergelijking blijft gelden als voor zekere waarden van i $\varphi'(x_i) = 1$ wordt, aangezien

$$\beta_n (1) = -\frac{n-1}{2^n}.$$

Uit (a) volgt

$$n \sum_{1}^{\frac{k^n-k}{n}} \varrho \left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{k+1} \varrho \left(\beta_n [\varphi'(x_i)] + 1 - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Hierbij is $\sum_{1}^{k+1} \varrho \{\beta_n [\varphi'(x_i)]\}$ begrensd, aangezien

$$\lim_{n \to \infty} \varrho \{\beta_n [\varphi'(x)]\} = 0, \text{ als } |\varphi'(x)| > 1 \text{ is,}$$

terwijl voor $|\varphi'(x)| = 1$ of $|\varphi'(x)| < 1$ deze limiet $-\frac{1}{2}$ respectievelijk -1 wordt.

Dezelfde redeneering van daareven geeft dus, dat er ook in dit geval oneindig veel cycles zijn, waar de bijbehoorende $|t| \geqq 1$ is.

De bij $\varphi(z)$ $(k > 1)$ behoorende verzameling E bestaat dus uit oneindig veel elementen.

Opmerking — De iteratie van lineaire functies $\varphi(z)$ kunnen we terugbrengen tot de herhaalde toepassing

òf van een loxodromische transformatie $z_1 = Az$, $A = he^{ai}$

$h \neq 1$, $a \neq 0$,

òf van een hyperbolische transformatie $z_1 = Az$, $h \neq 1$, $a = 0$,
òf „ „ elliptische „ $z_1 = Az$, $h = 1$, $a \neq 0$.
òf „ „ parabolische „ $z_1 = z + B$.

In het 1e en 2e geval bestaat de verzameling E uitsluitend uit het punt 0, respectievelijk ∞, al naar gelang h grooter of kleiner dan een is.

In het 3e en 4e geval is E leeg.

§ 9 — DE „SUITES NORMALES" VAN MONTEL

Bij de verdere beschouwingen zullen we van eenige door Montel afgeleide stellingen omtrent „suites normales" van holomorfe of meromorfe functies gebruik maken.

We geven deze stellingen met bewijs hieronder weer.

Aanduiding — Is in hetgeen volgt sprake van een gebied D, dan moet hieronder verstaan worden een samenhangend gebied begrensd door een of meer enkelvoudige krommen, d. w. z. krommen zonder dubbelpunt en zoodanig dat de functies

$$x = f(t), \quad y = g(t) \text{ (t parameter)},$$

die de coördinaten van de kromme bepalen afgeleiden van de eerste orde bezitten, die continu zijn.

Met holomorf, meromorf, enz., „in" D, wordt bedoeld holomorf, meromorf, enz., in het open gebied D, dus holomorf, meromorf, enz. in en op den rand van ieder gebied D_1, dat met zijn rand geheel in D gelegen is.

Voorts zeggen we dat een rij functies normaal is in een punt x, indien de rij in een cirkel met x tot middelpunt normaal is.

Een rij functies, normaal in een gebied D, is normaal in ieder punt $x \prec D$ en omgekeerd: een rij, die in ieder punt $\prec D$ normaal is, is normaal in D.

Definitie — Een oneindige rij functies ${}_n\varphi(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ holomorf (of meromorf) in een gebied D is een „suite normale" in D, indien uit iedere willekeurige oneindige deelrij

$${}_{n_1}\varphi(z), \; {}_{n_2}\varphi(z), \; {}_{n_3}\varphi(z), \; \ldots.$$

een tweede oneindige deelrij

$${}_{n'_1}\varphi(z), \; {}_{n'_2}\varphi(z), \; {}_{n'_3}\varphi(z), \; \ldots.,$$

zóó gekozen kan worden, dat deze laatste deelrij overal in D gelijkmatig convergeert, hetzij tot een holomorfe (of meromorfe) functie, hetzij tot een constante, die oneindig mag zijn.

Bewering — Een oneindige rij functies ${}_n\varphi(z)$, holomorf in D, terwijl bovendien voor iedere $z \prec D \mid {}_n\varphi(z) \mid < M$ is voor iedere n, is een „suite normale" in D.

Bewijs — Zij O middelpunt van een cirkel C_R met straal R en zij D het gebied (O bevattend) dat C_R tot grens heeft.

Zij voorts $D_1 \prec D$ het gebied dat door C_ϱ ($\varrho < R$) begrensd wordt en waarbij C_ϱ concentrisch is met C_R.

In C_ϱ is dus voor iedere n:

$${}_n\varphi(z) = {}^na_o + {}^na_1z + \ldots + {}^na_pz^p + \ldots, \text{ met } |{}^na_p| < \frac{M}{R^p}.$$

Tevens is, als

$${}^nR_p(z) = {}^na_{p+1}z^{p+1} + \ldots,$$

$$|{}^nR^p(z)| < \left(\frac{\varrho}{R}\right)^p \frac{M}{1-\frac{\varrho}{R}} \text{ dus } |{}^nR_p(z)| < \varepsilon \ (\varepsilon \text{ willekeurig klein})$$

als p voldoend groot is. Deze laatste betrekking is onafhankelijk van n.

Beschouwen we de coëfficiëntenverzameling ${}^na_p$. Het is nu mogelijk een rij indices $n_1, n_2, \ldots$ ($n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$) zóó te bepalen, dat de rij ${}^{n_1}a_p, {}^{n_2}a_p, \ldots$ een enkele limiet heeft, die ik met A_p aanduid.

Men heeft n.l.:

$|{}^na_o| < M$. Zij A_o een der limieten, dan bestaat er een rij. ${}^{n_1}a_o, {}^{n'_1}a_o, {}^{n''_1}a_o, \ldots$, die uitsluitend tot A_o convergeert.

Ik beschouw nu de rij ${}^{n_1}a_1, {}^{n'_1}a_1, {}^{n''_1}a_1, \ldots$. Hierbij is $|{}^{n^{(m)}_1}a_1| < \frac{M}{R}$.

Dus bestaat er een rij ${}^{n_1}a_1, {}^{n_2}a_1, {}^{n'_2}a_1, {}^{n''_2}a_1, \ldots$, die tot een limiet convergeert, welke ik A_1 noem.

Op dezelfde wijze kan men uit de suite ${}^{n_1}a_2, {}^{n_2}a_2, {}^{n'_2}a_2, {}^{n''_2}a_2, \ldots$ een deelrij ${}^{n_1}a_2, {}^{n_2}a_2, {}^{n_3}a_2, {}^{n'_3}a_2, {}^{n''_3}a_2, \ldots$, distilleeren, die tot de limiet A_2 convergeert.

Aldus voortgaande krijgt men:

Het is mogelijk een rij indices $n_1, n_2, \ldots n_q, \ldots$

$$(n_1 < n_2 \ldots < n_q < \ldots)$$

te bepalen, zoodat de rij $^{n_1}a_p$, $^{n_2}a_p$, $^{n_3}a_p$, ..., $^{n_q}a_p$, ..., voor $q \to \infty$ uitsluitend tot A_p convergeert en wel voor iedere waarde van p.

Ik stel nu

$$\varphi(z) = A_o + A_1 z + A_2 z^2 + ... + A_p z^p + ...$$

Hierbij convergeert de reeks $A_o + A_1 z + A_2 z^2 + ...$ overal in D_1 en wel gelijkmatig, immers

$$| A_p z^p + A_{p+1} z^{p+1} + ... + A_{p+h} z^{p+h} | =$$

$$= \lim_{q \to \infty} | {}^{n_q}a_p z^p + {}^{n_q}a_{p+1} z^{p+1} + ... + {}^{n_q}a_{p+h} z^{p+h} | \leqq 2\varepsilon,$$

en dit heeft plaats voor iedere $p > p_o$ (voldoend groot) en voor iedere waarde van h.

Dus als $R_p(z) = A_{p+1} z^{p+1} + ...$, dan is $| R_p(z) | \leqq 2\varepsilon$ voor iedere $p > p_o$.

$\varphi(z)$ stelt dus in D_1 een holomorfe functie voor, en daar

$$A_p \quad (p = 0, 1, ...)$$

onafhankelijk van ϱ is, is $\varphi(z)$ ook in D holomorf.

De functierij $^{n_1}\varphi(z)$, $^{n_2}\varphi(z)$, ... $^{n_q}\varphi(z)$, ... heeft in D tot limiet $\varphi(z)$ en convergeert in D_1 gelijkmatig tot $\varphi(z)$, immers:

Zij $\quad {}^{n_q}S_p(z) = {}^{n_q}a_o + {}^{n_q}a_1 z + ... + {}^{n_q}a_p z^p.$

en $\quad S_p(z) = A_o + A_1 z + ... + A_p z^p.$

Voor $p > p_o$ nadert $^{n_q}S_p(z)$ in D' regelmatig tot $S_p(z)$, want de coëfficiënten van het eerste polynoom hebben de correspondeerende coëfficiënten van het tweede polynoom tot limiet. Mits q groot genoeg is, is dus

$$| S_p(z) - {}^{n_q}S_p(z) | < \varepsilon \text{ voor iedere } z \prec D_1.$$

En aangezien $| R_p(z) - {}^{n_q}R_p(z) | < | R_p(z) | + | {}^{n_q}R_p(z) | < 3\varepsilon$ voor $p > p_o$, volgt uit $\varphi(z) = S_p(z) + R_p(z)$

$$\text{en } {}^{n_q}\varphi(z) = {}^{n_q}S_p(z) + {}^{n_q}R_p(z)$$

$| \varphi(z) - {}^{n_q}\varphi(z) | < 4\varepsilon$ overal in D_1. (q groot genoeg ondersteld).

Zooals vanzelf spreekt kan men dezelfde redeneering van daareven herhalen voor iedere oneindige suite, die een deelrij is van de oorspronkelijke.

De rij $_n\varphi(z)$ is dus in D_1 een „suite normale".

Beschouwen we nu de gebieden $D_{/}$, $D_{//}$, $D_{///}$, ..., begrensd door de concentrische cirkels C_ϱ, $C_{\varrho'}$, $C_{\varrho''}$, ..., waarbij

$$\varrho < \varrho' < \varrho'' \ldots . < R, \text{ terwijl } \lim_{n\to\infty} \varrho^{(n)} = R.$$

In ieder van deze gebieden (en op den rand) is de rij $_n\varphi(z)$ normaal, hieruit volgt dat de rij $_n\varphi(z)$ in het open gebied D een „suite normale" is.

Wordt het gebied D door een of meer krommen begrensd, dan beschouwen we ook hier een oneindig aantal gebieden D', D'', D''', ..., waarbij $D' \prec D'' \prec D''' \ldots . \prec D$ terwijl $\lim_{n\to\infty} D^{(n)} = D$.

We kunnen dit op de volgende manier verwezenlijken.

We laten het middelpunt van een cirkel met straal δ de omtrek van D beschrijven. Het gebied, dat we overhouden als we D verminderen met het gebied dat tot D behoort en dat tevens door het binnengebied van de cirkels C_δ beschreven wordt, noemen we D'.

Ieder punt van het gesloten gebied D' maken we tot middelpunt van een cirkel, waarin en op den rand waarvan de functies $_n\varphi(z)$ holomorf zijn. Volgens de overdekkingsstelling van Borel, kunnen we D' overdekken door een eindig aantal cirkels. Zij dit aantal k.

Indien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots . \Gamma_k$ de bedoelde cirkels zijn, dan bestaat er een rij $_1{}^1\varphi(z)$, $_2{}^1\varphi(z)$, ..., $_n{}^1\varphi(z)$, ... genomen uit de oorspronkelijke rij, die in Γ_1 gelijkmatig convergeert tot een holomorfe limietfunctie.

Uit de suite $_1{}^1\varphi(z)$, $_2{}^1\varphi(z)$, ..., $_n{}^1\varphi(z)$, ..., kan ik een rij $_1{}^2\varphi(z)$, $_2{}^2\varphi(z)$, ..., $_n{}^2\varphi(z)$, ... lichten, die in Γ_2 gelijkmatig convergeert, zooals vanzelf spreekt convergeert deze rij eveneens in Γ_1.

Aldus voortgaande vind ik een rij $_1{}^k\varphi(z)$, $_2{}^k\varphi(z)$, ... gelijkmatig convergeerende in D'.

We laten nu δ varieeren en wel zoo dat

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 \ldots . > \delta_n \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

We krijgen dan de hiermede correspondeerende gebieden

$$D', D'', D''', \ldots .$$

Uit de rij ${}_n^k\varphi(z)$ kan men nu een rij ${}_n^{k'}\varphi(z)$ lichten, die in D'' gelijkmatig convergeert tot een holomorfe limietfunctie, hieruit een rij ${}_n^{k''}\varphi(z)$ overal in en op den rand van D''' convergeerende, enz.

De rij ${}_1^k\varphi(z)$, ${}_2^{k'}\varphi(z)$, ${}_3^{k''}\varphi(z)$, ... convergeert dus in het open gebied D tot een holomorfe functie, de rij ${}_n\varphi(z)$ is dus normaal in D.

Bewering — Een oneindige rij functies ${}_n\varphi(z)$, holomorf in D, is normaal in D, indien er een waarde a bestaat zoodanig dat voor iedere $z \prec D$ en voor iedere waarde van n $|{}_n\varphi(z) - a| > \eta$, waarbij η een natuurlijk getal is.

Bewijs — De functie ${}_ng(z) = \dfrac{1}{{}_n\varphi(z) - a}$ is holomorf in D.

Voorts is $|{}_ng(z)| < \dfrac{1}{\eta}$ voor iedere $z \prec D$ en iedere waarde van n.

Volgens de voorgaande stelling bestaat er dus een rij

$${}_1'g(z), {}_2'g(z), \ldots . {}_{n'}g(z), \ldots .,$$

die in D regelmatig convergeert tot een holomorfe functie G (z).

In D is ${}_ng(z) \neq 0$, dus $G(z) \neq 0$ tenzij $G(z) \equiv 0$.

Immers stel $G(b) = 0$, $b \prec D$.

Er is dan een cirkel C_b met b tot middelpunt en waarbinnen b het eenige nulpunt van $G(z) = 0$ is, zij b nulpunt van de m^e orde.

Op C_b heeft $|G(z)|$ een minimum $\lambda > 0$.

Voorts is op C_b $|{}_{n'}g(z) - G(z)| < \varepsilon$, als n' voldoend groot is. Zij $\lambda' = \lambda - \varepsilon$, voor ε klein genoeg is $\lambda' > 0$.

Beschrijft z C_b, dan moet $w = G(z)$ een kromme beschrijven die geheel buiten cirkel $C_{\lambda'}$ (O middelpunt en straal λ') gelegen is, het argument van $w = G(z)$ verandert hierbij met $2\pi m$.

${}_nw = {}_{n'}g(z)$ beschrijft dan eveneens een kromme geheel buiten $C_{\lambda'}$ gelegen, aangezien op C_b $|{}_{n'}g(z) - G(z)| < \varepsilon$ is. Het argument van ${}_nw = {}_{n'}g(z)$ verandert dus ook met $2\pi m$, m. a. w.

in C_b worden de functies ${}_{n'}g(z)$ vanaf een zekere n' m-maal nul, hetgeen onmogelijk is, aangezien in D ${}_{n}g(z) \not\equiv 0$ is.

In D is dus $G(z) \not\equiv 0$ tenzij $G(z) \equiv 0$.

Men heeft nu ${}_{n'}\varphi(z) = a + \dfrac{1}{{}_{n'}g(z)}$

dus als $G(z) \not\equiv 0$

$$\lim_{n' \to \infty} {}_{n'}\varphi(z) = a + \frac{1}{G(z)} = \Phi(z) \text{ holomorf in D.}$$

Is $G(z) \equiv 0$ dan is $\Phi(z) \equiv \infty$.

De rij ${}_{n}\varphi(z)$ is dus in D normaal.

Bewering — Een oneindige rij functies ${}_{n}\varphi(z)$, holomorf in D, waarbij twee waarden a en b door de functies der rij in D niet aangenomen worden, is normaal in D.

Bewijs — ${}_{n}\varphi(z) \neq a$, ${}_{n}\varphi(z) \neq b$ voor $z \prec D$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ en $a \neq b$.

I. p. v. a en b kunnen we de waarden 0 en 1 nemen, we kunnen n.l. i. p. v. de functies ${}_{n}\varphi(z)$ de in D holomorfe functies

$$\frac{{}_{n}\varphi(z) - a}{b - a} \text{ beschouwen.}$$

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen, mag ik dus stellen

$$a = 0, \; b = 1.$$

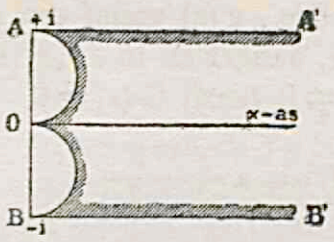
We zullen nu gebruik maken van de modulaire functie

$$\eta(z) = \frac{K(z)}{K'(z)},$$

waarbij

$$K(z) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-zu^2)}} \text{ en } K'(z) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(1-z)u^2)}}.$$

Met behulp van de modulaire functie, die alleen de punten 0, 1, en ∞ tot singuliere punten heeft, kunnen we het geheele complexe vlak behoudens de punten 0, 1, en ∞ conform afbeelden op het gebied binnen A'AOBB' in het η-vlak.



Deze figuur wordt begrensd door de lijn $+\infty$, $+$ i // reëele as de beide halve cirkelbogen en de lijn $-$ i, $+\infty$ eveneens // reëele as, en is geheel gelegen in dat deel van het η-vlak, waarvoor het reëele deel van η grooter dan nul is. Construeeren we het beeld van deze figuur t. o. v. een van de zijden dan ontstaat een nieuwe figuur, die eveneens het beeld is van het geheele z-vlak behoudens de punten 0, 1 en ∞.

Op deze wijze voortgaande kunnen we het geheele η halfvlak $\eta > 0$ overdekken door gelijksoortige figuren als A'AOBB', ontstaan door spiegeling t. o. v. de rechte zijden en deze rechte zijden tot gemeenschappelijke grens hebbend en door gebieden begrensd door cirkelbogen ontstaan door spiegeling t. o. v. de cirkelzijden. Deze laatste beelden verdichten zich in elk punt van de imaginaire as. De modulaire functie is meerwaardig. Is $z_o \neq 0$, $\neq 1$ en $\neq \infty$, dan is $\eta\,(z_o)$ in ieder beeld van het z-vlak een volkomen bepaald punt; kiezen we een dezer punten en beschrijft z uitgaande van z_o een gesloten kromme om 0 of 1 in het z-vlak, dan beschrijft η een kromme, die het gekozen punt verbindt met het homologe, gelegen in die afbeelding van het z-vlak, die naburig is met de afbeelding waarin $\eta\,(z_o)$ gekozen is en die uit deze laatste ontstaan kan door spiegeling t. o. v. een der zijden. Welke zijde men moet nemen is afhankelijk van de keuze van de door z beschreven weg in het z-vlak.

Noemen we de figuur A'AOBB' de fundementale figuur.

Beschouwen we nu de functies ${}_n g\,(z) = \eta\,\{{}_n\varphi\,(z)\}$ en met conditie dat voor een zeker punt $z_o \prec D\ {}_n g\,(z_o)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in A'AOBB' gekozen wordt.

De functies ${}_n g\,(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ zijn eenwaardig; immers een functie element van ${}_k g\,(z)$ is in het enkelvoudig samenhangend gebied D overal voortzetbaar, dus ontstaat er door alle voortzettingen de in D eenwaardige holomorfe functie ${}_k g\,(z)$.

Aangezien voor iedere $z \prec D$ ${}_ng(z)$ in het η-vlak gelegen is waar het reëele deel van $\eta > 0$ is, is de rij ${}_ng(z)$ in D een „suite normale".

Veronderstellen we nu dat de getallen ${}_n\varphi(z_0)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ voor $z_0 \prec D$ andere limieten hebben dan 0, 1 of ∞.

Er bestaat dan een rij ${}_{1'}\varphi(z)$, ${}_{2'}\varphi(z)$, ..., waarvoor

$$\lim_{n' \to \infty} {}_{n'}\varphi(z_0) = a. \quad (a \neq 0, \neq 1, \text{ en } \neq \infty).$$

Uit de rij ${}_{n'}g(z)$ kan men een rij ${}_{n''}g(z)$ lichten die in D gelijkmatig convergeert tot de limietfunctie G (z), die eindig is aangezien $G(z_0) = \eta(a)$ eindig is.

Bovendien is G (z) in D holomorf, als men aan de modulaire functie alleen de fundementaalwaarden toekent.

Zij D_1 een gesloten gebied binnen D, dan is de conforme afbeelding van D_1 (met behulp van G (z)) geheel gelegen in het rechter halfvlak van het η-vlak.

De grenskromme Γ_1 van deze afbeelding heeft met de imaginaire as geen punten gemeen.

Beschrijft nu z' het η-vlak. De functie $X = \lambda(z')$, waarbij λ de inverse functie van de modulaire functie $z' = \eta(X)$ is, is in het rechter halfvlak van het η-vlak holomorf en heeft de imaginaire as tot coupure.

Nu is ${}_{n''}\varphi(z) = \lambda\{{}_{n''}g(z)\}$ en aangezien $\lim_{n'' \to \infty} {}_{n''}g(z) = G(z)$, holomorf in D_1, convergeert de rij ${}_{n''}\varphi(z)$ gelijkmatig tot een in en op den rand van D_1 holomorfe functie $\Phi(z) = \lambda\{G(z)\}$. $\Phi(z)$ is dus holomorf in D en neemt daar noch de waarde 0, noch 1 aan.

We stellen nu dat de getallen ${}_n\varphi(z_0)$ geen andere limiet dan 0, 1 of ∞ toelaten. Zij een der limietwaarden 1, dan bestaat er een rij ${}_{n'}\varphi(z_0)$ die uitsluitend tot 1 convergeert.

Stel ${}_{n'}f(z) = \dfrac{\lg {}_{n'}\varphi(z) + 2\pi i}{4\pi i}$, waarbij aan de logarithme de hoofdwaarde toegekend wordt.

De functies ${}_{n'}f(z)$ zijn in D eenwaardig, daar $X = {}_{n'}\varphi(z)$ in het X-vlak geen gesloten kromme om O kan beschrijven welken weg z in D ook aflegt.

Voorts is voor iedere n' ${}_{n'}f(z) \neq 0$ en $\neq 1$ voor iedere $z \prec D$, immers $\lg {}_{n'}\varphi(z) \neq -2\pi i$ en $\neq 2\pi i$, terwijl $\lim_{n' \to \infty} {}_{n'}f(z_0) = \frac{1}{2}$.

Volgens het voorgaande bestaat er dus een rij ${}_{n''}f(z)$ die in ieder gebied $D_1 \prec D$ en op den rand van D_1 tot een eindige limietfunctie $F(z)$ gelijkmatig convergeert, waarbij dus $F(z)$ holomorf in D is.

De rij ${}_{n''}\varphi(z)$ heeft dus in D de holomorfe limiet

$$\Phi(z) = e^{2\pi i[2F(z)-1]}.$$

Waar echter $\Phi(z_0) = 1$ moet $\Phi(z) \equiv 1$ zijn.

Is in plaats van 1 nul de eenige limiet van een rij ${}_{n'}\varphi(z_0)$, dan heeft een daaruit te lichten rij van functies $1 - {}_{n''}\varphi(z)$ in D de limiet 1, de limietfunctie $\Phi(z)$, die bij de functies ${}_{n''}\varphi(z)$ optreedt is dan $\equiv 0$.

Is de eenige limiet ∞, dan beschouwen we een rij $\frac{1}{{}_{n''}\varphi(z)}$ die gelijkmatig in D tot 0 convergeert.

De rij ${}_{n''}\varphi(z)$ convergeert in dit geval overal in D gelijkmatig tot ∞. De rij ${}_{n}\varphi(z)$ is dus normaal in D. q. e. d.

Bewering — Een oneindige rij functies ${}_{n}\varphi(z)$ $(n = 1, 2 \ldots)$, meromorf in D, waarbij drie waarden a, b, en c door de functies der rij in D niet aangenomen worden, is normaal in D.

[Stelt $\Phi(z)$ de limietfunctie voor waartoe een rij meromorfe functies ${}_{n'}\varphi(z)$ regelmatig convergeert in een gebied D dan moet voor iedere $z \prec D$ en voor iedere $n' > N$ (voldoend groot)

òf $|{}_{n'}\varphi(z) - \Phi(z)| < \varepsilon$

òf $\left|\frac{1}{{}_{n'}\varphi(z)} - \frac{1}{\Phi(z)}\right| < \varepsilon$ zijn,

$\Phi(z)$ is dan in D meromorf].

Bewijs — Beschouwen we de rij holomorfe functies

$${}_{n}g(z) = \frac{1}{{}_{n}\varphi(z) - a};$$

deze rij is normaal in D aangezien de functies der rij in D de waarden $\frac{1}{b-a}$ en $\frac{1}{c-a}$ uitsluiten.

Er bestaat dus een rij ${}_{n'}g(z)$, die in D gelijkmatig convergeert tot een limietfunctie G (z), die overal in D oneindig kan zijn.

Is G (z) in D niet constant, dan is G (z) daar holomorf en bezit in D geen of een eindig aantal nulpunten.

Voor iedere $z \prec D$, niet samenvallende met een eventueel nulpunt van G (z) convergeert de rij ${}_{n'}\varphi(z)$ gelijkmatig tot de limietfunctie $\Phi(z) = a + \frac{1}{G(z)}$.

Voor ieder nulpunt nadert ${}_{n'}g(z)$ $(n' \to \infty)$ gelijkmatig tot 0, ${}_{n'}\varphi(z)$ nadert daar dus als $n' \to \infty$ gelijkmatig tot ∞.

Is $G(z) \equiv \infty$, dan is $\Phi(z) \equiv a$, terwijl voor $G(z) \equiv 0$, de rij ${}_{n'}\varphi(z)$ in D gelijkmatig tot $\Phi(z) \equiv \infty$ nadert.

De rij ${}_{n}\varphi(z)$ is dus in D normaal.

§ 10 — ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN PUNT VAN E

Onderstellen we dat O tot E behoort, zij

$$\varphi_n(0) = 0, \quad |\varphi_n'(0)| > 1.$$

Aangezien het volgende betoog voor iedere waarde, die n aan kan nemen, geldt, mits men als $n \neq 1$ is i. p. v. de iteratie van $\varphi(z)$, die van $\varphi_n(z)$ beschouwt, stellen we eenvoudigheidshalve $n = 1$.

In een voldoend kleine omgeving Ω van O is:

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

waarbij $|a_1| > 1$ is.

Onder de antecedenten van de eerste orde van z_1 is er slechts één, die voor $z_1 = 0$ eveneens nul is.

De tak van de functie $\psi(z_1)$ inverse van $\varphi(z)$, die voor $z_1 = 0$ de waarde nul aanneemt is in de omgeving Ω van O een holomorfe functie van z_1, men heeft daar:

$$z = \frac{1}{a_1} z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots, \left|\frac{1}{a_1}\right| < 1.$$

Er bestaat dan volgens § 2 een cirkel C_1 met middelpunt O, zoodanig dat, indien z_1 dezen cirkel beschrijft z een kromme C doorloopt, die geheel binnen C_1 gelegen is.

Ook het omgekeerde is waar: Beschrijft z een cirkel Γ met voldoend kleinen straal en O tot middelpunt dan doorloopt z_1 een kromme Γ_1 die geheel buiten Γ gelegen is.

Verstaan we nu onder D_i de gebieden, die door de krommen Γ_i begrensd worden en O als inwendig punt bevatten.

$\varphi(z)$ transformeert D in D_1, D_1 in D_2, enz.

D_1 is de geïtereerde van de eerste orde van D, D_2 de geïtereerde van de tweede orde van D, enz.

De gebieden D_i zijn evenals D enkelvoudig samenhangend; terwijl $D \prec D_1 \prec D_2 \ldots . \prec D_n$, waaronder verstaan moet worden dat ieder blad van het in het algemeen meerbladige gebied D^i (Riemannsch oppervlak) geheel gelegen is (incl. rand) in een blad van het Riemannsche oppervlak D_{i+1}.

Duidelijk is dat het zooeven afgeleide blijft doorgaan als men i. p. v. het cirkelgebied D een willekeurig voldoend klein gebied, dat 0 als inwendig punt bevat, neemt.

Bewering — In iedere omgeving Ω' van een punt $x \prec E$ wordt iedere waarde, uitgezonderd ten hoogste twee waarden, door de functies der rij $\varphi_n(z)$ aangenomen, hierbij wordt „∞" als „waarde" meegeteld, m. a. w. de gebieden D_n ontstaan door iteratie van een voldoend klein gebied D, dat x als inwendig punt bevat, overdekken op den duur (bij toenemende n) het geheele complexe vlak, met uitzondering van ten hoogste twee punten.

Bewijs — Zij $\varphi(x) = x$, $|\varphi'(x)| > 1$.

Geldt voor x $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| > 1$ dan beschouwen we de iteratie van $\varphi_n(z)$ i. p. v. $\varphi(z)$, de bewijsvoering is overigens geheel analoog.

Onderstellen we nu dat drie verschillende waarden door geen der functies $\varphi_n(z)$ in Ω' aangenomen worden.

De rij in Ω' in het algemeen meromorfe functies $\varphi_n(z)$ is dan volgens § 9 in dat gebied normaal.

Een rij $\varphi_{n_1}(z)$, $\varphi_{n_2}(z)$, ... convergeert dientengevolge in Ω' gelijkmatig tot een meromorfe functie $\Phi(z)$, die echter in een voldoend kleine omgeving Ω van x holomorf is, aangezien

functies $\varphi_{n_i}(z)$ daar holomorf zijn wegens $\varphi_{n_i}(x) = x$. alle $|\Phi'(x)|$ moet dan in Ω begrensd zijn. Dit laatste echter is onmogelijk: $\lim_{n_i \to \infty} \varphi'_{n_i}(x) = \lim_{n_i \to \infty} [\varphi'(x)]^{n_i} = \infty$.

Conclusie: De rij $\varphi_n(z)$ is in geen enkel punt van E normaal, dus ten hoogste twee waarden worden door de functies $\varphi_n(z)$ in de bedoelde omgevingen niet aangenomen.

Er zijn dus slechts drie gevallen mogelijk:

1° Twee verschillende waarden worden door de functies $\varphi_n(z)$ in iedere omgeving van een punt van E (dus in iedere omgeving van elk punt van E) niet aangenomen, m. a. w. itereert men een omgeving van een punt van E dan overdekt $\lim_{n \to \infty} D_n$ het geheele complexe vlak met uitzondering van twee punten, waarbij onder D_n verstaan moet worden het gebied dat men verkrijgt door n-malige iteratie van de oorspronkelijke omgeving met behulp van de functie $\varphi_i(z)$ als voor het bedoelde punt x van E geldt

$$\varphi_i(x) = x.$$

2° Slechts één waarde wordt door de functies $\varphi_n(z)$ in iedere omgeving van een punt van E (dus in ieder punt van E) niet aangenomen, m. a. w. $\lim_{n \to \infty} D_n$ overdekt het geheele complexe vlak uitgezonderd één punt.

3° Alle waarden worden door de functies in de sub 1 en 2 bedoelde omgevingen aangenomen; $\lim_{n \to \infty} D_n$ overdekt het geheele complexe vlak.

1e geval — Bestaan er twee niet samenvallende uitzonderingspunten dan moet òf wel ieder samenvallen met zijn eigen antecedenten òf wel ieder van hen valt samen met al de antecedenten van de eerste orde van het andere punt.

Zijn a_1 en a_2 de beide uitzonderingspunten, dan is:

òf $a_1 = \varphi(a_1), \varphi'(a_1) = \varphi''(a_1) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a_1) = 0, \varphi^{(k)}(a_1) \neq 0,$
$a_2 = \varphi(a_2), \varphi'(a_2) = \varphi''(a_2) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a_2) = 0, \varphi^{(k)}(a_2) \neq 0.$
òf $a_2 = \varphi(a_1), \varphi'(a_1) = \varphi''(a_1) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a_1) = 0, \varphi^{(k)}(a_1) \neq 0,$
$a_1 = \varphi(a_2), \varphi'(a_2) = \varphi''(a_2) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a_2) = 0, \varphi^{(k)}(a_2) \neq 0.$

Past men een lineaire substitutie toe die a_1 overvoert in O, a_2 in ∞ dan is

òf $Z_1 = \lambda Z^k$, òf $Z_1 = \frac{\lambda}{Z^k}$, immers in het eerste geval moeten alle k antecedenten van O met O en alle k antecedenten van het punt ∞ met ∞ samenvallen, dus $Z_1(Z)$, d. i. de functie die na transformatie van $z_1(z) = \varphi(z)$ ontstaat, moet een polynoom van de k^e graad zijn, die O tot k-voudig nulpunt heeft dus $Z_1 = \lambda Z^k$.

In het tweede geval vallen de k antecedenten van O met het punt ∞ en de k antecedenten van ∞ met O samen. $Z_1(Z)$ heeft dus in O een k-voudige pool en aangezien alle antecedenten van O met het punt ∞ samenvallen moet dus $Z_1 = \frac{\lambda}{Z^k}$.

2e geval — In dit geval bestaat er slechts één punt a waar alle antecedenten van de eerste orde (dus dan van iedere orde) mee samen vallen.

De k wortels van $\varphi(z) = a$ zijn allen $= a$.

Men heeft dan

$a = \varphi(a)$, $\varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(a) = 0$, $\varphi^{(k)}(a) \neq 0$.

Een lineaire substitutie, die a in ∞ overvoert, transformeert $\varphi(z)$ dan in een polynoom.

3e geval — Indien $\varphi(z)$ door een lineaire substitutie nòch in een polynoom nòch in $Z_1 = \frac{1}{Z^k}$ getransformeerd kan worden, dan bestaat er een index i zoodanig dat $\varphi_j(z)$ voor iedere $j \geqq i$ in ieder gebied D dat een punt van E bevat alle waarden aanneemt m. a. w. D_j overdekt het geheele complexe vlak.

Opmerking — De uitzonderingspunten, die bij iteratie op kunnen treden, behooren niet tot de verzameling E.

§ 11 — EIGENSCHAPPEN VAN DE PUNTEN, DIE TOT DE VERZAMELING E BEHOOREN

Bewijzen we eerst de volgende bewering:

Zij in een gebied D een rationale functie $\varphi(z)$ gegeven en wèl

zoodanig dat het beeld van D, dat is dus de geïtereerde van de eerste orde D_1 (een in het algemeen meerbladig Riemannsch oppervlak) in een van zijn bladen D geheel (incl. rand) bevat, dan moet in D een punt x gelegen zijn, waarvoor geldt

$$\varphi(x) = x, \quad |\varphi'(x)| > 1.$$

Bewijs — We beelden D_1 conform af op een cirkel $|Z| = 1$ in het Z-vlak. Het beeld van D met behulp van deze conforme afbeelding verkregen ligt dan geheel binnen dezen cirkel $|Z| = 1$ en is een enkelvoudig samenhangend, eenbladig gebied.

Er bestaat een (1, 1) correspondentie tusschen de punten van de kromme C, grens van D, met de punten van C_1, grens van D_1. Evenzoo correspondeeren de punten van Γ_1 d. i. cirkel $|Z| = 1$ eenduidig met de punten van Γ (grens van het beeld van D in het Z-vlak). Ook het omgekeerde is waar.

Ten slotte bestaat er tusschen de punten van C_1 en Γ_1, en van C en Γ eveneens deze eenduidige verwantschap.

Is Z_1 het beeld van z_1 en Z het beeld van z dan is $Z_1 = \Phi(Z)$ een holomorfe functie van Z in (Γ), d. i. het gebied dat door Γ begrensd wordt en geheel binnen den eenheidscirkel van het Z-vlak (met O tot middelpunt) gelegen is.

(Met iedere Z binnen (Γ) of op de kromme Γ correspondeert een Z_1 binnen of op den eenheidscirkel Γ_1 en omgekeerd, voorts is deze afbeelding conform).

Beschrijft Z Γ dan verandert het argument van $\Phi(Z)$ — Z met 2π.

Men heeft n.l.:

Het gebied (Γ) ligt binnen een cirkel (ϱ) (straal $\varrho < 1$ en middelpunt O). Zij 2θ de hoek gevormd door de beide raaklijnen vanuit een punt van Γ_1 aan cirkel ϱ en de verbindingslijn van O met het beschouwde punt van Γ_1 de bissectrice van 2θ, dan is

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Voorts geldt voor een punt Z′ van Γ en het correspondeerende punt Z_1' van Γ_1 $[z_1' = \Phi(Z')]$

arg. $Z_1' - \theta <$ arg. $(Z_1' - Z') <$ arg. $Z_1' + \theta$, waarbij we onder het argument van Z′ resp. Z_1' verstaan de hoek, die de pos. X-as met de lijn OZ resp. OZ_1' maakt.

Beschrijft Z uitgaande van Z′ Γ in positieven zin (het gebied

(Γ) aan den linkerkant houdend) dan vermeerdert het arg. van Z_1 met 2π. Uit de bovenstaande ongelijkheid volgt dat ook het arg. van $Z_1 - Z$ met 2π moet toenemen. (Deze ongelijkheid blijft n.l. gelden als onder de arg^{en} van de achtereenvolgens beschreven punten van Γ en Γ_1 verstaan wordt de arg^{en}, die door continue voortzetting uit de arg^{en} van Z' en Z_1' ontstaan).

$\Phi(Z) - Z = 0$ heeft binnen Γ dus één wortel. Door een lineaire substitutie, die Γ_1 op haar plaats laat, kunnen we dezen wortel in O overvoeren.

We stellen nu $\Phi(0) = 0$.

De tak van de functie $Z = \Psi(Z_1)$ (inverse van Φ), waarvoor $0 = \Psi(0)$, is een holomorfe functie van Z_1 binnen Γ_1 en men heeft

$$\Psi(0) = 0, \quad |\Psi(Z_1)| < 1 \text{ voor } |Z_1| \leqq 1 \text{ en}$$

$$\Psi(Z_1) = Z_1 \Psi'(0) + \frac{Z_1^2}{2!}\Psi''(0) + \ldots.$$

waarbij

$$\Psi'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\Psi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2}.$$

Dus $$|\Psi'(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_1}\frac{\Psi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2}\right| < 1$$

of $|\Phi'(0)| > 1$.

Vervolgens is:

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{dz_1}{dZ_1}\,\frac{dZ_1}{dZ}\,\frac{dZ}{dz}.$$

In het punt $Z = 0$, beeld van $z = x$ waarvoor geldt $\varphi(x) = x$, heeft men:

$$\frac{dz_1}{dZ_1} = \frac{dz}{dZ} \text{ omdat } Z_1 = 0 \text{ voor } Z = 0.$$

Bijgevolg is

$$\left.\frac{dz_1}{dz}\right|_{z=x} = \left.\frac{dZ_1}{dZ}\right|_{Z=0}$$

dus is

$$|\varphi'(x)| = |\Phi'(0)| > 1. \text{ q. e. d.}$$

Eigenschappen van de punten van E.

1° Ieder punt $\prec$ E is limietpunt van de verzameling bestaande uit de successievelijke antecedenten van ieder punt van het complexe vlak met uitzondering van ten hoogste twee punten waarvan alle antecedenten samenvallen. (Ie of IIe geval vorige §).

Bewijs — Zij x $\prec$ E. Duidelijk is dat de antecedenten van een willekeurig punt y, niet tot E behoorend, tot een der limietpunten x hebben; immers de rij $\varphi_n(z)$ neemt in iedere omgeving van x iedere waarde, behalve ten hoogste twee uitzonderingswaarden, aan. En aangezien y geen uitzonderingspunt is, is dus x een der limietpunten van de antecedentenverzameling van y.

Is daarentegen y $\prec$ E, $y = \varphi_n(y)$, dan weten we dat slechts één antecedent van de n^e orde van y met y samenvalt, y heeft dus oneindig veel niet met y coïncideerende antecedenten, die dus x volgens het voorgaande tot een der limietpunten hebben.

Valt y met x samen dan blijft bovenstaande redeneering opgaan, hieruit volgt:

Ieder punt van E is een der limietpunten zijner eigen antecedenten.

2° Ieder punt van E is limietpunt van punten van E, m. a. w. de verzameling E is dicht in zich zelf.

Bewijs — Een omgeving Ω van x (x $\prec$ E), willekeurig gekozen, bezit steeds, hoe klein zij ook is, een antecedent van x, die niet met x samenvalt. Zij x_{-m} deze antecedent.

Zij verder Δ_{-m} een gebied zoodanig dat

$$x_{-m} \prec \Delta_{-m}$$

terwijl Δ_{-m} het punt x niet bevat.

Voorts onderstel ik dat in Ω noch in Δ_{-m} een eventueel uitzonderingspunt gelegen is.

Het gebied Δ, ontstaan door m-malige iteratie van Δ_{-m}, bevat x.

Itereeren we nu Δ n-maal, hierbij kan n zoo groot gekozen worden dat Δ_{-m} geheel (incl. rand) in een van de bladen van Δ_n (Δ_n zal in het algemeen meerbladig zijn) gelegen is.

Dit is mogelijk aangezien Δ x bevat en Δ_n dus op den duur (bij toenemende n) ieder punt van het complexe vlak (behoudens de eventueele uitzonderingspunten) overdekt.

$\varphi_{m+n}(z)$ transformeert dus het gebied Δ_{-m} in een gebied Δ_n (in het algemeen een Riemannsch oppervlak) zoodanig dat Δ_{-m} (incl. rand) geheel binnen een blad van Δ_n gelegen is.

Δ_{-m} moet dan een punt y bevatten waarvoor geldt:

$$\varphi_{m+n}(y) = y, \quad |\varphi'_{m+n}(y)| > 1.$$

Aangezien Ω willekeurig is verdichten zich de punten van E in x, dus in ieder punt van E.

Ook hieruit volgt dat de verzameling E uit oneindig veel elementen bestaat.

Noemen we E′ de afgeleide verzameling van E, dan heeft men:

a — $E \prec E'$.

b — Iedere antecedent van een punt van E behoort tot E′.

Bewijs — In iedere Δ_{-m} (zie sub 2° van deze §), een willekeurige omgeving van x_{-m} ($x \prec E$), ligt een punt dat tot E behoort.

Men heeft dus òf x_{-m} behoort tot E en dus tot E′,

òf x_{-m} is limietpunt van punten van E en dus $x_{-m} \prec E'$.

c — E′ is perfect.

Bewijs — $E' = E + F$ waarbij F de verzameling van de limietpunten van E is die niet tot E behooren.

Dus $E'' = E' + F'$.

Is y een punt van F′, dan verdichten zich daar de punten van F, dus ook de punten van E, m. a. w. $y \prec E'$, dus $E'' \equiv E'$, waaruit volgt dat E′ perfect is.

d — Ieder punt x van de perfecte verzameling E′ is limietpunt van punten van E, hieruit volgt dat iedere omgeving Ω van x steeds een of meerdere punt(en) van E bevat m. a. w. $\lim_{n\to\infty} \Omega_n$ overdekt het geheele complexe vlak met uitzondering van ten hoogste twee punten.

e — Alle consequenten en alle antecedenten van een punt van E′ behooren tot E′.

De antecedentenverzameling van ieder punt van E′ is in E′ overal dicht.

Bewijs — Zij $x \prec E'$ en x_1 geen punt van E′. Er bestaat dan een omgeving Ω van x_1 waarin geen punten van E′ gelegen zijn.

Beschouwen we nu die antecedent Ω_{-1} (van Ω) waarin x gelegen is. Ω_{-1} bevat oneindig veel punten van E. De consequenten van de eerste orde van deze punten liggen in Ω en behooren tot E, aangezien ieder punt van E (behoudens de punten, waarvoor $\varphi(x) = x$, $|\varphi'(x)| > 1$) tot een cyclische groep behoort, waarbij, als n de orde van de groep is, $\varphi_n'(x_i)$ constant is. Hieruit volgt dat er geen omgeving van x_1 bestaat waarin geen punten van E gelegen zijn. m. a. w. $x_1 \prec E'$.

Zij $x \prec E'$ en x_{-1} geen punt van E'. Zij Δ een omgeving van x_{-1} waarin geen punten van E' gelegen zijn. Δ_1 bevat x en dientengevolge oneindig veel punten van E. De antecedenten van de eerste orde van deze punten die in Δ gelegen zijn behooren tot E', immers alle antecedenten van een punt van E behooren tot E'. In iedere omgeving van x_{-1} liggen dus punten van E'. Dus $x_{-1} \prec E'$.

Dat de antecedentenverzameling van $x \prec E'$ in E' overal dicht is, volgt uit het feit dat ieder punt van E' limietpunt is van de antecedenten van x.

f — De rij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... is in geen van de punten van E' normaal.

Bewijs — Zij $x \prec E$, dan hebben we gezien (§ 10) dat de rij $\varphi_n(z)$ in x niet normaal is.

Is $x \prec E'$ en geen punt van E, dan is x limietpunt van punten van E en is de rij $\varphi_n(z)$ in x eveneens niet normaal. (zie definitie normaal in een punt onder „aanduiding" § 9).

Opmerking — Heeft x de eigenschap, dat de geïtereerden Ω_i van een willekeurige omgeving Ω van x (hoe klein deze omgeving ook gekozen is) vanaf zekere index i_o (voldoend groot) het geheele complexe vlak overdekken met uitzondering van ten hoogste twee punten, dan behoort x tot E'.

Bewijs — Aangezien x limietpunt is van antecedenten van alle punten van E, dus van punten die tot E' behooren, is omdat E' perfect is, x een punt van E'.

§ 12 — DE STRUCTUUR VAN E'

Bewering — De verzameling E' heeft dezelfde structuur in ieder gebied, dat punten van E' bevat.

Bewijs — Itereert men een omgeving Ω van een punt van E'.

De verzameling E' is gesloten en, op den complexen bol beschouwd, begrensd. Het is dus mogelijk een index i_o te bepalen zoodanig dat in Ω_{i_o} de geheele verzameling E' gelegen is. Zij E'_Ω de verzameling van die punten van E' die in Ω gelegen zijn.

De geheele verzameling E' bestaat dan uit de geïtereerden van de i_o^{de} orde van de punten van E'_Ω.

Is nu de verzameling E'_Ω overal discontinu dan moet de geheele verzameling E' overal discontinu zijn.

Is E'_Ω lineair continu dan is ook E' lineair continu.

Hieruit volgt; weet men a priori dat E' in een bepaald gedeelte een zekere structuur heeft, dan is deze structuur dezelfde voor de geheele verzameling E'.

Het is dus onmogelijk dat E' in een gedeelte lineair continu en in een ander gedeelte overal discontinu is. Niet uitgesloten echter is dat er in ieder gebied, hoe klein ook gekozen, dat punten van E' bevat, punten van E' bestaan waartusschen E' „bien enchaîné" is en andere punten van E' waartusschen E' „mal enchaîné" is.

Bewering — Bezit de verzameling E' inwendige punten dan is $E' \equiv$ complexe vlak.

Bewijs — Zij Ω een omgeving van een punt P zoodanig dat alle punten $\prec \Omega$ punten van E' zijn.

Zij voorts Δ een gebied waarin geen punten van E' gelegen zijn. De antecedenten van een punt van Δ behooren niet tot E', verdichten zich echter in ieder punt van E', voorzoover het gekozen punt geen uitzonderingspunt is.

Ω moet dus punten bevatten die niet tot E' behooren wat in strijd is met onze onderstelling.

E' moet dus identiek zijn met het complexe vlak.

Voorts zij opgemerkt dat er in dit geval ($E' \equiv$ complexe vlak) geen uitzonderingspunten zijn.

Behandelen we nu achtereenvolgens drie voorbeelden. In het eerste voorbeeld is E' perfect overal discontinu, in het tweede continu lineair en in het derde voorbeeld is $E' \equiv$ complexe vlak.

1e Voorbeeld (ontleend aan Fatou) — Zij $\varphi(z) = z^2 + 5$.

Het punt oneindig is het eenige regelmatige limietpunt. De wortels van $\varphi(z) - z = 0$ zijn n.l. punten van E'. Men heeft, als α en β de wortels zijn

$$\alpha = \frac{1 + i\sqrt{19}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - i\sqrt{19}}{2}$$

dus

$$|\varphi'(\alpha)| > 1 \text{ en } |\varphi'(\beta)| > 1.$$

Voor $|z| \geqq 3$ convergeert de rij $z, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ regelmatig tot oneindig.

Immers $|z_1| \geqq |z|^2 - 5 \geqq 4$.

Het gebied G met grenskromme cirkel C, (middelpunt O en straal 3), en waarin het punt oneindig gelegen is bevat al zijn consequentgebieden en bovendien de kritieke punten ∞ en $+5$ van de functie $\psi(z) = \sqrt{(z-5)}$ inverse functie van $\varphi(z)$.

Zoekèn wij nu de successievelijke antecedenten van het gebied G.

Zijn $+z_{-1} = +\sqrt{(z-5)}$ en $-z_{-1} = -\sqrt{(z-5)}$ de beide antecedenten van z (onder $+\sqrt{(z-5)}$ verstaan we de pos. wortel van $z-5$ en onder $-\sqrt{(z-5)}$ de neg. wortel van $z-5$), dan beschrijven deze antecedenten als z C doorloopt ieder een gesloten kromme $+C_{-1}$ en $-C_{-1}$, aangezien C als grens van G beschouwd de beide kritieke punten bevat.

De consequenten van ieder punt z waarvoor $|z| = 3$ naderen regelmatig tot oneindig. Hieruit volgt dat de krommen $+C_{-1}$ en $-C_{-1}$ geheel in het cirkelgebied C gelegen zijn en met C geen punten gemeen hebben. $+C_{-1}$ en $-C_{-1}$ hebben geen dubbelpunten, daar C een enkelvoudige kromme is. Zij kunnen elkaar niet snijden aangezien $+z_{-1}$ en $-z_{-1}$ inverse functies zijn van een zelfde uniforme functie, terwijl op C geen enkel kritiek punt van $\psi(z)$ gelegen is.

Voorts liggen beide krommen geheel buiten elkaar.

(Onder het binnengebied van $+C_{-1}$, bijv, versta ik het gebied dat door $+C_{-1}$ begrensd wordt en tevens geheel in het cirkelgebied C gelegen is).

De functie $f(z) = +\sqrt{(z-5)}$ is holomorf in het cirkelgebied C en op C. Zij z' een punt in dat cirkelgebied gelegen. Zij $z'_{-1} = f(z')$, dan is $f(z')$ in $+C_{-1}$ gelegen, het argument van $f(z) - f(z')$ ver-

andert n.l. met 2π als z C doorloopt. Dus met een punt z' binnen C correspondeert een punt binnen $+C_{-1}$ en omgekeerd.

Het binnengebied van $+C_{-1}$ is dus conform en eenduidig op het cirkelgebied C afgebeeld.

Op analoge wijze kunnen wij inzien dat ook het binnengebied van $-C_{-1}$ conform en eenduidig afgebeeld is op het cirkelgebied C.

De krommen $+C_{-1}$ en $-C_{-1}$ liggen nu buiten elkaar, want lag x in het binnengebied van $+C_{-1}$ en op $-C_{-1}$ dan zou $\varphi(x)$ tegelijk binnen het cirkelgebied C als op C gelegen zijn.

De positieve antecedenten van de eerste orde van ieder punt $z \prec G$ liggen in het buitengebied van $+C_{-1}$. Zoo bevat het buitengebied van $-C_{-1}$ alle negatieve antecedenten van de eerste orde van alle punten $z \prec G$.

Doorloopt z C dan beschrijft ieder der vier antecedenten van de tweede orde van z een gesloten kromme, die we achtereenvolgens aanduiden met $++C_{-2}$, $+-C_{-2}$, $-+C_{-2}$, en $--C_{-2}$.

Hierbij moet onder $+-$ verstaan worden dat eerst de positieve antecedent van de eerste orde van een punt z genomen is en vervolgens van deze antecedent de negatieve antecedent van de eerste orde. (Wat onder „positieve" of „negatieve" antecedent in dit voorbeeld verstaan moet worden is duidelijk).

We zien nu onmiddellijk in, na hetgeen hierboven medegedeeld is omtrent de antecedenten van de eerste orde van C, dat de krommen $++C_{-2}$ en $+-C_{-2}$ geen dubbelpunten hebben en geheel buiten elkaar gelegen zijn in het binnengebied van $+C_{-1}$. Hetzelfde geldt voor $-+C_{-2}$ en $--C_{-2}$ t. o. v. $-C_{-1}$.

Door herhaalde antecedeering van C verkrijgen we dus achtereenvolgens 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ... gesloten krommen. Deze krommen trekken zich samen en in iedere kromme liggen twee krommen als antecedenten van de eerste orde van de beschouwde kromme. Het gebied G heeft tot antecedent van de eerste orde het samenhangend gebied van het complexe vlak dat G bevat en begrensd wordt door $+C_{-1}$ en $-C_{-1}$.

Het antecedentgebied van de tweede orde van G bevat het antecedentgebied van de eerste orde en wordt begrensd door de krommen $++C_{-2}$, $+-C_{-2}$, $-+C_{-2}$ en $--C_{-2}$. Het antecedentgebied van de n^e orde ligt in het antecedentgebied van de $n+1^e$

orde en bevat het antecedentgebied van de n — 1e orde.

We zullen nu het volgende bewijzen:

Nadert n tot oneindig dan is de verzameling van de punten, die tot geen der zooeven beschouwde antecedentgebieden behooren, perfect, overal discontinu.

Voor $|z| \leqq 1$ is $\varphi(z) \geqq 4$. De krommen C_{-i} liggen dus in den ring begrensd door de cirkels $|z| = 1$ en $|z| = 3$. Voor ieder punt z in den ring gelegen geldt $|\varphi'(z)| = |2z| > 2$.

Hieruit volgt dat de lengten van de krommen C_{-n} (als n nadert tot oneindig) tot nul naderen. Immers tusschen de differentialen van de bogen van een kromme C_{-n} en van haar consequent van de eerste orde bestaat de betrekking

$$d\sigma_{-(n-1)} = d\sigma_{-n} \, |\varphi'(z)| \quad (z \text{ op } C_{-n})$$

dus

$$d\sigma_{-n} < \frac{1}{k} d\sigma_{-(n-1)}.$$

Tusschen de lengten van de krommen C_{-n} en $C_{-(n-1)}$ bestaat dezelfde relatie

$$l_{-n} < \frac{1}{k} l_{-(n-1)}$$

of

$$l_{-n} < \frac{l_0}{k^n} \text{ dus } \lim_{n \to \infty} l_{-n} = 0.$$

Beschouw ik nu het binnengebied van een kromme C^i_{-n} (C_{-n} bestaat in totaal uit 2^n krommen C^i_{-n}) en neem ik hiervan achtereenvolgens de positieve antecedenten. Het p^{de} antecedentgebied bevat het $p + 1^e$, enz. Geen dezer gebieden is leeg. Hieruit volgt dat ze een gemeenschappelijk punt moeten hebben.

De verzameling, bestaande uit de gemeenschappelijke punten die ik verkrijg door alle mogelijke antecedentgebieden te beschouwen van de gebieden binnen alle C^i_{-n} noem ik ε.

Deze is perfect en overal discontinu.

1° ε is gesloten. Zij x limietpunt van een rij punten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die tot ε behooren.

Zou x geen punt van ε zijn, dan zou voor een zekere waarde van n x buiten de binnengebieden van iedere C^i_{-n} gelegen zijn.

Is h de kleinste afstand van x tot C_{-n} dan zou de afstand van x tot ieder van de punten α, β, ... minstens h moeten zijn, aangezien de punten α, β, ... in het binnengebied van C_{-n} gelegen zijn. m. a. w. ε is gesloten.

2° ε is perfect. α, een punt van ε zijnde, ligt in het binnengebied van een kromme C^i_{-n}.

Dit gebied bevat twee verschillende krommen tot $C_{-(n+1)}$ behoorende. α moet dus in het binnengebied van een van de beide krommen liggen, stel in het binnengebied van $C'_{-(n+1)}$. In het binnengebied van de andere kromme $C''_{-(n+1)}$ ligt minstens een punt β van ε.

De afstand $\alpha\beta$ is kleiner dan de diameter ϱ van C^i_{-n}, welke laatste tot nul nadert voor n voldoend groot.

3° ε is overal discontinu. Ieder tweetal punten α en β van ε kan men aldus insluiten:

Er bestaat een index n zoodanig dat de diameter van iedere kromme C^i_{-n} kleiner is dan de halve afstand $\alpha\beta$. α en β kunnen dan niet in een zelfde binnengebied van een van de krommen C^i_{-n} liggen, m. a. w. ligt α in het binnengebied van C'_{-n} dan ligt β in het binnengebied van bijv. C''_{-n}. Hieruit volgt dat iedere polygoon, die α met β verbindt en waarvan de hoekpunten tot de verzameling ε behooren, een zijde heeft waarvan de lengte tenminste gelijk is aan de kortste afstand van twee krommen van C_{-n}.

Aangezien α en β een willekeurig gekozen tweetal punten is, moet ε overal discontinu zijn.

Ieder punt van ε is limietpunt van de antecedenten van ieder punt van het vlak, met uitzondering van de antecedenten van het punt oneindig. De consequenten van een omgeving van ieder punt $\prec \varepsilon$ overdekken op den duur het geheele vlak behalve het punt oneindig. Hieruit volgt $\varepsilon \equiv E'$.

(Zie de opmerking in § 11).

We hebben hier een voorbeeld van het tweede geval van § 10, waarbij het punt oneindig het eenige uitzonderingspunt is.

2e Voorbeeld — $\varphi(z) = z^2$ (zie ook § 1).

De wortels van $\varphi_n(z) - z = 0$ waarvoor $|\varphi'_n(z)| > 1$ is $(n = 1, 2, \ldots.)$ liggen overal dicht op den cirkel $|z| = 1$.

Hieruit volgt dat de verzameling $E' \equiv$ cirkel $|z| = 1$.

O en het punt oneindig zijn hier de beide uitzonderingspunten bedoeld in het eerste geval van § 10; de antecedenten van alle overige punten hebben tot limietpunten ieder punt van den cirkel $|z| = 1$.

3e Voorbeeld (ontleend aan Lattès) — Zij $z = p(u)$ (p-functie van Weierstrass)

en $z_1 = p(2u)$, waarbij $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ gesteld wordt.

Nu is aangezien:

$$p(2u) + 2p(u) = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{p''(u)}{p'(u)}\right\}^2,$$

$$p''(u) = 6\{p(u)\}^2 - \tfrac{1}{2}g_2$$

en $$\{p'(u)\}^2 = 4\{p(u)\}^3 - g_2 p(u) - g_3$$

$$z_1 = \tfrac{1}{4}\frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-1)}.$$

Met een punt in het u-vlak, waarvoor $2^n u \equiv u$ (op de periode na), correspondeert een wortel x van $\varphi_n(z) - z = 0$, waarvoor geldt $\varphi'_n(x) = 2^n$.

x behoort dan tot de verzameling E.

Aangezien $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ is het periodenparallelogram van de p-functie een vierkant.

Zij 2ω de reëele periode.

De voorwaarde $2^n u \equiv u$ (op de periode na) geeft als

$$u = v + iw:$$

$(2^n - 1)\, v = 2k\omega$

$(2^n - 1)\, w = 2k'\omega$. Ik kies u in het eerste periodenvierkant.

Stel $v = 2\omega\lambda$, $0 \leqq \lambda < 1$,

$w = 2\omega\mu$, $0 \leqq \lambda < 1$.

Alle punten u, waarbij de correspondeerende waarden λ en μ in het tweetallig stelsel geschreven een periodieke ontwikkeling hebben met een periode van n cijfers 0 of 1 en waarbij de periodieke ontwikkeling onmiddellijk na de komma begint, voldoen aan $2^n u \equiv u$ op de periode na.

Deze punten liggen overal dicht in het periodenvierkant. De correspondeerende wortels $x\,(x \prec E)$ liggen dus overal dicht in het geheele complexe z-vlak. M. a. w. $E' \equiv$ complexe vlak.

Opmerking — Bij dit voorbeeld kunnen we ook als volgt redeneeren:

$$z = p(u),\ z_1 = p(2u) \text{ en } p(2u) = \varphi\{p(u)\}.$$

Zij u_o een van de waarden die met z_o correspondeert. Met een omgeving G van z_o correspondeert een omgeving G' van u_o; voor n voldoend groot bevat $2^nG'$ (G', vermenigvuldigd met 2^n, vanuit O) een periodenparallelogram, m. a. w. beschrijft z G dan doorloopt $\varphi_n(z) = p(2^nz)$ het geheele vlak.

z_o is dus een punt van E' en aangezien z_o willekeurig is, is E' ≡ complexe vlak.

§ 13 — NADERE BESCHOUWING VAN DE GEBIEDEN, WAARIN GEEN PUNTEN VAN E' GELEGEN ZIJN

Bewering — Ieder regelmatig limietpunt en ieder punt deel uitmakende van een cyclische limietgroep is middelpunt van een cirkel waarbinnen E' leeg is.

Bewijs — Zij x een regelmatig limietpunt, dan bestaat er een cirkel C waarbinnen en op den rand waarvan voor iedere z geldt $|z_1 - x| < |z - x|$, m. a. w. beschrijft z C dan doorloopt z_1 een kromme C_1 die geheel binnen C gelegen is. Itereert men dus het gebied D met grens C en x bevattend eenmaal, dan verkrijgt men een gebied D_1, dat met grens (C_1) geheel binnen D gelegen is.

Zoo ligt D_n consequent van de n^e orde van D geheel (incl. grens) binnen D_{n-1} en bevat D_{n+1}.

Mocht D_n meerbladig zijn dan ligt ieder blad van D_n met grens geheel binnen een blad van D_{n-1}.

De argumentsverandering van $z - z_n$ (n = 1, 2, 3, ...) is dus steeds 2π als z C doorloopt.

De vergelijkingen $z - \varphi_n(z) = 0$ (n = 1, 2, 3, ...) hebben in C dus slechts den wortel x.

In C bevinden zich dientengevolge geen punten van E m. a. w. E' is in C leeg.

Maakt x deel uit van een cyclische limietgroep, dan is x en ieder ander punt van de groep middelpunt van een cirkel C_i waarbinnen en op den rand waarvan $|z_p - x_i| < |z - x_i|$, waar-

bij p de orde van de groep en x_i ieder element van de groep voorstelt.

Vervolgens kiezen we C_i zoo klein dat ze onderling geen punten gemeen hebben.

Doorloopt z C (de cirkel met x tot middelpunt) dan beschrijven $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$ krommen, die geheel buiten het cirkelgebied C gelegen zijn respectievelijk in de omgevingen van $x_1, x_2, \ldots . x_{p-1}$.

De argumentsverandering van $z - \varphi_n(z)$ als z C doorloopt is nul als n geen veelvoud van p is.

Is daarentegen n een veelvoud van p dan is deze argumentsverandering gelijk aan 2π.

De vergelijkingen $\varphi_n(z) - z = 0$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ hebben dus geen wortel in C tenzij n een veelvoud van p is.

In het laatste geval is x de eenige wortel, waaruit volgt dat E' in C leeg is.

Bewering — Beschrijft z een gebied D, waarin geen punten van E' gelegen zijn, dan veranderen de limietpunten van de consequenten van z analytisch met z.

Bewijs — Bevat D geen punten van E' dan zijn in iedere D_n, geïtereerde van D van de n^e orde, geen punten van E' gelegen m. a. w. geen der functies van de rij $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z) \ldots .$ neemt in D de waarden y aan waarbij y ieder punt van E' is. Hieruit volgt dat de rij $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots .$ in D normaal is.

Zij $\varphi_{n_1}(z), \varphi_{n_2}(z), \ldots .$ een oneindige suite gelicht uit de rij $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots .$ en overal in D gelijkmatig convergeerende tot de meromorfe functie f (z), respectievelijk een constante.

De consequenten $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots .$ van z hebben dan een limietpunt λ, waarbij $\lambda = f(z)$.

Beschrijft z D dan is het mogelijk dat λ constant blijft (eindig of oneindig), maar is dit niet het geval, dan verandert λ analytisch met z, d. w. z. $\lambda(z)$ is een meromorfe functie van z in D.

Convergeert de rij $\varphi_{n_1}(z), \varphi_{n_2}(z) \ldots .$ in D gelijkmatig tot de meromorfe functie f (z) dan convergeert de rij

$$\varphi_{n_1+1}(z), \varphi_{n_2+1}(z), \ldots .$$

gelijkmatig tot de in D meromorfe functie $\varphi\{f(z)\}$.

Algemeen: de rij $\varphi_{n_1+i}(z), \varphi_{n_2+i}(z), \ldots .$ convergeert in D gelijkmatig tot de meromorfe functie $\varphi_i\{f(z)\}$.

De gedragswijze van de rij $\varphi_n(z)$ is dus door de convergentiewijze van een oneindige deelrij volkomen bepaald.

Hieruit volgt in verband met het voorgaande dat de limietpunten van de consequenten van $z \prec D$ analytisch afhankelijk zijn van z.

Aan een punt P, niet tot E' behoorende, kan men toevoegen de verzameling bestaande uit alle punten die daar niet toe behooren en die met P verbonden kunnen worden door enkelvoudige krommen, waarbij alle punten van de krommen geen punten van E' zijn.

We verkrijgen op deze wijze een gebied R waarvan de grens uitsluitend bestaat uit punten van E'.

E' verdeelt dus het complexe vlak in twee of meer gebieden als E' lineair continu is.

Is E' perfect overal discontinu dan is R het geheele complexe vlak behoudens de punten, die tot E' behooren.

Bewering — Convergeert de rij $\varphi_n(z)$ in een gebied D, gelegen in een deelgebied van R, gelijkmatig tot $f(z)$, dan convergeert deze rij tot $f(z)$ gelijkmatig in het geheele beschouwde gebied R.

Bewijs — We kunnen zonder aan de algemeenheid te kort te doen onderstellen dat de polen van $\varphi(z)$ punten van E' zijn.

[Door een homographie kan men n.l. een willekeurig punt $Q \prec E'$ omzetten in het punt oneindig. Alle polen van de nieuwe functie $\overline{\varphi}(z)$ zijn dan punten van E'].

De functies $\varphi_i(z)$ zijn dus in R holomorf, terwijl de rij in R normaal is.

Bij deze gegevens is $f(z)$ in D holomorf.

Convergeerde de rij $\varphi_n(z)$ in R niet gelijkmatig tot $f(z)$, dan heeft deze rij in x ($x \prec R$ en buiten D gelegen) minstens twee verschillende limieten A en B.

Er bestond dan, aangezien de rij $\varphi_n(z)$ in R normaal is, een deelrij S_1 uit de rij $\varphi_n(z)$ gelicht, die in R gelijkmatig convergeerde tot de holomorfe functie $f_1(z)$, $(f_1(x) = A)$.

Evenzoo bestond er een suite S_2, die in R tot de holomorfe functie $f_2(z)$ gelijkmatig convergeerde, $(f_2(x) = B)$.

In D vallen de beide functies $f_1(z)$ en $f_2(z)$ samen met $f(z)$, waaruit volgt dat $f_1(z)$ met $f_2(z)$ overal in R samen moet vallen.

Daar bovendien de functies $\varphi_n(z)$ in R geen singulariteiten hebben, moet $f_1(z) \equiv f(z)$ holomorf in R.

Convergeert i. p. v. de rij $\varphi_n(z)$ een deelrij $\varphi_{n_1}(z)$, $\varphi_{n_2}(z)$, ... in een gebied $D \prec R$ gelijkmatig tot $f(z)$, dan behoeft men slechts de redeneering van daareven te herhalen om in te zien dat deze deelrij in het geheele gebied R gelijkmatig tot $f(z)$ onvergeert.

Men heeft dus: De perfecte verzameling E' begrenst de verschillende convergentie gebieden van het complexe vlak bij iteratie van $\varphi(z)$; in ieder samenhangend gebied dat E' tot grens heeft is de wijze van convergentie van iedere oneindige suite die men uit de rij $\varphi_n(z)$ kan lichten in de omgevingen van twee willekeurige niet samenvallende punten van zoo'n gebied geheel dezelfde.

Zij x een regelmatig limietpunt, dan naderen de consequenten van iedere punt z gelegen in of op den rand van een cirkel C met middelpunt x en voldoend kleinen straal regelmatig tot x. In en op C nadert dus de rij $\varphi_n(z)$ gelijkmatig tot x. Het cirkelgebied C ligt inclusief rand geheel binnen het gebied R_x dat bij x behoort. De rij $\varphi_n(z)$ nadert dus in R_x gelijkmatig tot x, m. a. w. de consequenten van ieder punt $z \prec R_x$ naderen regelmatig tot x.

R_x wordt nu het *onmiddellijke* convergentie gebied van x genoemd, onmiddellijk omdat R_x samenhangend is d. w. z. begrensd wordt door een of meer krommen zonder dubbelpunt en (òf) door punten eener perfecte overal discontinue verzameling.

Onder het *totale* convergentiegebied van een regelmatig limietpunt x wordt verstaan de som van de gebieden waarin de consequenten van ieder punt z tot een van die gebieden behoorend, uitsluitend x tot limietpunt hebben.

Het totale convergentiegebied bevat dus het onmiddellijke of valt er mee samen.

Zonder eenige moeilijkheid is het bovenstaande uit te breiden voor het geval dat x een der elementen is van een cyclische limietgroep.

Opmerking — Weet men a priori dat E' overal discontinu is dan volgt hieruit dat er slechts één regelmatig limietpunt kan bestaan. Het regelmatige limietpunt heeft dan tot onmiddellijk ≡ totaal

convergentiegebied het geheele complexe vlak behoudens de punten van E'.

Weet men omgekeerd dat er twee verschillende regelmatige limietpunten zijn of dat er een cyclische limietgroep bestaat, dan moet E' lineair continu zijn en het vlak in twee of meer verschillende gebieden verdeelen.

GERAADPLEEGDE LITERATUUR VOOR HOOFDSTUK II

1. Montel. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.
2. Montel. Sur les familles de fonctions analytiques, qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine.
   Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Tome XXIX, 1912.
3. Montel. Sur les familles normales de fonctions analytiques.
   Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. Tome XXXIII, 1916.
4. Gaston Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome IV, 1918.
5. Lattès. Note des Comptes rendus (7 janvier 1918).
6. P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. Bulletin de la Société Mathématique de Françe.
   1919 en 1920.

HOOFDSTUK III

ONMIDDELLIJK EN TOTAAL CONVERGENTIEGEBIED VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT. ITERATIE IN DE OMGEVING VAN EEN PUNT x, WAARVOOR GELDT $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| = 1$. BESTUDEERING VAN DE CONVERGENTIE VAN DEELRIJEN VAN DE RIJ $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ IN DE GEBIEDEN WAAR DEZE RIJ NORMAAL IS.

§ 14 — NADERE BESCHOUWING VAN HET ONMIDDELLIJKE CONVERGENTIEGEBIED VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT EN VAN DE ONMIDDELLIJKE CONVERGENTIEGEBIEDEN VAN PUNTEN DEEL UITMAKENDE VAN EEN CYCLISCHE LIMIETGROEP VOOR HET GEVAL, DAT DEZE GEBIEDEN ENKELVOUDIG SAMENHANGEND ZIJN

Bewering — Het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt x bevat tenminste één kritiek punt van dien tak van $\psi(z)$, inverse van $\varphi(z)$, waarvoor $\psi(x) = x$.

Bewijs — Zij O regelmatig limietpunt en $\varphi'(0) \neq 0$. (Was $\varphi'(0) = 0$, dan zou O kritiek punt van den bedoelden tak van $\psi(z)$ zijn).

Beschrijft z den Koenigschen cirkel C (dus een cirkel met middelpunt O, waarbinnen de consequenten van ieder punt z regelmatig tot O naderen) en noemen we $\overset{\circ}{z}_{-1}$ de antecedent van z, die voor $z = 0$ nul wordt, dan doorloopt $\overset{\circ}{z}_{-1}$ een enkelvoudige kromme C_{-1}, die in zijn binnengebied, dat we met (C_{-1}) zullen aanduiden, het cirkelgebied bevat. C en C_{-1} hebben geen punten gemeen. Evenzoo doorloopt $\overset{\circ}{z}_{-2}$ een kromme C_{-2} waarbij

$$(C_{-1}) \prec (C_{-2}).$$

De gebieden (C_{-n}) zijn enkelvoudig samenhangend en bestaan ieder voor zich uit een enkel blad, indien geen dezer gebieden een kritiek punt van den bedoelden tak van $\psi(z)$ bevat.

Nu is als $R = \lim_{n \to \infty} (C_{-n})$, het gebied R, het onmiddellijke convergentiegebied van O, (zie ook de opmerking eenige blz. verder) bij de gemaakte onderstelling een enkelvoudig samenhangend gebied waarbij met ieder punt $z \prec R$ een punt $\overset{\circ}{z}_{-1} \prec R$ correspondeert en omgekeerd met ieder punt $z \prec R$ correspondeert een consequent eveneens in R gelegen.

Beelden we nu R conform af op het binnengebied γ van den eenheidscirkel $|Z| = 1$ van het Z-vlak.

[Dat dit mogelijk is kunnen we als volgt inzien:

Zij $f_n(Z)$ een functie die het gebied binnen $|Z| = 1$ conform op (C_{-n}) afbeeldt. De gebieden (C_{-n}) naderen als $n \to \infty$ regelmatig tot R, m. a. w. de rij $f_n(Z)$ $n = 1, 2, \ldots$. moet in het binnengebied van $|Z| = 1$ normaal zijn; er bestaat dus een oneindige deelrij $f_\varrho(Z)$ die binnen $|Z| = 1$ gelijkmatig tot een limietfunctie $f(Z)$ nadert. Deze functie $f(Z)$ is in het cirkelgebied analytisch en beeldt dit gebied conform op R af].

Door $f_n(0) = 0$ en $f'_n(0)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ reëel te stellen verkrijgt men $f(0) = 0$, $f'(0)$ reëel.

De oorsprongen en de positieve richtingen van de reëele assen correspondeeren dus met elkaar.

Met ieder punt $Z \prec \gamma$ correspondeert een punt $z \prec R$ en omgekeerd.

Aangezien een punt $z \prec R$ slechts één antecedent van de eerste orde heeft die in R gelegen is en de consequent van de eerste orde van $z \prec R$ eveneens in R ligt, heeft men:

met een punt $Z \prec \gamma$ correspondeert één punt $Z_1 \prec \gamma$ door middel van de substituties

$f(Z) = z$, $\varphi(z) = z_1$ en $f_{-1}(z_1) = Z_1$, waarbij $f_{-1}(z)$, inverse van $f(z)$, de functie is die R conform op γ afbeeldt.

Evenzoo correspondeert met een punt $Z \prec \gamma$ één punt $Z_{-1} \prec \gamma$ na toepassing van

$$f(Z) = z, \ \psi_0(z) = \overset{\circ}{z}_{-1} \text{ en } f_{-1}(\overset{\circ}{z}_{-1}) = Z_{-1}.$$

De substituties $z_1 = \varphi(z)$ en $\overset{\circ}{z}_{-1} = \psi_0(z)$ in het z-vlak worden dus overgevoerd in de binnen γ eenduidige holomorfe substituties

$$Z_1 = \Phi(Z), \ Z_{-1} = \Psi(Z). \ (\Psi \text{ inverse van } \Phi).$$

De functies Φ en Ψ voeren γ in zichzelf over, bovendien is

$$\Phi(0) = 0.$$

Hieruit volgt $Z_1 = Ze^{\theta i}$, of

$$\left| \frac{dZ_1}{dZ} \right|_{z=o} = 1,$$

en dus zou $|\varphi'(0)| = 1$, hetgeen onmogelijk is aangezien O regelmatig limietpunt is.

Het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt x bevat dus ten minste één kritiek punt van dien tak van $\psi(z)$ (inverse van $\varphi(z)$), waarvoor $\psi(x) = x$.

Een kritiek punt van $\psi(z)$ is consequent van de eerste orde van een punt waar $\varphi'(z) = 0$. In het totale convergentiegebied van een regelmatig limietpunt ligt dus tenminste één punt waar

$$\varphi'(z) = 0.$$

Het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt — Het is nu met behulp van het voorgaande mogelijk het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt nader te bestudeeren.

We denken ons daartoe het Riemannsche oppervlak λ van $\psi(z)$ bestaande uit k boven elkaar gelegen bladen, beantwoordende aan de k takken van $\psi(z)$, en vertakt in de kritieke punten van deze functie.

Voorts stellen we de straal van den Koenigschen cirkel C zóó klein dat in C geen kritieke punten gelegen zijn, terwijl we in het regelmatig limietpunt O $\varphi'(0) \neq 0$ onderstellen.

De punten van λ waarvan de projecties op C gelegen zijn liggen op k boven elkaar gelegen gelijke cirkels ${}^iC$ (i = 1, 2, ..., k). Doorloopt z de verschillende cirkelgebieden dan beschrijft z_{-1} k gebieden $({}^iC_{-1})$ (i = 1, 2, ..., k), ieder begrensd door de bijbehoorende kromme ${}^iC_{-1}$. We kunnen natuurlijk evengoed zeggen:

Beschrijft z het cirkelgebied (C) dan beschrijven de k antecedenten van de eerste orde van z de gebieden

$$({}^iC_{-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots., k).$$

Een dezer gebieden bijv. $({}^1C_{-1})$ bevat het cirkelgebied (C); $({}^1C_{-1})$ en de overige k — 1 gebieden liggen buiten elkaar en hebben onderling geen gemeenschappelijke grenspunten.

Voor den opbouw van het onmiddellijke convergentiegebied R van O kan ik nu deze overige k — 1 gebieden buiten beschouwing laten. (Zie de opmerking in deze §).

Bevat $({}^1C_{-1})$ geen kritieke punten van $\psi(z)$ dan kunnen we de voor (C) gedane redeneering op $({}^1C_{-1})$ toepassen. Immers het totaalgebied van λ, bevattende de punten van λ waarvan de projecties in $({}^1C_{-1})$ gelegen zijn, bestaat uit k volkomen gelijke boven elkaar gelegen gebieden; doorloopt z ieder bedoeld gebied dan beschrijft z_{-1} k gebieden $({}^iC_{-2})$. Het gebied $({}^1C_{-2})$ heeft met de overige k — 1 gebieden geen punten gemeen en bevat $({}^1C_{-1})$. Hierbij zijn de gebieden $({}^1C_{-1})$, $({}^1C_{-2})$ verkregen door toepassing van $\mathring{z}_{-1}$, dus van dien tak van $\psi(z)$, die in O nul is, op het cirkelgebied (C).

Op bovenomschreven wijze voortgaande verkrijgen we de gebieden $({}^1C_{-3})$, $({}^1C_{-4})$, enz., waarbij

$$({}^1C_{-2}) \prec ({}^1C_{-3}) \prec ({}^1C_{-4}).$$

Tenslotte ontstaat een gebied $({}^1C_{-\tau})$ dat tenminste één vertakkingspunt van λ bevat, waarbij τ de kleinste index is waarvoor dit plaats vindt.

Zij T dit vertakkingspunt en zijn in $({}^1C_{-\tau})$ geen verdere vertakkingspunten gelegen, dan moet T kritiek punt voor dien tak van $\psi(z)$ zijn, die in O nul is. In het tegengestelde geval n.l. zou de tak van $\psi(z)$, die in O nul is, in $({}^1C_{-1})$ holomorf zijn (we kunnen n.l. onderstellen dat het punt ∞ een punt van E' is). M. a. w. $({}^1C_{-(\tau+1)})$ zou dan evenals $({}^1C_{-\tau})$ een enkelvoudig samenhangend gebied zijn, waarbij met ieder punt $z \prec ({}^1C_{-\tau})$ één antecedent van de eerste orde $\mathring{z}_{-1} \prec ({}^1C_{-(\tau+1)})$ zou correspondeeren

$$[({}^1C_{-\tau}) \prec ({}^1C_{-(\tau+1)})].$$

Zouden dus in de gebieden $({}^1C_{-n})$ $n = \tau, \tau + 1, \ldots$ slechts kritieke punten van $\psi(z)$ gelegen zijn, die voor den tak van $\psi(z)$, die in O nul is, niet kritiek zijn, dan zou met ieder punt z in het onmiddellijke convergentiegebied R van O gelegen

$$[R = \lim_{n \to \infty} ({}^1C_{-n})],$$

slechts één antecedent van de eerste orde $\mathring{z}_{-1} \prec R$ correspondeeren en dus R geen kritiek punt bevatten van den bedoelden tak van $\psi(z)$.

We denken ons nu in T de bladen 1, 2, ..., a ($a \leqq k$) van λ vertakt.

Het totaalgebied van λ, bevattende de punten van λ waarvan de projecties in $({}^1C_{-\tau})$ gelegen zijn, bestaat

1° uit een enkelvoudig samenhangend gebied bestaande uit a boven elkaar gelegen volkomen gelijke gebieden, die zich uitstrekken respectievelijk over gedeelten van de bladen 1, 2, ..., a van λ en vertakt zijn in T. Dit gebied dat, ik $(\overline{C}_{-\tau})$ noem, wordt begrensd door een enkele kromme.

2° (als $a < k$) uit een of meerdere gebieden gelegen in de bladen $a + 1$, $a + 2$, ..., k, die we voor den opbouw van R buiten beschouwing kunnen laten.

Beschrijft $z\,(\overline{C}_{-\tau})$ dan doorloopt $\mathring{z}_{-1}$ een enkelvoudig samenhangend eenbladig gebied, begrensd door een kromme ${}^1C_{-(\tau+1)}$. Hierbij is $({}^1C_{-\tau}) \prec ({}^1C_{-(\tau+1)})$.

We kunnen ook als volgt redeneeren:

Doorloopt z eenmaal ${}^1C_{-\tau}$ dan beschrijven a van de antecedenten van z (d.z. $\mathring{z}_{-1}$ en de $a - 1$ antecedenten van de eerste orde van z die met $\mathring{z}_{-1}$ op ${}^1C_{-\tau}$ een cycle vormen) de kromme

$${}^1C_{-(\tau+1)}.$$

Met ieder punt $z \prec ({}^1C_{-\tau})$ correspondeeren a antecedenten van de eerste orde, die in $({}^1C_{-(\tau+1)})$ gelegen zijn.

We denken ons nu dat $({}^1C_{-(\tau+1)})$ behalve T geen verdere kritieke punten van $\psi(z)$ bevat, waarbij we echter het geval dat $({}^1C_{-(\tau+1)})$ kritieke punten bevat waarin eenige der bladen

$$a + 1,\ a + 2,\ \ldots.,\ k$$

van λ vertakt zijn niet behoeven uit te sluiten.

We verkrijgen hier op analoge wijze een gebied $(\overline{C_{-(\tau+1)}})$, dat zich a-voudig overdekt, begrensd wordt door een enkele kromme, en waarin alle punten van de bladen 1, 2, ..., a van λ gelegen zijn, waarvan de projecties binnen $({}^1C_{-(\tau+1)}$ liggen. De punten van λ gelegen in de bladen $a + 1$, $a + 2$, ..., k waarvan de projecties in $({}^1C_{-(\tau+1)}$ gelegen zijn kunnen weer buiten beschouwing blijven.

Doorloopt z $\overline{(C_{-(\tau+1)})}$ dan beschrijft $\mathring{z}_{-1}$ een enkelvoudig samenhangend eenbladig gebied $({}^1C_{-(\tau+2)})$, waarbij

$$({}^1C_{-(\tau+1)}) \prec ({}^1C_{-(\tau+2)}).$$

We maken nu de onderstelling dat de gebieden

$$({}^1C_{-(\tau+n)}) \quad n = 3, 4, \ldots,$$

die we op bovenomschreven wijze kunnen vinden uitsluitend T als vertakkingspunt hebben (het geval dat deze gebieden kritieke punten van $\psi(z)$ bevatten die eenige der bladen

$$a + 1, a + 2, \ldots, k$$

van λ vertakken behoeven we ook hier niet uit te sluiten).

In dat geval is $R = \lim_{n \to \infty} ({}^1C_{-n})$ een enkelvoudig samenhangend eenbladig gebied, dat O bevat.

Met ieder punt $z \prec R$ correspondeeren a antecedenten van de eerste orde eveneens in R gelegen. Ieder punt van R is met O door een enkelvoudige kromme te verbinden; de consequenten van ieder punt van zoo'n kromme naderen regelmatig tot O.

We hebben hier een voldoende voorwaarde, waaronder R enkelvoudig samenhangend is, afgeleid. Zooals § 17 leert is deze voorwaarde ook noodig, met dien verstande dat het a — 1 voudige vertakkingspunt T wel gesplitst mag zijn in meerdere vertakkingspunten van verschillende orde echter moet deze splitsing zóó zijn dat de totale orde van die vertakkingspunten a — 1 is en dat door die vertakkingspunten a bladen van λ verbonden worden.

Opmerking — Dat het gebied R op boven omschreven wijze verkregen inderdaad het onmiddellijke convergentiegebied van O is, kunnen we als volgt inzien:

1° ieder punt $\alpha \prec R$ voldoet aan de voorwaarde dat het met O door een enkelvoudige kromme verbonden kan worden waarbij de consequenten van ieder punt van de kromme regelmatig tot O naderen; immers voor ieder punt α bestaat een index μ zoodanig dat

$$\alpha \prec ({}^1C_{-\mu}).$$

2° ieder punt β buiten R gelegen, waarvoor geldt $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\beta) = 0$,

behoort niet tot het onmiddellijke convergentiegebied van O.

Bewijzen we daartoe eerst dat ieder punt van de grens van R tot E′ behoort.

Het is duidelijk dat de consequenten van een punt van de grens van R niet tot O naderen.

Zij P een grenspunt van R. De functierij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... is in P niet normaal, aangezien deze rij in het andere geval normaal zou zijn in een cirkel γ met P tot middelpunt.

Waar nu de functierij in het deelgebied van γ dat tevens tot R behoort regelmatig tot nul nadert, zou de rij in het geheele cirkelgebied γ regelmatig tot nul moeten naderen, hetgeen onmogelijk is, daar dit in P niet plaats vindt. De functierij is dus in P niet normaal, dus behoort P tot E′, aangezien bij herhaalde iteratie van het cirkelgebied γ op den duur het geheele complexe vlak met uitzondering van ten hoogste twee punten (zie § 10) overdekt wordt.

De grens van R bestaat dus uitsluitend uit punten van E′.

Ligt β buiten R, dan is het dus onmogelijk, β met O door een enkelvoudige kromme te verbinden, zonder de grens van R te snijden.

M. a. w. de consequenten van ten minste één punt van zoo'n enkelvoudige kromme naderen niet tot O, β kan dus niet tot het onmiddellijke convergentiegebied van O behooren.

Bovendien komt nu naar voren dat het inderdaad juist is voor den opbouw van R de gebieden bevattende de punten van λ gelegen in de bladen $a + 1$, $a + 2$, ..., k en waarvan de projecties binnen (C), $({}^1C_{-1})$, ..., $({}^1C_{-\tau})$, $({}^1C_{-(\tau+1)})$ ...., enz., gelegen zijn, buiten beschouwing te laten. Immers beschrijft z een dergelijk gebied, dan doorloopt z_{-1} een gebied dat buiten R gelegen is en dat dus niet tot het onmiddellijke convergentiegebied van O behoort.

Ook de gebieden bevattende de punten van λ gelegen in de bladen 2, 3, ..., a en waarvan de projecties binnen

$$(C), ({}^1C_{-1}), \ldots, ({}^1C_{-(\tau-1)})$$

gelegen zijn hebben we buiten beschouwing gelaten. Waar echter $(C_{-\tau})$ deze gebieden bevat, zijn ze vanzelf bij den opbouw in aanmerking genomen.

Onmiddellijke convergentiegebieden van punten deel uitmakende van een cyclische limietgroep — Zijn $x, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$ de punten van de groep.

Beschouwen we de iteratie van $\varphi_\mu(z)$ dan is ieder punt x_i regelmatig limietpunt m. a. w. het onmiddellijke convergentiegebied R_i van x_i bij iteratie van $\varphi_\mu(z) \equiv$ het onmiddellijke (onregelmatige) convergentiegebied van x_i bij iteratie van $\varphi(z)$; „onregelmatig" omdat de consequenten van een punt $z \prec R_i$ onregelmatig tot ieder punt van de groep naderen, „onmiddellijk" omdat ieder punt $z \prec R_i$ met x_i door een enkelvoudige geheel in R_i gelegen kromme verbonden kan worden zoodat de consequenten van ieder punt van de kromme onregelmatig tot ieder punt van de groep naderen. In ieder gebied R_i moet minstens één kritiek punt van dien tak van $\psi_\mu(z)$, inverse van $\varphi_\mu(z)$, gelegen zijn waarvoor $\psi_\mu(x_i) = x_i$.

We onderstellen dat R slechts één kritiek punt van den bedoelden tak bevat. R is dan enkelvoudig samenhangend en met ieder punt $z \prec R$ correspondeeren minstens twee antecedenten van de μ^{de} orde eveneens in R gelegen.

Op analoge wijze als dit voor een regelmatig limietpunt van $\varphi(z)$ gedaan is kunnen we de ontstaanswijze van R op het Riemannsch oppervlak van $\psi_\mu(z)$ bestudeeren. Vervolgens ziet men gemakkelijk in dat de gebieden $R_1, R_2, \ldots, R_{\mu-1}$ verkregen kunnen worden door R één-, twee-, $\ldots, \mu - 1$ maal te itereeren.

Hieruit volgt dat de gebieden R_i evenals R enkelvoudig samenhangend zijn en ieder slechts één kritiek punt van den te beschouwen tak van $\psi_\mu(z)$ bevat.

De verzameling van de consequenten van ieder punt z gelegen in een van de gebieden R_i ligt geheel in het totaalgebied

$$R + R_1 + R_2 + \ldots + R_{\mu-1}$$

(de gebieden R_i hebben geen gemeenschappelijke inwendige punten); met dien verstande: ligt z in R_i, dan bevat

$$R_{i+1}\ z_1,\ R_{i+2}\ z_2, \text{ enz.}$$

§ 15 — OPMERKINGEN OMTRENT HET TOTAAL AANTAL PUNTEN X WAARVOOR $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — ITERATIE IN DE OMGEVING VAN PUNTEN X WAARVOOR $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| = 1$

Bewering — Het aantal cyclische limietgroepen is eindig en ten hoogste gelijk aan $2(k-1)$.

Bewijs — De kritieke punten van $\psi_\mu(z)$, inverse van $\varphi_\mu(z)$, zijn de kritieke punten van $\psi(z)$ met hun consequenten van de eerste, tweede, ..., $\mu - 1^e$ orde.

Men heeft n.l.:

Is γ een kritiek punt van $\psi(z)$ dan heeft de vergelijking $\varphi(z) = \gamma$ twee samenvallende wortels.

Evenzoo: is γ' een kritiek punt van $\psi_\mu(z)$ dan heeft de vergelijking $\varphi_\mu(z) = \gamma'$ twee samenvallende wortels.

In deze laatste vergelijking heeft men slechts dàn twee gelijke wortels als dit bij een van de vergelijkingen

$$\varphi_{\mu-1}(x) = \gamma',$$
$$\varphi(z) = x \text{ het geval is.}$$

Hieruit volgt: ieder kritiek punt van $\psi_\mu(z)$ is òf kritiek punt van $\psi_{\mu-1}(z)$ òf consequent van de $\mu - 1^e$ orde van een kritiek punt van $\psi(z)$. Bovendien volgt uit het bovenstaande dat de consequent van de $\mu - 1^e$ orde van ieder kritiek punt van $\psi(z)$ kritiek punt van $\psi_\mu(z)$ is.

Passen we nu het voorgaande toe op $\psi_{\mu-1}(z)$, dan verkrijgt men: ieder kritiek punt van $\psi_{\mu-1}(z)$ is òf kritiek punt van $\psi_{\mu-2}(z$ òf consequent van de $\mu - 2^e$ orde van een kritiek punt van $\psi(z)$, enz.

Conclusie — De kritieke punten van $\psi_\mu(z)$ zijn de kritieke punten van $\psi(z)$ met hun consequenten van de eerste-, tweede-, ..., $\mu - 1^e$ orde.

Beschouwen we nu het totale (onregelmatige) convergentiegebied van een cyclische limietgroep, waaronder we verstaan de som van alle gebieden bevattende alle punten waarvan de consequenten onregelmatig (en uitsluitend) tot de punten van de groep naderen.

Dit totaalgebied bevat tenminste één kritiek punt van $\psi(z)$ immers in ieder onmiddellijk (onregelmatig) convergentiegebied van een punt van de groep ligt minstens één kritiek punt van $\psi_\mu(z)$ (μ stelt de orde van de groep voor).

Ieder kritiek punt van $\psi(z)$ is consequent van de eerste orde van een punt waar $\varphi'(z) = 0$.

Het totaalgebied bevat dus minstens één punt waar $\varphi'(z) = 0$. Hieruit volgt dat aan iedere cyclische limietgroep minstens één punt waar $\varphi'(z) = 0$ gekoppeld is. De consequenten van dat punt convergeeren onregelmatig tot ieder punt van de groep.

Nu is het aantal punten waar $\varphi'(z) = 0$ $2(k-1)$, alzoo is het aantal cyclische limietgroepen ten hoogste $2(k-1)$ en dientengevolge is het aantal punten x waarvoor

$$\varphi_n(x) = x, \; |\varphi'_n(x)| < 1, \; (n = 1, 2, \ldots.) \text{ eindig.}$$

Bij het verdere betoog maken we gebruik van een door Prof. Wolff bewezen bewering, welke we hieronder in extenso weergeven. (zie literatuurlijstje aan het eind van dit Hfdstuk).

Bewering — Is voor $|z| < 1$ $\varphi(z)$ holomorf en $|\varphi(z)| < 1$, en is bovendien $\varphi(z)$ niet lineair, dan is voor ieder punt z binnen den eenheidscirkel

òf $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = a$, waarbij a een zeker punt binnen den eenheidscirkel is

òf $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(z)| = 1$.

Bewijs — Bestaat er een punt a waarvoor $\varphi(a) = a$, dan geldt voor ieder punt z ($|z| < 1$) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = a$. Immers voor $a = 0$ volgt dit onmiddellijk uit $|\varphi(z)| < |z|$, terwijl de bewering voor $a \neq 0$ na lineaire transformatie direct wordt ingezien.

Is echter overal $\varphi(z) \neq z$, dan is ook

$$\varphi_n(z) \neq z \quad (n = 1, 2, \ldots.).$$

Stel $\varphi_k(a) = a$. a en $\varphi(a)$ zijn dan twee verschillende wortels van $\varphi_k(z) = z$.

Wegens $|\varphi_k(z)| < 1$ en volgens het bovenstaande is dan voor ieder punt z binnen den eenheidscirkel

$$\lim_{n\ \infty} \varphi_{kn}(z) = a \text{ èn } \lim_{n\ \infty} \varphi_{kn}(z) = \varphi(a).$$

Waar nu de functierij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... binnen $|z| = 1$ normaal is, is het onmogelijk dat eenzelfde deelrij twee limietfuncties heeft, m. a. w. voor ieder punt z ($|z| < 1$) zijn de punten

$$\varphi(z), \; \varphi_2(z), \; \ldots.$$

verschillend.

We stellen nu dat de rij $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi_2(\alpha) \ldots .$ het punt β, $|\beta| < 1$, tot een der verdichtingspunten heeft en bewijzen in het onderstaande dat een binnen den eenheidscirkel gelegen verdichtingspunt bij de onderstelling $\varphi(z) \neq z$ $(|z| < 1)$ onmogelijk kan optreden.

Er bestaat dan een oneindige rij (ν) zoodat de puntverzameling $\varphi_\nu(\alpha)$ het punt β tot eenig limietpunt heeft.

Aangezien de functies $\varphi_n(z)$ gelijkmatig begrensd zijn, heeft men bij gegeven $\varepsilon > 0$ in een cirkel γ met β tot middelpunt en straal $< \varepsilon$ voor ieder puntenpaar z en z' binnen γ gelegen:

$|\varphi_n(z) - \varphi_n(z')| < \varepsilon$ voor iedere waarde van n.

Zijn $\varphi_\nu(\alpha)$ en $\varphi_{\nu'}(\alpha)$ twee punten binnen γ en zij $\nu' > \nu$, dan is

$$|\varphi_{\nu'-\nu}\{\varphi_\nu(\alpha)\} - \varphi_\nu(\alpha)| = |\varphi_{\nu'}(\alpha) - \varphi_\nu(\alpha)| < 2\varepsilon.$$

Voorts is, daar $\varphi_\nu(\alpha)$ in γ gelegen is:

$$|\varphi_{\nu'-\nu}(\beta) - \varphi_{\nu'-\nu}\{\varphi_\nu(\alpha)\} < \varepsilon,$$

en

$$|\varphi_{\nu'}(\alpha) - \beta| < \varepsilon.$$

Dus is $|\varphi_{\nu'-\nu}(\beta) - \beta| < 4\varepsilon$.

M. a. w. β is een der verdichtingspunten van de verzameling $\varphi(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots .$, want $\varphi_n(\beta) \neq \beta$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ en ε is willekeurig.

Er bestaat dus een oneindig rij (μ) zoodat de puntverzameling $\varphi_\mu(\beta)$ het punt β tot eenig limietpunt heeft.

Aangezien de rij holomorfe functies $\varphi_n(z)$ in den eenheidscirkel gelijkmatig begrensd, dus normaal is, kan men uit de rij $\varphi_\mu(z)$ een oneindige deelrij $\varphi_\varrho(z)$ lichten zoodanig dat deze deelrij binnen den eenheidscirkel tot een holomorfe limietfunctie gelijkmatig convergeert.

Daar $\varphi_\varrho(\beta) \to \beta$ nadert $\varphi_\varrho\{\varphi(\beta)\} = \varphi\{\varphi_\varrho(\beta)\}$ tot $\varphi(\beta)$ en evenzoo nadert

$$\varphi_\varrho\{\varphi_k(\beta)\} = \varphi_k\{\varphi_\varrho(\beta)\} \text{ tot } \varphi_k(\beta) \quad (k = 1, 2, \ldots .).$$

Dus is $f(z) = z$ in de puntverzameling $\varphi_k(\beta)$ $(k = 1, 2, \ldots .)$, die zich in β verdicht, dientengevolge valt $f(z)$ overal met z samen, dus voor ieder punt z binnen den eenheidscirkel geldt

$$\varphi_\varrho(z) \to z.$$

Is $z' \neq z$ dan is ook $\varphi(z') \neq \varphi(z)$ aangezien in het tegengestelde geval $\varphi_\varrho(z') = \varphi_\varrho(z)$ hetgeen onmogelijk is daar

$$\varphi_\varrho(z') \to z' \quad \text{en} \quad \varphi_\varrho(z) \to z.$$

Voorts neemt $\varphi(z)$ iedere waarde binnen den eenheidscirkel aan. Zou n.l. overal binnen den eenheidscirkel

$$\varphi(z) \neq a \quad (|a| < 1)$$

dan is daar eveneens $\varphi_\varrho(z) \neq a$.

Wegens de gelijkmatige convergentie van $\varphi_\varrho(z)$ tot z en $\varphi'_\varrho(z)$ tot één binnen $|z| = 1$ heeft men dus als Γ een cirkel is, die geheel binnen $|z| = 1$ gelegen is, en a tot middelpunt heeft;

$$\int_\Gamma \frac{\varphi'_\varrho(z)\,dz}{\varphi_\varrho(z) - a} \to \int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Hieruit zou echter volgen dat $\varphi_\varrho(z) = a$ een wortel binnen Γ bezit, hetgeen in tegenspraak is met onze onderstelling.

$\varphi(z)$ en de inverse functie van $\varphi(z)$ beelden dus het cirkelgebied eenduidig op zichzelf af; $\varphi(z)$ moet dus lineair zijn.

Is $\varphi(z)$ niet lineair dan nadert $|\varphi_n(z)|$ voor ieder punt z binnen $|z| = 1$ tot één.

Iteratie in de omgeving van een punt x, waarvoor

$$\varphi_n(x) = x,\ \varphi'_n(x) = e^{\frac{p}{q}2\pi i}$$

(*p en q onderling ondeelbaar, geheel, en* $p < q$) — We gaan nu over tot de bestudeering van de iteratie in de omgeving van een punt x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi_n'(x) = e^{\frac{p}{q}2\pi i}$, om daarna een opmerking omtrent het totaal aantal dezer punten te maken als n alle mogelijke waarden mag aannemen.

Het is voldoende een punt x te beschouwen waarvoor

$$\varphi_n(x) = x,\ \varphi'_n(x) = 1,$$

immers is $\varphi_n(x) = x$, $\varphi'_n(x) = e^{-2\pi i}$ dan is

$$\varphi_{nq}(x), = x,\ \varphi'_{nq}(x) = 1.$$

Voorts stellen we eenvoudigheidshalve $n = 1$, terwijl we O in x geplaatst denken.

Zij dus in de omgeving van O

$$z_1 = \varphi(z) = z + a_\mu z^\mu + \ldots, \quad a_\mu \neq 0, \quad \mu \geqq 2.$$

Beschouwen we nu een blad van de rozet $r^n = a^n \cos n\theta$; waarbij de symmetrieas van dat blad een hoek α met de positieve reëele as maakt.

We zullen nu trachten waarden voor n, α en a zoodanig te vinden dat als $z = re^{i(\theta+\alpha)}$ dit blad beschrijft, z_1 binnen dit blad blijft en slechts op den rand ervan (in O) komt voor $z = 0$.

De rand van dit blad (Γ) is gedefinieerd door:

$$z^n = r^n e^{ni(\theta+\alpha)} = a^n e^{ni(\theta+\alpha)} \frac{e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}}{2}$$

of

$$z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2} = \frac{a^n}{2} e^{ni(2\theta+\alpha)}.$$

Is z' het toegevoegd complexe punt van z, dan is

$$z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} = \frac{a^n}{2} e^{-ni(2\theta+\alpha)}$$

waarbij

$$-\frac{\pi}{2n} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2n}.$$

Dus is de vergelijking van Γ [d. i. de omtrek van (Γ)]

$$z^n z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} z^n - \frac{a^n e^{+ni\alpha}}{2} z'^n = 0.$$

Zij a positief en oneindig klein en zij

$$\delta = z_1^n z'^n_1 - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} z_1^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2} z'^n_1$$

dan volgt uit

$$z_1 = z + a_\mu z^\mu + \ldots.$$

dus

$$z_1^n = z^n + n a_\mu z^{n+\mu-1} + \ldots.$$

en

$$z_1' = z' + a'_\mu z^\mu + \ldots.$$

dus

$$z_1'^n = z'^n + n a'_\mu z'^{n+\mu-1} + \ldots.$$

$$\delta = z^n z'^n + n a'_\mu z'^{n+\mu-1}\left[z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2}\right]$$

$$- \frac{a^n e^{+ni\alpha}}{2} z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} z^n$$

$$+ n a_\mu z^{n+\mu-1}\left[z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2}\right] + \ldots.$$

Of

$$\delta = n z^{n+\mu-1} a_\mu \left[z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2}\right]$$

$$+ n z'^{n+\mu-1} a'_\mu \left[z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2}\right] + \ldots.,$$

waarbij de niet geschreven termen machten van a hebben die grooter zijn dan $2n + \mu - 1$.

Het teeken van δ is dus voor ieder punt z op Γ gelijk aan het teeken van

$$\delta_1 = n z^{n+\mu-1}\, a_\mu \left[z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2}\right]$$

$$+ n z'^{n+\mu-1} a'_\mu \left[z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2}\right].$$

Voor $n = \mu - 1$ verkrijgt men:

$$\delta_1 = n z^{2n} a_\mu \left[z'^n - \frac{a^n e^{-n\alpha}}{2}\right]$$

$$+ n z'^{2n} a'_\mu \left[z^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2}\right],$$

of $$\delta_1 = n r^{n} e^{2ni(\theta+\alpha)}\, a_\mu \frac{a^n}{2} e^{-ni(2\theta+\alpha)}$$

$$+ n r^{2n} e^{-2ni(\theta+\alpha)}\, a'_\mu \frac{a^n}{2} e^{ni(2\theta+\alpha)}$$

$$= n r^{2n} e^{ni\alpha} a_\mu \frac{a^n}{2} + n r^{2n}\, a'_\mu \frac{a^n}{2} e^{ni\alpha}.$$

Is nu $a_\mu = \varrho e^{i\nu}$ dus $a'_\mu = \varrho e^{-i\nu}$
dan wordt

$$\delta_1 = nr^{2n}\varrho a^n \cos(n\alpha + \nu).$$

Geven we α een dusdanige waarde dat

$$\frac{\pi}{2} < n\alpha + \nu < \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

dan verkrijgt men:

Beschrijft z Γ dan is het teeken van δ steeds negatief, z_1 ligt dus steeds binnen Γ behalve voor $z = 0$ waar $z_1 = 0$ is. (z_1 ligt steeds binnen blad (Γ) van de rozet en niet in een ander blad omdat z_1 van z een oneindig kleine grootheid in de macht $\mu \geqq 2$ verschilt).

Ieder punt z binnen (Γ) ligt nu op den omtrek van een blad (Γ') van een rozet gedifinieerd door $r^n = a_1^n \cos n\theta$ $(a_1 < a)$ waarvan de symmetrieas met die van (Γ) samenvalt.

Zij $a > a_1 > a_2 > \ldots$ en (F), (Γ'), (Γ''), ... de correspondeerende bladen van de overeenkomstige rozetten, dan bezitten alle bladen de eigenschap dat de consequent van de eerste orde van een punt z op den omtrek van zoo'n blad gelegen binnen dat blad ligt, met uitzondering van $z = 0$ waarvoor $z_1 = 0$.

Passen we nu de door Prof. Wolff bewezen bewering toe, dan verkrijgen we, in verband met het feit dat voor ieder punt z binnen (Γ) gelegen geldt $\varphi(z) \neq z$, dat de consequenten van ieder punt z binnen (F) tot den rand van (F) moeten naderen, maar dan is $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 0$ aangezien de convergentie tot ieder ander randpunt uitgesloten is.

De consequenten van ieder punt z van Γ $(z \neq 0)$ naderen eveneens tot O.

Uit de ongelijkheid $\frac{\pi}{2} < n\alpha + \nu < \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ en $n = \mu - 1$ volgt dat de richting α willekeurig genomen kan worden in $\mu - 1 = n$ gelijke hoeken ieder groot $\frac{\pi}{n}$ en regelmatig om O geplaatst.

Met iederen aldus gedefinieerden hoek α correspondeert een a (voldoend klein) van een te definieeren rozet waarbinnen de consequenten van z regelmatig tot O naderen (men neme steeds de grootste a die voldoet).

Neemt α alle toegelaten waarden aan, dan zal door (Γ) een gebied Δ „opgeveegd" worden dat in de omgeving van O bestaat uit $n = \mu - 1$ gebieden die regelmatig om O geplaatst zijn en geen gemeenschappelijke inwendige —, noch grenspunten hebben behoudens het punt O dat grenspunt is van ieder gebied.

De raaklijnen aan Δ in O zijn de bissectrices van de hoeken, die de door de symmetrie-as van (Γ) beschreven hoeken scheiden.

Het punt O is limietpunt van de consequenten van ieder punt

$$z \prec \Delta.$$

Zooals men gemakkelijk inziet is de rij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... in ieder gebied δ, dat geheel binnen Δ gelegen is, normaal.

Aangezien deze rij tot nul nadert, bestaat er een oneindige rij indices (ν) zoodat $\varphi_\nu(z)$ in δ gelijkmatig tot nul nadert.

Is $\psi_0(z)$ de tak van $\psi(z)$ inverse van $\varphi(z)$, die in O nul is, dan heeft men in de omgeving van O

$$z = \psi_0(z) = z_1 - a_\mu z_1^\mu + \ldots,$$

en men verkrijgt na toepassing van het voorgaande een met Δ analoog gebied Δ' waarbij de symmetrie-as van de voor den opbouw van Δ' te definieeren bladen van rozetten de hoeken beschrijft waarvan de raaklijnen aan Δ in O de bissectrices zijn.

Het gebied Δ' komt eveneens in O met $n = \mu - 1$ toppen tesamen terwijl de raaklijnen aan Δ' in O de bissectrices zijn van de door de symmetrie-as van (Γ) (voor de verkrijging van Δ) beschreven hoeken.

De gebieden Δ en Δ' hebben in de omgeving van O 2n gemeenschappelijke gebieden.

De antecedenten, beantwoordende aan de tak $\psi_0(z)$ van $\psi(z)$ van ieder punt $z \prec \Delta'$ naderen tot O. De bedoelde takken van de functies $\psi(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ zijn in ieder gebied δ' $(\delta' \prec \Delta')$ normaal.

Er bestaat voorts een oneindige rij indices (ν') zoodat $\psi_{\nu'}(z)$ (uitsluitend betrekking hebbende op de takken, die in O nul zijn) in δ' gelijkmatig tot nul convergeert.

Bij de opmerking omtrent het totaal aantal dezer punten

$$x\,(\varphi_n(x) = x,\ \varphi'_n(x) = e^{\frac{p}{q}2\pi i})$$

zullen we voorts gebruik maken van de volgende

Bewering — De takken van de functies $\psi_n(z)$ ($\psi_n(z)$ inverse van $\varphi_n(z)$) $n = 1, 2, \ldots$ zijn normaal in ieder deel van het vlak dat geen kritieke punten van die takken bevat.

Bewijs — Zij D een gebied waarin de takken van de functies $\psi_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$) eenwaardig zijn.

In het complexe vlak bestaat tenminste één punt a waarvoor $\varphi(a) = a$ en dat geen uitzonderingspunt is in den zin van § 10 zoodat a ten minste een antecedent van de eerste orde a_{-1} en een antecedent van de tweede orde a_{-2} heeft die noch met a noch onderling samenvallen. (Zooals van zelf spreekt wordt $\varphi(z)$ niet lineair ondersteld).

Men heeft voor $n \geqq 2$ $\varphi_n(a_{-i}) = a$, waarbij a_{-i} een der punten a_{-2}, a_{-1} of a is.

Ligt a niet in D dan nemen de takken van $\psi_n(z)$ ($n \geqq 2$) de waarden a_{-i} in D niet aan, immers gold voor

$$\beta\ (\beta \prec D)\ \ \psi_k(\beta) = a_{-i},$$

dan zou ($k \geqq 2$) $\varphi_k(a_{-i}) = \beta = a$, hetgeen onmogelijk is.

De takken van de functies $\psi_n(z)$ zijn dan in D normaal.

Is $a \prec D$, dan bestaat er òf een dubbelpunt, niet uitzonderingspunt, a' ($a' = \varphi(a')$, $a' \neq a$) òf een cycle van de tweede orde (γ, γ_1) (γ en γ_1 geen uitzonderingspunten) en een antecedent γ_{-1} van γ die noch met γ noch met γ_1 samenvalt.

Ligt in het eerste geval a' niet in D, dan redeneert men als boven, terwijl ook in het tweede geval dezelfde bewijsvoering opgaat als de cycle (γ, γ_1) niet in D gelegen is, met dit verschil dat dan ook voor $n = 1$ de waarden γ, γ_1 en γ_{-1} door de functies $\psi_n(z)$ in D niet aangenomen worden. Bevat D alle dubbelpunten en alle cycles van de tweede orde, dan liggen in D òf minstens twee dubbelpunten (niet uitzonderingspunten) òf een dubbelpunt en een cycle van de tweede orde waarbij het dubbelpunt en de elementen van de cycle geen uitzonderingspunten zijn.

We bedekken nu D door een eindig aantal gebieden en wèl zoodanig dat ieder deelgebied slechts één van de bovengenoemde

punten bevat, terwijl het met minstens één van de andere deelgebieden een gemeenschappelijk gebied heeft.

In ieder deelgebied zijn de takken van de functies $\psi_n(z)$ dus normaal. Hieruit volgt (door analytische voortzetting) dat de functierij $\psi_n(z)$ in D normaal is.

Bewering — Ieder punt x, waarvoor geldt

$$\varphi_n(x) = x,\ \varphi_n'(x) = e^{\frac{p}{q}2\pi i},$$

behoort tot E' en is limietpunt van consequenten of consequent van ten minste een kritiek punt van dien tak van $\psi_n(z)$ waarvoor $\psi_n(x) = x$, moet dus, hetzij limietpunt van consequenten, hetzij consequent zijn van ten minste een punt waar $\varphi'(z) = 0$.

Bewijs — Zooals men gemakkelijk inziet is het voldoende de gestelde bewering te bewijzen voor een punt O waarvoor

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1.$$

Behoorde O niet tot E' dan zou de rij $\varphi_n(z)$ in een omgeving Ω van O normaal zijn.

Zij convergeert in deelgebieden van Ω tot nul, dus zou de rij in het geheele gebied Ω gelijkmatig tot nul convergeeren.

Men kreeg dus in O $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 0$

en ook

$\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(0) = 0$, in strijd met $\varphi_n'(0) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dus

$$O \prec E'.$$

Vervolgens heeft men:

Was O geen limietpunt van consequenten of geen consequent van een kritiek punt van $\psi(z)$, dan was de rij $\psi_n(z)$ in Ω normaal, dus zou $\lim_{n\to\infty} \psi_n'(0) = 0$ zijn (zelfde reden als boven waarom $\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(0) = 0$ zou zijn), terwijl $\psi_n'(0) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Iteratie in de omgeving van een punt x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi_n'(x) = e^{i\theta}$, θ *ond. onmeetbaar met* 2π — Bij het verdere betoog omtrent de iteratie in de omgeving van een punt x

$$(\varphi_n(x) = x,\ \varphi_n'(x) = e^{i\theta})$$

zullen we gebruik maken van eenige beweringen, welke we hieronder met bewijs laten volgen.

Bewering — Is P een gesloten verzameling en is geen enkel punt van P limietpunt van consequenten van een *niet* tot de verzameling E′ behoorend punt, dan naderen de antecedenten van de orde n (n = 1, 2, ...) van een punt van P regelmatig tot E′.

Bewijs — In het tegenovergestelde geval bestond er een oneindige rij geheele getallen

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots . < \lambda_n < \ldots .$$

en een oneindige deelverzameling

$${}_1\xi,\ {}_2\xi, \ldots ., {}_n\xi, \ldots .$$

van P zoodanig dat de afstand van de punten

$${}_1z,\ {}_2z, \ldots ., {}_nz, \ldots . \ (\varphi_{\lambda_n}\{{}_nz\} = {}_n\xi)$$

tot E′ grooter dan r (r > 0) was.

Onderstellen we dat het punt oneindig een punt van E′ is, dan zijn de punten ${}_nz$ in het eindige gelegen, hebben dus ten minste één limietpunt ${}_oz$ buiten E′.

Er bestaat dan een oneindige deelrij

${}_1'z,\ {}_2'z, \ldots ., {}_n'z, \ldots .$ van $({}_nz)$, die regelmatig tot ${}_oz$ convergeert.

Vervolgens is de rij $\varphi_{\lambda_n}(z)$ normaal in een cirkel C met middelpunt ${}_oz$ en straal r. Er is dus een oneindige deelrij $\varphi_{\lambda_{n'}}(z)$, die in C gelijkmatig convergeert tot de holomorfe functie $\Phi(z)$.

Zij $\Phi({}_oz) = {}_o\xi$, dan naderen de punten ${}_{n'}\xi = \varphi_{\lambda_{n'}}({}_{n'}z)$ regelmatig tot ${}_o\xi$, waarbij ${}_o\xi \prec$ P. ${}_o\xi$ behoort dus niet tot E′.

Nu is

$${}_o\xi = \lim_{n' \to \infty} \varphi_{\lambda_{n'}}({}_oz), \text{ d. w. z.}$$

${}_o\xi$ is limietpunt van de consequenten van het punt ${}_oz$, dat *niet* tot E′ behoort, hetgeen in strijd is met onze onderstelling.

Bewering — Verdeelt de verzameling van de limietpunten van de consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak *niet* in twee of meerdere gebieden dan kunnen de limietfuncties, waartoe oneindige deelrijen van $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., (in

gebieden, waarin deze rij normaal is) gelijkmatig convergeeren, slechts constanten zijn.

Bewijs — We geven het bewijs in drie gedeelten en wel als volgt:

sub *a* bestudeeren we de convergentie van deelrijen van de rij $\varphi_n(z)$ tot niet constante limietfuncties;

sub *b* maken we een opmerking omtrent de convergentie van de takken van de functies $\psi_n(z)$, als de rij $\varphi_n(z)$ niet constante limietfuncties heeft;

sub *c* geven we het eigenlijke bewijs.

a — Zij in een gebied D de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ normaal en convergeert de rij $\varphi_{a_1}(z)$, $\varphi_{a_2}(z)$, ... in D tot de niet constante functie $f(z)$.

Zij voorts het punt oneindig een punt van E', dan ligt het gebied D in het eindige en dan is de functie $f(z)$ in D holomorf.

Is $z_0 \prec D$ en $f(z_0) = \xi$, dan nemen alle functies $\varphi_{a_n}(z)$ vanaf zekeren rang in de buurt van z_0 de waarde ξ aan. (Zie het in § 9 gegeven bewijs voor de tweede bewering).

Men heeft dus: Beschrijft z het gebied D dan doorloopt $y = f(z)$ een in het eindige gelegen gebied D' dat geen punten van E' als inwendige punten bevat.

In D' zijn dus de functies $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ normaal, in het bijzonder is dientengevolge de oneindige deelrij $\varphi_{a_{n+1}} - a_n(y)$ normaal, zoodat men uit deze laatste deelrij een deelrij kan lichten die tot de in D' holomorfe functie $g(y)$ gelijkmatig convergeert.

Stel $\varphi_{a_{n+1}} - a_n(y) = g_{a_n}(y)$, dan heeft men

$$\lim_{n\to\infty} g_{\beta_n}(y) = g(y),$$

waarbij de rij indexrij β_n een deelrij van de rij a_n is.

Zij voorts $\varphi_{\beta_n}(z) = z_{\beta_n}$, dan is

$$g_{\beta_n}(z_{\beta_n}) = z_{\beta_{n+1}}.$$

Vanaf zekeren rang ligt z_{β_n} in D' en voor $n > n'$ (n' voldoend groot) is

$$|g_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - g(z_{\beta_n})| < \varepsilon.$$

Bovendien is

$$|g(z_{\beta_n}) - g(y)| < \varepsilon \text{ voor } n > n''$$

(n'' voldoend groot)

dus $$|g_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - g(y)| < 2\varepsilon \text{ voor } n > n' \text{ en } n > n''.$$

Hieruit volgt $g(y) = y$.

We verkrijgen dientengevolge:

Heeft de functierij $\varphi_n(z)$ in D, begrensd door de verzameling E', (in ieder deelgebied van een gebied begrensd door E' is de convergentiewijze van de rij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... dezelfde, dus we mogen onderstellen dat D door E' begrensd wordt) tenminste één niet constante limietfunctie, dan bestaat er een gebied D' (eveneens begrensd door E') dat consequentgebied van D is en waarbinnen de functierij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ een limietfunctie heeft die gelijk aan z is.

Maar dan liggen niet alle consequentgebieden D_n $(n = 1, 2, \ldots.)$ van D buiten elkaar, aangezien er een oneindige rij consequentgebieden D_n' van D' (dus van D) bestaat, die tot D' nadert.

Men kan dientengevolge een index h vinden (we kiezen de kleinste, die voldoet) zoodanig dat $D_h' \equiv D'$, m. a. w. $\varphi_h(z)$ voert D' in zichzelf over.

Zij $\varphi_h(z) = T(z)$ en is $\tau(z)$ de inverse functie van $T(z)$, dan heeft ieder punt $z \prec D'$ slechts één antecedent van de eerste orde $\tau(z)$ die in D' gelegen is.

Convergeeren de functies $T_{\lambda_n}(z)$ in D' n.l. gelijkmatig tot z dan is het mogelijk de indices λ_n zóó te kiezen dat de functies $T_{\lambda_n - 1}(z)$, die in D' normaal zijn, gelijkmatig tot een functie h(z) convergeeren.

Bezat het punt $z \prec D'$ in D' twee verschillende antecedenten van de eerste orde z_{-1} en z'_{-1}, dan was

$$T_{\lambda_n}(z_{-1}) = T_{\lambda_n - 1}[T(z_{-1})] = T_{\lambda_n - 1}(z).$$

en $$T_{\lambda_n}(z'_{-1}) = T_{\lambda_n - 1}(z).$$

Hieruit zou volgen na limietovergang $(n \to \infty)$

$$z_{-1} = h(z) \text{ en } z'_{-1} = h(z)$$

hetgeen onmogelijk is aangezien h(z) in D' eenwaardig is.

b — Zooals men onmiddellijk inziet heeft de rij takken van

$$\psi_n(z) \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

in D' niet constante limietfuncties, immers ieder punt $\xi \prec D'$ is een van de limietpunten van zijn eigen antecedenten.

Inderdaad: er bestaat een rij functies $\varphi_{\alpha_n}(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, die in D' gelijkmatig nadert tot de limietfunctie z (die dus in ξ de waarde ξ aanneemt). De functies $\varphi_{\alpha_n}(z)$ nemen dientengevolge allen in een cirkel met middelpunt ξ en straal willekeurig klein de waarde ξ aan, mits α_n voldoend groot is. M. a. w. ξ is een van de limietpunten van zijn eigen antecedenten.

Een deelrij van de rij takken van $\psi_n(z)$ heeft dus in D' de limietfunctie z.

c — Beschouwen we nu een punt ξ' dat in een niet met D' samenvallend antecedentgebied van D' gelegen is. We verbinden voorts ξ (een punt van D') met ξ' door een polygoon zoodanig dat geen enkel punt van deze polygoon kritiek punt, consequent van een kritiek punt of limietpunt van consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$ is. (Dit is altijd mogelijk zoolang de verzameling van de limietpunten van consequenten en van de consequenten het complexe vlak niet in twee of meerdere gebieden verdeelt).

De polygoon $\xi\xi'$ ligt dus in een gebied waarin de takken van de functies $\psi_n(z)$ normaal zijn.

Zooals we gezien hebben naderen in een omgeving van ξ zekere oneindige deelrijen van de takken van $\psi_n(z)$ tot niet constante limietfuncties.

In de omgeving van ξ' is dit niet het geval, immers aangezien ξ' geen limietpunt kan zijn van consequenten van niet tot E' behoorende punten, naderen de antecedenten van ξ' regelmatig tot E' (zie voorlaatste bewering); dus tot een verzameling zonder inwendige punten.

De limietfuncties van de takken van $\psi_n(z)$ kunnen in de buurt van ξ' dus slechts constanten zijn (de punten van E').

De functies $\varphi_n^*(z)$ kunnen dus in de gebieden waar deze rij normaal is slechts dàn niet constante limietfuncties hebben als de verzameling van de limietpunten van consequenten en van de consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak in twee of meerdere gebieden verdeelt.

Bewering — Behoort het punt x $(\varphi_n(x) = x,\ \varphi_n'(x) = e^{i\theta},\ \theta$

ond. onmeetbaar met 2π) niet tot de verzameling E', is dus de functierij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... in een voldoend kleine omgeving Ω van x normaal, dan kunnen de limietfuncties, waartoe oneindige deelrijen van de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in Ω gelijkmatig convergeeren, geen constanten zijn.

Bewijs — Het is voldoende de gestelde bewering te bewijzen voor het punt O, waarvoor geldt $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = e^{i\theta}$ θ ond. onmeetbaar met 2π.

In een geheel in Ω gelegen cirkel met O tot middelpunt is

$$\varphi(z) = z^{i\theta} + \ldots.,$$

dus $$\varphi_n(z) = ze^{ni\theta} + \ldots.$$

Hierbij is $\varphi_n(0) = 0$, $|\varphi'_n(0)| = 1$ $n = 1, 2, \ldots.$

De functies $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... zijn in Ω holomorf; zou een oneindige deelrij $\varphi_{n'}(z)$ in Ω gelijkmatig tot een constante naderen, dan moet wegens het bovenstaande deze constante nul zijn.

Maar dan zou $\lim_{n' \to \infty} \varphi'_{n'}(z) = 0$, hetgeen onvereenigbaar is met

$$|\varphi_n'(0)| = 1 \ (n = 1, 2, \ldots.).$$

We zijn nu in staat het volgende te bewijzen:

Bewering — Verdeelt de verzameling van consequenten en van limietpunten van consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak *niet* in twee of meerdere gebieden, dan behoort ieder punt x waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi'_n(x) = e^{i\theta}$ (θ ond. onmeetbaar met 2π) tot E' en is consequent of limietpunt van consequenten van ten minste één kritiek punt van dien tak van $\psi_n(z)$, waarvoor $\psi_n(x) = x$, moet dus hetzij consequent hetzij limietpunt van consequenten zijn van ten minste één punt z waarvoor

$$\varphi'(z) = 0.$$

Bewijs — 1° Zij $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = e^{i\theta}$, θ ond. onmeetbaar met 2π, dan behoort O tot de verzameling E', hetgeen onmiddellijk volgt uit de laatste en de voorlaatste bewezen bewering.

2° Zij O nòch consequent nòch limietpunt van consequenten van een punt z waar $\varphi'(z) = 0$, dan zijn in een voldoend kleinen cirkel (C) met middelpunt O de functies $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ normaal.

Beschouwen we nu den tak van $\psi(z)$, den tak van $\psi_2(z)$, enz.

waarvoor $\psi(0) = 0, \psi_2(0) = 0, \ldots$. enz. (aangezien in O $\varphi'(0) \neq 0$, heeft iedere functie $\psi_n(z)$ een tak waarvoor $\psi_n(0) = 0$).

Deze takken zijn in (C) holomorf en normaal en kunnen in (C) slechts niet constante limietfuncties hebben. (Het bewijs dat we voor de rij $\varphi(z), \varphi_2(z), \ldots$. gegeven hebben is ook hier van toepassing).

Voorts kan op dezelfde wijze, als dit voor de functies

$$\varphi_n(z) \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

gedaan is, het volgende bewezen worden:

Zij D een gebied waarbinnen de functies $\psi_n(z)$ normaal zijn, dan is het onmogelijk dat oneindige deelrijen van takken van $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ tot niet constante functies gelijkmatig convergeeren, tenzij de verzameling van consequenten en van limietpunten van consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak in twee of meerdere gebieden verdeelt. Men heeft n.l.:

Zij het punt oneindig een kritiek punt van $\psi(z)$ (door een homografische substitutie is dat altijd te bereiken) dan zijn in D de takken van $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ holomorf.

Zij voorts λ een punt waarvoor $\psi(\lambda) = \lambda$, $\varphi'(\lambda) \neq 0$, dan beschouwen we slechts dien tak van $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ waarvoor $\psi_n(\lambda) = \lambda$ $(n = 1, 2, \ldots.)$.

Deze rij takken is in D normaal en we verkrijgen ook hier op dezelfde wijze als daareven een gebied D' dat evenals D in het eindige gelegen moet zijn en waarbinnen geen kritieke punten noch consequenten van kritieke punten gelegen zijn.

Immers was $\xi \prec D'$ een kritiek punt van bijv. $\psi(z)$, dan zou in D in strijd met onze onderstelling een punt z moeten liggen dat consequent van ξ, dus consequent van een kritiek punt was.

In D' zijn de takken van $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ dus eveneens normaal.

Hieruit volgt naar analogie van het bewijs voor de functies $\varphi_n(z)$ dat er ook in dit geval een index h moet bestaan (de kleinste, die voldoet), zoodat de bedoelde tak van $\psi_h(z)$ het gebied D' in zichzelf overvoert. Maar dan zou de functie $\varphi_h(z)$ het gebied D' eveneens invariant laten en dus zou de rij

$$\varphi_{nh}(z) \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

in D' niet constante limietfuncties moeten hebben, hetgeen bij de gemaakte onderstelling onmogelijk is.

De limietfuncties van $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ moeten dientengevolge bij de gemaakte onderstelling in de gebieden waar deze rij normaal is, constanten zijn.

Passen we het bovenstaande toe op ons geval, dan volgt hieruit dat O hetzij consequent, hetzij limietpunt van consequenten is van tenminste één kritiek punt van den tak van $\psi(z)$, die in O nul is.

Conclusie — Verdeelt de verzameling van consequenten of van limietpunten van consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak *niet* in twee of meerdere gebieden, dan is ieder punt x, waarvoor $\varphi_n^{\,i}(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ limietpunt van consequenten of consequent van een punt waarvoor $\varphi'(z) = 0$.

Aangezien x tot de cycle $x, x_1, \ldots., x_{n-1}$ behoort, kan het aantal cycles $\varphi_n(x_i) = x_i$, $|\varphi_n'(x_i)| \leqq 1$ hoogstens $2(k-1)$ zijn.

Inderdaad: Naderen de consequenten van a $(\varphi'(a) = 0)$ tot de punten x_i $(\varphi_n(x_i) = x_i,\ |\varphi_n'(x_i)| \leqq 1)$ dan kunnen deze consequenten geen enkel ander punt y $(y \neq x_i)$ tot limietpunt hebben.

Men heeft n.l.: $\lim_{n\to\infty} a_n = (x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots., n-1)$.

Er bestaat dus een oneindige deelverzameling

$$a_p,\ a_{p+q},\ a_{p+q+r},\ \ldots.$$

die uitsluitend tot $x_0 = x$ convergeert.

$a_{p+1},\ a_{p+q+1},\ a_{p+q+r+1},\ \ldots.$ nadert dus uitsluitend tot

$$x_1\ (x_1 = \varphi(x)),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

en de verzameling

$a_{p+n},\ a_{p+q+n},\ a_{p+q+r+n},\ \ldots.$ nadert uitsluitend tot x.

De verzameling (a_n) heeft dus slechts de limietpunten

$$x,\ x_1,\ \ldots.,\ x_{n-1}.$$

Aangezien het aantal punten a ($\varphi'(a) = 0$) $2(k-1)$ is, is het aantal cycles $\varphi_n(x_i) = x_i$, $|\varphi_n'(x_i)| \leqq 1$ hoogstens $2(k-1)$.

Ieder punt x waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi'_n(x) = e^{i\theta}$ (θ o. onmeetbaar met 2π) behoort dus òf tot E' en is dan limietpunt van consequenten of consequent van een kritiek punt van $\psi(z)$, òf behoort niet tot E'. In het laatste geval zijn de takken van de functies $\psi_n(z)$ in de buurt van x normaal, terwijl de verzameling van de consequenten en limietpunten van consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ het complexe vlak dan in twee of meerdere gebieden moet verdeelen.

We zullen nu het bewijs geven dat ook in het algemeene geval het aantal punten x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi'_n(x)| \leqq 1$, steeds eindig is.

Bewijzen we daartoe eerst de volgende.

Bewering — Zij gegeven n functies ${}_{(i)}\varphi(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), holomorf in een omgeving Ω van t_o en liggen de punten

$${}_{(i)}\varphi(t_o) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

op een gesloten enkelvoudige kromme Γ, dan bestaat er een punt $t_o + \Delta t \prec \Omega$ (Δt oneindig klein) zoodanig dat ten minste de helft van het aantal punten ${}_{(i)}\varphi(t_o + \Delta t)$ binnen (Γ) gelegen is.

(Onder het binnengebied van Γ moet verstaan worden het enkelvoudige gebied, dat door Γ begrensd wordt en dat het punt oneindig niet bevat).

Bewijs — We onderstellen geen der n functies constant. Men heeft nu in een kleinen cirkel met t_o tot middelpunt en geheel binnen Ω gelegen:

$$\begin{aligned}
{}_{(1)}\varphi(t) - {}_{(1)}\varphi(t_o) &= k_1(t - t_o)^{p_1} + \ldots . \\
{}_{(2)}\varphi(t) - {}_{(2)}\varphi(t_o) &= k_2(t - t_o)^{p_2} + \ldots . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_{(n)}\varphi(t) - {}_{(n)}\varphi(t_o) &= k_n(t - t_o)^{p_n} + \ldots .
\end{aligned}$$

$k_i \neq 0$. De straal van den cirkel kiezen we zóó klein dat de nièt geschreven termen van de tweede leden van de vergelijkingen t. o. v. de wèl geschreven termen verwaarloosd mogen worden.

We kunnen nu p_i als volgt schrijven:

$p_i = 2^{n_i}A_i$, waarbij A_i oneven en $n_i \geqq 0$ is.

Vereenigen we verder de functies, waarvan de bijbehoorende machten n_i van 2 gelijk zijn, in één groep.

Een van de op deze wijze ontstane groepen correspondeert met de hoogste macht van 2 die optreedt; zij deze macht q.

Vervolgens kiezen we Δt (Δt oneindig klein) willekeurig, doch zoodanig dat geen van de punten ${}_{(i)}\varphi(t_o + \Delta t)$ tangentiaal met Γ gelegen is, m. a. w. voor geen enkele waarde van i gaat de raaklijn aan Γ in ${}_{(i)}\varphi(t_0)$ door ${}_{(i)}\varphi(t_o + \Delta t)$, hetgeen altijd mogelijk is aangezien n eindig is. En daar Δt oneindig klein ondersteld is, liggen de punten ${}_{(i)}\varphi(t_o + \Delta t)$ òf binnen òf buiten (Γ).

Wordt nu aan de gestelde voorwaarde door het willekeurig gekozen punt $t_o + \Delta t$ niet voldaan, dan vermenigvuldig ik Δt met $e^{\varphi i}$, waarbij

$$\varphi = \pi\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots\ldots + \frac{a_q}{2_q}\right),$$

terwijl de a's *nul* of *een* zijn. Ik verkrijg dus het punt

$$t_o + \Delta t.e^{\varphi i}.$$

Beschouwen we nu de functies ${}_{(i')}\varphi(t)$ waarvan de correspondeerende macht van 2 q is.

Voor deze functies wordt het argument van

$${}_{(i')}\varphi(t_o + \Delta t) - {}_{(i')}\varphi(t_o)$$

vermeerderd met $2^q A_{i'}\varphi$ dus met nul of π (mod 2π) al naar gelang a_q nul of een is.

We kiezen nu a_q zóó dat minstens de helft van de punten

$${}_{(i')}\varphi(t_o + \Delta t\,.\,e^{\varphi i})$$

binnen (Γ) liggen.

Beschouwen we vervolgens de functies ${}_{(i'')}\varphi(t)$, waarvan de correspondeerende macht van 2 q — 1 is, indien zulke functies voorkomen.

Het argument van

$${}_{(i'')}\varphi(t + \Delta t) - {}_{(i'')}(t_o)$$

vermeerdert nu met

$$2^{q-1}A_{i''}\varphi = a_{q-1}\pi + \frac{a_q A_{i''}\pi}{2} \text{ (mod } 2\pi).$$

Geeft men aan a_{q-1} eerst de waarde nul daarna de waarde een, dan worden de punten, die voor de waarde nul binnen (Γ) liggen buiten (Γ) gebracht en omgekeerd.

We kiezen a_{q-1} zóó dat minstens de helft van de punten

$$_{(i'')}\varphi\,(t_o + \Delta t\,.\,e^{\varphi i})$$

binnen (Γ) liggen.

Door de waarden a_q, a_{q-1}, ..., enz. op geschikte wijze te kiezen, kan men er dus voor zorgen dat minstens de helft van de punten $_{(i)}\varphi\,(t + \Delta t\,.\,e^{\varphi i})$ binnen (Γ) liggen.

(Mochten enkele punten $_{(i)}\varphi\,(t_o + \Delta t\,.\,e^{\varphi i})$ tangentiaal met Γ komen te liggen, dan kan men door het argument van Δt oneindig weinig te veranderen er zorg voor dragen dat dit niet meer kan voorkomen).

Geven we nu het eigenlijke bewijs voor de bewering dat het aantal punten x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ steeds eindig is.

Bewijs — Zij x een punt waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi_n'(x) = e^{i\theta}$ (θ ond. meetb. of onmeetb. met 2π, doch $\neq 0$).

We onderstellen dat alle punten x, waarvoor het bovenstaande geldt, in het eindige gelegen zijn.

(Door een homografie, die een punt van E in het punt oneindig transformeert, kan men dat steeds bereiken).

Zij t een willekeurige complexe veranderlijke, zoodanig dat

$$\varphi\,(z,\ t_o) \equiv \varphi\,(z)$$

en $\varphi\,(z, t)$ een rationale functie van z en t is en t. o. v. z van den graad k.

De wortel van de vergelijking $\Phi\,(z, t) = \varphi_n\,(z, t) - z = 0$, die de waarde x aanneemt voor $t = t_o$, is holomorf in de buurt van t_o omdat

$$\left(\frac{\delta\Phi}{\delta z}\right)_{t = t_o} = s\,(t_o) - 1 \neq 0.\ [s\,(t_o) = e^{\vartheta i}].$$

Met dezen wortel $x\,(t)$ correspondeert een cyclische groep van de orde n

$$x\,(t),\ x_1\,(t) = \varphi\,\{x\,(t),\ t\}\ \ldots.,\ x_{n-1}\,(t) = \varphi_{n-1}\,\{x\,(t),\ t\}$$

waarbij $\frac{\delta}{\delta z}\,\varphi_n(z, t)\,|_{z = x_1(t)} = s(t)$ in de buurt van t_o een holomorfe functie van t is.

Voorts is $|s(t_o)| = 1$.

Veronderstellen we nu dat we bij iteratie van $\varphi(z)$ λ cycles verkrijgen waarvoor

$$\frac{d}{dz}\,\varphi_i(z)\,|_{z = x} = e^{i\theta_\tau} \quad (\tau = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Hierbij stelt i de orde van iedere cycle voor, die tot de beschouwde λ cycles behoort en x ieder punt van iedere cycle.

Door de invoering van de parameter t ontstaan dan λ holomorfe functies $s_\tau(t)$ in de buurt van t_o.

[Door de parameter t in $\varphi(z)$ op geschikte wijze in te voeren, kan men voorkomen dat zekere functies $s_\tau(t)$ constanten zijn.

Is

$$\varphi(z) = \frac{a_o + a_1 z + \ldots + a_k z^k}{b_o + b_1 z + \ldots + b_k z^k}$$

dan voldoet bijvoorbeeld

$$\varphi(z, t) = \frac{a_o t + a_1 t z + \ldots + a_{k-1} t z^{k-1} + \{1 + (a_k - 1)\,t\}\, z^k}{1 + (b_o - 1)\,t + b_1 t z + \ldots + b_k t z^k}.$$

{is $a_k = 0$ of $b_0 = 0$, dan verander ik a_p of b_q ($a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$) op de voor a_k en b_o aangegeven wijze}.

Dan is: $\varphi(z, 1) = \varphi(z)$

en $\varphi(z, 0) = z^k$ (ev. $\frac{1}{z^k}$ als $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$).

Duidelijk is dat bij een dergelijke invoering van t de functies $s_\tau(t)$ nooit constant kunnen zijn, aangezien bij de iteratie van $z\mu$ of $\frac{1}{z\mu}$ ($\mu = 2, 3, \ldots, k$) de bovenbedoelde cycles waarvoor $|s| = 1$ niet voorkomen].

We hebben dus λ holomorfe niet constante functies $s_\tau(t)$, holomorf in de buurt van t_o, terwijl de punten $s_\tau(t_o)$ op den eenheidscirkel (0 middelpunt) van het vlak $w = s(t)$ gelegen zijn.

Het is nu mogelijk volgens de vorige bewering t in een voldoend kleine omgeving van t_o zoodanig te varieeren dat minstens $\frac{\lambda}{2}$ punten $s_\tau(t_o + \Delta t)$ binnen den eenheidscirkel gelegen zijn.

De substitutie $[z \mid \varphi(z, t_o + \Delta t)]$ heeft dan minstens $\frac{\lambda}{2}$ cyclische limietgroepen.

Aangezien het aantal cyclische limietgroepen $\leqq 2(k-1)$ is moet dus λ begrensd zijn, m. a. w. het aantal punten x waarvoor

$$\varphi_n(x) = x, \ \varphi_n'(x) = e^{i\theta}, \ (n = 1, 2, \ldots., \theta \neq 0)$$

is eindig.

Waar nu het aantal punten x waarvoor

$$\varphi_n(x) = x, \ |\varphi_n'(x)| < 1$$

of

$$\varphi_n(x) = x, \ \varphi_n'(x) = 1 \ (n = 1, 2, \ldots.)$$

eindig is, volgt hieruit algemeen dat het aantal punten x waarvoor $\varphi_n(x) = x, \ |\varphi_n'(x)| \leqq 1$ eindig moet zijn.

§ 16 — OPMERKINGEN OMTRENT DE LIMIETFUNCTIES, WAARTOE DEELRIJEN VAN DE RIJ $\varphi_n(z)$ $(N = 1, 2, \ldots.)$ IN GEBIEDEN WAAR DEZE RIJ NORMAAL IS, GELIJKMATIG CONVERGEEREN, WANNEER DEZE LIMIETFUNCTIES CONSTANTEN ZIJN

Bewering — Ieder punt a, dat limietpunt is van consequenten van een gebied van het vlak, behoort tot de verzameling van de limietpunten van de consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$.

Bewijs — Zij D het gebied waarvan consequenten tot a naderen. a is dus de limiet waartoe een oneindige rij $\varphi_{\lambda_p}(z)$ in D gelijkmatig convergeert. Is a noch consequent noch limietpunt van consequenten van een (of meerdere) kritiek(e) punt(en) van $\psi(z)$, dan zijn de functies $\psi_n(z)$ in een cirkel γ met a tot middelpunt normaal. Deze cirkel bevat de consequentgebieden D_{λ_p} van D vanaf zekeren rang.

Zij $\xi \prec D$, dan liggen de punten ξ_{λ_p} voor iedere $p > p_o$ in het cirkelgebied (γ).

Zij ook $\xi' \prec D$ en $\xi' \neq \xi$.

Beschrijft z een enkelvoudige kromme, die de punten ξ en ξ' verbindt en geheel binnen D gelegen is, dan doorloopt $\varphi_{\lambda_p}(z)$ een enkelvoudige kromme geheel binnen (γ) gelegen waardoor de punten ξ_{λ_p} en ξ'_{λ_p} verbonden worden en omgekeerd: beschrijft z $\xi_{\lambda_p}\xi'_{\lambda_p}$ dan doorloopt een bepaalde tak van $\psi_{\lambda_p}(z)$ den weg $\xi\xi'$.

De takken van de functies $\psi_\lambda(z)$ $(p = 1, 2, \ldots.)$ als boven gedefinieerd zijn in (γ) normaal. Er bestaat dus een deelrij $\psi_{\mu_p}(z)$ van $\psi_{\lambda_p}(z)$ die in (γ) gelijkmatig convergeert tot de constante c.

De functies $\psi_{\mu_p}(z)$ nemen de waarde ξ aan in punten ξ_{μ_p} die regelmatig tot a naderen.

Men heeft dus $\xi = c$, doch evenzoo $\xi' = c$, dus moet a òf consequent of limietpunt van consequenten van een (of meer) kritiek(e) punt(en) van $\psi(z)$ zijn.

Is a consequent van een kritiek punt zonder limietpunt van consequenten van een (of meer) kritiek(e) punt(en) te zijn, dan behooren alle antecedenten van a vanaf zekere orde h nòch tot de verzameling van consequenten nòch tot de verzameling van limietpunten van consequenten van kritieke punten.

De gebieden $D_{\lambda_p - h}$ liggen voor $p > p_o$ binnen cirkels met middelpunten de punten a_{-h} en willekeurig kleine stralen.

Een van de punten a_{-h} is limietpunt van consequentgebieden van D en moet dus tot de verzameling van consequenten of tot de verzameling van limietpuntèn van consequenten van kritieke punten behooren.

a kan dus geen consequent van een kritiek punt zijn zonder dat de verzameling van consequenten van kritieke punten zich daar verdicht, h. t. b. w.

Bewering — Is de verzameling bestaande uit de limietpunten van consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ eindig, dan hebben de functies $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, in de gebieden waar de rij $\varphi_n(z)$ normaal is, geen andere limieten dan constanten x (eindig in aantal) waarvoor geldt $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$.

(n kan hierbij ieder natuurlijk getal zijn). De punten x waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $\varphi_n'(x) = e^{i\theta}$ (θ o. onmeetbaar met 2π), die eventueel voorkomen behooren dan tot de verzameling E'.

Bewijs — Is de verzameling van de limietpunten van de consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ eindig, dan geldt voor

ieder limietpunt a: $\varphi_n(a) = a$, waarbij n ieder natuurlijk getal kan zijn.

Zij n.l. ξ een kritiek punt van $\psi(z)$ en a een limietpunt van consequenten van ξ, dan is er een oneindige indexrij λ_p zoodat

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p} = a$$

Voorts is dan

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p+1} = \varphi(a),$$

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p+2} = \varphi_2(a), \text{ enz.}$$

De verzameling a, $\varphi(a)$, $\varphi_2(a)$, ... behoort tot de verzameling van de limietpunten van de consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ en is dientengevolge eindig. Er bestaat dus een index q en een index i zoodat $\varphi_q(a_i) = a_i$.

Men heeft dientengevolge

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p + i} = a_i$$

en

$$\lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p + i + q} = a_i.$$

Duid ik nu den tak van $\psi_i(z)$, waarvoor $\psi_i(a_i) = a$, aan met

$$\overline{\psi}_i(z)$$

dan is

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\psi}_i(\xi_{\lambda_p+i+q}) = \lim_{p\to\infty} \xi_{\lambda_p+q} = a$$

dus

$$\varphi_q(a) = a.$$

We zullen nu bewijzen dat het bij de gemaakte onderstelling omtrent het aantal limietpunten onmogelijk is, dat de consequenten van een gebied tot een punt $x\,(\varphi_q(x) = x)$ naderen waarvoor

$$|\varphi_q'(x)| > 1.$$

Hiertoe bewijzen we het volgende:

Hebben de consequenten van een punt z, dat geen antecedent van α is, tot limietpunt het punt α, waarvoor

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \; |\varphi'(\alpha)| > 1,$$

dan bezitten die consequenten oneindig veel limietpunten.

De verzameling van de limietpunten verdicht zich in α.

Bewijs — Alle consequenten van z zijn verschillend.

(Was dit n.l. niet het geval dan zou z antecedent van een punt y zijn waarvoor $\varphi_n(y) = y$, maar dan moest wegens de convergentie van consequenten van z tot α $y \equiv \dot{\alpha}$ en zou z antecedent van α zijn in strijd met onze onderstelling.

Aangezien $\varphi(z)$ in de buurt van α holomorf is, bestaat er een cirkel C met α tot middelpunt en straal r zoodanig dat voor ieder punt $z \prec (C)$ geldt $|z_1 - \alpha| < k|z - \alpha|$, k eindig en > 1.

Voorts onderstellen we r zoo klein dat er buiten het cirkelgebied (C) een limietpunt β van de consequenten van z existeert. Deze onderstelling is gewettigd, immers naderden de consequenten van z uitsluitend tot α, dan zou $|\varphi'(\alpha)| \leqq 1$ moeten zijn.

Zij $0 < \varrho < \frac{r}{k}$ en z_λ een consequent van z zoodanig dat

$$|z_\lambda - \alpha| < \varrho.$$

Aangezien $|\beta - \alpha| > \varrho$ zijn er consequenten van z_λ die buiten het cirkel gebied (ϱ) liggen.

Zij $|z_{\lambda+\mu} - \alpha| > \varrho$ en $|z_{\lambda+\mu-1} - \alpha| \leqq \varrho$ dan is

$$|z_{\lambda+\mu} - \alpha| < k\varrho.$$

Het punt $z_{\lambda+\mu}$ ligt dus in den ring $(\varrho, k\varrho)$.

Zij $z_{\lambda'}$, na $z_{\lambda+\mu}$ de eerste consequent van z waarvoor

$$|z_{\lambda'} - \alpha| < \varrho.$$

(Daar α limietpunt is van consequenten van z moet er steeds zoo'n consequent zijn).

Er bestaat dus een consequent $z_{\lambda'+\mu'}$ van $z_{\lambda'}$ die evenals $z_{\lambda+\mu}$ in den ring $(\varrho, k\varrho)$ gelegen is,

Op deze wijze verkrijgen we in den ring $(\varrho, k\varrho)$ een oneindige verzameling niet samenvallende punten

$$z_{\lambda+\mu},\ z_{\lambda'+\mu'},\ z_{\lambda''+\mu''},\ \ldots,$$

die hetzij op den omtrek van den ring hetzij erbinnen ten minste één verdichtingspunt hebben.

Door aan ϱ achtereenvolgens de waarden

$$\frac{r}{k'}\ \frac{r}{k^2}\ \cdots\ \frac{r}{k^n}\ \cdots$$

te geven, verkrijgt men een reeks zich tot α samentrekkende ringen terwijl in elken ring een limietpunt van consequenten van z gelegen is. α is dus limietpunt van de limietpunten van consequenten van een punt z.

Is dus de verzameling van limietpunten van de consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$ eindig, dan hebben de functies

$$\varphi_n(z)\ (n = 1, 2, \ldots.)$$

in de gebieden waar deze rij normaal is, geen andere limieten dan constanten x, waarvoor geldt $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$ (n kan hierbij ieder natuurlijk getal zijn).

§ 17 — HET ONMIDDELLIJKE CONVERGENTIEGEBIED VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT VOOR HET GEVAL, DAT DIT GEBIED MEERVOUDIG SAMENHANGEND IS

Bewering — Is het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt meervoudig samenhangend dan is de orde van samenhang oneindig.

Bewijs — Zij O regelmatig limietpunt.

De noodige en voldoende voorwaarde, dat het onmiddellijke convergentiegebied R van O meervoudig samenhangend is, is dat de gebieden $(\overline{C}_{-i})$, die we in § 14 ingevoerd hebben, vanaf zekeren rang meervoudig samenhangend zijn.

We denken ons nu dat in het gebied $({}^1C_{-\tau})$ twee kritieke punten P en Q van $\psi(z)$ gelegen zijn en wel zoodanig dat in P de bladen $1, 2, \ldots. p, p+1$ van λ en in Q de bladen $p, p+1, \ldots., p+q$ vertakt zijn $(p+q \leqq k)$.

Zooals vanzelf spreekt bevat $({}^1C_{-\tau})$ den cirkel (C) om O waarvan we bij de bewijsvoering in § 14 uitgingen, terwijl voorts opgemerkt dient te worden dat P kritiek punt van dien tak van $\psi(z)$ is waarvoor $\psi(0) = 0$.

Het totaalgebied bevattende alle punten van λ, liggende in de bladen $1, 2, \ldots., p+q$ en waarvan de projecties binnen $({}^1C_{-\tau})$ gelegen zijn, is tweevoudig samenhangend en wordt begrensd door twee gesloten krommen Γ en Γ'.

Hierbij ligt Γ geheel in de bladen 1, 2, ..., p van λ, terwijl Γ' in de bladen p + 1, ..., p + q gelegen is.

Iedere weg, die op λ een punt van Γ met een punt van Γ' verbindt, bevat dus noodzakelijk punten die noch op Γ noch op Γ' gelegen zijn.

Het (de) gebied(en) bevattende de punten van λ, gelegen in de bladen p + q + 1, ..., k (als p + q < k is) waarvan de projecties in $({}^1C_{-\tau})$ liggen, kunnen we voor het verdere betoog buiten beschouwing laten.

Beschrijft z de kromme ${}^1C_{-\tau}$ en gaat men uit van een determinatie van ψ (z) beantwoordende aan een van de eerste p bladen van λ, dan worden de p determinaties, die overeenkomen met deze eerste p bladen, op ${}^1C_{-\tau}$ gepermuteerd. Evenzoo worden de q determinaties van ψ (z), correspondeerende met de bladen p + 1, p + 2, ..., p + q van λ, op ${}^1C_{-\tau}$ gepermuteerd, terwijl het onmogelijk is zoolang z op ${}^1C_{-\tau}$ blijft van een van de p determinaties van ψ (z) op een van de q determinaties te komen.

Gaat men echter uit van een punt van ${}^1C_{-\tau}$ met een van de p determinaties van ψ (z) dan kan men met iedere voorafgekozen determinatie, die tot een van de q determinaties van ψ (z) behoort, in dat punt terugkomen door het punt z een op geschikte wijze gekozen weg binnen $({}^1C_{-\tau})$ te laten beschrijven.

Onderstellen we nu (en dit is algemeen) dat ieder blad van λ met het volgende verbonden is door één enkele vertakkingslijn, dan volgt hieruit, mede in verband met het feit dat deze vertakkingslijnen tusschen de eindpunten in zekere mate willekeurig gekozen kunnen worden en aangezien de twee extreme punten (P en Q) van de vertakkingslijn, die het p^e met het p + 1^e blad verbindt, binnen $(\overline{C}_{-\tau})$ gelegen zijn, dat we deze vertakkingslijn geheel binnen $(\overline{C}_{-\tau})$ gelegen mogen denken. Hierbij is $(\overline{C}_{-\tau})$ het tweevoudig samenhangend gebied, dat alle punten van de bladen 1, 2, ..., p, p + 1, ..., p + q van λ bevat, waarvan de projecties binnen $({}^1C_{-\tau})$ gelegen zijn.

Het gebied $({}^1C_{-(\tau+1)})$ d. i. het antecedentgebied van de eerste orde van $({}^1C_{-\tau})$ waarin laatstgenoemd gebied gelegen is, wordt begrensd door evenveel krommen als het gebied $(\overline{C}_{-\tau})$ grenskrommen heeft.

In ons geval wordt $({}^1C_{-(\tau+1)})$ begrensd door twee verschillende

krommen die geen van beiden de in $({}^1C_{-\tau})$ gelegen vertakkingslijn, die het p^e met het $p + 1^e$ blad van λ verbindt, snijden. Zooals direct is in te zien hebben deze grenspunten geen gemeenschappelijke punten.

Duiden we het samenstel van deze grenskrommen met ${}^1C_{-(\tau+1)}$ aan.

Het totaalgebied bevattende de punten van λ, gelegen in de bladen $1, 2, \ldots, p + q$ en waarvan de projecties binnen $({}^1C_{-(\tau+1)})$ gelegen zijn, is een meervoudig samenhangend gebied, dat begrensd wordt door minstens 2^2 krommen en juist 2^2 als $({}^1C_{-(\tau+1)})$ geen verdere vertakkingspunten bevat (vertakkingspunten die bladen van λ verbinden niet behoorende tot de $p + q$ eerste bladen van λ kunnen hierbij buiten beschouwing blijven).

Men heeft n.l.: beschrijft z een van de grenskrommen van

$$({}^1C_{-(\tau+1)})$$

en maakt de gekozen tak van $\psi(z)$ deel uit van een van de p determinaties, dan verandert de gekozen determinatie slechts met een van die p determinaties, echter nooit met een van de q determinaties.

$\overline{(C_{-(\tau+1)})}$ heeft dus een eerste grenskromme waarvan de projectie samenvalt met de beschouwde grenskromme van $({}^1C_{-(\tau+1)})$ en die gelegen is in de eerste p bladen van λ, en een tweede grenskromme gelegen in de q volgende bladen waarvan de projectie eveneens samenvalt met de beschouwde grenskromme van

$$({}^1C_{-(\tau+1)}).$$

$({}^1C_{-(\tau+1)}$ heeft minstens twee grenskrommen, $\overline{(C_{-(\tau+1)})}$ dus minstens 2^2.

Hieruit volgt dat ook $({}^1C_{-(\tau+2)})$ minstens 2^2 grenskrommen dus $\overline{(C_{-(\tau+2)})}$ minstens 2^3 grenskrommen heeft, enz.

Het onmiddellijke convergentiegebied R van O heeft dientengevolge de orde van samenhang oneindig.

§ 18 — HET TOTALE CONVERGENTIEGEBIED VAN EEN REGELMATIG LIMIETPUNT VOOR HET GEVAL, DAT HET ONMIDDELLIJKE CONVERGENTIEGEBIED ENKELVOUDIG SAMENHANGEND IS EN SLECHTS EEN DEEL IS VAN HET TOTALE CONVERGENTIEGEBIED

Het onmiddellijke convergentiegebied R van een regelmatig limietpunt is alleen dàn tevens totaal convergentiegebied indien de gebieden $(\overline{C}_{-\tau})$ (zie § 14 en 17) zich vanaf zekeren rang over alle bladen van λ uitstrekken, m. a. w. gaat men uit van een willekeurig punt $z \prec ({}^{1}C_{-\tau})$ met een willekeurige determinatie van $\psi(z)$ dan bestaan er binnen $({}^{1}C_{-\tau})$ gesloten door z gaande krommen zoodanig dat men in z met iedere vooraf gekozen determinatie van $\psi(z)$ terug kan komen door z de daartoe ge-eigende kromme te laten beschrijven. Het onmiddellijke convergentiegebied bevat dan in het algemeen $k-1$ kritieke punten van $\psi(z)$. (Zijn de kritieke punten van $\psi(z)$ enkelvoudig, dan moet R $k-1$ kritieke punten bevatten; zijn er echter meervoudige kritieke punten dan moet het aantal kritieke punten dat binnen R gelegen is tellen voor $k-1$ enkelvoudige kritieke punten).

Duidelijk is dat voor $k=2$ het onmiddellijk convergentiegebied van ieder regelmatig limietpunt samenvalt met het totale convergentiegebied.

Zijn er echter voor $k>2$ meer dan twee regelmatige limietpunten dan kan er slechts één regelmatig limietpunt zijn, waarvoor R samenvalt met het totale convergentiegebied, omdat het aantal kritieke punten $2(k-1)$ is.

Opbouw van het totale convergentiegebied D van een regelmatig limietpunt indien het onmiddellijke convergentiegebied R enkelvoudig samenhangend is

Duiden we de antecedent van de eerste orde van z, die het regelmatige limietpunt tot dubbelpunt heeft, aan met $\mathring{z}_{-1}$.

Het totaalgebied bevattende de punten λ waarvan de projecties binnen R gelegen zijn bestaat uit:

1° een enkelvoudig samenhangend gebied, dat we met S zullen aanduiden. Dit gebied moet aangezien in R minstens één kritiek punt van $\psi(z)$ gelegen is, zich uitstrekken over ten minste

twee bladen van λ en is enkelvoudig samenhangend wegens de in de §§ 14 en 17 uiteengezette redenen. Beschrijft z S dan doorloopt $\mathring{z}_{-1}$ het enkelvoudige eenbladige gebied R.

2° Waar $D \not\equiv R$ ondersteld wordt, is er een of zijn er eenige antecedenten van de eerste orde van z ($z \prec R$) die niet in R gelegen zijn, m. a. w. het gebied S strekt zich niet uit over alle k bladen van λ. Er is dus één of er zijn meerdere bladen van λ waarin gebieden liggen waarvan de punten zich binnen R projecteeren.

Beschrijft z dit (deze) gebied(en), dat (die) dus niet met S vertakt kunnen zijn, dan doorloopt z_{-1} een of meer enkelvoudige gebieden R_{-1}, die samenhangend en éénbladig zijn en noch met R noch onder elkaar (zoo er meerdere zijn) gemeenschappelijke inwendige punten hebben.

Anders gezegd: Doorloopt z R dan beschrijven $\mathring{z}_{-1}$ en de antecedenten van de eerste orde die zich in R met $\mathring{z}_{-1}$ permuteeren eveneens het gebied R, de overige antecedenten van de eerste orde beschrijven de gebieden R_{-1}.

Zijn er bijv. a antecedenten die zich in R met $\mathring{z}_{-1}$ niet permuteeren en liggen in R geen vertakkingspunten van de met deze a antecedenten correspondeerende bladen, dan bestaan de gebieden R_{-1} uit a eenbladige, enkelvoudig samenhangende gebieden, die noch met R noch onder elkaar inwendige punten gemeen hebben.

Beschrijft z ieder tot R_{-1} behoorend gebied dan doorloopen de antecedenten van de eerste orde een zeker aantal samenhangende eenbladige gebieden R_{-2}.

Duidelijk is dat de gebieden R_{-2} noch onder elkaar noch met een gebied van R_{-1} noch met R gemeenschappelijke inwendige punten kunnen hebben.

Doorloopt z het gebied R dan beschrijven de antecedenten van de tweede orde van z R, $\mathfrak{R}_{-1}$ en $\mathfrak{R}_{-2}$. (Alle gebieden R_{-1} tezamen heb ik ter verkorting $\mathfrak{R}_{-1}$ genoemd).

We kunnen de voor R_{-1} gedane redeneering op R_{-2} toepassen, enz. en verkrijgen dan:

$D = R + \mathfrak{R}_{-1} + \mathfrak{R}_{-2} + \ldots$., dus een oneindig aantal gebieden, twee aan twee geen gemeenschappelijke inwendige punten bezittend, en ieder voor zich bestaande uit een samenhangend eenbladig gebied.

De grens van D, d. i. de verzameling E' is hierbij lineair continu en verdeelt het complexe vlak in een oneindig aantal gebieden.

Opmerking I — Is het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt meervoudig samenhangend, dan geldt voor ieder ander regelmatig limietpunt $D \not\equiv R$.

Bewijs — We hebben in § 17 gezien dat het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt alleen dàn meervoudig samenhangend kan zijn als er een gebied $(\overline{C}_{-\tau})$ bestaat zoodanig dat ten minste één van de vertakkingslijnen, die bladen van $(C_{-\tau})$ verbindt, geheel binnen $(\overline{C}_{-\tau})$ gelegen is.

Existeert er nu een tweede regelmatig limietpunt dan kunnen we ook voor dit punt het onmiddellijke convergentiegebied op de in § 14 aangegeven wijze opbouwen.

Duiden we de hierbij optredende krommen aan met

$$\Gamma,\ {}^1\Gamma_{-1},\ {}^1\Gamma_{-2},\ \text{enz.}$$

Aangezien geen van de gebieden (Γ) met $({}^1C_{-\tau})$ gemeenschappelijke inwendige punten heeft, is het onmogelijk dat alle determinaties van $\psi(z)$ op een van de krommen Γ een cycle vormen, m. a. w. het totale convergentiegebied van dit tweede regelmatige limietpunt valt niet met het onmiddellijke samen en bestaat dus uit oneindig veel gebieden.

Opmerking II — Voorts volgt onmiddellijk uit het bovenstaande: geldt voor een regelmatig limietpunt $D \equiv R$, dan is het onmiddellijke convergentiegebied van ieder ander regelmatig limietpunt enkelvoudig samenhangend.

GERAADPLEEGDE LITERATUUR VOOR HOOFDSTUK III

1. J. Wolff. Über die Iteration derjenigen in einem Gebiete regulären Functionen, deren Werte dem Gebiete angehören.
Mathematische Zeitschrift. Bnd 26.
2. Gaston Julia. Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles.
Comptes Rendus. t 168, p. 147.
3. Gaston Julia. Sur des problèmes concernant l'itération des fractions rationnelles.
Comptes Rendus t 166, p. 153.
Voorts de aan den voet van Hoofdstuk II vermelde „mémoires" van Julia en Fatou.

HOOFDSTUK IV

ITERATIE VAN EENIGE KWADRATISCHE RATIONALE FUNCTIES.

§ 19 — EERSTE VOORBEELD, WAARBIJ TWEE REGELMATIGE LIMIETPUNTEN OPTREDEN

Inleiding — Bij een rationale functie van de k^e graad is het aantal regelmatige limietpunten ten hoogste k.

Immers heeft de vergelijking $\varphi(z) = z$ k + 1 enkelvoudige wortels, en dit geval behoeven we alleen te beschouwen, want treden er meervoudige wortels op, dan spreekt het bovenstaande vanzelf, dan is minstens een dezer wortels een punt van E zooals we in § 8 gezien hebben.

Bij iteratie van kwadratische rationale functies kunnen er dus ten hoogste twee regelmatige limietpunten optreden.

We zullen nu in dit Hoofdstuk voor het geval k = 2 achtereenvolgens vier voorbeelden behandelen; daarbij komen in het eerste voorbeeld twee, in het tweede één, in het derde geen regelmatige limietpunten voor, terwijl ten slotte in § 21 een voorbeeld geconstrueerd wordt, waarbij de correspondeerende verzameling $E' \equiv$ complexe vlak.

Behandeling — In de literatuur vindt men meestal de functie $\varphi(z)$ a priori gegeven; wij zullen eenigszins gewijzigd te werk gaan en wel als volgt:

Men heeft zooals § 8 aangeeft

$$a \quad -\ \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$b \quad -\ P(z) = R(z) + zQ(z)$$

$$c \quad -\ \frac{Q(z)}{R(z)} = \sum_{1}^{k+1} \frac{1}{z - x_i} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)}$$

$$d - \sum_{1}^{k+1} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = -1$$

$$e - \varphi'(x_i) = \frac{R'(x_i)}{Q(x_i)} + 1.$$

Uit bovenstaand stel vergelijkingen volgt, dat het mogelijk is de onbekende functie $\varphi(z)$ te bepalen als gegeven zijn
1° de $k+1$ punten x_i,
2° de waarde van $\varphi'(z)$ in k van deze punten.

Voorbeeld — De drie wortels van $\varphi(z) = z$ zijn

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$$

Voorts stel ik:

$$\frac{Q(x_1)}{R'(x_1)} = -1 + i, \quad \frac{Q(x_2)}{R'(x_2)} = -1 - i, \text{ dan is}$$

$$\varphi'(x_1) = 1 + \frac{1}{-1+i} = \tfrac{1}{2}(1-i)$$

en

$$\varphi'(x_2) = 1 + \frac{1}{-1-i} = \tfrac{1}{2}(1+i).$$

Dus $|\varphi'(x_1)| < 1$ en $|\varphi'(x_2)| < 1$, x_1 en x_2 zijn dientengevolge de regelmatige limietpunten.

Uit $\sum_{1}^{3} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = -1$ volgt $\frac{Q(x_3)}{R'(x_3)} = +1$, dus $\varphi'(x_3) = 2$.

We hebben voorts

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \sum_{1}^{3} \frac{1}{z - x_i} \frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} \text{ dus}$$

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = -\left\{\frac{1-i}{z-1} + \frac{1+i}{z+1} - \frac{1}{z}\right\}$$

of

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{-z^2 + 2iz - 1}{z^3 - z}$$

Verder is $P(z) = R(z) + zQ(z) = 2iz^2 - 2z$

zoodat

$$\varphi(z) = \frac{2iz^2 - 2z}{-z^2 + 2iz - 1}.$$

De kritieke punten van $\psi(z)$ (inverse van $\varphi(z)$) zijn de consequenten van de eerste orde van de punten z waar $\varphi'(z) = 0$.

$\varphi'(z) = 0$ geeft:

$$(-z^2 + 2iz^2 - 1)(4iz - 2) - (2iz^2 - 2z)(-2z + 2i) = 0.$$

Zijn ξ_1 en ξ_2 de wortels van de laatste vergelijking, dan is

$$\xi_1 = -\tfrac{1}{3}i + \tfrac{1}{3}\sqrt{2},$$
$$\xi_2 = -\tfrac{1}{3}i - \tfrac{1}{3}\sqrt{2}$$

en de kritieke punten van $\psi(z)$ zijn

$$\lambda_1 = \varphi(\xi_1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\lambda_2 = \varphi(\xi_2) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Voorts weten we (§ 15) dat ieder punt x waarvoor

$$\varphi_n(x) = x, \; |\varphi_n'(x)| \leqq 1$$

limietpunt is van consequenten van een punt waar $\varphi'(z) = 0$, mits de verzameling van de consequenten en limietpunten van consequenten van kritieke punten van $\psi(z)$ het vlak *niet* in twee of meerdere gebieden verdeelt.

Aangezien er bij dit voorbeeld twee regelmatige limietpunten optreden en het aantal kritieke punten van $\psi(z)$ eveneens twee bedraagt is het uitgesloten dat er behalve x_1 en x_2 verdere punten x ($\varphi_n(x) = x, \; |\varphi'_n(x)| < 1$) of punten y

$$(\varphi_n(y) = y, \; |\varphi'_n(y)| = 1)$$

voorkomen.

De verzameling van de limietpunten van de consequenten van λ_1 en λ_2 bestaat uit x_1 en x_2 (§ 16); hieruit volgt dat iedere oneindige deelrij van $\varphi_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$), in de gebieden waar deze rij normaal is, slechts gelijkmatig tot $x_1 = 1$ of tot $x_2 = -1$ kan convergeeren.

Alle consequenten van een punt van de imaginaire as liggen op deze as; de rij $\varphi_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$) is dus in ieder punt van de as niet normaal, m. a. w. ieder punt van de imaginaire as behoort tot de verzameling E'.

Waar echter ook alle antecedenten van een punt van de imaginaire as op deze as liggen moet E' ≡ imaginaire as.

(In E' is de verzameling van de antecedenten van ieder punt

van E' overal dicht; E' kan dientengevolge geen punten buiten de imaginaire as bevatten).

Het rechter halfvlak is dan onmiddellijk ≡ totaal convergentie gebied van $x_1 = 1$. Het linker halfvlak speelt dezelfde rol voor

$$x_1 = -1.$$

Men heeft n.l.; in een voldoend kleinen cirkel C met middelpunt $x_1 = 1$ naderen de consequenten van ieder punt $z \prec (C)$ regelmatig tot $x_1 = 1$. Waar nu de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ voor ieder punt z (R.D. van $z > 0$) normaal is (E' ≡ imag. as), moeten de consequenten van ieder punt z van het rechter halfvlak regelmatig tot $x_1 = 1$ convergeeren.

Het onmiddellijke convergentiegebied van een regelmatig limietpunt valt alleen dan samen met het totale convergentiegebied indien in dit eerstgenoemde gebied k — 1 kritieke punten van $\psi(z)$ gelegen zijn (§ 18).

Deze voorwaarde is voor het geval $k = 2$ steeds vervuld, m. a. w. het rechter halfvlak ≡ totaal convergentiegebied van $x_1 = +1$.

Dezelfde bewijsvoering van daareven geldt voor het linker-halfvlak t. o. v. $x_2 = -1$.

Opmerking — Dit voorbeeld is toegankelijk voor een eenvoudigere behandeling. Men heeft n.l.:

$$\varphi(z) = \frac{2iz^2 - 2z}{-z^2 + 2iz - 1} = -2i + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{z - i(1 + \sqrt{2})} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{z - i(1 - \sqrt{2})}.$$

Hieruit volgt:

De consequent van de eerste orde van het rechter halfvlak = rechter halfvlak en de consequent van de eerste orde van het linker halfvlak = linker halfvlak.

Bovendien is $\varphi(1) = 1$ en $\varphi(-1) = -1$, dus voor het rechter-halfvlak is 1 de iteratielimiet en voor het linker halfvlak is dit —1.

§ 20 — TWEEDE VOORBEELD, WAARBIJ ÉÉN REGELMATIG LIMIETPUNT OPTREEDT

We onderstellen dat de drie wortels van $\varphi(z) = z$ zijn

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \text{ en } x_3 = -1.$$

Vervolgens stel ik

$$\frac{Q(x_1)}{R'(x_1)} = -1, \frac{Q(x_2)}{R'(x_2)} = i \text{ dan is } \frac{Q(x_3)}{R'(x_3)} = -i.$$

Het punt $x_1 = 0$ is het eenige regelmatige limietpunt aangezien $\varphi'(x_1) = 0$, terwijl $\varphi'(x_2) = 1 - i$ en

$$\varphi'(x_3) = 1 + i, \text{ dus } |\varphi'(x_2)| > 1 \text{ en } |\varphi'(x_3)| > 1.$$

We krijgen nu

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = -\left\{\frac{1}{z} - \frac{i}{z-1} + \frac{i}{z+1}\right\} = \frac{-z^2 + 2iz + 1}{z^3 - z}.$$

Voorts is

$$P(z) = R(z) + z\,Q(z) = 2iz^2, \text{ zoodat } \varphi(z) = \frac{-2iz^2}{(z-i)^2}.$$

De kritieke punten van $\psi(z)$ zijn O en ∞, immers de punten waar $\varphi'(z) = 0$ zijn O en i en de consequenten van de eerste orde van deze punten zijn O en ∞.

Voorts naderen de consequenten van ∞ regelmatig tot O, men heeft n.l.

$\varphi(\infty) = -2i$ en de consequenten van ieder punt van de negatieve imaginaire as naderen op deze as regelmatig tot O.

Immers zij $z = -ai$ (a reëel en > 0) dan is

$$\varphi(-ai) = -2i\frac{a^2}{(a+1)^2} \text{ terwijl } \frac{2a^2}{(a+1)^2} < a.$$

O is het eenige regelmatige limietpunt tevens kritiek punt van $\psi(z)$, bovendien naderen de consequenten van het andere kritieke punt regelmatig tot O; hieruit volgt dat er onmogelijk nog cyclische limietgroepen of punten x waarvoor

$$\varphi_n(x) = x, \; |\varphi'_n(x)| = 1$$

kunnen voorkomen.

Het onmiddellijke convergentiegebied van O valt met het totale samen en heeft de orde van samenhang oneindig. Het is n.l. duidelijk dat de consequenten van alle punten binnen de strook, die ieder punt van de negatieve imaginaire as en het punt O als inwendig punt bevat en de breedte ε (oneindig klein, doch > 0)

heeft, regelmatig tot O naderen. Immers de verzameling E' is perfect, de complementverzameling is dus een open verzameling. Aangezien nu de functies $\varphi_n(z)$ normaal zijn in ieder punt van de negatieve imaginaire as + O, zijn deze functies normaal in de bovengenoemde strook. Deze strook, die we met A zullen aanduiden bevat de beide kritieke punten en behoort tot het onmiddellijke convergentiegebied van O. In verband met meegedeelde in § 17 moet het onmiddellijke convergentiegebied de orde van samenhang oneindig hebben.

Het gebied A is enkelvoudig samenhangend en bevat de kritieke punten van $\psi(z)$ en de consequenten van deze punten.

Zijn $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de consequentgebieden van A.

Aangezien deze gebieden tot O naderen is er een index i zoodanig dat de gebieden $A_i, A_{i+1}, \ldots$ in A gelegen zijn.

Stel $\varphi_i(z) = T(z)$. De inverse functies van $T(z)$, $T_2(z), \ldots$ zijn holomorf in het gebied B complementgebied van A en vormen daar een suite normale met constante limietfuncties (zie § 15), zoodat de antecedentgebieden van oneindig groote orde van B oneindig kleine dimensies hebben. De medegedeelde beschouwingen van § 12 1e voorbeeld zijn dus hier van toepassing, E' is dientengevolge perfect overal discontinu.

§ 21 — DERDE VOORBEELD, WAARBIJ EEN CYCLISCHE LIMIETGROEP VAN DE TWEEDE ORDE OPTREEDT

We stellen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ en $x_3 = -1$.

Voorts $\dfrac{Q(x_1)}{R'(x_1)} = -\frac{1}{3}$, $\dfrac{Q(x_2)}{R'(x_2)} = -\frac{1}{3}$ dus $\dfrac{Q(x_3)}{R'(x_3)} = -\frac{1}{3}$

Dan is $\varphi'(x_1) = \varphi'(x_2) = \varphi'(x_3) = -2$.

Vervolgens is

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = -\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}\right\} = -\frac{3z^2-1}{3z(z^2-1)}.$$

Hieruit volgt

$$P(z) = -2z$$

dus $\varphi(z) = \dfrac{2z}{-1+3z^2}$.

In de punten $\xi_1 = \frac{1}{3}i\sqrt{3}$ en $\xi_2 = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$ is $\varphi'(z) = 0$.

Nu is $\varphi(\xi_1) = \xi_2$, $\varphi(\xi_2) = \xi_1$, de kritieke punten van $\psi(z)$ zijn dus ξ_1 en ξ_2.

Bovendien vormen ξ_1 en ξ_2 een cyclische limietgroep van de tweede orde aangezien $\varphi_2'(\xi_1) = \varphi_2'(\xi_2) = 0$.

De beide kritieke punten zijn dus aan deze cyclische limietgroep gekoppeld, m. a. w. er kunnen geen verdere cyclische limietgroepen noch punten x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| = 1$ optreden.

Voorts merken we op: Iedere deelrij van de rij

$$\varphi_n(z) \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

nadert in de gebieden waar deze rij normaal is òf gelijkmatig tot $\xi_1 = \frac{1}{3}i\sqrt{3}$ òf tot $\xi_2 = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$.

Waar nu de consequenten van ieder punt z van de reëele as op deze as gelegen zijn en aangezien hetzelfde ook geldt voor de antecedenten van ieder punt z op de reëele as, moet $E' \equiv$ reëele as.

In een voldoend kleinen cirkel met middelpunt ξ_1 nadert de rij

$z, \varphi_2(z), \varphi_4(z), \ldots.$ gelijkmatig tot $\xi_1 = \frac{1}{3}i\sqrt{3}$

en de rij

$z, \varphi(z), \varphi_3(z), \ldots.$ gelijkmatig tot $\xi_2 = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$.

Aangezien de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in het bovenhalfvlak (I. D. van $z > 0$) normaal is, heeft het bovenstaande plaats voor ieder punt z in het bovenhalfvlak gelegen.

In het halfvlak I. D. van $z < 0$ nadert de rij

$z, \varphi_2(z), \varphi_4(z), \ldots.$ gelijkmatig tot $\xi_2 = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$

en de rij

$z, \varphi(z), \varphi_3(z), \ldots.$ gelijkmatig tot $\xi_1 = \frac{1}{3}i\sqrt{3}$.

De consequent van de eerste orde van ieder punt z van het halfvlak I. D. van $z > 0$ ligt in het halfvlak

I. D. van $z < 0$ en omgekeerd.

§ 22 — VIERDE VOORBEELD, WAARBIJ $E' \equiv$ COMPLEXE VLAK

De vraag komt naar voren: is het mogelijk een kwadratische rationale functie $\varphi(z)$ te vinden, waarbij de correspondeerende verzameilng $E' \equiv$ complexe vlak?

Is $E' \equiv$ complexe vlak, dan is de rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ nergens normaal, het aantal limietpunten van de consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ moet dan eindig zijn (zie § 16 tweede bewering) en vervolgens mogen er geen punten x, waarvoor $\varphi_n(x) = x$, $|\varphi_n'(x)| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ voorkomen.

We trachten daarom de functie $\varphi(z)$ zóó op te bouwen dat een consequent van ieder kritiek punt samenvalt met een punt van E.

De rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ is dan nergens normaal.

Voorbeeld — Ik stel $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ en voorts

$$\frac{Q(x_i)}{R'(x_i)} = A_i.$$

Dan is $\Sigma A_i = -1$, terwijl

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{z+1} = \frac{-z^2 + (A_2 - A_3)z - A_1}{z(z^2-1)}.$$

Stel $A_2 = A_3$, dan is

$$P(z) = R(z) + z\,Q(z) = -z(A_1 + 1)$$

zoodat

$$\varphi(z) = \frac{z(A_1+1)}{z^2 + A_1}.$$

In de punten $z = \pm\sqrt{A_1}$ is $\varphi'(z) = 0$ en ik probeer nu A_1 zoo te bepalen dat de consequent van de eerste orde van het punt $+\sqrt{A_1}$ (d. i. een kritiek punt van $\psi(z)$) samenvalt met die antecedent van de eerste orde van $x_2 = 1$, welke van $x_2 = 1$ verschilt.

De antecedenten van de eerste orde van $x_2 = 1$ zijn de punten 1 en A_1 en de consequent van de eerste orde van $+\sqrt{A_1}$ is

$$\frac{+\sqrt{A_1}(A_1+1)}{2A_1}$$

(met $+\sqrt{A_1}$ wordt bedoeld de positieve wortel van A_1).

De voorwaarde waaraan A_1 moet voldoen wordt dus

$$\frac{+\sqrt{A_1}(A_1+1)}{2A_1} = A_1 \text{ of } (A_1+1)^2 = 4A_1^3.$$

Hieraan voldoet $A_1 = 1$, maar dan is wegens

$$\Sigma A_i = 1,\ A_2 = A_3 = -1$$

en zou $\varphi'(x_2) = \varphi'(x_3) = 0$, dus x_2 zou evenals x_3 een regelmatig limietpunt zijn, hetgeen we juist moeten voorkomen.

De andere wortels van $(A_1 + 1)^2 = 4A_1^3$ zijn $-\frac{3}{8} \pm \frac{i}{8}\sqrt{7}$ en ik stel voor ons voorbeeld

$$A_1 = -\frac{3}{8} + \frac{i}{8}\sqrt{7},\ \text{dan is}\ A_2 = A_3 = -\frac{5}{16} - \frac{i}{16}\sqrt{7}$$

en inderdaad geldt nu

$$|\varphi'(x_1)| > 1,\ |\varphi'(x_2)| > 1 \text{ en } |\varphi'(x_3)| > 1.$$

We zullen nu aantoonen dat de consequent van de tweede orde van $-\sqrt{A_1}$ (d. i. het andere punt waarvoor $\varphi'(z) = 0$) met $x_3 = -1$ samenvalt.

De consequent van de eerste orde van $-\sqrt{A_1}$ is

$$\frac{-\sqrt{A_1}(A_1 + 1)}{2A_1}$$

dus gelijk aan $-A_1$, terwijl de antecedenten van $x_3 = -1$ zijn

$$-1 \text{ en } -A_1.$$

Men heeft dus:

De kritieke punten van $\psi(z)$ (n.l. de punten $+A_1$ en $-A_1$) zijn dus antecedenten van de eerste orde van punten, die tot E behooren (de punten $x_2 = 1$ en $x_3 = -1$).

De verzameling van de limietpunten van de consequenten van de kritieke punten van $\psi(z)$ is eindig (bestaat n.l. uit de punten $x_2 = 1$ en $x_3 = -1$).

De rij $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ is dus nergens normaal, m. a. w. $E' \equiv$ complexe vlak.

De functie $\varphi(z)$ wordt nu:

$$\varphi(z) = \frac{z(A_1 + 1)}{z^2 + A_1} = \frac{z\left(\frac{5}{8} + i\frac{1}{8}\sqrt{7}\right)}{z^2 - \frac{3}{8} + i\frac{1}{8}\sqrt{7}}$$

Uitzonderingspunten in den zin van § 10 kunnen er bij dit voorbeeld niet optreden en men heeft:

de consequentgebieden van een willekeurige kleine omgeving van een willekeurig punt van het complexe vlak overdekken het geheele complexe vlak,

de verzameling van de antecedenten van een willekeurig punt van het vlak zijn in het geheele complexe vlak overal dicht.

1.2360.

STELLINGEN

I

Een classificatie van de kwadratische rationale functies uit iteratief oogpunt is zeer waarschijnlijk bij den huidigen stand der wetenschap omtrent de iteratie nog niet mogelijk.

II

De opmerking van Fatou, dat de iteratie van rationale functies, waarbij de correspondeerende verzameling E′ identiek is met het geheele complexe vlak, van functietheoretisch standpunt van weinig belang is, is m.i. onjuist.

P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. Bulletin de la Société Mathématique de France 1920, blz. 41.

III

De „plausible" bewijsvoering, die G. Julia geeft ter aantooning van het feit, dat de verzameling E′ bij iteratie van de functies $\varphi(z) = \frac{z^k}{z^k + 2}$ $(k = 2, 3, \ldots.)$ perfect, overal discontinu is, is onjuist.

G. Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1918, blz. 102 e.v.

IV

De door G. Julia gegeven bewijsvoering, dat in ieder punt van de verzameling E′ de rij $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... niet normaal is, is geheel overbodig.

G. Julia. l.c. blz. 99 en 100.

V

De door E. Lindelöf op blz. 122 bewezen bewering is voor uitbreiding vatbaar.

E. Lindelöf. Le Calcul des Résidus et ses applications à la théorie des Fonctions (1905), § 58.

VI

Trekt men in een willekeurig punt P van de (reëele) ellips E de normaal N_1; zij P_1 het tweede snijpunt van N_1 met E en N_2 de normaal in P_1 aan E; zij vervolgens N_3 de normaal in P_2 aan E (P_2 is het tweede snijpunt van N_2 met E) en bepaalt men aldus voortgaande N_n ($n = 1, 2, \ldots.$), dan kan men uit iteratieve overwegingen bewijzen, dat $\lim_{n\to\infty} N_n$ = korte as van E voor ieder punt P van E, mits P niet tevens op de lange as van E gelegen is.

VII

H. Grassmann bewijst dat het aantal basispunten van een bundel van algebraïsche krommen van den n^{en} graad (afgezien van de z.g. „noodzakelijke" punten) in het algemeen gelijk is aan $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ en past dit toe voor het geval $n = 3$, waarbij eenige van de basispunten bijzondere ligging hebben.

De in het Nieuw Archief voor Wiskunde uitgeoefende kritiek betreffende de toelaatbaarheid van deze toepassing is m.i. niet geheel gerechtvaardigd.

H. Grassmann. Projective Geometrie der Ebene. Zweiter Band. Ternäres. Zweiter Teil (1927), blz. 248 e.v.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reeks. Deel XV, Derde stuk, blz. 286.

VIII

De in veel leerboeken der Natuurkunde voorkomende wiskundige beschouwingen omtrent staande golven verklaren niet afdoende de in de practijk voorkomende gevallen.

IX

Het is gewenscht bij de berekening der Wiskundige Reserve voor Pensioenfondsen en voor de Lijfrentenportefeuilles van Levensverzekering-Maatschappijen rekening te houden met de zeer waarschijnlijke geleidelijke verbetering, die de levenskansen in de toekomst zullen ondergaan. Hierbij is een methode, die de veiligheidsmarge geeft door middel van een toegepaste leeftijdsverlaging te verkiezen boven een methode, die de correctie zoekt in het bezigen van een lageren rentevoet.

Dr. D. P. Moll. Het berekenen van een veilige sterftetafel voor lijfrenteniers. Het Verzekerings-Archief, jaargang V, n°. 4.

Dr. A. van Eldik. Proeve eener berekening van generatietafels en van daaruit af te leiden koopsommen voor loopende lijfrenten en van koopsommen en jaarpremiën voor uitgestelde lijfrenten. Het Verzekerings-Archief, jaargang IX, n°. 3.